Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores

Juan D. Godino
Universidad de Granada

Resumen

La investigación sobre diseño y análisis de tareas en educación matemática está siendo promovida en distintos foros y publicaciones internacionales. Constituye el núcleo central de la ingeniería didáctica y de manera más general de la metodología de investigación basada en el diseño. En este trabajo mostramos la aplicación de algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática para el diseño y análisis de tareas dirigidas a la formación matemática y didáctica de profesores. Más concretamente usamos la noción de idoneidad didáctica para proporcionar criterios para el diseño de tareas y la herramienta configuración de objetos y procesos para realizar análisis detallados de los conocimientos puestos en juego en su resolución. El análisis metodológico realizado se contextualiza en una secuencia de tareas, derivadas del experimento de observar la suma de puntos al lanzar dos dados, que pretenden desarrollar componentes del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de educación primaria sobre estocástica.

Palabras claves: formación de profesores, tareas matemáticas, enfoque ontosemiótico, conocimiento didáctico-matemático, probabilidad

Abstract

Tasks design and analysis to develop teachers' didactical-mathematical knowledge

Research on task design and analysis is being promoted in various mathematics education international forums and publications. It is the core of didactic engineering and more generally of design based research methodology. In this paper we apply some theoretical tools from the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction to the design and analysis of tasks aimed at teachers' education in mathematics and didactic of mathematics. More specifically we use the notion of didactical suitability to provide criteria for task design, and the configuration of objects and processes to analyze in detail the knowledge involved in its resolution. A sequence of tasks, derived from the experiment consisting in observing the sum of points in throwing two dice serves to contextualize the methodological analysis, which seeks to develop the stochastic knowledge for teaching of prospective primary school teachers.

Key words: teachers' education, mathematics tasks, onto-semiotic approach, didactic-mathematical knowledge, probability

1. Introducción

El diseño y análisis de tareas en educación matemática está recibiendo recientemente una atención especial a nivel internacional, como se muestra en los trabajos presentados en el "Topic Study Group 31, Task Desing and Analysis" del congreso ICME 12 (Seul, Corea, 2012), que fue continuación del TSG 34 organizado sobre el mismo tema en el congreso ICME 11 (Monterrey, México, 2008). Otro indicador del interés del tema es la convocatoria

En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 1-15). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

de un ICMI Study[1] sobre diseño y análisis de tareas, cuya conferencia inicial tendrá lugar en Oxford en 2013. Igualmente, encontramos la publicación del triple número especial sobre esta temática en la revista *Journal of Mathematics Teacher Education* (2007).

En estas reuniones y publicaciones se convoca a investigadores, profesores y expertos en el desarrollo de recursos para la enseñanza para investigar de manera sistemática sobre el diseño y análisis de tareas matemáticas. Se esperan aportaciones, apoyadas empíricamente, que subrayen los principios de diseño, los enfoques teóricos usados y proporcionen ejemplos de tareas diseñadas para promover el aprendizaje matemático. De manera específica en el TSG 31 del ICME 12 se propusieron los siguientes temas:

1. Desarrollos teóricos y prácticos que guíen el diseño y análisis de tareas.
2. Análisis de diversas aproximaciones y tradiciones que guían el diseño/análisis de tareas y de sus explicaciones teóricas.
3. Propuestas de ejemplos de análisis de tareas, que estudien las relaciones entre las tareas, el desarrollo psicológico, y el desarrollo matemático.
4. Estudios críticos de la literatura o meta-análisis del diseño y análisis de tareas.

En el TSG 34, ICME 11 (http://tsg.icme11.org/tsg/show/35) se hizo referencia a la diversidad de tipos de tareas usadas en educación matemática: problemas, tareas realistas, tareas prácticas, tareas ricas en tecnología, tareas que provocan conflictos cognitivos, secuencia de cuestiones que apoyan la comprensión conceptual, tareas rutinarias, tareas no rutinarias, tareas de aplicación, etc. Aunque este listado de tipos de tareas es muy diverso se entiende que no se trata simplemente de "cosas que hay que hacer", sino de actividades que sean cruciales para enmarcar la actividad matemática que se debe poner en juego.

Conviene tener en cuenta, no obstante, que el tema no se puede considerar como algo novedoso ya que el diseño y análisis de tareas viene siendo central en diversos enfoques teóricos como, por ejemplo, en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD, Brousseau, 1998), en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS, Godino, Batanero y Font, 2007), o en el marco de la "Educación Matemática Realista" (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005). El enfoque metodológico de la *ingeniería didáctica* (Artigue, 2011), basada en la TSD, y de manera más general las *investigaciones basadas en el diseño* (IBD, Kelly, Lesh y Baek, 2008), conceden un papel esencial a la selección y el análisis de las situaciones-problemas/tareas como punto de partida de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La metodología de aprendizaje basado en proyectos (Batanero y Díaz, 2004; 2011; MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011) constituye otra iniciativa en la misma dirección que el diseño y análisis de tareas, en este caso para la educación estadística.

