PABLO BELTRÁN-PELLICER

EVALUACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DE AZAR Y PROBABILIDAD EN TERCER CURSO DE ESO

TRABAJO FIN DE MÁSTER

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DIRIGIDO POR LOS DOCTORES

JUAN D. GODINO Y GUSTAVO R. CAÑADAS

GRANADA, JUNIO 2016

Para citar,

Beltrán-Pellicer, P. (2016). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza de azar y probabilidad en tercer curso de ESO*. Trabajo Fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

RESUMEN

La idoneidad didáctica es una herramienta que nace en el seno del Enfoque Ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática (EOS) para evaluar el grado de adecuación de un proceso de enseñanza-aprendizaje. Permite reflexionar en torno a la implementación de secuencias didácticas, identificando sus fortalezas y debilidades y mostrando el camino para la innovación y la mejora.

El trabajo comienza considerando la unidad didáctica objeto de estudio, la correspondiente al azar y la probabilidad en 3º de ESO, y revisando investigaciones de otros autores en torno a las seis facetas en que se descompone la idoneidad didáctica. De esta forma, se sintetizan aspectos epistémicos, cognitivos, afectivos, interaccionales, mediacionales y ecológicos. A partir de este análisis, se particularizan los indicadores de la idoneidad didáctica y se procede a la implementación, identificando a partir de la observación hechos didácticos significativos (HDS).

La síntesis de los HDS proporciona una descripción detallada de la implementación, lo que permite valorar la idoneidad y proponer mejoras para el diseño de la unidad, así como identificar compromisos entre las diferentes facetas que la componen.

AGRADECIMIENTOS

Quiero comenzar agradeciendo la dedicación que han mostrado mis tutores, guiándome en la realización de este trabajo. Ha sido una gran satisfacción personal el poder contar desde el inicio del curso académico con el apoyo y la guía de Juan D. Godino.

Tampoco debo olvidarme de todos los profesores del máster de la Universidad de Granada, gracias a quienes he podido crecer en el campo de la didáctica de las matemáticas. En especial, dado que este estudio se centra en una unidad de probabilidad, quiero mencionar las sugerencias e indicaciones de Carmen Batanero.

Como siempre, la realización de un trabajo de estas características supone un esfuerzo importante, que nunca es individual, sino compartido con familia y amigos. Sara, Arturo y Alonso saben que les he tenido que robar parte de su tiempo. A ellos se lo dedico.

TABLA DE CONTENIDO

1 INTRODUCCIÓN

Consideremos un profesor que, a principio de curso, elabora la programación didáctica de la materia. Más adelante, implementa las sesiones planificadas y desea mejorar el diseño de cada unidad para el siguiente curso. Sin una observación sistemática ni una reflexión guiada, el profesor se encuentra con la difícil tarea de evaluar un complejo sistema repleto de variables, muchas de ellas desconocidas o imposibles de cuantificar.

La ingeniería didáctica se postula como una metodología de diseño que proporciona una tecnología, entendida como una serie de técnicas y procedimientos, a partir de conocimientos didáctico-matemáticos de carácter científico, para abordar problemas de investigación aplicada. Las cuestiones de investigación que se abordan usualmente con la ingeniería didáctica son el diseño de secuencias didácticas y el análisis de variables didácticas.

Desde el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012) se ha desarrollado el concepto de idoneidad didáctica (Godino, 2013), herramienta que permite concretar los conocimientos científicos didáctico-matemáticos en grupos de indicadores específicos, uno para cada faceta del proceso de enseñanza-aprendizaje: epistémica, cognitiva, interaccional, afectiva, mediacional y ecológica. Estos indicadores, identificados inicialmente con un propósito general, pueden ser particularizados a la unidad objeto de estudio teniendo en cuenta las investigaciones realizadas en el campo de la educación matemática.

La concreción de los indicadores de idoneidad orienta la reflexión del docente o del investigador acerca de la adecuación del diseño de una secuencia didáctica, de forma que resulta posible el planteamiento de mejoras e innovaciones justificadas para la implementación en ciclos sucesivos. La metodología propia de la ingeniería se adapta a las circunstancias propias del grupo de aula, que puede desembocar en que, ante diseños idénticos, el análisis de la implementación difiera en la valoración de alguna de las facetas.

El tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en Aragón tiene asignado un tiempo lectivo de tres horas semanales, en lugar de las cuatro horas que disfrutan en otras comunidades autónomas. La cuestión es que los contenidos que estipula la normativa curricular son los propios de una materia con un tiempo lectivo de cuatro horas semanales. La elección de 3º ESO para este trabajo responde a la necesidad de disponer diseños eficientes, en primer lugar, desde el punto de vista mediacional y ecológico, pero sin perder de vista la trayectoria epistémica óptima de presentación de los sistemas de prácticas y de los objetos matemáticos. De esta forma, se plantea el diseño de la unidad tal y como aparece en la programación del departamento, con el número de sesiones que le corresponde para atenerse al cómputo global. El enfoque de la ingeniería es, pues, naturalista, valorando en primer lugar las condiciones iniciales, que es donde se enmarca este estudio. Como resultado final, se obtiene una propuesta de mejoras, que podrán ponerse en marcha en ciclos sucesivos.

La probabilidad y la estadística, por otro lado, forman un bloque que suele dejarse, en el mejor de los casos, para el final. Cuando se trabaja en clase, se trata de forma rápida y sin profundizar, siendo habitual que gran parte del alumnado llegue a 3º y 4º de ESO con intuiciones y creencias erróneas sobre fenómenos en los que interviene el azar. Estas creencias comienzan a formarse ya en la más temprana infancia, debido a que las situaciones probabilísticas no proporcionan la misma realimentación, en términos de información que pueda ser procesada correctamente para acumular experiencia, que situaciones en torno a otras áreas, como geometría. Ejemplo de ello son los juegos de mesa en los que intervienen dados. Si un niño juega durante una tarde y no obtiene casi ningún 6 seis, puede concluir erróneamente que es más difícil obtener un 6 que cualquier otro número del dado. Más adelante, los términos de uso común "posible", "seguro", "probable", "imposible", "improbable" van encontrando un hueco en el lenguaje de estos niños y adolescentes, de manera que de forma inconsciente la probabilidad forma parte la vida cotidiana. Finalmente, conviene observar que el razonamiento probabilístico es importante, pues permite tomar decisiones óptimas en contextos de incertidumbre, siendo una competencia que demuestra su utilidad en campos extra-matemáticos.

El presente trabajo comienza realmente en el segundo capítulo, en el que se plantea el problema que nos ocupa, definiendo los objetivos y las preguntas que motivan la investigación. A continuación, se describe el marco teórico y la metodología que se va a seguir para poder dar respuesta a dichas preguntas, introduciendo además los instrumentos de recogida de información. El tercer capítulo está dedicado de forma íntegra a la revisión de los conocimientos didáctico-matemáticos relevantes para la unidad didáctica de azar y probabilidad en 3º de ESO. Dicho capítulo se ha dividido en las diferentes facetas que distingue el marco teórico (EOS) para el análisis de procesos de instrucción; es decir, epistémica, cognitiva, interaccional, afectiva, mediacional y ecológica. De esta forma, se comienza describiendo los diferentes significados de la probabilidad (intuitivo, frecuencial, clásico, subjetivo, axiomático y otros), para continuar la revisión de la literatura en torno a sesgos que se identifican en el razonamiento probabilístico. Posteriormente, se analiza el papel que pueden jugar las interacciones y el plano afectivo, así como los contenidos que marca la normativa y los recursos disponibles. El resultado final del tercer capítulo es la concreción de los conocimientos didáctico-matemáticos en indicadores de la idoneidad didáctica particularizados al proceso de estudio.

El cuarto capítulo describe la experiencia de aula, que parte de la elaboración de un registro de observación que se incluye como anexo, identificando hechos didácticos significativos (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014) que respondan a los criterios de los indicadores de idoneidad particularizados. Con todas y cada de las facetas del proceso de instrucción analizadas, se procede, en el quinto capítulo, a valorar la idoneidad didáctica y proponer mejoras. Finalmente, en el capítulo sexto se exponen las conclusiones y líneas futuras de trabajo en este sentido.

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

2.1 Problema de investigación

Dentro de la disciplina de investigación de la Didáctica de las Matemáticas existen diferentes escuelas de pensamiento, lo cual es un sano síntoma de una ciencia que tiene un marcado carácter humanista. Si nos detenemos a pensar en aquellas líneas de trabajo orientadas hacia la aplicación práctica de los conocimientos de la disciplina, para poner en marcha procesos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas, observaremos que hay diferentes enfoques. No se postula una única manera de abordar el diseño instruccional, sino que hay varias e, incluso, hay una clara variación dependiendo del contexto específico de la situación: número de alumnos, dificultades de aprendizaje, contexto social, etc.

En el estudio que se presenta a continuación se considera una propuesta didáctica para el aprendizaje de los contenidos de probabilidad marcados por la normativa curricular, para un grupo de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. La propuesta sigue las directrices de la programación del departamento, alineada con un libro de texto concreto, sin perjuicio de aquellas actividades puntuales que pudiera sugerir el profesor encargado del grupo. A partir de aquí, se definen una serie de objetivos que buscan evaluar el grado de adecuación de dicha propuesta y encontrar aquellos puntos susceptibles de mejora.

2.1.1 Objetivos

Se establecen los siguientes objetivos de investigación:

1. Evaluar la idoneidad didáctica de la implementación de la unidad didáctica de azar y probabilidad, siguiendo las directrices de la programación, en tercer curso de ESO en el grupo de estudiantes que constituye la muestra del estudio.
2. Realizar una síntesis de los conocimientos didáctico – matemáticos sobre el estudio del tema de azar y probabilidad en los niveles de la ESO.
3. Proponer modificaciones a la unidad didáctica evaluada, que puedan mejorar de forma justificada su idoneidad didáctica en ciclos sucesivos. Dicha propuesta de cambios estará basada en la aplicación de los criterios de

idoneidad didáctica, particularizados al tema bajo estudio teniendo en cuenta la síntesis de conocimientos didáctico – matemáticos previamente elaborada.

2.1.2 Preguntas de investigación

Los objetivos anteriores se concretan en las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cuáles son los resultados de las innovaciones e investigaciones previas realizadas sobre la enseñanza - aprendizaje de las nociones básicas de azar y probabilidad en educación secundaria?
2. ¿Cuál es la idoneidad didáctica de la unidad de azar y probabilidad de 3ºESO implementada, tomando como referencia los criterios de idoneidad y los conocimientos didácticos disponibles?
3. ¿Cómo se puede mejorar la unidad de azar y probabilidad de 3ºESO, a partir del análisis de su idoneidad didáctica?

2.2 Marco teórico

El trabajo que presentamos se ubica dentro del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos ofrece un marco teórico inclusivo, que integra otras aproximaciones y modelos desde un punto de vista antropológico y semiótico. De esta manera, el EOS articula elementos propios de la fenomenología didáctica, la etnomatemática, la teoría antropológica, la teoría de situaciones, los campos conceptuales, los registros de representación semiótica, etc. Se apoya en principios didácticos de tipo socioconstructivista e interaccionista. El EOS tuvo su origen a principios de los años 90 en la Universidad de Granada y actualmente es desarrollado y aplicado por diversos grupos de investigación.

La comprensión de los objetos matemáticos se suele estudiar y valorar desde dos perspectivas claramente diferentes, o bien intentando explicar los procesos mentales que tienen lugar, bien estudiándola a partir de las competencias que proporciona. Una de las principales características que define el EOS, aparte de su orientación integradora, es que considera la comprensión matemática desde el punto de vista competencial, concretamente como un proceso de semiosis. Es decir, se considera que un alumno se ha apropiado de un objeto matemático cuando es capaz de establecer la trama de funciones semióticas implicadas en diferentes sistemas de prácticas puestas en juego en la resolución de determinadas situaciones - problemas, lo que coincide con afirmar que el alumno se desenvuelve con competencia en los contextos de aplicación de dicho objeto matemático.

Dentro del EOS, se han desarrollado diversas herramientas que permiten la reflexión sobre procesos de enseñanza-aprendizaje de aspectos matemáticos, con el objetivo de adecuar los diseños al alumnado al que van dirigidos y a la mejora de los mismos en sucesivas implementaciones. De esta manera, se conforma una ingeniería didáctica (Godino, Batanero, Contreras, Estepa, y Wilhelmi, 2013), heredera de los trabajos de la escuela francesa (Artigue, Douady, Moreno, y Gómez, 1995; Artigue, 1994). Lo esencial de este enfoque es, desde nuestro punto de vista, su doble utilidad como metodología de investigación y como herramienta de diseño y mejora de secuencias didácticas para los docentes, o para los diseñadores de actividades y contenidos.

En una ingeniería didáctica, la tarea de diseñar procesos de instrucción se considera dentro de un conjunto más amplio de procesos, configurando un sistema que se inserta en el núcleo mismo de la innovación docente e investigación. En primer lugar, se realizan unos análisis preliminares, en los que se fijan los objetivos y se recoge información relevante sobre el tema. Posteriormente, se procede al diseño, tomando como base los informes preliminares, elaborando a su vez unos análisis *a priori*, en donde se justifica o predice dicho diseño. El tercer proceso de la serie es la implementación propiamente dicha, donde se recogen datos e información que permiten valorar cómo ha funcionado el diseño con ese grupo de alumnos en concreto. Finalmente, se procede a realizar unos análisis *a posteriori*, que serán contrastados con los análisis *a priori* y servirán para mejorar el diseño en sucesivas implementaciones o para ajustarlos a otro tipo de alumnado.

Las tareas de reflexión y análisis de cada uno de los procesos de la ingeniería didáctica se ven facilitadas en gran parte con la guía que proporcionan las nociones de configuración didáctica, hecho didáctico significativo e idoneidad didáctica (Godino et al., 2014; Rivas y Godino, 2015).

La idea de *configuración didáctica* permite atomizar un proceso de enseñanza-aprendizaje en segmentos, de forma que cada uno de ellos comienza por el planteamiento de una situación-problema, y finaliza cuando se da respuesta o se realizan las tareas que dicha situación requiere. En virtud de lo compleja que resulte una situación, su configuración didáctica podrá estar compuesta a su vez por una serie de subconfiguraciones.

En el seno de una configuración (o subconfiguración) tienen lugar una serie de acontecimientos o hechos, en base a las producciones de los estudiantes o a sus interacciones. Parte de esos hechos serán irrelevantes desde el punto de vista de la educación matemática, ya que no todo lo que ocurre tiene por qué guardar relación con los objetos matemáticos implicados en la situación (puede haber variables pedagógicas, por ejemplo). Sin embargo, habrá hechos, que denominaremos *hechos didácticos*, que sí que son indicativos de que se está poniendo en juego ese conocimiento matemático, en la forma de argumentaciones, proposiciones o representaciones. Resultan de gran utilidad los hechos que muestran un conflicto de aprendizaje, pues es en esos momentos donde se aprecia el verdadero estado cognitivo de los alumnos y donde puede apoyar el docente sus intervenciones.

La sucesión de configuraciones didácticas que tienen lugar en la implementación de la secuencia, puede interpretarse como una *trayectoria muestral*; es decir, como realizaciones de procesos estocásticos (Godino, Contreras, y Font, 2006). De esta forma, para cada uno de los estados que componen una configuración de una faceta determinada del proceso de estudio, se obtiene la trayectoria correspondiente, ya sea epistémica, docente, discente, cognitiva, interaccional, mediacional, etc.

La *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción es un concepto desarrollado en el EOS que constituye el punto de partida de una teoría para el diseño instruccional. No en vano, puede erigirse como objetivo de cualquier diseño el presentar una elevada idoneidad. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso, o una parte del mismo, reúne ciertas características que permiten calificarlo como *óptimo* o *adecuado* para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, Batanero, y Font, 2007; Godino, 2013).

Realmente, la idoneidad didáctica está compuesta a su vez por seis componentes, relacionados de forma sistémica: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. Cada uno de estos componentes hace referencia a aspectos concretos de un proceso instruccional (Godino, 2013):

- *Idoneidad epistémica*: grado de representatividad de los significados institucionales implementados, o pretendidos, respecto de un significado de referencia. Todo concepto matemático tiene asociados una serie de objetos matemáticos, como registros semióticos (lenguajes), argumentos, proposiciones, definiciones y situaciones. Al tratarse de entes abstractos, la única manera de evaluar el aprendizaje de dicho concepto por parte de los alumnos implica constatar la correcta movilización articulada de todos los objetos asociados. Así, no puede decirse que un alumno haya aprendido el concepto de función simplemente porque sepa enunciar la definición que aparece enmarcada en el libro de texto. Es necesario que sepa interpretar gráficas, argumentar en torno a ellas, saber traducir del lenguaje algebraico al gráfico, etc.
- *Idoneidad cognitiva*: es el grado en que los significados pretendidos o implementados se sitúan en la zona de desarrollo próximo (ZDP) de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos e implementados. Se trata del componente más complejo de todos los que forman el concepto de idoneidad ya que, para evaluar el grado de idoneidad cognitiva correctamente, se debería disponer de una descripción detallada del estado cognitivo del alumno previo a la implementación del proceso de instrucción.
- *Idoneidad interaccional*: un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales a priori y resolver los que se produzcan durante el proceso de instrucción. Es decir, debe haber momentos reservados para la negociación de significados entre el profesor y los alumnos, o entre los propios alumnos.

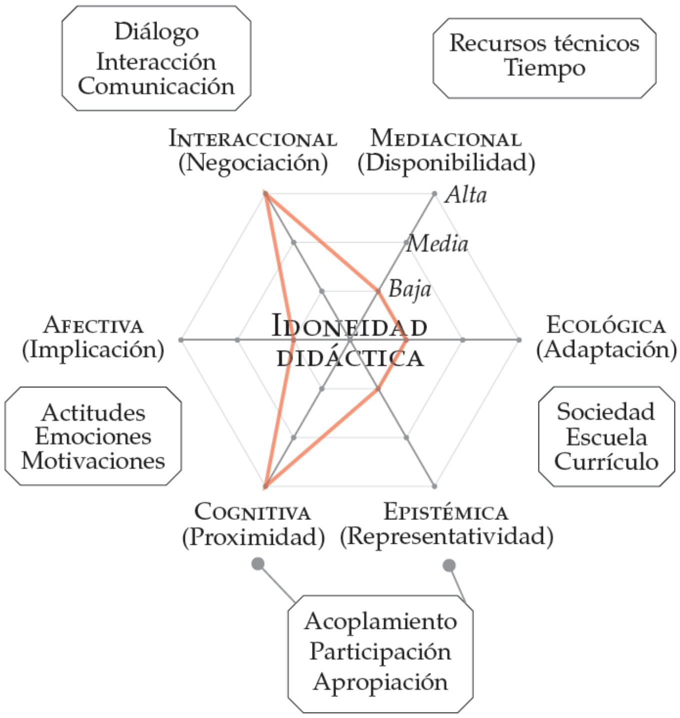


Figura 1: Componentes de la idoneidad didáctica *(Godino et al., 2007)*.

- *Idoneidad mediacional*: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.
- *Idoneidad afectiva*: grado de implicación, interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. Se trata de valorar en qué medida se alinea el proceso instruccional con los intereses de los alumnos, de forma que se maximice su probabilidad de implicación en el desarrollo de las actividades.
- *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. Sin ir más lejos, la normativa marca los contenidos curriculares a tratar, así como los criterios de evaluación. Todo diseño instruccional debe tener en cuenta estos aspectos para poder ser considerado idóneo ecológicamente.

2.3 Metodología

2.3.1 Tipo de investigación realizada

La investigación llevada a cabo es de carácter cualitativo, con un enfoque que podría considerarse como exploratorio y descriptivo, de carácter naturalista (Hernandez, Fernandez y Baptista, 2010). Diversos autores (Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 110) señalan que la importancia de especificar preguntas de investigación es relativa cuando se trata de trabajos de investigación puramente cualitativos. Aluden al hecho de que las cuestiones de investigación suelen orientar fuertemente el trabajo a realizar, marcando cada paso que da el investigador, pudiendo incluso alterar el devenir natural del ecosistema a observar. Sin embargo, las preguntas que hemos planteado han sido cuidadosamente formuladas, de manera que expresan la intencionalidad del estudio, a la vez que evitan enmarcar todos los movimientos del investigador, más allá de fijar el empleo de un instrumento operativo, como es el caso de la idoneidad didáctica.

2.3.2 Muestra de estudio

La selección de la muestra fue intencional, atendiendo a la disposición del centro escolar y de la disponibilidad del investigador, que también actúa como profesor. De esta manera, la muestra objeto de estudio está constituida por un grupo de alumnos de 3º de ESO ordinario, durante el curso académico 2015/2016, que cursan sus estudios en un Instituto de Educación Secundaria (IES) de carácter público en la comunidad autónoma de Aragón.

Se trata de un centro educativo similar al de otras localidades del medio semirrural aragonés. La localidad es cabecera de comarca, con una población censada entre 5000 y 10000 habitantes, contando con todos los servicios básicos y, además, no está lejos de la capital de provincia. El IES atiende en total a 600 alumnos procedentes también de otras localidades cercanas, mediante diversas rutas de autobuses escolares.

En cuanto al grupo que nos ocupa, está formado por 18 alumnos, de los que 14 son chicas. La mitad de ellos son de nacionalidad española, mientras que la otra mitad son inmigrantes o hijos de inmigrantes, pero plenamente integrados y con un conocimiento perfecto del idioma español. Se da la excepción de una alumna, que se incorporó una vez comenzado el curso escolar, que apenas conoce el idioma, pero que asiste a las clases de Matemáticas y se le proporciona algo de material en inglés, lengua que sí domina.

Como se explicará más adelante, al analizar la faceta ecológica, el comienzo de curso sufrió una gran incertidumbre normativa. En el momento de la matrícula inicial, los alumnos pudieron escoger entre dos asignaturas de Matemáticas diferentes: Matemáticas Académicas y Matemáticas Aplicadas, tal y como marca la LOMCE[1], estando las primeras orientadas hacia el bachillerato y la universidad, y siendo las segundas de carácter más práctico y encaminadas a formar alumnos que supuestamente van a decantarse por un tipo de formación profesional. Ahora bien, los currículos desarrollados y publicados en mayo de 2015 a nivel autonómico (DGA, 2015)[2], fueron derogados en julio (DGA, 2016), con lo que el currículo a aplicar era el establecido a nivel nacional en el Real Decreto 1105/2014 (MECD, 2014).

Ante la premura de la implantación de la normativa y por poder continuar con el programa de gratuidad de libros que gestiona la propia asociación de padres y madres del instituto, el libro de texto es el que se usaba en años anteriores, el mismo para las dos opciones; es decir, el libro LOE[3]. La diferencia estriba en que los alumnos matriculados en Matemáticas Aplicadas tratan únicamente los mínimos exigibles. No obstante, los alumnos del grupo de 3º de ESO objeto de estudio escogieron la opción de Matemáticas Académicas. A pesar de haber elegido la opción que conduce de forma natural a Bachillerato, el desempeño académico del alumnado es medio-bajo. La implementación tuvo lugar en el tercer y último período evaluativo, siendo la calificación media de Matemáticas en el primer trimestre de 5,11 (desviación estándar de 1,63) y en el segundo trimestre de 5,17 (desviación estándar de 1,86). Otras materias presentan resultados similares, en torno a 5 en incluso menores, como es el caso de Lengua y Geografía e Historia en la primera evaluación.

Con el objetivo de proteger la identidad de los alumnos, basta con la descripción dada del centro educativo. Así mismo, para referirnos a ellos lo haremos por medio de los siguientes códigos: A1, A2, y así sucesivamente, hasta llegar al alumno A18.

2.3.3 Instrumentos de recogida de datos y secuenciación

En primer lugar, y antes de comenzar el proceso de observación, se determinan los conocimientos relevantes para la potencial aplicación de mejoras de la idoneidad didáctica. Para ello, se analiza la unidad didáctica en cuestión, desde los diferentes puntos

[1] LOMCE: Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.
[2] DGA: Diputación General de Aragón.
[3] LOE: Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

de vista que ofrecen las distintas dimensiones del conocimiento matemático; es decir, la epistémica, la cognitiva, afectiva o emocional, interaccional, mediacional y ecológica.

La recogida de datos comienza con una prueba escrita en la primera sesión, para evaluar los conocimientos iniciales de los alumnos. En la última sesión se realizará otra prueba escrita, para evaluar el aprendizaje.

Aunque se valoró la grabación audiovisual de las sesiones, las dificultades en cuanto a protección de datos nos hicieron desistir. Los datos de la observación participante de las sesiones de clase se recogen, por lo tanto, mediante un registro sistemático, que se elabora durante las propias sesiones de clase, anotando el hito temporal (en minutos y segundos referidos al inicio de la clase) junto a una indicación del hecho didáctico observado.

Para la evaluación de la componente afectiva se hace uso de un instrumento conocido como mapa de humor de los problemas (Gómez-Chacón, 2000), que consiste en una serie de pictogramas que el alumno dibuja o señala mientras está resolviendo un problema. Dicho instrumento ya ha sido empleado por el autor en otros trabajos de evaluación de la idoneidad afectiva (Beltrán-Pellicer, 2015).

Posteriormente, a lo largo del mismo día y fuera del aula, los datos de la observación, del mapa de humor y de las eventuales producciones de los alumnos, se trasladan a una hoja de cálculo, completando y enriqueciendo el contenido.

Una vez se hayan desarrollado todas las sesiones y recogido los datos correspondientes, es cuando se realiza el análisis de la idoneidad didáctica, basándonos en los indicadores definidos en el marco teórico.

3 CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

3.1 Introducción

Cada una de las ramas en que se dividen las matemáticas escolares y que se reflejan en la división curricular en bloques (números, álgebra, funciones, geometría, probabilidad y estadística) goza de una especificidad tal que es necesario detenerse para reflexionar acerca de la naturaleza de los conocimientos didáctico-matemáticos que intervienen en el contexto a estudiar. Los conocimientos sobre introducción a la probabilidad no son una excepción.

Los indicadores propuestos originalmente (Godino, 2013) para valorar la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje de matemáticas constituyen una excelente herramienta que facilita la reflexión en torno a cualquier ámbito propio de la educación matemática. Ahora bien, resulta deseable concretarlos para cada proceso de estudio en particular, permitiendo guiar la reflexión de una forma más directa. Por este motivo, el desarrollo de cada una de las facetas concluye con los indicadores de idoneidad particularizados al proceso de estudio de la probabilidad en secundaria, siendo uno de los principales productos finales de este trabajo.

3.2 Faceta epistémica

La probabilidad, en los niveles educativos de primaria y secundaria, se puede abordar desde tres enfoques, subjetivo, frecuencial y clásico. Cada uno de los cuales comporta sistemas de prácticas operativas y discursivas diferentes y, por tanto, significados parciales diferentes. El estudio de estos tres significados debe ir precedido de un significado informal ligado al uso cotidiano de la palabra probabilidad y otros términos sinónimos y asociados, como se muestra en Godino, Batanero y Cañizares (1987).

3.2.1 Visión intuitiva

Como ya adelantara un genial Laplace en la célebre *Théorie Analytique des Probabilités*:

> “En el fondo, la teoría de probabilidades es sólo sentido común expresado con números” (Marquis de Laplace, 1820, p. xv)

Históricamente, los fenómenos aleatorios han acompañado a la humanidad. Ejemplos de ello son los juegos de azar, como los dados, o acontecimientos naturales, como si es más o menos probable que llueva. Ahora bien, el comienzo de la comprensión de las leyes que rigen el azar tuvo que esperar hasta los trabajos iniciales de Cardano, ya en el siglo XVI. En algunas culturas se creía que la obtención de un resultado u otro era designio divino y, precisamente por eso, se prohibía en ocasiones el practicar juegos de azar.

Sin necesidad de entrar a discutir si los fenómenos aleatorios existen de forma genuina o no, lo que está fuera de toda duda es la utilidad de la teoría probabilística para modelar sucesos en los que intervienen tantas variables que resulta imposible predecir el comportamiento de manera determinista. Imaginemos el suceso que consiste en tirar una moneda al aire y comprobar si ha salido cara o cruz. Si fuésemos capaces de conocer el ángulo exacto con el que la moneda impacta en el suelo, su velocidad, posición, viento, humedad, etc., podríamos acudir a las leyes de la física y averiguar con certeza el resultado.

La visión intuitiva de la probabilidad consiste en cuantificar los resultados posibles de un fenómeno aleatorio a partir de experiencias previas y de su contraste con las condiciones en que tiene lugar dicho fenómeno. De esta manera, decimos que es más probable que llueva si nos asomamos por la ventana y vemos oscuros nubarrones, que si hace un tiempo soleado.

3.2.2 Significado clásico

La concepción clásica va ligada a los juegos de azar, como expresara Cardano en su *Liber de Ludo Aleae* y Fermat y Pascal en su célebre correspondencia en torno al problema del jugador. Se parte del supuesto de que todos los sucesos elementales son equiprobables y se entiende probabilidad como la fracción de casos favorables entre casos posibles. Es decir, además de la equiprobabilidad se parte de la idea de que el conjunto de sucesos posibles es finito. Esto es válido para muchas aplicaciones, pero genera obstáculos epistemológicos con los que más tarde habrá que trabajar, cosa que en sí no es perniciosa, porque gran parte del aprendizaje significativo se construye resolviendo esos obstáculos.

3.2.3 Significado frecuentista

En las primeras etapas del desarrollo de la teoría de la probabilidad, diversos autores se percataron de que las frecuencias relativas de un suceso aleatorio convergían a una constante determinada. Es lo que se denominó estabilidad de las series estadísticas, cuestión sobre la que trabajó Jacob Bernoulli, demostrando una primera versión de la ley de los grandes números.

