Manuel Solera Iglesias

EVALUACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO Y LAS ECUACIONES PRIMER GRADO

Trabajo Fin de Máster

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Granada

Dirigido por los doctores,

Juan D. Godino y Gustavo R. Cañadas

Granada, Julio 2015

Para citar,

Solera, M. (2015). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza del simbolismo algebraico y las ecuaciones primer grado*. Trabajo Fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/Tesis_master/TFM_MSolera.pdf)

RESUMEN:

Se describe un primer ciclo investigativo de la metodología de diseño didáctico, referido a un proceso de instrucción matemática sobre la introducción del simbolismo algebraico y las ecuaciones de primer grado. La experiencia se ha realizado en un grupo de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. El problema específico y la metodología aplicada se plantean en el marco de la Teoría de la Idoneidad Didáctica, según la cual, el diseño, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas requieren tener en cuenta las facetas epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional implicadas en los mismos. En el diseño y la implementación de la experiencia de enseñanza se han tenido en cuenta las orientaciones curriculares y las restricciones del contexto; en particular, el plan formativo del centro y los recursos disponibles. El análisis retrospectivo está basado en la aplicación del sistema de indicadores de idoneidad didáctica, particularizados al caso del contenido tratado, para lo cual se ha realizado una síntesis de las investigaciones e innovaciones publicadas sobre la introducción del simbolismo algebraico y las ecuaciones de primer grado. Como resultado de la investigación, se ha obtenido un conjunto de propuestas fundamentadas para el rediseño de la experiencia en las distintas facetas del proceso de estudio, que orientarán la implementación de nuevos ciclos investigativos.

Reconocimientos:

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) y del Grupo PAI, FQM-126 (Junta de Andalucía).

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Calificar de inadecuada, o tan siquiera de mejorable, una propuesta didáctica concreta, sin haberla estudiado en profundidad, no solo es inapropiado, sino también sumamente osado, por lo que se corre el riesgo de equivocarse, al menos en parte. Nada es bueno ni malo en sí. En el caso de los diseños instruccionales, tampoco se puede pensar que todo sea perfecto, ni que no haya nada que se pueda salvar en la propuesta.

En este estudio, se ha hecho esta reflexión previa de cara a indagar sobre la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza del simbolismo algebraico y la resolución de ecuaciones de primer grado para el caso de un grupo flexible de alumnos de 1º de ESO, que presentan diversas dificultades, que se traducen en un bajo rendimiento académico en matemáticas y un reducido nivel de comprensión de los contenidos que unido a problemas de índole afectiva, han necesitado de esta medida de atención a la diversidad.

A priori, por el tipo de alumnado con el que se va a trabajar, se puede intuir que un diseño didáctico como el que nos ocupa, que está enfocado a alumnos sin problemas, nunca podrá ser idóneo. Pero ¿hasta qué punto?, ¿en qué medida?, ¿no se puede aprovechar nada?, ¿no posee ningún elemento válido?...

Además está presente el hecho de que se dispone de unos medios determinados al alcance de la instrucción, diferentes en cada caso. También se deben respetar las directrices de los órganos docentes y existe un necesario y obligado cumplimiento de lo establecido a nivel del marco institucional que rigidiza los contenidos.

La solución al problema ¿es romper con todo y hacer algo novedoso? Puede ser, pero ¿qué? De aquello que se decidiera, también habría que evaluar su idoneidad. Por tanto, como punto de partida, quizás es adecuado partir de la situación inicial disponible en el contexto natural donde se desarrolla y entonces, iniciar una espiral que tienda hacia un diseño que maximice la idoneidad didáctica en sucesivas fases de mejora basada en un análisis metódico y fundamentado, para lo que se ha decidido emplear el marco teórico del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos desarrollado por Godino y sus colaboradores.

De esta forma, se plantea el uso de los indicadores de idoneidad didáctica (Godino, 2011) propuesto por el modelo para analizar la implementación del diseño instruccional disponible con objeto de proponer mejoras basadas en un análisis de la literatura relativa al conocimiento didáctico-matemático disponible sobre el tópico elegido.

Por tanto, tras esta introducción, se aborda un epígrafe que recoge la definición del problema, la descripción del marco teórico utilizado y la de la metodología empleada. A continuación, en el siguiente punto del índice se hace una selección y síntesis de investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje del simbolismo algebraico y las ecuaciones de primer grado en relación con las seis facetas del conocimiento matemático propuestas por el marco teórico. Seguidamente, se describe la experiencia de enseñanza aportando datos concretos sobre el centro y el grupo de clase, así como sobre el diseño de la unidad didáctica y la implementación del estudio, para cerrar describiendo la recogida de información y analizando los resultados. Esto da pie en el siguiente epígrafe a realizar la valoración de la idoneidad didáctica y a proponer los cambios pertinentes. Finalmente se hace una síntesis del estudio y se destacan las conclusiones más relevantes para acabar con la lista de referencias y los anexos que contienen documentos de interés acerca del trabajo realizado.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA, MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

En este epígrafe se va definir en los apartados correspondientes el problema que origina la investigación y que dará lugar a los objetivos de la misma, el marco teórico que se utiliza como referencia y las características de la metodología empleada.

1.1. Problema

Los alumnos que llegan de primaria con un retraso curricular importante en el área de matemáticas son agrupados de manera que sean tratados de forma independiente durante las horas de docencia de esta materia. Esta medida de atención a la diversidad sin duda es útil cuando el proceso de instrucción es adecuado a sus necesidades, sin embargo, hasta el momento nadie se ha ocupado de valorar la idoneidad de dicho proceso de manera sistemática. En cada centro educativo existe un documento marco que recoge las directrices curriculares que marca la legislación vigente (programación del departamento de matemáticas). En el caso investigado, dicho documento propugna que "en el grupo flexible de 1º ESO se trabajará con una adaptación de 6º de primaria, reforzando con algunos ejercicios a nivel de 1º de ESO". Dado que la iniciación al álgebra no se aborda en primaria y es básica en secundaria, para fijar los contenidos mínimos, se está a lo dispuesto en el currículo de la ESO al nivel de 1º, tal como se especifica en la unidad didáctica número siete de dicha programación.

Una vez que se establece el punto de partida de los objetos a tratar, se parte del diseño instruccional realizado donde se integran las directrices didácticas y los recursos habituales en el centro, que aparecen reseñados en la programación. El resultado de esta práctica es un enfoque del proceso de enseñanza y aprendizaje de este tema que se viene dando sucesivamente desde hace varios años. Con relación al diseño de este proceso de adaptación curricular nos podemos plantear las siguientes preguntas: ¿En qué medida es idóneo? ¿por qué o por qué no? ¿qué parte es adecuada? ¿se pueden incluir nuevas directrices que complementen el diseño instruccional? ¿qué cambios se pueden proponer de manera fundamentada en el diseño e implementación? Estas y otras preguntas similares conducen a plantear el objetivo general del estudio.

El objetivo general que se va a fijar para responder a las preguntas generadas a raíz del problema de investigación detectado, se puede formular de la siguiente manera:

> OG: Analizar la idoneidad didáctica, y proponer criterios fundamentados de mejora, para el diseño e implementación de un proceso de estudio sobre la enseñanza y aprendizaje del simbolismo algebraico y resolución de ecuaciones de primer grado, desarrollado en el contexto descrito.

De este objetivo general se pueden derivar sendos objetivos específicos que se pueden formular como sigue:

> Estudio 1. Analizar y sintetizar investigaciones relativas al tópico matemático tratado (simbolismo algebraico y ecuaciones de primer grado) para identificar los conocimientos didácticos que se pueden poner en juego en un proceso de formación que tenga un elevado nivel de idoneidad.

> Estudio 2. Analizar y valorar la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza basado en el diseño instruccional implementado en el aula utilizando para ello los indicadores propuestos por el marco del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, particularizados al contenido seleccionado y teniendo en cuenta los resultados del estudio 1 (Godino, 2011; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

1.2. Marco teórico

Para la consecución de los objetivos propuestos hay que contar con el soporte teórico apropiado. En este caso, se ha considerado que el marco adecuado es el denominado Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos desarrollado por Godino y sus colaboradores a lo largo de más de dos décadas de trabajo y tres fases que arrancan en el año 1993 y llega hasta la actualidad (Godino, 2012; Godino, Batanero y Font, 2007). En este periplo temporal, se comienza con la caracterización de los objetos matemáticos y su significado personal e institucional en relación con la comprensión de aquellos (Godino y Batanero, 1994). A continuación se centran en la elaboración de un modelo del conocimiento matemático en términos tanto ontológicos como semióticos (Godino, 2002). Finalmente desarrollan un modelo de la instrucción matemática (Godino, 2011; Godino, Contreras y Font, 2006), que es el que se tomará como referencia fundamental a la hora de analizar la idoneidad didáctica de la implementación del proceso instruccional diseñado. Esta experiencia de enseñanza se realiza conforme a las directrices vigentes en el centro elegido para desarrollar el estudio del tema de iniciación al álgebra en el grupo flexible de 1º de la ESO de dicho centro.

Dada la amplitud del marco teórico que ofrece un vasto conjunto de herramientas que pretenden dar explicación a gran variedad de cuestiones de importancia alrededor de la Didáctica de las Matemáticas, hay que centrarse en desarrollar adecuadamente los elementos que van a ser utilizados en el presente estudio de cara a aclarar el sentido de los términos centrales en los que se basará el trabajo de manera que no exista ambigüedad o se dé lugar a confusiones.

Por tanto, hay que comenzar por centrarse en el término “idoneidad didáctica” y en su relación con el diseño de la instrucción pretendida, que será implementada en el aula a lo largo de varias sesiones lectivas en las que tendrá lugar un proceso de enseñanza y aprendizaje que hay que valorar utilizando este constructo.

En este marco teórico se han desarrollado varias nociones relativas al diseño instruccional y su implementación, tales como idoneidad didáctica, sistema de prácticas, hecho didáctico, configuración o trayectoria didáctica, dimensión normativa… En este estudio son de particular interés los conceptos de configuración, trayectoria e idoneidad, por lo que a continuación se describirá su sentido y caracterización.

Para obtener una definición clara de qué es una configuración o una trayectoria didáctica, es interesante recurrir a la tesis de Rivas (2014) donde se especifica que una configuración didáctica es,

> ”un segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea o situación-problema diseñada o

> implementada". En cambio, una trayectoria didáctica la define como "la secuencia de configuraciones didácticas mediante las cuales se aborda el estudio del contenido pretendido". En Godino, Contreras et al. (2006), de donde nacen estas definiciones que aporta Rivas, se especifican además los seis tipos de trayectoria que se pueden considerar en un proceso de instrucción. Estas son epistémica, docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional. En cada una de ellas se consideran distintas configuraciones que serán utilizadas para el análisis de los datos recabados por medio del proceso de observación de las sesiones de clase.

Por lo que se refiere a la idoneidad didáctica, en primer lugar, hay que hacer notar que esta noción, sus dimensiones y criterios suponen una herramienta de paso de una didáctica descriptiva-explicativa a otra normativa orientada hacia la intervención efectiva en el aula (Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013, p. 51).

La idoneidad didáctica se define en Godino, Bencomo et al. (2006, p. 2) como "el grado en que un proceso de estudio matemático (o una parte del mismo) permite el logro de los fines pretendidos y está adaptado a las circunstancias y recursos disponibles".

Por otro lado, Godino (2011) escribe al respecto que

> "La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes:
>
> *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
>
> *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
>
> *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
>
> *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza- aprendizaje.
>
> *Idoneidad afectiva*, grado de implicación (interés, motivación,…) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

> *Idoneidad ecológica*, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla". (Godino, 2011, pp. 5-6)

El enfoque en que se enmarca la idoneidad didáctica constituye una perspectiva multidimensional y relacional que obliga a considerar estas seis facetas, pero también su interacción mutua con el objeto de definir y articular de manera coherente y sistemática el proceso de instrucción y su correspondiente análisis (Godino, 2011).

En definitiva, la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción planteado a raíz del diseño elaborado, se basará en el análisis de cada dimensión o faceta parcial y de su interacción mutua. Este proceso es de suma complejidad, sobre todo si se considera que para cada faceta hay que tener en cuenta una serie de componentes y que tanto esas dimensiones como sus componentes no son observables directamente. Este hecho conduce a la necesidad de obtener la valoración por inferencia a partir de una serie de indicadores empíricos relacionados con cada componente (Godino, 2011).

Llegados a este punto, Godino (2011) propone una lista de los indicadores de cada componente (que se puede consultar en el anexo I del presente trabajo) a partir de la cual se puede efectuar, en este caso, un análisis cualitativo de la idoneidad de un proceso de enseñanza.

1.3. Metodología

En este epígrafe se recoge la caracterización del tipo de investigación realizada. A lo largo de tres apartados, se describen el tipo de estudio llevado a cabo, la muestra de sujetos utilizada y qué instrumentos se utiliza para recoger los datos.

1.3.1. Tipo de investigación realizada

La investigación llevada a cabo es de carácter puramente cualitativo con un alcance que podría considerarse como exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Se considera exploratorio porque se trata de una incursión en un campo desde una perspectiva novedosa y por ende poco tratada por la comunidad investigadora. Existen pocos estudios que evalúen la idoneidad didáctica según el modelo propuesto por el Enfoque Onto-Semiótico desarrollado por el profesor Godino y sus colaboradores. También se considera descriptivo porque busca especificar las características de un proceso de instrucción de cara a establecer un análisis de su idoneidad.

Si nos fijamos en el marco temporal en el que se desarrolla este estudio, se puede catalogar como una investigación transversal dado que se realiza en un periodo definido en el que se recoge información del grupo de sujetos contemplado. Dicho periodo corresponde con la segunda mitad del mes de febrero de 2015 en el que se preveía el desarrollo de la unidad didáctica analizada según la programación del departamento de matemáticas del centro elegido para el estudio.

1.3.2. Muestra de estudio

La población sobre la que se realiza la investigación la constituyen los alumnos de primero de la ESO que cursan la asignatura de matemáticas en un agrupamiento flexible como medida de la atención a la diversidad.

Se seleccionó como muestra un grupo formado por 9 alumnos correspondientes a un agrupamiento flexible de 1º de la ESO de un centro de secundaria del área metropolitana de la provincia de Granada durante el curso académico 2014-2015. La selección de los sujetos de la muestra fue totalmente intencional, atendiendo a la disponibilidad del centro, aunque todos los estudiantes forman parte del mismo grupo de clase de 1º de ESO.

Es importante destacar que para proteger la identidad de los alumnos participantes, no solo se ha evitado hacer referencia al centro educativo, sino que además, los sujetos se identifican en el estudio con una serie de abreviaturas que utilizan el siguiente código, A1 hasta A9.

Por lo que respecta a las características concretas del grupo elegido, hay que destacar que se describen en el apartado 4.1 de este documento, aunque se puede adelantar que los sujetos poseen dificultades de diversa índole, no identificadas específicamente mediante ningún procedimiento de diagnóstico formal, sino simplemente manifestadas por la observación de su rendimiento académico en la materia durante cursos anteriores.

1.3.3. Secuencia e instrumentos de toma de datos

La secuencia que define el proceso seguido para la realización del estudio comienza con la observación de la implementación de las sesiones de formación de los alumnos consideradas en el diseño de instrucción inicial del que se dispone. A continuación, se determinan los conocimientos relevantes para la potencial aplicación de mejoras de la idoneidad didáctica. Para ello se tienen en cuenta las distintas dimensiones del conocimiento matemático, es decir, la epistémico – ecológica, la cognitiva – afectiva y la interaccional – mediacional. Tras esta fase se realiza el análisis de la idoneidad didáctica del proceso implementado, basándonos en los indicadores definidos en el marco teórico.

El instrumento utilizado para la realización de la observación consiste en registro sistemático (ver Anexo III) para la observación participante que se va a llevar a cabo en el aula, dado que no se ha permitido la grabación sonora ni audiovisual de la sesiones por parte de los responsables del centro.

El registro de la observación participante se hace durante las sesiones de clase anotando el hito temporal (en minutos y segundos referidos al inicio de la clase) junto a una indicación del hecho didáctico observado. Posteriormente se da traslado al soporte electrónico completando y desarrollando las anotaciones tomadas. En caso de las observaciones correspondientes al material elaborado por los alumnos, se traslada directamente al fichero electrónico.

También se han utilizado, como instrumentos de recogida de datos, dos pruebas escritas, elaboradas específicamente para este trabajo, para evaluar los conocimientos iniciales y finales de los estudiantes.

CAPÍTULO 2

CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

2.1. Introducción

Previamente al análisis de resultados y la valoración de la idoneidad didáctica de la implementación del diseño instruccional, es necesario disponer del conocimiento didáctico-matemático apropiado. Este conocimiento será de utilidad para particularidad convenientemente los indicadores de idoneidad y poder realizar las adaptaciones que, en su caso, fueran pertinentes. También servirán de base para poder proponer medidas de mejora que aumenten la idoneidad del mencionado diseño.

Para acometer esta tarea conviene tener datos precisos acerca del propio conocimiento del tópico matemático, así como de las dificultades planteadas para su asunción, las capacidades necesarias por parte de los alumnos y qué estrategias y recursos son adecuadas para ello. También se deben tener muy en cuenta las actitudes hacia la asignatura en general y hacia el tópico implementado en particular de cara a poder incidir en mejoras apreciables del proceso global.

En el tema que nos ocupa referido al simbolismo algebraico y al tratamiento de las ecuaciones de primer grado, la cantidad de documentación relevante relativa a todas las facetas es inmensa, por lo que se ha hecho una selección representativa que abarque dichas facetas ofreciendo una visión general de algunos aspectos fundamentales a la hora de abordar el proceso de enseñanza y aprendizaje del tópico en cuestión.

Para llevar a cabo esta labor, en los sucesivos apartados de este epígrafe, se va sintetizar el contenido de los mencionados artículos buscando reflejar las ideas que permitan alcanzar los objetivos de valoración y mejora de la idoneidad didáctica del diseño implementado para cada una de las facetas que considera el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007).

A continuación, se analizarán en un primer apartado las facetas epistémica y ecológica, para después tratar las facetas cognitiva y afectiva y finalmente la interaccional y mediacional en el apartado que cierra el epígrafe.

2.2. Facetas epistémica y ecológica

Desde el punto de vista de estas facetas hay que centrarse en describir, por un lado, la representatividad de los significados institucionales implementados relativos al tópico matemático abordado. Por otro lado, también debe tratarse su relación con los condicionamientos del entorno en que se desarrolla y más concretamente con las exigencias del proyecto educativo en el que se enmarca.

Para comenzar a tratar estas facetas, en primer lugar conviene determinar cuáles son las concepciones que se pueden plantear para aproximarse a la definición del álgebra escolar, ya que hoy en día se considera al álgebra desde una perspectiva multidimensional que recoge las distintas las dimensiones de la misma y su interrelación.

Tanto Drijvers (2003) como Usiskin (1988) proponen una serie de aproximaciones o concepciones del álgebra que tienen en cuenta diversas interpretaciones que deben ser recogidas por el sistema escolar. Ambos se limitan a listar y ejemplificar las dimensiones en que puede ser interpretada el álgebra, pero dejan de lado la forma en que se deberían abordar en el seno de su enseñanza y aprendizaje.

Drijvers (2003) habla de una primera aproximación referida a la resolución de problemas mediante la formulación de ecuaciones que es compartida por Usiskin (1988), que destaca el proceso de simplificación para obtener el valor buscado. Esta concepción es objeto directo de la unidad didáctica implementada, pero supone un marcado avance en el conocimiento algebraico, por lo que bien merecería ser tratado en un tema independiente de la pura iniciación a la simbolización algebraica. Se considera que muchos estudiantes tienen dificultades en la formulación de ecuaciones algebraicas a partir de la información presentada verbalmente (Stacey y MacGregor, 1993), por lo que construir ecuaciones a partir de problemas verbales son las principales dificultades en la enseñanza del álgebra (Li, Peng y Song, 2011). En definitiva, el aprendizaje del método algebraico de resolución de problemas es dificultoso para los estudiantes, sobre todo por el poco entendimiento de la lógica empleada (Stacey y MacGregor, 2000).

Una segunda aproximación, es denominada funcional por Drijvers (2003) en tanto que estudia las relaciones en general y las funciones en particular, formulando e investigando las relaciones entre variables. Usiskin (1988), por su parte, lo refiere como el estudio de las relaciones entre cantidades y además de la referencia a las funciones, hace mención a las fórmulas como otra forma de relación que tiene un sentido diferente a las generalizaciones. En el ámbito del presente estudio, en el marco de la iniciación al álgebra en la etapa de secundaria, por lo que respecta a esta aproximación, solo se consideran las fórmulas y de manera incipiente, lo cual perjudica la visión integrada y multidimensional anteriormente referida. Sin embargo, la introducción de la visión funcional no se deja de lado, sino que es tratada de forma independiente en otra unidad didáctica, lo que no favorece la visión de conjunto a la que se debería tender.

La tercera aproximación está referida a la generalización de las relaciones y la investigación de patrones y estructuras (Drijvers, 2003). Esta aproximación la comparten parcialmente otros autores como MacGregor y Stacey (1997) cuando plantean que entre los usos de las letras algebraicas están los de sustitución de números generalizados y la creación de patrones numéricos en el contexto de la escritura de fórmulas. Usiskin (1988) veía las fórmulas mejor encajadas en un perfil funcional y además, separa la visión de la parte estructural de lo que considera como generalización. En el primer caso, se refiere al mero estudio de estructuras presentes en el que ve un proceso de manipulación de una serie de marcas en un papel, es el caso de grupos, anillos, espacios vectoriales... Este sentido le confiere autonomía frente a las otras aproximaciones contempladas. El segundo caso, hace referencia a la generalización de patrones observados en la aritmética decantándose por ofrecer una visión de álgebra como aritmética generalizada que encajaría en la necesaria transición que debe tener lugar entre ambas ramas de la matemática.

Drijvers (2003) da una última concepción del álgebra que no contempla Usiskin (1988) al menos de manera específica y separada de las demás. Se trata de la denominada aproximación lingüística que se centra en los aspectos del lenguaje algebraico como medio de expresión de ideas matemáticas por medio de una determinada sintaxis junto a una serie de símbolos y notaciones. Corresponde al álgebra entendida como mero sistema de representación. MacGregor y Stacey (1997) también coinciden en esta concepción, cuando consideran que las letras dan la oportunidad de escribir expresiones simples y ecuaciones que contienen letras, números, signos de operación y paréntesis. Esta idea es considerada como un objetivo fundamental del tema de iniciación al álgebra, según el modelo adoptado por el currículum vigente, en tanto en cuanto, se contempla la traducción de sentencias del lenguaje natural al algebraico y viceversa como la etapa inicial de la introducción al álgebra. Sin embargo, esta aproximación es la más abstracta y dificultosa y no sería conveniente que se antepusiera al resto de dimensiones del álgebra, tal como se justifica a continuación.

Drijvers (2003) incide en la idea de una aproximación integrada, en la que se partiría de la concepción funcional que, según él, “se enlaza con el conocimiento preliminar de los estudiantes y se combina pronto con la aproximación de resolución de problemas”. Después se daría, como siguiente paso, la generalización de relaciones y soluciones en donde mantiene que los aspectos del lenguaje tienen importancia.

Fujii (2003) plantea el álgebra de secundaria como “el uso de expresiones simbólicas compuestas por números, signos y letras del alfabeto”, de lo que quizás se desprende una aproximación más cercana a la lingüística; sin embargo, a continuación hace una extensión a las otras dimensiones como la de resolución de problemas e incluso la funcional y de generalización. Asevera que las expresiones simbólicas “pueden ser representadas en términos de un proceso de modelización matemática que las transforman para obtener una conclusión matemática que debe ser leída o interpretada en la situación original”.

La propuesta del libro de texto de Vizmanos, Anzola, Mansilla y Bujanda (2010), que se ha usado como apoyo del diseño de la instrucción, también deja ver en su globalidad una idea de aproximación integrada, pero utiliza otra secuencia diferente a las mencionadas anteriormente. La secuencia que propone deja deliberadamente de lado la aproximación funcional y se inclina por comenzar hablando del lenguaje algebraico y su uso meramente lingüístico, que enseguida trata de relacionar con una concepción más de generalización, a través de los ejemplos de aplicación que propone. A continuación se introduce en aspectos de tipo puramente estructural para preparar el camino hacia la resolución de problemas mediante la proposición de ecuaciones con la que finaliza el tema, dejando los aspectos funcionales para la siguiente unidad didáctica. Esta secuencia propuesta no solo es poco integradora, sino también poco didáctica, ya que aborda en primer lugar la dimensión menos intuitiva y antepone las cuestiones teóricas a las prácticas.

Es complicado defender como válida una determinada secuencia epistémica para abordar la introducción del álgebra escolar ya que, independientemente de otros factores comentados, "no existe un acuerdo, unos autores apuestan por la generalización, otros por la sustitución formal y otros por la modelización" (Ruano, Socas y Paralea, 2008) y en todas esas apuestas se pueden utilizar diferentes formas de integrar las distintas aproximaciones al álgebra utilizadas en la instrucción.

De las referencias consultadas, se extrae la idea general de que no es suficiente con definir las concepciones que se tiene del álgebra. Además, es pertinente y necesario analizar el significado de algunos de los elementos que poseen importancia y trascendencia a la hora de iniciarse y desarrollar el conocimiento de esta disciplina. Knuth, Alibali, Weinberg, McNeil y Stephens (2011) destacaron al respecto que, *equivalencia* y *variable*, son las dos ideas principales en álgebra cuya comprensión es esencial para la habilidad de su uso. Además, hacen mención a que el razonamiento algebraico depende de un número de ideas clave acerca de estas nociones. Por tanto, hay que centrarse en abordar el análisis de los diversos significados de las mismas, puesto que conviene conocerlos y tenerlos en cuenta a la hora de realizar un adecuado diseño de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje relativo a este tópico.

Diversos autores han analizado el papel que juega el signo igual en la educación matemática, llegando a la conclusión de que su significado está muy polarizado por la faceta operativa que lo vincula con la obtención de un resultado. A nivel del conocimiento puramente aritmético, puede ser adecuado y suficiente, pero que en el caso del álgebra, necesita de nuevas interpretaciones como la de equivalencia. Knuth et al. (2011) se refiere al signo igual como un signo más relacional que operacional, que es particularmente importante para resolver ecuaciones algebraicas con operaciones a ambos lados del símbolo. Defienden que es esencial comprender que las transformaciones en resolución de ecuaciones preservan la relación de equivalencia y piensa que esta faceta no se trata explícitamente en la instrucción típica.

Por lo que respecta al concepto de variable, se podría asegurar que es la noción fundamental del álgebra escolar, en tanto en cuanto, ésta existe por mediación de aquella. Dicha noción de variable es central en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que proporciona la base para la transición de la aritmética al álgebra y es necesario para el uso significativo de todas las matemáticas avanzadas (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Según Drijvers (2003) el concepto de variable presenta fundamentalmente dos aspectos. Uno es de corte generalizador, en el que se acerca a una cantidad indeterminada que enlazaría con su perfil estructural. El otro lo considera dinámico, donde la cantidad es variable y podría encajar con el aspecto operacional. Mantiene además que el álgebra escolar frecuentemente presenta un carácter estático y no presta bastante atención al dinámico.

El concepto de variable es muy amplio y en sí mismo tiene significados muy distintos, unos son más apropiados que otros. En cualquier caso, es conveniente describir cada uno de ellos de cara a su consideración específica en el marco de la instrucción de los alumnos. La consideración de estos distintos significados es útil para mostrar a los alumnos la variedad de usos en los que se emplea el concepto, o bien, para erradicar ciertas visiones que conducen a producir dificultades de aprendizaje.

Schoenfeld y Arcavi (1988) destacan que “muchos currículos, libros de texto y profesores la tratan [la variable] de manera rutinaria sin considerar sus múltiples connotaciones, significados y usos”. Posiblemente por esta razón, entre otras, piensan que los profesores deberían ser sensibles a los múltiples usos de su significado.

Por tanto, vamos a ver cuáles son los distintos papeles que juega una variable en relación con la interpretación que se haga de ella desde el punto de vista institucional. Aunque quizás, más que hablar de variable, habría que hablar de símbolo literal por diferenciarlo del numeral y acoger sin ambigüedades todos los matices que van a ser comentados; precisamente, uno de los usos de los símbolos literales es de variable (algo que varía), pero también puede ser incógnita, parámetro, o simplemente, una inscripción.

Se puede comenzar por una de las interpretaciones más típicas, la de incógnita. Representa a unos determinados valores desconocidos. Usiskin (1988) plantea que esta interpretación puede ser utilizada en una aproximación de resolución de ciertos tipos de problemas mediante operaciones de simplificación y resolución de ecuaciones. Esta visión o significado del símbolo literal también es compartida por Drijvers (2003).

Otra de las interpretaciones más comunes es la que la considera como número generalizado en el álgebra de patrones y estructuras que encaja en el aspecto de generalización del álgebra (Drijvers, 2003). Esta visión correspondería con el uso para la representación de patrones a través de la traducción y la generalización (Usiskin, 1988). Es la letra o cadena de letras usadas para representar a un número (Schoenfeld y Arcavi, 1988).

También es común entenderla como símbolo que puede ser reemplazado por cualquier elemento de algún conjunto definido de números (u otras cantidades) llamado dominio de la variable (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Una cantidad cambiante en reflejo de un aspecto dinámico, que se corresponde con una aproximación funcional (Drijvers, 2003). En la concepción de Usiskin (1988) es una relación entre cantidades en la que la variable muestra un aspecto relacional o incluso argumental.

Según Drijvers (2003) se puede considerar como un mero símbolo en el lenguaje algebraico (sin referencias), lo que Usiskin (1988) interpreta como “marcas arbitrarias en un papel” en su visión estructural del álgebra en la que se centra en aspectos de manipulación y justificación en el uso de las variables.

Finalmente hay otra interpretación algo menos común, pero igualmente posible, que consiste en tomar la variable como un “espacio vacío, que representa una especie de caja rotulada dentro de la que poder introducir valores numéricos que pueden ser recuperados” (Drijvers, 2003). En este caso la expresión contiene un símbolo (la variable) que puede ser reemplazado por cualquier elemento de un conjunto definido, por lo que se podría incluir en la visión relacional de Usiskin (1988) y como “cantidad cualquiera de un conjunto especificado de valores” (Schoenfeld y Arcavi, 1988).