Entendiendo el diseño de tareas en el sentido amplio que proponen Watson y Mason (2007, p. 206), la distinción entre este campo y la investigación basada en el diseño se diluye:

"Tarea en el sentido amplio incluye la actividad que resulta cuando los aprendices se comprometen con una tarea, incluyendo cómo alteran la tarea con el fin de darle sentido, las maneras en que el profesor dirige y reorienta la atención del aprendiz hacia los aspectos que surgen, y cómo los aprendices son estimulados para reflexionar o aprender a partir de la experiencia de comprometerse en la actividad iniciada por la tarea".

En este trabajo vamos a presentar algunas nociones y herramientas analíticas del EOS que tienen utilidad en el diseño y análisis de tareas, aplicándolas a un proceso de formación inicial de futuros profesores de educación primaria. Describiremos una secuencia de tareas/cuestiones, derivadas de un problema sobre la suma de puntos al lanzar dos dados, que ha sido usada para profundizar en la faceta epistémica del conocimiento didáctico-

[1] https://sites.google.com/site/icmistudy22/home

matemático (Godino, 2009) en un curso orientado a la formación didáctico-matemática de futuros maestros sobre estocástica.

En la sección 2 describimos brevemente el marco teórico utilizado; en la sección 3 presentamos el contexto formativo y la secuencia de tareas derivadas de la experiencia de enseñanza; en la sección 4 aplicamos la "guía para el reconocimiento de objetos y procesos", desarrollada en el marco del EOS al análisis de la actividad estocástica desplegada en la realización de las tareas propuestas en la experiencia. En la sección 5 formulamos cuestiones/tareas que se orientan al desarrollo de otras facetas del conocimiento didáctico-matemático de los profesores. Finalmente, en la sección 6 argumentamos sobre la necesidad de ampliar la atención desde las tareas hacia el análisis de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio matemático y didáctico.

2. Marco teórico

En el marco del EOS se ha introducido la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2011) como criterio sistémico para el diseño, implementación y valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicha idoneidad supone la articulación coherente de seis idoneidades parciales: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional. Para cada una de estas facetas o dimensiones, en el marco teórico se distinguen diversos componentes e indicadores empíricos, que expresan un conjunto de principios didácticos, concordantes con otros marcos teóricos usados en educación matemática.

Tanto en el EOS, como en la TSD y la TAD la noción de situación-problema, o tarea (no rutinaria), desempeña un papel central, ya que se asume una visión antropológica para la matemática, la cual se concibe como una actividad ligada a la resolución de determinadas tareas problemáticas[2]. Son las situaciones-problemas/ tareas las que dan sentido a la matemática, entendidas como sistema de estructuras conceptuales, social o culturalmente compartidas. Debido a esta relevancia, el primer componente de la *idoneidad epistémica* de un proceso de estudio matemático se refiere a los problemas/ tareas, e incluye los siguientes indicadores de idoneidad:

- En el proceso de estudio se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.
- Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).

El EOS propone como criterios básico de idoneidad para las tareas matemáticas planteadas con fines de instrucción la representatividad de las mismas dentro de un universo o conjunto de posibles tareas, cuya resolución permita dar sentido a los objetos matemáticos pretendidos. Además, la resolución[3] de estas situaciones-problemas deberá poner en juego y dar sentido al uso de diversos sistemas de representación, así como al sistema de reglas conceptuales, proposicionales, procedimentales y argumentativas cuyo dominio progresivo por los estudiantes sería el objetivo de la enseñanza. Así mismo, la secuencia de tareas debe establecer conexiones con los objetos de los diversos bloques temáticos y las aplicaciones a otras disciplinas (idoneidad ecológica).

La valoración de la idoneidad epistémica de una tarea requerirá realizar un análisis a priori detallado de su resolución, para identificar los objetos centrales que se ponen en juego, y reconocer las variables didácticas de la tarea que permitan generar otras tareas interconectadas, así como prever los conflictos potenciales en el trabajo con la misma[4]. Esta

[2] Para nosotros una tarea (no rutinaria, sino problemática) será la actividad de indagación realizada en el seno de un sistema didáctico (estudiantes, profesor, medio) para dar respuesta a una cuestión.

[3] Dicha resolución requiere una compleja dialéctica profesor - estudiante (que en el marco teórico se conceptualiza como la dualidad institucional - personal del conocimiento matemático).

[4] Ver ejemplo de aplicación a la evaluación del conocimiento de los profesores en Arteaga et al. (2012)

información será de utilidad en las fases de implementación de las tareas y evaluación de los aprendizajes para diseñar estrategias de institucionalización – personalización de los conocimientos matemáticos. Una herramienta aportada por el EOS para realizar este análisis es la noción de configuración de objetos y procesos (Figura 1), que puede aplicarse tanto desde el punto de vista institucional o epistémico, como personal o cognitivo.

Como se propone en Godino (2009), esta herramienta, complementada con una colección de enunciados de cuestiones y tareas descritas en dicho trabajo, puede ser usada para evaluar y desarrollar de manera sistemática los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor. Con las necesarias adaptaciones, dichas cuestiones y tareas pueden ser usadas para: (i) la valoración del conocimiento y competencias iniciales en procesos formativos para el desarrollo de competencias profesionales, (ii) como "cuestionario" de auto-evaluación y reflexión del profesor sobre aspectos relevantes de su propia práctica, y (iii) como instrumento de valoración interna o externa de un proceso de estudio implementado.