3.2.4 Significado subjetivo

El acercamiento subjetivo se confunde a menudo con el intuitivo. Sin embargo, nada más lejos de la realidad, pues la visión subjetiva se apoya en la inferencia bayesiana. Es decir, cuando un experimento aleatorio se realiza por primera vez, es posible asignar probabilidades subjetivas a priori, basándonos en aspectos tan poco cuantificables como nuestra experiencia. Ahora bien, en las sucesivas repeticiones ya obtenemos valores correspondientes a cada probabilidad condicionada, con lo que se mejora sistemáticamente el modelo asociado.

3.2.5 Significado axiomático

Se habla de probabilidad formal, objetiva o normativa cuando ésta se calcula con precisión usando las leyes matemáticas de la teoría axiomática correspondiente. La base matemática puede reflejar hipótesis hechas en los significados o concepciones clásica, frecuencial o subjetiva.

3.2.6 Otros significados

No todas las visiones existentes acerca de la naturaleza de la probabilidad y de los objetos matemáticos asociados a ella resultan adecuados desde el punto de vista curricular, aunque desde otras perspectivas (filosófica, modelado de la realidad, etc.), sean útiles y relevantes. Para finalizar de forma completa el desarrollo de la faceta epistémica, debemos mencionar el significado de la probabilidad como propensión y el significado lógico, siguiendo la revisión de la cuestión realizada por Batanero y Díaz (2007).

La probabilidad como propensión es una visión de la probabilidad, en cierto modo controvertida, adoptada por autores como Peirce (1978), en la que se interpreta ésta como una disposición o tendencia de una situación física a proporcionar un resultado determinado, o a mostrar una determinada frecuencia relativa cuando se repite un número elevado de veces. Cabe señalar que no debe confundirse propensión con frecuencia relativa. La propensión de una situación a que aparezca un determinado resultado es la *causa* de que su frecuencia relativa de aparición sea la que es.

Por otro lado, la aproximación lógica a la probabilidad fue desarrollada, entre otros, por Keynes (1921) y Carnap (1962). En cierto modo, recuerda a la visión clásica, en la que cada suceso tiene una probabilidad a priori. Ahora bien, si desde el punto de vista clásico los sucesos eran equiprobables, en la perspectiva lógica se construye un sistema lógico-deductivo en el que, mediante una función racional de credibilidad, se asignan valores distintos. En dicho sistema deductivo, se parte de unas proposiciones evidentes y, mediante un lenguaje lógico formal, en el que los conectores de implicación pueden tomar valores entre 0 y 1, se construye la "función de probabilidad", siendo la probabilidad el grado de confirmación que puede esperarse acerca de una hipótesis, sobre la que se ha recogido una serie de evidencias.

Este acercamiento presenta una serie de dificultades, siendo una de las más notables la subjetividad que subyace en la elección de seleccionar la evidencia que apoya a una hipótesis. Además, la función lógica que conecta las evidencias con el resultado, no tiene por qué ser única.

3.2.7 Indicadores particularizados de la idoneidad epistémica

Un proceso de estudio diseñado o implementado se puede calificar con mayor idoneidad epistémica en la medida en que están representados y articulados los diferentes significados. En la Tabla 1 se sintetizan indicadores de idoneidad epistémica específicos para los procesos de estudio de la probabilidad, agrupados en los componentes propuestos en Godino (2013).

Tabla 1. Indicadores particularizados de la idoneidad epistémica.

Componentes	***Indicadores***
Situaciones-problema	1) Se propone una muestra representativa de experiencias aleatorias, reales o virtuales, distinguiéndolas de experiencias deterministas. Por ejemplo: lanzamientos de dados o monedas, simulaciones de concursos o bingos, etc. 2) Se plantean situaciones-problema que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetiva, frecuencial y clásica). 3) Se propone una muestra representativa de contextos donde ejercitar y aplicar los contenidos tratados. 4) Se proponen situaciones de generación de problemas sobre fenómenos aleatorios (problematización) por los propios estudiantes.

Lenguajes	1) Se emplean diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólica, conjuntos, etc.), señalando las relaciones entre las mismas. 2) Se utiliza un nivel lingüístico adecuado al alumnado al que se dirige, en cuanto a construcciones gramaticales y vocabulario. 3) Se emplean términos precisos, como suceso, espacio muestral, frecuencia relativa, aleatorio, determinista, casos favorables, casos totales, resultado de un experimento, sucesos simples y sucesos compuestos. 4) Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de fenómenos aleatorios, en los diferentes registros mencionados.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	1) Las definiciones y procedimientos se formulan con claridad y corrección, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. 2) Se presentan las definiciones de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto y probabilidad. 3) Se presentan proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, del suceso seguro y del complementario; propiedades de las frecuencias relativas 4) Estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad. 5) Se presentan los procedimientos de cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y el empleo de tablas y diagramas de árbol. 6) Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	1) Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. 2) Se usan simulaciones para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas. 3) Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	1) Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. 2) Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (uso informal, subjetivo, frecuencial y clásico).

3.3 Faceta cognitiva

Batanero y Serrano (2005) señalan la especificidad del razonamiento probabilístico, frente al lógico, el numérico o el causal, debido a que es muy fácil toparse a niveles elementales con resultados que no tienen nada que ver con la intuición. De niños y adolescentes, suele ser más extraño el vivir experiencias significativas en torno a conceptos probabilísticos que, por ejemplo, en torno a nociones geométricas o aritméticas. No queremos decir con esta afirmación que a edades tempranas no se entre en contacto con fenómenos aleatorios, pues en el momento que se lanza un dado o se expresa una opinión sobre un suceso que todavía no ha ocurrido (y su resultado no es determinista), ya nos sumergimos en las aguas del azar. Lo que sí se puede afirmar es que pocos de esos contactos ofrecen experiencias significativas en el aprendizaje de la probabilidad. Como el niño no ha ido construyendo sus propios significados de una forma gradual, explorando situaciones sencillas primero y más sofisticadas después, va adquiriendo formas de razonar incorrectas, las cuales pueden deberse además a sesgos de razonamiento que eventualmente muestren las personas de su entorno.

No deben perderse de vista los objetivos que deben alcanzarse al final de la educación secundaria, en cuanto a razonamiento probabilístico, que son los siguientes (Batanero y Sanchez, 2005):

1) Determinar la probabilidad de un suceso construyendo distribuciones de probabilidad para espacios muestrales sencillos.
2) Calcular e interpretar el valor esperado de variables aleatorias en casos sencillos.
3) Describir espacios muestrales en experimentos compuestos.
4) Identificar sucesos mutuamente excluyentes y sucesos conjuntos.
5) Comprender la probabilidad condicionada y la independencia de sucesos.
6) Calcular probabilidades haciendo uso de principios de conteo tales como combinaciones, variaciones y permutaciones.
7) Comprender y elaborar inferencias sobre una población a partir de muestras aleatorias.

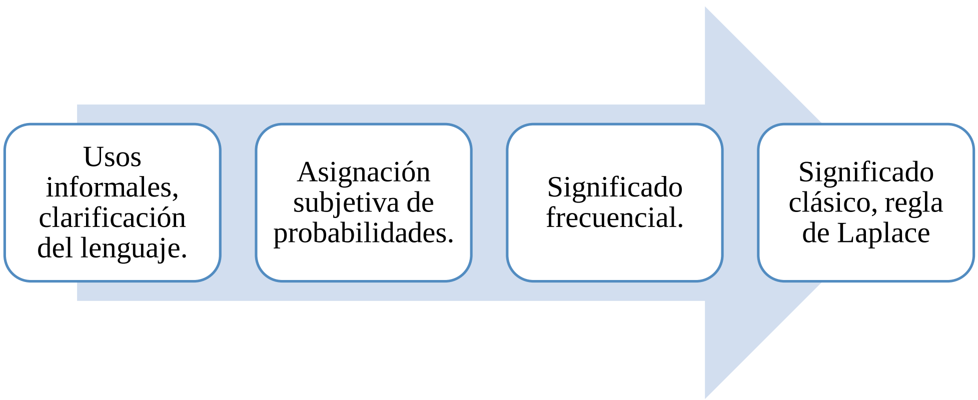


Figura 2: Secuencia idónea para el aprendizaje de los contenidos de probabilidad.

El orden en que se presentan los contenidos es especialmente importante si lo que pretendemos es evitar la aparición de intuiciones erróneas y conflictos de aprendizaje innecesarios. Godino, Batanero y Cañizares (1987) destacan la importancia de comenzar clasificando experimentos en aleatorios y deterministas, mediante el empleo de un lenguaje cada vez más preciso y compartido por la comunidad. Es en esa primera etapa donde se ponen en juego términos y expresiones como "imposible", "probable", "seguro", etc., así como otras más coloquiales, como "a voleo", "de chiripa", "pura potra", etc. De esta manera, se podría comenzar desde las definiciones dadas en el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, para luego dar paso a comentar diferentes situaciones reales donde tienen lugar fenómenos aleatorios. Estos contextos deben ser representativos y variados, procedentes de la biología (genética), el mundo físico (meteorología, materias primas), el mundo social (deportes, censos y estadísticas, loterías) y la política (encuestas, economía).

Tradicionalmente, después de realizar la introducción ya mencionada sobre fenómenos aleatorios y deterministas, se continúa el proceso de enseñanza-aprendizaje de forma teórica y a priori, a partir de la noción de suceso equiprobable (Godino et al., 1987, p. 21). Cuando le decimos al niño que la probabilidad de obtener un número determinado al lanzar el dado es siempre 1/6, es posible que se produzca un conflicto de tipo cognitivo con la propia experiencia del niño en juegos de azar. Como la realimentación que producen los juegos en los que interviene el azar (parchís, oca, etc.) no ofrece suficiente información significativa como para que se produzca una comprensión real de los fenómenos aleatorios, es frecuente que se formen creencias e intuiciones erróneas.

En segundo ciclo de secundaria, como es nuestro caso de estudio, los alumnos aceptan con facilidad la idea de suceso equiprobable, aunque no son conscientes de las implicaciones matemáticas de tal afirmación. Aunque sí que son capaces de comparar fracciones y aplicar el mismo razonamiento de proporcionalidad para decidir qué sucesos son más probables que otros, una correcta aproximación tendría que estar basada en la teoría axiomática de Kolmogorov. Ahora bien, no están en condiciones de asimilar formalmente los fundamentos teóricos completos de dicha teoría.

Por ello, a pesar de que la aproximación frecuencial presenta dificultades tanto desde el punto de vista epistemológico, como desde el conceptual y práctico, resulta la más adecuada en esta etapa del desarrollo cognitivo. Estos obstáculos se deben a que realmente nunca se llega a conocer el valor exacto de la probabilidad de un suceso, porque el número de repeticiones o ensayos va a estar siempre limitado de forma práctica. Sin embargo, se pueden diseñar experiencias de aula sencillas o utilizar simulaciones por ordenador para solventar esta limitación.

Una revisión de la faceta cognitiva quedaría incompleta sin hacer referencias al proceso de evaluación. Cada uno de los significados mencionados, debe tenerse en cuenta a la hora de diseñar herramientas para acometer tal propósito. En este sentido, es especialmente relevante el trabajo de Green (1982) sobre la evaluación del razonamiento probabilístico en niños y adolescentes, quien diseñara un instrumento en tres partes claramente diferenciadas: puntuación combinatoria, puntuación verbal y puntuación probabilística.

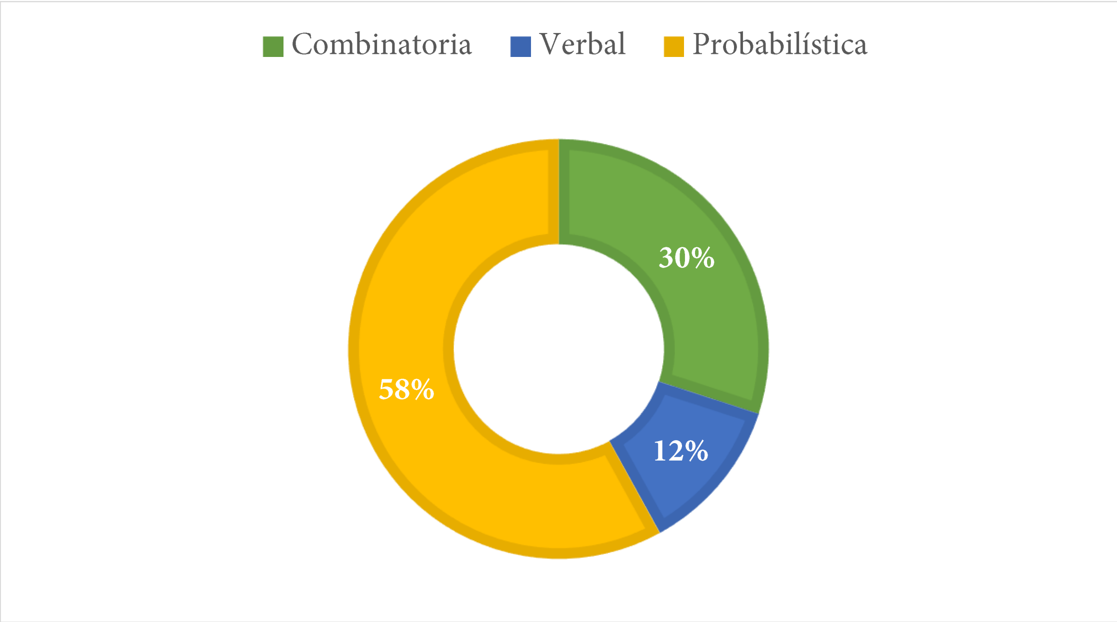


Figura 3: Porcentajes de las puntuaciones de cada categoría en el test de Green.

Más allá de la ponderación asignada por Green a cada una de las partes (Figura 3), conviene destacar la categorización del instrumento. La inclusión de preguntas específicas para evaluar el razonamiento puramente combinatorio se justifica a partir de las teorías de Piaget, las cuales indican que es preciso haber desarrollado y madurado previamente las estructuras operatorias del pensamiento formal. El uso del lenguaje, o puntuación verbal, se evalúa para constatar en qué grado son adecuados los términos y expresiones utilizadas para describir situaciones aleatorias y argumentar en torno a ellas. Finalmente, gran parte del test de Green se dedica al razonamiento probabilístico per se, estudiando las respuestas de los estudiantes ante situaciones en las que deben tomar una decisión, como urnas o ruletas.

Ya se ha comentado la importancia de presentar los contenidos en un orden adecuado para minimizar la construcción y afianzamiento de creencias erróneas, evitando la aparición de obstáculos innecesarios. Diversos trabajos (Konold, 1989, 1991; Lecoutre, 1992; Serrano, Batanero, Ortíz y Cañizares, 1998; Tversky y Kahneman, 1974) han tratado de caracterizar y categorizar los sesgos de razonamiento probabilístico y las dificultades más comunes en torno a estas nociones. A continuación, se realiza una breve síntesis, ya que resulta de interés para nuestro trabajo el identificar estos sesgos y dificultades en la implementación de las sesiones de aula.

3.3.1 Heurística de la representatividad

Se produce cuando se evalúa la probabilidad de un suceso a partir de su representatividad en la población de origen (Tversky y Kahneman, 1974). Es decir, no se tiene en cuenta que el muestreo de la población presenta una variabilidad, que depende del tamaño de la muestra. Las personas que razonan de este modo generalizan los resultados de muestras pequeñas al total de la población, o ven relaciones causales donde no tiene por qué haberlas.

Sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra

Este sesgo se aprecia en educación secundaria cuando, ante una situación en la que se estima de forma frecuencial una probabilidad (por ejemplo, probabilidad de obtener cara y cara en el lanzamiento simultáneo de dos monedas) no se tiene en cuenta el número de repeticiones del experimento. De hecho, incluso si los alumnos son conocedores del espacio muestral y de las probabilidades de cada suceso elemental, muestran sorpresa si la tasa obtenida no es la esperada (en el ejemplo, aparecerá p=1/4, sí, pero solo podremos asegurarlo con un N lo suficientemente grande).

Esto es debido a que, para los estadísticos habituales, si bien la esperanza del estadístico muestral es la misma, sea cual sea el tamaño de la muestra, su varianza sí que depende de ello. Ilustremos lo que ocurre para la media muestral $\overline{x}$ de una distribución aleatoria de media μ y varianza σ^2, que se define como:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

Su valor esperado $E[\overline{x}]$, se obtiene de la siguiente manera:

$$E[\overline{x}] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right] = E\left[\frac{x_1}{n}\right] + E\left[\frac{x_2}{n}\right] + \cdots + E\left[\frac{x_n}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}E[x_1] + \frac{1}{n}E[x_2] + \cdots \frac{1}{n}E[x_n]$$

En virtud de que $E[x_i] = \mu$, pues cada muestra pertenece a la población y sigue su distribución aleatoria, tenemos que:

$$E[\overline{x}] = \frac{1}{n}\mu + \frac{1}{n}\mu + \cdots \frac{1}{n}\mu = \mu$$

Veamos ahora qué ocurre con la varianza:

$$Var[\overline{x}] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{Var[x_i]}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Es decir, que el valor esperado de la media muestral es igual a la media de la distribución de origen, mientras que la varianza muestral disminuye conforme aumentamos el tamaño de la muestra.

Concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias

Dentro de la heurística de la representatividad, nos encontramos con diversas concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias, ya que muchas personas consideran que una muestra, del tamaño que sea, ha de presentar las mismas características que la población de origen. Es común pensar que participaciones de lotería con secuencias de números "ordenadas", como 11111 o 12345 son más difíciles de resultar premiadas, cuando la realidad es que su probabilidad es la misma que de cualquier otra combinación. Es el mismo sesgo que lleva a un apostador, que lleva una mala racha, a apostar una vez más porque cree que su suerte tiene que cambiar, que ya toca. Esto último se conoce como *falacia del jugador*.

3.3.2 Sesgo de equiprobabilidad

Es la creencia en que todos los sucesos de un experimento aleatorio presentan la misma probabilidad, sin tener en cuenta que puedan tratarse de sucesos compuestos o exista alguna asimetría, de carácter geométrico u otro, en la asignación de las probabilidades. Este sesgo se pone de manifiesto fácilmente, según una experiencia descrita en las investigaciones sobre la cuestión (Lecoutre y Cordier, 1990; Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre, 1985, 1992). Ante la pregunta de si es más probable obtener dos cincos o un cinco y un seis en el lanzamiento simultáneo de dos dados, muchas personan optan por afirmar que sí. Es decir, no tienen en cuenta la descomposición del espacio muestral y la correcta asignación de probabilidades. La combinación formada por un cinco y un 6 se puede obtener de dos formas distintas, mientras que el doble cinco solo de una.

3.3.3 Enfoque en el resultado aislado

Konold (1991) se interesó por los patrones de respuesta que mostraban los estudiantes cuando se les preguntaba explícitamente por la probabilidad de un suceso. Hay personas que interpretan esta pregunta como tener que predecir si el suceso en cuestión ocurrirá o no en la siguiente repetición del experimento. Más que de un *fallo* de razonamiento, se trata de una *ausencia* de razonamiento probabilístico. Así, estas personas calificarán como seguros sucesos cuya probabilidad se acerque a 1. Por otro lado, los sucesos con probabilidad casi nula serán imposibles para ellos. Tienden a clasificar como aleatorios sucesos con probabilidades en torno a 0,5.

> Por ejemplo, al interpretar una predicción meteorológica en la que se dan unas probabilidades de lluvia de un 70%, muchos sujetos indican que lloverá el día en cuestión. Si el día en cuestión no llueve, pensarán que el meteorólogo se equivocó en sus predicciones. Si llueve un 70% de días para los que se pronosticó un 70% de probabilidades de lluvia, pensarán que el meteorólogo es poco fiable. (Serrano, Batanero y Ortiz de Haro, 1996, p.2)

Los estudiantes con este sesgo muestran verdaderas dificultades para asimilar la noción frecuentista de la probabilidad, pues no comprenden que cada resultado de un experimento aleatorio puede, y debe, estudiarse en el contexto del conjunto de repeticiones.

3.3.4 Indicadores particularizados de la idoneidad cognitiva

En la tabla 2 se sintetizan los criterios o indicadores de idoneidad cognitiva de los procesos de estudio de la probabilidad en secundaria, teniendo en cuenta el estudio que se ha presentado de las investigaciones didácticas sobre el tema y los criterios generales propuestos en Godino (2013).

Tabla 2: Indicadores particularizados de la idoneidad cognitiva.

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	1) El alumnado ha estudiado anteriormente, o el profesor planifica el estudio de: a. Situaciones-problema en las que se conjetura sobre experimentos aleatorios sencillos, distinguiendo lo aleatorio de lo determinista y el empleo de la frecuencia relativa. b. Registros apropiados para la representación de información, como diagramas de barras y tablas. c. Definiciones de suceso elemental y utilización de la regla de Laplace en casos sencillos. 2) Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes. 3) La secuencia didáctica planifica actividades donde puedan ponerse de manifiesto los sesgos de razonamiento más comunes a. En torno a la heurística de la representatividad: sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra u otras concepciones erróneas sobre secuencias aleatorias. b. Sesgo de equiprobabilidad. c. Enfoque en el resultado aislado.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	1) Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo, de forma que se atienden las necesidades cognitivas de todos los estudiantes. 2) Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes, mediante estrategias específicas con situaciones muy contextualizadas o trabajo en pequeños grupos.
Aprendizaje (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	1) Los contenidos se presentan en orden. En primer lugar, se clarifica el lenguaje y se argumenta de forma intuitiva respecto al azar. En segundo lugar, se trabaja la asignación subjetiva de probabilidades. Después, se enlaza con el significado frecuencial de la probabilidad. Finalmente, se introduce el significado clásico. 2) Se utilizan diversos modos de evaluación, que indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. 3) La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia, así como necesidades específicas de apoyo educativo. 4) Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones, proporcionando una realimentación tangible en el proceso de estudio.

3.4 Faceta interaccional

Godino et al. (2006) reconocen el papel fundamental que juegan las interacciones en el proceso de instrucción, pilares del Interaccionismo Simbólico (IS) (Cobb y Bauersfeld, 1995; Godino y Llinares, 2000) y de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1997), escuelas de pensamiento entre las que se identifican claras correspondencias.

El IS se postula en un punto intermedio entre las concepciones piagetianas, centradas en la construcción del aprendizaje de forma individual, y las tesis de Vygotsky, donde el aprendizaje es una enculturación de estructuras cognitivas sociales ya existentes. Los participantes de un proceso de enseñanza-aprendizaje, profesor y alumnos, tienden a repetir patrones de interacción. Esto es, se identifican regularidades en la comunicación entre ellos que pueden utilizarse para describir el proceso de negociación de significados que tiene lugar. Un ejemplo de estos patrones lo encontramos en el “patrón del embudo” (Bauersfeld, 1988; Voigt, 1985) que viene a describir el mismo fenómeno que el *efecto Topaze* de la TSD. En ambos casos el profesor adelanta o facilita la solución a una determinada situación o problema, de forma que los alumnos terminan por no producir una actividad mental que repercuta significativamente en su aprendizaje.

La TSD, por otro lado, amplía los actores que intervienen en las interacciones, añadiendo el medio o *milieu*, configurado idealmente por el profesor y que termina por formar el triángulo docente-medio-discente. Los tipos de situaciones que constituyen el núcleo mismo de la TSD (acción, formulación, validación e institucionalización) pueden interpretarse como patrones de interacción generales.

Si bien podría justificarse la importancia de las interacciones en cualquier ámbito de la educación matemática, procedemos a continuación a justificar su estudio desde la perspectiva de la educación en probabilidad. En un reciente trabajo de síntesis en educación estocástica, Batanero (2015) reivindica de nuevo la importancia de articular los diferentes significados de la probabilidad y de plantear el aprendizaje desde las creencias e intuiciones propias de los estudiantes. Es más, en el centro de las interacciones debe situarse una experimentación o simulación, a partir de la cual pueda argumentarse y refutar o afianzar ciertas concepciones frente a otras:

> Towards the end of secondary school (15-16 year olds) a deeper analysis of the properties of the random numbers generated through a calculator or computer may

> be introduced. The experiments, recording and analysis of the sequences produced in these simulation activities will help to integrate study of probability and statistics. (Batanero, 2015, p. 16)

3.4.1 Indicadores particularizados de la idoneidad interaccional

En la tabla 3 se resumen los criterios o indicadores de idoneidad interaccional de los procesos de estudio de la probabilidad en secundaria, teniendo en cuenta el estudio previamente presentado de las investigaciones didácticas sobre el tema y los criterios generales propuestos en Godino (2013).

Tabla 3: Indicadores particularizados de la idoneidad interaccional.

COMPONENTES	*INDICADORES*
Interacción docente-discente	1) Se efectúa una presentación adecuada del tema por parte del docente (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.). 2) La mayoría de las interacciones, cuando se trata de introducir nuevos conceptos, tienen lugar en torno a una experimentación o simulación. 3) Se reconocen y resuelven los conflictos de los alumnos. Es decir, se formulan preguntas adecuadas para detectar los obstáculos y sesgos descritos en la idoneidad cognitiva, ofreciendo respuestas apropiadas. 4) Se busca llegar a consensos a partir del mejor argumento. 5) Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. 6) Se facilita la inclusión de todos los alumnos en la dinámica de la clase.
Interacción entre alumnos	1) Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. 2) Los alumnos tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. El lenguaje que emplean para ello es cada vez más preciso. 3) Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	1) Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).
Evaluación formativa	1) Se realiza una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos, planteando el aprendizaje de forma progresiva a partir de las intuiciones y creencias anteriores de los alumnos. 2) Se proporcionan indicaciones de logro a los estudiantes a lo largo de la secuencia didáctica.

3.5 Faceta afectiva

La influencia del dominio afectivo en la resolución de problemas se ha constatado en diversas investigaciones (Blanco, Guerrero y Caballero, 2013) haciendo evidente que la afectividad y la cognición están inexorablemente interconectadas. Tanto la una como la otra son procesos mentales que se realimentan mutuamente y que forman un sistema difícilmente separable (Gómez-Chacón, 2010; Hannula, Gómez-Chacón, Philippou, y Schlöglmann, 2005). En dicho sistema, la afectividad llega a ser un predictor claro del rendimiento académico. El plano afectivo es objeto de estudio de diferentes disciplinas académicas y es lo suficientemente complejo como para que se hayan elaborado diversas teorías acerca de su naturaleza. En educación matemática, es habitual utilizar la división en tres componentes propuesta por McLeod (1988): emociones, actitudes y creencias.

Las emociones se dan de manera automática o instantánea y están estrechamente vinculadas al contexto social y a las interacciones que tienen lugar entre los diferentes actores y el medio. Son respuestas afectivas complejas y organizadas que van más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, hundiendo sus raíces en lo fisiológico, lo cognitivo, lo motivacional y el sistema experiencial. Es importante observar que las emociones surgen en respuesta a un suceso interno o externo (Gil, Blanco y Guerrero, 2005; Gómez-Chacón, 2000). Esta respuesta afectiva es de alta intensidad y se describe en términos de sentimientos como el miedo, el gozo, el amor, el odio, el asco, etc. De esta manera, cada situación adquiere un significado individual, positivo o negativo.

Cuando se proponen situaciones que deben ser resueltas por el alumnado, las emociones ayudan a que fluya o se inhiba el pensamiento del resolutor, haciendo posible el deseo por perseverar en la tarea propuesta. Así mismo, estas experiencias se extienden y recrean el sistema de creencias, generando unas actitudes hacia este tipo de tareas matemáticas.

Las creencias se consideran un tipo de conocimiento que surge de la valoración subjetiva hecha a actividades y procesos matemáticos. Son estables, aunque pueden evolucionar gracias a las experiencias que las logran desestabilizar (Callejo y Vila, 2003). Las creencias no pueden considerarse de forma aislada, sino que forman una red organizada. Este hecho hace que dos personas que compartan un par de creencias, pero no la totalidad del sistema, aborden las tareas de manera diferente (Gil et al., 2005). En educación matemática se han categorizado según su naturaleza: las matemáticas como ciencia, las matemáticas escolares enfocadas a lo que se enseña o se aprende y el autoconcepto o la autopercepción como resolutor de problemas o como estudiante.

Las creencias estimulan e inducen a comportamientos y actitudes, siendo éste el interés de su estudio. Callejo y Vila (2003) señalan cómo diversas investigaciones sobre la resolución de problemas han mostrado cómo creencias comunes hacia las matemáticas pueden incitar a comportamientos más adecuados para realizar tareas mecánicas y rutinarias, en lugar de para realizar actividades complejas, en las que el camino de solución no es tan claro y se requiera el uso de estrategias heurísticas.

Finalmente, las actitudes siempre se han considerado como un indicador importante del aprendizaje de las matemáticas. Se ponen de manifiesto en la manera en que los alumnos abordan las tareas matemáticas, si reflejan interés, son perseverantes, tienen confianza en los pasos que siguen, etc. (Gómez-Chacón, 2000), distinguiéndose entre actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas.

Las emociones, actitudes y creencias se encuentran interrelacionadas de manera cíclica (Gómez-Chacón, 2000), donde no se reconoce ni un principio ni un fin. Pese a ello, se considera que las experiencias que viven los alumnos al resolver problemas generan en ellos diferentes reacciones emocionales. Estas reacciones son el punto de partida del nacimiento de las creencias hacia las matemáticas, su enseñanza-aprendizaje, la resolución de problemas y la autopercepción del alumnado. Este tipo de creencias forjan a su vez diferentes comportamientos y actitudes (Blanco, 1992). En otras palabras, las emociones son un primer filtro que puede generar actitudes positivas o negativas. Así mismo, recrean el sistema de creencias que tiene el sujeto ante la resolución de problemas, reforzándolo o modificándolo, siendo esta una razón más por la que consideramos fundamental la consideración del aspecto emocional en el aula. Para ello se requiere poner a disposición del profesorado una herramienta que se integre de forma natural en las secuencias de aula, y que permita monitorizar las emociones que se despiertan en el alumnado al resolver problemas.