Indudablemente, estas visiones del concepto de variable son las que atañen al campo de las matemáticas desde un punto de vista del conocimiento institucional que se espera sea adquirido por los estudiantes. Sin embargo, por desgracia para el alcance de esta pretensión, el aspecto que toma la variable puede ser entendido de otras maneras que no son efectivas para el aprendizaje matemático.

Muchos autores (Drijvers, 2003; Schoenfeld y Arcavi, 1988; Usiskin, 1988) coinciden en apartar el sentido de variable asignado por la informática como entidad que posee un valor que puede cambiar durante la ejecución de un programa y se corresponde con una mera localización de memoria específica (Schoenfeld y Arcavi, 1988), por tanto puede tomar valores numéricos o de otro tipo, con lo cual no es operativo para el álgebra escolar.

Otra serie de significados vienen de la mano de las concepciones personales de los estudiantes cuyo origen tiene diversos orígenes, inclusive la propia formación institucional. Drijvers (2003) y MacGregor y Stacey (1997) destacan la variable como mera etiqueta representativa de un nombre abreviado y la identificación de la designación alfabética de apartados con el valor numérico asignable a las variables, es decir, dichas variables son consideradas por su posición alfabética.

2.2.1. Orientaciones curriculares sobre el álgebra escolar (faceta ecológica)

Una vez visto lo anterior, es conveniente centrarse en el currículum oficial que será el que determine, de forma directa, las directrices epistemológicas de la programación del departamento de matemáticas. Dicha programación contendrá los criterios para el diseño de la instrucción en el marco de las facetas epistémica y ecológica.

El currículum se define en un primer nivel de concreción en la legislación nacional española, concretamente en la Ley Orgánica 2/2006, de Educación (LOE) que es desarrollada por el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, en el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

A nivel de la Comunidad Autónoma Andaluza, en virtud de las competencias que le confiere su Estatuto de Autonomía, se ha realizado una trasposición del marco legislativo nacional al ámbito autonómico mediante la Ley 17/2007, de Educación de Andalucía y el Decreto 231/2007, de 31 de julio. Para el desarrollo concreto del currículo de secundaria, se recurre a la Orden de 10 de agosto de 2007 en la que se establece que los contenidos de matemáticas para la ESO “son los establecidos en el

Anexo II del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre y en el Anexo I de la presente Orden en el que se establecen las enseñanzas que son propias de la Comunidad Autónoma" (Junta de Andalucía, 2007b, p. 23). En dicho anexo I se refleja un apartado dedicado al desarrollo del sentido numérico y la simbolización matemática que define como contenidos relevantes los que "se encuentran recogidos en el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, concretamente en los bloques 2, Números, y 3, Álgebra, de 1º a 4º" (Junta de Andalucía, 2007b, p. 54).

Según lo anterior, los contenidos mínimos relativos al álgebra en el nivel del primer curso serían los siguientes:

> "Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar.
> Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.
> Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa.
> Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.
> Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.
> Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana." (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006, p. 753).

Estos contenidos están en sintonía con las recomendaciones del NCTM (2000) para el álgebra que han servido de base al desarrollo de la mayor parte de las propuestas curriculares actuales. En los principios y estándares para las matemáticas escolares, se destaca la importancia de la enseñanza de cuatro destrezas algebraicas principales. La primera consiste en entender patrones, relaciones y funciones, la segunda es representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, la tercera corresponde al uso de modelos matemáticos para representar y entender relaciones cuantitativas y finalmente, la cuarta consiste en el análisis de los cambios en varios contextos. Si bien, en España, la enseñanza de dichas destrezas es bastante tardía, al no iniciarse en primaria, si se recogen en secundaria las principales directrices establecidas por este importante documento de referencia.

Todavía existe un segundo nivel de concreción del currículum que corresponde a los centros educativos a nivel de plan de centro y departamento didáctico, tal como establece el artículo 8 del Decreto 231/2007 relativo a la autonomía de los centros (Junta de Andalucía, 2007a, pp. 17-18). Por tanto para completar las directrices generales que ofrece la legislación vigente, habría que recurrir a lo dispuesto en la programación del departamento de matemáticas que recoge los contenidos a impartir para desarrollar el bloque 3 de álgebra antes contemplado.

2.3. Facetas cognitiva y afectiva

El diseño de la instrucción en álgebra debe contemplar, además del propio conocimiento a impartir y sus condicionantes, las características de los alumnos a los que va dirigido teniendo en cuenta dos facetas. Una tiene en cuenta el desarrollo cognitivo de la persona y sus concepciones personales. La otra se refiere a las actitudes y emociones manifestadas ante la disciplina y su implementación en el aula.

Ambas facetas tienen una importancia fundamental y existen numerosos estudios que se perfilan en torno a ellas, tratando de arrojar luz sobre los aspectos destacables de las mismas. En este apartado se analizarán diversos artículos de relevancia que pongan de manifiesto, por un lado, la demanda cognitiva que impone al alumnado el tratamiento de la introducción al álgebra y las ecuaciones de primer grado y por otro lado, cuáles son los factores afectivos que condicionan e influyen al proceso de enseñanza y aprendizaje. Dentro del primer grupo de consideraciones hay que destacar que se hará hincapié en el análisis de los errores que habitualmente comete el alumnado y sus posibles causas.

No es objeto de este estudio entrar en el debate acerca de cómo se produce el desarrollo cognitivo de los sujetos objeto de la instrucción. Baste con aclarar que, sea como fuere, desde el punto de vista cognitivo, los alumnos deben haber alcanzado el grado de madurez apropiado para poder asimilar los nuevos conocimientos.

En paralelo, es interesante considerar si la actividad matemática de los estudiantes incorpora o no indicios de actividad algebraica y en qué grado. Todo esto con objeto de establecer el nivel de referencia desde el que partir en la instrucción y el objetivo que se pretende alcanzar tras el proceso.

A este respecto, Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) proponen la existencia de tres niveles de algebrización básicos que definirían el razonamiento algebraico de los alumnos en la etapa que nos interesa. Aunque los autores presentan este modelo para describir el tipo de razonamiento algebraico que se pone en juego en la resolución de tareas matemáticas específicas por un sujeto epistémico, es claro que también se puede aplicar para describir el trabajo matemático de los propios estudiantes.

Se partiría de un nivel cero que indicaría la ausencia de razonamiento algebraico. Tras éste, vendría el primer nivel denominado incipiente que se caracteriza por el reconocimiento de la generalización sin usar el lenguaje simbólico-literal. El uso de simbolización se ciñe a la representación de los objetos reconocidos, pero sin poder operar con ellos y se aplican relaciones y propiedades de las operaciones en las que pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente.

El nivel dos o intermedio llega hasta las ecuaciones aritméticas, se usan variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir objetos ligados al contexto espacial y temporal, pero no se opera con ellas para obtener formas canónicas.

El tercer nivel denominado consolidado se caracteriza por la representación simbólico-literal de objetos intensivos (entidades generales) y la operación con ellos, pudiendo hacer equivalencias y trabajando ecuaciones algebraicas (esto es, ecuaciones en las que la incógnita está en ambos miembros de la igualdad), así como la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Además del reconocimiento del nivel algebraico en relación con el desarrollo cognitivo de los alumnos en cada momento, es preciso contemplar la secuencia que debe permitir a los estudiantes reacomodar la estructura de su conocimiento previo para asimilar los nuevos contenidos. En relación con esto, es importante analizar qué tipo de dificultades se presentan habitualmente durante la enseñanza y aprendizaje de la disciplina. El objetivo perseguido con ese estudio de errores típicos, es aclarar ciertos aspectos cognitivos de relevancia para el proceso pretendido.

A partir de la extensa bibliografía acerca del tema de identificación de errores, se puede hacer un catálogo de dificultades que nos sitúe en distintos aspectos cognitivos a tener en cuenta a lo largo del proceso de instrucción. A nivel genérico Ruano et al. (2008)

mantienen que “un error siempre manifiesta un esquema cognitivo inadecuado además de una falta de conocimiento o un despiste”. Socas (2011) plantea que esa catalogación de errores, en la actualidad, debe ir acompañada de la determinación de los orígenes de los mismos, de manera que se puedan arbitrar procedimientos que ayuden a corregirlos. Por tanto, ese va a ser el esquema que se siga para abordar este aspecto.

En cuanto a lo que se refiere al catálogo concreto de errores cometidos por los estudiantes a lo largo de su trabajo con el álgebra, se pueden destacar varios que por su frecuencia y generalidad, es importante tener en cuenta. Socas (2011) propone cinco grandes categorías para describir la procedencia de las dificultades. Determina que dos de ellas se asocian a la dificultad de la disciplina (debido a la complejidad de los objetos o los procesos involucrados). Otra depende del proceso de enseñanza, la cuarta está relacionada con el desarrollo cognitivo de los alumnos y la última con actitudes afectivas y emocionales. En este estudio, se ha dejado la última para ser analizada aparte de las demás y entre las otras cuatro restantes se ha optado por unificarlas en aquellas que se relacionan más directamente con la aritmética y las que están más cercanas al álgebra.

Según lo anterior, las primeras dificultades se podrían relacionar directamente con un conocimiento deficiente de la aritmética (MacGregor y Stacey, 1997; Ruano et al., 2008; Vlassis, 2002) que provoca errores derivados de aspectos meramente operacionales como pueden ser la confusión entre la notación exponencial (potencias) y la multiplicación (Ruano et al., 2008) que supone considerar un exponente como coeficiente o como dicen MacGregor y Stacey (1997) “falta de claridad en los conceptos de repetición de la adición, la multiplicación y la repetición de la multiplicación”. Siguiendo con las propiedades de las potencias, estas autoras destacan la no identificación de que el exponente de la incógnita es la unidad cuando no aparece, o que una potencia con exponente cero tenga el valor de uno. También refieren como error la igualación de letras al valor uno, debido posiblemente a que los profesores enseñan que cuando la incógnita no tiene coeficiente, este es la unidad, lo que origina la confusión identificando ese coeficiente con el valor de la variable.

Otros errores tienen que ver con las dificultades para homogeneizar las unidades de medida que según Ruano et al. (2008) producen cambios de registro incorrectos que mezclan cantidades o expresiones con distintas unidades de medida.

Otra fuente de errores característica es la proveniente del trabajo con números negativos y no solo por confundir los criterios de signos de las operaciones básicas, sino por lo que Vlassis (2002) refiere cuando dice que hay muchos errores debidos a la presencia de signos negativos como la no consideración del signo menos, el uso de una resta para cancelar un término negativo o la imposibilidad de aislar una incógnita con coeficiente negativo.

Ruano et al. (2008) se fijan en un uso incorrecto de la propiedad distributiva extendida al caso de la multiplicación, o al hecho de distribuir la multiplicación solo al factor numérico y no a los términos no independientes. Además observan que los paréntesis no siempre se usan donde es necesario o que incluso se omiten. Justifican que la enseñanza de operaciones combinadas tiene dos estrategias una de “fuera hacia adentro” (que evitaría ese error) y otra de “dentro hacia fuera” que en el caso algebraico provoca bloqueos al no poder resolver lo que hay dentro del paréntesis. En relación con esto destacan los errores debidos a la malinterpretación de la jerarquía de operaciones, cuando estas se combinan en una expresión, e incluso el problema que detecta Vlassis (2002) al observar que al dividir los dos miembros por el coeficiente de un término de primer grado, en muchas ocasiones, no se ha eliminado previamente el término independiente.

Finalmente también hay que mencionar otra importante fuente de errores en relación con la falta de resultado numérico de una solución (Socas, 2011) o la necesidad de clausura de las expresiones algebraicas percibidas por los estudiantes como procesos o acciones (Drijvers, 2003; Fujii, 2003; Ruano et al., 2008) que lleva a los alumnos a completar con un resultado dichas expresiones produciendo mezclas de los términos de distinto grado.

Además de las dificultades derivadas de la aritmética existen otras que se relacionan directamente con las características de la propia disciplina algebraica. Drijvers (2003) se centra en identificar esas fuentes de error y concluye que la formalidad dada por el carácter algorítmico de los procesos algebraicos puede producir que los estudiantes no relacionen estos con la aproximación informal y significativa. Las estrategias se acortan, automatizan y condensan en una forma algebraica compacta en cuyo proceso de ejecución se cometen errores mientras se adquiere el conocimiento formal.

Por otro lado, se encuentra el alto nivel de abstracción requerido para resolver los problemas, en contraposición con la concreción de las situaciones de las que surge (Drijvers, 2003). La dificultad no descansa en la estructura, por ejemplo, de una ecuación, sino en su grado de abstracción (Vlassis, 2002). No se puede perder de vista la falta de significado que el estudiante atribuye a los objetos matemáticos en ese nivel abstracto. En conclusión Drijvers (2003) afirma que la separación de significado y forma, de semántica y sintaxis es una de las dificultades del álgebra ya que cambiar de la perspectiva concreta a la abstracta no es sencillo, sobre todo porque el marco algebraico no adquiere significado por sí solo. La necesidad de particularizar las expresiones algebraicas es debida a la ausencia de sentido provocada cuando los alumnos no saben trabajar con letras o éstas no tienen significado para ellos (Ruano et al., 2008). En ese momento busca respuesta retrocediendo al lenguaje numérico, hecho que también observaba MacGregor y Stacey (1997) junto a otra estrategia consistente en ignorar la letra directamente o usarla como una etiqueta para un objeto.

Otra dificultad importante es intrínseca a la sintaxis algebraica (Vlassis, 2002) dada por su concepción lingüística, que se centra en el álgebra como un lenguaje de expresión que posee unas características que difieren del lenguaje natural en muchos aspectos y lo hacen difícil de aprender para los estudiantes. Esta dificultad llega hasta el punto de cometer errores como los derivados de la generación de expresiones a partir del lenguaje natural ambiguo que puede generar reversiones de las expresiones (MacGregor y Stacey, 1997). Un ejemplo de las mismas es el típico problema en el que se pide traducir la sentencia, “hay seis veces más estudiantes que profesores” y se representa como $6E=P$ al hacer una transcripción literal en la que “E” corresponde al número de estudiantes y la “P” al de profesores.

Las características del lenguaje algebraico, con sus múltiples símbolos específicos, convenciones y notaciones que son compactas, poderosas y ambiguas, hacen al álgebra sintácticamente fuerte pero semánticamente débil (Drijvers, 2003). Esto también da origen a errores originados por la mala interpretación de la notación concatenada (Fujii, 2003), la incidencia de la yuxtaposición para la adición, que podría venir de los números romanos o del uso de la recta numérica (MacGregor y Stacey, 1997) o la confusión de los distintos significados de la noción de variable.

Finalmente, en relación con la aproximación a la resolución de situaciones problemáticas, hay que considerar que la necesidad de mantener el rastro de todo el proceso de resolución de un determinado problema mientras se ejecutan los procesos algebraicos elementales que son parte del mismo, constituye una fuente de fracaso en su ejecución. En situaciones complejas, la ejecución de los subprocesos que los estudiantes dominan requiere tanta atención que pierden el sentido del proceso completo de resolución del problema (Drijvers, 2003).

Por lo que se refiere al origen de los errores Ruano et al. (2008) piensan que solo se puede determinar de manera precisa y cierta a través de entrevistas clínicas. Sin embargo, tanto el propio Ruano et al. (2008) como Socas (2011) esbozan algunas causas genéricas que son de gran ayuda. En el caso concreto del álgebra, destacan tres motivos principales en la aparición de dificultades que se entrelazan con la dependencia que existe con respecto a los contenidos, las tareas planteadas y el proceso seguido. El primero de los motivos aludidos tiene que ver con la presencia de un obstáculo (cognitivo, didáctico o epistemológico). El segundo se origina en una ausencia de sentido (semiótico, estructural y autónomo) cuya fuente puede estar en la aritmética, en procedimientos usados de forma inapropiada o en las características del propio lenguaje algebraico. El tercero se debe a determinadas actitudes afectivas y emocionales, que nuevamente ponen de manifiesto la idea de la fuerte interconexión que existe entre la faceta cognitiva y la afectiva.

Otros autores también han realizado investigaciones en las que se centran en intentar identificar las causas de los errores observados y aunque manifiestan las mismas reservas ante las explicaciones que aportan, argumentan de forma coherente sus propuestas.

MacGregor y Stacey (1993), realizaron un estudio acerca de los modelos cognitivos subyacentes a la formulación de ecuaciones lineales simples por parte de los estudiantes en el que identificaron algunas fuentes de error potenciales en la traducción de frases al lenguaje algebraico. Concretamente, observaron que se producían errores a causa de la mera traducción sintáctica (sustituyendo palabras por símbolos sin considerar su significado), la comparación estática de los conjuntos de objetos asociados, el uso de letras algebraicas como nombres abreviados, la interpretación de numerales como adjetivos o la sintaxis compleja o engañosa (relacionada con las características de una expresión en lenguaje natural). El entendimiento de una frase del lenguaje natural involucra procesos sintácticos, semánticos y de otros tipos que produce un modelo cognitivo generado sin intervención consciente. Tales modelos soportan la comprensión y son reflejados en lenguaje natural pero no son útiles para propósitos matemáticos porque ofrecen poco soporte para el razonamiento lógico en el campo del álgebra ya que no es sencillo representarlos en código matemático. Los estudiantes necesitan experiencia en el reconocimiento cuando una frase de un problema necesita ser reorganizada antes de que pueda ser traducida sintácticamente. Una de las mayores dificultades para los principiantes en el álgebra es unir una situación matemática con su descripción formal, de manera que los estudiantes intentan dar sentido al texto de los problemas y para ello, intuitivamente, construyen imágenes o modelos mentales.

En otro estudio posterior, MacGregor y Stacey (1997) abordaron la comprensión de la notación algebraica por parte de los estudiantes y concluyeron que el origen de las dificultades en el uso de la notación algebraica provenía de tres causas fundamentales. La primera hacía referencia a sus asunciones intuitivas y sensitivas que les llevaban a actuar de manera pragmática sobre la base de un sistema de notación que les fuera familiar. La segunda se relaciona con las analogías encontradas en otros sistemas de símbolos utilizados en la vida cotidiana pertenecientes a otras partes de las matemáticas o incluso a otras asignaturas del ámbito escolar. La tercera, se debe a la interferencia que crean los nuevos aprendizajes en la propia disciplina matemática. Destacan también que estas fuentes de error se ven acrecentadas por el uso de materiales de enseñanza pobremente diseñados e incluso engañosos, a lo que se podría añadir una extensión de esa idea a la propia globalidad del diseño instruccional que se empleara en cada caso particular.

Por lo que respecta a la faceta más puramente afectiva, como se ha comentado, diversos autores (Ruano et al., 2008; Socas, 2011) han puesto de manifiesto que es otra de las causas de error en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Gil, Blanco y Guerrero (2005) estudiaron en profundidad el dominio afectivo en el aprendizaje de matemáticas y manifiestan que los factores clave en la comprensión del comportamiento de los estudiantes en matemáticas corresponden a tres afectos.

El primer afecto corresponde a las creencias, definidas en términos de experiencias y conocimientos subjetivos del individuo.

El segundo afecto son las actitudes, tanto matemáticas (modo de utilizar las capacidades generales), como hacia la matemática (valoración y aprecio de la disciplina e interés por su aprendizaje). Estas actitudes constan, a su vez, de tres componentes, una cognitiva manifestada en las creencias subyacentes, otra afectiva manifestada en los sentimientos de aceptación o rechazo de la materia y otra intencional o de tendencia hacia un tipo de comportamiento. Además están determinadas por las características personales y se relacionan con la autoimagen académica y la motivación de logro, tanto en la forma de acercarse a las tareas como en la tendencia a reflejar sus propias ideas.

En tercer lugar están las emociones. Surgen en respuesta a un suceso interno o externo con carga de significado positiva o negativa. Son un resultado complejo del aprendizaje, la influencia social y la interpretación.

Los tres afectos influyen de manera cíclica en la capacidad de aprender de los alumnos. Durante el aprendizaje el estudiante recibe estímulos ante los que reacciona emocionalmente según sus creencias acerca de sí mismo y de la disciplina. Una repetición de este proceso conlleva una solidificación de las actitudes con el tiempo.

Gil et al. (2005) concluyen que el alto número de fracasos se debe, en gran parte, a la aparición de actitudes negativas originadas por factores ambientales y personales que deben ser detectados como primer paso para combatirlos. Opinan que muchos estudiantes ven las matemáticas útiles, pero muy rigurosas y formales, tan solo aptas para gente inteligente y creativa. Esto crea en ellos una idea peyorativa de la enseñanza caracterizada por el aburrimiento, el mecanicismo y el sin sentido, que hacen la materia inaccesible y les crea una baja autoestima. Los fracasos repetidos llevan a los estudiantes a considerar que sus esfuerzos son inútiles y manifiestan sentimientos de indefensión o pasividad que redundan en la espiral de fracaso y en una actitud negativa que bloquea sus posibilidades de aprendizaje.

Finalmente, es importante destacar que hay alumnos con dificultades que poseen perfiles diferentes y demandan una atención educativa específica, como en el caso que nos ocupa. Según Zabalza, Lizeaga, Wilhelmi y Ruiz (2009) los problemas de este tipo de alumnos pueden ser de tres tipos principalmente, cognitivos, educativos o didácticos y motivacionales y comportamentales. Postulan que en estos casos, los conocimientos iniciales al comenzar una etapa educativa tienen un alto poder predictivo sobre unos resultados finales que manifiestan todos los errores anteriormente comentados y obliga a desarrollar un proceso de estudio en el que “se minimicen las dificultades que suele conducir a una pérdida de sentido debido a que se potencia la realización mecánica de manipulaciones sin asumir la responsabilidad matemática de los resultados producidos” (Zabalza et al., 2009).

2.4. Facetas interaccional y mediacional

Por lo que se refiere a las facetas interaccional y mediacional, habrá que tratar acerca de la manera en que se interactúa en el aula teniendo en cuenta los recursos a disponer tanto materiales como metodológicos, de manera que el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra sea óptimo en relación con el resto de facetas analizadas.

Desde el punto de vista institucional se incide sobre estas facetas cuando el Decreto 231/2007 aboga por diseños instruccionales en los que se utilicen metodologías activas y participativas que den cabida tanto al trabajo individual como al cooperativo y que aborden los contenidos desde una perspectiva multidisciplinar que recoja referencias a la vida cotidiana y al entorno del alumno, teniendo en consideración que el aula es diversa en su composición (Junta de Andalucía, 2007a).

Para desarrollar este apartado se tomará en consideración la opinión de diversos autores de relevancia que aporten sus ideas acerca de la metodología de intervención en el aula, que aúna ambas facetas y relaciona las estrategias con los recursos necesarios, así como con la propia interacción entre los distintos actores que intervienen en el proceso, según las directrices establecidas al respecto.

Como ya se comentó a la hora de analizar la faceta epistémica, uno de elementos fundamentales para la enseñanza del álgebra es el concepto de variable. A este respecto Schoenfeld y Arcavi (1988) hacen varias sugerencias para su enseñanza. Consideran que se debería habituar a los estudiantes a resumir con sus propias palabras algunas de sus observaciones sobre la aritmética, pidiéndoles que observaran patrones y los resumieran verbalmente para ayudarles a hacer la transición al álgebra por medio de la introducción del lenguaje algebraico. Por otro lado, creen que es necesario enfatizar el aspecto dinámico de las variables y para ello, el uso de ordenadores y de los lenguajes de programación posibilitarían, a nivel elemental, la exploración, para lo que son útiles los juegos de gráficos y los graficadores a la hora de hacer más significativa la noción de variable. Finalmente, opinan que los estudiantes deben ser expuestos a un amplio rango de problemas en los que el álgebra puede ser útil, especialmente en su papel de herramienta para la generalización matemática.

En esta línea, Fujii (2003) opina que los niños desde una edad temprana pueden ser introducidos en el pensamiento algebraico a través de la generalización de expresiones numéricas. Por tanto, este aspecto del pensamiento algebraico debería ser cultivado sistemáticamente en todas las etapas de escolarización. Sin embargo, la enseñanza suele hacer una fuerte separación entre aritmética y álgebra basándose en un potente desarrollo de las operaciones y la numeración que dificultan el aprendizaje del álgebra en grados posteriores. Mantiene que la generalización de expresiones numéricas puede ayudar a los chicos a identificar y discutir las generalizaciones algebraicas mucho antes de aprender la notación formal, en términos de cuasi-variables. Por otro lado destaca también que el desarrollo de la comprensión relacional del significado del signo igual conlleva la habilidad de señalar y representar generalizaciones. Aporta tres sugerencias de formas de facilitar la transición del pensamiento aritmético al algebraico. El primero a través de escribir y señalar el uso de procesos de generalización y propiedades estructurales de la aritmética en general y de las expresiones de cuasi-variables en particular. El segundo, generalizando las soluciones de problemas aritméticos para desarrollar el concepto de variable en un sentido informal. El tercero, proveyendo oportunidades a los estudiantes para discutir sus estrategias de solución de este tipo de problemas para destacar las ideas y procesos matemáticos fundamentales.

MacGregor y Stacey (1997) coinciden con los autores anteriormente destacados en que hay una serie de experiencias tempranas con el álgebra a través de los patrones numéricos, las “máquinas” que representan una función, las reglas para adivinar un número concreto o los ejercicios de traducción puramente simbólica. Pero en estas prácticas, introducidas mediante materiales o estilos de enseñanza y ambientes de aprendizaje, se pueden producir malas interpretaciones perdurables en el tiempo que son muy dañinas a la hora de darle sentido al álgebra, por lo que hay que reconocerlas y corregirlas. Analizaron que los estudiantes no obtienen suficiente experiencia en el uso de la notación algebraica y que suelen aprender esta disciplina en uno o dos cortos módulos por año que usualmente están desconectados de otros trabajos y no tienen un propósito útil desde el punto de vista de los estudiantes, por lo que estos tienden a olvidar tanto los conceptos y métodos como la propia notación al no utilizarse en otras partes de la matemática.

Uno de los recursos didácticos que se pueden utilizar de manera exitosa a nivel instruccional a la hora de trabajar el álgebra es, según Filloy y Rojano (1989), la modelización en un contexto concreto dotado de significado sobre cuyo comportamiento se puede construir una sintaxis algebraica. Para ello que hay que tener en cuenta los procesos que intervienen en la realización de acciones en el nivel concreto y los correspondientes elementos de sintaxis algebraica obtenidos. Estos procesos son abstracciones de las operaciones que muestran características estándar que pueden variar con el modelo o ser influidas por diferencias entre sujetos. Sostienen que en contra, está la tradicional posición didáctica contraria que propone comenzar a nivel sintáctico aprendiendo las reglas apropiadas para aplicarlas a la resolución de ecuaciones. Defienden que una aproximación semántica al aprendizaje del álgebra es mejor que una sintáctica para un buen rendimiento algebraico posterior, aunque la sintaxis del álgebra no pueda ser derivada fácilmente de ello.

En general, los modelos favorecen ciertos procesos de abstracción, pero aportan ventajas e inconvenientes. Entre los primeros, destaca la modificación de la noción aritmética de una ecuación y el uso de códigos personales para indicar acciones realizadas en la solución del proceso que suponen un paso intermedio en el desarrollo de una sintaxis algebraica. Entre las desventajas, están que la fijación en el modelo persista debajo de una aparente operatividad algebraica en las ecuaciones elementales o la ruptura con el modelo, transfiriendo la operatividad de los coeficientes a los términos que contienen la incógnita. Esto puede aparejar errores como el de combinar términos de distintos grados. Los estudiantes prefieren ciertos métodos de solución ordenados desde los más operativos y algorítmicos hasta los más semánticos y analíticos. La corrección de errores sintácticos algebraicos y de dificultades operativas es tarea de la educación y no puede ser dejada para que los estudiantes las resuelvan espontáneamente en base a su comprensión del funcionamiento operacional algebraico. Si se quiere introducir ciertas nociones algebraicas por medio de modelos habría que tener en mente las componentes del modelado (Filloy y Rojano, 1989).

Al hilo de estos modelos didácticos Rojano (2010) se centra en el estudio de los de balanza virtual para la enseñanza de la resolución de ecuaciones de primer grado por analogía con el equilibrio. Esta representa muy bien a la noción de igualdad algebraica restringida. Piensa que el álgebra y los procesos de abstracción implican generalización de acciones al modelar nuevas situaciones teniendo en cuenta que hay casos modelables y otros que no lo son. Este modelo ayuda a aprender el método formal de aplicar la misma operación a los dos miembros y a comprender la regla de eliminación de términos semejantes en distintos miembros, pero es difícil su generalización a ecuaciones con enteros negativos, lo que obstaculiza la abstracción. Propone un circuito didáctico para desarrollar en cuatro sesiones utilizando ecuaciones simples tanto aritméticas como algebraicas. Se parte de una familiarización con la balanza, seguida de la representación de las ecuaciones y su resolución, primero por eliminación de objetos de los platillos, luego por elección de la operación inversa a los términos de la ecuación y finalmente a nivel simbólico sin balanza. Concluye que el uso de la balanza permite que los estudiantes extiendan el método de resolución en el nivel sintáctico a distintos tipos de ecuaciones que rebasan a los del modelo por su estructura más compleja.

La propuesta de balanceo también es considerada de ayuda por Vlassis (2002). Plantea que todos los estudiantes consiguen asimilar el principio demostrado por las balanzas. Analiza que los que se oponen a la utilidad del modelo, argumentan que no permite tratar con el valor desconocido, conduce a ciertos errores y en la actualidad tiene poco sentido debido a la forma de las balanzas modernas. Sin embargo, la idea de las balanzas facilita el uso de la regla de eliminación de términos (también considerado por Rojano, 2010), aunque cuando aparecen los enteros negativos, los modelos dejan de ser efectivos ya que, al ser abstractos, necesitan de un entendimiento algebraico de las letras que está en conflicto con lo introducido por el modelo de balanceo.

Vlassis (2002) profundiza aún más que Rojano (2010) en las ventajas del modelo de balanceo y precisa que es útil para estudiar cómo resolver ecuaciones debido a que permite formarse una imagen mental de las operaciones que han de aplicarse. Es más eficiente en términos de demanda de memoria que una descripción de las operaciones. También es efectivo en la explicación del significado del signo igual y en la formación de la imagen de la ecuación proveída en un determinado momento mediante una visión estructural de las expresiones.

También destaca algunos inconvenientes como que el uso de balanzas solo ayuda con la habilidad de transformación en ecuaciones equivalentes. Deja fuera las otras dos habilidades necesarias, es decir, la de extender el rango numérico a los enteros y la de entender la letra como una incógnita. Además, da lugar a errores propios del modelo, como restar a un número negativo en la cancelación. Finalmente, en el curso de la transformación, los estudiantes pierden ciertas habilidades ya adquiridas, aunque no es el caso de las aritméticas (Vlassis, 2002).