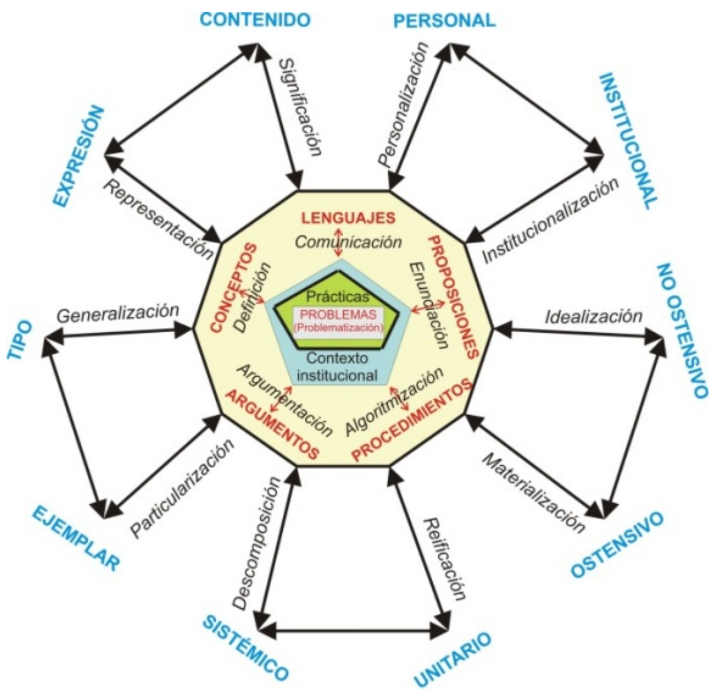

Figura 1: Configuración de objetos y procesos matemáticos

3. Formación de profesores sobre estocástica

En este apartado ejemplificamos las ideas anteriores en un caso práctico referido a la formación didáctico-matemática de profesores de educación primaria sobre estocástica elemental, que ha sido analizada previamente en Batanero, Godino y Roa (2004) y Batanero y Díaz (2012).

3.1. Contexto formativo

Describimos, en primer lugar, un *ciclo formativo* que estamos experimentando en la formación didáctico-matemática de futuros profesores, que incluye los siguientes tipos de situaciones – problemas/tareas:

1) Resolución de problemas/tareas de acuerdo a un modelo didáctico socio - constructivo – interaccionista; en particular problemas que históricamente tuvieron un papel en la creación de conocimiento matemático.

2) Reflexión epistémico - cognitiva sobre los objetos y significados[5] puestos en juego en la resolución de problemas/tareas, incluyendo ítems y respuestas en pruebas de evaluación.

3) Análisis de interacciones en la clase de matemáticas, orientado al reconocimiento de actos y procesos de significación.

4) Análisis de recursos para la enseñanza, incluyendo las orientaciones curriculares, libros de texto, material manipulativo y tecnológico.

5) Análisis del sistema de normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático.

6) Valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio matemático.

Para cada una de estas situaciones se implementa una trayectoria didáctica que contempla las siguientes fases o momentos: 1) Presentación de las consignas; 2) Exploración personal; 3) Trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida; 4) Presentación y discusión; 5) Institucionalización por el formador, explicitando los conocimientos pretendidos; 6) Estudio personal de documentos de trabajo seleccionados, apoyado por las tutorías individuales y grupales.

3.2. Secuencia de tareas derivadas del lanzamiento de dos dados

En este apartado describimos un ejemplo de proyecto (Lanzamiento de dos dados) que venimos usando en la formación de profesores de educación primaria para profundizar en el conocimiento común, conocimiento avanzado y algunos aspectos relevantes del conocimiento especializado del contenido (Hill, Ball, y Schilling, 2008; Godino, 2009), en este caso referido a las nociones estocásticas elementales. En la Figura 1 se incluye el enunciado del proyecto a los profesores en formación (analizado con más detalle en Godino y Batanero, 2011).

Raquel es una maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus alumnos asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

"Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, ó 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha.

1. ¿Qué prefieres ser jugador A o B?
2. Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes. ¿Quién ha ganado más veces A o B?
3. ¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más? ¿Por qué?

Actividad 2. Recogida de datos de la clase:

A continuación Raquel recoge en la Tabla 1 los datos de las 10 parejas de alumnos que hay en la clase y les pide construir un diagrama de barras con estos datos.

[5] Los objetos y significados matemáticos sobre los que se orienta la reflexión se describen en Godino, Batanero y Font (2007), así como los supuestos antropológicos que sirven de base al "enfoque ontosemiótico". Los estudiantes son introducidos progresivamente en el reconocimiento de tales objetos y procesos, así como a la perspectiva plural y relativista del significado de los objetos matemáticos.