Por otro lado, la TSD reserva el término “devolución” para designar la necesidad de que el alumnado asuma como propio el medio que ha configurado el docente para elaborar la construcción del conocimiento matemático. Godino et.al. (2006) señalan el impacto que tiene el plano afectivo en la devolución. Es decir, los alumnos estarán interesados y predispuestos a resolver las tareas propuestas en la medida en que despierten emociones positivas o se fomenten actitudes propias de la actividad matemática.

3.5.1 Indicadores particularizados de la idoneidad afectiva

En la Tabla 4 se sintetizan los indicadores de la idoneidad afectiva.

Tabla 4: Indicadores particularizados de la idoneidad afectiva.

COMPONENTES	***INDICADORES***
Intereses y necesidades	1) Las tareas tienen interés para los alumnos. 2) Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Emociones	1) Se planifican momentos en los que se manifiestan las emociones antes las situaciones propuestas. 2) Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia, miedo a las matemáticas. 3) Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.
Actitudes	1) Se relacionan las emociones positivas con las actitudes matemáticas y con la resolución exitosa de tareas, fomentando la reflexión emocional del alumnado en este sentido. 2) Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. 3) Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Creencias	1) El proceso de enseñanza-aprendizaje se construye de forma gradual a partir de las creencias de los estudiantes hacia las situaciones aleatorias, las cuales se manifiestan por medio de sus intuiciones primarias.

3.6 Faceta mediacional

En la faceta mediacional se recogen aquellas variables que configuran el medio, en el sentido más amplio, en que se desarrolla la secuencia didáctica. Se distinguen aquí los recursos materiales y tecnológicos que se emplean, las condiciones del aula y los recursos temporales.

El uso de recursos didácticos, ya sean nuevas tecnologías, manipulables o de cualquier otro tipo, siempre ha de tener una finalidad didáctica. En otras palabras, no deben introducirse simplemente porque exista una tendencia o una moda, sino que hay que tener en cuenta el contexto en el que se van a aplicar. Sin embargo, la división en seis facetas del proceso de enseñanza-aprendizaje propia del EOS relativiza esta cuestión. Por ejemplo, si se utiliza un simulador para mostrar lo que ocurre cuando se lanza un dado un gran número de veces, pero la actividad se lleva a cabo en un momento en el que no se han presentado todavía los conceptos previos necesarios, la idoneidad epistémica será baja en este sentido, aunque mediacionalmente sea adecuado. De esta forma, en la faceta mediacional repercute de forma positiva el empleo de diferentes tipos de recursos, bastando que se empleen para contextualizar objetos de la configuración epistémica, pues su empleo significa una mayor variedad de situaciones.

Las condiciones del aula, el número de alumnos y el horario son variables más pedagógicas que didácticas, puesto que no influyen directamente en los conocimientos matemáticos que se ponen en juego. Ahora bien, está claro que son factores que afectan al desarrollo de la secuencia. Un elevado número de alumnos aumenta la probabilidad de que se produzcan episodios de disrupción y dificulta la realización de sesiones enfocadas en el trabajo autónomo, al tener que dividir la atención del profesor. En cuanto al horario, la disposición de los alumnos no es la misma a última hora o después del recreo, que a primera.

De hecho, dependiendo de cómo se estructure el horario en el centro educativo y los descansos entre sesiones, el comenzar la clase después del período de recreo puede implicar una pérdida de tiempo lectivo. Pero los recursos temporales no incluyen solo el tiempo de enseñanza presencial, sino que también hay que contar con el no presencial, que incluye el tiempo de aprendizaje y maduración de los contenidos y el de realización de tareas para favorecer este proceso.

3.6.1 Indicadores particularizados de la idoneidad mediacional

Los indicadores de la idoneidad mediacional se sintetizan en la Tabla 5 a partir de la descripción anterior, al igual que se ha realizado para el resto de las facetas del proceso de instrucción.

Tabla 5: Indicadores particularizados de la idoneidad mediacional.

COMPONENTES	*INDICADORES*
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores)	1) Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten aportar experiencias válidas para progresar en los diferentes significados de la probabilidad (informal o intuitivo, frecuencial y clásico). 2) Se contextualizan las definiciones y propiedades, a partir de situaciones y modelos concretos y visualizaciones.

Número de alumnos, horario y condiciones del aula	1) El número y la distribución de los alumnos permiten llevar a cabo la enseñanza pretendida. 2) El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). 3) El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (de enseñanza colectiva y de tutorización, tiempo de aprendizaje)	1) El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida. 2) Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema, no avanzando en los diferentes significados de la probabilidad (informal o intuitivo, frecuencial y clásico) hasta que no se ha afianzado el anterior. 3) Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

3.7 Faceta ecológica

En Aragón, comunidad autónoma española donde se ubica el centro del grupo de alumnos objeto de estudio, la normativa curricular para el curso actual 2015/2016 es la que establece el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre (MECD, 2014).

El inicio del curso actual 2015/2016 fue complicado en este sentido, ya que hasta el último momento no se tuvo certeza sobre el marco curricular al que atenerse para desarrollar las programaciones didácticas. La Orden autonómica de 15 de mayo de 2015 (DGA, 2015), que regulaba el nuevo currículo de la Educación Secundaria según los preceptos de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (MECD, 2013), fue derogada poco después mediante la Orden de 9 de julio de 2015 (DGA, 2016), tras la toma de posesión del nuevo gobierno, como consecuencia de las elecciones autonómicas. Por este motivo, y siguiendo las instrucciones de inicio de curso del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, el currículo vigente pasaba a ser el desarrollado a nivel estatal.

La estructura del currículo sigue siendo similar al de la LOE, dividiendo los contenidos en los siguientes bloques:

1. Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas,
2. Números y Álgebra,
3. Geometría
4. Funciones
5. Estadística y Probabilidad.

La principal diferencia es que en la LOE, se diferenciaba un bloque de Números y un bloque de Álgebra. De igual forma, el primer bloque, debe considerarse como un elemento transversal, que debe tratarse en todas las unidades didácticas. Cabe observar que, al igual que en la LOE, el bloque de Estadística y Probabilidad, donde se enmarca la unidad objeto de estudio, se ha dejado para el último lugar. De esta forma, los libros de texto, también reservarán los últimos lugares para dicho bloque. Y, consecuentemente, la mayoría de los profesores, también.

3.7.1 Indicadores particularizados de la idoneidad ecológica

Los indicadores de la idoneidad ecológica se sintetizan en la Tabla 6 a partir de la descripción anterior, al igual que se ha realizado para el resto de las facetas del proceso de instrucción.

Tabla 6: Indicadores particularizados de la idoneidad ecológica.

COMPONENTES	INDICADORES
Adaptación al currículo	1) Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares, estatales y autonómicas., reflejándose en el documento de la programación didáctica.
Apertura hacia la innovación didáctica	1) Se introducen innovaciones didácticas basadas en la investigación y la práctica reflexiva. Es decir, se tienen en cuenta trabajos de otros autores reconocidos por sus publicaciones en revistas de prestigio. 2) Se integran nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en la secuencia didáctica. a. Simulaciones para trabajar en el aula la aproximación frecuencial. b. Aplicaciones y vídeos para mostrar contextos variados y argumentar en torno a ellos.
Adaptación socioprofesional y cultural	1) Se evitan formalismos innecesarios (teoría axiomática) y los contenidos se centran en la formación de creencias e intuiciones correctas que sirvan para la toma de decisiones en contextos reales. 2) Se utilizan contextos representativos de situaciones cercanas al alumnado.
Educación en valores	1) Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico, favoreciendo la interacción y el diálogo en igualdad de condiciones. 2) Se proponen situaciones en las que se muestra la baja probabilidad de ganar en la mayoría de los juegos de azar, con el fin de construir creencias que permitan combatir la ludopatía.

4 EXPERIENCIA DE AULA EN 3º DE ESO

4.1 Diseño de la unidad didáctica objeto de estudio

La unidad didáctica sobre la que se enfoca el presente estudio es la correspondiente a los contenidos de probabilidad en 3º de ESO. En la programación didáctica del departamento se indican estos contenidos de acuerdo con la normativa vigente y se relacionan con los criterios de evaluación, señalando además los mínimos exigibles. Por otro lado, en la programación se recoge la referencia del libro de texto de la editorial Anaya (Colera, García, Gaztelu y Oliveira, 2007), que servirá como base para el cumplimiento de todo lo anterior. En la elección del libro se tuvo principalmente en cuenta el hecho de que es el que se ha utilizado en años anteriores y que, por lo tanto, está disponible en el programa de gratuidad de libros de texto que gestiona la asociación de padres del instituto. Dicho libro se complementará con las actividades y contenidos necesarios para ajustarse a la nueva normativa.

Los contenidos de probabilidad se tratan en la última unidad del libro de texto, la decimotercera, y así se establece en la programación didáctica departamento de Matemáticas del instituto. No obstante, en reunión de departamento se aprobó tratar el bloque de probabilidad y estadística antes que el de geometría y el de funciones, por lo que las unidades didácticas vistas antes que la de probabilidad fueron las siguientes:

1. Los números y sus utilidades I.
2. Los números y sus utilidades II.
3. El lenguaje algebraico.
4. Ecuaciones.
5. Sistemas de ecuaciones.

La mencionada programación didáctica planifica que, en el tercer trimestre, se desarrollen los contenidos de 5 unidades didácticas. Teniendo en cuenta que el tercer período evaluativo comienza el 14 de marzo y finaliza el 21 de junio, se dispone de 33 sesiones lectivas, de forma que a cada unidad le corresponden entre 6 sesiones, lo que permitiría un ligero margen de desviación.

Teniendo en cuenta estas restricciones temporales, una posible secuenciación se ofrece en la Tabla 7, donde se especifican los contenidos a desarrollar en cada una de las sesiones, a partir de los significados institucionales de referencia que se han recogido en el análisis preliminar de la faceta ecológica. El único contenido que se ha introducido y que no estaba señalado como tal en la normativa, aunque sí en los indicadores o estándares de evaluación, es el significado frecuencial de la probabilidad. Esta decisión de diseño es fundamental desde la perspectiva epistemológica, ya que el indicador de idoneidad más importante en este sentido hace referencia al orden en que se presentan los diferentes significados de la probabilidad. Es decir, lo idóneo es comenzar con el significado intuitivo, seguir con el frecuencial y finalizar con el clásico.

Tabla 7: Contenidos planificados para cada sesión.

SESIÓN	***CONTENIDOS***
1	Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral.
2	Significado frecuencial.
3	Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace.
4	Diagramas de árbol sencillos. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.
5	Permutaciones, factorial de un número.
6	Prueba escrita.

Ya en esta fase de diseño, que podría tildarse de análisis a priori, se aprecian evidentes dificultades para implementar esta secuenciación de contenidos desde el punto de vista mediacional. El análisis preliminar realizado en el capítulo 0 revelaba la importancia de articular los objetos matemáticos mediante la experimentación y la simulación de situaciones probabilísticas. El compromiso entre idoneidad epistémica y mediacional es patente, por lo que se convierte en una clara decisión de diseño que habrá que considerar (Figura 4). La interacción con la idoneidad ecológica es también notoria, ya que el tiempo lectivo disponible lo fija la normativa.

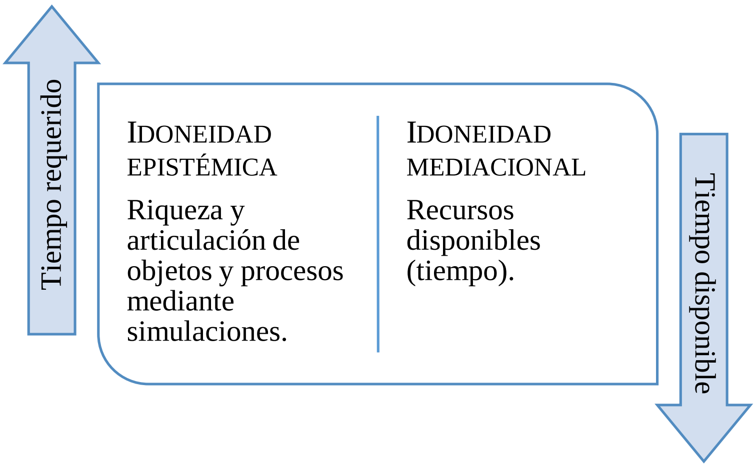


Figura 4: Compromiso de diseño entre la idoneidad epistémica y la mediacional.

Este compromiso ha sido resuelto a priori incluyendo una sesión dedicada al significado frecuencial de la probabilidad, así como dos experimentos reales con lanzamientos de monedas y de dados. En cualquier caso, a pesar de que oficialmente es éste el diseño de la unidad, las dificultades siguen estando presentes, ya que cinco sesiones lectivas son muy pocas para abarcar toda la variedad de sistemas de prácticas y configuraciones didácticas que intervienen en la unidad. Por otro lado, en la Figura 4 únicamente se ilustra el compromiso entre la idoneidad epistémica y la mediacional, en términos de tiempo lectivo. Sin embargo, la interacción entre las diferentes facetas del proceso de instrucción es más compleja. De hecho, se puede argumentar que el primer condicionante de la secuencia didáctica planteada es de origen ecológico, al tener que tratar los contenidos que estipula la normativa en el tiempo que se especifica.

4.1.1 Sistemas de prácticas

Una vez que se ha establecido una secuenciación de los contenidos, el diseño pasa por identificar los sistemas de prácticas que se espera que realicen los alumnos a lo largo de la unidad:

- Distinguir experimentos aleatorios de deterministas, empleando para ello un lenguaje preciso y adecuado.
- Describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar de forma intuitiva, mediante la utilización de los términos adecuados (espacio muestral, caso, resultado, suceso, probable, posible, seguro, improbable, imposible).

- Calcular la probabilidad de que ocurra un suceso de un experimento aleatorio sencillo, obteniéndola a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol u otras estrategias personales.
- Tomar la decisión correcta en una situación de incertidumbre, teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones.

La confección de tablas de frecuencias es un sistema de prácticas que oficialmente se trata ya en 2º ESO, por lo que no creemos conveniente explicitarlo como un sistema de prácticas específico de la unidad didáctica que se está analizando. Sin embargo, la normativa vuelve a considerarlo como un contenido específico de estadística en 3º ESO. Al haber decidido impartir la unidad de probabilidad antes que la de estadística, donde se enmarca de forma natural la confección de tablas de frecuencia, incluiremos el siguiente sistema de prácticas atendiendo a motivos de carácter ecológico:

- Confeccionar tablas de frecuencias absolutas y relativas de un experimento aleatorio.

4.1.2 Objetos y procesos matemáticos

La implementación de los sistemas de prácticas anteriores conlleva la puesta en juego de una serie de configuraciones de objetos y procesos de muy diversa naturaleza.

Elementos conceptuales

La relación de los diferentes significados de la probabilidad es esencial para un aprendizaje real, sin formación de creencias erróneas, de los contenidos de la unidad. Estos significados comienzan con la visión intuitiva y continúan, en orden, con el significado frecuencial y el clásico. En torno a estos conceptos centrales aparecen otros emergentes de los propios sistemas de prácticas, que permiten profundizar en la descripción de las situaciones y elaborar argumentos:

- Experimento aleatorio y experimento determinista.
- Caso o resultado de un experimento aleatorio.
- Suceso simple y suceso compuesto.
- Espacio muestral.
- Frecuencia relativa.
- Probabilidad de un suceso.
- Suceso contrario o complementario.

- Independencia de sucesos y probabilidad condicional.

Los diagramas en árbol presentan un fuerte carácter procedimental y lingüístico, pero, en sí mismos, son un concepto interesante por su función articuladora. Más allá de que permiten describir con detalle un experimento aleatorio, desglosan el espacio muestral del mismo y conjugan la probabilidad de un suceso con la probabilidad de sucesos compuestos: intersección, unión y sucesos condicionados.

Elementos lingüísticos

Las argumentaciones en torno a las situaciones en donde interviene el azar requieren de la utilización de un lenguaje particular, donde términos de uso común como seguro, probable, improbable o posible deben ser convenientemente discutidos, primero, e institucionalizados después.

Las representaciones semióticas no verbales de los conceptos fundamentales del tema son las siguientes:

- Espacio muestral como conjunto (diagrama de Venn).
- Tabla de frecuencias.
- Tablas de contingencia.
- Diagramas de árbol.

Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)

Las definiciones de los conceptos clave de la unidad se proporcionan de forma explícita. Por ejemplo, el espacio muestral es el conjunto que contiene todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. A pesar de enunciar estas definiciones, se observará la asimilación de los conceptos inherentes a las mismas mediante la puesta en juego de los mismos en sistemas de prácticas. Las definiciones permiten matizar los elementos lingüísticos y hacer más precisos los argumentos.

Los procedimientos que se utilizan a lo largo de la unidad son claros y precisos. La utilización de la regla de Laplace, la obtención de frecuencias relativas y la confección de tablas se asimilan fácilmente por el alumnado, aunque será necesario incidir en la relación de sus significados para evitar el surgimiento de creencias e intuiciones erróneas. Será necesario incidir en la elaboración de diagramas de árbol, ya que en ellos se relacionan conceptos, propiedades y otros procedimientos. De hecho, aunque no se especifique en 3º ESO, la probabilidad condicionada aparece de forma implícita en estos diagramas.

Argumentos

El papel de los argumentos en el diseño de la unidad didáctica está dirigido, en parte, a combatir sesgos en el razonamiento e intuiciones y creencias erróneas, así como a guiar la formación de procesos deductivos correctos. Por este motivo, es importante planificar momentos en los que los alumnos puedan argumentar, bien sea en discusiones de aula, guiadas por el profesor, o mediante el trabajo por parejas o en pequeños grupos. Por otro lado, la identificación de los resultados posibles de un experimento aleatorio se lleva a cabo mediante la argumentación y discusión de los posibles escenarios que se dan en cada situación. Además, el paso de la noción frecuencial de probabilidad al significado clásico o a priori se debe argumentar concienzudamente, a ser posible con apoyo experimental, ya que conceptualmente no es trivial.

Procesos

En todas aquellas situaciones en las que se emplee la regla de Laplace para obtener la probabilidad a priori de un suceso en particular, se da un proceso de idealización clave que relaciona el significado frecuencial con el clásico. Por otro lado, la realización de los diagramas de árbol y elaboración de tablas de frecuencia son procedimientos que requieren, en primer lugar, de procesos de análisis y síntesis de los fenómenos aleatorios.

4.2 Implementación

4.2.1 Trayectoria didáctica

La observación de las sesiones (Anexo II) proporciona un registro de los hechos significativos, tanto didácticos como pedagógicos, que tienen lugar en el aula. Este diario, complementado con las producciones de los alumnos, permite describir las trayectorias muestrales de cada una de las facetas de la secuencia didáctica. Siguiendo el modelo de análisis propuesto por Godino et al. (2006), la evolución de cada una de estas facetas puede ser interpretada como una sucesión de realizaciones de procesos estocásticos, cada uno de los cuales hace referencia a una serie de estados comunes en base a patrones de interacción. De esta forma, se obtiene una trayectoria didáctica, donde se enlazan una serie de configuraciones didácticas ligadas a configuraciones epistémicas de objetos y procesos. En investigaciones más recientes (Godino et al., 2014), el análisis de las trayectorias didácticas se lleva a cabo a partir de la noción de hecho didáctico significativo (HDS), ya definido en el marco teórico y metodológico.

La cuestión, por lo tanto, se reduce a identificar HDS en la implementación de la secuencia didáctica. Para ello, se utilizará el principal producto del estudio de los conocimientos didáctico-matemáticos analizados en el capítulo 0; es decir, los indicadores de la idoneidad didáctica en cada una de sus facetas. La utilización de esta herramienta facilita la reflexión docente, guiándola con el propósito claro de evaluar la idoneidad didáctica y efectuar acciones de mejora.

Antes de entrar con detalle en el análisis de los HDS categorizados por facetas, resulta interesante describir la trayectoria didáctica en términos globales. Esto puede hacerse acudiendo al registro de observaciones y desglosando las diferentes configuraciones epistémicas que, a la postre, dan lugar a las correspondientes configuraciones didácticas. En el caso de la trayectoria epistémica (Tabla 8), los patrones de interacción se corresponden con las entidades que identifica la teoría de las funciones semióticas (TFS) en torno a los sistemas de prácticas. De esta forma, dependiendo del tipo de objeto matemático tratado en cada momento, distinguiremos los siguientes estados en la trayectoria muestral: situacional, actuativo, lingüístico, conceptual, proposicional y argumentativo.

Tabla 8: Trayectoria epistémica del proceso instruccional.

UNIDAD OBSERV.	***CONF. EPIST.***	***U. EPIST.***	***DESCRIPCIÓN***	***ESTADO***
S1.1		0	Se propone la actividad de colocar 20 papelitos al azar sobre la mesa.	E1: situacional
S1.2		1	Realización de la actividad.	E2: actuativo
S1.3	CE1	2	Visionado del vídeo.	E6: argumentativo
S1.4		3	Se cuestiona al alumnado sobre las disposiciones de los papelitos.	E6: argumentativo
S1.4		4	Se da una definición de azar.	E4: conceptual
S1.5	CE2	5	Se propone la actividad de lanzar 20 veces dos monedas.	E1: situacional
S1.5		6	Se cuestiona por la probabilidad de que salga cara y cruz.	E6: argumentativo
S1.5		7	Se lanzan las monedas y se registran los lanzamientos, sin más indicaciones.	E2: actuativo
S1.6		8	Los alumnos calculan el porcentaje de veces que aparece cada resultado.	E2: actuativo
S1.7		9	El profesor construye una tabla en la pizarra recogiendo todos los resultados.	E3: lingüístico

S1.8		10	Se pregunta y se discute si el resultado obtenido parece razonable.	E6: argumentativo
S1.9	CE3	11	Se definen los conceptos clave que aparecen en el libro: caso, resultado, espacio muestral.	E4: conceptual
S1.10		12	Se argumentan ejemplos en torno a los conceptos anteriores.	E6: argumentativo
S2.3		13	Más ejemplos sobre los conceptos anteriores.	E6: argumentativo
S2.4	CE4	14	Se plantean actividades del libro sobre espacio muestral e identificación de experimentos aleatorios.	E1: situacional
S2.4		15	Se evoca la notación a emplear para expresar sucesos y espacios muestrales.	E3: lingüístico
S2.4		16	Se deja tiempo para la resolución.	E2: actuativo
S2.4		17	Se pregunta y discute la solución de los problemas.	E6: argumentativo
S2.5	CE5	18	Planteamiento del lanzamiento de la moneda.	E1: situacional
S2.5		19	Los alumnos lanzan las monedas y recogen los resultados.	E2: actuativo
S2.5		20	Se pregunta a los alumnos acerca de la probabilidad de algún suceso del experimento.	E3: lingüístico
S2.5a		21	Resultado en la plataforma	E2: actuativo
S2.5b		22	Argumentación en torno a la experiencia anterior.	E6: argumentativo
S3.1	CE6	23	Aproximación frecuencial (tomando como base la experiencia de la sesión anterior).	E6: argumentativo
S3.1		24	Significado frecuencial.	E4: conceptual
S3.2		25	Se plantea el lanzamiento de un dado y se pone en marcha el simulador.	E1: situacional
S3.3		26	Lanzan el dado y anotan resultados.	E2: actuativo
S3.6		27	Argumentamos en torno al simulador.	E6: argumentativo
S3.7	CE7	28	Actividad. Bolsa con 90 bolas numeradas. Probabilidad de sacar la nº 58.	E1: situacional
S3.7		29	Regla de Laplace, en relación con el significado frecuencial.	E5: proposicional
		30	Solución preguntando a alumnos.	E6: argumentativo
		31	Notación adecuada en la pizarra.	E3: lingüístico
S3.7	CE8	32	Actividad. Bolsa con bolas de dos tamaños.	E1: situacional
S3.7		33	Regla de Laplace, en relación con el significado frecuencial	E5: proposicional
S3.7		34	Solución preguntando a alumnos.	E6: argumentativo
S3.7		35	Notación adecuada en la pizarra.	E3: lingüístico
S4.3	CE9	36	Evocación de conceptos y proposiciones, regla de Laplace significado frecuencial…	E5: proposicional

S4.3		37	Se cuestiona por los experimentos anteriores.	E6: argumentativo
S4.4	CE10	38	Desglosar espacio muestral del lanzamiento de dos dados y calcular la probabilidad de la suma de cada resultado.	E1: situacional
S4.4		39	Evocación de la notación a emplear, representación tabular.	E3: lingüístico
S4.4		40	Los alumnos lo van haciendo.	E2: actuativo
S4.4		41	Se pregunta por el número de casos.	E6: argumentativo
S4.5		42	Evocación de la regla de Laplace.	E5: proposicional
S4.6		43	Representación gráfica.	E3: lingüístico
S4.6		44	Hacen la representación.	E3: lingüístico
S4.7	CE11	45	Actividades sobre regla de Laplace, campamento, ruleta.	E1: situacional
S4.7		46	Lo hacen.	E2: actuativo
S5.1		47	Lo corregimos en la pizarra.	E3: argumentativo
S5.2	CE12	48	Actividad 4 y 5, p.275. P(suma dados)	E1: situacional
S5.2		49	Los van haciendo de forma más o menos autónoma.	E2: actuativo
S5.3		50	Corrección de los ejercicios anteriores en la pizarra. Se discute en grupo	E3: argumentativo
S5.3		51	Evocación regla Laplace.	E5: proposicional
S5.4	CE13	52	Actividad 3, p.280.	E1: situacional
S5.4		53	La hacen solos.	E2: actuativo
S5.4		54	Se evoca la notación.	E3: lingüístico
S5.4		55	Se argumenta la respuesta en torno a la regla de Laplace.	E6: argumentativo
S5.5	CE14	56	Actividad 4, p.280.	E1: situacional
S5.5		57	La hacen de forma más o menos autónoma.	E2: actuativo
S5.5		58	Se discute la solución en la pizarra en una interacción dialógica con el grupo.	E6: argumentativo
S5.5a	CE15	59	Se propone como actividad para casa la actividad 5, p.280.	E1: situacional
S6.1		60	Se realiza en la pizarra.	E6: argumentativo
S6.3	CE16	61	Ficha de problemas (ej 20).	E1: situacional
S6.4		62	Se deja tiempo en clase para que la vayan trabajando.	E2: actuativo
S6.6		63	Se introducen los diagramas de árbol, en lanzamientos con monedas y se sugiere que el 20 (extracción de dos cartas de baraja) se haga así.	E3: lingüístico
S6.6		64	Cálculo de probabilidades a partir de los diagramas de árbol.	E5: proposicional
S7.3	CE17	65	Considerar lanzamiento de moneda 3 veces (ej 21 de la ficha).	E1: situacional
S7.3		66	Se representa el diagrama de árbol en la pizarra y se procede a su resolución.	E2: actuativo
S7.3		67	Probabilidad del suceso contrario.	E5: proposicional

S7.4	CE18	68	Extracciones de 3 cartas sin reemplazo de una baraja (ej 22 de la ficha).	E1: situacional
S7.4		69	Resolución mediante el diagrama de árbol.	E2: actuativo
S7.5		70	Se discute sobre la asignación de probabilidades a cada una de las ramas.	E6: argumentativo
S7.6		71	Se evoca que la probabilidad de cada hoja es el producto de las ramas.	E5: proposicional
S7.7	CE19	72	Se proponen como actividades para casa dos ejercicios de la ficha, el 23 y el 24. El primero es extracción de dos bolas de una urna con reemplazo.	E1: situacional
S8.1		73	Lo resuelve un voluntario en la pizarra.	E2: actuativo
S8.1		74	Se evoca que la probabilidad de cada hoja es el producto de las ramas.	E5: proposicional
S8.1		75	Se representa el diagrama del lanzamiento de dos monedas para clarificar la proposición anterior.	E1: situacional
S8.2	CE20	76	Extracción de dos bolas de urna sin reemplazo.	E1: situacional
S8.2		77	Resolución en la pizarra, obteniendo, entre todos, las probabilidades de cada rama.	E2: actuativo
S8.3	CE21	78	Problema del presentador del concurso.	E1: situacional
S8.3		79	Resolución mediante argumentación en torno a los escenarios posibles, como en un diagrama de árbol.	E6: argumentativo
S8.4	CE22	80	Lanzamiento de 4 monedas.	E1: situacional
		81	Resolución con diagrama de árbol.	E2: actuativo
S9.1	CE23	82	Extracción de dos cartas de baraja, sin reemplazo	E1: situacional
S9.1		83	Resolución autónoma, con pequeñas intervenciones del profesor.	E2: actuativo
S9.2	CE24	84	Lanzamiento de 4 monedas, de nuevo.	E1: situacional
S9.2		85	Resolución autónoma, con pequeñas intervenciones del profesor.	E2: actuativo
S9.3	CE25	86	Planteamiento del ejercicio 26, sobre lanzamientos de tiradores y probabilidades de acierto y fallo.	E1: situacional
S9.3		87	Resolución en la pizarra.	E2: actuativo
S9.4	CE26	88	Planteamiento del 28, sobre dispositivos de seguridad encadenados.	E1: situacional
S9.4		89	Resolución en la pizarra (incompleta, se deja para casa).	E2: actuativo

La anterior identificación de estados en la trayectoria epistémica proporciona una idea del estilo de enseñanza del docente, al menos para esta unidad en concreto. Prácticamente todas las configuraciones didácticas comienzan planteando una situación, en la que se enmarcan unas tareas a realizar. La excepción con la configuración CE6, que comienza argumentando en torno a una experiencia realizada en una configuración previa y la CE9, enfocada a la institucionalización de conceptos y proposiciones emergentes de configuraciones previas.

Después de realizar las tareas, o cuando ya llevan un rato intentando abordarlas, toman el relevo los estados argumentativos o proposicionales, en los que se discuten diferentes formas de solucionar las tareas y se evidencian los objetos y procesos matemáticos que se ponen en juego. El estado lingüístico aparece cada vez que se requiere introducir una notación o sistema de representación nuevo.

Esta alternancia de estados, con abundancia de argumentaciones y de proposiciones precisa de la reserva de gran parte del tiempo lectivo para interacciones, como mecanismo para avanzar en la secuencia de significados de la probabilidad.