En lo que respecta a la enseñanza de las ecuaciones, Vlassis (2002) sostiene que el método de transposición para la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita permite resolverlas todas, pero dice que no es muy idóneo ya que deja de ver completamente cualquier conocimiento previo que el estudiante pudiera tener. Sin embargo, los modelos concretos como el de las balanzas se centran en una parte del proceso que no es universal, pero que tiene su sitio en el entrenamiento de los estudiantes. Plantea tres fases de aproximación sucesiva a la resolución de ecuaciones. En la primera, mediante prueba y error se manifiestan las limitaciones de los métodos aritméticos y se extiende el significado del signo igual hasta la noción de equivalencia. En la segunda, el uso de balanzas introduciría el método formal basado en las propiedades de la igualdad. En la tercera, se sistematizaría el proceso formal de resolución. Por otro lado, se emplearían al principio ecuaciones aritméticas (con la incógnita en un solo miembro) para adquirir las primeras nociones de ecuación, solución e incógnita y después se abordarían las no aritméticas (con la incógnita en ambos miembros) utilizando el método formal. Finalmente, de forma separada, habría que abordar la resolución de problemas que requieren la formación de una ecuación para evitar una acumulación de dificultades inherentes a cada fase de la resolución de problemas.

Otros autores como Li et al. (2011) defienden la utilidad de otros métodos para tratar el álgebra en las aulas. En su caso, establecen lo que denominan variación. Esta se aplica tanto a los conceptos como a los procedimientos para desplegar las matemáticas gradualmente. La *variación* juega un papel esencial para la diferenciación por parte de los aprendices de ciertos aspectos del objeto matemático significativos para el aprendizaje del contenido. Habría que atender a lo que varía y lo que es invariante en una situación de aprendizaje y conectar el nuevo conocimiento con algunos aspectos específicos del anterior.

Por tanto, para el aprendizaje del álgebra con variación, los estudiantes necesitan entender el concepto desde múltiples perspectivas (de lo concreto a lo abstracto y de lo específico a lo general). De esta manera conocen la naturaleza y las conexiones de los conceptos, eliminando interferencias del bagaje anterior, iluminando su esencia y clarificando la connotación del concepto de álgebra. Esto se consigue a través de la presentación de series de problemas interconectados que ayudan a los alumnos no solo a entender los conceptos, sino también a dominar el método de resolución de problemas, desarrollando así el conocimiento matemático. Cuando los estudiantes entienden el origen y uso del conocimiento matemático, ganan experiencia en la formación de conceptos y en la resolución de problemas. También adquieren diferentes componentes matemáticos, prueban su conocimiento de las estructuras matemáticas y de esta forma, establecen sus propias conexiones entre el nuevo y el anterior conocimiento matemático (Li et al., 2011).

La enseñanza de ecuaciones algebraicas basada en variaciones apropiadas, puede ayudar a los estudiantes a entender el concepto de ecuación y facilitar su desarrollo en representaciones y estrategias de resolución de problemas. Los estudiantes primero aprenden los pasos generales para resolver varios tipos de ecuaciones y entonces entienden las razones y bases para su resolución. Son capaces de narrar los pasos necesarios y entonces hacen suficientes prácticas de variación hasta que puedan hacerlo automáticamente. Los estudiantes no solo practican, también entienden las ideas del algoritmo como aplicación del concepto de ecuación equivalente y cambio en las ecuaciones de lo complejo a lo simple. Los estudiantes necesitan hacer un considerable número de prácticas de variación guiada y muestran gran competencia en varios tipos de resolución de ecuaciones de cara a consolidar el conocimiento (Li et al., 2011).

Otro aspecto fundamental a tener en cuenta desde la perspectiva puramente mediacional es el uso de recursos tecnológicos, calculadoras, ordenadores y tecnologías de la información y la comunicación (TIC). Al respecto, Socas (2011) refiere que constituyen mediadores didácticos que bien utilizados, pueden ayudar en el desarrollo del aprendizaje significativo de los conceptos algebraicos. El papel de la computadora reporta ventajas, como el aprovechamiento del tiempo en actividades que edifiquen la comprensión de conceptos algebraicos clave y habilidades de resolución de problemas o el cambio de notaciones para representar relaciones y procesos matemáticos.

El desarrollo de entornos tecnológicos junto a la implementación de múltiples representaciones y la incorporación de programas de cálculo simbólico generan nuevas aproximaciones al álgebra escolar y amplían la consideración habitual del álgebra como lenguaje. El ordenador ofrece un enorme potencial para crear ambientes de aprendizaje que requieren programas o códigos para hacer predicciones y establecer secuencias de desarrollo de aspectos operacionales del conocimiento algebraico, otras veces se centran en los aspectos estructurales y otras en una combinación de ambos. Además no eliminan las técnicas de papel y lápiz y generan discusiones matemáticas en el aula que no son posibles de otra manera (Socas, 2011).

Finalmente, no se puede acabar este apartado sin mencionar otra componente importante de la faceta puramente mediacional que involucra el uso de juegos en la iniciación al álgebra.

> Juego y matemática son similares en diseño y práctica. En ambos hay investigación (estrategias), resolución de problemas. En ambos hay exitosos modelos de realidad. Construir juegos involucra creatividad, como es el hacer

> matemáticas. El juego puede ser un detonante de la curiosidad hacia procedimientos y métodos matemáticos (Olfos y Villagrán, 2001, p. 40)

Las posibilidades de uso de juegos como recurso didáctico son muy amplias y abarca todas las áreas de la matemática. En el caso concreto del álgebra hay una variedad de juegos que Olfos y Villagrán (2001) proponen expresamente para la iniciación al álgebra. En concreto mencionan cinco.

El primero lo denominan "bordes" y consiste en encontrar una fórmula general para calcular el número de cuadrados en que se pueden dividir los bordes de otro cuadrado mayor (Olfos y Villagrán, 2001).

El segundo lo denominan "pirámides de números" y consisten en bloques rectangulares que contienen números y huecos donde hay que calcular su valor en función de la regla que obliga a que la suma de los números de los dos rectángulos inferiores sea igual al número que debe figurar en el rectángulo que está sobre ellos (Olfos y Villagrán, 2001).

El tercero lo denominan "subir al cero" a través de un itinerario en el que hay que valorar una serie de expresiones algebraicas en función del valor de un dado y conseguir más puntos que el adversario (Olfos y Villagrán, 2001).

El cuarto lo llaman "la gimkana de matemáticas" y parte de una tabla con frases que hay que traducir al lenguaje algebraico para resolver problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita mediante la combinación de una serie de tarjetas con enunciados verbales (Olfos y Villagrán, 2001).

El último juego que proponen es el "rompecabezas blanco" en el que se disponen expresiones algebraicas en los lados de varios rectángulos y hay que ordenarlos haciéndolas coincidir con otras equivalentes (Olfos y Villagrán, 2001).

En definitiva, se puede observar que existe un gran número de recursos y enfoques para abordar la enseñanza y aprendizaje del tema de simbolismo algebraico y el de ecuaciones de primer grado. Por eso es necesario recurrir a una visión integrada de todas las facetas del conocimiento, así como a la determinación de la idoneidad didáctica de cada uno de los posibles diseños que pudieran resultar de la combinación de los factores considerados.

CAPÍTULO 3

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA EN 1º DE E.S.O.

En este apartado se exponen diversos aspectos que influyen en la experiencia que se pretende llevar a cabo.

Por un lado, es importante describir las características básicas del centro y del grupo de alumnos. Por otro lado, también hay que determinar el diseño instruccional realizado, así como su implementación y la recogida de información y su ulterior análisis.

3.1. El centro y el grupo clase

El centro elegido para desarrollar el estudio es un instituto de enseñanza secundaria (IES) del área metropolitana de la provincia de Granada. Es un centro que posee 3 líneas completas de enseñanza secundaria obligatoria (ESO) de las cuales una es bilingüe. Además imparte también bachillerato y ciclos formativos relacionados con la informática.

Atiende a un perfil socioeconómico bastante amplio que va desde la clase media a la baja, que genera una amplia diversidad de alumnado que es atendido a través de diversas iniciativas que responden a cada situación concreta. Dispone de aulas de transición a la integración para alumnos especialmente problemáticos con los que hay que trabajar especialmente la conducta, también tiene grupos de compensatoria donde se atienden alumnos con necesidades educativas especiales (NEE), programas de diversificación curricular (en 3º y 4º de ESO) y agrupamientos flexibles en materias instrumentales (en 1º y 2º de ESO) para atender al alumnado que presenta dificultades de aprendizaje motivadas por una amplia casuística que afecta a su rendimiento académico en los grupos ordinarios de referencia.

El departamento de matemáticas está formado por 5 profesores (uno de ellos con reducción de horario) y su jefe ostenta también la coordinación del área científico-tecnológica del centro.

El grupo de clase de 9 alumnos que se ha escogido de manera intencional de entre los dos asignados al investigador-docente para llevar a cabo la experiencia de estudio, corresponde con el denominado “grupo flexible de 1º de ESO”, adscrito al grupo ordinario “C” definido por el centro.

Es importante hacer una pequeña descripción de cuáles son las características del agrupamiento flexible planteado en el centro. En primer lugar, se trata de grupos de reducidas dimensiones que se segregan de un grupo de referencia donde se cursan el resto de asignaturas que no sean instrumentales (es decir, todas salvo matemáticas, lengua e inglés). En teoría está pensado para recuperar los retrasos curriculares en que hubiera incurrido el alumno para su paso al grupo ordinario (de ahí su carácter flexible), por lo que se ha dispuesto una coincidencia en el horario para esas materias. En la práctica, tal como se verá más adelante al analizar la programación didáctica del departamento, es muy complicado que se dé esa recuperación y traslado de grupo, ya que, entre otras razones, los contenidos a impartir no son los adecuados para favorecerlo.

El tiempo semanal disponible para el desarrollo de la materia con el grupo es de cinco periodos lectivos de una hora de duración, ya que a los cuatro legales se le incluye una hora adicional de “refuerzo de matemáticas”. Estos periodos se distribuyen en forma de una hora diaria tanto en el primer tramo de la mañana (antes del recreo, de martes a viernes) como en el segundo tramo (después del recreo, el lunes).

El grupo estudiado cuenta con un total de 9 alumnos cuyo denominador común es la dificultad para abordar la asignatura al tener problemas de aprendizaje de dicha materia ocasionados por problemas, no diagnosticados por especialistas, pero que han afectado a su rendimiento en la materia a lo largo de su etapa de primaria. De ellos tan solo hay un repetidor y casi todos presentan problemas de índole personal que, sin duda, han contribuido a su situación y que incide tanto en su interés por la materia como en el seguimiento de la misma.

Dentro del bajo rendimiento que caracteriza a los alumnos del grupo se pueden distinguir varios subniveles que van desde aquellos que no dominan los contenidos más básicos, hasta aquellos que solo precisan de un refuerzo en la materia, pasando por toda la variedad que hay entre ambos extremos. Su capacidad de atención es baja, su nivel de abstracción reducido, tienen baja autoestima y pequeña capacidad de trabajo y esfuerzo. Su desinterés por los contenidos es evidente y suelen tender a comportamientos disruptivos que les llevan a evadirse de las prácticas diarias en el aula, lo que motiva que la labor docente necesite de una importante dosis de disciplina que refuerza el papel del profesor como autoridad, distanciando en cierta manera al docente de los discentes.

El aula donde se imparten las clases es de reducidas dimensiones (acordes a las del grupo) y está en proceso de ser dotada de ordenador para el profesor y cañón de proyección, aunque no se encuentra operativo a la fecha de realización de la experiencia. Por tanto, solo se cuenta con una pizarra tradicional de escritura mediante rotuladores y un espacio que permite pocas alteraciones en la distribución, si bien el sitio que ocupa cada alumno no está asignado previamente por el docente y permite la agrupación en parejas o tríos.

El centro dispone de aulas de informática y otros espacios donde es posible la proyección e interacción con contenidos digitales, pero su asignación no es inmediata y se hallan en régimen de competencia con otros grupos de dicho centro, lo que no favorece la improvisación de su uso.

En lo que respecta a los recursos con los que se cuenta para desarrollar los contenidos de la materia, aparte de la dotación de medios del aula y del propio centro, se dispone de un libro de texto del nivel de 1º de ESO, Vizmanos et al. (2010).

3.2. Diseño de la unidad didáctica

La unidad didáctica planteada para su diseño, implementación y análisis corresponde con la introducción al álgebra y las ecuaciones de primer grado de 1º de ESO, correspondiendo al tema 7 del libro de texto seleccionado para este nivel (Vizmanos et al., 2010).

El diseño de dicha unidad se plantea en formato de programación de aula y se basa en la programación didáctica del departamento de matemáticas del centro, recogiendo sus directrices y fundamentándose en la legislación vigente que ambas deben cumplir. El documento que recoge el diseño de la instrucción se puede consultar en el anexo II del presente estudio.

Tal como es característica de la matemática escolar, los conocimientos tratados siguen una progresión en la que cada tema da paso a otros relacionados que aumentan la visión del campo tratado. En el caso particular del tema diseñado, es necesario apoyarse en los contenidos abordados en los temas vistos con anterioridad. En este caso, las unidades didácticas abordadas previamente corresponden, en su mayor parte, a la teoría de números y por tanto se trata con bastante profusión la aritmética.

En concreto, los seis temas abordados previamente, según el índice del libro de texto utilizado como base (Vizmanos et al., 2010), son los siguientes:

1. Números naturales. Divisibilidad.
2. Números enteros
3. Potencias y raíz cuadrada
4. Fracciones
5. Números decimales
6. Magnitudes proporcionales. Porcentajes.

El dominio de estos temas por parte del alumnado debe constituir una sólida base para la progresión en la materia, sin embargo, el resultado de la evaluación de los mismos no denota que se haya adquirido el dominio precisado, por lo que se comenzará con el álgebra en unas condiciones poco óptimas desde el punto de vista cognitivo. No obstante habrá que esperar a ver el resultado de la implementación de la unidad didáctica para confirmar cuál es la importancia de dichos conocimientos previos y su influencia en el tratamiento del álgebra.

Por lo que se refiere a la estructura del diseño de la instrucción, se han seguido las directrices especificadas en la programación del departamento de matemáticas, que coinciden con los elementos del currículum oficial.

En materia de objetivos, la programación del departamento de matemáticas plantea dos muy generales. Estos, básicamente, hacen referencia a la utilidad del álgebra para expresar con lenguaje matemático situaciones de la vida real y dar respuesta a los problemas que plantean utilizando recursos algebraicos. A nivel de instrucción en el aula, estos objetivos se desglosan en otros más operativos que den cabida a los contenidos específicos y permitan a la vez valorar qué grado de aprendizaje alcanza el alumnado.

Las competencias básicas a las que se contribuye con el desarrollo de esta unidad didáctica se desglosan en términos que permitan su relación con los objetivos que se pretende alcanzar dentro de lo definido por el marco institucional de referencia (ver anexo II).

En cuanto a los contenidos, la programación del departamento no hace la distinción entre el campo conceptual y el procedimental, por lo que el diseño para el aula se ocupa de tomar dichos contenidos y hacer una separación entre estos dos campos de cara a organizar el conocimiento base que debe ser aplicado en cada procedimiento, para así poder incidir reiterativamente en los conceptos que subyacen a los procedimientos utilizados y viceversa. Se aprovecha para dar cabida a contenidos de carácter actitudinal que son parte importante de varias facetas del conocimiento matemático y por tanto deben estar contemplados en los objetivos perseguidos.

Una vez establecido el marco del objeto de aprendizaje, se desglosa la propuesta de intervención en el aula. Esta propuesta se planifica en 10 sesiones lectivas cuyo tiempo útil se estima en 50 minutos (tal como se justifica en el anexo II en el que se desarrolla la programación de aula). Con esta duración se consigue cumplir con las directrices de temporalización de la programación del departamento que marca las unidades didácticas que hay que impartir en el segundo trimestre (donde queda encajado este tema).

La metodología seguida en el diseño planteado, básicamente, consiste en una alternancia de breves explicaciones de los nuevos contenidos por parte del profesor, seguidas de ejemplos y ejercicios de aplicación que son realizados por los alumnos de manera autónoma, individualmente o en pequeños grupos. Finalmente son corregidos en clase de manera cooperativa. De esta forma se consigue realizar un seguimiento individualizado que posibilita la resolución de las dudas que se planteen y la evaluación del proceso seguido y el rendimiento obtenido.

Los ejercicios y problemas que se proponen a lo largo del proceso de instrucción son los que aparecen en el libro de texto (ver anexo II), que según la programación del departamento constituye el principal recurso a utilizar. Según esto, las actividades propuestas por el libro se han secuenciado y relacionado con los contenidos programados, de manera que se vayan trabajando conforme se avanza en el desarrollo de la unidad didáctica.

Debido a que el número de actividades que aparecen en el libro es muy grande y que se presentan varios ejercicios similares, se ha decidido eliminar la mayoría de las catalogadas por los autores como más difíciles (señaladas con un punto de color rojo) y de entre las restantes, se han constituido dos grupos de similar tamaño. Uno es el que se trabajará en la clase durante las sesiones lectivas y el otro se deja como trabajo para casa, de manera que se refuercen los contenidos tratados en cada jornada. Este trabajo adicional será valorado de dos maneras, una la propia realización de los ejercicios de manera paralela al avance de la unidad didáctica y otra el grado de acierto con que se hayan realizado. En cuanto a las actividades trabajadas en cada sesión, se plantea utilizar gran parte del tiempo lectivo, estimado como suficiente para completar y corregir dichas actividades. Si por cualquier razón a la mayoría de alumnos no les hubiera dado tiempo a completarlas, se dejaría lo pendiente como deberes (que inicialmente no están previstos). De esta forma, se realiza un seguimiento del trabajo y esfuerzo de cada alumno. Si fuera este el caso, se plantea la corrección en la siguiente sesión con las tareas ya meditadas y trabajadas con la intensidad que cada uno necesite.

Ahondando en la propuesta de instrucción de cada sesión diseñada, hay que destacar que en el marco del proceso de enseñanza y aprendizaje se pueden distinguir varios hitos reseñables por su importancia:

- La primera sesión está dedicada a realizar una prueba inicial de conocimientos que pretende medir los conocimientos previos de cada estudiante, proponiendo una serie de actividades (que figuran como adenda 1 de la programación de aula que puede ser consultada en el anexo II del presente estudio). El alumnado ha tenido que repasar fuera del horario lectivo el tema que figura en el libro de texto, previamente a su tratamiento en clase, de manera que se puede valorar el grado de autonomía a la hora de enfrentarse a las tareas propuestas a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica. Esta prueba constituye la evaluación inicial y permite conocer que contenidos presentan mayor complejidad y cuáles son las dificultades sobre las que habrá que incidir más.

- Las siguientes sesiones 2, 3 y 4 inciden sobre los contenidos relativos a la iniciación al álgebra, siguiendo una estructura como la anteriormente comentada.
- Las sesiones 5, 6 y 7 tratan las ecuaciones de primer grado con la misma estructura descrita.
- La sesión 8 aborda la resolución de problemas algebraicos y la sesión 9 refuerza este aspecto y repasa brevemente los contenidos tratados a lo largo de toda la unidad didáctica.
- Finalmente la sesión 10 se aprovecha para realizar una prueba escrita que trate todos los contenidos impartidos de cara a verificar el rendimiento en la resolución de ejercicios y problemas parecidos a los propuestos a lo largo de todas las sesiones anteriores. Dicha prueba se puede consultar en la adenda 3 de la programación de aula que se aporta como anexo II de este estudio. Esta sesión ha de llevarse a cabo al menos una semana después de haber finalizado la implementación del resto de sesiones, de cara a dejar tiempo suficiente para el asentamiento y refuerzo de los nuevos contenidos supuestamente adquiridos. También en esta sesión se hará entrega por parte del alumnado de los ejercicios planteados para el trabajo de actividades de refuerzo previsto.

El proceso de evaluación de los aprendizajes es continuo a lo largo de la implementación de la unidad didáctica. Se basa en la aplicación de una serie de criterios que pretende centrar la atención sobre el grado de consecución de los objetivos previstos. Esta valoración se realiza utilizando múltiples instrumentos que aportan datos que permiten centrarse en cuatro elementos cuyos porcentajes de contribución al total de la calificación son variables en función de lo dispuesto por la programación del departamento de matemáticas (integración de aprendizajes formales, 50%, e informales, 15%, progreso del alumno, 15% y otros aspectos, 20%). Los detalles de lo anterior se pueden ver en la programación de aula que figura en el anexo II del presente estudio.

3.3. Implementación del estudio

Teniendo un diseño de la instrucción definido, lo interesante para este estudio es su implementación en el aula. Para ello, inicialmente, se habían definido 10 sesiones de clase que a la postre, se convirtieron en 13 para cumplir con lo inicialmente previsto, yendo al ritmo que demandaron los alumnos.

Es pertinente y a la vez conveniente realizar una descripción de las características generales del proceso de implementación del estudio para lo que en los siguientes párrafos se va a hablar sobre este tema.

Cada sesión de clase comienza con una serie de tareas rutinarias de introducción. Normalmente se necesita un tiempo para acomodarse en el aula tras el cambio de hora, en la mayoría de los casos tanto profesor como alumnos vienen de otra aula y se necesita un tiempo para el desplazamiento, la ocupación del sitio y disposición de los materiales a utilizar. Seguidamente se pasa lista y se aprovecha, cuando sea el caso, para verificar que se ha completado la tarea mandada para casa en una sesión anterior. Su registro da idea del trabajo en las horas no lectivas.

Una vez completados los prolegómenos se comienza con la clase propiamente dicha. La secuencia siempre comienza con la interpelación a los alumnos para que planteen sus dudas acerca tanto de lo trabajado como de cualquier contenido anterior. Si existen dudas sobre lo trabajado o algo relacionado con ello, se espera a la posterior corrección para solventarlas, por el contrario, si son acerca de algo anterior o con poca relación con lo tratado, se explica de forma inmediata.

Tras esa primera fase, se procede a la corrección de los deberes, aprovechando para reforzar las explicaciones de los contenidos asociados y haciendo hincapié en los procesos seguidos y las argumentaciones que fueran de utilidad de cara a justificar cada paso dado o la propia lógica de la solución obtenida. Se trata de hacer partícipes a los alumnos animándoles a que sean ellos los que dirijan los pasos conforme a lo que han preparado en casa. Se les pide siempre que justifiquen cada aseveración y cálculo puesto en común. Cuando se dan posiciones encontradas, se trata de que se establezca un debate ordenado en el que nunca se excluye a nadie, aunque no hubiera hecho la tarea. A estos en particular, se les solicita que hagan el esfuerzo de pensar sobre la marcha lo que harían y que no se queden al margen. También hay que destacar que las afirmaciones más relevantes, independientemente de que se hallan hecho bien o mal, se someten a juicio de varios alumnos (de manera voluntaria u obligatoria), con la doble finalidad de detectar las posibles dudas que no se atreven a plantear, o las lagunas de conocimiento que presentan. También favorece la puesta en común de las ideas o posturas e incluso el mero debate. Se incide especialmente en la expresión justificada utilizando términos matemáticos y formas variadas de representación, si fuera apropiado.

Tras la corrección de los deberes, comienza la nueva sesión propiamente dicha. Si esta sesión tiene previsto introducir nuevos contenidos, toma la palabra el profesor y los explica. Tras esta explicación se da traslado escrito de las conclusiones a la pizarra para que sean copiadas por los alumnos (para lo que se da un tiempo tras haber terminado de escribir). Seguidamente, cada explicación se acompaña de al menos un ejemplo del que también queda registro escrito en la pizarra. En cualquier momento los alumnos pueden intervenir y si no lo hacen, es el profesor el que periódicamente va lanzando preguntas relacionadas con lo visto que permitan mantener la atención y corroborar el grado de comprensión de lo expresado. Se trata de ser breve con objeto de no cansar y pasar inmediatamente a la práctica.

A continuación de la parte expuesta por el profesor, toca realizar ejercicios que permitan poner en práctica los contenidos y afianzarlos. Para ello, se plantea la realización de las actividades seleccionadas en el diseño realizado (con grado de dificultad creciente) y se da un tiempo para completarlas. Durante ese tiempo, se plantean las dudas que vayan surgiendo, se dan las explicaciones pertinentes y se facilita el intercambio de ideas y planteamientos entre los alumnos aprovechando que son pocos y que están cerca a consecuencia de las reducidas dimensiones del aula y la disposición de sus sitios.

Si la sesión plantea una continuación del trabajo con los contenidos expuestos anteriormente, se pone en marcha directamente la fase de planteamiento de actividades.

Seguidamente, se pasa a realizar la corrección de las actividades de manera colaborativa. En esta fase el profesor se convierte en el agente que plasma en la pizarra de las indicaciones dadas por los alumnos y promueve la participación de todos en un proceso de negociación de las aseveraciones planteadas y los resultados propuestos. Aprovecha cualquier ocasión para refrescar los contenidos tratados y aquellos que estén relacionados, aunque correspondan a otras unidades didácticas, ya que normalmente constituyen una base de construcción del nuevo conocimiento que nunca hay que perder de vista. Esta etapa es fundamental porque pone de manifiesto, al menos en parte, la concepción personal de cada alumno, lo que permite que transmita las dificultades y errores que asume y que no plantea por diversas causas (desinterés, indiferencia, vergüenza, desconocimiento, convencimiento…). Por tanto esta fase muchas veces se convierte en una nueva exposición participativa de contenidos utilizando explicaciones diferentes a las dadas anteriormente y nuevos ejemplos para su transmisión, o simplemente en un repaso de contenidos de otras unidades didácticas que, por su influencia y relación con el tema tratado, merece la pena recordar en profundidad. De esta forma se consigue a la vez hacer una relación con otros conocimientos favoreciendo la visión de las matemáticas como una ciencia estructurada y unitaria que no está separada en temas independientes.

Otro aspecto importante de la implementación del proceso es la ejercitación y refuerzo de los conocimientos recién adquiridos. Para ello se ha dispuesto no solo la realización de los ejercicios de clase, sino también una serie de actividades que deben figurar en un trabajo independiente que ha de ser entregado en la última sesión. Este trabajo está compuesto por los ejercicios del libro que siendo similares a los realizados a lo largo de la instrucción, no hay tiempo para que sean abordados durante la misma, por lo que se propone su realización a los alumnos para que en el horario no lectivo afiancen el conocimiento y sean generadores de las posibles dudas que pudieran surgir en el proceso. Con un trabajo diario regular, podrían preguntar en las sesiones de clase aquello que no quedara claro y se familiarizarían con los contenidos impartidos.

No se ha planteado en el diseño la realización de deberes diarios como tales, ya que la carga de ejercicios prevista se estima considerable y el trabajo adicional planteado es suficiente. Sin embargo, suele ser habitual que haya ejercicios previstos para el horario lectivo que no dé tiempo a completar, por lo que se convertirían en deberes. A causa del hecho de no tener una tarea fija prevista de antemano, se puede aprovechar para flexibilizar el tiempo dedicado a las actividades en horario lectivo, de manera que si no da tiempo a realizarlas en clase se pueda mandar el resto para casa y posponer su corrección al día siguiente, de esta forma, los alumnos disponen de un tiempo variable al que fácilmente se pueden acomodar independientemente de la velocidad a la que vayan (la cual será variable en función de sus capacidades o sus ganas).

Por lo que respecta a las pruebas escritas evaluables, en el diseño se proponen dos, una inicial en la primera sesión (previa al comienzo) y otra al final en la última sesión.

La prueba de la primera sesión consiste en hacer cinco ejercicios similares a los se trabajarán en la unidad didáctica (Figura 1).

1.- El padre de Claudia tiene 37 años. Esta edad es 4 años más que el triple de la edad de Claudia. Calcula la edad de Claudia.

2.- Trata de escribir una expresión matemática con las siguientes instrucciones. A un número cualquiera se le multiplica por 4, se le resta 6, después se divide por 2 y finalmente se le suma el triple de ese mismo número cualquiera.

3.- Completa el número que falta en el hueco describiendo qué operaciones o razonamientos has hecho para calcularlo.

$7 \bullet 4 - \square = 12$; $\frac{7}{12} = \frac{\square}{15}$; $9(2 + \square) = 27$; $12 + 3(7 - \square) = 7 - 2 + \square$

4.- Si K tomara el valor de 5 y $P = 7\left(\frac{K}{4} - 8\right) + 3K - 1$ ¿cuánto valdría P? y si $T = 4K - 2$ ¿Cuánto tiene que valer K para que T sea 38’4?

5.- Expresa dos ecuaciones equivalentes a $x + 6 = 2x - 3$.

Figura 1. Prueba inicial

Previamente se les ha pedido a los alumnos que se miren el tema y los ejercicios resueltos. Con esta labor se pretende observar por un lado, qué son capaces de entender por ellos mismos, sin explicaciones adicionales y por otro, si tienen algún conocimiento anterior, posiblemente olvidado, que puede ser refrescado con un poco de esfuerzo. A la luz de los resultados obtenidos se consigue una visión global de cuál es el nivel de partida a la hora de abordar el tema.

La prueba final (Figura 2), por su parte, se ha previsto para comprobar si los alumnos han adquirido el conocimiento suficiente para enfrentarse de manera autónoma e independiente a actividades similares a las trabajadas a lo largo del periodo de instrucción. Por tanto, la sesión final no es correlativa a las anteriores, sino que se deja una semana de plazo para facilitar que los alumnos ordenen sus ideas y afiancen sus conocimientos, brindándoles la oportunidad de que trabajen ellos solos y planteen sus dificultades en clase, si fuera necesario. De los resultados obtenidos en esta prueba, se podrá inferir buena parte de los logros obtenidos, si bien hay que contar con lo evaluado a lo largo del proceso de instrucción para complementar la calificación y no basarse en una única valoración que puede estar afectada por la influencia de factores externos que velen el verdadero rendimiento en el aprendizaje del tema.

1.- Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

a) El triple de un número más la mitad del mismo.

b) Un número menos diez es igual al triple de dicho número.

2.- Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios y señala en ellos su grado, su coeficiente y su parte literal.

a) $4xy^3$ b) $3z-4x^2$ c) $x(a+b)^3$ d) $\frac{x}{4}ab$

3.- Calcula el valor numérico de la siguiente expresión para x = 3.

$$1-x-\frac{6-2x}{4}+5$$

4.- Escribe dos monomios semejantes a $4x^2z$.