Tabla 1: Resultados al lanzar dos dados

	Suma de puntos	Numero veces	Frecuencia relativa
Gana B	2	2	0,02
	3	9	0,09
	4	12	0,12
	5	20	0,2
Gana A	6	7	0,07
	7	12	0,12
	8	14	0,14
	9	9	0,09
Gana B	10	8	0,08
	11	4	0,04
	12	3	0,03

Raquel plantea a los niños las siguientes preguntas:

4. ¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B?

5. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

Figura 2. Proyecto planteado a los estudiantes

La formación matemática y didáctico-matemática de los futuros maestros se contempla mediante el planteamiento, resolución y discusión de las siguientes tareas:

Tarea 1: ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego? Determina la probabilidad teórica que tienen de ganar los jugadores A y B.

Tarea 2: Si realizáramos 100 tiradas, ¿con cuánta frecuencia se espera que gane A y B? Prepara una tabla de frecuencias relativas con los 100 datos experimentales obtenidos y un diagrama de frecuencias relativas. ¿Quién ha ganado más veces A o B? Compara estos resultados con los resultados esperables teóricamente. ¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces el jugador A como era de esperar?

Tarea 3: ¿Qué puede hacer la maestra en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos?

Tarea 4: ¿Qué conocimientos matemáticos se ponen en juego en la resolución de las tareas 1 a 3?

La realización de las tareas 1 y 2 ponen en juego conocimientos matemáticos “comunes y avanzados” sobre contenidos estocásticos elementales; en primer lugar los de aleatoriedad, experimento aleatorio, suceso, espacio muestral y resultado. Como se muestra en la tabla 1 el jugador A gana si sale suma igual a 6, 7, 8 y 9. Dicha suma constituye una variable aleatoria, que lleva asociada una distribución de probabilidad. De los 36 valores posibles en el experimento, la variable aleatoria “suma de los puntos” en 20 casos favorece a A, luego la probabilidad de que gane A es *P(A)* =20/36 = 0,555. El jugador B gana en los restantes casos, por tanto gana en 16 casos de los 36; *P(B)* = 16/36 = 0,445. En consecuencia, tiene ventaja el jugador A. De acuerdo con la convergencia estocástica, se debe esperar que en largas series de jugadas el jugador A gane más veces que el B.

En la muestra de 100 lanzamientos proporcionada por la maestra el jugador A ha ganado en 42 casos, mientras que el B en 58. Aunque, teóricamente se espera que las frecuencias relativas de un experimento aleatorio converjan al valor de la probabilidad del suceso correspondiente esta “tendencia” o “convergencia” es “lenta” y presenta fluctuaciones en series cortas. Una muestra de tamaño 10, incluso 100, es bastante pequeña para que haya poco riesgo de “perder” en este juego, aunque en principio se tenga ventaja.

Las tareas 3 y 4 ponen en juego conocimientos especializados sobre probabilidad, los cuales son necesarios para una gestión adecuada de la situación de enseñanza. La tarea 3 propone a los profesores en formación que generen nuevas tareas relacionadas con el experimento aleatorio. Estas pueden consistir en construir el espacio muestral del experimento y las respectivas probabilidades de los sucesos, lo cual permitirá de manera racional justificar que el jugador A tiene ventaja, o bien usar simuladores que permitan observar de manera intuitiva cómo es la convergencia estocástica de las frecuencias relativas hacia las probabilidades (ley empírica de los grandes números) (Figura 3).

Tabla 1: Distribución de probabilidad de la suma de puntos al lanzar dos dados

Suma de puntos	Casos posibles	Probabilidad
2	(1,1)	0,028
3	(1,2), (2,1)	0,056
4	(1,3),(2,2),(3,1)	0,083
5	(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)	0,111
6	(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)	0,139
7	(1,6),(2,5),(3,4),(4,3), (5,2), (6,1)	0,167
8	(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)	0,139
9	(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)	0,111
10	(4,6), (5,5), (6,4)	0,083
11	(5,6), (6,5)	0,056
12	(6,6)	0,028