4.2.2 Faceta epistémica

Situaciones-problema

A lo largo de la trayectoria didáctica se identifican HDS cada vez que el profesor introduce una situación-problema, bien de forma guiada en la pizarra o bien para que trabajen de forma autónoma los alumnos. Por ejemplo, en las primeras sesiones se observan los siguientes HDS:

HDS_1: *Planteamiento de una situación-problema. Disposiciones aleatorias de objetos sobre la mesa.*

> [S01.1] Introduzco la primera de las actividades, que incide en la distinción entre fenómenos aleatorios y deterministas. Consiste en cortar 20 papelitos más o menos iguales, o 20 bolitas. Una vez se tienen, se indica a los alumnos que las coloquen aleatoriamente, al azar, sobre la mesa.

HDS_2: *Planteamiento de una situación-problema. Lanzamientos de monedas.*

> [S01.5] Introduzco la siguiente actividad. "Ahora vamos a colocarnos por parejas, para realizar 20 lanzamientos de dos monedas. Uno las lanza mientras el compañero anota lo que sale (CC, CX, XX)".

HDS_3: *Planteamiento de una situación-problema. Lanzamientos de dados.*

> [S03.2] […] hacemos la experiencia de la ley de los grandes números (intuitiva) con el dado de papel que hemos hecho antes en clase de tutoría.

Estos tres hechos se consideran significativos porque atienden al indicador correspondiente de la idoneidad epistémica; es decir, se proporciona una muestra representativa de experiencias aleatorias. En el diario de observación se observa que, durante las primeras sesiones, estas experiencias son reales, tratándose de lanzamientos no simulados de monedas y dados, junto con la actividad inicial sobre disposiciones aleatorias.

Por otro lado, también se proponen situaciones mucho menos contextualizadas, a partir de problemas del libro de texto o de la ficha de ejercicios que se emplea como apoyo. Los contextos de estas situaciones son fácilmente imaginables por el alumnado, ya que se trata de lanzamientos de dados, extracciones de bolas de una urna o barajas de cartas, como ejemplifican los HDS siguientes, cuya presencia aumenta conforme nos acercamos al final de la unidad:

HDS_4: *Planteamiento de una situación-problema. Actividades del libro o de la ficha.*

> [S03.7] […] Actividades 1 y 2 de la página 277. Las hacemos entre todos, un alumno lee y los demás discuten la respuesta.

Estos HDS proporcionan una trayectoria epistemológica idónea que comienza en el significado intuitivo de la probabilidad, continúa con la probabilidad como frecuencia relativa, y finaliza con el significado clásico o a priori.

Lenguajes

Cada vez que el docente introduce una representación diferente de un objeto matemático, se produce un HDS que incide en el componente lingüístico de la faceta epistémica. En las primeras sesiones, se fomenta el significado intuitivo e informal de la probabilidad, introduciendo situaciones en las que se trabaja el uso del lenguaje verbal para describir situaciones de incertidumbre y para poder argumentar cuándo un fenómeno es aleatorio y cuándo es determinista.

HDS_5: *Argumentación en torno a una situación-problema. Vídeo donde se explican las características de las agrupaciones aleatorias de objetos.*

> [S01.3] […] Proyecto el vídeo del episodio piloto de Numb3rs en que se realiza un experimento similar, con personas y se explica de forma intuitiva por qué es complicado elegir una disposición al azar.

HDS$_6$: *Significado intuitivo con términos informales. Distinción de fenómenos aleatorios de deterministas.*

> [S02.4] […] Aprovecho para preguntar si predecir el tiempo que hará mañana es aleatorio o determinista. A9 dice que no, puesto que no lo puedes saber con seguridad. Utiliza la palabra "incierto", cosa que me llama la atención.

Conforme avanzan las sesiones, los HDS en torno al componente lingüístico van orientados a introducir objetos más formales, como la notación para desglosar el espacio muestral o describir los sucesos que lo integran. Por otro lado, otros HDS se encaminan a la introducción de representaciones útiles para la descripción esquemática de experimentos aleatorios, con una clara repercusión en la resolución de problemas.

HDS$_7$: *Notación conjuntista. Espacio muestral, sucesos.*

> [S04.4] […] Escribo en la pizarra el primer paso, es decir, $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots\}$, y justo después empiezo a dibujar el conjunto correspondiente en la pizarra, indicando únicamente 5 o 6 de los 36 casos posibles.

Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)

La enunciación de las definiciones se ha llevado a cabo de la misma manera que la evolución epistemológica. Es decir, el lenguaje empleado en la secuencia de trasposición didáctica comienza con un discurso informal, apoyándose en la argumentación en torno al concepto que se define. Más adelante, en la misma sesión o incluso en sesiones posteriores, tiene lugar un acto de institucionalización en el que el docente introduce la definición formal y la notación comúnmente empleada para este nivel educativo

HDS$_8$: *Enunciación verbal de las definiciones. Suceso, caso, espacio muestral.*

> [S01.9] […] Los conceptos son: caso, resultado, espacio muestral. Se enuncian de forma verbal, sin emplear notación simbólica. "Espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio".

El HDS$_8$ (sesión 1), junto con el HDS$_7$ (ya en la sesión4), muestran esta evolución que conduce a la institucionalización de la definición. Una característica de la trayectoria didáctica implementada es el escaso peso que tienen en ella las definiciones formales, pues la mayoría de ellas se enuncian conforme surgen en las situaciones planteadas y, además, no se les pregunta por ellas en la prueba escrita. Las definiciones que se proporcionan son las de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto y probabilidad, siempre articuladas en torno a situaciones en las que se puede argumentar.

La estabilidad de las frecuencias relativas se comprueba tanto experimentalmente, como mediante el empleo de simuladores (HDS_9), siendo este aspecto fundamental para apoyar el paso del significado frecuencial al clásico. Mediante la realimentación que proporcionan estas situaciones, el alumno puede comenzar a formar intuiciones correctas que, en cursos posteriores, culminarán con el desarrollo axiomático y la ley de los grandes números. Sin embargo, a este nivel es suficiente con que observen que la frecuencia relativa tiende a un valor concreto, valor que en algunos casos (dados, barajas, etc.) puede deducirse a priori.

HDS_9: *Simulación para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas.*

[S03] […] En la Figura 5 se muestra la simulación del lanzamiento de un dado.

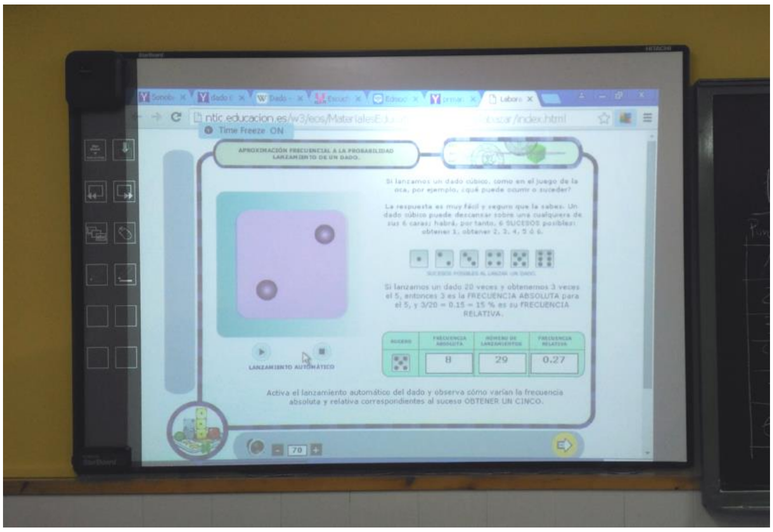


Figura 5: Simulador ejecutándose en la pizarra digital.
(https://dl.dropboxusercontent.com/u/44162055/mistrabajos/labazar/index.html)

Por último, las proposiciones y procedimientos centrales del tema, regla de Laplace y diagramas en árbol, son tratados extensivamente a lo largo de la trayectoria didáctica:

HDS_{10}: *Introducción del significado clásico. Regla de Laplace.*

[S04.3] Para ello, les pregunto acerca del experimento del lanzamiento de una moneda, "¿qué porcentaje nos salía en los lanzamientos individuales?", "¿y en el grupal?". Aprovechando que hoy sí que está A11, rememoro la conversación en la plataforma virtual, pues no todos los alumnos entran normalmente (aunque sí que tienen conexión y PC o móvil para ello). Introduzco la ley de Laplace, en la que la probabilidad de un suceso es la fracción de casos favorables entre los posibles. Lo relaciono con las experiencias realizadas con las monedas y los dados, preguntando a la clase.

HDS_{11}: *Descripción y cálculo de probabilidades mediante diagramas en árbol (fallida)*

[S06.3] Veo que algunos ya han llegado a un ejercicio en el que se atascan, e introduzco los diagramas en árbol (ejercicio 20), pero veo que varios de ellos intentan hacerlo sin utilizar el diagrama.

HDS_{12}: *Descripción y cálculo de probabilidades mediante diagramas en árbol*

[S07.2] […] Les digo que lo vamos a hacer con el diagrama del árbol, que intentamos introducirlo el viernes, pero no hubo manera. Así que vamos a hacerlo paso a paso, pero primero hacemos el 21, también con el diagrama.

Argumentos

No se recoge en el registro de observación la transcripción de las explicaciones del profesor, por lo que no es posible identificar HDS específicos que indiquen que el lenguaje empleado por el docente es apropiado para el nivel educativo. Ahora bien, de forma indirecta, la trayectoria epistémica descrita en los apartados anteriores destaca por la evolución de significados, que se apoya de manera especial en el uso del lenguaje intuitivo, como ya se ha comentado.

A lo largo de la trayectoria didáctica hay multitud de ocasiones donde se promueve la argumentación de los alumnos. Ahora bien, esta argumentación está fuertemente guiada por el docente, siendo prácticamente todas las interacciones entre profesor y alumnos, debido al escaso compromiso con la devolución que muestran éstos últimos. Estos HDS, que bloquean o dificultan el aprendizaje, serán analizados con más detalle en la faceta interaccional.

HDS_{13}: *Interacción dialógica. Experimento de lanzamiento de monedas.*

[S01.8] Pregunto si parece lógico el valor que nos ha salido. Les parece que sí.

HDS_{14}: *Interacción dialógica. Experimento de lanzamiento de monedas.*

[S01.8] Pregunto si parece lógico el valor que nos ha salido. Les parece que sí.

HDS_{15}: *Interacción dialógica. Experimento de lanzamiento de monedas.*

> [S03.1] Les pregunto acerca de los resultados de las monedas, haciendo alusión a la participación de A11 (que no está) en la plataforma virtual. Les pregunto "a qué número se acerca el porcentaje", a lo que contestan que "uno sube y que el otro baja" […]

Relaciones

Los principales objetos y procesos matemáticos tratados en cada una de las sesiones se reflejan en la Tabla 9. Lo primero que llama la atención es el solapamiento y repetición de contenidos. El solapamiento en sí es recomendable, hasta cierto punto, para rememorar y afianzar los contenidos trabajados en sesiones previas. Sin embargo, la trayectoria epistémica revela una excesiva repetición de dos aspectos. Por un lado, la aproximación frecuencial se aborda con experiencias muy similares a lo largo de las tres primeras sesiones. Por otro lado, el significado clásico y los diagramas de árbol comienzan a tratarse ya en la sesión 3, monopolizando el tiempo lectivo a partir de la sesión 4.

Tabla 9: Objetos matemáticos (probabilísticos) tratados en cada sesión.

SESIÓN	***OBJETOS MATEMÁTICOS***
1	Utilización del lenguaje verbal para describir fenómenos aleatorios. Significado intuitivo del azar. Disposiciones aleatorias. Significado frecuencial de la probabilidad. Lanzamiento de dos monedas.
2	Utilización del lenguaje verbal para describir fenómenos aleatorios. Distinción de fenómenos aleatorios y deterministas. Espacio muestral, resultados, sucesos. Significado frecuencial. Lanzamiento de una moneda.
3	Significado frecuencial de la probabilidad. Visión intuitiva de la ley de los grandes números. Lanzamiento de dado y simulación virtual. Interpretación clásica. Ley de Laplace.
4	Significado frecuencial. Interpretación clásica. Ley de Laplace. Espacio muestral de experimentos compuestos (lanzamiento dos dados). Sucesos simples y sucesos compuestos.
5	Significado clásico. Sucesos compuestos.
6	Significado clásico. Diagramas de árbol. Suceso contrario.
7	Significado clásico. Diagramas de árbol. Suceso contrario.
8	Significado clásico. Diagramas de árbol. Espacio muestral. Sucesos.
9	Significado clásico. Diagramas de árbol. Espacio muestral. Sucesos.
10	Prueba escrita.

La anterior enumeración de contenidos tratados en cada sesión resulta poco representativa de la realidad, ya que únicamente hace referencia a los principales objetos conceptuales y algunos significados. Se ha llevado a cabo una descripción más detallada en la Tabla 8.

4.2.3 Faceta cognitiva

Conocimientos previos

Ya en el diseño se tiene en cuenta la posibilidad de que el alumnado no haya tratado los conceptos básicos del tema. Se inicia la primera sesión con el HDS_1: "Planteamiento de una situación-problema. Disposiciones aleatorias de objetos sobre la mesa". Las producciones de los alumnos revelan concepciones erróneas sobre secuencias aleatorias, patentes en la Figura 6, donde los papelitos han sido colocados a intervalos muy regulares, siendo extremo el caso de A12 (Figura 7) que lleva a cabo una disposición completamente equiespaciada. No queda claro en este último caso si lo hace intencionadamente por llevar la contraria (hay múltiples evidencias de conductas disruptivas, buscando el enfrentamiento) o porque realmente cree que eso es algo aleatorio.

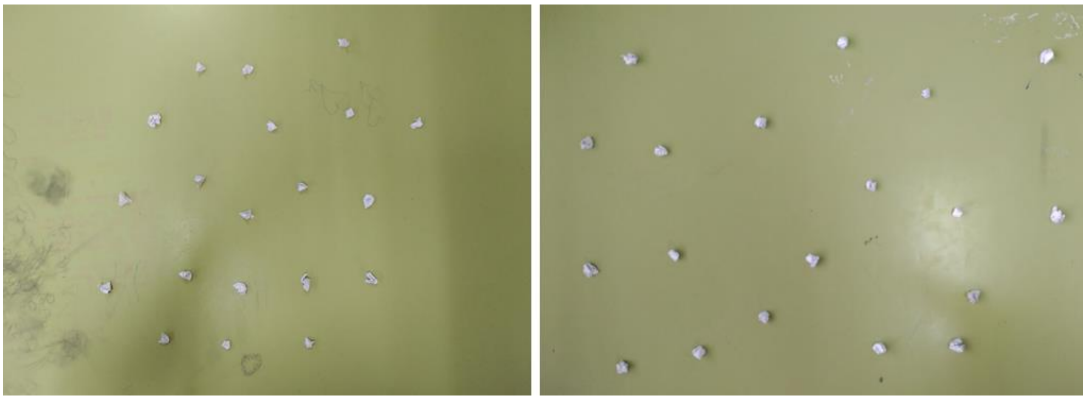


Figura 6: Típicas disposiciones a intervalos regulares (todos menos A5 y A11).

Puede decirse que únicamente dos alumnos efectuaron una distribución aleatoria de los papelitos. Es el caso de A11, que se vio forzado a hacerlo rápidamente, porque ya se había empleado mucho rato y habían acabado todos sus compañeros. Simplemente los tiró. Por otro lado, A5 hizo lo mismo, pero sin tener que apremiarle (Figura 8).

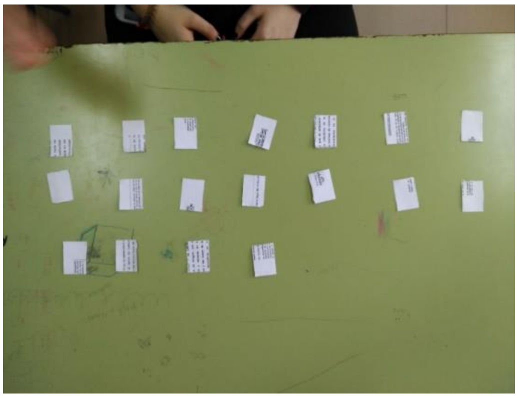


Figura 7: Disposición de A12, completamente regular.

Figura 8: Disposiciones de A11 (izquierda) y A5 (derecha).

Al decidir trabajar el tema de probabilidad antes del de estadística, conviene comprobar en la implementación si el alumnado es capaz de realizar tablas de frecuencias sencillas. En la primera sesión de la trayectoria didáctica ya se plantea el lanzamiento de monedas y se propone a los alumnos que contabilicen ("que lleven la cuenta") de los resultados obtenidos. Esto es algo que se lleva a cabo en la primera sesión:

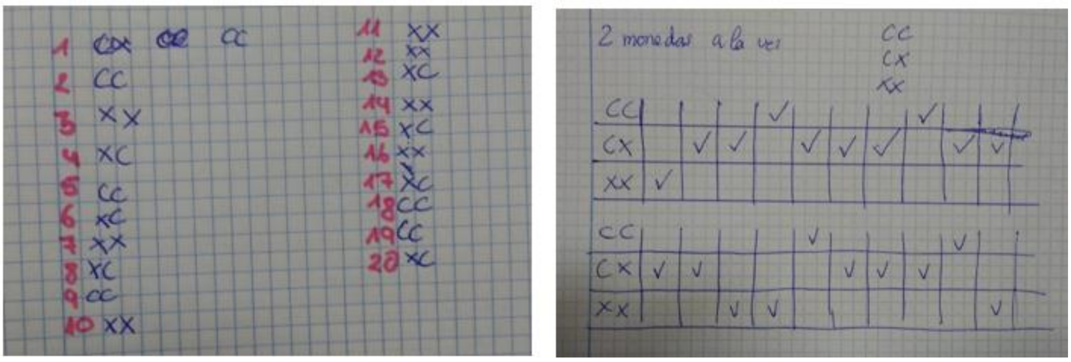


Figura 9: Tablas de A2 y A13 y de A12 y A14 (dcha.).

HDS16: *Realización de una tabla de frecuencias sencilla sin más consignas.*

> [S01.5] […] "Ahora vamos a colocarnos por parejas, para realizar 20 lanzamientos de dos monedas. Uno las lanza mientras el compañero anota y lleva la cuenta de lo que sale (CC, CX, XX)". Pregunto qué creen que va a salir más.

EL HDS16 lleva asociadas una serie de producciones que evidencian una amplia variedad de técnicas personales de representación, pudiendo aventurar que, si se los alumnos trabajaron la recogida de datos en tablas estadísticas en cursos anteriores, no recuerdan muy bien las técnicas estándar o no creen que esta sea una situación donde ponerlas en práctica. Así, las tablas de A2 y A13 y de A12 y A14 (Figura 9), llevan un registro histórico individualizado de cada resultado, que podría ser indicativo de un excesivo enfoque en el resultado aislado. Otras producciones, en cambio, únicamente se centran en contabilizar la frecuencia absoluta de cada resultado del experimento (Figura 10).

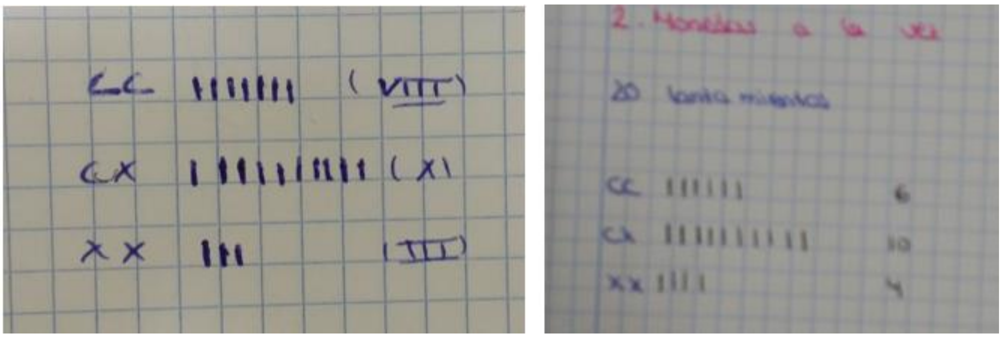


Figura 10: Registro estadístico contabilizando frecuencias absolutas.

Adaptaciones curriculares

De todo el grupo, únicamente A3 requeriría adaptaciones curriculares significativas, debido a que se incorporó con el curso ya empezado, procedente de otro país y con desconocimiento del español. En otras unidades didácticas se le proporcionaron materiales adaptados e incluso fichas con texto en inglés, idioma que le resultaba familiar. Sin embargo, en esta unidad, no se planteó ninguna adaptación, al ser abundantes las situaciones en las que se trabaja por parejas (HDS16) y al arrancar la trayectoria epistemológica desde los fundamentos más intuitivos del azar. Ahora bien, las continuas disrupciones y la escasa autonomía y responsabilidad hacia la devolución a lo largo de las sesiones ocasionaron que se produjera una tendencia hacia actividades individuales.

Aprendizaje

Los contenidos se presentan en el orden idóneo, tal y como se especifica en la faceta epistémica. Respecto a los modos de evaluación, la programación didáctica recoge un peso del 90% para las pruebas escritas y un 10% para la observación del interés y esfuerzo del alumno por la materia. La prueba escrita del tema (Anexo III) fue la misma para todos los alumnos, aunque a A3, debido a sus dificultades con el idioma, se le orientó para que realizara simplemente un diagrama de árbol, evitando aquellas preguntas que requerían argumentaciones más sofisticadas. En la prueba escrita se incluyeron 5 cuestiones:

1. Distinguir fenómenos aleatorios de deterministas. Se evalúa el uso correcto del lenguaje en los argumentos empleados para razonar el porqué.
2. Desglosar un espacio muestral, indicando dos sucesos elementales y dos compuestos. Se evalúan estos conceptos en una situación similar a la presentada en las sesiones lectivas, con el lanzamiento de un dado. Se valora tanto el empleo de la notación adecuada para describir el espacio muestral, como la utilización del lenguaje verbal.
3. Describir mediante un diagrama de árbol un experimento aleatorio (extracción de bolas sin reemplazo). Se vuelve a preguntar por el espacio muestral y por la probabilidad de dos sucesos concretos. Al realizar el diagrama de árbol y usarlo para enumerar todos los casos posibles, esta pregunta tiene cierto contenido de combinatoria.
4. Calcular probabilidades en un contexto o situación cercano al alumno (porcentajes de aprobados en Matemáticas en clase y distinción por sexo). No se exige el empleo del diagrama de árbol, aunque en clase se han tratado ejercicios similares mediante esta técnica. Se evalúa la interpretación y descripción del fenómeno aleatorio, así como manejar la idea de suceso contrario (“que no apruebe la asignatura”).
5. Interpretar la probabilidad como frecuencia relativa. Se plantea el lanzamiento de una moneda (50 veces primero, y 1000 veces después, con frecuencias de 37/50 y 709/1000) y se pregunta por la moneda y si se puede decir algo acerca de la probabilidad de obtener cara. Aquí se evalúa el uso del lenguaje para argumentar en torno a la estabilidad de las frecuencias relativas.

El anterior análisis puede compararse con las proporciones propuestas en cada categoría del test de Green:

- Combinatoria: solamente se utiliza razonamiento combinatorio para enumerar los casos posibles en uno de los apartados de la tercera pregunta, con lo que el peso en la prueba sería alrededor de un 10%, muy inferior al 30% del test de Green.
- Verbal: la primera pregunta se resuelve mediante una argumentación en lenguaje verbal. Se puede hablar entonces de un porcentaje en torno al 20%, frente al 12% de Green, si bien tiene sentido considerarlo algo mayor, pues por lo menos en la última pregunta se exige también una argumentación verbal.
- Probabilística: el resto de las cuestiones, un 70% de la prueba, se enmarcan dentro de la categoría de razonamiento probabilístico de Green, el cual le asignó un peso del 58%.

Las respuestas del alumnado a las cuestiones de la prueba escrita constituyen en sí mismas un indicador de comprensión de los conceptos y demás objetos matemáticos puestos en juego a lo largo de la trayectoria didáctica. En una sesión posterior a la realización, la prueba, ya corregida, se entrega a los alumnos comentando brevemente los errores más comunes. En el Anexo III: Prueba escrita, se muestran los resultados cuantitativos desglosados por preguntas, así como alguna de las respuestas que se comentan a continuación y los criterios de calificación.

Un primer análisis estadístico sencillo de las calificaciones, que se sintetiza en la Figura 11, revela que aprobaron solamente 5 alumnos, lo que representa el 27,8% del total. La calificación media es de 3,91 puntos sobre 10, siendo la desviación estándar de 1,83, lo que quiere decir que los datos están bastante agrupados en torno a ese valor medio. De hecho, apenas hay valores extremos, pues la nota más alta es un 7,25 (A12) y las notas más bajas son los 1,00 obtenidos por A3 y A18.

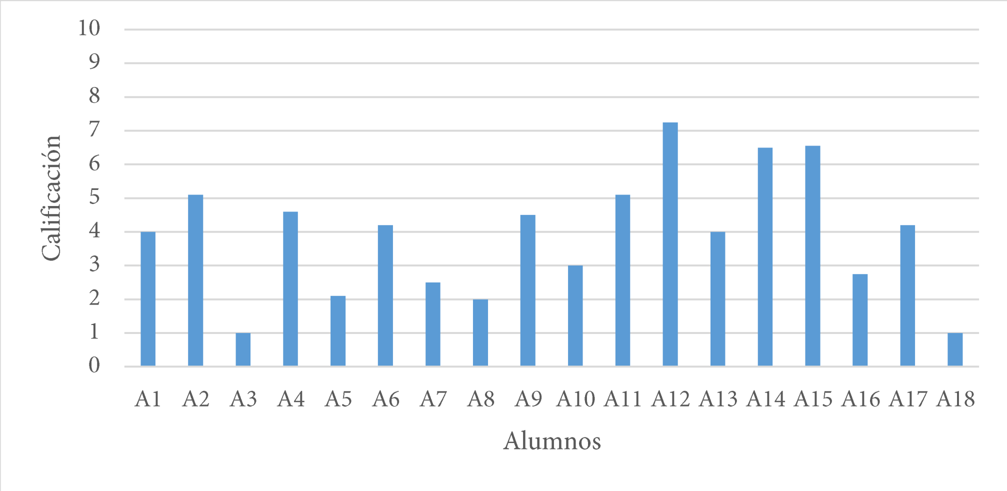


Figura 11: Calificaciones globales de la prueba escrita.

La Figura 12 muestra el grado de éxito medio por alumno en las diferentes cuestiones de la prueba. El mejor índice de desempeño se encuentra en la primera cuestión, puramente argumentativa en torno a la distinción de fenómenos aleatorios de deterministas. Prácticamente la totalidad del alumnado respondió satisfactoriamente, salvo aquellos que no incluyeron razonamiento alguno. La descripción de un espacio muestral sencillo, en la segunda cuestión, tampoco opuso dificultad alguna, con la excepción de, por ejemplo, A16, que confundió la cardinalidad del conjunto con la descripción del mismo. En cambio, muy pocos fueron capaces de inventarse sucesos compuestos, como “sacar número par”.

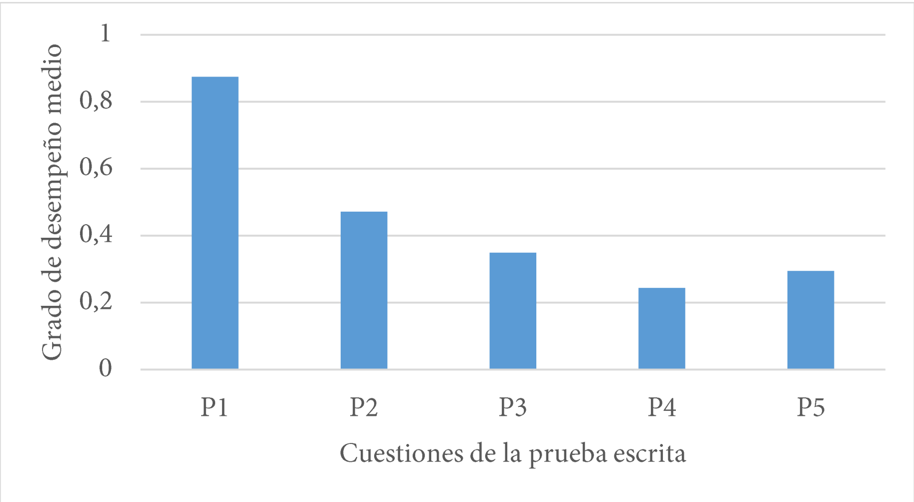


Figura 12: Grado de desempeño medio en las diferentes cuestiones de la prueba escrita.

Tanto la tercera como la cuarta cuestiones tenían como propósito evaluar la capacidad de describir un fenómeno aleatorio, mediante un diagrama de árbol (obligatorio en la tercera) y calcular la probabilidad de algunos sucesos. Los errores observados son diversos. Por ejemplo, A1 realiza bien el árbol y enumera todos los casos posibles en la tercera cuestión (bolas en una urna), pero observa que son 9 casos posibles y decide que cada uno tiene una probabilidad de 1/9, lo que es un indicador del sesgo de equiprobabilidad. Lo curioso de A1 es que, en la cuarta cuestión, donde los datos sobre la composición del espacio muestral se dan en porcentajes, intenta realizar una asignación no equiprobable, pero se confunde.

Las argumentaciones ofrecidas en la última cuestión, que habían de articularse en torno a la frecuencia relativa, son de lo más variado. Muy pocos consiguieron ofrecer un argumento satisfactorio (A10). Lo habitual ha sido no distinguir entre frecuencia relativa y probabilidad.

4.2.4 Faceta interaccional

Interacción docente-discente

El primer indicador de la interacción docente-discente busca comprobar si la presentación del tema fue adecuada por parte del docente; es decir, si fue clara, organizada, comprensible y enfatizando los conceptos clave del tema. Al asumir el docente el papel de investigador, la valoración de este indicador parece muy subjetiva. Al igual que la propia percepción del docente sobre su labor, las impresiones del alumnado también están sujetas a sesgos importantes.