5.- Razona si las siguientes igualdades son identidades o no.

a) $x-1+4x+3=2+5x$ b) $x+2-4x=5x-2$

6.- Justifica cuál de los siguientes valores es solución de la ecuación $4x-8=6(x-2)$

a) $x=5$ b) $x=2'4$ c) $x=2$ d) $x=-1$

7.- Expresa dos ecuaciones equivalentes a la del ejercicio anterior.

8.- Completa la siguiente tabla:

Ecuación	Incógnita	Coeficiente del término de primer grado	Primer miembro	Segundo miembro
$3-7y=12$				
$18=6t$				
$\frac{d}{7}-14=0$				

9.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x-1=x+3$ b) $9(2x-1)-3(5x-3)=18$

c) $5(2x+3)=3(3x+6)$ d) $12=\frac{3x}{10}+2$

10.- En un instituto se han colocado varios bancos dispuestos uno detrás de otro. Si se colocan 10 alumnos en cada banco, quedan sin sitio 11 alumnos y si se colocan 11 alumnos en cada banco, quedan 7 plazas disponibles. ¿Cuántos alumnos hay?

Figura 2. Prueba final

Las sesiones previstas para el desarrollo de contenidos y su correspondiente trabajo a través de actividades siguen una secuencia ordenada según lo dispuesto en la programación de aula (ver anexo II de este trabajo) que está basado en la propuesta realizada por el libro de texto utilizado como recurso complementario (Vizmanos et al., 2010). El uso de este recurso permite que los alumnos tengan a mano una guía organizada de contenidos y la mayoría de los enunciados de las actividades previstas. También disponen de ejemplos alternativos a los planteados y otra redacción de los contenidos tratados que es alternativa a la que copian de la pizarra durante el transcurso de las clases. En caso de ausencia (motivada o no) pueden recuperar las horas perdidas acudiendo a este recurso.

Por último es conveniente destacar en este apartado que los contenidos implementados propiamente dichos son muy extensos para tratar la primera aproximación a los mismos, ya que se aborda el lenguaje algebraico como tal (que ya es suficientemente dificultoso) y lo complementa con cuestiones relativas a expresiones algebraicas, su valoración numérica y sus operaciones básicas (particularizando para los monomios y polinomios sencillos). Inconscientemente se tratan distintas interpretaciones que se pueden dar a las letras que son excesivas para una mera introducción y suponen un elemento de confusión para el alumnado inexperto. No se dejan de lado la equivalencia, igualdad e identidad de expresiones y se remata con el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado (que debería constituir un tema en sí mismo una vez dominados plenamente los contenidos iniciales).

3.4. Recogida de información y análisis de resultados

A lo largo del desarrollo de la instrucción se han obtenido numerosos datos procedentes tanto de las pruebas realizadas como de la propia observación de la dinámica del proceso de enseñanza y aprendizaje. En este apartado se describe la información recogida y el análisis de los resultados.

Hay que destacar de manera previa, que dado que no ha sido posible obtener una grabación de las sesiones, no se podrá realizar un análisis en profundidad de la transcripción de cada unidad literal, sin embargo, los datos conseguidos permiten acometer con suficiencia los objetivos planteados al inicio de este estudio.

En definitiva, se dispone de un cronograma de hechos didácticos que permite hacer una referencia a lo acontecido en el aula por cada hito de la línea temporal definida.

El conjunto de todas las referencias aporta una descripción general del proceso seguido en cada sesión de clase durante la implementación del diseño instruccional. La transcripción de dicho cronograma a partir de los datos registrados durante el periodo de observación (disponible en el anexo III), va a permitir, por un lado, diferenciar de manera elemental las trayectorias muestrales y esbozar qué estados y funciones de las mismas se verifican, y por otro lado, destacar los comentarios principales acerca de los hechos observados durante la implementación del diseño previsto.

Para llevar a cabo el trabajo de análisis de las trayectorias muestrales, se ha recurrido a tomar como base el ejemplo planteado en Godino, Contreras et al. (2006), el cual será utilizado como modelo de análisis y fuente de los valores que categorizan los estados y las funciones de las mencionadas trayectorias, con la aportación de algunas propuestas para encajar ciertos episodios acontecidos que se considera que no quedan reflejados en las categorías inicialmente previstas.

Además de las consideraciones alrededor del trabajo antes aludido, el análisis global de los datos recogidos, realizado sobre la base de distintos aspectos complementarios, permitirá tener diversos elementos de interés para argumentar y fundamentar la posterior valoración de la idoneidad didáctica del proceso.

Para exponer de manera ordenada los resultados del análisis de la información, se va a partir de lo acontecido en las sesiones implementadas, basándose en la interpretación de los datos extraídos del diario de observación de las sesiones de clase cumplimentado a lo largo del desarrollo del proceso de instrucción (ver anexo III).

A continuación, se procede a identificar por cada una de las trayectorias muestrales propuestas por Godino, Contreras et al. (2006) los estados y funciones relevantes durante el desarrollo del proceso instructivo. Por cada trayectoria se hacen en paralelo comentarios acerca de las distintas componentes de las facetas del conocimiento matemático relacionadas. A partir de estos resultados, se puede obtener una visión de la implementación del diseño planificado que va a permitir la posterior valoración de su idoneidad didáctica.

3.4.1. Trayectoria epistémica

Por lo que se refiere a la trayectoria epistémica, hay que destacar, en primer lugar, que en cada sesión se abordan contenidos relativos tanto a la unidad didáctica propiamente dicha, como referidos a otras anteriores que aportan conocimientos previos necesarios para el correcto desarrollo de los nuevos. Todos ellos, así como el resto de componentes curriculares, están marcados por la programación del departamento de matemáticas del centro educativo, que a su vez recoge literalmente lo dispuesto por la legislación vigente. Por tanto, se puede decir que la trayectoria epistémica está enmarcada por las directrices curriculares.

Por otro lado, también hay que reseñar la reiteración en el tratamiento de los contenidos tanto dentro de una misma sesión (en distintos momentos) como a lo largo de las distintas sesiones, de forma que se refuerzan las ideas que se pretenden transmitir.

Los contenidos correspondientes en exclusiva a la iniciación al álgebra y a las ecuaciones se reflejan en la tabla 1 que se muestra a continuación.

Tabla 1. Contenidos propios de la unidad didáctica abordados en cada sesión de clase implementada

Sesión	Contenidos
2	Utilidades del álgebra Lenguaje algebraico Traducción del lenguaje natural y la expresión algebraica
3	Lenguaje algebraico y su notación Proceso de generalización Monomios y polinomios
4	Monomios, coeficiente, parte literal y grado Notación del producto de un coeficiente y su parte literal Semejanza e igualdad, suma y resta de monomios Polinomio y expresión algebraica
5	Monomio, partes de un monomio, suma y resta de monomios Lenguaje algebraico, expresiones algebraicas y su valor numérico Variable, fórmula y notación del producto de coeficiente y variable
6	Expresión algebraica y su valor numérico Coeficiente, parte literal y grado Variable y notación del producto de un coeficiente por una variable Notación del coeficiente unidad Semejanza, identidad e igualdad de expresiones algebraicas Suma y resta de monomios Ecuación y solución de una ecuación

Sesión	Contenidos
7	Identidad e igualdad algebraicas Monomios y su suma, semejanza, parte literal y coeficientes Valor numérico de una expresión algebraica Variable, solución de una ecuación, incógnita, ecuación y grado Ecuación de primer grado, miembros 1º y 2º, términos de grado 0 y 1 Resolución de una ecuación Equivalencia de ecuaciones y su utilidad para solucionar problemas
8	Equivalencia de ecuaciones Miembros, término, coeficiente, solución de una ecuación Valor numérico de una expresión algebraica Incógnita, igualdad e identidad algebraicas Notación del producto del coeficiente por la incógnita Regla de la suma y el producto para obtener ecuaciones equivalentes Expresión algebraica, grado de expresión algebraica y ecuación
9	Regla de la suma y el producto para obtener ecuaciones equivalentes Equivalencia de ecuaciones Solución de una ecuación Igualdad e identidad algebraicas Símil de la balanza virtual Transposición de términos entre los miembros de una ecuación
10	Suma de monomios Regla de la suma para obtención de ecuaciones equivalentes Equivalencia, solución de una ecuación, coeficiente Regla del producto para obtención de ecuaciones equivalentes Cambio del signo negativo de una incógnita aislada en un miembro Proceso general de resolución de ecuaciones de primer grado Notación del producto del coeficiente por la incógnita
11	Regla de la suma y el producto para obtener ecuaciones equivalentes Símil de la balanza virtual Trasposición de términos para solucionar ecuaciones de primer grado Proceso de simplificación de expresiones algebraicas Proceso de resolución de ecuaciones
12	Reglas de resolución de problemas empleando álgebra Traducción del lenguaje natural a algebraico Expresión algebraica Operaciones con monomios Ecuaciones y sus soluciones y semejanza Proceso de resolución de ecuaciones

Por lo que se refiere al segundo grupo de contenidos (los tratados en unidades didácticas anteriores a la implementada), en la tabla 2 que se muestra a continuación, se especifica cuáles de ellos han sido repasados a lo largo del proceso instruccional.

Tabla 2. Contenidos complementarios a la unidad didáctica abordados en cada sesión de clase implementada

Sesión	Contenidos
2	Regla de tres simple directa
3	Fracciones y obtención de decimales a partir de las mismas División con decimales Unidades de medida monetarias Exponentes y propiedades de las potencias
4	Número natural Valor de las potencias con exponente 0 y 1 Factor común y extracción de factor común Operaciones con números enteros Signo menos delante de un paréntesis
5	Suma y resta de números enteros Propiedades asociativa y conmutativa Elemento neutro de la multiplicación Porcentaje y expresión decimal de un porcentaje Multiplicación de números decimales Aproximación por redondeo y potencias
6	Jerarquía de operaciones aritméticas Números naturales, enteros, fraccionarios y decimales Criterio de signos en la multiplicación de números enteros Expresión aritmética
7	Suma y resta de números enteros
8	Multiplicación por cero y por uno Suma de números enteros Propiedad distributiva del producto respecto la suma y la resta
9	Opuesto de un número Operaciones con números enteros
10	Operaciones con números enteros Propiedad conmutativa Inverso de una fracción Operaciones con paréntesis
11	Proceso de la multiplicación por números negativos de un paréntesis Operaciones básicas con números enteros Multiplicación de fracciones
12	Esquema de resolución general de un problema matemático

A la luz de estas secuencias de contenidos implementadas, es importante mencionar el hecho manifiesto de que a lo largo de toda la instrucción se ha mantenido una secuencia de desarrollo de los contenidos perfectamente articulada que ha relacionado y conectado entre sí todos los objetos matemáticos tratados, tanto a nivel de la unidad didáctica de iniciación al álgebra, como de las otras anteriores relacionadas con la misma, a través de la aportación de conocimientos de base, en lo que se podría denominar una relación intradisciplinar.

Tal como se comprueba en las notas del registro de observación (ver anexo III), tanto las definiciones y los procedimientos explicados, como los ejemplos y actividades de ejercitación han seguido una senda organizada por una línea conceptual común y graduada tanto en su complejidad como en su nivel de conexión con el resto de objetos matemáticos. Además, se ha tratado de que los distintos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas definidas estuvieran en todo momento articulados y claramente identificados. Así por ejemplo, desde la primera sesión de clase, la número 2, se destaca el análisis de una gran cantidad de perspectivas posibles, correspondientes al conocimiento previo del alumnado, que se relacionan con el álgebra y que permiten un acercamiento a esta disciplina de la forma más significativa y articulada posible.

Por otro lado, la mencionada secuencia de contenidos da cabida a la posibilidad de que sean relacionados con los conocimientos de otras disciplinas del saber humano que los necesitan como base en la que apoyarse, por ejemplo, la obtención y cálculo del valor de determinadas magnitudes o resultados o incluso el propio desarrollo teórico de algunos de sus conceptos y procedimientos.

Las relaciones aludidas podrían ser consideradas como interdisciplinares. A lo largo de la implementación estudiada se encuentran algunos ejemplos al respecto dignos de ser destacados, como en la sesión 2, cuando se habla de la utilidad del álgebra y se hace mención a disciplinas como la física del movimiento rectilíneo uniforme o la disposición de las barras metálicas de la estructura de una cubierta de un pabellón deportivo. También en la sesión 5 se puede observar este tipo de relaciones interdisciplinares cuando se habla de economía, planteando el caso de la expresión para el cálculo del interés simple del dinero. No obstante lo anterior, teniendo en cuenta la amplitud de la instrucción y la importancia del tema, se puede considerar que las relaciones interdisciplinares observables son relativamente reducidas.

La suma de los contenidos tratados y la forma de relacionarlos, en el marco institucional definido por el currículum oficial, arroja como resultado una formación matemática acorde a las exigencias de la sociedad en la que se integra, por lo que se puede pensar que contribuye de manera decisiva a la formación en el ámbito cultural y socio-profesional que va a ser exigido tras la instrucción básica del periodo obligatorio. En el seno de esta propuesta educativa se contempla también un apartado para los valores democráticos y el pensamiento crítico, introducidos de manera transversal a través de la argumentación de las soluciones propuestas, mediante la capacidad de preguntar acerca de las dudas generadas o simplemente respetando a los miembros de la clase (sus opiniones y aportaciones) durante la interacción a lo largo del proceso de instrucción implementado.

El tratamiento, en orden cronológico, de los contenidos antes mencionados se verifica en distintos momentos del proceso mediante la presencia de casi todos los estados que se pueden plantear en las múltiples configuraciones surgidas a lo largo de la trayectoria epistémica y que se observan durante toda la implementación en el aula.

Siguiendo la evolución de las distintas configuraciones, se verifica la existencia de una alternancia de estados epistémicos. En general, los contenidos son tratados en el inicio adoptando un estado proposicional y argumentativo, para la parte teórica del discurso, un estado situacional cuando se enuncian los ejemplos y otro actuativo cuando se resuelven aquellos, aunque también se puede observar un estado conceptual, cuando se tratan nociones teóricas básicas para el establecimiento de proposiciones y otro lingüístico, cuando se hace uso de la expresión en términos del lenguaje algebraico o se tratan sus notaciones.

Sirvan como ejemplo de lo anterior los siguientes hitos, destacados de entre todos los que componen la implementación de la instrucción y que reflejan la presencia de cada estado comentado:

- En el caso del estado situacional, en la sesión 2 cuando se dice que el profesor propone un ejemplo de adivinación del resultado de varias operaciones que parten de un número que solo conoce cada alumno (ver anexo II), lo que está haciendo es enunciar el ejemplo para que sea seguido por los alumnos. Este estado se repite previamente a la resolución de cada ejercicio planteado ya que previamente es leído por el docente.

- El estado actuativo se manifiesta en cada aplicación de una técnica para la resolución de una actividad. En la misma sesión 2 se hace patente este estado cuando el profesor explica el proceso seguido para obtener el resultado del ejemplo de adivinación propuesto.
- El estado lingüístico se observa nítidamente en las alusiones a la notación del producto de un coeficiente numérico por una parte literal en la que se obvia el signo de producto (sesiones 4, 5, 6, 8 y 10) y que tantas dificultades de comprensión crea a los alumnos.
- El estado conceptual se aprecia en todas las definiciones dadas como en el caso de la sesión 2 cuando se define el lenguaje algebraico o la expresión algebraica.
- El estado proposicional tiene más que ver con el enunciado e interpretación de determinadas propiedades, como en el caso de las reglas de la suma y del producto para obtener ecuaciones equivalentes, que son tratadas en las sesiones 8 a 11, o también las reglas para la resolución de los problemas algebraicos de la sesión 12.
- Finalmente el estado argumentativo se presenta cuando hay una justificación de lo propuesto, como ocurre en la sesión 2 cuando se habla de las razones por las que la generalización de regularidades son importantes.

Dado el amplio espacio de tiempo que se dedica a la realización de ejercicios en las sesiones, se puede afirmar que predominan los estados actuativo y argumentativo.

Por otro lado, conviene hacer mención a la dimensión temporal de la trayectoria para reseñar que los contenidos se distribuyen de forma racional y equilibrada a los largo de todo el periodo de instrucción, dedicando a aquellos más importantes y/o más difíciles un tiempo adicional, si bien, este no ha sido suficiente para incidir convenientemente en el logro de un aprendizaje significativo, tal como se desprende de los resultados de la prueba final de la sesión 13 (ver anexo III).

A lo largo de la trayectoria epistémica se aprecia la utilización de diversos sistemas de representación. Fundamentalmente, destacan el verbal y el simbólico (que se dan en todas las sesiones), sin embargo, también se ha hecho uso de representaciones gráficas (cuando se han corregido ejercicios en los que aparecían figuras geométricas como en el caso de los patrones geométricos o con la explicación del símil de la balanza) y tabulares (como en el caso del ejemplo de la regla de tres o de la proporcionalidad directa).

Las representaciones anteriormente aludidas siempre han buscado su expresión de distinta forma, buscando en última instancia la obtención de una expresión algebraica que supone la transformación en un lenguaje simbólico. Además ha sido objeto de estudio las conversiones de distintas sentencias en otras equivalentes dentro del mismo sistema de representación, lo cual también enriquece la propia representación de las ideas matemáticas puestas en juego durante el proceso.

Ya en la sesión 2 se trataron ejemplos que fueron expresados en varios sistemas de representación, como la adivinación del resultado de una serie de operaciones partiendo de un número secreto, la cual fue descrita en leguaje verbal para luego expresarla de forma simbólica. En esa misma sesión se abordó el problema de las cerchas que además de los dos sistemas de representación anteriores utilizó también el gráfico al hacer uso del dibujo para representar los resultados pedidos.

Como ejemplos de conversión se puede citar el caso de la transformación de monomios mediante semejanza acontecido en la sesión 4 o la equivalencia de ecuaciones de la sesión 7.

Por lo que se refiere al vocabulario utilizado para la expresión de los términos en leguaje natural, se puede destacar la sencillez de las palabras empleadas y la introducción paulatina de los primeros términos formales caracterizados por una baja complejidad dado el carácter introductorio del tema. Se cuida que las definiciones y los procedimientos introducidos estén claros y sean sencillos de asumir para el nivel inicial en el que se proponen, si bien, la parte de ecuaciones de primer grado tratada a continuación de la introducción básica de los contenidos iniciales del álgebra se observa un poco excesiva, demandando por parte de los alumnos la construcción del conocimiento sobre una base poco sólida que no ha sido suficientemente trabajada y asentada (ya que además este bloque de contenidos no ha sido tratado en primaria). Por otro lado, estos alumnos en particular manifiestan problemas de conocimiento de base en contenidos aritméticos previos, lo que supone una elevación del salto cognitivo demandado que a la postre constituirá un obstáculo al desarrollo de la unidad didáctica.

No obstante lo anterior, siguiendo el diseño instruccional previsto, se puede observar en la implementación que se comienza la dinámica de trabajo en el aula partiendo de una presentación de los enunciados y procedimientos principales de uso necesario para posteriores avances tanto en el seno de la propia unidad como de cara a niveles posteriores. Dicha presentación, como se observa en la secuencia de enseñanza, se hace proponiendo tareas que, en primer instancia, apenas involucran términos formales propios del lenguaje matemático.

Poco a poco, conforme se va avanzando en la implementación de los contenidos de la unidad, se definen nuevas nociones utilizando para ello un lenguaje llano que permita a los alumnos acceder al significado de la forma lo más intuitiva posible. Con posterioridad, se trata de usar siempre emparejadas ambas formas de expresión. Se cita cualquier término formal seguido de su explicación más informal y a esto se le une el planteamiento de ejemplos que ilustren lo transmitido.

Un ejemplo claro del proceso anterior se puede encontrar en la sesión 6 cuando, para explicar la identidad frente a la igualdad, se parte de reflexionar acerca de la diferencia entre semejante, igual e idéntico. Con posterioridad se definen las nociones con su sentido matemático pero haciendo uso de un lenguaje lo más coloquial posible. En este caso se observa que el docente promueve las oportunidades de argumentación por parte de los alumnos a través de la propuesta de actividades que lo requieran o en la propia justificación de las respuestas dadas a los ejercicios planteados.

Tras unas explicaciones acordes al nivel de referencia y su consecuente puesta en común, el docente destaca por escrito en la pizarra las ideas fundamentales de forma resumida y propone ejemplos de aplicación que le sirven para reforzar tanto los significados nuevos como los de otros términos matemáticos vistos con anterioridad. Por tanto el proceso, en este punto se torna reiterativo pero sirve para reforzar los contenidos tanto a nivel formal como informal para asegurarse de su perfecta comprensión. Sin embargo, el resultado que se refleja no responde a la bondad de la secuencia y a pesar de varias explicaciones y ejemplos, los alumnos no consiguen captar muy bien los significados, si bien a ello contribuye también que su actitud no es la más apropiada para ello.

Otra observación importante de cara al análisis de los datos recolectados se corresponde con el grado de utilización de tareas que involucren situaciones que permitan la expresión matemática y la interpretación. Este tema de iniciación al álgebra se presta especialmente a este enfoque de las actividades y así se manifiesta en múltiples ejemplos propuestos tanto por el docente como por el libro de texto. Donde más claro se ve es en las sesiones donde se plantean pruebas escritas a los alumnos y en las últimas sesiones ordinarias de tratamiento de contenidos donde se abordan situaciones problemáticas en las que se busca expresamente el establecimiento de relaciones matemáticas entre los datos, para lo cual deben ser correctamente interpretados. Finalmente también se exige un importante ejercicio de interpretación a la hora de configurar la solución obtenida.

A su vez, las situaciones problemáticas descritas, junto a la forma en que se introducen las distintas nociones a partir de comentarios informales relacionados con los contenidos, ponen de manifiesto una sistemática que propicia la generación y negociación de muchas proposiciones y procedimientos.

3.4.2. Trayectoria docente

De forma previa, es importante reseñar que esta trayectoria también está influida por las directrices curriculares establecidas en los documentos que las refieren y que definen a nivel muy general aspectos a tener en cuenta a la hora de reflexionar acerca de las distintas funciones docentes.

En segundo lugar hay que mencionar el hecho de que se pueden observar todas las funciones a lo largo de los distintos momentos de la instrucción. Vamos a realizar un breve repaso de cada una de ellas destacando algún ejemplo ilustrativo de las mismas.

Planificación. La función de planificación se puede observar en el propio diseño del proceso. Cada vez que el docente selecciona unos determinados contenidos o transmite unos significados a sus alumnos. Se constata a lo largo de todo el registro de observaciones (ver anexo III) al compararlo con el diseño inicial (ver anexo II), que no es posible cumplir con lo estipulado, por lo que el docente va re-planificando a lo largo del desarrollo de cada sesión la forma de abarcar todos los objetivos propuestos. Ya desde la sesión 2 se puede comprobar lo descrito. El diseño inicial planteaba 5 minutos para introducir las utilidades del álgebra, seguidos de otros 5 minutos de ejemplos resueltos y 15 minutos más para realizar al menos un ejercicio de la adenda 2. En la práctica, detecta en los primeros minutos algunas lagunas en el conocimiento previo del alumnado y se ve obligado a cambiar lo planificado. No es hasta el minuto 20:50 cuando se propone un ejercicio de la adenda 2. Se acumula un retraso de más de 10 minutos y además se ha comprobado que los alumnos posiblemente no podrán seguir el ritmo preestablecido, por lo que a partir de este momento, el docente tomará el diseño instruccional como una guía general y deberá re-planificar cada sesión.

Motivación. La función de motivación también aparece reflejada en diversos episodios a lo largo de las distintas configuraciones didácticas. El docente trata, en numerosas ocasiones, de crear un clima de trabajo adecuado tanto a nivel individual como colectivo. Cada vez que propone la resolución de un ejercicio trata de hacer partícipes a los alumnos, está pendiente de si han comprendido las explicaciones, intenta valorar positivamente las aportaciones hechas y en caso de ser erróneas trata de reconducirlas mediante explicaciones complementarias y razonamientos guiados, deja tiempo lectivo para que las actividades se aborden en clase ofreciéndose para ayudarles en cada paso, procura mantener el orden y que se respeten las normas de convivencia y las opiniones de todos y anima de forma directa a sus pupilos. En definitiva, en todas las sesiones se intenta promover la participación de todos los alumnos y facilitar que logren los objetivos previstos. Sin embargo, tal como se ve en la transcripción del diario de observación (ver anexo III), la respuesta de los alumnos no siempre está a la altura de las expectativas y entonces se producen algunos hechos que podrían ser interpretados como conductas contrarias a la motivación (como es el caso de la imposición de castigos que se narran en las sesiones 2, 4, 8 y 10), pero en realidad son efectivos para conseguir un adecuado clima de clase basado en premisas conductistas en las que el alumnado aprende a tener una actitud adecuada experimentando que otras contrarias a aquellas conllevan un resultado desagradable que está dispuesto a evitar.

Asignación. La función de asignación de tareas se da constantemente a lo largo del desarrollo de todas las sesiones. De manera clara se observa cada vez que el docente toma la decisión de finalizar una explicación y plantear la realización de una determinada actividad, pero también la está ejerciendo cuando realiza la asignación de los tiempos de cada actividad del aula, cuando debe orientar a los alumnos para que puedan completar los ejercicios trabajados o cuando fija los deberes y las tareas de refuerzo en el trabajo que ha planteado como complemento para el tiempo no lectivo.

Regulación. La función de regulación también la ejerce el profesor de manera continuada cada vez que interviene, ya que establece en cada momento no solo las definiciones, los enunciados de las actividades o su resolución y justificación, sino que también decide los ejemplos que proponer, en qué momento hacerlo y de qué forma, además gestiona la interpretación y refuerzo de los conocimientos previos necesarios para el avance del estudio y se amolda a los ritmos impuestos por la progresión del alumnado haciendo una labor de re-planificación continua que se relaciona con la primera de sus funciones arriba analizada.

Evaluación. Otra función fundamental que asume el docente a lo largo de las configuraciones didácticas es la de evaluación. Constantemente está observando y valorando el estado del aprendizaje con el doble objetivo de calificar los logros e identificar las dificultades que afectan al aprendizaje para poder resolverlas consecuentemente. Dado el reducido número de alumnos, ha sido posible atenderlos de forma individualizada, lo que en el marco de la evaluación ha supuesto que pueda tenerse en cuenta los niveles de comprensión y competencia de cada uno. También hay que hacer mención a que el sistema de evaluación continua llevado a cabo, ha propiciado que los alumnos conozcan en todo momento la evolución de su aprendizaje en el marco de la interacción docente-discente, lo que a su vez ha permitido adaptar las sesiones a las necesidades detectadas en cada momento.

Como ejemplos del desarrollo de la función de evaluación por parte del docente, se pueden poner las sesiones inicial y final, donde claramente predomina sobre las demás, pero está presente en el resto de sesiones. Así en la primera mitad de la sesión 5, se da un episodio en el que se narra que a raíz de una pregunta de clase se hace una evaluación de la comprensión de la adición de monomios que conlleva una actuación consecuente con lo observado.

También es adecuado mencionar expresamente que esta función de evaluación está muy ligada a las otras anteriormente descritas, ya que el ejercicio de la misma suele demandar una alteración de la planificación o un cambio de regulación o incluso la adopción de algún elemento motivador.

Investigación. La función de investigación quizás aparece más velada, dado que pertenece al campo de la reflexión y el análisis del desarrollo del proceso. Es por esto que se puede utilizar como indicador de la presencia de la misma en la acción docente el hecho de que el profesor se ve obligado a introducir cambios sobre el diseño inicial, que lógicamente son fruto de la meditación acerca de lo acontecido. Además, la propia articulación de los distintos momentos y configuraciones observadas en cada sesión, son también fruto del desempeño de esta función, aunque no es explotada en su máximo potencial como motor de una innovación real que permitiera refinar los métodos de enseñanza y obtuviera como consecuencia una mejora de los resultados.

En definitiva, se puede decir que la trayectoria docente está marcada por un equilibrio de todas las funciones observables en el proceso, destacando quizás por su visibilidad directa la de asignación de tareas, regulación y evaluación. La de motivación se halla neutralizada en parte por la abundancia de episodios disruptivos que hay que atajar de forma autoritaria, lo que redunda en negativo sobre la labor de cercanía y afectividad con respecto a la interacción con el alumnado. Más ocultas a la vista están las funciones de planificación e investigación.

3.4.3. Trayectoria discente

En el papel desempeñado por los alumnos durante la implementación del diseño instruccional también se pueden observar distintas configuraciones en las que asumen diversas funciones cuyo análisis es muy interesante realizar sobre la base de los datos obtenidos de la observación sistemática llevada a cabo en el aula durante el proceso (ver anexo III).

De forma previa hay que destacar que es común que esta trayectoria esté configurada de forma muy variada en un mismo instante temporal dado que al ser los alumnos los protagonistas, su número permite la coincidencia en el tiempo de distintas funciones que dan lugar a configuraciones paralelas en el marco de una misma sesión. No obstante, se considera que existe una configuración de referencia que se perfila como respuesta a la correspondiente trayectoria docente con la que interactúa. Dentro de esta configuración de referencia se puede observar que los alumnos pueden manifestar todos la misma función, o algunos exhibir una distinta, lo que permite hacer esa subdivisión de configuraciones paralelas.

Se ha optado por analizar cada función discente de forma individual y separada de las demás. Para ello, el esquema seguido ha consistido en describirla según las directrices del modelo aportado por Godino, Contreras et al. (2006), que ha sido completado dos estados adicionales, observados en el proceso, que no tienen un reflejo claro en la propuesta. A continuación se ha completado la descripción con la cita de algún ejemplo genérico que ilustre la presencia de la función estudiada con base en los datos reflejados en el registro resultante de la observación efectuada a lo largo del referido proceso (disponible en el anexo III). También se ha tenido en cuenta que hay hechos que involucran distintas funciones que se suceden vinculadas unas a otras, tal como también se refiere en el análisis realizado.

Según lo descrito, se pueden observar las siguientes funciones discentes en el proceso de implementación de la instrucción estudiada:

Aceptación. En todas las sesiones se produce la asunción de una serie de tareas impuestas por el profesor y que los alumnos acatan. Se ve claramente cuando se pide que copien de la pizarra o que realicen un ejercicio del libro (sea en clase o como deberes) o un ejemplo propuesto por el docente. Un ejemplo de este estado se muestra en la segunda mitad de la sesión 5 en que el profesor manda resolver los ejercicios 12 y 13 del libro de texto y los alumnos se ponen a ello.