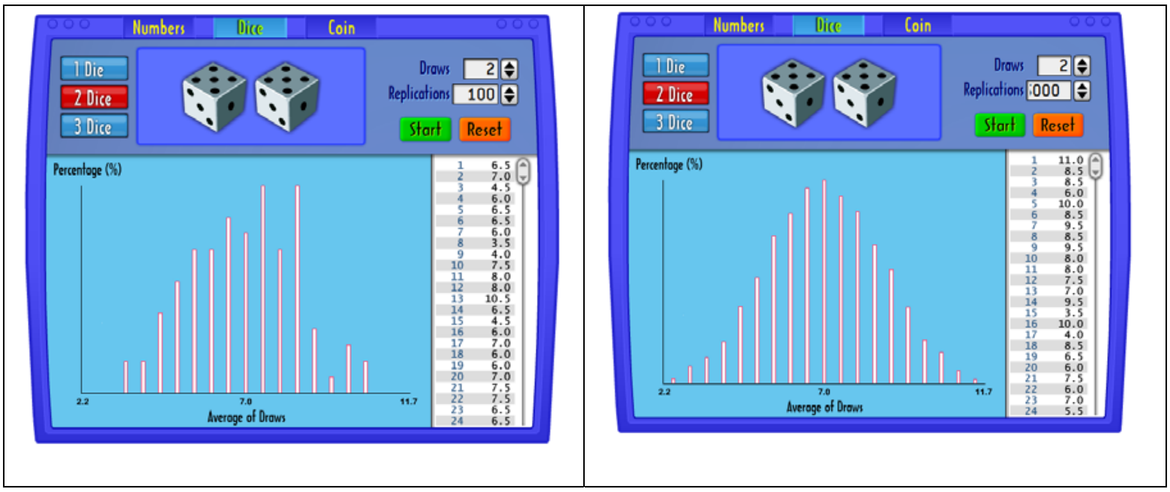

Figura 3. Lanzamiento de dos dado 100 y 10000 veces (Simulador disponible en, http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=159)

La tarea 4 propone una reflexión sistemática sobre los tipos de objetos matemáticos involucrados y los significados específicos con los cuales se usan. Tanto en esta tarea como en tarea 3 se involucra la faceta epistémica (conocimientos institucionales) del conocimiento especializado del contenido.

4. Análisis de la secuencia de tareas

El reconocimiento y gestión de los conocimientos puestos en juego en la realización de las tareas requiere que el futuro profesor, tras la realización de las actividades, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución, y los significados que se les atribuye en el contexto específico. La Tabla 2 incluye una posible "Guía para el reconocimiento de objetos y significados" (GROS), que se proporciona al futuro maestro para guiarle en este análisis y que acá es aplicada, como ejemplo ilustrativo, al proyecto "Lanzamiento de dos dados".

Tabla 2: Objetos y significados en la situación (aplicando la guía GROS)[6]

Objetos:	Significados (referencia / uso):
Situaciones – problemas - Determinar si un juego de azar (suma de puntos al lanzar dos dados) es equitativo - Analizar los datos obtenidos en una experiencia empírica con el juego	 - Desarrollo de competencias de cálculo de probabilidades - Reflexión sobre intuiciones probabilísticas en situaciones de juegos de azar. - Desarrollo de competencias de análisis de datos - Reflexión sobre las propiedades de la convergencia en pequeñas muestras
Elementos lingüísticos - Términos y expresiones verbales	 - Palabras con significado matemático; por ejemplo, equitativo, probabilidad, resultados
- Tabla de doble entrada - Tabla de valores, probabilidades/ frecuencias - Diagrama de barras - Icono	- Para enumerar los posibles resultados en dos dados o espacio muestral compuesto - Distribuciones de probabilidad/ frecuencia - Distribuciones de probabilidad/ frecuencia - Para representar dados físicos en el simulador
Conceptos – definición - Experimento aleatorio - Espacio muestral - Probabilidad - Variable aleatoria - Conjunto de valores de la variable - Distribución de probabilidad triangular) - Juego equitativo	 - Lanzar dos dados y observar el resultado - 36 pares de valores posibles en los dos dados - proporción de casos favorables entre posibles; número al que tiende la frecuencia en una serie larga; grado de creencia en que un suceso ocurra - Variable cuyos valores dependen del resultado del experimento; valor de la suma de los datos - Conjunto de las 11 sumas posibles al lanzar dos dados - Sistema formado por los valores posibles de la suma de puntos y sus probabilidades - Juego de azar en la que los jugadores tienen igual esperanza matemática de ganar

[6] No se incluye un análisis exhaustivo de los objetos y significados puestos en juego en la realización del proyecto. El análisis se puede ampliar teniendo en cuenta, no solo los procesos de significación, sino otros tipos de procesos descritos en el EOS (generalización – particularización; materialización – idealización; personalización – institucionalización; etc.). Se incluyen ejemplos de estos análisis en Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2010); Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011).

- Variable estadística - Distribución de frecuencias	- Variable que toma los valores de la suma de puntos en la muestra de 100 experimentos - Sistema formado por los valores de la suma de puntos en el experimento y sus frecuencias en 100 lanzamientos

Tabla 2: Objetos y significados en la situación (aplicando la guía GROS) continuación

Objetos:	Significados (referencia / uso):
Propiedades - Simetría del dado, equiprobabilidad - Regla de la unión - Regla de Laplace - Juego equitativo - Convergencia - Oscilaciones de las frecuencias en pequeñas muestras	- No hay razón para preferir un caso sobre otro - La suma de todas las probabilidades es la unidad - La probabilidad es el cociente entre casos favorables y posibles - La esperanza matemática de cada jugador es idéntica - Al crecer el número de ensayos la frecuencia relativa se va estabilizando; las oscilaciones son cada vez menores, hay una tendencia - La convergencia es lenta; hay gran fluctuación en pequeñas muestras
Procedimientos - Construcción del espacio muestral	- Enumeración sistemática de las pares de valores posibles y sus sumas
- Tabulación de frecuencias y probabilidades	- Construcción de las distribuciones de frecuencias / probabilidades, expresadas numéricamente
- Cálculo de probabilidades	- Cálculo de probabilidades de cada jugador aplicando la regla de Laplace - Estimación de probabilidades mediante las frecuencias
- Elaboración de diagramas de barras	- Representación de las distribuciones de frecuencias y de probabilidades
- Comparación de frecuencias y probabilidades en un gráfico cartesiano	- Estudiar las diferencias entre frecuencias y probabilidades
Argumentos - Convención social	- Para justificar que todas las caras del dado son equiprobables (no hay razones para suponer que las caras no tengan simetría)
- Análisis de ejemplos	- Para justificar que A no haya ganado en la serie de 100 lanzamientos
- Deducciones informales	- Para justificar que el juego no es equitativo - Para deducir la apuesta que lo convertiría en equitativo
- Simulación del experimento	- Uso de la convergencia para “mostrar” empíricamente una propiedad