HDS_{17}: *Interacción en la plataforma, una vez realizada la prueba escrita.*

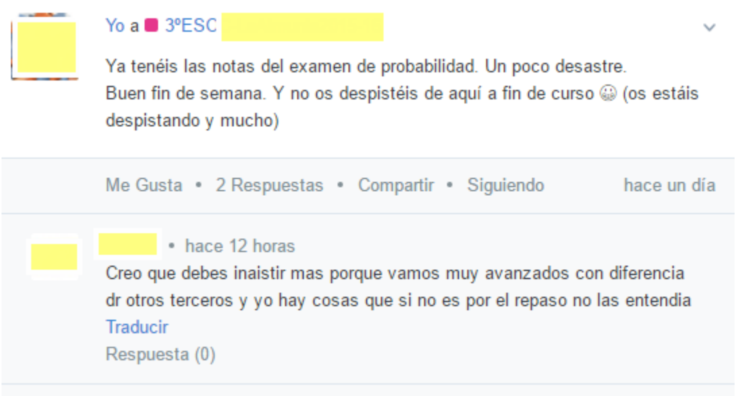


Figura 13: Interacción con A10 en la plataforma al respecto del proceso de estudio.

De hecho, como docente la percepción es que se ha insistido mucho en procedimientos como la regla de Laplace y los diagramas de árbol, dedicando varias sesiones a ellos. Sin embargo, A10 comenta en la plataforma (Figura 13) que si no fuera por el apoyo que recibe fuera del horario lectivo no sería capaz de superar la asignatura y, en concreto, la unidad que nos ocupa.

Interacción entre alumnos

Los argumentos, en el diseño, juegan un papel central. Se busca favorecer la interacción entre alumnos, dando la oportunidad de utilizar el lenguaje verbal en una serie de contextos diversos. Por eso, se procura dedicar momentos en los que los alumnos trabajan en parejas la resolución de situaciones aleatorias. A priori, la estrategia parece adecuada, ya que no es un grupo grande y la organización del espacio de clase permite que el profesor se pasee entre los alumnos atendiendo las dudas. Únicamente se identifica un HDS en el que esta metodología funciona con este grupo.

HDS_{17}: *Interacción por parejas o en pequeños grupos. Resolución de situaciones en las que interviene el azar.*

> [S05.2] Hoy están puestos por parejas. Tomo la decisión de dejarlos así, ya que en tutoría han trabajado bien, y no quiero perder tiempo cambiando los sitios. Observo que comentan los ejercicios entre ellos y que tienen dificultades

El resto de HDS correspondientes a la faceta interaccional, dan muestras de unos niveles de disrupción que bloquean la acción de enseñanza-aprendizaje.

HDS_{18}: *Interacción por parejas o en pequeños grupos. Resolución de situaciones en las que interviene el azar. Disrupción generalizada.*

> [S06.3] Siguen hablando mucho y dispersándose al hacer los ejercicios. Mientras trato de que se pongan a la faena los que no lo están haciendo, los que sí lo están haciendo me preguntan […]

Todo esto conduce a una reducción importante al tiempo que se dedica a las interacciones entre alumnos, decantando la balanza hacia las interacciones guiadas docente-grupo.

Autonomía

Los HDS observados dentro de este componente ponen de manifiesto unos niveles de autonomía y responsabilidad extremadamente bajos. Los olvidos del material son frecuentes en ciertos alumnos, hecho que parecen buscar de manera intencionada para colocar su mesa junto a la de algún compañero. Por otro lado, a lo largo de la trayectoria didáctica se aprecian múltiples episodios de disrupción, alguno de ellos muy grave. La interacción con otras facetas es importante, pues incide de forma negativa en el tiempo lectivo efectivo, al tener que resolver estos conflictos en lugar de avanzar en los contenidos. Por otro lado, se resiente también la idoneidad cognitiva, al no ser factible trabajar por parejas o en pequeños grupos.

HDS_{19}: *Distracción del alumnado.*

> [S02.4] […] Tienden a distraerse y a hablar entre ellos, no de matemáticas.

HDS_{20}: *Falta de responsabilidad discente.*

> [S06.0] Tengo que elevar la voz y mostrarme autoritario para que saquen cuaderno y libro. A5 tarda más de la cuenta, habla y se ríe con sus compañeros, no ha traído el libro. Le mando al final de la clase mostrándome tajante. Me dice que no tiene libro (no es el primer día que se le olvida). Le digo que no se preocupe, que leeremos los ejercicios que hacemos en la pizarra y que luego trabajaremos con una ficha. Le recuerdo también que es su responsabilidad el traer el material.

A todo ello se suma la baja implicación del alumnado con los deberes y con el estudio personal. Desde principio de curso, la tónica ha sido la misma. No se han mandado muchas tareas específicas para su realización en casa, pero cuando se han propuesto, únicamente A1, A9, A10, A11, A12, A13, A14 y A17 las traían hechas de forma regular. Y la realidad es que, todos menos tres aprovechaban las clases de refuerzo con profesores particulares o en academias para realizar las tareas. De esta manera, además de la incidencia negativa en el fomento del trabajo autónomo, se produce una diferencia de significados entre lo que se enseña en el aula y lo que se trabaja fuera de ella.

Evaluación formativa

Más allá de la prueba escrita, apenas ha habido momentos en los que se produce una evaluación formativa con realimentación que indique el nivel de logro. Los momentos reservados para la interacción, donde identificar sesgos y creencias erróneas, se ven dificultados por acciones de disrupción y pérdida de atención.

4.2.5 Faceta afectiva

Resulta especialmente complicado describir de forma objetiva la trayectoria afectiva cuando es el propio docente el que realiza el papel de observador y de investigador. Siendo conscientes de esta dificultad, se han tratado de minimizar los sesgos en la observación de alguno de los componentes del plano afectivo. De esta manera, para las emociones se ha utilizado el mapa de humor de los problemas, cuyos resultados también pueden ser un indicador de ciertas actitudes. El empleo de este registro permite, idealmente, registrar las respuestas emocionales instantáneas ante el planteamiento y durante la resolución de una tarea. La observación directa no puede ofrecer el mismo nivel de detalle, y siempre estaría sujeta a la interpretación de los gestos y acciones del alumno.

Intereses y necesidades

No se ha realizado un estudio específico en torno a los intereses específicos del grupo de alumnos. La mayoría de las situaciones que se plantean en las tareas son las típicas de la probabilidad; esto es, lanzamientos de monedas y dados, extracciones de bolas en urnas opacas, etc. Ahora bien, el siguiente hecho didáctico muestra que se ha procurado señalar la importancia del razonamiento probabilístico para la toma de decisiones, en un contexto que, si bien no es cercano para el alumnado, ilustra muy bien la potencia de este tipo de argumentaciones.

HDS_{21}: *Problema del presentador del concurso. Toma de decisiones.*

> [S08.3] […] Les digo que es el de la película 21Blackjack. Algunos alumnos, la mitad, ya lo habían visto, bien en taller con otra profesora o bien conmigo en una tutoría en la que estaban ausentes gran parte de ellos. Como es corto y me parece interesante, se lo pongo. Es el problema de Monty Hall o del presentador del concurso. Los que ya lo habían visto saben que hay que cambiar de puerta. Les pido que lo expliquen al resto. Y la explicación que dan es que la probabilidad de una puerta pasa a la otra (1/3+1/3=2/3) que es la misma que dan en los diálogos de la película.

Emociones

Con la utilización del mapa de humor de los problemas se está reservando un momento del tiempo lectivo específico para la reflexión emocional. Además, mediante los mapas se proporciona una base donde manifestar aspectos afectivos que, de otra manera, pasarían completamente desapercibidos en el proceso de estudio, cuando la realidad es que su importancia es máxima en el momento de asumir las tareas y poner en marcha estrategias de resolución de problemas.

HDS$_{22}$: *Introducción del mapa de humor de los problemas. Atención al plano afectivo.*

> [S05.2] […] vamos a hacer las actividades 4 y 5 de la página 279, con el mapa de humor de los problemas. Se muestran extrañados cuando les doy las fichas y procedo a explicarlas con calma. Igualmente, explico que deben marcar aquellos estados con los que se sientan más identificados.

La ficha empleada para recoger los resultados del mapa de humor se muestra en el Anexo IV. El análisis de los resultados, obtenidos a partir de la quinta sesión, se llevó a cabo con una hoja de cálculo mediante técnicas estadísticas descriptivas. A modo de ejemplo, en el Anexo IV también se incluyen las entradas correspondientes a A1. El objetivo de este análisis es encontrar indicios de HDS, que respondan a los indicadores de idoneidad.

Aparte de A3, cuyo conocimiento del idioma no era suficiente todavía como para comprender los matices de cada uno de los estados emocionales del mapa, no se dispone de los datos de A4, porque perdió la ficha. Los resultados se resumen en la gráfica de la Figura 14, donde P, D, F, indican si esas emociones se manifestaron al principio (P), durante (D) o al final (F) del proceso de resolución

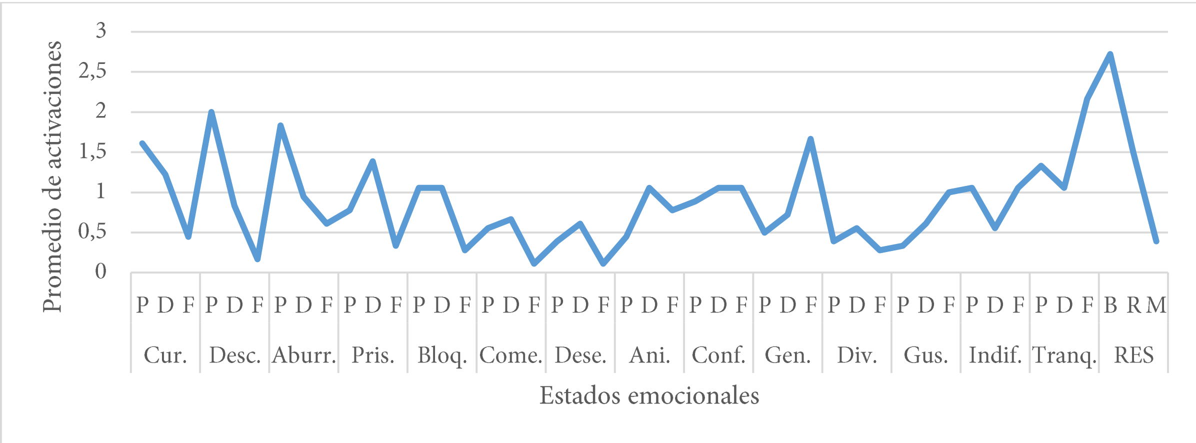


Figura 14: Síntesis de los datos emocionales recogidos con el mapa de humor.

Se desprende que las emociones que más manifiestan los alumnos en el momento de comenzar la resolución de un problema son las de desconcierto, aburrimiento y tranquilidad. La dicotomía entre los desconcertados y los tranquilos se traduce en una alta correlación con el desempeño en la resolución. Los alumnos que están tranquilos, suponemos, saben cómo afrontar el ejercicio, mientras que los desconcertados no saben por dónde empezar.

Es interesante la evolución del bloqueo, pues aparece bastante al principio y durante la realización de la tarea, mientras que al final, algunos alumnos consiguen resolver la situación y cambian de estado.

Finalmente, el último indicador del componente emocional busca constatar si se han resaltado las cualidades de estética y precisión de las matemáticas. A lo largo del curso, ha sido habitual que los alumnos pregunten acerca de la utilidad de los contenidos, a pesar de recordarles que han optado por Matemáticas Académicas, orientadas a la realización del Bachillerato. Resulta curioso, por tanto, que no haya surgido esta pregunta en la secuencia didáctica de probabilidad. No se ha indagado en las causas reales, pudiendo deberse tanto a una posible motivación intrínseca hacia el tema como a la orientación de alguna de las situaciones hacia la toma de decisiones razonadas, habilidad cuya utilidad es patente.

Actitudes

El análisis de los mapas de humor de los alumnos individuales muestra una tendencia a mostrar emociones más positivas hacia las sesiones finales de la trayectoria didáctica. Se trata de un fenómeno deseable, puesto que la ejercitación de los conceptos y procedimientos de la unidad proporciona a los alumnos una mayor confianza para afrontar situaciones diversas.

HDS_{23}: *Superación del bloqueo en la resolución de una situación-problema. Trayectoria emocional de A1.*

> [S09.4]Datos del mapa de humor de A1 al resolver el problema 28 de la ficha. Muestra bloqueo al principio y durante, pero tranquilidad al final. Resolución satisfactoria.

Creencias

Las creencias del alumnado acerca de los fenómenos aleatorios constituyen uno de los pilares del diseño de la secuencia didáctica, encontrándose HDS en la implementación que muestran que se han tenido en cuenta como punto de partida para la negociación de significados.

HDS_{24}: *Interacción dialógica. Análisis intuitivo del lanzamiento de dos monedas.*

> [S01.5] Pregunto qué creen que va a salir más. El alumno A15 dice que todas por igual, pero luego otros compañeros dicen que no, que CX saldrá más. A15 lo piensa y dice que "Ah, claro".

Sin embargo, se detectan otros fenómenos que influyen de forma directa en la implementación, repercutiendo en la faceta mediacional y ecológica. Se trata de que, tanto familias como alumnos, han interiorizado un sistema de creencias en torno a las funciones del centro educativo que juega en contra de la planificación y los objetivos establecidos tanto por la normativa como por los docentes. De esta forma, los HDS observados sugieren que se relativiza la importancia de acudir al instituto. Cada vez que hay actividades extraescolares y, por ese motivo (justificado) faltan unos pocos alumnos, ocurre que otros 5 o 6 prefieren quedarse en casa (injustificado), de forma consentida por las familias. Igualmente, a lo largo del curso se ha constatado la ausencia de alumnos en lunes en varias ocasiones, por haber tenido comuniones de familiares, viajes en fin de semana o cualquier otra excusa similar.

HDS_{25}: *Ausencia injustificada de gran parte de alumnos.*

> [S03] Por ello, han faltado los alumnos que se han apuntado a dicha actividad extraescolar y los que han decidido quedarse en casa. Llamando por teléfono a las familias de los alumnos que tenían que haber venido, pues soy tutor, me dicen que como iban a ir pocos, para no hacer nada, mejor se quedaban en casa.

Ya se ha comentado que varios alumnos acuden a clases de refuerzo con profesor particular o a academias, sin necesitarlo. Es un fenómeno que se ha comentado con otros docentes (reunión de tutores en el Anexo II) y que forma parte de un sistema de creencias muy arraigado en la comunidad.

4.2.6 Faceta mediacional

Recursos materiales

Se emplean tanto objetos manipulables (dados, monedas), como simulaciones virtuales, como vídeos para introducir situaciones de enseñanza (problema del presentador del concurso). La trayectoria didáctica ofrece, pues, un alto grado de contextualización.

Número de alumnos, horario y condiciones de aula

El grupo consta de 18 alumnos, 14 chicas y 4 chicos. Siendo la ratio máxima de 20 alumnos por aula, se puede considerar un grupo pequeño dentro del ecosistema normativo. Los alumnos han tenido clase de Matemáticas tres días a la semana, según el horario que se indica en la Tabla 10 :

Tabla 10: Horario de Matemáticas del grupo de alumnos.

INICIO-FIN	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
8:30-9:20		Tutoría			
9:25-10:15		MAT			
Recreo					
10:35-11:25					
11:30-12:20					
Recreo					
12:40-13:30	MAT				MAT
13:35-14:25					

El impacto de este horario en el tiempo lectivo se describe en el apartado siguiente. En lo que respecta a las condiciones de aula, éstas se muestran más que aceptables, con un equipamiento que incluye ordenador, pizarra digital con proyector y altavoces, además de la pizarra de tiza tradicional.

Tiempo

En cuanto al tiempo lectivo, oficialmente, las sesiones son de 50 minutos. Ahora bien, los lunes y los viernes la clase comienza justo después del segundo recreo. Esto quiere decir que hay un tiempo de unos 5 minutos que se pierde, entre que los alumnos llegan a clase, remolonean y se sientan. Por este motivo, al final de la unidad didáctica se ha llegado a perder un tiempo equivalente a media sesión. A lo largo de la trayectoria didáctica se observan numerosos HDS en este sentido:

HDS_{26}: *Pérdida de tiempo lectivo por retrasos al entrar a clase.*

> [S6.0] Tardan mucho y remolonean en llegar del recreo. Tengo que elevar la voz y mostrarme autoritario para que saquen cuaderno y libro.

Otro factor determinante es que hay un lapso de dos días lectivos entre las dos primeras sesiones y la del viernes. Con ello, se pierde cierta capacidad de seguimiento cercano de la asignatura y la posibilidad de efectuar acciones de recuerdo constante a los alumnos.

4.2.7 Faceta ecológica

Adaptación al currículo

Se han tratado todos los contenidos que especifica la normativa, salvo las permutaciones y el factorial de un número. La introducción de estos conceptos hubiese exigido un mayor peso en el razonamiento combinatorio, requiriendo la introducción de un nuevo espectro de situaciones donde emergiesen de forma natural. Las seis sesiones inicialmente planeadas se convirtieron en diez, penalizando por lo tanto la idoneidad mediacional, lo que justifica el no haber considerado estos contenidos para la consecución de los criterios establecidos por la normativa.

Apertura hacia la innovación didáctica

El mero hecho de haber llevado a cabo la revisión de los conocimientos didáctico-matemáticos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en el capítulo 3, es en sí mismo un excelente indicador de innovación didáctica. La metodología de la ingeniería didáctica, por otro lado, sienta las bases de cualquier proceso de mejora o innovación que pudiera llevarse a cabo en el siguiente curso.

Adaptación socio-profesional y cultural

Los HDS que se enmarcan dentro de este componente ecológico son prácticamente los mismos ya comentados en la faceta cognitiva y la afectiva. El uso del lenguaje verbal, muy informal al principio y que, progresivamente, se hace más preciso, contribuye a la formación de creencias en las que el razonamiento probabilístico correcto es esencial para la toma de decisiones óptimas en contextos reales. En la adaptación cultural, en cambio, se identifican hechos contrapuestos. Por un lado, se proponen situaciones cercanas al alumnado, pero, por otra parte, la idiosincrasia propia de gran parte de la comunidad acerca de la función del instituto, revela una inadaptación de los objetivos del diseño.

Educación en valores

Los múltiples momentos reservados para argumentaciones evidencian un intento de favorecer el pensamiento crítico. Ahora bien, en muchas de las sesiones el peso de la interacción ha tenido que ser asumido de forma autoritaria.

Por otro lado, al no introducir el concepto de factorial ni estrategias sofisticadas de conteo, no se han tratado con detalle situaciones aleatorias en el contexto de juegos de cartas, apuestas y casinos.

5 VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA. PROPUESTA DE CAMBIOS EN EL DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA.

5.1 Faceta epistémica

Los HDS identificados en la implementación en base a los criterios de idoneidad epistémica muestran la realización de una trayectoria epistémica óptima, mostrando de forma articulada los diferentes significados de la probabilidad y empleando experiencias reales y simulaciones. Sin embargo, no se ha encontrado ningún HDS que evidencie que se hayan propuesto situaciones de generación de problemas sobre fenómenos aleatorios, sino que todas han venido dadas de antemano por el profesor, el libro o la ficha.

En el plano lingüístico, la observación permite comprobar que se han trabajado múltiples registros para describir las experiencias y situaciones en las que interviene el azar. Se echa en falta la utilización de tablas de contingencia como contrapunto a los diagramas en árbol, y un mayor énfasis en la representación conjuntista. La planificación original a cinco sesiones, más la sesión dedicada a la prueba escrita, no dejaba espacio para incluir el tratamiento de un número mayor de representaciones, así que se optó por los diagramas en árbol. Al final, la implementación se extendió durante 10 sesiones, si bien algunas de ellas no fueron aprovechables al completo debido a la ausencia de un alto porcentaje de alumnos.

La recomendación de mejora en este sentido consiste en planificar el diseño para diez sesiones reales, introduciendo más registros y representaciones, así como reservar espacios para que los alumnos generen sus propias situaciones. El compromiso entre idoneidad epistémica y ecológica y mediacional surge entonces de forma natural, puesto que, si enriquecemos esta unidad didáctica dándole más recursos temporales, habrá otras unidades que deberán tratarse en un menor número de sesiones. Un compromiso similar tendría lugar si se decide aumentar el tiempo que deben dedicar los alumnos a las tareas propias de la unidad fuera del aula. Es decir, trasladar gran parte de la cronogénesis fuera del tiempo lectivo. Además de que ecológicamente se resentiría la idoneidad del proceso de instrucción, no parece que, con este tipo de alumnado, poco implicado con la devolución, se consiguiera una asunción real de los objetivos de aprendizaje.

5.2 Faceta cognitiva

Se ha tenido en cuenta la posibilidad de que el grupo de alumnos apenas hubiese tratado contenidos del bloque de probabilidad y estadística. De hecho, con la experiencia de la primera sesión ya se evidenciaron sesgos en el razonamiento probabilístico (concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias) y los propios alumnos comentaron que prácticamente no habían visto nunca los temas de probabilidad. Así, la secuencia de presentación de los contenidos ha seguido la trayectoria óptima, partiendo de una aproximación intuitiva, a partir la cual se presenta el significado frecuencial y, posteriormente, se negocia el significado a priori o clásico. Todo ello contribuye a una elevada idoneidad cognitiva en cuanto a que el contenido está en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.

En lo que respecta a las adaptaciones curriculares y la atención a las diferencias individuales, la idoneidad se ha visto resentida porque, a pesar de haber reservado bastante tiempo lectivo al trabajo por parejas, finalmente tuvo lugar una deriva importante hacia patrones de interacción totalmente dirigidos por el docente, en una enseñanza que podría catalogarse como más tradicional. Las causas de esta desviación respecto al diseño hay que buscarlas en las actitudes y creencias del alumnado hacia el estudio y el trabajo en el aula, mientras que se puede proponer como mejora el establecimiento de un nuevo contrato didáctico. Es decir, si el docente pretende dar un peso importante a la interacción y al trabajo en clase, esto es algo que debería quedar claro ya desde la programación didáctica, estableciendo un mayor porcentaje para el trabajo en clase (en la experiencia descrita, el 90% de la calificación ha recaído en la prueba escrita). Al no estar acostumbrados a este tipo de enseñanza, la realimentación debería ser constante, especialmente al principio, de manera que los alumnos tuvieran conocimiento de sus indicadores de logro.

Esto último enlaza con la baja idoneidad detectada en el apartado evaluativo de los aprendizajes logrados. Por una parte, la baja puntuación media de la prueba escrita indica que los objetivos de aprendizaje no han sido alcanzados por gran parte de los alumnos. Por otra, la importancia extrema que se le da a la prueba escrita en la programación es el comienzo de una compleja serie de interacciones entre facetas. El posible intercambio de información que tuviera lugar en las argumentaciones y discusiones de clase o en pequeños grupos sería un excelente instrumento de evaluación formativa. Ahora bien, al no verse apenas reflejado de forma directa en la calificación, el alumnado no se implica y el docente se ve obligado a cambiar el diseño, como ya se ha comentado.

5.3 Faceta interaccional

Se trata de una de las facetas cuya idoneidad se ve más perjudicada en la implementación. A pesar de ser uno de los puntos clave del diseño inicial para la negociación de significados, las interacciones entre alumnos han sido finalmente pocas y no muy productivas, en términos de aprendizaje. Los altos niveles de disrupción y la poca incidencia en la calificación han desembocado en una decisión del docente para reconducir la implementación, favoreciendo un patrón de interacción más guiado.

5.4 Faceta afectiva

De nuevo, la predominancia de la disrupción sobre otras acciones que debería realizar el alumnado incide de forma muy negativa sobre la faceta afectiva. No se ha conseguido favorecer la autonomía, siendo las propuestas de mejora en este sentido las ya mencionadas.

Sí que se han incluido en el diseño y llevado a clase situaciones en las que la utilidad del razonamiento probabilístico queda patente en la toma de decisiones. Además, a favor de la idoneidad afectiva, se tiene el hecho de que se ha empleado un instrumento, el mapa de humor de los problemas, que permite poner sobre la mesa los fenómenos emocionales que tienen lugar al resolver las tareas. Obviamente, la información que proporcionan los mapas de humor tiene sus limitaciones, y cualquier estudio en profundidad requeriría de otras fuentes de recogida de datos, como entrevistas en profundidad y cuestionarios específicos. Sin embargo, la principal función de los mapas de humor no es la de recogida de información para el investigador, sino el fomentar la reflexión sobre las emociones y cómo éstas influyen en el desempeño.

5.5 Faceta mediacional

El tiempo lectivo es un recurso muy valioso que, en el caso que nos ocupa, se dilapida de forma llamativa en diferentes frentes. En primer lugar, aquellas sesiones cuyo horario se inicia después del tiempo de recreo, no comienzan de forma efectiva hasta pasados casi 10 minutos desde que suena la sirena. Se trata de un problema endémico durante el curso escolar en el centro que nos ocupa, y que convierte las sesiones de 50 minutos en sesiones de 40 minutos, lo que significa una reducción del 20%.

En segundo lugar, la abundancia de acciones disruptivas que exigen la llamada a la atención por parte del profesor, inciden de forma negativa en el tiempo lectivo efectivo, ya que mientras el docente se dedica a intentar establecer cierto orden en el aula, no se dedica a acciones puramente didácticas. Así mismo, la gran mayoría del alumnado, en esos momentos, está distraído o es partícipe de las acciones de disrupción. Aunque este derroche de tiempo lectivo es difícil de cuantificar de forma tan exacta como la anterior, en alguna de las sesiones ha sido especialmente importante.

Por último, el absentismo del alumnado repercute de forma indirecta en el tiempo lectivo. Cuando una fracción significativa de los alumnos no asiste a clase, en la siguiente sesión se produce una petición, implícita o explícita, de rememorar los contenidos vistos. De esta forma, el daño desde el punto de vista del tiempo lectivo es doble. A nivel individual, el alumnado ausente se pierde una sesión. Y a nivel grupal, se emplea parte de una sesión para recuperar contenidos ya tratados. Las actividades que se han realizado utilizando las TIC se han limitado a la proyección de algún vídeo o utilización de un simulador virtual desde el ordenador de aula.

5.6 Faceta ecológica

En lo que respecta a la adaptación socio-cultural, ya se ha comentado en la faceta afectiva que es muy llamativo el hecho de que gran parte del alumnado asista a clases particulares de refuerzo o academias de repaso, a pesar de que cognitivamente no precisen de ello. En una entrevista informal con la madre de A6, me señala de forma sincera que como lo hacen muchas familias de su entorno, ellos también han terminado por llevar a A6 a profesor particular de cuando en cuando. Tanto A6 como A12 son claros exponentes del perjuicio que representan estas prácticas, del todo innecesarias en su caso. Las principales actividades que realizan en esos refuerzos son la realización de deberes y la preparación de exámenes. Ambas acciones inciden de forma negativa en el fomento de actitudes de responsabilidad y autonomía para el estudio, además de que los enfoques didácticos difieren a menudo. En el caso de A6, llega al extremo de favorecer la disrupción en clase, porque se limita a lo que pueda hacer en esos refuerzos, hecho que reconoció él mismo durante una sesión de una unidad anterior.

La decisión de diseño de limitar el campo de situaciones combinatorias a contextos en donde el número de casos posibles es lo suficientemente pequeño como para poder ser desglosado mediante una tabla o un diagrama de árbol, ocasiona que no se hayan tratado apuestas, juegos de cartas como el póker o las máquinas de los casinos. Si se quiere mejorar este aspecto, el nuevo diseño debe incluir al menos una sesión para introducir técnicas de recuento algo más sofisticadas que las vistas, a modo de introducción del concepto de factorial de un número.

5.7 Interacción entre facetas: compromisos de diseño

En las propuestas de mejora de cada una de las facetas que se han realizado en los puntos anteriores, han ido apareciendo compromisos que no son fáciles de resolver y que se convierten en decisiones de diseño importantes. Por ello, consideramos importante resumirlos a continuación:

- *Idoneidad ecológica-mediacional vs epistémica-cognitiva*
  Desde nuestro punto de vista, esta relación es el más importante de los compromisos de diseño, por los efectos que acarrea en la trayectoria didáctica. Los contenidos que establece la normativa, junto con los recursos temporales oficiales, hacen que sea complicado establecer una adecuada presentación de los sistemas de prácticas. Si se busca una elevada idoneidad epistémica y cognitiva, aumentando las sesiones lectivas o reduciendo los contenidos vistos, se obtiene una baja idoneidad ecológica y mediacional.
- *Idoneidad interaccional vs idoneidad ecológica-mediacional*
  El otorgar un mayor peso en la calificación a las interacciones y al trabajo autónomo por parejas o en pequeños grupos, debe quedar especificado y justificado en la normativa del departamento, en la programación didáctica. Actualmente, la prueba escrita recibe el 90% en 3º ESO, hecho que suele considerarse normal. Por lo tanto, es previsible un conflicto de tipo ecológico.

6 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

6.1 Conclusiones del estudio

A lo largo del trabajo se han ido respondiendo a las preguntas de investigación. La primera de ellas hacía referencia a los resultados de las innovaciones e investigaciones previas realizadas sobre la enseñanza - aprendizaje de las nociones básicas de azar y probabilidad en educación secundaria. La revisión de la literatura que se ha llevado a cabo para responderla se ofrece íntegra en el capítulo 3, siendo su producto final la concreción de los conocimientos didáctico-matemáticos en los indicadores particularizados de la idoneidad didáctica. A continuación, realizamos una breve discusión de los resultados de la investigación, respondiendo a las otras dos preguntas iniciales.