Exploración. Esta función es más difícil de destacar dado que parte de ella tiene lugar en casa cuando dedican tiempo a repasar lo tratado o a estudiar para un examen. Quizás el ejemplo más claro sea la preparación de la prueba inicial, desarrollada en la sesión 1, para la que tuvieron que indagar los contenidos del tema de forma autónoma y previa a ninguna explicación. A la luz de los resultados observados, en general hicieron un papel aceptable. También se encuentran numerosos ejemplos durante las clases que están relacionados con el trabajo sobre los ejercicios propuestos. En estos casos hay un mayor solape con la manifestación de otras funciones.

Recuerdo. Hay muchos momentos a lo largo de la instrucción en que el docente hace una mirada retrospectiva a contenidos abordados en sesiones pasadas o incluso en otras unidades didácticas. En esos momentos el alumnado adopta esta función, aunque sea fugazmente, para acto seguido seguir avanzando por mediación de otras funciones. Destaca especialmente la sesión 12 en la que se hace balance de todo lo tratado en el tema. Otra sesión en la que esta función juega un papel crucial es en la 13, ya que se desarrolla una prueba escrita final que engloba todos los contenidos abordados en el tema.

Formulación. Es otra función muy común dado que el docente ha buscado la participación del alumnado mediante una continua proposición de preguntas en cuya respuesta se pone en liza esta función por parte de los estudiantes. Por otro lado, también está asociada a la repuesta a las tareas planteadas, y dado que el diseño implementado se caracterizaba por la presencia de una gran cantidad de actividades, necesariamente el alumnado ha debido adoptar este estado en numerosas ocasiones, si bien, como se puede observar de los datos recogidos (anexo III), también en muchas otras, la pasividad de los estudiantes la ha nublado, en virtud de la manifestación de una función más de recepción, como se verá más adelante.

Argumentación. Es una de las funciones que más ha costado detectar en el alumnado debido a que no ha sido muy común que plantearan conjeturas para defender, a pesar de las numerosas invitaciones por parte del docente. En muchas sesiones se describe un trabajo con la participación de los alumnos, pero esa participación normalmente no correspondía a un estado de argumentación puro, sino más bien a uno de formulación. No obstante, en la sesión 3, durante la corrección del ejercicio 3 del libro de texto, se dan muestras de esta función que refleja la interacción entre compañeros y la autonomía en el proceder.

Recepción. A la vista de los datos de la observación (ver anexo III), se puede afirmar que es la función más destacada y adoptada por los alumnos ya que las explicaciones del profesor han sido numerosísimas (quizás excesivas) tanto a nivel de teórico como en la realización de ejercicios. Como se ha comentado antes, los alumnos, lejos de tomar una actitud activa en la que adoptar funciones como la argumentación o la formulación, han preferido recibir pasivamente las explicaciones dadas. Sirva como ejemplo la corrección del ejercicio 8 del libro de texto en la sesión 4.

Demanda. Esta función también se ha podido observar en el discente fundamentalmente cuando ha planteado alguna cuestión. Sin embargo, no ha tenido el protagonismo que debía a pesar de las numerosas invitaciones del docente cada vez que les interpelaba para que manifestaran sus dudas. En la sesión 4, cuando el docente pide que resuelvan el ejercicio 53 del libro, se reflejan observaciones de algunos alumnos planteando dudas sobre el proceso de resolución, lo que ejemplifica esta función.

Ejercitación. Esta función también ha tenido un peso importante a lo largo de la implementación del diseño, tanto en clase como en casa, para donde se había previsto una propuesta específica de realización de actividades de refuerzo donde esta función es crucial. No obstante, los resultados han sido tan dispares como la propia diversidad de los alumnos. Algunos, en relación con la función de aceptación, asumieron las tareas y mostraron este estado de ejercitación, otros, en cambio, todo lo contrario, se negaron reiteradamente a situarse en este estado, limitándose a esperar para copiar la correcciones. Entre estos dos extremos, se ubican el resto de alumnos, estando en una posición intermedia en la que unas veces se ejercitan y otras no.

Evaluación. Se dio con más intensidad en las sesiones extremas 1 y 13 en las que se dispusieron sendas pruebas escritas. Sin embargo, en muchas sesiones el profesor somete al discente a pequeñas pruebas en las que el alumno debe adoptar esta función, quizás algo enmascarada por otras que, como la ejercitación o la argumentación, están muy relacionadas con el proceso utilizado. Un ejemplo claro de esta función se puede encontrar en el minuto 13:30 de la sesión 2 en la que un alumnos manifiesta haber entendido el ejemplo que estaba explicando el profesor.

Distracción. Hay que incluir en la trayectoria discente este estado de los alumnos debido a la repetición de su presentación a lo largo del proceso instruccional, tal como se detalla en numerosas observaciones del proceso instruccional (ver anexo III). Es un estado que no sigue un patrón de presencia definido y cuya casuística y motivos son muy variados. Afecta a distintos alumnos en diferentes momentos y en variadas configuraciones. El análisis de su presencia es de importancia debido a que afecta de manera decisiva al resto de trayectorias. Un ejemplo de este estado se puede ver en todas las sesiones incluso en aquellas en las que se había dispuesto una prueba escrita (tal como se desprende del análisis de los resultados de las mismas descritos en las observaciones del anexo III).

Disrupción. Este estado se relaciona con el anterior pero posee una clara diferenciación que consiste en que consigue interrumpir el normal desarrollo de la clase debido a la molestia manifiesta que conlleva. En cuanto a su efecto hay que destacar que tiene una gran relación con la trayectoria emocional y es tremendamente pernicioso para el desarrollo del proceso instruccional. Su presencia ha sido limitada, pero aun así, se pueden encontrar varios ejemplos claros en la sesión 2 (hacia la mitad y al final) y al inicio de las sesiones 4, 6 y 8 (ver anexo III). Su origen es aleatorio y de casuística variada pero, en general, se ha relacionado con episodios de participación del alumnado en actividades orales y con la verificación del estado de distracción (previo en algunas ocasiones).

3.4.4. Trayectoria mediacional

Esta trayectoria está referida a los recursos y estrategias empleados para apoyar el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. En el caso que nos ocupa, el diseño instruccional definía una serie de recursos, aunque bastante limitada (ver anexo II), sin embargo, para el caso de las estrategias, no era tan explícito.

Durante el periodo de instrucción, se optó por respetar el uso de los recursos previamente definidos, en función de los que se había previsto el desarrollo de las sesiones. De esta forma, se pueden analizar los hechos didácticos registrados en las observaciones del proceso (ver anexo III) de cara a localizar y definir cuáles son las distintas trayectorias seguidas en función de los recursos empleados a lo largo del desarrollo de dicha instrucción.

Destaca la no utilización de medios electrónicos, ya que en el aula no se dispone de los mismos y no es fácil, ni cómodo, acceder a las aulas de informática del centro, dada la saturación de su uso. En el caso de calculadoras u otros medios portátiles, no se estiman imprescindibles debido a la sencillez de los cálculos planteados en este nivel inicial, por lo que se opta por utilizar el cálculo manual, que además supone un refuerzo de los procedimientos de cálculo aritmético que no dominan los alumnos con soltura y que son importantes para su desarrollo cognitivo.

Tampoco se ha hecho uso de ningún tipo de material manipulativo dado que no solo no estaba previsto, sino que además el tiempo disponible no permitía realizar este tipo de actividades que suelen conllevar una mayor duración de las tareas.

A grandes rasgos, en cualquier sesión se pueden encontrar reiterativos ejemplos de dos tipos fundamentales de configuraciones relacionadas exclusivamente con el uso de los recursos disponibles.

La primera consiste en redactar por escrito las explicaciones orales de los contenidos de la unidad en la pizarra, para a continuación dejar un tiempo a los alumnos para que trasladen el contenido de la pizarra a sus cuadernos de clase mediante útiles de escritura tradicionales (lápiz y bolígrafo).

La segunda consiste en utilizar el libro de texto de referencia para obtener los enunciados de los ejercicios que serán desarrollados en el aula o en casa dando traslado del proceso de resolución a los cuadernos para posteriormente seguir otra configuración del primer tipo para la corrección de los mismos.

Con respecto a esto último, hay que mencionar que la gran mayoría de las actividades propuestas proceden del libro de texto, si bien la secuencia de presentación y la catalogación de la dificultad se ha acomodado a las necesidades del desarrollo de los contenidos y de la práctica planteados en el diseño de aula realizado. Además se debe hacer referencia a la ingente cantidad de actividades prevista, que ha permitido la diferenciación entre actividades de ejemplificación, de ejercitación y de refuerzo.

También figura en la propuesta una serie de ejercicios de ampliación, pero dado el nivel de los alumnos de la clase, no se ha optado por plantearlos y tampoco ha sido necesario.

En relación a la otra gran componente de la trayectoria mediacional, se podrían establecer los itinerarios caracterizados por el empleo de determinadas estrategias de transmisión del conocimiento que se apoya y complementa con el uso de los recursos antes comentado.

Si se analizan los datos recogidos de la observación del proceso instruccional (ver anexo III), se puede ver, a grandes rasgos, que el profesor utiliza una estrategia genérica y predominante que consiste en presentar los contenidos de manera clara, pausada y organizada, enfatizando los conceptos clave y utilizando distintos recursos retóricos y argumentativos para captar la atención del alumnado y promover su participación en la dinámica de la clase. También trata de contextualizar y motivar los contenidos recurriendo a situaciones y modelos concretos pertenecientes a episodios habituales en la vida real para después ceñirse a contextos puramente matemáticos que permitan la ejercitación.

La dinámica de transmisión y trabajo comienza, en primer lugar, de forma verbal para luego dar traslado de las conclusiones y elementos clave, por escrito, a la pizarra. Seguidamente, se ponen varios ejemplos ilustrativos y a continuación se sugiere una serie de actividades para la ejercitación, que finalmente son corregidas antes de volver a iniciar el ciclo.

Esta trayectoria descrita a nivel general, posee muchos matices, que provienen de su interacción con el resto de trayectorias, ya que está afectada por cada estado discente o por las características emocionales o cognitivas que obligan a ir adaptando y particularizando la estrategia empleada en cada momento según las demandas del proceso. Esto se manifiesta cuando se ha de hacer frente a situaciones como las de planteamiento de dudas por parte del alumnado, cuando se detectan lagunas cognitivas, momentos de despiste y faltas de comprensión o cuando se producen fenómenos de bloqueo en la realización de las actividades propuestas.

Continuando con el análisis de los datos observados, cabe mencionar algunos aspectos relacionados con la estrategia de implementación de la secuencia de tareas dispuesta a lo largo del proceso instructivo:

- Se observa la propuesta de gran cantidad de ejemplos resueltos y ejercicios y problemas propuestos para trabajar tanto en clase como en casa. Los ejemplos resueltos estaban enfocados a contextualizar los contenidos tratados en cada momento, por su parte, los ejercicios cumplían una labor de ejercitación y los problemas tenían una doble intención, por un lado centrarse en la aplicación de dichos contenidos y por otro ejercitarlos.
- Las actividades propuestas estaban secuenciadas en función del tipo de contenido tratado lo que ha permitido que sean representativas de dichos contenidos y se articulen con ellos.
- Conforme avanzaba el tema, se han podido tratar actividades representativas de la relación de los contenidos recientes con los anteriores, lo que ha permitido mejorar la articulación de aquellos a través de las situaciones planteadas.
- Al principio se abordan contenidos básicos a través de contextos eminentemente matemáticos que poco a poco se derivan a otros contextos procedentes de aplicaciones reales que permiten no solo la mera ampliación del campo fenomenológico, sino también la generalización de cada contenido al ser visto desde distintas perspectivas.

Hay que referir también de manera expresa que se proponen situaciones de generación de problemas a partir de ejemplos buscados en la realidad cotidiana, si bien, debido a la influencia de otros factores, como el tiempo, no fueron muy profusos. Por otro lado, en el apartado de problemas del libro, se describen situaciones problemáticas, pero son pocas y algunas de “baja calidad”, aunque también hay propuestas interesantes. La mayoría de estos problemas parecen más interesados por la ejercitación de algún contenido que por la modelización de un determinado fenómeno utilizando las herramientas que hay que aprender.

Como ejemplos de unos casos y otros, se pueden citar varias situaciones, tratadas a lo largo de las sesiones implementadas, que ilustren lo descrito.

La primera puede ser uno de los ejemplos propuestos por el profesor que hace referencia a la contabilización del número de barras necesarias para la construcción de las cerchas de geometría cuadrangular, repetida linealmente, para la estructura de cubierta de un gimnasio. Se observa que es una situación extraída de una realidad que es cercana a los alumnos y que reconocen enseguida ya que manifiestan que el pabellón deportivo de la población encaja en esa descripción y esto permite generar el problema y explotar la situación de manera adecuada.

La segunda que yo escogería, es la de un típico problema de edades de los que el libro de texto plantea varios. Esta situación es más pobre de cara a su utilidad real, como muestra uno de los comentarios que hacen los alumnos que refiere que “nadie hace eso para decir su edad”. Llevan razón, solo sirve para plantear la ecuación y solucionarla.

Sin embargo, la tercera situación, también extraída del libro, hace referencia a una competición de estrategia en la que se reparte un premio de 210€ de forma que cada uno de los cinco participantes les correspondan 10€ más que al que quede por detrás de cada cual (Vizmanos, et al., 2010). Esta situación si es generadora de un verdadero problema que es susceptible de ser encontrado en la realidad.

En definitiva, se puede afirmar que sí se proponen situaciones de generación de problemas para mediar el aprendizaje, pero menos de las que serían deseables y no todas de adecuada “calidad”.

En torno a la trayectoria mediacional se dan otra serie de condicionantes del proceso que es importante no dejar de lado en el análisis de la implementación. Se trata de las características que definen al grupo y al espacio que ocupa, así como los horarios en que éste trabaja.

Lo primero que cabe mencionar relativo a esas características, es que el número de alumnos es reducido (nueve en total) y están distribuidos en dos filas por parejas y tríos, de forma que siempre tengan un compañero al lado con el que poder interactuar de manera directa. El aula es pequeña, pero con suficiente espacio para para el desarrollo de las actividades planificadas, si bien ya se ha comentado que carece de medios informáticos.

En segundo lugar, hay que centrarse en la variable temporal, la cual posee una gran relevancia de cara al desarrollo de la instrucción.

El horario disponible se considera adecuado ya que los tramos horarios no solo no corresponden a la última hora, sino que en la mayoría de los casos se disponen en la primera mitad de la jornada (antes del recreo cuando los alumnos están menos cansados) y en los dos casos en que es después del recreo, se han situado inmediatamente después, con lo cual se aprovecha el descanso al máximo.

En cuanto al tiempo entendido como duración global de la instrucción, hay que hacer mención a que ha sido insuficiente para la enseñanza pretendida. De hecho, las 10 sesiones inicialmente planificadas se han tenido que transformar en 13 y aun así, a la vista de los resultados de evaluación, han sido bastante escasas. Bien es verdad, que no ha existido el complemento de tiempo no presencial requerido para reforzar los aprendizajes, ya que como se ha comentado, y se refleja en las observaciones, los deberes no siempre se traían y el trabajo de refuerzo no fue entregado por nadie, lo que hace presuponer que no lo completaron.

El problema temporal tiene una constante, aunque velada, referencia en los hechos observados durante el proceso, en tanto en cuanto, reflejan una gran escasez de tiempo implementado. Esto ha facilitado que durante la instrucción no sean respetados los momentos requeridos para el desarrollo adecuado de los distintos tipos de aprendizajes. En este sentido, destaca el hecho de que se han tenido que reducir los tiempos inicialmente previstos por el diseño para que los alumnos trabajaran en clase y ha habido que mandar como deberes ejercicios que, en principio, estaban planificados para ser hechos durante el tiempo lectivo.

3.4.5. Trayectoria cognitiva

Paralelamente a la trayectoria epistémica, en la que se desarrolla la secuencia de significados institucionales, se da una trayectoria cognitiva que recoge la faceta personal de asunción de dichos conocimientos.

Tal como destacan Godino, Contreras et al. (2006) “es imposible de caracterizar con una simple grabación audiovisual del desarrollo de la clase, dado que es relativa a cada aprendiz, tiene lugar en la clase y fuera de la clase”. En este caso en que solo se dispone de un listado de observaciones realizadas por el investigador-docente, se hace aún más difícil acometer este análisis. No obstante, hay otros medios como el análisis de la producción de los alumnos (de la cual existen algunos registros en el anexo III) que permiten hacer al menos un análisis parcial de esta trayectoria, si bien, hay que destacar que dicho análisis siempre estará influido por la interpretación que se hace de dicha producción.

En la sesión 13 descrita en el anexo III de este estudio, se hace un análisis de la prueba final realizada tras la instrucción. De las respuestas dadas por los alumnos (de las que también se incluye copia), se deduce el bajo nivel cognitivo de los estudiantes acerca de la materia trabajada.

Los significados personales se van adaptando conforme discurre el proceso de instrucción. Se parte de unos iniciales hasta alcanzar otros finales que serán tanto más adecuados cuanto más parecidos sean a los institucionales. En este proceso, "la noción de trayectoria cognitiva se refiere a la identificación de los sistemas de prácticas operativas y discursivas personales que tienen lugar a lo largo de cada sesión" (Godino, Contreras et al., 2006).

Otro producto, que se deriva del análisis de esta trayectoria, cuya reseña es muy importante, está constituido por los errores manifestados por los alumnos. Estos dan idea de una falta de significación apropiada asociada a la asunción personal de cualquier contenido, por tanto, siempre es interesante poner de manifiesto los errores observados, que dan muestra del proceso de reconocimiento y resolución de los conflictos cognitivos (que forma parte de esta trayectoria) a los que se enfrentan los alumnos, mediados por la labor del profesor, a través de los mecanismos de detección y respuesta puestos de manifiesto en cada momento. A lo largo de los registros de observación del anexo III se pueden encontrar numerosas referencias a lo antes aludido, sirva como ejemplo el episodio reflejado hacia el final de la sesión 3 cuando a raíz de la pregunta de si "puede haber un monomio de grado cero", se interpreta la incorrección de la respuesta como un déficit cognitivo relacionado con las potencias y sus propiedades, que da lugar a un intento de modificación de esa concepción. En las sesiones 1 y 13, se recogen también varios de los errores cometidos por los alumnos en cada actividad de las pruebas realizadas.

También es importante destacar a nivel cognitivo que los alumnos deberían poseer un adecuado dominio de los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema porque han sido tratados específicamente en unidades anteriores. No obstante, esto no es así ya que, por un lado, de manera apriorística, los resultados de la evaluación de la enseñanza anterior han sido negativos, y por otro lado, a posteriori, hay numerosas referencias en la transcripción de las observaciones del proceso que denotan el poco dominio de contenidos de base fundamentales. De hecho, en la trayectoria epistémica se hacía patente el tratamiento de repaso de dichos contenidos de cara a continuar con los propios del tema de álgebra. El listado, que fue recogido en la tabla 2, da idea de las lagunas que presentan.

En todas las sesiones se registraron observaciones relativas a deficiencias en el conocimiento por parte de los alumnos sobre contenidos que se supone debían dominar para poder avanzar en el aprendizaje del álgebra de forma adecuada. Como ejemplo de lo descrito, a continuación se citan varios hitos, procedentes del registro de las observaciones del proceso (ver anexo III), que ilustran lo comentado.

En las sesiones 3 a 11, se detectan lagunas en el manejo de distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales), sobre todo a la hora de operar con ellos, particularmente con el cálculo básico, la jerarquía de operaciones combinadas, el uso de paréntesis, la presencia de denominadores y muy especialmente los criterios de signos. También hay dificultades para aplicar las propiedades básicas de la estructura aditiva y multiplicativa (conmutativa, asociativa, distributiva y elementos nulo y neutro). Este vacío afecta de manera decisiva a la base de comprensión de los conceptos previos al manejo de expresiones algebraicas (identificación del coeficiente, de la parte literal y del grado de una expresión; suma y resta de términos; comprensión de la semejanza; simplificación de expresiones; obtención de la solución de ecuaciones…). Además, obstaculiza la capacidad de abstracción de procesos aritméticos que es decisiva en los prolegómenos del álgebra.

En las sesiones 3, 4 y 5 fueron observadas otras deficiencias importantes para abordar el aprendizaje del tema. Concretamente, las referidas al manejo de las potencias y sus propiedades. Esto crea dificultades añadidas cuando hay que trabajar con operaciones básicas entre términos, en general, o con la identificación de los grados de los términos algebraicos, en particular.

Además de las anteriores lagunas de conocimiento previo, en las sesiones 2 y 5 se ve que tampoco dominan la proporcionalidad (regla de tres simple directa y porcentajes) que afecta a la capacidad de modelizar y tratar determinadas situaciones que emanan de la vida real y que aportarían ventajas añadidas de tipo afectivo. En esa misma línea, se aprecian problemas con el manejo de la escala monetaria en la sesión 3 y específicamente en la 12 (aunque también en el resto de sesiones) se comprueba la ignorancia sobre los esquemas y procedimientos heurísticos más básicos sobre la resolución de problemas de enunciado verbal, lo que redunda en lo ya comentado.

Independientemente de lo anterior, y dejándolo un poco al margen, habría que destacar que la dificultad de los contenidos pretendidos en la unidad didáctica es asequible a la capacidad de comprensión de los alumnos. Lo que se ha puesto de manifiesto cuando, con los ejemplos más básicos (con números naturales pequeños que aparecen en las expresiones de manera explícita operando por medio de sumas), los alumnos han conseguido asumir de forma provisional, por lo menos, las explicaciones dadas por parte del docente. Los estudiantes lo han demostrado cuando han sido capaces de realizar de forma autónoma varios de los ejercicios y ejemplos planteados para su resolución. Así, hacia el final de la sesión 4, se muestra que el ejercicio 53 del libro de texto ha sido resuelto por los alumnos de forma acertada. Ha ocurrido lo mismo al comienzo de la sesión 5 con la ejercitación relativa a los monomios. No obstante, el peso de la falta de base añade dificultades que, a la postre, son insalvables a pesar de la comprensión de los contenidos recientes. Esto genera un fracaso en la ejercitación de lo enseñado.

Otro indicador de la comprensión de los contenidos tratados podría provenir de los episodios registrados en los que a pregunta del profesor sobre la comprensión de lo explicado la respuesta ha sido afirmativa. Sin embargo, el valor de estos registros no se considera significativo, en la mayoría de las ocasiones, ya que a posteriori se ha comprobado lo contrario. Por ejemplo, en la sesión 5, donde se describen nuevas explicaciones de contenidos que supuestamente habían sido entendidos y luego se observó que aparentemente no era así. Es posible que la manifestación por parte del alumnado del supuesto entendimiento de alguna explicación cuando no es así, se trate simplemente de una estrategia de avance rápido hacia otros contenidos potencialmente más interesantes, o una huida hacia adelante, o una mera muestra de indiferencia hacia lo visto a la que hay que dar consentimiento ante la insistencia del docente.

En este punto, es importante hacer patente que se dan dos problemas de importancia a la hora de que los alumnos elaboren un esquema mental sólido que les permita avanzar correctamente en el proceso de aprendizaje. Por un lado están los ya mencionados estados discentes de distracción y disrupción que merman la efectividad de las explicaciones y la ejercitación. Por otro lado, está el hecho de que fuera del horario lectivo no se trabajan los contenidos recibidos para conseguir asentar el conocimiento debidamente. Además estaría también la influencia de los aspectos afectivos que inciden directamente sobre el interés por los contenidos y la motivación hacia asumirlos.

Ejemplos de lo anterior referidos al proceso de instrucción observado ya han sido comentados para el caso de los estados discentes. En el caso de la falta de ejercitación y reflexión fuera del horario lectivo se pueden destacar algunos episodios registrados que indican la falta de trabajo. Al comienzo de la sesión 5 y 8 se observa que pocos han hecho los deberes y en la mitad de la sesión 8 se verifica que la mayoría dice no haber empezado el trabajo de refuerzo exigido como complemento de la prueba escrita de evaluación, que a la postre, no fue entregado por nadie, a pesar de flexibilizar la fecha de entrega.

La detección de este tipo de dificultades aludidas, es fruto del proceso de evaluación. Este proceso, a través del empleo de diversos instrumentos, ha permitido hallar que ni el nivel de comprensión, ni los conocimientos y las competencias pretendidas, han llegado al umbral de lo esperado. Esto es debido a causas como las identificadas, la cuales son importantes de cara a la valoración de la idoneidad del proceso y también para la proposición de medidas que modifiquen el diseño puesto en práctica, con objeto de hacerlo más idóneo para sucesivas implementaciones.

Otra explicación plausible de lo observado proviene de la posibilidad de que los objetivos de aprendizaje no estén en consonancia con las etapas de desarrollo evolutivo que poseen estos alumnos, que recordemos, arrastran problemas de muy diversa índole.

Volviendo a centrarse en la pura trayectoria cognitiva, Godino, Contreras et al. (2006) destacaban otra idea de importancia. Decían que “la interacción del profesor con los alumnos mientras resuelven las tareas en clase, cuando tiene lugar esta actividad, le permite acceder parcialmente a la progresiva construcción de los conocimientos por parte de los alumnos, y tomar decisiones sobre la cronogénesis institucional”.

Esto muestra la observación sistemática del progreso cognitivo del alumnado, ya que “en los distintos momentos en los que el profesor observa el trabajo de los alumnos mientras están resolviendo ejercicios de manera autónoma, se realiza una evaluación de los puntos concretos del estado de sus trayectorias cognitivas que permiten tomar decisiones sobre la trayectoria epistémica” (Godino, Contreras et al., 2006). En el registro de observaciones se ve claramente lo comentado. Por ejemplo, a mediados de la sesión 4, cuando se observa la realización por parte de los alumnos del ejercicio 53 del libro de texto y el profesor se hace eco de las dudas que se generan e incluso llega a interrumpir momentáneamente la tarea para explicar la afección de un paréntesis por un signo menos.

Por último, no se puede acabar este epígrafe, sin antes reseñar que a lo largo de la implementación del diseño se observa que se ha procurado que los alumnos participen reflexionando acerca de cada paso dado, sea en la resolución de una actividad para la que se le deja tiempo en clase, sea para su posterior corrección o para la explicación de un concepto o un determinado procedimiento. Con esto se intenta que la construcción del conocimiento sea fruto de una negociación de los elementos dispuestos por el diseño instruccional.

Un claro ejemplo de lo anterior se encuentra en la sesión 5, cuando se pide a los alumnos que resuelvan un ejemplo propuesto a colación de la explicación sobre el valor numérico de una expresión algebraica. Son los alumnos los que deben generar el procedimiento de solución a partir de lo que han entendido, ayudados por una negociación de ideas con sus compañeros y con el docente que ha instigado esa propuesta.

3.4.6. Trayectoria emocional

En un proceso de instrucción, no solo hay que tener en cuenta factores relacionados con la materia o con el diseño de la instrucción a nivel operativo, también deben ser tenidos muy en cuenta aspectos afectivos relacionados con las actitudes que presentan los distintos “actores” ante dicho proceso.

En este sentido, se puede tratar de identificar de qué forma evoluciona o qué estados emocionales se presentan a lo largo de la implementación del diseño inicialmente previsto. Por tanto, tiene sentido describir la variación de dichos estados emocionales con el paso del tiempo y a lo largo del abordaje de los distintos contenidos previstos. Para ello, habría que volver a lo descrito en la trayectoria discente cuando se observaban dos estados que estaban íntimamente relacionados con una respuesta de corte emocional. Dichos estados eran los de distracción y disrupción, que de alguna manera denotan emociones como el poco interés, el reducido compromiso, la aversión o la falta de autoestima. El análisis de dichas emociones da idea de lo contraproducente que puede ser para el desarrollo del aprendizaje sus niveles crecientes y por tanto, dónde habría que incidir de cara a una mejora sustancial de la idoneidad didáctica del proceso.

Cuando se hablaba de la trayectoria discente, se hacía hincapié en que su itinerario tenía al menos dos grados de libertad, uno correspondiente a la variación a lo largo de la secuencia de implementación y otro paralelo que dependía de cada alumno individualmente. En este caso, también se puede apreciar que en un mismo momento de la instrucción se pueden dar simultáneamente varios estados emocionales correspondientes a distintos estudiantes. De hecho, cuando se verificaban estados de distracción o de disrupción no eran generalizados, por lo que el resto de alumnos mostraban otras emociones que daban lugar a un estado diferente, en muchos casos adecuado para el aprovechamiento de la instrucción.

El problema que existe para la definición de esta trayectoria es que no basta la mera observación para determinar qué estados se presentan, ya que la apariencia mostrada conduciría a una determinación superficial de los mismos. No obstante, actitudes negativas como las referidas anteriormente, si aportan una tendencia clara de la trayectoria seguida por algunos alumnos que reinciden en los comportamientos observados y se observa también una correlación con resultados especialmente negativos de su evaluación. Lo contrario se podría referir para los demás.

Como destaca Godino, Contreras et al. (2006), “sería necesario la aplicación de instrumentos de recogida de datos específicos para describir con validez y fiabilidad los estados de las trayectorias emocionales de los alumnos con relación al proceso instruccional que están viviendo”. No obstante, el conocimiento que posee el docente de sus alumnos le inclinan a pensar que, en general, la mayor parte de los alumnos se dejan dominar, en algún momento, por actitudes y emociones, de corte negativo y tipología variada, hacia la materia implementada, siendo los episodios de distracción y disrupción la punta del iceberg de un problema más de fondo que merecería ser estudiado en profundidad de cara a una efectiva mejora de la idoneidad del proceso instruccional.

A lo largo de los registros reflejados en el anexo III, se pueden reconocer otros indicios indicativos de trayectorias emocionales más positivas, que a la postre, resultan mayoritarias tanto en el número de alumnos, como en los momentos en los que se observa. Estas son las que permiten el avance de las clases. En concreto, se puede hacer referencia a cuando los estudiantes participan de la corrección de muchos de los ejercicios propuestos o cuando plantean dudas, cosa que ocurre en todas las sesiones. Sin embargo, hay días en que esto se observa con más claridad que otros, lo cual, sin duda, es indicativo de la variedad de trayectorias emocionales presentes en el proceso.