La reconstrucción de la configuración de objetos y significados, como la incluida en la Tabla 2, para las distintas situaciones-problemas usadas en un proceso de estudio es necesaria para que el profesor pueda gestionar las interacciones en el aula, y decidir posibles institucionalizaciones de los conocimientos puestos en juego. La confrontación de este análisis con los resultados de las investigaciones previas y la propia experiencia docente permitirá prever potenciales conflictos de significado que deberán ser tenidos en cuenta. Las investigaciones previas muestran algunos de estos conflictos, por parte de futuros profesores en actividades similares. Por ejemplo, Arteaga (2011) muestra los siguientes conflictos en una tarea relacionada con el análisis de la aleatoridad: Confusión frecuencia- probabilidad, sesgo de equiprobabilidad, creencia en la ley de los pequeños números, errores en razonamiento proporcional, errores en la elaboración de las gráficas, confundir la variable dependiente e independiente, confundir frecuencia y valor de la variable. La identificación de los conflictos potenciales que los estudiantes pueden tener en el estudio del tema requiere la revisión de la literatura correspondiente sobre las concepciones (correctas o incorrectas), formas de conocimiento y tipos de comprensiones (Even y Tirosh, 2002) de los estudiantes[7] sobre los distintos objetos matemáticos en la situación. La guía GROS se ha aplicado también como ayuda para analizar sistemáticamente las configuraciones cognitivas iniciales y finales de los futuros profesores (ver ejemplo en Arteaga et al., 2012).

El análisis se puede completar con la identificación de los procesos matemáticos intervinientes (especialmente, particularización – generalización; materialización – idealización) (Font y Godino, 2008; Font, Godino y Gallardo, 2013). Otras actividades de análisis didáctico se describen en Godino y Batanero (2011).

5. Desarrollo de otras facetas del conocimiento especializado del contenido

En el apartado anterior hemos presentado y analizado tareas cuyo objetivo es desarrollar la faceta epistémica del conocimiento especializado del contenido, especialmente la generación de tareas para la enseñanza y el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos implicados en la realización de las prácticas matemáticas. Mediante la previsión de conflictos potenciales se aborda también aspectos de la faceta cognitiva del conocimiento especializado del contenido (errores, dificultades de los estudiantes).

En este apartado enunciados algunas nuevas cuestiones/tareas didáctico-matemáticas que atienden a las facetas interaccional y mediacional. Será necesario analizar cómo interaccionan el profesor con los estudiantes, y estos entre sí, a propósito de cuestiones específicas relacionadas con las competencias matemáticas que se desean desarrollar en los estudiantes. Partiendo de los significados iniciales de los estudiantes habrá que observar el progresivo acoplamiento de dichos significados a los pretendidos por el profesor, para lo cual la identificación de los momentos conflictivos y de negociación de significados deberá ser de atención preferente. Habrá que ver si el problema ha sido transferido y asumido por los estudiantes, si los conceptos, propiedades, procedimientos y argumentaciones que se ponen en juego concuerdan con los pretendidos. La actividad formativa de los profesores con relación al análisis de las interacciones en el aula y el uso de recursos (faceta del conocimiento especializado del contenido con relación a la enseñanza) podemos concretarla en las siguientes tareas, las cuales suponen que los profesores en formación las abordan después de haber sido implementado u observado el proceso de estudio correspondiente[8].

Tarea 5. ¿Cuáles han sido los papeles asumidos por el profesor y los estudiantes? ¿Qué conocimientos han emergido como consecuencia de la actividad matemática de los estudiantes y cuáles han sido institucionalizados por el profesor?

Tarea 6. ¿Qué conflictos de significado han tenido lugar y cómo han sido abordados por el profesor y los estudiantes? ¿Cómo y cuándo han sido identificados los conflictos?

Tarea 7. ¿Cuáles han sido los recursos materiales usados y cuál ha sido su papel en la enseñanza y aprendizaje?

---

[7] Este complejo multidimensional que en la literatura de investigación se describe como "conocimiento y comprensión", concepciones, competencias, …, se describe en el EOS con la noción de "configuración cognitiva".

[8] En la siguiente dirección de YouTube encontramos un video de una clase en la que un profesor realiza el experimento de observar la suma de puntos al lanzar dos dados: https://www.youtube.com/watch?v=MoW2Ii6P1Zw&feature=related

En Godino y Batanero (2011) se analizan estas y otras cuestiones relacionadas y se propone una “Guía para el reconocimiento de actos y procesos de significación”, utilizada en nuestra experiencia de formación inicial de maestros.