Tabla 11: Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

FACETA	COMPONENTE	INDICADORES	IDONEIDAD
EPISTÉMICA	Situaciones-problemas	☑☑☑☐	Media-alta
	Lenguajes	☑☑☑☑	Alta
	Reglas	☑☑☑☑☑☑	Alta
	Argumentos	☑☑☑	Alta
	Relaciones	☑☑	Alta
COGNITIVA	Conocimientos previos	☑☑☑	Alta
	Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	☐☑	Media
	Aprendizaje	☑☐☐☐	Baja
INTERACCIONAL	Interacción docente-discente	☐☑☑☑☑☑	Alta
	Interacción entre alumnos	☑☐☐	Media-baja
	Autonomía	☐	Baja
	Evaluación Formativa	☑☐	Media
AFECTIVA	Intereses y necesidades	☑☑	Alta
	Emociones	☑☑☑	Alta
	Actitudes	☑☑☑	Alta
	Creencias	☑	Alta
MEDIACIONAL	Recursos materiales	☑☑	Alta
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	☑☐☑	Media
	Tiempo	☐☐☐	Baja
ECOLÓGICA	Adaptación al currículo	☑	Alta
	Apertura a la innovación didáctica	☑☑	Alta
	Adaptación cultural y socio-profesional	☑☑	Alta
	Educación en valores	☑☐	Media

¿Cuál es la idoneidad didáctica de la unidad de azar y probabilidad de 3ºESO implementada, tomando como referencia los criterios de idoneidad y los conocimientos didácticos disponibles?

En la Tabla 11 se expone una síntesis de la valoración de la idoneidad didáctica de la implementación efectiva del diseño propuesto para la unidad didáctica objeto de estudio. Conviene observar que el carácter del estudio es cualitativo y que, por lo tanto, la idoneidad no va a ser un número, sino que se establece una gradación en tres niveles. Es decir, la idoneidad puede ser alta, media o baja, para cada una de las facetas, en función de si se han encontrado HDS suficientes para cada uno de los indicadores particularizados. Aquellos casos en los que no sea posible decidirse por uno de esos tres niveles, se utilizarán los niveles intermedios (baja-media, media-alta).

¿Cómo se puede mejorar la unidad de azar y probabilidad de 3ºESO, a partir del análisis de su idoneidad didáctica?

En el nuevo diseño, se habrá de prestar especial atención a aquellos componentes que no alcancen una idoneidad alta, siendo conscientes de que es posible que alguna decisión de diseño conduzca a un compromiso entre dos facetas. Sin embargo, esto último es algo que se verá cuando se defina el contexto del grupo con el que se aplicarán las mejoras.

La idoneidad epistémica, elevada, se mejorará todavía más si se reservan momentos en los que los alumnos tengan que generar situaciones-problema propias de la unidad. En cuanto a la idoneidad cognitiva, es obvio que se ha descuidado el aspecto evaluativo del aprendizaje. Es decir, los contenidos se presentan en el orden adecuado, pero el peso de la evaluación recae prácticamente por completo en la prueba escrita, de manera que los alumnos no reciben una correcta realimentación acerca del grado de logro de los contenidos. Las propuestas de mejora son las siguientes:

- Otorgar un menor peso a la prueba escrita, pasando del 90% actual a un 50%, como sugerencia. En cualquier caso, creemos que el porcentaje debe ser significativamente inferior para que el alumnado sea consciente de la importancia de los instrumentos de evaluación diferentes a la prueba escrita, pues está muy acostumbrado a la instrucción tradicional, donde los exámenes al final de cada unidad lo son todo.

- Utilizar diversos instrumentos de evaluación a lo largo de la unidad didáctica, de forma que además se proporcione la información obtenida a los alumnos. A modo de ejemplo:
    - En el trabajo en pequeños grupos de 3 o 4 personas, recoger la producción grupal, así como la observación del desempeño de cada uno de los integrantes.
    - Valorar de forma constatable las intervenciones de aula mediante un sistema de positivos y negativos, que puede actualizarse de forma permanente en la plataforma virtual.
- Tener en cuenta posibles adaptaciones evaluativas en función de necesidades especiales de apoyo educativo.

Con las propuestas para la idoneidad cognitiva, es posible que se mejore la faceta interactiva y la afectiva, al promover una mayor implicación de los alumnos. Ahora bien, ya se ha mencionado que una posible causa del bajo compromiso con la devolución, sea que muchos de ellos acuden a clases de refuerzo o academias sin necesitarlo. La acción de mejora acarrearía reuniones informativas con las familias, presumiblemente complicadas, ya que la costumbre de las clases de refuerzo está muy arraigada en la población local, y todo aquel que puede permitírselo, lo hace. Finalmente, poco puede hacerse a nivel de centro y de aula para mejorar la idoneidad mediacional, pues la restricción de las 3 horas semanales va a seguir existiendo. La mejora, no obstante, es sencilla:

- Blindar el horario de la asignatura de Matemáticas en 3º ESO, evitando lunes y viernes para evitar la pérdida de sesiones por puentes y festividades. Igualmente, conviene que el horario de las sesiones sea en una franja apropiada, particularmente, no después de los tiempos de recreo ni a últimas horas.
- Coordinarse con el departamento de Extraescolares, con el objetivo de que, en la medida de lo posible, no se programen actividades en las sesiones de Matemáticas.

Estas últimas consideraciones podrían tacharse de egoístas desde otros departamentos. Sin embargo, como docentes, debemos pensar en el bien de nuestros alumnos. Y la realidad es que, con la entrada en vigor de la LOMCE, los alumnos aragoneses se presentarán a la reválida de final de la ESO con un 25% menos de horas lectivas de Matemáticas en un curso fundamental, como es 3ºESO, respecto al alumnado de otras comunidades.

6.2 Limitaciones

Resulta complicado compaginar la labor docente con la investigadora en el aula. Nuestra percepción es que apenas hay momentos en los que poder hacer alguna anotación significativa, limitándonos a registrar hitos temporales en los cambios de actividad y en la toma de fotografías de alguna de las producciones de los alumnos. Posteriormente, en el primer recreo libre o ya fuera del instituto (en el caso de los viernes) se completa el registro de la observación. Aun así, se suele terminar siempre la redacción del informe por las tardes. No creemos que este proceso se viera facilitado mediante el empleo de una cámara de vídeo, ya que únicamente ayudaría en la definición exacta de los hitos temporales y en identificar el ambiente general de aula.

6.3 Líneas futuras

Cualquier trabajo de ingeniería ha de plantearse de forma cíclica, hasta que los resultados sean satisfactorios. Las mejoras propuestas para el diseño de una segunda implementación de la experiencia han de ser puestas a prueba, llevando a cabo otro proceso de recogida y análisis de datos. Por lo tanto, la línea de trabajo en este sentido no ha hecho más que comenzar, sentando las bases iniciales de la ingeniería.

Se ha constatado la dificultad de valorar ciertos aspectos que pueden pasar desapercibidos con la observación directa. A pesar de haber utilizado los mapas de humor para recoger información afectiva del alumnado, somos conscientes de la dificultad de entrar a valorar esta trayectoria del proceso de enseñanza-aprendizaje. Sobre todo, cuando tanto en el diseño como en la implementación la faceta afectiva alcanza una elevada idoneidad, pero la percepción es la contraria. Los altos niveles de disrupción en el aula, junto con una escasa implicación de los alumnos con la devolución, ocasionan una deriva del estilo de enseñanza hacia patrones más tradicionales, en los que las interacciones con fines didácticos surgen siempre del docente. Sería deseable desarrollar un estudio cualitativo en profundidad para descubrir las causas de la conducta de los alumnos. Dicho estudio redundaría en una mejor idoneidad afectiva real, además de favorecer también la ecológica, al tener en cuenta el contexto social pormenorizado.

7 LISTA DE REFERENCIAS

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. En *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 27-40). Mathematics Education Library.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: una empresa docente.

Batanero, C. (2015). Understanding ramdoness: challenges for research and teaching. En *Ninth Congress of European Research in Mathematics Education*.

Batanero, C., y Díaz, C. (2007). The meaning and understanding of mathematics. En K. François y J. P. Van Bendegem (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127). Springer.

Batanero, C., y Sanchez, E. (2005). What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School* (pp. 241-266). Springer US.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. *Effective mathematics teaching*, *1*, 27-46.

Beltrán-Pellicer, P. (2015). *Series y largometrajes como recurso didáctico en matemáticas en educación secundaria*. Tesis doctoral. UNED.

Blanco, L. (1992). Aproximación al conocimiento práctico personal de los profesores de Matemáticas de EGB. *Enseñanza de las Ciencias*, *10*(2), 195-200.

Blanco, L., Guerrero, E., y Caballero, A. (2013). Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. *Mathematics Enthusiast*, *10*(1/2), 335-364.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Springer.

Callejo, M. L., y Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *X*(2), 173-194.

Carnap, R. (1962). Logical foundations of probability. Chicago: University of Chicago Press.

Cobb, P., y Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* Psychology Press.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. London: Routledge.

Colera, J., García, R., Gaztelu, I., y Oliveira, M. J. (2007). *Matemáticas 3º ESO*. (C. Vallejo y C. de la Prida, Eds.). Anaya.

DGA. Orden de 15 de mayo de 2015, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de

Aragón (2015). España: Boletín Oficial de Aragón.

DGA. Orden de 9 de julio de 2015, de la Consejera de Educación, Cultura y Deporte, por la que se suspende la aplicación de las Ordenes de 15 de mayo de 2015, por las que se aprueban los currículos de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato y se (2016). España: Boletín Oficial de Aragón.

Gil, N., Blanco, L., y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, *2*, 15-32.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Editorial Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., y Wilhelmi, M. R. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. *Cerme*, *8*, 1-15.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, Á., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J. D., y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, *12*(1), 70-92.

Godino, J. D., Rivas, H., y Arteaga, P. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *34*(2/3), 167-200.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea de Ediciones.

Gómez-Chacón, I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 121-140). SEIEM.

Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years*. Doctoral dissertation: Loughborough University of Technology.

Hannula, M. S., Gómez-Chacón, I., Philippou, G., y Schlöglmann, W. (2005). Affect and mathematical thinking. Role of beliefs, emotions and other affective factors. En *4th Conference of the European Societiy for Research in Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 163-284).

Hernandez, R., Fernandez, C., y Baptista, M. del P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Keynes, J. M. (1921). *A treatise on probability*. New York: MacMillan.

Konold, C. (1989). Informal Conceptions of Probability. *Cognition and Instruction*, *6*(1), 59-98.

Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

Lecoutre, M. P. (1985). Effet d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes. *Recherches en didactique des mathématiques*, *6*(2), 193-213.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in «purely random» situations. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 557-568.

Lecoutre, M. P., y Cordier, J. (1990). Effet du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP*, *372*, 9-22.

Lecoutre, M. P., y Durand, J. L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(3), 357-368.

Marquis de Laplace, P. S. (1820). *Théorie Analytique des Probabilités*. V. Courcier.

McLeod, D. (1988). Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(2), 134-141.

MECD. Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (2013). España: Boletín Oficial del Estado.

MECD. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (2014). España: Boletín Oficial del Estado.

Peirce, C. S. (1978). Notes on the Doctrine of Chances. En *Dispositions* (pp. 237-245). Springer. Publicado originalmente en 1910.

Rivas, H., y Godino, J. D. (2015). Hechos didácticos significativos en el estudio de nociones probabilísticas por futuros maestros. Análisis de una experiencia formativa. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, … M. M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (Vol. 2, pp. 339-346). Granada.

Serrano, L., Batanero, C., y Ortiz de Haro, J. J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. *Suma*, *22*, 43-50.

Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J. J., y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, *10*(1), 7-25.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, *185*(4157), 1124-1131.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en didactique des mathématiques*, *6*(1), 69-118.

8 ANEXO I: FICHA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

La ficha de ejercicios y problemas empleada para complementar los contenidos del libro de texto ha sido la correspondiente al libro de 3ºESO de Marea Verde, descargable en la siguiente página web:

http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/ESO.htm

Se adjuntan a continuación las páginas con los ejercicios correspondientes.

333 Estadística y probabilidad. 3º ESO

Probabilidad

19. Se considera el experimento aleatorio de tirar un dado dos veces. Calcula las probabilidades siguientes:

a) Sacar algún 1.

b) La suma de los dígitos es 8.

c) No sacar ningún 2.

d) Sacar algún 1 o bien no sacar ningún 2.

20. Se considera el experimento aleatorio sacar dos cartas de la baraja española. Calcula la probabilidad de:

a) Sacar algún rey.

b) Obtener al menos un basto.

c) No obtener ningún basto.

d) No obtener el rey de bastos.

e) Sacar alguna figura: sota, caballo, rey o as.

f) No sacar ninguna figura.

21. Se considera el experimento aleatorio de tirar una moneda tres veces. Calcula las probabilidades siguientes:

a) Sacar cara en la primera tirada.

b) Sacar cara en la segunda tirada.

c) Sacar cara en la tercera tirada.

b) Sacar alguna cara.

c) No sacar ninguna cara.

d) Sacar tres caras.

22. Con una baraja española se hace el experimento de sacar tres cartas, con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de sacar tres reyes? Y si el experimento se hace sin reemplazo, ¿cuál es ahora la probabilidad de tener 3 reyes?

23. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas con reemplazo. Determina la probabilidad de que:

a) Las dos sean negras.

b) Haya al menos una negra.

c) Ninguna sea negra.

24. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas sin reemplazo. Determina la probabilidad de que:

a) Las dos sean negras.

b) Haya al menos una negra.

Autor: Fernando Blasco
Revisor: Andrés Hierro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

c) Ninguna sea negra.

d) Compara los resultados con los de la actividad anterior.

25. Al lanzar cuatro monedas al aire,

a) ¿cuál es la probabilidad de que las cuatro sean caras?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo sumo tres caras?

c) ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 3 caras?

26. Dos tiradores al plato tienen unas marcas ya conocidas. El primero acierta con una probabilidad de 0,7 y el segundo de 0,5. Se lanza un plato y ambos disparan. Expresa mediante un diagrama de árbol y las distintas posibilidades: a) ¿Qué probabilidad hay de que uno de los tiradores dé en el plato? b) Calcula la probabilidad de que ninguno acierte. c) Calcula la probabilidad de que los dos acierten.

27. Se lanza una moneda hasta que aparezca cara dos veces seguidas. a) Calcula la probabilidad de que la experiencia termine en el segundo lanzamiento. b) Calcula la probabilidad de que termine en el tercer lanzamiento.

28. En el lanzamiento de naves espaciales se han instalado tres dispositivos de seguridad A, B y C. Si falla A se pone automáticamente en marcha el dispositivo B, y si falla este, se pone en marcha C. Se sabe que la probabilidad de que falle A es 0,1, la probabilidad de que B funcione es 0,98 y la probabilidad de que falle C es 0,05. Calcula la probabilidad de que todo funcione bien.

29. Se hace un estudio sobre los incendios forestales de una zona y se comprueba que el 40 % son intencionados, el 50 % se deben a negligencias y el 10 % a causas naturales. Se han producido tres incendios, a) ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado? b) Probabilidad de que los tres incendios se deban a causas naturales. c) Probabilidad de que ningún incendio sea por negligencias.

30. Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

31. Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan 0,12, la probabilidad de que salga una copa es 0,08 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0.84.

Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

32. Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de:

a) que los calcetines sean negros.
b) que los dos calcetines sean del mismo color.
c) que al menos uno de ellos sea rojo.
d) que uno sea negro y el otro no.

33. Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto,

a) hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día.
b) calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

9 ANEXO II: REGISTRO DE OBSERVACIONES

9.1 Sesión 1, día 19/4/2016 (9:25-10:15)

En esta sesión, de toma contacto, se llevaron a cabo dos experiencias que servirán para determinar el nivel de partida del alumnado. Falta uno de los alumnos (A6) y otro (A4) se encuentra apartado, realizando el examen correspondiente a la unidad de sistemas de ecuaciones, pues no pudo hacerlo el día anterior por tener una cita médica. Los hitos más importantes quedan reflejados en la siguiente tabla:

Unidad	Tiempo	Observación
0	00:00	Terminamos de recoger los *netbooks* que hemos estado usando la hora anterior, hora de tutoría que también tienen conmigo. Nos retrasamos un poco. Mientras tanto, doy el examen de sistemas de ecuaciones a A4 y le asigno un sitio para que pueda realizarlo.
1	00:04	Introduzco la primera de las actividades, que incide en la distinción entre fenómenos aleatorios y deterministas. Consiste en cortar 20 papelitos más o menos iguales, o 20 bolitas. Una vez se tienen, se indica a los alumnos que las coloquen aleatoriamente, al azar, sobre la mesa.
2	00:12	Se toman con calma la tarea anterior. Mientras van acabando, voy tomando fotos de las disposiciones de las bolitas.
3	00:16	Ya han acabado todos. Les indico que no muevan las bolitas de su sitio hasta que lo indique. Proyecto el vídeo del episodio piloto de Numb3rs en que se realiza un experimento similar, con personas y se explica de forma intuitiva por qué es complicado elegir una disposición al azar.
4	00:20	Después de eso, les hago la pregunta "¿quién puede decir ahora que las ha colocado al azar?". Prácticamente nadie las ha colocado al azar, salvo A5
5	00:23	Introduzco la siguiente actividad. "Ahora vamos a colocarnos por parejas, para realizar 20 lanzamientos de dos monedas. Uno las lanza mientras el compañero anota y lleva la cuenta de lo que sale (CC, CX, XX)". Pregunto qué creen que va a salir más. El alumno A15 dice que todas por igual, pero luego otros compañeros dicen que no, que CX saldrá más. A15 lo piensa y dice que "Ah, claro".
6	00:30	Una vez veo que ya van terminando, les indico que calculen el porcentaje de veces que ha aparecido cada combinación. Sin más ayuda, es algo que veo que realizan correctamente. También registro en fotografías la forma en que recogen los datos en tabla. De lo más variado.
7	00:35	Realizo una tabla conjunta en la pizarra sumando los lanzamientos de todos ellos.
8	00:40	Pregunto si parece lógico el valor que nos ha salido. Les parece que sí.
9	00:42	Abrimos el libro por la primera página del tema, y tomamos nota en el cuaderno de los conceptos clave, que voy poniendo en la pizarra, relacionándolos con el experimento de las monedas y con el ejemplo del lanzamiento de los dados. Los conceptos son: caso, resultado, espacio muestral. Se enuncian de forma verbal, sin emplear notación simbólica. "Espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio".

10	00:47	Cito un ejemplo de cada uno de los conceptos anteriores y pregunto a los alumnos por los experimentos de antes (monedas).
11	00:50	Suena el timbre y finaliza la sesión.

En la primera actividad, casi todos dispusieron las bolitas o los trozos de papel a intervalos regulares. Salvo A5, por iniciativa propia, y A11, por verse apremiado por el profesor a terminar. Destaca también el caso de A12, que dispuso los papelitos de forma completamente regular.

La información de los lanzamientos de monedas en la segunda actividad se recogió de diferentes maneras, que se han incluido a lo largo de la descripción de la implementación.

9.2 Sesión 2, día 25/4/2016 (12:40-13:30)

Falta uno de los alumnos (A4). Los hitos más importantes quedan reflejados en la siguiente tabla:

Unidad	Tiempo	Observación
0	00:00	-
1	00:05	Tardan 5 minutos en llegar del recreo. Esta semana se organiza una actividad fuera del instituto, el programa +Ciencia, y los alumnos irán al colegio de primaria para enseñar papiroflexia, experimentos de física y química, geografía, etc. Como profesor, organizo la papiroflexia, actividad a la que se han apuntado 10 de los alumnos de mi clase. Me preguntan por el color de camiseta y estamos un rato debatiendo. Están un poco alterados, zanjo la discusión diciendo que pondré una encuesta en la plataforma Edmodo (que usamos de forma normal).
2	00:08	Siguen bastante alterados.
3	00:16	Repaso de los conceptos de resultado, caso y espacio muestral. Definición de experiencia aleatoria. La explicación, que se antojaba breve, se ve interrumpida porque no paran de hablar. Cambio de sitio a A6 y A12 por hablar continuamente. A12 no se lleva ni libro, es la mejor en términos académicos de la clase, pero últimamente acumula amonestaciones de varios profesores por hablar, faltar al respeto y utilizar el móvil en clase sin permiso. Le indico que coja el libro y el cuaderno. Me doy cuenta de que pierdo mucho tiempo en esto.
4	00:23	Actividades sobre el espacio muestral del libro: 1, 2, 3 y 4 de la página 275. Hago leer a A10 el primero y contesta ella misma. No tienen problemas en especificar el espacio muestral de estos experimentos (extracción de bolas, chincheta que se lanza al suelo) ni en distinguir si son experimentos aleatorios o deterministas. Aprovecho para preguntar si predecir el tiempo que hará mañana es aleatorio o determinista. A9 dice que no, puesto que no lo puedes saber con seguridad. Utiliza la palabra “incierto”, cosa que me llama la atención. Después de A10, otros tres alumnos se encargan de leer los siguientes. Tienden a distraerse y a hablar

		entre ellos, no de matemáticas. Pero no tienen dificultades en estos ejercicios. Una vez contestan ellos, incido en la notación para expresar el espacio muestral, entre llaves.
5	00:39	Como no han traído dados, decido experimentar con la ley de los grandes números (de forma intuitiva) con lanzamientos de moneda. Me preguntan, “¿Otra vez?”. A lo que respondo que es porque no han traído el material. Ahora les indico que lancen una sola moneda, y registramos el porcentaje de cara y el de cruz individual. En la pizarra, me van diciendo lo que les sale y lo anoto. Pero no da tiempo a calcular el porcentaje grupal, cosa que dejo como ejercicio para casa.
6	00:50	Suena el timbre y finaliza la sesión.

Figura 15: Conversación en la plataforma virtual, en la que participa A11.

9.3 Sesión 3, día 26/4/2016 (9:25-10:15)

Los alumnos de 3º ESO tenían programada una salida de día entero con el departamento de Educación Física. Por ello, han faltado los alumnos que se han apuntado a dicha actividad extraescolar y los que han decidido quedarse en casa. Llamando por teléfono a las familias de los alumnos que tenían que haber venido, pues soy tutor, me dicen que como iban a ir pocos, para no hacer nada, mejor se quedaban en casa. Faltan A4, A5, A9 y A11 de forma no justificada, mientras que A6, A12, A15 y A18 están en la excursión. Los hitos más importantes quedan reflejados en la siguiente tabla:

Unidad	Tiempo	Observación
0	00:01	Los martes empezamos puntuales, pero aun así tengo que llamarlos para que entren (muchos alumnos salen al pasillo en los intermedios, a pesar de que la normativa no lo permite). En la hora anterior hemos tenido tutoría y he aprovechado para trabajar con ellos la papiroflexia para el programa +Ciencia. Al mismo tiempo, hemos conseguido hacer un cubo modular (sonobe) cada uno, pintando las caras como si fuera un dado. De esta forma, al inicio de la clase de Matemáticas tenían disponible un dado para cada uno.
1	00:05	Introduzco brevemente en la pizarra la estabilidad de las frecuencias relativas. Les pregunto acerca de los resultados de las monedas, haciendo alusión a la participación de A11 (que no está) en la plataforma virtual. Les pregunto "a qué número se acerca el porcentaje", a lo que contestan que "uno sube y que el otro baja", veo que por lo menos A7 pone cara de interés. Les sugiero que piensen qué pasaría si lanzásemos las monedas 1000 veces.
2	00:09	Como faltan muchos alumnos, y por no avanzar más materia, hacemos la experiencia de la ley de los grandes números (intuitiva) con el dado de papel que hemos hecho antes en clase de tutoría.
3	00:16	Mientras lo van lanzando y registrando, pongo en marcha un applet online, de la página http://www.didactmaticprimaria.com/ con un simulador para el lanzamiento de un dado hasta el final de clase.
4	00:25	Hago fotos de las producciones de los alumnos mientras terminan.
5	00:30	Terminan la experiencia.
6	00:37	Se dan cuenta de que el porcentaje de obtener 5, que había empezado muy alto (0,3), va bajando progresivamente. Les pregunto a qué número se aproxima, y enseguida dicen que a 0,1666.
7	00:39	Actividades 1 y 2 de la página 277. Las hacemos entre todos, un alumno lee y los demás discuten la respuesta. Hoy ha funcionado bastante bien, están pocos alumnos y los más disruptivos no han venido. Escribo en la pizarra la solución, una vez que ya la han dicho ellos, con el único objetivo de introducir la notación adecuada. Las actividades son experimentos con bolas, y se pregunta por la probabilidad de extraer una u otra. Como los resuelven rápido, retomo el primero de ellos, en el que hay 90 bolas numeradas en una bolsa. Y pregunto por la probabilidad de "sacar par".
8	00:50	Suena el timbre y finaliza la sesión.

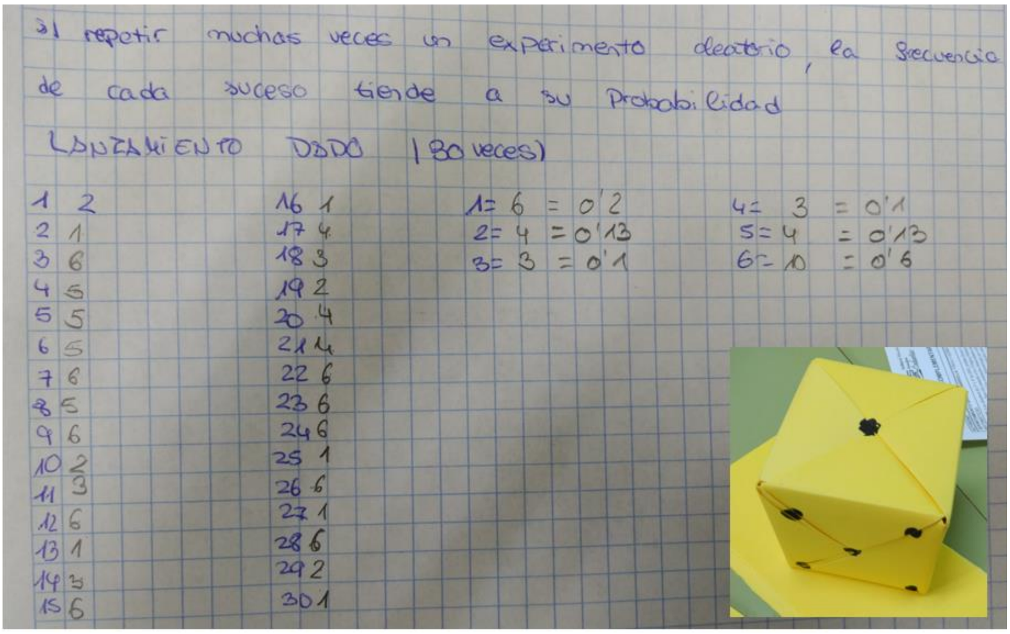


Figura 16: Lanzamiento y caracterización de un dado de papel. Histórico del resultado obtenido, tabla de frecuencias y fotografía del dado (alumno A13).

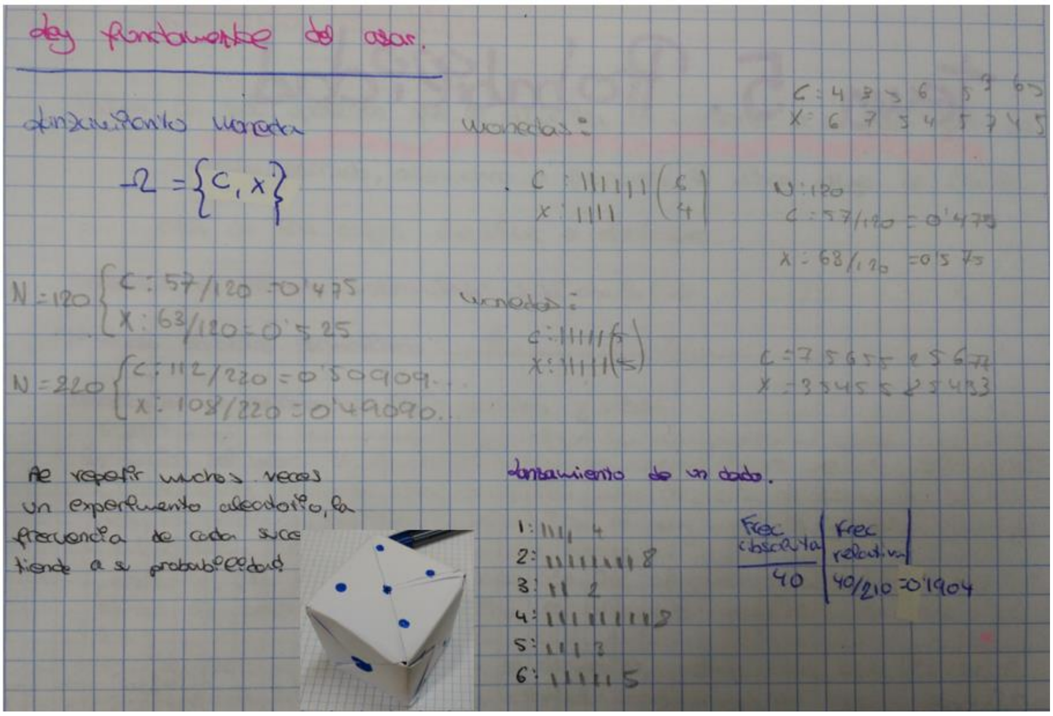


Figura 17: Lanzamiento y caracterización de un dado de papel. Tabla de frecuencias y fotografía del dado (alumno A10).

Figura 18: Tabla en la pizarra donde se contabilizan de forma institucionalizada todos los resultados obtenidos en el lanzamiento de los dados de papel.