Otras cuestiones dignas de mención en este apartado, hacen referencia de manera directa al interés y la motivación del alumnado. Por ejemplo, en el caso de las tareas propuestas, se ha observado que las menos rutinarias, llaman más su atención. En la sesión 2, cuando se propuso el ejercicio de adivinación del resultado de unas operaciones básicas a partir de un número pensado en secreto por cada alumno, se generó una amplia expectación que promovió la curiosidad y la participación. También en la sesión 5 con el ejemplo del cálculo del interés del dinero, hubo bastante expectación, pero en general, la mayor parte de las actividades, carecen de ese interés especial y parecen ser percibidas como rutinarias, aburridas e inútiles.

No obstante lo anterior, lo que no se puede negar, a la luz de lo observado, es que en todo momento se ha tratado de hacer partícipes a los alumnos de la dinámica de clase tratando de promocionar la responsabilidad y la perseverancia aun en condiciones emocionales adversas. Por otro lado, también se ha procurado favorecer los principios de igualdad e inclusión en dichas participaciones con el claro objetivo de conseguir una mejora de las situaciones de exclusión y de la maltrecha autoestima del alumnado. De esta manera se puede mejorar su autonomía y evitar el rechazo o el miedo a la materia, máxime con chavales que suman dificultades ajenas a la propia asignatura, de muy diversa índole y gravedad, que lógicamente afectan a su actitud hacia la disciplina, si bien hay que destacar que no es solo, ni siquiera principalmente, respecto de esta materia.

También se ha tratado de incluir en el seno de esta trayectoria el diálogo y la comunicación en el aula. De esta manera se refuerza la inclusión en el grupo de sus componentes y la capacidad de llegar a consensos basados en los mejores argumentos aportados. Además se promociona el debate sobre contenidos matemáticos que permita la puesta en práctica de estados discentes apropiados para el aprendizaje significativo, que conllevan emociones relacionadas con la valoración de la materia o la propia autoestima.

Sin embargo lo anterior, no se ha percibido el ánimo adecuado en los alumnos, que además han dado reiteradas muestras de rechazo a estos planteamientos, como se desprende de la interpretación de episodios de pasividad ante la tarea propuesta acontecidos en las sesiones 4, 5 ó 6. También se ve cuando no se han traído los deberes o incluso cuando ha habido faltas de respeto manifiestas con motivo de algunas intervenciones de sus compañeros, como en las sesiones 2, 7 u 8. Además está el hecho de las faltas a clase (de dudosa justificación) registradas y la apreciación de la apatía por recuperar dichas ausencias. Destaca que de las 11 sesiones lectivas correspondientes a clases ordinarias (en las que no se empleaba el tiempo exclusivamente en hacer una prueba escrita) hay alumnos que han faltado incluso a la mitad de ellas (un caso que además también faltó a las dos pruebas realizadas). En el otro extremo, solo hay tres que no hayan faltado a ninguna, que coinciden, bastante bien, con los que han obtenido mejor resultado. Los otros tienen al menos una falta y la mayoría dos.

CAPÍTULO 4

VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA. PROPUESTAS DE CAMBIOS EN EL DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA

"La valoración de la idoneidad de un proceso de instrucción matemática requiere disponer de información detallada de los hechos que ocurren y elementos de referencia que autoricen a emitir los juicios de adaptación, pertinencia o eficacia correspondientes a la dimensión valorada" (Godino, Contreras et al., 2006).

Por tanto, a partir del análisis de los datos obtenidos que se ha realizado en el apartado anterior, se está en disposición de emitir un juicio de valor de cada componente de las facetas en virtud de los indicadores sugeridos por Godino (2011), que pueden ser consultados en el anexo I. Esta valoración, escalada en tres tramos (bajo, medio y alto), según el número de criterios de idoneidad cumplidos, conducirá a la determinación de la idoneidad didáctica de cada faceta del conocimiento matemático del diseño instruccional implementado. Para ello, en los sucesivos apartados, se justificarán las valoraciones realizadas y, en su caso, se hará una propuesta de mejora basada en el conocimiento didáctico matemático sobre el tópico tratado, según se ha sintetizado en epígrafe 3 de este estudio.

4.1. Faceta epistémica

En el ámbito de esta faceta se puede comenzar por referir que la idoneidad de la componente denominada de situaciones-problemas es media. El primer indicador ya muestra la presencia de ciertos defectos en las situaciones planteadas a los alumnos. En su mayoría son representativas de los contenidos abordados y se articulan convenientemente según la secuencia implementada. Sin embargo, la contextualización está un poco forzada y se centra excesivamente en el aspecto puramente matemático. La mayor parte de las actividades son meros ejercicios de aplicación de la teoría matemática con poca o ninguna relación con contextos reales cercanos a los alumnos.

Por lo que respecta al segundo indicador, hay que referir que sí se proponen situaciones de generación de problemas a partir de ejemplos buscados en la realidad cotidiana, si bien, debido a la influencia de otros factores, como el tiempo, no fueron muy profusos. Por otro lado, en el apartado de problemas del libro, se describen situaciones problemáticas, pero son pocas y algunas de "baja calidad". La mayoría están más interesadas en la ejercitación de algún contenido que en la modelización de un determinado fenómeno utilizando las herramientas que hay que aprender.

En definitiva, se ha propuesto una gran cantidad de actividades a los alumnos, pero en su mayor parte no correspondían a verdaderas situaciones de generación de problemas, por lo que una mejora obvia es la inclusión de estas situaciones en detrimento del resto de tipos de ejercicios. Esta propuesta, debidamente articulada con la secuencia de contenidos, también mejoraría la idoneidad del primer indicador.

La valoración de la idoneidad de la componente relacionada con los lenguajes es más bien media. Se aprecia la utilización de diversos sistemas de representación. Sobre todo, destacan el verbal y el simbólico (que se dan en todas las sesiones), aunque también se ha hecho uso de representaciones gráficas (en ejercicios con patrones geométricos o con el símil de la balanza) y tabulares (como en el caso del ejemplo de la regla de tres o de la proporcionalidad directa), pero éste no ha sido muy profuso. Por tanto, una medida de mejora provendría de potenciar un empleo equilibrado de todos los sistemas de representación y de las conversiones entre ellos abordando situaciones problemáticas contextualizadas que permiten añadir a la expresión verbal y simbólica otra gráfica y en muchos casos también tabular, a partir de las cuales se pueden plantear las correspondientes conversiones que ayuden a la comprensión de dichas situaciones de cara a su trabajo en el aula.

Por lo que se refiere al vocabulario utilizado para la expresión de los términos en leguaje natural, se puede destacar la sencillez de las palabras empleadas y la introducción paulatina de los primeros términos formales caracterizados por una baja complejidad dado el carácter introductorio del tema. Sin embargo la estructura del tema, excesivamente teórica y formal, ha minado la buena valoración de este indicador. Una propuesta de mejora vendría de la mano de una metodología que hiciera un enfoque basado en la práctica inicial antepuesta a la teoría. De esta forma, el lenguaje utilizado ahorraría, en la fase inicial, gran parte de la formalidad que dificulta la comprensión del tópico matemático en este primer nivel de enseñanza.

El hecho de que el grado de utilización de tareas que involucren situaciones que permitan la expresión matemática y la interpretación sea considerado como alto, a tenor de la actividad desarrollada, no modificaría la valoración global. En este caso el gran número de actividades de contexto matemático trabajado en el aula lo facilita. Desde la labor del docente, también se favorece, exigiendo a los alumnos que se esfuercen a este respecto. Sin embargo, el resto de indicadores son mejorables.

Si se analiza la idoneidad de la componente relativa a las reglas, resulta baja. A pesar de la claridad y corrección de las definiciones y procedimientos, no se considera que estén muy adaptadas al nivel inicial que se pretende trabajar. En general, se introducen conceptos teóricos excesivamente formales y alejados de los que deberían ser considerados principales. De hecho, el tema debería centrarse, para la mejora de su idoneidad, en la introducción de los distintos usos de la simbología algebraica y del significado del signo igual, como antesala de las expresiones algebraicas y las ecuaciones y mucho antes de abordar el lenguaje algebraico y las estructuras derivadas del mismo.

Lo descrito para el indicador anterior, arrastra hacia la mediocridad a la presentación de enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. El peso de centrarse en el lenguaje algebraico perjudica el carácter fundamental de los contenidos presentados. Habría que redefinir cuáles son dichos contenidos y centrarse en los antes destacados para aumentar la idoneidad de este indicador.

A pesar de lo anterior, sí se propone a los alumnos, en todas las situaciones, que intenten generar y negociar las proposiciones y procedimientos que se tratan en cada momento. Por tanto, la idoneidad según este indicador sería alta, pero no es suficiente para elevar la valoración global de la componente.

Si se observa ahora la idoneidad de la componente relacionada con los argumentos, según el primer indicador, sería media. Si los contenidos abordados no se corresponden bien con el nivel educativo al que se dirigen, las explicaciones tampoco son adecuadas en la misma medida. Por tanto, se podría mejorar también centrándose en la introducción de contenidos más adecuados, como los anteriormente propuestos. Sin embargo, según el segundo indicador, la idoneidad sería alta, debido a que la dinámica de clase se basa en la argumentación de las respuestas dadas a cualquier actividad. Por tanto, en definitiva, a nivel global, la valoración quedaría como media.

Finalmente dentro de la faceta epistémica, hay que decir que la idoneidad de la componente relativa a las relaciones es alta porque en la instrucción se tratan los objetos matemáticos de manera interrelacionada y articulada. Se conecta entre sí, tanto la parte teórica de definiciones y proposiciones, como la parte práctica de ejemplos, ejercicios y problemas. Por otro lado, también se identifican y articulan entre sí los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

4.2. Faceta ecológica

Dentro de esta faceta hay que considerar que la idoneidad de la componente de adaptación al currículo es alta, ya que desde el diseño se tuvo muy en cuenta el respeto de las directrices curriculares. Para ello, dicho diseño se basó en la programación del departamento que refleja literalmente lo dispuesto en la legislación vigente para la materia. Posteriormente, la implementación respetó esas directrices para su desarrollo.

Sin embargo la idoneidad de la componente relacionada con la apertura a la innovación didáctica es baja. Por un lado, ni el diseño ni la posterior implementación han contado con la integración de las nuevas tecnologías, por diversas causas anteriormente comentadas. Por otro lado, no se ha aportado ninguna innovación basada en la investigación, si bien, sí se ha llevado a cabo un proceso reflexivo a lo largo de todas las jornadas con objeto de mejorar los aprendizajes.

Muchos autores consideran la integración de las nuevas tecnologías como beneficiosa y necesaria, por lo que es una buena medida de cara a la mejora de la idoneidad de esta componente. Por otro lado, diversas investigaciones han puesto de manifiesto que medidas de innovación educativa (como el uso de ciertos recursos o modelos) redundan en un mejor proceso de enseñanza y aprendizaje.

En lo referente a la idoneidad de la componente relativa a la adaptación socio-profesional y cultural se puede afirmar que es alta, debido a que los contenidos están pensados en última instancia para llevar a cabo el proceso de enculturación de la persona en aspectos que lo integren en la sociedad que enmarca al sistema de enseñanza donde tiene lugar la instrucción. Además, determina los significados institucionales que el alumnado debe dominar para su adaptación al entorno en el que vive.

Por su parte, la idoneidad de la componente que contempla la educación en valores es también alta, porque a lo largo de la implementación del proceso, se hace bastante insistencia en la necesidad de justificar todo y reflexionar acerca de los procesos seguidos, así como de respetar a todos los compañeros y sus ideas. Estas premisas han sido llevadas a su extremo aunque en la práctica haya dado lugar a la corrección severa de episodios disruptivos, que quizás hayan podido afectar negativamente a la idoneidad de otras componentes.

La última componente de esta faceta hace referencia a las conexiones intra e interdisciplinares. Su idoneidad, en este caso, es media, debido a que las relaciones establecidas de manera intradisciplinar son bastante ricas por necesidad. Sin embargo, las interdisciplinares son significativas pero muy escasas. La idoneidad se podría mejorar con la propuesta de situaciones más ricas y contextualizadas que utilizaran representaciones variadas y estuvieran referidas a las múltiples áreas del conocimiento donde es de utilidad el álgebra.

4.3. Faceta cognitiva

En lo que respecta a esta faceta, la idoneidad de la componente relativa a los conocimientos previos de los estudiantes es baja, debido a que estos no poseen los conocimientos adecuados al nivel que se necesita. La principal causa corresponde a las características de los alumnos, pero además influye el hecho de no haber abordado previamente, a nivel institucional, contenidos pre-algebraicos, que debido al tiempo disponible, tampoco se pueden tratar con adecuada profundidad en este proceso.

Por lo que se refiere a la manejabilidad de la dificultad de los contenidos hay que reseñar que no es adecuada porque dichos contenidos son excesivamente formales y no tratan explícitamente los conocimientos que se consideran fundamentales. Por tanto, las medidas aplicadas a la mejora de la faceta epistémica combinados con el refuerzo de los conocimientos previos apropiados, mejoraría la idoneidad de esta componente.

Desde el punto de vista de la idoneidad de la componente que contempla las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales, la valoración es media. La propuesta de diseño incluye actividades de ampliación y de refuerzo y además, el profesor trata en todo momento de promover el acceso y el logro de todos los estudiantes, sin embargo, no se ha conseguido a la luz de los resultados obtenidos.

Finalmente la idoneidad de la componente de aprendizaje es baja, dado que a pesar de haber tenido en cuenta en la evaluación distintos niveles de comprensión y de haber difundido sus resultados y haberlos empleado para tomar decisiones, la verdad es que sus diversos modos indican que los alumnos no han logrado la apropiación de los conocimientos.

La mejora de la idoneidad de esta componente se relaciona con las demás ya que para conseguir el aprendizaje es necesaria la connivencia del resto de componentes de las demás facetas.

4.4. Faceta afectiva

La idoneidad de la componente que hace referencia a los intereses y necesidades de los alumnos es baja, ya que la mayor parte de las tareas encomendadas a los alumnos parecen carecer de interés para ellos. Además la propuesta de situaciones de la vida cotidiana y profesional que permiten valorar la utilidad de las matemáticas es muy escasa. Se reduce a unos pocos ejemplos que se diluyen en el gran volumen de actividades planteadas.

La mejora de esta componente solo puede pasar por el cambio del tipo de tareas propuestas. Ya en la mejora de la faceta epistémica que propugnaba utilizar actividades contextualizadas en la realidad cotidiana de los alumnos para conseguir que tengan interés para ellos y vean su utilidad.

En cuanto a la idoneidad de la componente que valora las actitudes, llegaría a un nivel medio. Por un lado, se promueve la participación y se favorece la igualdad, pero por otro los alumnos no terminan de aceptarlo e incluso se dan varios episodios de rechazo que reducen el valor de los indicadores correspondientes.

Por su parte, la idoneidad de la componente relacionada con las emociones, también es media. Se promueve la autoestima para intentar evitar el miedo y el rechazo ante la asignatura mediante una dinámica participativa que no recrimina los errores sino que enseña a combatirlos. Sin embargo, la idoneidad de la componente baja cuando se tiene en cuenta que no se hace una adecuada apología de las virtudes de la materia en lo que respecta a destacar sus cualidades de estética y precisión. Se opta más bien por centrarse en la pura utilidad como único valor de la disciplina perdiendo la oportunidad de complementarlo con la estética y la precisión. La mejora de la idoneidad, en este caso, vendría de la mano de una mayor incidencia sobre esos aspectos durante la implementación.

4.5. Faceta interaccional

La idoneidad de la componente que tiene en cuenta la interacción docente-discente, se puede valorar como alta, ya que la mayoría de sus indicadores tienen una marcada presencia y una alta incidencia en el desarrollo de la instrucción observada. El profesor presenta adecuadamente los contenidos institucionales y demuestra a lo largo de todo el proceso que reconoce los conflictos de los alumnos y que es capaz de resolverlos. También favorece la búsqueda del consenso en torno al mejor argumento y utiliza distintos recursos retóricos y argumentativos para captar la atención de los alumnos a los que siempre trata de incluir en la dinámica de clase planteada. Como se ha comprobado, no siempre se logra la atención de todos, pero siempre se actúa para remediar esa situación.

En cuanto a la idoneidad de la componente que se centra en la interacción entre discentes, se puede valorar como baja, debido a que a pesar de que en el grupo se ha favorecido en todo momento la inclusión y la comunicación entre los estudiantes, el resultado no ha sido satisfactorio, tal como muestran los reducidos valores del indicador que analiza la argumentación matemática por parte de los alumnos.

La mejora de esta componente solo puede venir de la mano del incremento de la motivación. Esto involucra a las medidas relacionadas con la faceta afectiva como paso previo para obtener una base sobre la que asentar el incremento de la idoneidad de la interacción entre discentes.

La idoneidad de la componente de autonomía tiene una baja valoración debido a que los momentos en que los alumnos asumen la responsabilidad del estudio son pocos. A veces plantean cuestiones, pero no suelen explorar ni conjeturar y tampoco se prodigan en el uso del razonamiento ni la comunicación de soluciones. La mejora de esta componente pasa por incrementar el tiempo dedicado a la resolución de situaciones problemáticas adecuadas que facilite la existencia de momentos en los que los alumnos asuman la responsabilidad del estudio.

Sin embargo, la idoneidad de la componente de evaluación formativa se puede considerar alta, ya que en todo momento a lo largo del proceso se sigue una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos a través de cualquier muestra de su participación en las tareas propuestas y del análisis de su trayectoria discente.

4.6. Faceta mediacional

Esta faceta recoge varias componentes relacionadas con los medios y el tiempo disponibles. En ella la idoneidad de la componente denominada recursos materiales es baja, ya que no se usan materiales manipulativos ni informáticos. Además, tal como se ha mencionado con anterioridad, los contenidos no están adecuadamente contextualizados y motivados. La mejora de esta componente pasa por incluir el uso de recursos informático (como http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html) y manipulativos (como los juegos o Maquina Molly) y por utilizar determinados modelos concretos y visualizaciones adecuadas (como es el caso de la balanza virtual).

La idoneidad de la componente relacionada con el número de alumnos, su horario y las condiciones del aula, se puede valorar como alta, ya que tanto el número de alumnos, como su horario y las condiciones del aula son muy apropiadas para el desarrollo de la instrucción.

En cuanto a la idoneidad temporal se puede valorar como baja. El tiempo no presencial dedicado a la instrucción se estima que ha sido muy reducido, tal como se observa a través del control de las tareas encomendadas para casa. Por su parte, el tiempo presencial tampoco ha sido adecuado ya que se observa que se ha excedido mucho con respecto al programado y a pesar de ello, tampoco ha sido suficiente para desarrollar el proceso diseñado de manera adecuada. Sí se ha dedicado tiempo adicional a los contenidos importantes y/o de especial dificultad (dentro de la secuencia definida que como se ha visto antes no es adecuada), pero este no ha sido el suficiente y los resultados lo demuestran.

Esta componente temporal tiene una arraigada relación con el resto de facetas. De esta forma hay que plantearse, a nivel epistémico, que los contenidos se han distribuido de manera racional a lo largo del tiempo, pero hay que tener en cuenta el exceso del mismo sobre lo planificado. Respecto al aspecto cognitivo, en este caso particular de alumnos con problemas, no se puede afirmar que se hayan tenido en cuenta las etapas de desarrollo evolutivo de los estudiantes. A nivel instruccional se ve que los retrasos acumulados han contribuido a producir un recorte de la asignación temporal a cada etapa del proceso de aprendizaje que no contribuye a la correcta culminación del mismo. Finalmente, a nivel ecológico el tiempo asignado es claramente inadecuado para lograr el aprendizaje, máxime cuando los contenidos son novedosos.

La mejora de esta componente es complicada a tenor de la rigidez curricular, sin embargo si se puede apostar por centrarse en los contenidos epistemológicamente más importantes y dedicar el tiempo adecuado para su instrucción, reduciendo el número de actividades a las imprescindibles que sean adecuadas.

4.7. Interacción entre facetas

Se pueden considerar otra serie de indicadores que reflejen la interacción entre facetas a través de aspectos que se relacionan con varias de ellas.

En cuanto a la interacción entre las facetas epistémica y ecológica, es importante destacar que el currículo propone el estudio de problemas contextualizados en ámbitos variados que se relacionen con la realidad cotidiana de los alumnos. También marca una serie de contenidos mínimos, cuya interpretación a nivel de centro, a través del libro de texto escogido como referencia, poco tienen que ver con el conocimiento didáctico matemático relativo a la faceta epistémica. Esto muestra una baja idoneidad cuya mejora pasa por lograr una adecuación del currículo impartido a las recomendaciones epistemológicas para el tratamiento del tema.

Si se considera la íntima relación que existe entre la faceta epistémica, la cognitiva y la afectiva, se pueden analizar varios indicadores que dan idea de su idoneidad. El primero tiene que ver con el sentido que posee para los estudiantes el contenido de estudio. Se aprecia una baja idoneidad en este sentido a consecuencia de las características de los contenidos estudiados y de las condiciones de los propios alumnos. Como ya se ha comentado, las situaciones estudiadas son mejorables, pero además el nivel cognitivo de los alumnos es reducido y afectivamente muestran una baja autoestima y una actitud general de desinterés y poco trabajo, reforzada por su problemática particular. A pesar de las medidas de estímulo aplicadas y de las tareas de evaluación utilizadas, no se observa un cambio positivo a nivel cognitivo y afectivo, por lo que sería adecuado involucrar cambios a nivel mediacional (empleo profuso de herramientas TIC y recursos motivadores como juegos y modelos explicativos) que trataran de revertir esta situación, ahondando en la relación entre las facetas epistémica, cognitiva y mediacional. También sería interesante incidir a nivel de la relación entre las facetas cognitiva, afectiva e interaccional, reforzando el carácter argumentativo y relacional de las explicaciones dadas e incluyendo adaptaciones apropiadas y razonables de los contenidos, centrándose en que capten las ideas fundamentales del álgebra (significado simbólico y noción del signo igual) e introduciendo ecuaciones aritméticas (con la incógnita en uno solo de los miembros), como paso previo a posteriores profundizaciones en ecuaciones más complicadas y en el propio lenguaje algebraico. Estas medidas no deben dejar de lado la interacción ecológico-instruccional que supone que el profesor ha de entregarse a la formación de sus alumnos y debe profundizar en su conocimiento tanto de la materia que enseña como de la forma de hacerlo. En este caso la idoneidad se puede considerar alta si se tiene en cuenta que el docente no solo se ha preocupado de sus estudiantes, sino que se ha estado formando a lo largo del curso para mejorar su práctica.

CAPÍTULO 5

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

5.1. Conclusiones

En síntesis, hay que decir que este trabajo se ha centrado en la valoración, y consiguiente propuesta de mejora, de la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza sometido a una serie de condicionantes relativos a todas las facetas del conocimiento matemático.

Se ha hecho la distinción de dos partes fundamentales. Una primera tiene que ver con la selección y análisis de los conocimientos didáctico-matemáticos relevantes para generar una propuesta de valoración y mejora del diseño e implementación de la instrucción acerca del simbolismo algebraico y la resolución de las ecuaciones de primer grado en 1º de ESO. La segunda parte, tiene que ver con la valoración de una serie de indicadores que permitan juzgar la idoneidad didáctica de las facetas del conocimiento matemático del referido diseño e implementación del tópico elegido para ser tratado con un grupo concreto. Esto ha servido de punto de partida para la propuesta fundamentada de mejoras basadas en la primera parte descrita.

Como conclusión, se aporta la tabla 3 en la que se resume la valoración de la idoneidad didáctica de las distintas componentes de las facetas del conocimiento del simbolismo algebraico y la resolución de ecuaciones en el caso concreto estudiado.

Tabla 3. Idoneidad de las componentes de las facetas del conocimiento matemático para la implementación del diseño instruccional planteado.

Faceta	Componente	Idoneidad
Epistémica	Situaciones-problemas	Media
	Lenguajes	Media
	Reglas	Baja
	Argumentos	Media
	Relaciones	Alta

Faceta	Componente	Idoneidad
Ecológica	Adaptación al currículo	Alta
	Apertura a innovación didáctica	Baja
	Adaptación cultural y socio-profesional	Alta
	Educación en valores	Alta
	Conexiones intra e interdisciplinares	Media
Cognitiva	Conocimientos previos	Baja
	Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	Media
	Aprendizaje	Baja
Afectiva	Intereses y necesidades	Baja
	Actitudes	Media
	Emociones	Media
Interaccional	Interacción docente-discente	Alta
	Interacción entre discentes	Baja
	Autonomía	Baja
	Evaluación Formativa	Alta
Mediacional	Recursos materiales	Baja
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	Alta
	Tiempo	Baja

A la luz de estos resultados y del conocimiento didáctico-matemático estudiado, se pueden plantear de manera resumida las siguientes consideraciones de mejora de la idoneidad del diseño propuesto.

A nivel epistémico y ecológico se pueden integrar las distintas aproximaciones del álgebra de cara obtener una visión multidimensional que incluya además de la puramente lingüística, los aspectos relacional y generalizador y el proceso de resolución de problemas a través del dominio de las ecuaciones (Drijvers, 2003). También hay que incidir sobre las nociones de *equivalencia* y *variable* en los términos en que son descritas por Knuth et al. (2011). Esto permite diferenciar en estas nociones las distintas interpretaciones que son de utilidad para la introducción en la significación simbólica y las ecuaciones. Además habría que trascender el currículo de manera que se organice una secuencia de contenidos mínimos integrada con respecto a los distintos niveles y bloques diferenciados, de manera que se pueda diseñar una trayectoria epistémica, compatible con los principios destacados, que permita recoger los contenidos marcados por la legislación vigente, de forma progresiva, ampliando en cada curso la visión inicial.

En lo referente a las facetas cognitiva y afectiva habría que definir el nivel de razonamiento algebraico de partida empleando como indicadores, por ejemplo, la definición epistémica de los niveles de algebrización de Godino et al. (2014). También es fundamental centrarse en la identificación de los tipos de errores (tanto aritméticos como algebraicos) que comenten los alumnos, para tratar de incidir sobre ellos de manera específica desde la perspectiva interacional y mediacional. En paralelo habría que ahondar en el tratamiento terapéutico de las fuentes de error detectadas por la literatura especializada. Además convendría aunar los aspectos sintácticos con los semánticos, dando prioridad a los segundos en el inicio, para facilitar el paso de lo concreto a lo abstracto y acomodar así las estructuras mentales de los estudiantes al nivel de abstracción requerido, de una forma paulatina (Drijvers, 2003). Finalmente, habría que reforzar la componente del interés y la necesidad a través del planteamiento de situaciones cercanas a realidad circundante e incidir sobre los aspectos actitudinales y emocionales identificando en primer lugar los factores negativos, de tipo ambiental y personal, que son influyentes (Gil et al., 2005) para luchar contra ellos.

Por lo que respecta a las facetas instruccional y mediacional se propone utilizar una metodología activa y participativa. Habituar a los estudiantes a resumir con sus palabras algunas de sus observaciones, como la de patrones (Schoenfeld y Arcavi, 1988) y discutir las estrategias empleadas (Fujii, 2003). Enfatizar el aspecto dinámico de las variables y trabajar un amplio rango de problemas en los que generalizar sus soluciones (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Generalizar también expresiones numéricas en la fase de introducción, antes de aprender la notación formal (Fujii, 2003). Integrar el álgebra en otras disciplinas y dotarla de utilidad utilizando para ello la modelización en contextos concretos, mediante el uso de la sintaxis algebraica (Filloy y Rojano, 1989). Utilizar recursos TIC, juegos y modelos didácticos como el de la balanza virtual para trabajar los contenidos algebraicos en un ambiente afectivo apropiado. Evitar en lo posible el método de trasposición de términos para la resolución de ecuaciones en el que se pierde la visión del conocimiento previo de los alumnos (Vlassis, 2002). Graduar la dificultad de las ecuaciones utilizadas para enseñar el método de resolución en el marco de la resolución de series de problemas interconectados y contextualizados en un entorno cercano a la realidad cotidiana en los que se produzca una variación progresiva de los contenidos trabajados (Li et al., 2011). Comenzar por ecuaciones aritméticas (con la incógnita en un solo miembro) y luego continuar con las algebraicas (con incógnitas en ambos miembros). Utilizar coeficientes naturales, después enteros y finalmente introducir divisiones y paréntesis.

Del análisis de la tabla 3 y del resumen de mejoras sugeridas por la literatura consultada, se pueden extraer algunas conjeturas de interés respecto del proceso de formación estudiado. Este interés es mayor aún si se piensa que dicho proceso es representativo, no solo de la instrucción aplicada en el centro de referencia, sino posiblemente también de la de otros muchos centros.

En primer lugar, la propuesta de trabajo basada en el libro de texto seleccionado en el centro, Vizmanos et al. (2010), no es idónea para la enseñanza de grupos con dificultades, ya que es excesivamente teórico. Además se centra fundamentalmente en aspectos muy abstractos y prima la sintaxis del lenguaje algebraico sobre el aspecto semántico del álgebra, que es propio de la modelización de situaciones-problema representativas y contextualizadas. Aborda los contenidos desde una perspectiva alejada de la realidad cotidiana mediante una ejercitación vacía de significado e interés para los alumnos, en la mayor parte de los casos. No integra adecuadamente las distintas dimensiones del álgebra, ni plantea su relación con otras disciplinas. Propone un excesivo número de actividades en las que no existe una adecuada graduación de la dificultad de las tareas que facilite a los alumnos construir el conocimiento.

En segundo lugar destaca la necesidad imperiosa de utilizar recursos que mejoren la motivación de los alumnos. Es poco idóneo no considerar el uso de las TIC o de recursos manipulativos como juegos. También hay que incidir sobre las actitudes y las emociones de los estudiantes, que están seriamente dañadas por causas diversas. El uso de recursos apropiados incide en su mejora, pero además hay que plantear un sistema de evaluación que disminuya la ansiedad que producen algunos instrumentos y crear una dinámica participativa en la que se genere confianza a la hora de realizar las tareas o plantear las dudas surgidas.

En tercer lugar, hay que hacer mención especial al tiempo. Esta componente tan importante se ha constatado que carece de la idoneidad suficiente. Dos factores han influido de forma destacada en la escasez de tiempo. En primer lugar, los contenidos institucionales seleccionados han sido excesivos, no solo por lo exigido a nivel curricular, sino más directamente a consecuencia de asumir la propuesta contenida en el libro de texto elegido como apoyo. En segundo lugar, tampoco el nivel de dificultad ha sido el apropiado. Debido a dicha dificultad, el tiempo consumido en explicaciones y actividades de desarrollo ha tenido que ser mayor. A consecuencia de esto, se ha minado afectivamente a los estudiantes que han visto un elevado número de actividades para reforzar unos contenidos vacíos y distantes para ellos. Por eso, quizás, no se han comprometido a trabajar en el tiempo no lectivo paliando la falta del lectivo.