Otra faceta del conocimiento especializado del contenido matemático se refiere al tratamiento que se da al tema, en este caso a las nociones estocásticas elementales, en las orientaciones curriculares, así como las conexiones que se pueden establecer entre dicho tema y otras partes de las matemáticas, y también con otras disciplinas (faceta ecológica del conocimiento y la instrucción matemática en el marco del EOS). La evaluación y desarrollo de dichos conocimientos se puede hacer mediante el planteamiento de las siguientes cuestiones:

Tarea 8. ¿Qué elementos del currículo son abordados mediante la realización de las tareas propuestas (fines, objetivos)? ¿Qué conexiones se pueden establecer con otros temas del programa de estudio, u otras materias, mediante la realización de las tareas o de variantes de las mismas? ¿Qué factores de índole social, material, o de otro tipo, condicionan la realización de las tareas?

La toma de conciencia o reconocimiento, por parte del profesor, de la trama de normas (reglas, hábitos, etc.) que hacen posible y condicionan la enseñanza y el aprendizaje matemático es un componente clave del conocimiento especializado del contenido. Desde el nivel más general de las directrices curriculares, fijadas con frecuencia con decretos oficiales, hasta los comportamientos de cortesía y respeto mutuo entre profesor y alumnos, los procesos de enseñanza y aprendizaje están regulados por normas, convenciones, hábitos, costumbres, tradiciones, etc.

En Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) se analiza esta dimensión normativa de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ampliando las nociones de contrato didáctico (Brousseau, 1988) y norma socio-matemática (Cobb y Bauersfled, 1995), y proponiendo una tipología de normas apoyada en la aplicación del EOS. “Una empresa prioritaria del análisis didáctico debe ser el estudio de esta “dimensión normativa” para, por un lado, poder describir con mayor precisión el funcionamiento de los procesos cognitivos e instruccionales normados y, por otro, incidir en aspectos de la dimensión normativa (modificándolos si fuera necesario) para facilitar la mejora de dichos procesos de estudio de las matemáticas” (Godino et al, 2009, p. 60).

El desarrollo de este componente del conocimiento especializado se puede promover mediante la realización de tareas como la enunciada a continuación.

Tarea 9. ¿Cuáles son las principales normas que intervienen en las distintas facetas del proceso de estudio y cómo afectan al desarrollo del mismo?

En Godino y Batanero (2011) se aborda el reconocimiento de normas en el ejemplo del proceso formativo basado en la realización del proyecto de “lanzamiento de dos dados”. El origen de unas normas está en la propia Didáctica de la Matemática y ciencias afines (psicopedagogía), en particular los “principios socio-constructivos – instruccionales”, en el Departamento que fija el programa de estudios, la administración educativa que fija un número de créditos para la asignatura. Unas normas se aplican en el momento de planificación de la actividad (elección de la situación – problema), otras en la implementación o evaluación (normas interaccionales). Algunas normas permiten un cierto grado de libertad en su aplicación (normas interaccionales derivadas del modelo didáctico) mientras que otras dejan poca o ninguna libertad al profesor (número de créditos asignados a la asignatura; la manera de justificar la solución del problema).

Los análisis precedentes tienen una orientación descriptiva (¿qué puede ocurrir, o qué ha ocurrido?,...), y explicativa (¿por qué han actuado del tal modo el profesor y los estudiantes?,...). Estos análisis deben proporcionar información para emitir un juicio valorativo sobre el proceso de estudio. En el caso de que la formación se realice en estrecha relación con la fase de prácticas en las escuelas o institutos, se trate de la formación de profesores en ejercicio, o se disponga de grabaciones audio-visuales de lecciones planificadas e impartidas en las escuelas será posible focalizar los procesos de evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático aplicando la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2011).

Dado un proceso de estudio "vivido" por un profesor (o del que se dispone de una descripción suficiente) la promoción y evaluación de su competencia profesional se puede hacer mediante la realización de la siguiente tarea:

Tarea 10. ¿Cómo valorarías la idoneidad didáctica del proceso? ¿Cómo se puede mejorar el proceso de estudio?

Se supone que el profesor está familiarizado con las dimensiones, componentes e indicadores empíricos de la noción de idoneidad didáctica, por lo que deberá emitir juicios razonados sobre la idoneidad epistémica, cognitiva – afectiva, instruccional y ecológica. En Godino y Batanero (2011) se aborda la valoración de la idoneidad didáctica del proceso formativo basado en la realización del proyecto de "lanzamiento de dos dados", y el reconocimiento de aspectos del mismo cuyo cambio aumentaría dicha idoneidad.

6. Reflexiones finales: De las tareas a la idoneidad didáctica

Aunque la selección y adaptación de tareas es un elemento clave de los procesos de estudio matemático, sin embargo, fijar la atención solo en las tareas es claramente insuficiente. Las tareas están destinadas a ser usadas por un profesor usualmente en un contexto de aula, de manera que es necesario tener en cuenta una secuencia de momentos didácticos. La tarea puede ser resuelta por el profesor y mostrada a los estudiantes para que aprendan la manera de resolver ese tipo de tareas; o por el contrario la tarea es presentada para que los estudiantes la asuman como propia, exploren posibles soluciones, las formulen, comuniquen y validen.