9.4 Sesión 4, día 29/4/2016 (12:40-13:30)

Falta A2 de forma justificada (médico). Los hitos más importantes quedan reflejados en la siguiente tabla:

Unidad	Tiempo	Observación
0	00:00	--
1	00:04	Les cuesta entrar. Siguen hablando mucho y tengo que elevar la voz para que se vayan sentando. Tienen las mesas juntas de dos en dos, pero decido separarlas porque de normal hablan mucho entre ellos, y no de matemáticas. Les entrego el examen del tema anterior (sistemas de ecuaciones) para que le echen un vistazo, vean sus fallos y sumen la puntuación.
2	00:09	A12 me pregunta por la llamada que hice a sus padres como tutor. Le indico que será expulsada un día por usar el móvil en clase, sumado a la falta de respeto y educación que supuso la situación (con otro profesor). Se sienta, dispuesta a trabajar. El resto sigue separando las filas a duras penas. Tengo la sensación de que estoy perdiendo tiempo de Matemáticas con esto, pero la mayoría de los profesores del grupo consideramos que hablan más, y que la cosa va a peor.
3	00:12	Como el día anterior faltaron bastantes alumnos, recuerdo al principio los conceptos que hemos visto del tema, haciendo hincapié en la ley fundamental del azar (ley de los grandes números). Para ello, les pregunto acerca del experimento del lanzamiento de una moneda, “¿qué porcentaje nos salía en los lanzamientos individuales?”, “¿y en el grupal?”. Aprovechando que hoy sí que está A11, rememoro la conversación en la plataforma virtual, pues no todos los alumnos entran normalmente (aunque sí que tienen conexión y PC o móvil para ello). Introduzco la ley de Laplace, en la que la probabilidad de un suceso es la fracción de casos

		favorables entre los posibles. Lo relaciono con las experiencias realizadas con las monedas y los dados, preguntando a la clase.
4	00:19	Planteo la actividad central de la sesión, que consiste en desglosar el espacio muestral del lanzamiento de dos dados y calcular las probabilidades de cada suma. Espero a ver cómo se desenvuelven, pero no saben por dónde empezar. Escribo en la pizarra el primer paso, es decir, $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots\}$, y justo después empiezo a dibujar el conjunto correspondiente en la pizarra, indicando únicamente 5 o 6 de los 36 casos posibles.
5	00:24	Veo que hay alumnos que van terminando, pero también algunos que van despacio, bien porque no lo quieren hacer (caso de A6) o porque se atascan. En el caso de A6, le apremio con que debe terminarlo. Últimamente está muy rebelde y la única forma de que colabore es amenazándole con amonestación. Se fía de las clases de repaso del fin de semana, como me ha dado a entender en alguna ocasión, y en clase siempre hay que estar pendiente de él. Como hay varios que se atascan, realizo una intervención. “A ver, ¿cuántos resultados diferentes pueden salir?” Se produce un breve intercambio de opiniones, hasta que parece claro que debemos considerar los resultados simétricos; es decir, el (1, 2) y el (2,1). Les planteo como opción que se construyan una tabla de doble entrada, esbozándola en la pizarra. Una vez puesta, les vuelvo a preguntar cuántos resultados posibles hay, y entonces sí que contestan que 36.
5	00:27	Ya van terminando casi todos, les recuerdo que el objetivo es encontrar la probabilidad de cada una de las posibles sumas. Hago el ejemplo de P(“suma=2”) en la pizarra. Después, pregunto por P(“suma=1”), y al principio dudan, pero luego ven que es imposible. Hago también P(“suma=3”) y les dejo que continúen.
6	00:34	Me voy pasando por las mesas para ver cómo van. Hay varios (A3, A5, A7, A9, …) que cuando alcanzan P(“suma=7”) = 6/36, siguen con P(“suma=8”) = 7/36, lo que es incorrecto. Se lo hago saber individualmente, haciéndoles enumerar los casos en los que sale 8. Una vez termino la ronda, esbozo la gráfica correspondiente en la pizarra, representando en el eje Y la probabilidad y en el eje X cada uno de los resultados posibles al sumar los dos dados. A8 interviene espontáneamente diciendo que la probabilidad de obtener 7 es la mayor. Le invito a que enumere los casos posibles para que el resto los escuchen.
7	00:43	Casi todos han terminado. Actividades 1 y 2 de la página 278. Son ejercicios para poner en práctica la ley de Laplace. Se distraen y se ponen a hablar, tengo que llamarles la atención de nuevo. Si no los acaban, serán ejercicios para casa.
8	00:50	Suena el timbre y finaliza la sesión.

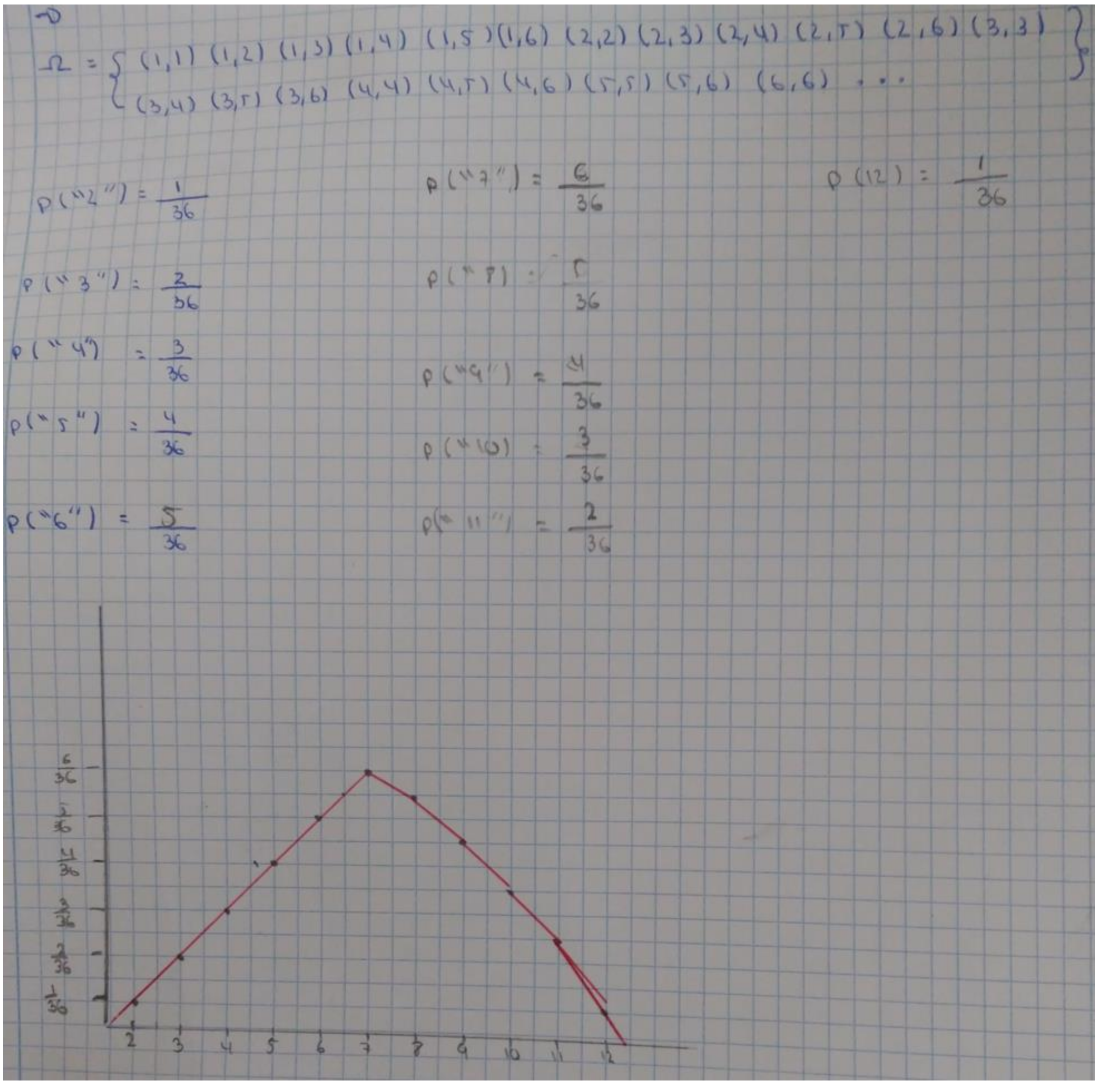


Figura 19: Producción de A1, espacio muestral y probabilidades del resultado de la suma del lanzamiento de dos dados.

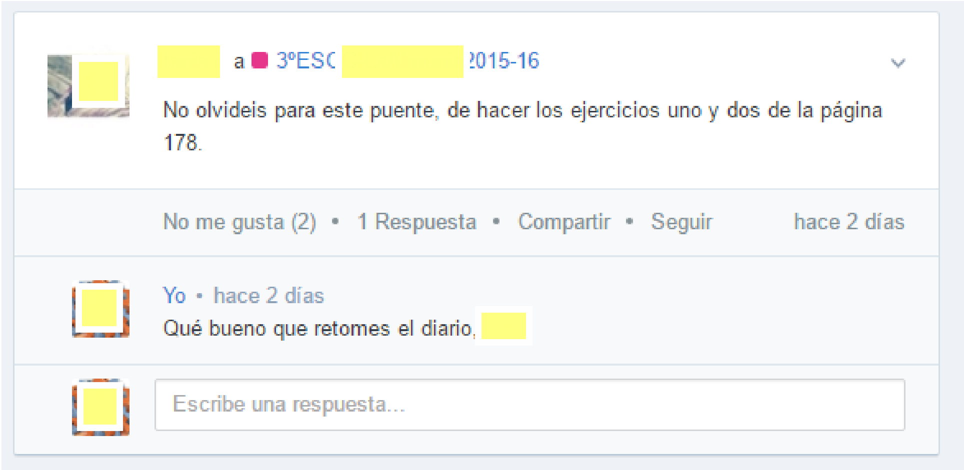


Figura 20: Participación de A10 en la plataforma virtual, recordando los deberes para el fin de semana.

9.5 Sesión 5, día 3/5/2016 (9:25-10:15)

Falta uno de los alumnos (A4). Los hitos más importantes quedan reflejados en la siguiente tabla:

Unidad	Tiempo	Observación
0	00:00	Me piden que sigamos viendo la película de tutoría. Les digo que (obviamente) no y conseguimos empezar puntuales.
1	00:01	Corregimos en la pizarra los ejercicios que habíamos mandado como deberes, 1 y 2 de la página 278. Salen A14 y A13 a resolverlos. No todos los han hecho, y apenas hay comentarios. Únicamente A8 menciona que en el 2 se ha equivocado, al entender en el enunciado que había que calcular P(rojo), P(azul) y P(verde), en lugar de P(rojo, azul o verde). A11 se le ríe y le repite lentamente el enunciado.
2	00:12	Les digo que vamos a hacer las actividades 4 y 5 de la página 279, con el mapa de humor de los problemas. Se muestran extrañados cuando les doy las fichas y procedo a explicarlas con calma. Igualmente, explico que deben marcar aquellos estados con los que se sientan más identificados. No están callados del todo y hay alumnos que no se enteran muy bien. Cuando termino la explicación, me voy pasando por las mesas a ver cómo van resolviendo los ejercicios y cómo rellenan la ficha. Me doy cuenta de que para A3 resulta bastante complicado, debido a que no conoce el español apenas y tampoco se desenvuelve muy bien con el inglés. Le digo que se olvide y que se centre en intentar hacer los problemas. A18, por ejemplo, no rellena las casillas de "al principio" del mapa de humor nada más leer el enunciado, así que se lo hago saber. A17 ha marcado la casilla de aburrimiento por defecto en buena parte de la hoja, así que le digo que así no, por favor. Hoy están puestos por parejas. Tomo la decisión de dejarlos así, ya que en tutoría han trabajado bien, y no quiero perder tiempo cambiando los sitios. Observo que comentan los ejercicios entre ellos y que tienen dificultades para ver que, a partir del lanzamiento de dos dados, también se pueden

		considerar sucesos que no sean la suma, como en la actividad 5 (se busca el máximo de los dos dados).
3	00:31	Salen A13 y A16 a resolverlos en la pizarra. A16 iba a realizar la actividad 5, pero una vez en la pizarra le digo que haga primero la 4, ante lo que se sonríe y pide que lo haga otro. Es entonces cuando sale A13. Una vez expone los resultados A13, sin mayor complicación, vuelve a salir A16 a hacer la tabla de la actividad 5.
4	00:38	Entre todos hacemos el 3 de la página 280. Al haber resultado fáciles para ellos las actividades que hicimos de espacio muestral, decido hacerlo de palabra, recordando la notación entre llaves en la pizarra. Observo que A12 no sigue el ritmo, no porque no pueda (es la mejor académicamente) sino porque le gusta copiar el enunciado completo en el cuaderno, a pesar de que no se lo exijo y que les recomiendo que únicamente resuman en forma esquemática los enunciados, indicando la página del libro. Tengo que repetir las respuestas dadas para el ejercicio 3 por este motivo.
5	00:45	Hacemos también el 4 de la página 280, entre todos, sin mayores complicaciones.
6	00:50	Suena el timbre y finaliza la sesión.

9.6 Sesión 6, día 6/5/2016 (12:40-13:30)

Falta uno de los alumnos (A10). Los hitos más importantes quedan reflejados en la siguiente tabla:

Unidad	Tiempo	Observación
0	00:08	Tardan mucho y remolonean en llegar del recreo. Tengo que elevar la voz y mostrarme autoritario para que saquen cuaderno y libro. A5 tarda más de la cuenta, habla y se ríe con sus compañeros, no ha traído el libro. Le mando al final de la clase mostrándome tajante. Me dice que no tiene libro (no es el primer día que se le olvida). Le digo que no se preocupe, que leeremos los ejercicios que hacemos en la pizarra y que luego trabajaremos con una ficha. Le recuerdo también que es su responsabilidad el traer el material a cada clase. Al poco, también separo a A4, que no hacía más que cuchichear con A7 y hacer caso omiso a las indicaciones del profesor.
1	00:10	Corregimos el 5, poniendo énfasis en la notación. Sale A11 a hacerlo a la pizarra. A12 señala que cuando hizo los ejercicios con la profesora particular, enumeró individualmente los sucesos elementales, lo cual también es correcto. Le indico que con el espacio muestral también se listan todos, así que ambas respuestas son correctas. El resto de la clase no presta atención.
2	00:15	Les hago entrega de la ficha del mapa de humor de los problemas, que la había recogido el día anterior, y de una ficha nueva de ejercicios. La ficha nueva incluye problemas que se hacen mejor con diagramas de árbol, los cuales no salen en el libro y sí que se nombran en los contenidos del currículo LOMCE. Les explico que vamos a trabajar con la ficha, y que aquellos ejercicios que no dé tiempo a hacerlos en clase, serán para deberes. Ven que son bastantes, pero aun así remolonean. Procedo a irme pasando por los sitios,

		en su mayoría están por parejas, haciendo pequeñas indicaciones sobre lo que hacen.
3	00:29	Veo que algunos ya han llegado a un ejercicio en el que se atascan, e introduzco los diagramas en árbol (ejercicio 20), pero veo que varios de ellos intentan hacerlo sin utilizar el diagrama. También es necesario explicar cómo es una baraja española, porque algunos como A7 y A3 no la conocen. Siguen hablando mucho y dispersándose al hacer los ejercicios. Mientras trato de que se pongan a la faena los que no lo están haciendo, los que sí lo están haciendo me preguntan por el ejercicio 20, indicándoles que el resultado que obtienen puede estar bien pero que tenemos que ver qué pasa con un diagrama de árbol (explicación a la que no han prestado atención).
4	00:36	Hay alumnos que no han hecho absolutamente nada en el cuaderno, ni con los que hemos corregido al principio de la clase ni con los de la ficha (A6, A16 y A18). Les llamo la atención de forma muy seria y bronca.
5	00:39	Les comunico que la fecha de examen será el viernes siguiente, dentro de 7 días. También les digo que como se lo toman con tanta calma es que ya se saben el tema. Ya les había adelantado que el tema duraría dos semanas, pero se quejan de que tienen examen de otra asignatura ese día. La mayoría de ellos, que estaban bastante distraídos y hablando de otras cosas, se suman a la discusión y no quieren hacer el examen el viernes. Uno de ellos, A6, lleva la discusión (hasta ese momento, dentro lo que cabe normal) un paso más allá, soltando un "anda y tira por ahí", mostrando una clara falta de respeto. A6 no es mal chico, pero ya estaba avisado de que su comportamiento es muchas veces motivo de amonestación. Le digo que por ahí no, que recapacite y que vaya al aula de reflexión. Ahora es cuando me muestro muy serio y autoritario. Todos se callan. Les digo de acuerdo, que hacemos el examen el lunes 16, pero que avanzaremos materia del siguiente tema. Y prosigo con una "bronca", acerca de lo complicado que resulta establecer un diálogo con ellos, tanto en esta como en otras asignaturas, con una única excepción en la que parecen portarse bien. Si en Lengua o Matemáticas (y en otras asignaturas, pero cito Lengua porque recientemente el profesor me ha comunicado que es imposible trabajar con ellos, que les tiene que echar broncas y que eso no es manera) se pretende establecer un diálogo, argumentar, trabajar, con ellos es imposible. Y que funcionar a base de broncas, yo haciendo los ejercicios y ellos copiando, no es hacer matemáticas. Se mantienen muy callados durante la reprimenda.
6	00:47	Intento explicar de nuevo cómo hacer árboles para listar los casos de un experimento aleatorio y poder hacer alguno de los ejercicios de la ficha.
7	00:50	Suena el timbre y finaliza la sesión. Recojo las fichas del mapa de humor.

9.7 Sesión 7, día 9/5/2016 (12:40-13:30)

Faltan 5 de los alumnos (A6, A5, A10, A11 y A16). Los hitos más importantes quedan reflejados en la siguiente tabla:

Unidad	Tiempo	Observación

0	00:06	Tardan mucho y remolonean en llegar del recreo, como siempre. Tengo que elevar la voz y mostrarme autoritario para que saquen el material. Hoy faltan A5 y A10 por haber tenido una comunión el día anterior. A6, A11 y A16 tampoco han venido, por ser fiestas en su pueblo. Todo esto me lo comunican sus compañeros.
1	00:08	Entra en clase A12. Me dice que se estaba comiendo el bocadillo. Le indico que es motivo de amonestación, que no es la primera vez. Aunque la podía haber enviado al aula de reflexión directamente, aprovecho la ocasión para comunicarles que en la reunión de tutores nos hemos puesto de acuerdo en amonestar de forma oficial todas las faltas leves, tal y como indica el reglamento. Le permito sentarse, y durante el resto de la sesión se comporta bien.
2	00:10	Pregunto qué tal los ejercicios de la ficha. A8 y A13 dicen que sí que los han intentado hacer, pero que en el 22 se han atascado. Les digo que lo vamos a hacer con el diagrama del árbol, que intentamos introducirlo el viernes, pero no hubo manera. Así que vamos a hacerlo paso a paso, pero primero hacemos el 21, también con el diagrama.
3	00:11	Procedo a corregir el 21 en la pizarra, lanzamiento de una moneda 3 veces. Explico que el diagrama de árbol ayuda a describir la situación y desglosar todos los casos posibles. Vemos que son todos igualmente probables y contestamos a las preguntas sin mayor complicación. Indico que no es más que la ley de Laplace y ellos me van diciendo en cada apartado los casos posibles y los favorables. El 21 da pie a introducir de forma intuitiva que $P(A)=1-P(A^*)$, pero sin explicitarlo formalmente.
4	00:23	Hacemos el ejercicio 22 de la ficha paso a paso, sobre extracciones de 3 cartas con y sin reemplazo de una baraja española, y averiguar la probabilidad de obtener 3 reyes en cada caso. Les indico cómo hacer el diagrama de árbol en este caso, señalando que no hace falta hacer 40 ramas, sino únicamente dos. Una para el caso en el que sacamos rey y otra para el caso en que no sacamos rey. Hago la primera etapa y dejo que vayan haciendo el resto ellos. A2 y A13 terminan pronto el árbol y siguen describiendo todos los casos, asignando probabilidades como si fueran equiprobables, como en el caso del ejercicio 21. Les digo que las ramas no son igualmente probables y que ahora lo explicamos en la pizarra, ya que observo que se atascan. Lo están intentando todos menos A18. A18 está cerca de A8, A9 y A15, los cuales también están hablando, pero mientras tanto están haciendo el árbol. A18, en cambio, nada.
5	00:29	Desgloso las tres etapas del árbol. Y entre todos vamos poniendo las probabilidades de cada rama, primero en el caso con reemplazo y después sin reemplazo. Escribo yo en la pizarra, pero voy preguntando todas las probabilidades a los alumnos. Permanecen atentos. Salvo A18, que parece no enterarse y sigue intentando hablar, por lo que le cambio de sitio. Primero la pongo al final, pero dice que no ve y le digo si no ha traído las gafas (no quiere ponérselas), así que la pongo delante, pero al otro lado. En el caso con reemplazo con tienen problema, pero en el de sin reemplazo hay que hacerles notar que no hay el mismo número de cartas en la segunda extracción. A12 enseguida señala que quedan 39 cartas. Y así, entre todos, sacamos todas las probabilidades.
6	00:35	Con todas las probabilidades puestas, les introduzco que la probabilidad de cada hoja del árbol es el producto de las ramas que llevan a ella. A12 pregunta que por qué hay que multiplicar. Esbozo el árbol del lanzamiento de 2 monedas, con las probabilidades. Y explico cómo la probabilidad de

		sacar CC es ½ de ½, por lo tanto, ¼. Y lo relaciono con los casos posibles y favorables. Como ahora no son equiprobables las ramas, tenemos que aplicar la multiplicación de probabilidades.
7	00:45	Todos han terminado, quedamos en hacer 23 y 24 como deberes. Empiezan a plantear el 23.
8	00:50	Suena el timbre y finaliza la sesión. Recojo las fichas del mapa de humor.

La reunión de tutores es una oportunidad única para compartir experiencias con otros dos docentes que interactúan con el grupo objeto de estudio, además de con el Departamento de Orientación y Jefatura de Estudios. Saco a relucir el tema del comportamiento en la sesión de este día, ya que considero que ha empeorado mucho en las últimas semanas. Las observaciones que he realizado son similares a las percepciones de mis compañeros.

Reconocemos que es necesario marcar los comportamientos inadecuados de un modo autoritario. Otro profesor, por ejemplo, utiliza un sistema de negativos que se traducen directamente en calificaciones en el examen. Él mismo reconoce que se trata de una práctica más propia de primer ciclo, pero que le funciona. Por mi parte, indico que he tenido que amonestar recientemente a dos de mis alumnos, los cuales también han recibido amonestaciones de otros profesores. Como el problema de comportamiento está generalizado al resto de grupos de 3º ESO, decidimos recordar en tutoría las faltas leves que son motivo de amonestación, remarcando que a partir de ahora seremos tajantes en ese sentido.

Aprovecho la ocasión para compartir mi percepción acerca de la escasa, o errónea, implicación de las familias. Por un lado, saco a relucir que me faltan alumnos de forma no justificada cuando hay fiestas en el pueblo vecino, o cuando hay programadas extraescolares a las que asisten una exigua minoría. Alguna de esas ocasiones he llamado a los padres al domicilio y han justificado la falta, diciendo que como esos días no se avanza materia o no se hace casi nada, han permitido que el chico o chica se quede en casa. Además, está la cuestión de los profesores particulares, pareciendo que existe una presión social para ello.

9.8 Sesión 8, día 10/5/2016 (9:25-10:15)

No falta ningún alumno. Los hitos más importantes quedan reflejados en la siguiente tabla:

Unidad	Tiempo	Observación
0	00:00	Comenzamos puntuales, ya que antes tenemos tutoría y consigo que entren puntuales y sin remolonear. Me muestro autoritario desde el primer momento, cambiando de sitio directamente a A5 y A18. Les repito el tema de las amonestaciones y que estamos todos los profesores de acuerdo en sancionar las faltas leves. Les digo que la idea es poner un vídeo corto y comentarlo si “se portan bien”.
1	00:03	Pido voluntarios para hacer el 23 en la pizarra, pregunto a A15 si quiere salir porque me da la impresión de que el tema le gusta, pero no quiere, y se presta A8. Le indico que deje el cuaderno, que le iremos ayudando. El problema 23 es una urna con 6 bolas blancas y 14 negras, con reemplazo. Empieza a construir el árbol y entre todos ponemos las probabilidades, no hay mayor complicación. Vuelvo a preguntar por qué hay que multiplicar para obtener la probabilidad en cada hoja, y A1, A4 y A7 no lo saben. Intento explicarlo sobre el árbol. “En 6 de cada 20 ocasiones (de media) me sale bola blanca, y en 14 de 20 me sale negra, así que en 14 de cada 20 de 6 de cada 20…” La construcción sintáctica hace que no sigan sin verlo, así que me remito al ejemplo de dos lanzamientos de monedas, y esbozo el árbol. En ese caso “en la mitad de los casos sale cruz, y en la mitad de la mitad saldrá otra vez cruz, por lo que P(XX)=1/2 de 1/2=1/4.” Parece que así lo entienden.
2	00:23	Pasamos al siguiente ejercicio, el 24, con A8 en la pizarra, que es igual que el anterior, pero sin reemplazo. Vamos ayudando entre todos a poner las probabilidades, no hace falta insistir mucho, ya que A15 las va diciendo. Pero voy preguntando a alumnos diferentes cada vez, porque si no, A15 se adelanta. Percibo que, aunque el nivel de ruido en el aula ha disminuido mucho, sigue habiendo alumnos distraídos, como A14, A12 (que va completamente a su ritmo, en el ejercicio anterior, y hablando de vez en cuando con A14), A7 (que cuando me paso veo que no ha hecho nada en el cuaderno), A5 (que está muy despistado) y A18.
3	00:31	Les propongo la siguiente tarea, que es hacer más ejercicios de la ficha, atendiendo al mapa de humor de los problemas. Me piden que les ponga el vídeo que les había dicho al principio de la clase. Les digo que es el de la película 21Blackjack. Algunos alumnos, la mitad, ya lo habían visto, bien en taller con otra profesora o bien conmigo en una tutoría en la que estaban ausentes gran parte de ellos. Como es corto y me parece interesante, se lo pongo. Es el problema de Monty Hall o del presentador del concurso. Los que ya lo habían visto saben que hay que cambiar de puerta. Les pido que lo expliquen al resto. Y la explicación que dan es que la probabilidad de una puerta pasa a la otra (1/3+1/3=2/3) que es la misma que dan en los diálogos de la película. Les pido que lo piensen como árbol, pero siguen insistiendo en el 1/3 + 1/3. Así que les explico, sin entrar en probabilidad condicionada, que en 2/3 de las ocasiones se elige cabra, y que en ese 2/3 lo más seguro es cambiar, porque es donde está el coche. Asienten tras la explicación.

4	00:42	Les indico que sigan con la tarea. Me voy pasando y veo que tienen dificultades para el lanzamiento de 4 monedas (el 25). Individualmente, corrijo diagramas erróneos que no mostraban las 4 etapas. Les pregunto cuántos casos habrá… y no saben contestar a priori. Una vez explicado que son 4 etapas, y cómo, siguen sin obstáculos.
5	00:50	Suena el timbre y finaliza la sesión. Deberes el 26 y el 27. Recojo las fichas del mapa de humor.

9.9 Sesión 9, día 13/5/2016 (12:40-13:30)

No falta ningún alumno. Los hitos más importantes quedan reflejados en la siguiente tabla:

Unidad	Tiempo	Observación
0	00:04	Tardamos lo normal en empezar la sesión, teniendo en cuenta que acaba de ser el segundo recreo. Hay 3 o 4 alumnos que ya están en el aula, pero el resto aún están por llegar. Están las mesas separadas y les voy diciendo que las dejen así, para trabajar de forma individual.
1	00:08	Ya estamos todos. Les tengo que decir que saquen el cuaderno y la ficha de ejercicios. Quiero comentar el ejercicio 20 de la ficha, sobre extracciones sin reemplazo (dicen que sacamos las cartas a la vez), ya que en su día dejé los intentaran mientras me pasaba y no presté atención a cómo lo resolvían, salvo que no usaron el árbol. Lo hacemos con el árbol y no hay mayor complicación. Esta sesión decido hacer yo todos los ejercicios en la pizarra, preguntando, eso sí, a los alumnos. Desgloso el árbol y ponemos las probabilidades, para luego calcular cada apartado. Utilizo el suceso complementario en alguna ocasión para acortar los cálculos necesarios.
2	00:26	Indico que ahora nos pondremos con el 26, pero varios alumnos me dicen que no corregimos el 25, a pesar de que el último día me pasé por todos los puestos corrigiendo los diagramas y viendo cómo llegaban a la solución correcta. Así que dedico un rato a hablar del 25. Vemos cómo el diagrama de árbol nos permite describir lo que ocurre y enumerar todos los casos.
3	00:32	Hacemos el ejercicio 26 de la misma manera. Resulta interesante porque no es un ejercicio de monedas, ni dados, ni barajas. Tienen dificultades a la hora de comenzar a esbozar el diagrama de árbol, porque pregunto y no me saben contestar o me dicen que no saben por dónde empezar. Una vez esbozo el árbol, sí que saben asignar las probabilidades.
4	00:44	Les dejo a ver si son capaces de sacar el árbol del ejercicio 28. Muchos de ellos ya ni se ponen, pero por ejemplo A11 tiene problemas y me pregunta. Indico, a toda la clase, que será un árbol en 3 etapas. Primero, el dispositivo A, luego el B y luego el C. A16 hace una observación interesante y graciosa a la vez. Si el dispositivo B es el que más probabilidad de funcionar tiene, por qué no ponerlo primero.
5	00:50	Suena el timbre y termina la sesión. A11 me pide que le termine de explicar el 28 y lo hago durante parte del tiempo de intercambio.