5.2. Limitaciones del estudio

De manera sucinta, hay que destacar que el estudio posee una serie de limitaciones que afectan a las conclusiones obtenidas.

La primera limitación tiene que ver con la muestra elegida, que no solo es de tipo intencional, sino que además corresponde a un grupo reducido y muy especial de alumnos, lo que provoca que las condiciones sean difícilmente replicables.

La segunda limitación arranca de las posibilidades de toma de datos. No fue posible la grabación de las clases, por lo que se perdió la posibilidad de analizar una transcripción de las mismas, debiendo conformarse con las observaciones obtenidas por el investigador que a la vez debía desarrollar la labor docente.

En tercer lugar, otra limitación importante es el relativamente reducido número de referencias que han podido ser consultadas para tan amplio campo didáctico. Esto sesga la posibilidad de obtener mayor número de recomendaciones y de mayor precisión.

Finalmente, faltaría la iteración del proceso de estudio de la implementación del diseño, corregido con las sugerencias aportadas, de cara a comprobar cómo afecta realmente a la mejora de la idoneidad.

5.3. Posibles vías de continuación del estudio

Como solución a las limitaciones anteriormente destacadas, surgen nuevas vías de continuación del estudio planteado.

Una primera puede ser extender el estudio a grupos ordinarios utilizando los medios apropiados para captar los datos.

Otra línea proviene del propio marco teórico utilizado, que, gracias a su amplitud y variedad de herramientas, permitiría enfocar el estudio desde otra perspectiva que analizara las trayectorias seguidas en cada sesión para correlacionarlas con la idoneidad del proceso.

Otra vía podría apuntar a la valoración de los recursos empleados para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje en relación con su incidencia en la idoneidad del mismo. Especial atención merecen, en particular, los libros de texto.

Finalmente, también se puede plantear un estudio más profundo del estado de la cuestión que recopile un más amplio conocimiento didáctico-matemático acerca del tópico abordado.

REFERENCIAS

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics, 9* (2), 19-25.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, *1*, 49-65.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 2, 15-32.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME,* Recife, Brasil.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32* (1), 199 – 219.

Godino J. D., Batanero C. y Font V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D, Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, *8* (1), 46-74.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* Volumen XXVII, Nº 2, 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26* (1), 39-88.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación (5ª ed.)*. México, México: Mc Graw Hill.

Junta de Andalucía (2007a). Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía. *BOJA-2007, 156*, 15-25.

Junta de Andalucía (2007b). Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. *BOJA-2007, 171*, 23-66.

Knuth, E., Alibali, M., Weinberg, A., McNeil, N., y Stephens, A. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable. In J. Cai and E. Knuth (Eds.). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (259-276). Heidelberg, Germany: Springer.

Li, J., Peng, A., y Song, N. (2011). Teaching algebraic equations with variation in Chinese classroom. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (529–556). Berlin/Heidelberg, Germany: Springer.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying student' formulation of simple linear equations. *Journal for research in mathematics education, 24* (3), 217-232.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics 33* (1), 1–19.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE-2007, 5,* 677-773.

National Council of the Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

Olfos, R., y Villagrán, E. (2001). Actividades lúdicas y juegos en la iniciación al álgebra. *Revista Integra, 5,* 39-50.

Rivas, H. R. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Rojano, M. T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Revista Números, 75,* 5-20.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2* (2), 61-74.

Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics teacher*, 420-427.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Revista Números, 77,* 5-34.

Stacey, K. y MacGregor, M. (2000). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *Journal of mathematical behavior, 18* (2), 149-167.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K – 12: 1988 yearbook* (8-19). National Council of Teachers of Mathematics.

Vizmanos, J. R., Anzola, M., Mansilla, S. y Bujanda, M. P. (2010). *Matemáticas 1 ESO Pitágoras, proyecto Conecta 2.0*. Madrid: SM.

Vlassis, J. (2002). The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49* (3), 341–359.

Zabalza, E. L., Lizeaga, J., Wilhelmi, M. R., y Ruiz, O. B. (2009). Resolución de sistemas de ecuaciones por alumnos de primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria con dificultades de aprendizaje. *Indivisa: Boletín de estudios e investigación*, monografía 12, 259-272.

ANEXO I: INDICADORES PARA LA VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (Godino, 2011).

1. Idoneidad epistémica o matemática: *Grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) en el proceso de estudio representan bien a los contenidos de referencia.*

COMPONENTES:	INDICADORES:
Situaciones-problemas	- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	- Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. - Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige - Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos
Argumentos	- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. - Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

2. Idoneidad ecológica: *Grado de adaptación curricular, socio-profesional, apertura a la innovación y conexiones intra e interdisciplinares.*

COMPONENTES:	INDICADORES:
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares

3. Idoneidad cognitiva: *Grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.*

COMPONENTES:	INDICADORES:
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje: Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: - Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

4. Idoneidad afectiva: *Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes*

COMPONENTES:	INDICADORES:
Intereses y necesidades	- Las tareas tienen interés para los alumnos - Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional
Actitudes	- Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. - Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	- Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. - Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

5. Idoneidad interaccional: *Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje***.**

COMPONENTES:	INDICADORES:
Interacción docente-discente	- El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) - Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) - Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. - Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase
Interacción entre alumnos	- Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes - Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos - Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión
Autonomía	- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa	- Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

6. Idoneidad mediacional: *Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.*

COMPONENTES:	INDICADORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido - Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	- El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida - El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora) - El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido
Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida - Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema - Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión

INTERACCIÓN ENTRE FACETAS

COMPONENTES:	INDICADORES:
Epistémica-ecológica	- El currículo propone el estudio de problemas de ámbitos variados como la escuela, la vida cotidiana y el trabajo.
Epistémica-cognitiva-afectiva	- El contenido del estudio (fenómenos explorados en las diferentes áreas de contenido, formulando y justificando conjeturas) tiene sentido para los estudiantes en los distintos niveles y grados. - Los estudiantes tienen confianza en sus habilidades para enfrentar problemas difíciles y mantienen su perseverancia aun cuando la tarea sea compleja. - Se estimula a los estudiantes a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de problemas de manera tal que son capaces de aplicar y adaptar las estrategias que han desarrollado en otros problemas y contextos. - Las tareas que los profesores seleccionan para evaluar son representativas de los aprendizajes pretendidos.
Epistémica-cognitiva mediacional	- El uso de recursos tecnológicos induce cambios positivos en el contenido de enseñanza, en los modos de interacción, motivación y en el aprendizaje de los estudiantes.
Cognitiva-afectiva-interaccional	- Las explicaciones dadas por los estudiantes incluyen argumentos matemáticos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos. - Se incluyen contenidos motivadores, con adaptaciones razonables y apropiadas, que promueven el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Ecológica-instruccional (papel del docente y su formación)	- El profesor es comprensivo y dedicado a sus estudiantes. - El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza. - El profesor tiene amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico-matemáticos

Idoneidad temporal: *Grado en que el tiempo invertido (enseñanza colectiva, tutorización y trabajo individual) es adecuado para el aprendizaje de los conocimientos pretendidos.*

COMPONENTES	INDICADORES
Temporal-epistémico	- El contenido y sus diversos significados se distribuyen de manera racional a lo largo del tiempo asignado al estudio
Temporal-cognitivo	- Los objetivos de aprendizaje tienen en cuenta las etapas de desarrollo evolutivo de los estudiantes
Temporal-instruccional	- La gestión del tiempo instruccional tiene en cuenta los diversos momentos requeridos para el desarrollo de los distintos tipos de aprendizajes (exploración, formulación, comunicación, validación, institucionalización, ejercitación, evaluación)
Temporal-ecológico	- El tiempo asignado al proceso de estudio en el diseño curricular es adecuado para lograr el aprendizaje del contenido programado.

ANEXO II: Programación de aula de matemáticas (Ecuaciones 1º de ESO).

PROGRAMACIÓN DE AULA DE MATEMÁTICAS		
JUNTA DE ANDALUCIA	UNIDAD DIDÁCTICA Nº 7: ECUACIONES	Página: 1 de 13
	PROFESOR: MANUEL SOLERA IGLESIAS	NIVEL: 1º ESO CURSO 2014/15

El presente documento se basa en las directrices marcadas por la programación del departamento de matemáticas de un Instituto de Enseñanza Secundaria del área metropolitana de Granada.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

En relación con los objetivos curriculares oficiales recogidos en la programación didáctica del área para este nivel, se han establecido los siguientes objetivos específicos a alcanzar con el desarrollo de esta unidad:

- O1: Comprender y manejar el lenguaje algebraico valorando su utilidad y precisión.
- O2: Obtener el valor numérico de una expresión algebraica.
- O3: Reconocer la estructura de monomios y polinomios para poder identificarlos y operar con ellos.
- O4: Realizar operaciones básicas con expresiones algebraicas.
- O5: Reconocer igualdades e identidades y su relación con las ecuaciones.
- O6: Distinguir los elementos que caracterizan una ecuación.
- O7: Obtener ecuaciones equivalentes a una dada.
- O8: Identificar y comprobar la solución de una ecuación de primer grado.
- O9: Resolver ecuaciones de primer grado por tanteo y despejando la incógnita.
- O10: Resolver problemas utilizando el lenguaje algebraico con autoconfianza y perseverancia durante el proceso.
- O11: Interpretar ecuaciones y sus soluciones en el marco de una situación problemática mostrando interés y respeto por las soluciones de los demás.

RESUMEN DE CONTENIDOS CONSIDERADOS

Conceptos

- Lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas.
- Valor numérico de expresiones algebraicas.
- Monomios, polinomios. Coeficiente, parte literal (variable), grado
- Igualdades e identidades.
- Ecuaciones. Solución de una ecuación de primer grado.
- Equivalencia de ecuaciones. Regla de la suma y el producto.
- Resolución de ecuaciones.

Procedimientos

- Obtención de la expresión algebraica de un enunciado.
- Cálculo del valor numérico de una expresión algebraica.
- Suma y resta de monomios. Producto de un número por expresiones algebraicas sencillas.
- Obtención de ecuaciones equivalentes mediante la aplicación de las reglas de la suma y el producto.
- Identificación de soluciones de una ecuación.
- Resolución de ecuaciones por tanteo y despejando la incógnita.
- Resolución de problemas algebraicos.

Actitudes

- Valoración de la precisión del lenguaje algebraico para representar situaciones de la vida cotidiana.
- Autoconfianza y perseverancia a la hora de afrontar la resolución de problemas usando métodos algebraicos.
- Interés y respeto por las opiniones y soluciones aportadas por todos los miembros de la clase.

RESUMEN DE COMPETENCIAS BÁSICAS

A lo largo del desarrollo de la unidad didáctica se trabajan varias competencias básicas a través del desarrollo de las actividades propuestas relativas a los contenidos especificados. En la siguiente tabla se expresan las competencias y sus dimensiones correspondientes a cuyo desarrollo se va a contribuir en esta unidad:

COMPETENCIAS BÁSICAS QUE SE TRABAJAN	
COMPETENCIAS BÁSICAS	DIMENSIONES
Comunicación lingüística	Utilizar el lenguaje matemático de forma oral y escrita para expresar los contenidos y pensamientos.
Matemática	Utilizar el pensamiento matemático para interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella.
	Aplicar destrezas y desarrollar actitudes para razonar matemáticamente.
	Comprender una argumentación matemática.
	Expresar y comunicarse a través del lenguaje matemático.
Social y ciudadana	Percibir constructivamente los errores cometidos en la resolución de problemas, para valorar los puntos de vista ajenos al mismo nivel que los propios.
Aprender a aprender	Comunicación eficaz de los resultados del trabajo realizado.

COMPETENCIAS BÁSICAS QUE SE TRABAJAN	
COMPETENCIAS BÁSICAS	DIMENSIONES
Autonomía e iniciativa personal	Utilizar los mecanismos de resolución de problemas para planificar estrategias, asumir responsabilidades y controlar los procesos de toma de decisiones.

SESIONES LECTIVAS

Se prevén 10 sesiones lectivas para tratar la unidad en el aula. Cada sesión tiene una duración efectiva estimada de 50 minutos ya que de los 60 teóricos, al menos 3 a 5 se emplean en el cambio de aula del alumnado y otros 5 a 7 en la bienvenida, control de asistencia, preparación de recursos para el trabajo y solución de dudas puntuales. En cada sesión se proponen actividades para ser realizadas por los alumnos que, en atención a la diversidad presente en el aula, se han programado con distinta dificultad y en número suficiente para que cada alumno realice, en función de sus capacidades, aquellas que pueda en el intervalo temporal definido.

Tras las anteriores consideraciones generales, se detalla la estructura de cada una de las sesiones previstas:

SESIÓN 1: Comienzo de la unidad. Se prevén las siguientes actividades de enseñanza-aprendizaje:

- Actividad 1: Realización por parte del alumnado de un cuestionario con cinco pruebas relativas al tema (ver adenda 1 de la programación de aula). Dicho tema ha debido ser "mirado" por los alumnos previamente en casa de manera autónoma para poder abordar las cuestiones. Tras haber acabado cada alumno esta primera fase. Se procederá a una segunda en la que se contará con el uso del libro de texto en la resolución de la propuesta. De esta forma se pretende determinar cuál es nivel de partida de las capacidades y conocimientos de los alumnos y el grado de comprensión de los contenidos y ejemplos resueltos en el libro de texto (Vizmanos, Anzola, Mansilla y Bujanda, 2010) (55 min). Los alumnos proceden en su mayoría de primaria y a priori deben poseer un nivel entre incipiente (nivel 1) e intermedio (nivel 2) de algebrización según Godino et al. (2014). A la luz de los resultados obtenidos se espera poder corroborar cuál es el nivel concreto que presentan para poder adaptar el grado de exigencia de las actividades al mismo.

SESIÓN 2: Se prevén las siguientes actividades de enseñanza-aprendizaje:

- Actividad 1: Introducción de contenidos relativos al pensamiento algebraico por parte del profesor (importancia y utilidad del álgebra). Exposición de fenomenología (5 min) y ejemplos resueltos (5 min).

- Actividad 2: Resolver al menos un ejercicio (a escoger entre 5 opciones propuestas) de patrones simbólicos y numéricos por parte del alumnado utilizando el pensamiento algebraico (ver adenda 2 de la programación de aula) (15 min).

- Actividad 3: Introducción de los contenidos relativos al lenguaje y expresiones algebraicas (definición, conversiones entre lenguaje natural y algebraico, importancia y aplicación). Definición (5 min) y ejemplos resueltos (5 min).

- Actividad 4: Realización por parte del alumnado de actividades de conversiones entre el sistema de representación constituido por el lenguaje natural y el algebraico y viceversa. Del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicios 3 (p. 120) y 9 (p. 121) y posterior corrección (15 min).

- Actividad 5: Realización **en casa** tareas de refuerzo para entregar en la última sesión en forma de trabajo. El alumnado hará actividades de conversiones entre el sistema de representación constituido por el lenguaje natural y el algebraico y viceversa. Del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicios 4 y 5 (p. 120) y 43 a 47 (p. 130).

SESIÓN 3: Se prevén las siguientes actividades de enseñanza-aprendizaje:

- Actividad 1: Introducción por parte del profesor de los monomios (definición verbal, algebraica y gráfica, importancia y aplicación) y conceptos relacionados mediante ejemplos de expresiones algebraicas (5 min).

- Actividad 2: Identificación justificada por parte del alumnado de ejemplos de monomios presentes en las actividades del día anterior (10 min).

- Actividad 3: Realización por parte del alumnado de actividades relativas al trabajo con monomios procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicio 8 (p. 121) y posterior corrección (10 min).

- Actividad 4: Introducción por parte del profesor del valor numérico de una expresión algebraica (definición, importancia y aplicación) mediante ejemplos resueltos (5 min).

- Actividad 5: Realización por parte del alumnado de actividades de valoración numérica de expresiones algebraicas procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicios 12 y 13 (p. 122) y posterior corrección (20 min).

- Actividad 6: Realización **en casa** tareas de refuerzo para entregar en la última sesión en forma de trabajo. El alumnado hará actividades de valoración numérica de expresiones algebraicas procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicios 14 y 15 (p. 122).

SESIÓN 4: Se prevén las siguientes actividades de enseñanza-aprendizaje:

- Actividad 1: Introducción por parte del profesor de la semejanza e igualdad de monomios (definición, importancia y aplicación) y realización de ejemplos (5 min).

- Actividad 2: Realización por el alumnado de una actividad de identificación de la semejanza de monomios procedente del libro de texto (Vizmanos et al., 2010). Ejercicio 53 (p. 130) y posterior corrección (5 min).

- Actividad 3: Introducción por parte del profesor de la suma y resta de monomios (definición verbal y gráfica, proceso, importancia y aplicación) y realización de ejemplos (5 min).

- Actividad 4: Realización por parte del alumnado de actividades de suma y resta de monomios procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010). Ejercicios 19 (p. 123), 54 (p. 130) y posterior corrección (15 min).

- Actividad 5: Introducción por parte del profesor de los conceptos de igualdad e identidad (definición, importancia y aplicación) mediante ejemplos resueltos (5 min).

- Actividad 6: Realización por parte del alumnado de actividades con igualdades e identidades procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010). Ejercicios 22 y 23 (p. 124), 59 (p. 131) y posterior corrección (15 min).

- Actividad 6: Realización **en casa** tareas de refuerzo para entregar en la última sesión en forma de trabajo. El alumnado hará actividades de suma y resta de monomios y con igualdades e identidades procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicios 55, 57 y 58 (p. 131).

SESIÓN 5: Se prevén las siguientes actividades de enseñanza-aprendizaje:

- Actividad 1: Introducción por parte del profesor de las ecuaciones (definición, importancia y aplicación), sus conceptos asociados (incógnitas, miembros, términos…) y la particularización a las de primer grado aportando ejemplos (10 min).

- Actividad 2: Realización por parte del alumnado de actividades introductorias con ecuaciones procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010). Ejercicio 25 (p. 125) y 61 (p. 131) y posterior corrección (15 min).

- Actividad 3: Introducción por parte del profesor del concepto de solución de una ecuación así como el de resolución y el de semejanza (valorando su importancia y aplicación) y realización de ejemplos (5 min).

- Actividad 4: Realización por parte del alumnado de actividades de soluciones y equivalencia de ecuaciones procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) relacionadas con la explicación dada. Ejercicios 26 (p. 125) y 62 (apartados a, b y c en p. 131) y posterior corrección (20 min).

- Actividad 5: Realización **en casa** tareas de refuerzo para entregar en la última sesión en forma de trabajo. El alumnado hará actividades de soluciones y equivalencia de ecuaciones procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicios 62 (apartados d y e) y 63 (p. 131).

SESIÓN 6: Se prevén las siguientes actividades de enseñanza-aprendizaje:

- Actividad 1: Introducción por parte del profesor de las "reglas de la suma y del producto" para las ecuaciones (definición, importancia y aplicación) aportando ejemplos (10 min).

- Actividad 2: Realización por parte del alumnado de actividades de aplicación de las "reglas de la suma y del producto" para las ecuaciones procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) relacionadas con las reglas explicadas. Ejercicios 30 a 32 (p. 126), 35 y 37 (p. 127) y posterior corrección (40 min).

- Actividad 3: Realización **en casa** tareas de refuerzo para entregar en la última sesión en forma de trabajo. El alumnado hará actividades de aplicación de las "reglas de la suma y del producto" para las ecuaciones procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicios 33 y 36 (pp. 126-127) 64 y 65 (p. 131).

SESIÓN 7: Se prevén las siguientes actividades de enseñanza-aprendizaje:

- Actividad 1: Explicación por parte del profesor del procedimiento de resolución de ecuaciones de primer grado aportando ejemplos (10 min).

- Actividad 2: Realización por parte del alumnado de actividades procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) relacionadas con la resolución de ecuaciones de primer grado según lo explicado. Ejercicios 40 y 41 (p. 128), 66 (p. 131) y 67 (p. 132) y posterior corrección (40 min).

- Actividad 3: Realización **en casa** tareas de refuerzo para entregar en la última sesión en forma de trabajo. El alumnado hará actividades de resolución de ecuaciones procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicios 68 y 69 (p. 132).

- Actividad 4: Resolución de ecuaciones adicionales **en casa** por parte del alumnado aprovechando el seguimiento de la propuesta que se halla resuelta en la dirección http://www.elosiodelosantos.com/sergiman/div/ecua3.html con objeto de mejorar el procedimiento estudiado. Seleccionar 10 de ellas para incluir en el trabajo de refuerzo que hay que entregar en la última sesión.

SESIÓN 8: Se prevén las siguientes actividades de enseñanza-aprendizaje:

- Actividad 1: Introducción por parte del profesor de los procedimientos de resolución de problemas algebraicos y recordatorio de los heurísticos generales mediante la realización de varios ejemplos (15 min).
- Actividad 2: Resolución de problemas algebraicos por parte del alumnado utilizando los enunciados propuestos por el libro de texto (Vizmanos et al., 2010). Actividades 70 y 71 (p. 132) y posterior corrección (35 min).
- Actividad 3: Realización **en casa** tareas de refuerzo para entregar en la última sesión en forma de trabajo. El alumnado hará actividades de resolución de problemas algebraicos procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicios 73 y 74 (p. 132).

SESIÓN 9: Se prevén las siguientes actividades de enseñanza-aprendizaje:

- Actividad 1: Repaso general de los contenidos tratados a lo largo de las sesiones anteriores con realización de ejemplos ilustrativos (20 min)
- Actividad 2: Resolución de problemas algebraicos por parte del alumnado utilizando los enunciados propuestos por el libro de texto (Vizmanos et al., 2010). Actividades 75 y 76 (p. 132) y posterior corrección (30 min).
- Actividad 3: Realización **en casa** tareas de refuerzo para entregar en la última sesión en forma de trabajo. El alumnado hará actividades de resolución de problemas algebraicos procedentes del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) ejercicios 78, 79 (p. 132) y 80 (p. 133).

SESIÓN 10: Se prevé que esta sesión sea dedicada a la evaluación final del alumnado por lo que tendrá lugar al menos una semana más tarde de haber terminado la sesión 9, con objeto de dejar tiempo al asentamiento de los conocimientos y a su preparación para afrontar la prueba, además este tiempo adicional le permitirá ultimar el trabajo de refuerzo consistente en la realización de las actividades del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) que fueron propuestas tras cada sesión y que deben quedar entregadas este día. Por tanto, la única actividad de clase será la siguiente:

- Actividad 1: Prueba escrita de conocimientos y dominio de los contenidos tratados compuesta por 9 ejercicios de manejo básico de dichos contenidos más un problema de aplicación de los mismos (ver adenda 3 de la programación de aula) (55 min).

RECURSOS DIDÁCTICOS

- Aula con pizarra tradicional.
- Libro de texto propuesto para el nivel (Vizmanos et al., 2010).
- Cuaderno del alumnado.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN ESPECÍFICOS

En consonancia con los criterios de evaluación recogidos por la programación didáctica del área, se considera que para determinar cuál el grado de adquisición de los conocimientos por parte del alumno durante el proceso, este debe demostrar que ha alcanzado los objetivos propuestos y es en función de este factor que se podrá hacer la valoración del aprendizaje efectivo aplicando los siguientes criterios específicos:

- Relaciona expresiones algebraicas y enunciados de la vida cotidiana (traduce enunciados verbales a expresiones algebraicas y viceversa).
- Halla el valor numérico de una expresión algebraica.
- Opera correctamente con expresiones algebraicas.
- Reconoce la estructura de los monomios y los polinomios y puede identificarlos y operar con ellos.
- Reconoce las igualdades e identidades (puede diferenciarlas e identificarlas) y las relaciona con las ecuaciones.
- Distingue los elementos que caracterizan una ecuación y sabe nombrarlos e identificarlos.
- Obtiene ecuaciones equivalentes a otra dada.
- Determina cuándo un valor numérico dado es solución de una ecuación.
- Halla la solución de una ecuación de primer grado despejando la incógnita.
- Resuelve problemas utilizando el lenguaje algebraico y en particular, las ecuaciones mostrando perseverancia y autoconfianza.
- Interpreta tanto las ecuaciones como sus soluciones en el marco de una situación problemática respetando las aportaciones de los demás.

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN

Los criterios de evaluación se aplicarán en la observación de la dinámica seguida por los alumnos durante el periodo de instrucción a través de la consideración de los siguientes instrumentos definidos en la programación del departamento:

- Preguntas orales en clase.
- Realización, entrega y exposición de ejercicios y problemas.
- Asistencia y participación en clase.
- Pruebas escritas.
- Modo de enfrentarse a las tareas, refuerzos eficaces, nivel de atención, interés por la materia, motivación, etc.

La calificación de los instrumentos anteriores se realizará en virtud de la aplicación del grado de alcance de cada objetivo propuesto a través de la valoración de los correspondientes criterios. La distribución de la calificación se realizará teniendo en cuenta los siguientes porcentajes definidos en la programación del departamento de matemáticas:

- Integración de aprendizajes formales propios del área de matemáticas (conocimientos): 50%.
- Integración de aprendizajes informales o no formales: hábitos de trabajo en casa, clase, hábitos de estudio y educación en valores (destrezas y habilidades): 15%.
- Progreso del alumno. Utilización autónoma de lo aprendido en diferentes situaciones y contextos, y actitud educativa adecuada (actitudes y espíritu crítico): 15%.
- Otros aspectos: corrección en la comprensión y expresión oral, correcto uso escrito (ortográfico y gramatical), razonamiento lógico, etc.: 20%.

VALORACIÓN DE EVALUACIÓN

Puesto que los objetivos marcados no son exclusivos de este nivel y los conocimientos abordados serán repasados en cursos sucesivos, se considera adecuado y suficiente obtener una puntuación global de 5 sobre 10 una vez aplicados los criterios anteriores a través de los instrumentos descritos.

A cada criterio se le asignará idéntico peso global proporcional al número total de los mismos y se le se asignará un grado de cumplimiento en función de una escala compuesta por cuatro valores que asignan un "0" cuando el alumno no hace nada o la mayor está fuera del dominio de contenidos, un "1" cuando el alumno no cumple el criterio por acumulación de errores graves dentro del dominio de contenidos, un "2" cuando el alumno cumple parcialmente el criterio mostrando una heterogeneidad de resultados buenos y malos en las actividades asociadas y un "3" para su total cumplimiento cuando el alumno a lo sumo comete pequeños errores fundamentalmente de cálculo dentro del dominio de contenidos.

Dado que las tareas iniciales y las de afianzamiento de conocimientos arrojarán peores resultados una vez aplicados los criterios, se considerará la evolución del proceso hasta las tareas finales, valorando los niveles máximos de consecución en cada ítem a lo largo de dicho proceso.

DIFICULTADES PRESENTADAS-MEDIDAS DE MEJORA

ADENDA 1: Prueba inicial

1.- El padre de Claudia tiene 37 años. Esta edad es 4 años más que el triple de la edad de Claudia. Calcula la edad de Claudia.

2.- Trata de escribir una expresión matemática con las siguientes instrucciones. A un número cualquiera se le multiplica por 4, se le resta 6, después se divide por 2 y finalmente se le suma el triple de ese mismo número cualquiera.

3.- Completa el número que falta en el hueco describiendo qué operaciones o razonamientos has hecho para calcularlo.

$7 \cdot 4 - \square = 12$; $\frac{7}{12} = \frac{\square}{15}$; $9(2 + \square) = 27$; $12 + 3(7 - \square) = 7 - 2 + \square$

4.- Si K tomara el valor de 5 y $P = 7\left(\frac{K}{4} - 8\right) + 3K - 1$ ¿cuánto valdría P? y si $T = 4K - 2$ ¿Cuánto tiene que valer K para que T sea 38'4?

5.- Expresa dos ecuaciones equivalentes a $x + 6 = 2x - 3$.

PROGRAMACIÓN DE AULA DE MATEMÁTICAS		
JUNTA DE ANDALUCIA	UNIDAD DIDÁCTICA Nº 7: ECUACIONES	Página: 11 de 13
	PROFESOR: MANUEL SOLERA IGLESIAS	NIVEL: 1º ESO CURSO 2014/15

ADENDA 2: Generalización de patrones sencillos

1.- Observa las siguientes figuras:

Cuenta las barras necesarias para construir cada una y di cuántas serían necesarias para construir la siguiente figura de la serie. Después trata de decir cuántas se necesitarían para construir la figura número 40 y finalmente intenta escribir una expresión que permitiera calcular el número de barras de cualquier figura de la serie.

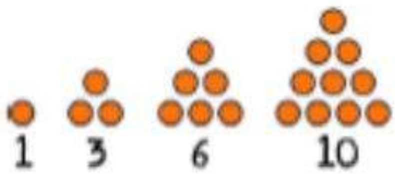
2.- Observa las siguientes sumas:

■ = ◊ + ★ ■ + ◊ = ▲ ■ + ■ + ◊ = ▲ + ★ + ★

¿Cuál de las siguientes expresiones equivaldrían a un cuadrado? Justifica tu respuesta.

a) ▲ + ▲ b) ◊ c) ★ + ★ d) ◊ + ▲

3.- Si se tuviera una sucesión de puntos que estuvieran ordenados según la siguiente sucesión, se podrían contar y darían como resultado lo que se conoce como sucesión de números triangulares. Trata de obtener el valor del siguiente número, el del número que estuviera en la posición 10 y el que estuviera en la posición 70. Intenta elaborar una fórmula que calcule el número de puntos de cualquier posición a partir del valor de ésta. Para finalizar la tarea, trata de hacer lo mismo con cuadrados ¿a qué te suena esa sucesión?



4.- ¿Cuál es el número de diagonales de un polígono de 10 lados?

5.- ¿Cuántos cuadrados diferentes se pueden construir en un tablero de ajedrez?

PROGRAMACIÓN DE AULA DE MATEMÁTICAS		
JUNTA DE ANDALUCIA	UNIDAD DIDÁCTICA Nº 7: ECUACIONES PROFESOR: MANUEL SOLERA IGLESIAS	Página: 12 de 13 NIVEL: 1º ESO CURSO 2014/15

ADENDA 3: Prueba final

1.- Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados:

a) El triple de un número más la mitad del mismo.

b) Un número menos diez es igual al triple de dicho número.

2.- Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios y señala en ellos su grado, su coeficiente y su parte literal.

a) $4xy^3$ b) $3z-4x^2$ c) $x(a+b)^3$ d) $\frac{x}{4}ab$

3.- Calcula el valor numérico de la siguiente expresión para x = 3.

$$1-x-\frac{6-2x}{4}+5$$

4.- Escribe dos monomios semejantes a $4x^2z$.