Sin duda la calidad de los aprendizajes alcanzables según estas alternativas es bien diferente. En consecuencia, nos parece necesario ampliar el foco de atención de la investigación desde las tareas matemáticas a las situaciones didáctico-matemáticas, como se indica en la Figura 2. En dicha figura también se indica la necesidad de adoptar una perspectiva más amplia, como es la aportada por la ingeniería didáctica, entendida como equivalente a las investigaciones basadas en el diseño (Godino et al, 2013). Así mismo, se debe progresar desde posiciones descriptivas – explicativas hacía un planteamiento normativo que tenga en cuenta principios didáctico – matemáticos sobre los cuales existe un consenso en la comunidad de educación matemática. Estos principios están incorporados en los indicadores empíricos de idoneidad didáctica sintetizados en Godino (2011).

El foco de atención en el diseño de las tareas debe orientarse a mostrar cómo la realización de las mismas influye o determina el aprendizaje matemático, el cual depende de múltiples factores, no solo de las tareas matemáticas seleccionadas. Por ello la herramienta "configuración de objetos y procesos" que ha desarrollado el EOS se revela como un recurso útil ya que ayuda a identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego, prever conflictos potenciales y en consecuencia, tomar decisiones sobre estrategias instruccionales.

El uso de recursos materiales y tecnológicos en el diseño e implementación de tareas para el estudio matemático es también un componente clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje, como se reconoce en las directrices curriculares y los resultados de investigaciones didácticas. Este componente está contemplado en el EOS desde un punto de vista epistemológico: tales medios son concebidos como "objetos que intervienen en la práctica matemática", y por tanto, hacen posible la práctica al tiempo que la condicionan.

Así, en el caso del proyecto "lanzamiento de dos dados" se usan dos dados físicos para realizar efectivamente el experimento y los resultados se registran en las matrices de datos de una hoja de cálculo; además, se requiere usar un simulador del experimento para poder apreciar la convergencia estocástica de las frecuencias relativas a las respectivas probabilidades. El discurso teórico requerido para enunciar las definiciones y proposiciones (p. e, la ley de los grandes números) es apoyado ostensivamente por las visualizaciones de los diagramas de barras de las distribuciones de frecuencias y probabilidades y el dinamismo de las simulaciones probabilísticas.

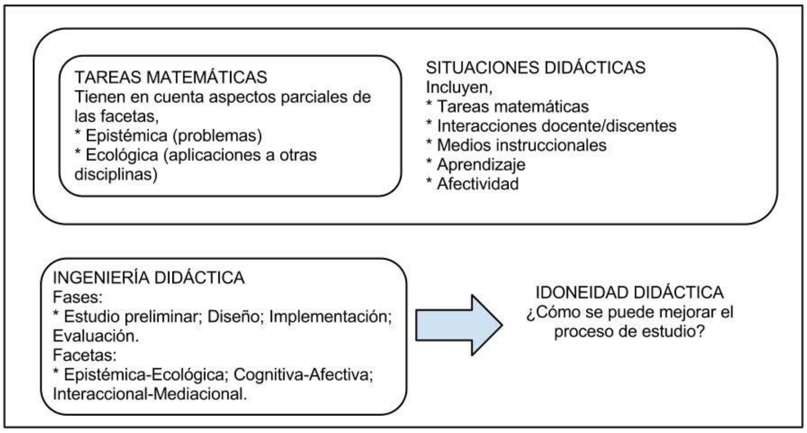

Figura 2. De las tareas a la idoneidad didáctica

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), y EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC).

Referencias

Arteaga, P. (2011). Evaluación de conocimientos estadísticos y conocimientos didácticos sobre estadística en futuros profesores.Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G.R. y Gea, M. (2012).Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educação Matemática y Pesquisa 14* (2), 279-297

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck y F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 225-237). Grenoble: La pensée sauvage.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. ISBN 84-699-4295-6. (Disponible en Internet,

www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm)

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-163). Zaragoza: ICE

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos.* Departamento de Didáctica de la Matemática. www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm

Batanero, C. y Díaz, D. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics 3* (1), 3-13

Batanero, C., Godino, J. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of statistics Education 12* (1).

Brousseua, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), 309-336.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Even, R. y Tirosh, T. (2002). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical leaning. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 219-240). London: Lawrence Erlbaum y NCTM.

Font, V. y Godino, J. D. (2008). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa 8* (1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics, 82:97–124.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2011). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 9-33). Melilla: Facultad de Humanidades y Educación.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *Proceedings of the CERME 8*, Turkey.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2): 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias,* 27(1), 59–76.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400

Kelly, A. E., Lesh, R. A., y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). *Handbook of design research in methods in education.Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York, NY: Routledge.

MacGillivray, H. y Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint*

ICMI and IASE study (pp. 109-120). New York: Springer.

Watson, A, y Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10: 205-215.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(4), 287-307.