9.10 Sesión 10, día 16/5/2016 (12:40-13:30)

Hoy es el día de la prueba escrita. No falta ningún alumno. Los hitos más importantes quedan reflejados en la siguiente tabla:

Unidad	Tiempo	Observación
0	00:04	Han venido un poco más puntuales, al saber que había examen. Sin embargo, las mesas están juntas y tardan en ponerlas, más de la cuenta.
1	00:06	Empezamos el examen "de cuaderno", mediante el cual se evalúa parte de lo que han trabajado, la actitud y el esfuerzo. Son 5 preguntas cortas que se responden con el cuaderno encima de la mesa. Un ejemplo de pregunta es lo que nos salía como resultado el día de la simulación de la moneda.
2	00:13	Recojo los "exámenes de cuaderno", les indico que recojan los cuadernos y les hago entrega del examen.
3	00:50	Suena el timbre y termina la sesión.

10 ANEXO III: PRUEBA ESCRITA

1. (1 punto) Indica cuáles de los siguientes fenómenos o experimentos son aleatorios y cuáles deterministas:
    a. Lanzar una moneda y anotar si ha salido cara o cruz.
    b. Suelto un objeto y observo si cae al suelo o no.
    c. Sacar un calcetín del número 39-43 de un cajón en el que todos los calcetines son del 39-43.
    d. Decir el tiempo que hará mañana si hoy está despejado.
2. (2 puntos) Considera el lanzamiento de un dado de 12 caras.
    a. ¿Cuál es el espacio muestral?
    b. Indica dos sucesos elementales.
    c. Indica dos sucesos compuestos.
3. (3 puntos) En una urna hay 6 bolas blancas, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se sacan dos bolas, sucesivamente, sin volverlas a introducir en la urna.
    a. ¿Cuál es el espacio muestral?
    b. Realiza un diagrama de árbol completo de la experiencia.
    c. Calcula la probabilidad de extraer dos bolas del mismo color.
    d. Calcula la probabilidad de extraer dos bolas de distinto color.
4. (3 puntos) En una clase de 18 alumnos hay 14 chicas. En la evaluación anterior, la mitad de los chicos y 10 de las chicas aprobaron Matemáticas. Si se mantienen las mismas proporciones a final de curso, responde:
    a. ¿Cuál es la probabilidad de que, eligiendo un estudiante al azar, sea chica y no apruebe la asignatura?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que, eligiendo un estudiante al azar, apruebe la asignatura?
5. (1 punto) Lanzamos una moneda 50 veces, y obtenemos 37 caras. Lanzamos esa misma moneda otras 1000 veces, y obtenemos 709 caras. ¿Qué puedes decir de esa moneda? ¿Podrías decir cuál es la probabilidad de que salga cara y cuál la de que salga cruz?

10.1 Criterios de calificación

A continuación, se adjuntan los criterios de calificación empleados en la corrección de la prueba escrita.

- Pregunta 1: 0,5 puntos por indicar correctamente si los fenómenos son aleatorios o deterministas y 0,5 puntos por ofrecer un argumento satisfactorio. Cada error resta de forma proporcional.

- Pregunta 2: 0,7 por el primer y segundo apartados, 0,6 por el tercero.
- Pregunta 3: 0,75 por apartado.
- Pregunta 4: 1,5 por apartado.
- Pregunta 5: 0,5 si se ven indicios del significado frecuencial (se habla en términos de porcentajes o tasas, por ejemplo) y 0,5 si se razona que la moneda está sesgada.

Por otro lado, cada pequeño fallo en la notación empleada o cada falta de ortografía, resta 0,1 puntos.

10.2 Calificaciones

En la siguiente tabla se desglosan por pregunta las puntuaciones obtenidas por cada alumno.

Tabla 12: Resultados de la prueba escrita.

ALUMNO	P1 (1PTO)	P2 (2PTOS)	P3 (3PTOS)	P4 (3PTOS)	P5 (1PTO)	TOTAL (10PTOS)
A1	1	1,5	1	0	0,5	4
A2	1	0,7	1,75	1,5	0,1	5,1
A3	0	0	1	0	0	1
A4	1	0,7	1,3	1,5	0,1	4,6
A5	1	0,7	0,25	0	0,1	2,1
A6	1	0,6	2,5	0,1	0	4,2
A7	1	0,7	0,5	0,25	0	2,5
A8	1	0,7	0,25	0	0	2
A9	1	0,7	1	1,5	0,25	4,5
A10	1	1	0,25	0,25	0,5	3
A11	1	1,4	0,3	1,5	0,9	5,1
A12	0,5	2	2,5	1,5	0,75	7,25
A13	0,5	1,25	0,75	1	0,5	4
A14	1	1,25	2	1,5	0,75	6,5
A15	1	1,3	2,5	1	0,75	6,55
A16	0,75	0,5	0	1,5	0	2,75
A17	1	2	1	0,1	0,1	4,2
A18	1	0	0	0	0	1

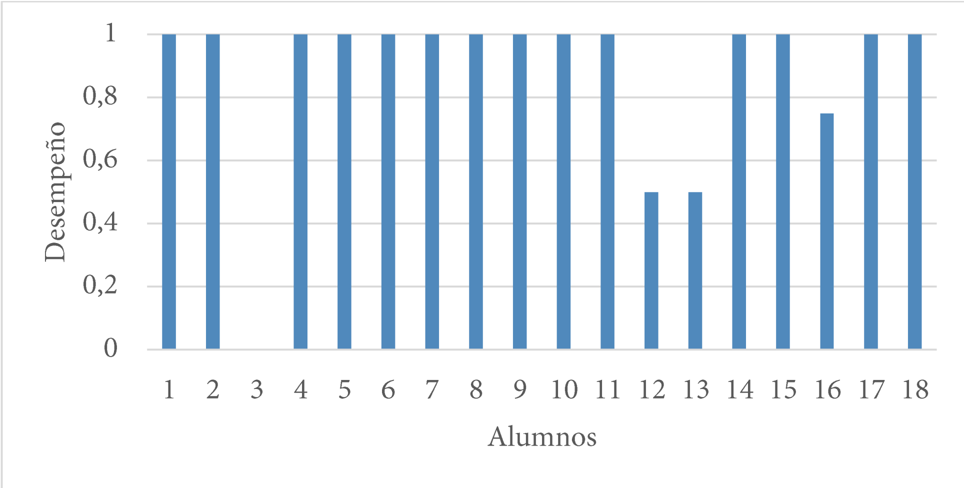


Figura 21: Calificaciones de la pregunta 1 de la prueba escrita, normalizadas al intervalo [0,1].

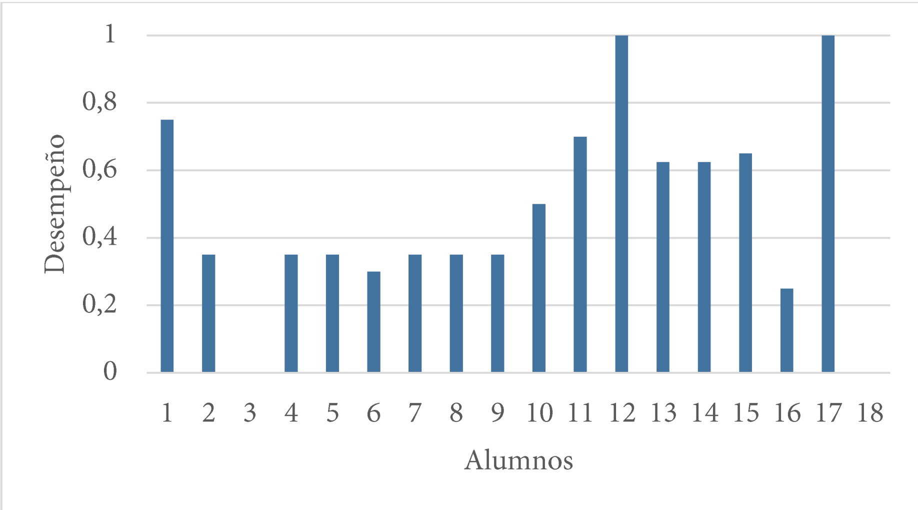


Figura 22: Calificaciones de la pregunta 2 de la prueba escrita, normalizadas al intervalo [0,1].

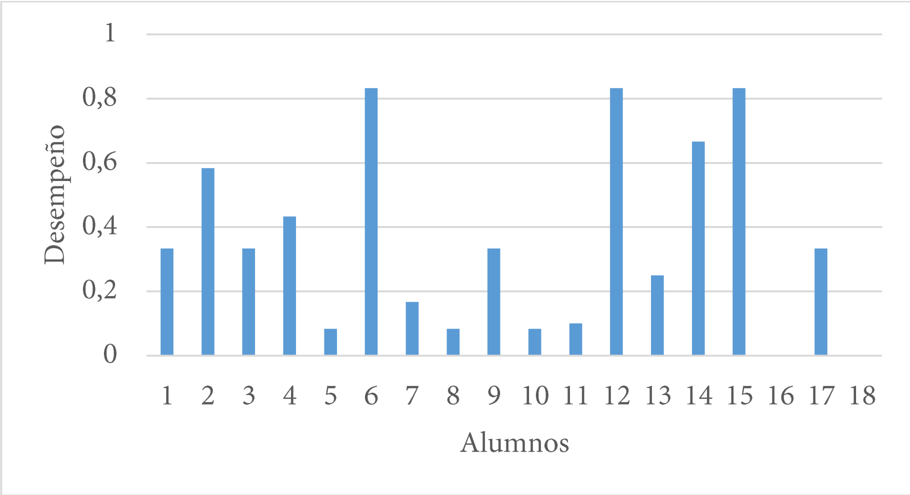


Figura 23: Calificaciones de la pregunta 3 de la prueba escrita, normalizadas al intervalo [0,1].

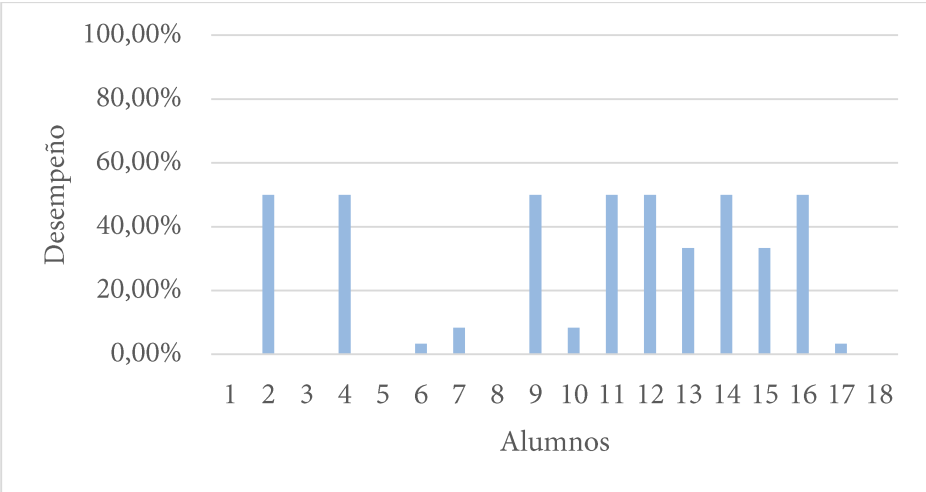


Figura 24: Calificaciones de la pregunta 4 de la prueba escrita, normalizadas al intervalo [0,1].

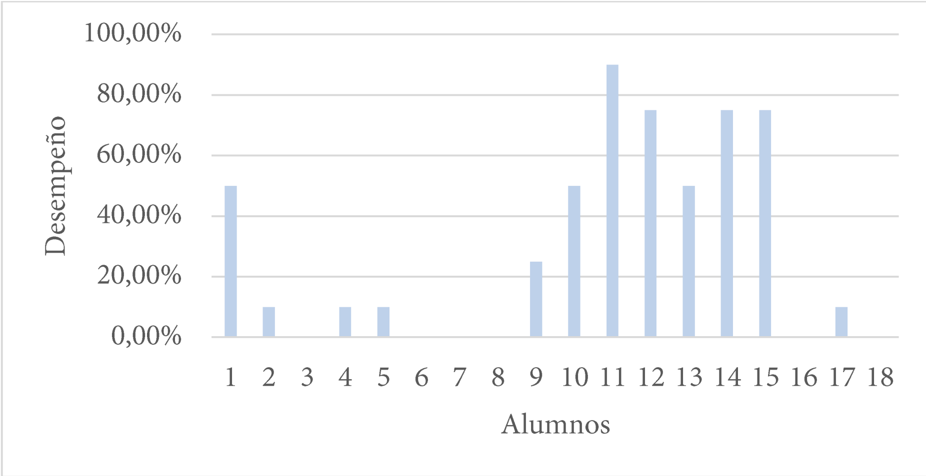
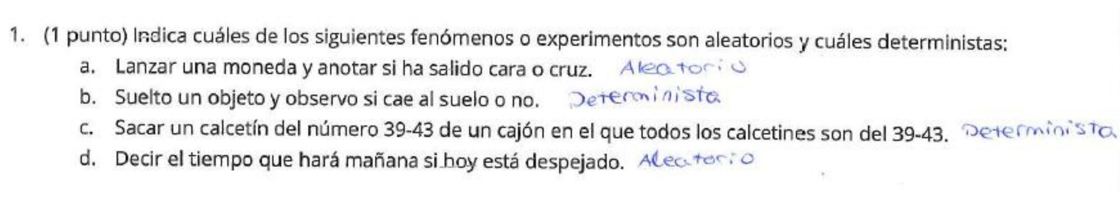
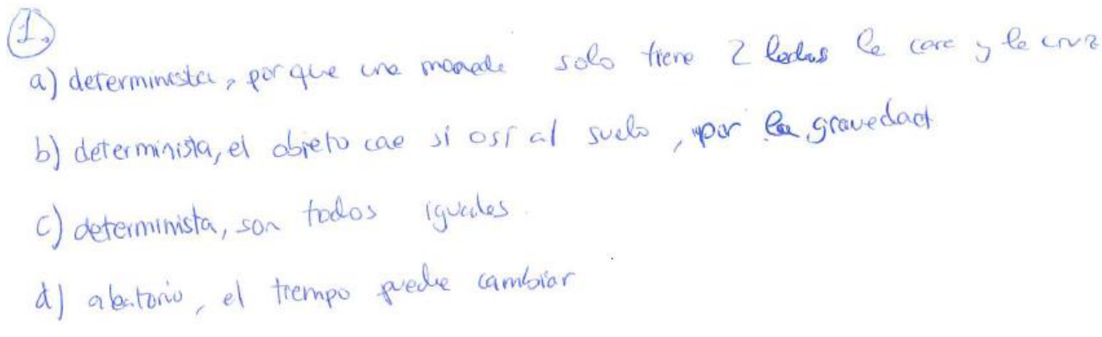


Figura 25: Calificaciones de la pregunta 5 de la prueba escrita, normalizadas al intervalo [0,1].



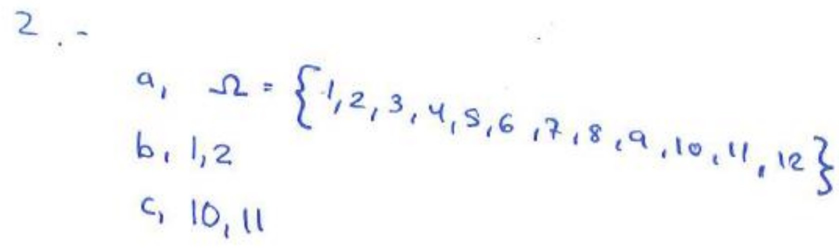
1. (1 punto) Indica cuáles de los siguientes fenómenos o experimentos son aleatorios y cuáles deterministas:
   a. Lanzar una moneda y anotar si ha salido cara o cruz. Aleatorio
   b. Suelto un objeto y observo si cae al suelo o no. Determinista
   c. Sacar un calcetín del número 39-43 de un cajón en el que todos los calcetines son del 39-43. Determinista
   d. Decir el tiempo que hará mañana si hoy está despejado. Aleatorio

Figura 26: Respuesta de A13 a la pregunta 1 de la prueba escrita.



1
a) determinista, porque una moneda solo tiene 2 lados la cara y la cruz
b) determinista, el objeto cae sí o sí al suelo, por la gravedad
c) determinista, son todos iguales
d) aleatorio, el tiempo puede cambiar

Figura 27: Respuesta de A14 a la pregunta 1 de la prueba escrita.



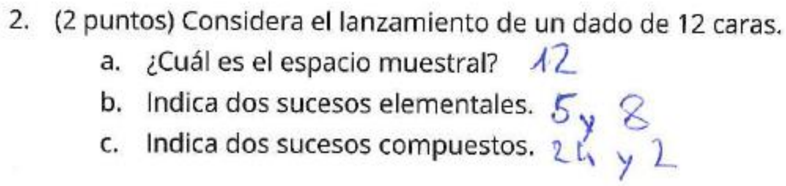
2.-

a, Ω = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

b, 1,2

c, 10,11

Figura 28: Respuesta de A15 a la pregunta 2 de la prueba escrita.



2. (2 puntos) Considera el lanzamiento de un dado de 12 caras.
   a. ¿Cuál es el espacio muestral? 12
   b. Indica dos sucesos elementales. 5 y 8
   c. Indica dos sucesos compuestos. 24 y 2

Figura 29: Respuesta de A16 a la pregunta 2 de la prueba escrita.

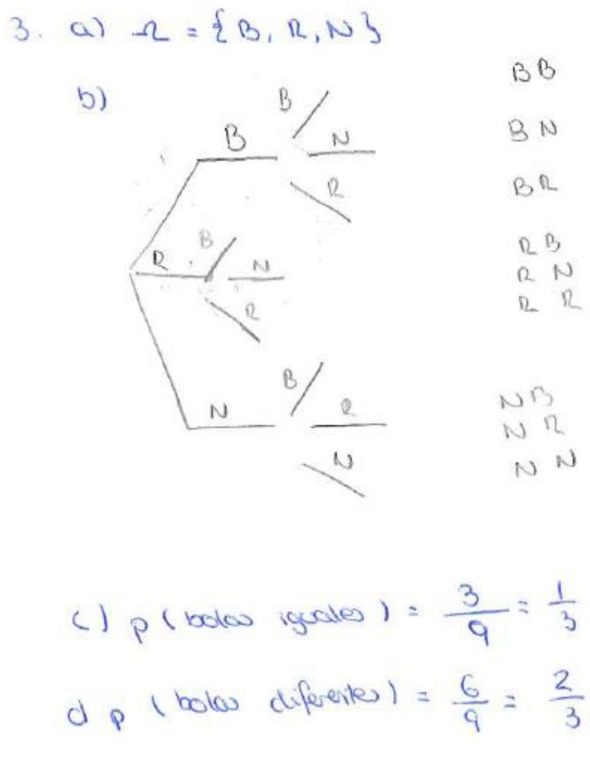


Figura 30: Respuesta de A1 a la pregunta 3 de la prueba escrita. Sesgo de equiprobabilidad.

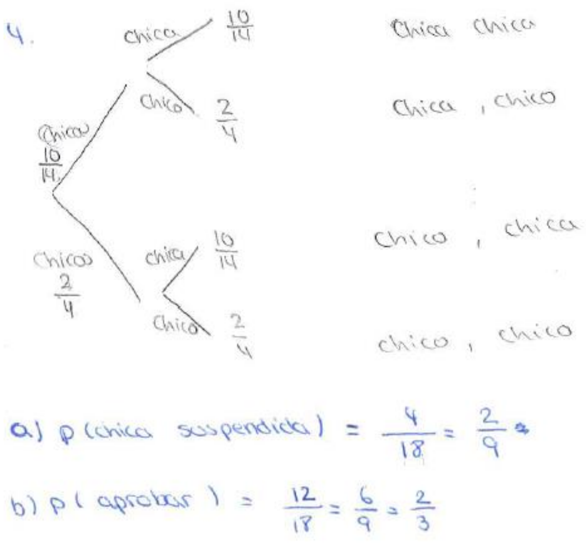


Figura 31: Respuesta de A1 a la pregunta 4 de la prueba escrita. Confusión en la asignación de probabilidades.

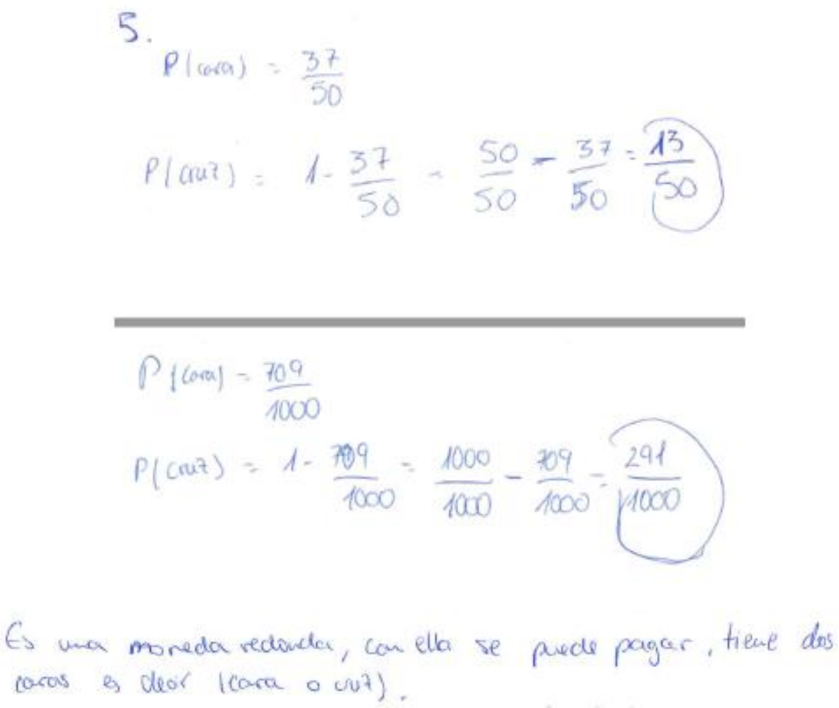
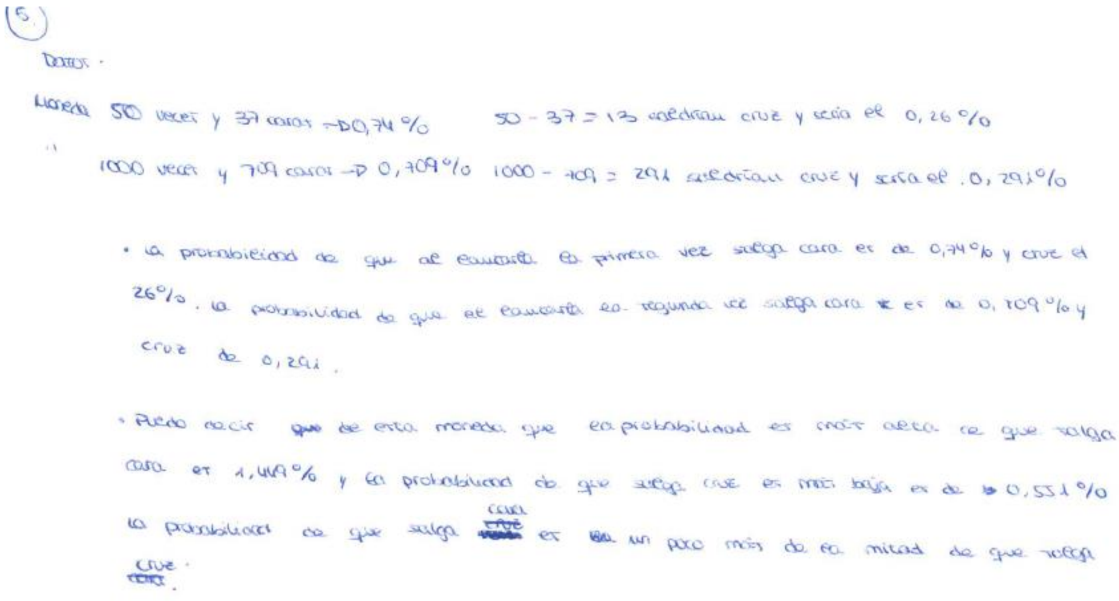


Figura 32: Respuesta de A8 a la pregunta 5 de la prueba escrita.


5.

Datos:

Moneda 50 veces y 37 caras → 0,74 % 50 - 37 = 13 saldrían cruz y sería el 0,26 %

" 1000 veces y 709 caras → 0,709 % 1000 - 709 = 291 saldrían cruz y sería el 0,291 %

- la probabilidad de que al lanzarla la primera vez salga cara es de 0,74 % y cruz el 26 %. la probabilidad de que al lanzarla la segunda vez salga cara es de 0,709 % y cruz de 0,291.

- Puedo decir de esta moneda que la probabilidad es más alta de que salga cara es 1,449 % y la probabilidad de que salga cruz es más baja es de 0,551 % la probabilidad de que salga cara es un poco más de la mitad de que salga cruz.

Figura 33: Respuesta de A10 a la pregunta 5 de la prueba escrita.

11 ANEXO IV: FICHA RECOGIDA DE DATOS EMOCIONALES

Nombre:

Mi mapa de humor de los problemas

Ejercicio (página/número)																											
Fecha																											
¿Cómo me ha ido?	Bien	Así así	Mal	Bien	Así así	Mal	Bien	Así así	Mal	Bien	Así así	Mal	Bien	Así así	Mal	Bien	Así así	Mal	Bien	Así así	Mal	Bien	Así así	Mal	Bien	Así así	Mal
KEEP CALM AND EXPRESS YOUR EMOTIONS	Principio	Durante	Final	Principio	Durante	Final	Principio	Durante	Final	Principio	Durante	Final	Principio	Durante	Final	Principio	Durante	Final	Principio	Durante	Final	Principio	Durante	Final	Principio	Durante	Final
Curiosidad																											
Desconcierto																											
Aburrimiento																											
Prisa																											
Bloqueado																											
Come la cabeza																											
Desesperación																											
Animado																											
Confianza																											
Genial																											
Diversión																											
Gusto																											
Indiferencia																											
Tranquilidad																											

A	B	Curiosidad			Desconcierto			Aburrimiento			Prisa			Bloqueo			Come la cabeza			Desesperación		
		P	D	F	P	D	F	P	D	F	P	D	F	P	D	F	P	D	F	P	D	F
	p.279, 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	p.279, 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	f. 19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	f. 20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	f. 21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A1	f. 22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	f. 23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	f. 24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	f. 25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	f. 26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	f. 28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	3	0	0	0	0	0	0

A	B	Animado			Confianza			Genial			Diversión			Gusto			Indiferencia			Tranquilidad			RESOLUCIÓN		
		P	D	F	P	D	F	P	D	F	P	D	F	P	D	F	P	D	F	P	D	F	B	R	M
	p.279, 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
	p.279, 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	f. 19	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
	f. 20	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
	f. 21	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
A1	f. 22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	f. 23	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
	f. 24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
	f. 25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	f. 26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
	f. 28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
		0	1	2	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	4	5	8	3	0

Figura 34: Datos emocionales de A1 en la hoja de cálculo.

12 ANEXO V: CONTENIDOS CURRICULARES

En este anexo se incluyen los contenidos, criterios y estándares de lo bloque de procesos, métodos y actitudes en 3º de ESO de Matemáticas Académicas, así como los correspondientes al bloque de probabilidad y estadística (MECD, 2014).

Tabla 13. Contenidos, criterios y estándares de procesos, métodos y actitudes en 3º de ESO de Matemáticas Académicas (MECD, 2014).

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.
	2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).
		2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.
		2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.
		2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.
Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las	3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones	3.1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
		3.2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.

soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.	4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.	4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.
Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.		4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.
	5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de Las conclusiones obtenidas utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico, estadístico- probabilístico.
Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.	6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.	6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.
Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.		6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.
Utilización de medios tecnológicos en		6.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
el proceso de aprendizaje para:		6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
		6.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia.
a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de	7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.	7.1. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.

representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.
	9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.	9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.
	10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.	10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.
	11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.	11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.

	12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	12.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido, …), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada, y los comparte para su discusión o difusión. 12.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Tabla 14. Contenidos, criterios y estándares de estadística y probabilidad en 3º de ESO de Matemáticas Académicas (MECD, 2014).

CONTENIDOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES
Fases y tareas de un estudio estadístico. Población, muestra. Variables estadísticas: cualitativas, discretas y continuas. Métodos de selección de una muestra estadística. Representatividad de una muestra. Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. Gráficas estadísticas. Parámetros de posición. Cálculo, interpretación y propiedades. Parámetros de dispersión. Diagrama de caja y bigotes. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades	1. Elaborar informaciones estadísticas para describir un conjunto de datos, mediante tablas y gráficas adecuadas a la situación analizada, justificando si las conclusiones son representativas para la población estudiada.	1.1. Distingue población y muestra justificando las diferencias en problemas contextualizados. 1.2. Valora la representatividad de una muestra a través del procedimiento de selección, en casos sencillos. 1.3. Distingue entre variable cualitativa, cuantitativa discreta y cuantitativa continua y pone ejemplos. 1.4. Elabora tablas de frecuencias, relaciona los distintos tipos de frecuencias y obtiene información de la tabla elaborada. 1.5. Construye, con la ayuda de herramientas tecnológicas si fuese necesario, gráficos estadísticos adecuados a distintas situaciones relacionadas con variables asociadas a problemas sociales, económicos y de la vida cotidiana.
	2. Calcular e interpretar los parámetros de posición y de dispersión de una variable estadística para resumir los datos y comparar distribuciones estadísticas.	2.1. Calcula e interpreta las medidas de posición (media, moda, mediana y cuartiles) de una variable estadística para proporcionar un resumen de los datos. 2.2. Calcula los parámetros de dispersión (rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación) de una variable estadística (con calculadora y con hoja de cálculo) para comparar la representatividad de la media y describir los datos.
	3. Analizar e interpretar la información estadística que aparece en los medios de comunicación, valorando su representatividad y fiabilidad.	3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, analizar e interpretar información estadística de los medios de comunicación. 3.2. Emplea la calculadora y medios tecnológicos para organizar los datos, generar gráficos estadísticos y calcular parámetros de tendencia central y dispersión. 3.3. Emplea medios tecnológicos para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada.

mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Permutaciones, factorial de un número. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.	4. Estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento.	4.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas. 4.2. Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. 4.3. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales. 4.4. Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.