5.- Razona si las siguientes igualdades son identidades o no.

a) $x-1+4x+3=2+5x$ b) $x+2-4x=5x-2$

6.- Justifica cuál de los siguientes valores es solución de la ecuación $4x-8=6(x-2)$

a) $x=5$ b) $x=2'4$ c) $x=2$ d) $x=-1$

7.- Expresa dos ecuaciones equivalentes a la del ejercicio anterior.

8.- Completa la siguiente tabla:

Ecuación	Incógnita	Coeficiente del término de primer grado	Primer miembro	Segundo miembro
$3-7y=12$				
$18=6t$				
$\frac{d}{7}-14=0$				

9.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 1 = x + 3$

b) $9(2x - 1) - 3(5x - 3) = 18$

c) $5(2x + 3) = 3(3x + 6)$

d) $12 = \frac{3x}{10} + 2$

10.- En un instituto se han colocado varios bancos dispuestos uno detrás de otro. Si se colocan 10 alumnos en cada banco, quedan sin sitio 11 alumnos y si se colocan 11 alumnos en cada banco, quedan 7 plazas disponibles. ¿Cuántos alumnos hay?

ANEXO III: Registro de observaciones por cada sesión implementada.

SESIÓN 01 (13-02-2015)

En esta sesión se llevó a cabo una prueba inicial (cuyo enunciado se puede consultar en la adenda 1 del anexo II) para la cual el alumnado tuvo que mirar el tema de manera autónoma durante el tiempo no lectivo sin ayuda del docente, con objeto de arrojar luz sobre su nivel de partida, dado que se desconoce si fruto de su etapa formativa anterior pudiera haberse desarrollado alguna habilidad que facilitara el tratamiento del tema.

Los resultados más destacados del análisis realizado a la prueba se expresan a continuación:

- Falta uno de los alumnos (A3).
- Otro de los alumnos lo deja en blanco permaneciendo distraído durante toda la sesión. Ante los comentarios del profesor responde que “no sabe nada” y se niega a intentar tan siquiera leerlo.
- Se observa en la mayoría de los alumnos que hicieron la prueba que durante numerosos intervalos dispersos a lo largo de su periodo de trabajo parecían distraerse abandonando su tarea y dejando los útiles de escritura. De hecho, las actividades planteadas se ven poco trabajadas y con ausencia de justificaciones que aportaran fundamento a las respuestas.
- Actividad 1. De entre los alumnos que lo han hecho, destaca que todos tratan de hacerlo por la vía aritmética salvo uno que consigue traducir “el triple de una cantidad” a lenguaje algebraico, pero luego no es capaz de continuar. Del

resto, tan solo dos resuelven correctamente y al menos la mitad expresa un procedimiento ordenado por pasos para plantear y resolver el problema.

- Actividad 2. Uno de los alumnos que intenta hacer la prueba la deja en blanco. Los demás particularizan la secuencia para un número y tan solo uno expresa “el número cualquiera” mediante una letra “x”, aunque como sus compañeros es incapaz de respetar una adecuada jerarquía de operaciones y se limita a traducir secuencialmente los signos de operación cuando estos son descritos.

- Actividad 3. Todos recurren a la aritmética para hallar los resultados salvo uno que se inventa los números. El resultado de todos es en el mejor de los casos que consiguen resolver los primeros casos más fáciles, pero nadie consigue el último.

- Actividad 4. Solo la hacen dos alumnos y ambos entienden en el primer apartado que tienen que sustituir el valor de la variable independiente para obtener la dependiente, pero no son capaces de hacer bien el cálculo por problemas con las fracciones, los signos y los paréntesis. El segundo apartado no son capaces de plantear su solución y recurren a un método de ensayo y error en lugar de invertir la expresión.

- Actividad 5. Cuatro alumnos no la hacen, otros dos interpretan que deben eliminar la letra y sustituirla por algún número que les permita operar, otro resuelve la ecuación por tanteo.

SESIÓN 02 (16-02-2015)

En esta sesión han faltado dos alumnos (A6 y A7) y no hay deberes.

0:00. Introducción de utilidades del álgebra. Primera aplicación, las proporciones, se plantea como ejemplo la regla de tres simple directa trabajada en la unidad anterior.

2:35. Segunda aplicación las ecuaciones, ilustrado con un ejemplo cuyo enunciado versa sobre el cálculo de una edad. Hay pocas y breves interacciones con los alumnos que manifiestan que "es un lío solo para decir la edad".

4:10. Se compara la aritmética con el álgebra y se pone un ejemplo de representación del doble de una cantidad cualquiera (en ese momento se detecta que un alumno que no distingue el doble de mitad y se le explica). El profesor continúa con la explicación del ejemplo de las edades.

5:50. El profesor pregunta a los alumnos si lo han entendido y detecta que A5 está perdido por lo que se lo vuelve a exponer.

7:00. El profesor continúa con los usos del álgebra abordando la resolución algorítmica de problemas.

7:30. El profesor propone un ejemplo de adivinación del resultado de una serie de operaciones partiendo de un número secreto que piensa cada alumno, lo que les sorprende e interesa.

> 8:05. Se deja a alumnos que sigan los pasos de operaciones y traten de averiguar qué se ha hecho.
>
> 13:10 El profesor desvela la solución ante la incapacidad de los alumnos para dar con ella. Algunos se han distraído durante el proceso de reflexión. Se detecta que los alumnos tienen problemas con el uso de las letras en el álgebra en sus distintos significados.
>
> 13:30. Sigue la explicación del ejemplo hasta que llegando al final algún alumno se adelanta manifestando que lo ha entendido.

14:40. El profesor plantea otros usos posibles del álgebra en los juegos y la estadística, para llegar a una definición de álgebra.

15:00. El profesor habla de la utilidad de generalizar regularidades y el empleo de fórmulas que representan distintos fenómenos científicos. Pone como ejemplo la expresión de velocidad en un movimiento rectilíneo uniforme y lo particulariza para un caso aritmético.

17:25. El profesor aborda el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico. Se detecta que A2 está distraído.

18:00. El profesor pone como ejemplo una secuencia de triángulos equiláteros y con la participación de los alumnos se explica hasta obtener su término general.

20:50. El profesor propone otro ejemplo similar al anterior pero con cuadrados sucesivos. Con la participación de los alumnos se obtiene la expresión general, si bien algunos aprovechan para distraerse y molestar.

26:00. Se interrumpe la clase para solucionar la disrupción.

29:20. El profesor reanuda la explicación y relaciona el ejemplo con las cerchas de la estructura de cubierta de un pabellón deportivo. Hay distracciones puntuales que no generan interrupción pero en general identifican el ejemplo con las instalaciones del pueblo y se interesan por el mensaje transmitido.

32:15. El profesor propone un ejemplo de generalización a partir de los números triangulares. Explica cómo se hallan y pide que se continúe la serie. Les deja tiempo para que lo trabajen e inicialmente participan los alumnos y plantean dudas que se van resolviendo, pero poco a poco esa dinámica es aprovechada por varios para distraerse e incluso se producen episodios de poco respeto entre ellos durante el proceso de intercambio de ideas, por lo que el profesor opta por cambiar de tema y dejarlo propuesto para su curiosidad.

43:15. El profesor empieza a explicar los elementos del lenguaje algebraico en comparación con los del aritmético (números, signos de operación y letras).

44:30. El profesor explica lo que es una expresión algebraica y la traducción de lenguaje natural al algebraico.

> 45:00. El profesor propone a los alumnos la realización del ejercicio 3 del libro de texto y les deja tiempo comprobándose que no son capaces de interpretar lo leído, por lo que se les va guiando aprovechando para explicarles cómo hacer comprobaciones con particularizaciones de la solución obtenida.
>
> 47:00. Nuevamente explica el profesor que es una expresión algebraica y la ilustra con un ejemplo que consiste en hallar el número anterior a otro cualquiera.
>
> 47:25. Se trabaja el ejemplo de forma participativa y vuelve a producirse algún episodio disruptivo que debe ser castigado para conseguir acabar la clase.

50:05. El profesor manda los ejercicios del libro de texto 3, 4 y 5 (Vizmanos et al., 2010) como deberes ya que estaba previsto haberlo trabajado en clase y no ha habido tiempo.

50:50. FIN.

SESIÓN 03 (17-02-2015)

En esta sesión ha faltado un alumno (A7) y solo cuatro alumnos hacen los deberes.

0:00. Verificación de la realización de los ejercicios mandados como deberes en la sesión anterior.

1:10. Repaso en interacción con alumnos de lo que es el lenguaje algebraico.

2:10. Repaso del proceso de generalización recordando algunos ejemplos planteados. Los alumnos manifiestan con su expresión y actitud no recordar nada.

3:30. El profesor plantea ejemplos de uso del lenguaje algebraico.

4:30. Se comienza la corrección ejercicio 3 del libro de texto partiendo de la repetición de los apartados ya corregidos en la sesión anterior.

5:55. Se aborda el resto de los apartados del ejercicio 3 en interacción con alumnos para ir corrigiéndolos.

7:20. Se plantea la duda de si hay que poner el signo de multiplicar entre el coeficiente y la parte literal y se interrumpe la corrección para explicarlo.

8:25. Otro alumno expresa su creencia acerca de la duda manifestando que yuxtapone las cifras.

8:45. Se sigue con la explicación a la vista de que la duda está más generalizada y que supone un obstáculo para la ejercitación.

9:25. Se retoma el ejercicio de nuevo hasta su conclusión. Se sigue en interacción con los alumnos proponiendo qué comprobaciones es posible realizar para las opciones que dictan los alumnos. Se observa que a algunos les cuesta distinguir par de impar.

13:07. Se escribe en la pizarra lo que es una expresión algebraica y su relación con lenguaje algebraico. De esta forma se repasa lo tratado el día anterior.

14:40. Se plantea cómo traducir el concepto de número impar.

18:15. Se da un tiempo para que los alumnos copien de la pizarra y resuelvan la tarea planteada. Algunos aprovechan para distraerse, otros preguntan alguna duda y los demás trabajan la tarea. En la corrección en grupo se consigue que interactúen entre ellos poniendo contraejemplos de lo que dicen los otros.

24:45. Se continúa con el resto de ejercicios de deberes y se resuelve el 4 en interacción con los alumnos. Algunos lo tienen bien.

27:40. Se corrige el ejercicio 5 en interacción con los alumnos. Da pie a repasar algunos conceptos de números decimales y fracción generatriz ya que muchos no identifican un cuarto con el valor de 0’25 ni se acuerdan de cómo obtener un decimal a partir de una fracción. También muestran serias dificultades para dividir con decimales. Ante la situación, se valora positivamente las aportaciones hechas por los alumnos de cara a animarles a seguir.

> 32:10. Se concluye el primer apartado tras todas las explicaciones adicionales incluidas. Se comienza con los otros apartados y aunque los alumnos muestran estar muy perdidos, participan como pueden. Se observa que algunos confunden los euros con los céntimos y mezclan las unidades de medida monetaria por lo que no consiguen la expresión adecuada.

> 36:10. Hay que recurrir a un ejemplo aritmético para que consigan entender el ejercicio. Algunos alumnos aprovechan para distraerse.

38:00. Se prescribe el trabajo previsto en el diseño de la instrucción para realizar en casa con la solución de los ejercicios complementarios del libro que hay entregar el día del examen. Se mandan los primeros ejercicios relativos a lo tratado hasta ahora, en concreto las actividades 43 a la 47 del libro de texto (Vizmanos et al., 2010).

40:40. Comienza la explicación por parte del profesor del concepto de monomio: partes y utilidad. Los ejemplos que se ponen proceden de los apartados de los ejercicios recientemente corregidos. Se observa que algunos alumnos están distraídos.

> 42:35. Se pregunta si puede haber un monomio de grado cero. La respuesta dada es errónea, lo que sirve para detectar que no manejan los exponentes ni las propiedades de las potencias, por lo que se repasa brevemente antes de aclarar la respuesta.

45:10. Se habla de polinomios (por combinación de monomios) y de su grado. También se habla de la posibilidad de utilizar distintas letras. Se ejemplifica como obtener el grado de los monomios. Al final manifiestan entenderlo a pregunta del profesor sobre si queda alguna duda.

46:50. Se manda como deberes el ejercicio 8 del libro de texto.

47:25 FIN

SESIÓN 04 (18-02-2015)

No falta ningún alumno pero solo cinco hacen los deberes.

0:00. Se comienza preguntando si hay dudas y todos responden que no, por lo que se revisa quién ha hecho los deberes mientras se pide que repasen lo dado. Se verifica una pérdida del tiempo que desemboca en disrupciones que suponen un importante retraso por lo que al final deben ser atajadas mediante castigo.

10:15. Comienza la clase propiamente dicha definiendo por escrito en la pizarra lo que es un monomio. Se aprovecha para repasar el concepto de número natural ya que muchos de los alumnos no saben a qué se refiere el término.

11:55. Se empieza a corregir el ejercicio 8 del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) que aporta ejemplos y contraejemplos de monomios. Se repasa la notación del producto de un coeficiente por una parte literal sin utilizar el signo de la operación y se repasa también los valores de las potencias con exponente 0 y 1. Se incide especialmente en explicar el grado de un monomio. Se termina de corregir sin participación de alumnado que, a pesar de no haber planteado dudas, demuestra no dominar los contenidos.

15:45. Se escribe en la pizarra para su copia los conceptos que tienen que ver con los monomios (coeficiente, parte literal y grado).

17:05. Se ponen ejemplos de lo anterior. Se observan distracciones por parte de varios alumnos.

18:45. Se deja tiempo para que copien lo escrito en la pizarra.

22:45. El profesor comienza a explicar los monomios semejantes e iguales y escribe las conclusiones en la pizarra. Previamente se ha advertido que los alumnos deben atender y luego copiar.

25:15. Se pone un ejemplo de lo anterior y se pide la colaboración de los alumnos. En general lo hacen bien, aunque alguno llega a pensar que el coeficiente debe ser siempre la mitad para que sea semejante, por lo que se hace una aclaración al respecto.

26:50. El profesor escribe en la pizarra qué son los monomios iguales y luego vuelve a explicarlo y finalmente pregunta si se ha entendido todo (recibe respuesta afirmativa) y si queda alguna duda (recibe respuesta negativa).

28:10. Se plantea y resuelve un ejemplo de igualdad.

28:45. Se continúa haciendo un balance resumido de lo estudiado hasta el momento en todo el curso (números y sus operaciones) para introducir la suma y resta de monomios que configura un polinomio u otro monomio. Se relaciona con la semejanza justificando su utilidad.

30:50. El profesor plantea y resuelve ejemplo de operación con monomios que tienen distinta parte literal.

32:10. El profesor plantea y resuelve ejemplo de suma con la misma parte literal, aprovechando para repasar la semejanza de nuevo.

32:45. Se repasa el concepto de factor común y el proceso de extracción asociado.

33:45. El profesor plantea y resuelve ejemplo de resta de monomios semejantes. Se aprovecha para repasar las operaciones con números enteros ya que se observa que la mayoría no lo dominan.

34:10. El profesor pregunta si hay dudas o algo que no se entienda (la respuesta es negativa) y se deja tiempo para terminar de copiar de la pizarra.

34:50. El profesor enuncia el ejercicio 53 para que sea resuelto por los alumnos en clase por lo que se les deja tiempo para que lo hagan mientras se da alguna aclaración inicial seguida de la corroboración de su entendimiento. Tras copiar lo escrito en la pizarra se van poniendo paulatinamente con el ejercicio. A continuación el profesor anuncia que quien vaya acabando debe hacer también el ejercicio 19. Durante el proceso de resolución algunos alumnos plantean dudas que se resuelven de manera individual, salvo una que consiste en el desconocimiento de que un signo menos fuera de un paréntesis cambia los signos dentro. Esta duda se explica para todos ya que se detecta que es algo generalizado. Además se observan algunos errores relacionados con el poco dominio del concepto de semejanza y se explica de nuevo la noción.

42:00. Comienza la corrección del ejercicio 53 por parte del profesor con participación acertada (en su mayoría) de los alumnos.

46:10. Se pregunta si queda clara la semejanza (la respuesta es afirmativa) y se deja tiempo para completar el ejercicio 19 y también el 54. Se dan algunas explicaciones adicionales a algún alumno en particular acerca de los enunciados.

51:15. Comienza corrección del ejercicio 19 (operaciones de suma y resta con monomios) aprovechando para repasar lo que es una expresión algebraica. Hay poca participación de alumnos.

55:40. Se llega a la recta final de la sesión y como no da tiempo a corregir el ejercicio 54 se manda como deberes y se aprovecha para proponer para el trabajo los ejercicios 55 y 56 del libro de texto (Vizmanos et al., 2006).

56:30. FIN.

SESIÓN 05 (19-02-2015)

En esta sesión ha faltado un alumno (A3) y tres han traído todos los deberes y otros tres solo a medias.

0:00. El profesor comprueba la realización de los deberes y se observa que muchos no los hacen y algunos no los entienden. A continuación repasa brevemente el algoritmo de suma de monomios.

5:38. Se comienza a corregir el ejercicio 54 de suma y resta de monomios. Se aprovecha para repasar qué es la parte literal y se consigue que los alumnos la identifiquen. Se comprueba que algunos se saben el algoritmo que hay que utilizar. Se empieza a corregir con la participación de los alumnos. Alguno dice que es fácil y varios responden bien, pero es necesaria la guía del docente. Se aprovecha para repasar la suma y la resta de números enteros (necesaria para operar con los coeficientes). Se incide en la terminología estudiada hasta el momento y se repasa propiedad asociativa y la conmutativa necesarias para avanzar en la resolución de los distintos apartados.

> 11:30. Se produce una interrupción motivada por el comportamiento de los alumnos.
>
> 13:05. Se observa que algunos alumnos siguen sin entender la propiedad conmutativa a causa de no prestar atención ya que ni siquiera les suena el nombre que ha salido unos minutos antes. Ante esta situación se vuelve a explicar y a continuación se pregunta si está todo claro. La respuesta es afirmativa salvo en el caso de A2. Esto sirve para comprobar que no ha hecho nada en casi un cuarto de hora de clase (al mirar su cuaderno), pero aun así, se vuelve a explicar la suma con un ejemplo, tras lo cual dice entenderlo. También se detecta que hay dudas con si poner el coeficiente uno o no, por lo que se explica el elemento neutro de la multiplicación y se aprovecha para repasar también el concepto de monomio. Manifiestan entenderlo.

17:00. Tras el ejercicio, el profesor aprovecha un relato de avance de los contenidos que serán tratados más adelante para repasar otros ya vistos, concretamente, el lenguaje algebraico, las expresiones algebraicas, los monomios y su suma y resta. De esta forma se ubica a los alumnos y se hace una transición para abordar el siguiente apartado previsto.

20:15. El profesor explica el valor numérico de expresión algebraica. Aprovecha para repetir otra vez el concepto de expresión algebraica, las operaciones básicas y las partes de un monomio. También se introduce el término variable.

21:55. En el desarrollo de la explicación surge una pregunta por parte de A2 que denota que aún no se ha enterado de la adición de monomios, por lo que se hace otro inciso y se explica.

23:40. El profesor explica cómo obtener el valor numérico de una expresión algebraica.

> 24:05. El profesor pone un ejemplo para que los alumnos respondan (se observa que al menos uno de ellos está distraído).
>
> 25:40. En el transcurso de la tarea se detecta que aún no entienden la notación en la que el coeficiente se anexa a la parte literal para indicar de manera abreviada el producto, por lo que se vuelve a explicar.
>
> 28:00. Se vuelve a plantear la pregunta y un alumno termina por resolverlo. Ante la pregunta de si se ha entendido, A1 dice que no lo entiende y se observa que A2 está distraído. Se vuelve a explicar. Se observa que la mayoría no entiende que el valor que se asigna a la x debe estar definido para hallar el valor de la expresión. El profesor continúa proponiendo nuevos ejemplos utilizando cuatro valores que sugieren los alumnos que, en su mayoría, siguen participando activamente.

30:30. El profesor explica la utilidad del valor numérico para utilizar fórmulas poniendo como ejemplo el cálculo del interés simple de un capital en el que aparecen 4 variables (una dependiente) cuyo significado explica.

32:40. Se observa que los alumnos hacen comentarios jocosos de poca utilidad acerca de los datos del ejemplo que se propone.

33:20. Se reconduce la situación hablando brevemente de ahorro, fondos, hipotecas e interés compuesto (que no se desarrolla para no complicar) y se aprovecha para repasar los porcentajes y su transformación en forma decimal.

35:00. Se retoma la valoración numérica de la expresión algebraica propuesta, lo que da pie a repasar la multiplicación con decimales y la aproximación por redondeo.

37:30. Se incide brevemente en la utilidad de las fórmulas y se reflexiona sobre el origen de los valores numéricos en los casos reales con respecto a los ejercicios matemáticos, para finalmente resolver el ejemplo propuesto.

40:00. El profesor manda resolver en clase los ejercicios 12 y 13 del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) y se deja tiempo para ello. A2 dice que no sabe interpretar el enunciado por lo que se explica y se aprovecha para repasar lo que es el valor numérico de una expresión algebraica dando traslado de las conclusiones a la pizarra para que puedan ser copiadas y de nuevo se vuelve a explicar lo escrito ya que se observa que varios están distraídos. Además de dar la explicación del ejercicio, se pone un ejemplo adicional.

43:45. Con la participación de los alumnos se resuelve el ejemplo planteado paso a paso. Surge la necesidad de repasar el significado de una potencia ya que se confunde con un producto de base por exponente. Se observa a varios distraídos.

46:30. Los alumnos provocan una interrupción de 1 minuto tras la que se vuelve a retomar la resolución del ejemplo.

48:40. Tras lo anterior se vuelve a dejar tiempo para solucionar los ejercicios propuestos. En este intervalo se van resolviendo dudas puntuales que indican que aún no se comprende del todo el concepto del valor numérico de una expresión algebraica y tampoco la notación que evita poner el signo de multiplicación entre coeficiente y parte literal, por lo que se explica de nuevo. Se observa que alguno está distraído y ni si quiera se ha molestado en abordar los ejercicios.

52:40. Acabando el tiempo de la sesión se dejan como deberes los ejercicios planteados y se añaden el 14 y 15 como parte del trabajo de refuerzo.

54:20. FIN.

SESIÓN 06 (20-02-2015)

En esta sesión han faltado dos alumnos (A1 y A3) y A2 llega 25 minutos más tarde. Solo tres hacen los deberes.

0:00. Se comienza con la comprobación de la realización de los ejercicios 12 y 13. Se explica una duda inicial sobre la interpretación del enunciado del ejercicio 13 que algunos no entendían.

3:30. El profesor empieza a corregir los ejercicios y aprovecha para explicar de nuevo el valor numérico de una expresión algebraica, la notación del producto de un coeficiente por una variable y el caso de un coeficiente unidad. Se repasa jerarquía de operaciones aritméticas por su interés para este caso.

5:35. El profesor pregunta si se entiende el primer apartado en el que no ha habido participación del alumnado y ante la respuesta afirmativa empieza con otro apartado.

6:10. A7 no entiende la diferencia entre el coeficiente unitario (que no aparece explícito en la expresión) y el valor asignado a la variable (que confunde con un coeficiente), también se observa que A9 está distraído.

8:00. Se termina el segundo apartado y se pregunta si hay alguna duda pues sigue sin haber participación en corrección. Tras la respuesta negativa se aborda el siguiente apartado y se relaciona lo visto hasta el momento recorriendo brevemente los tipos de números estudiados (naturales, enteros, fraccionarios y decimales).

9:10. Interrupción disruptiva.

9:45. Se aborda último apartado y sigue sin haber participación. Se hace necesario repasar el criterio de signos en la multiplicación de números enteros.

10:30. Se pregunta si hay alguna duda y ante la respuesta negativa se pasa a corregir siguiente ejercicio.

12:30. Se pregunta si está todo claro (respuesta afirmativa) y si hay dudas (respuesta negativa) porque tampoco han participado en la corrección de este ejercicio.

12:45. El profesor continúa con la explicación de los conceptos de igualdad e identidad (se pregunta la diferencia entre igual e idéntico y participan debatiendo si es lo mismo que semejante e igual).

14:00. El profesor plantea un ejemplo aritmético aclaratorio. Se explica la equivalencia de expresiones aritméticas y su igualdad y también la identidad.

16:30. Se avanza hacia el significado del álgebra como generalización de la aritmética y se definen ambos tipos de expresiones.

17:15. Interrupción disruptiva.

17:40. A modo de conclusiones de lo explicado, el profesor escribe en la pizarra las definiciones anteriores para ser copiadas por alumnos.

19:40. El profesor vuelve a explicar las identidades e igualdades algebraicas y escribe en la pizarra un ejemplo de cada, haciendo partícipes a alumnos e invitándoles a que den sus argumentos. Aprovecha para repasar la suma y la resta de monomios para enlazarlo con los nuevos contenidos.

23:25. El profesor escribe de nuevo en la pizarra la definición de identidad algebraica, la vuelve a explicar y pone otro ejemplo.

25:35. El profesor pone en la pizarra una igualdad para ver si los alumnos ven la diferencia y les pregunta. El resultado es que no saben justificar si es igualdad o no ya que les despista que la x aparezca en los dos miembros, por lo que se decantan por buscar valores numéricos concretos en lugar de utilizar la letra. Esto motiva que se vuelvan a explicar los conceptos a medida que se soluciona el ejemplo propuesto.

28:30. El profesor vuelve a pedir la identificación de la igualdad y se constata que no entienden la vinculación de dos expresiones algebraicas por el signo igual, por lo que se vuelve a explicar la igualdad empleando el ejemplo propuesto, además se repasan los conceptos de expresión algebraica, coeficiente, parte literal y grado.

31:00. El profesor pregunta si se ha entendido la explicación y los alumnos responden afirmativamente, pero el profesor no conforme con la respuesta, pregunta si el ejemplo es una identidad y como los alumnos no lo saben, vuelve a explicarlo y pone otro ejemplo en el que hace participar a los alumnos. Como A7 sigue sin enterarse, se vuelve a explicar otra vez desde el principio.

33:50. El docente nuevamente pregunta si se entiende y vuelven a responder afirmativamente, por lo que se sigue con otro ejemplo y se relaciona con valor numérico de una expresión algebraica.

35:10. Al finalizar el docente pregunta si se ha entendido y se ofrece para volver a explicarlo con nuevos ejemplos pero los alumnos reniegan y se da por zanjado.

35:30. El profesor nombra la noción de ecuación (que puede ser explicada a partir de lo entendido) y empieza a mostrar la relación que existe con lo visto y habla de solución de la ecuación. Todo esto como adelanto para ver la utilidad de lo visto. Se aprovecha para comentar la relación entre el grado y el número de soluciones y se acaba con la definición formal de qué es la solución de una ecuación.

37:10. El profesor vuelve sobre la igualdad y la identidad y pone otros dos ejemplos.

38:30. El profesor pregunta si queda claro y tras la respuesta afirmativa, manda los ejercicios 22 y 23 del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) para resolverlos en clase. Se deja tiempo durante el cual se solucionan algunas dudas puntuales que desembocan en la explicación del enunciado del ejercicio de forma general hasta que se entiende.

44:05. El profesor manda el 59 a los que han acabado los anteriores.

45:55. El profesor comienza la corrección del ejercicio 22 con participación bastante acertada de los alumnos.

47:05. Ante la finalización de la sesión se dejan los ejercicios 23 y 59 como deberes y se plantea el 57 y el 58 para el trabajo de refuerzo.

47:45. FIN

SESIÓN 07 (23-02-2015)

En esta sesión no han faltado alumnos y solo uno trae los deberes al completo y otros tres a medias.

0:00. Comprobación de la realización de los deberes.

0:30. El profesor comienza a corregir ejercicio 23 con colaboración de los alumnos que no recuerdan las condiciones de igualdad, por lo que se pide que repasen sus apuntes. En el caso de la identidad va mejor aunque se observa a algunos alumnos distraídos. Se aprovecha para volver a explicar las condiciones de igualdad e identidad usando como ejemplos los ejercicios.

2:45. El profesor llama la atención a A1 que está distraído.

3:20. Continúa la corrección con colaboración activa de los alumnos aunque se detecta que A7 no sabe sumar monomios por lo que se vuelven a aclarar las condiciones. Los alumnos debaten entre ellos para ver quien se acerca a la respuesta, pero al final debe intervenir el profesor y aprovecha para repasar la semejanza, la parte literal y el coeficiente de los monomios y de nuevo la suma. Se ponen dos ejemplos.

8:40. Se sigue con otro apartado del ejercicio donde también se verifica la colaboración activa de los alumnos (incluyendo algunos debates entre ellos si bien también aparecen recriminaciones y hay que intervenir). Existen dudas con el signo de los números por lo que se aprovecha para explicar la suma y resta de números enteros. Se observa que aún no se domina el valor numérico de una expresión algebraica por lo que también se vuelve a explicar (poniendo un ejemplo). A9 sigue distraído igual que A1, A5 y A7, por lo que se interrumpe la explicación de 13:30 a 14:40 para captar su atención. Se observa que aún no se comprende la idea de la letra como variable por lo que se da una nueva explicación donde se incluye de nuevo lo anterior para intentar recuperar a los que se habían perdido por estar distraídos.

17:45. Los alumnos preguntan cómo se puede saber el valor para el que se cumple una igualdad y se aprovecha para introducir el concepto de solución de una ecuación y también para repasar lo visto hasta ahora. Se habla también de la incógnita.

19:00. El profesor define qué es una ecuación varias veces. A algún alumno le suena que ha salido el término pero no lo identifica.

20:30. El profesor escribe las definiciones en la pizarra y propone un ejemplo de grado 2 para repasar los conceptos asociados a los polinomios. También se repasa la igualdad e identidad de expresiones algebraicas.

22:10. El profesor define las ecuaciones de primer grado y lo pone en la pizarra. Se observa que algunos alumnos se distraen mientras esperan a copiar de la pizarra.

23:25. El profesor pone un ejemplo que acompañe a la definición dada y lo explica. Después pone otros cuatro ejemplos para mostrar las distintas formas en que se puede expresar una ecuación de primer grado.

24:45. Los alumnos se van por las ramas con la pregunta de un modelo de coche "X+" y se aprovecha para relajar un poco la clase hablando de ese tema.

27:10. Se retoma el discurso y se definen los miembros 1º y 2º de una ecuación. Se observa que mientras se escribe en la pizarra varios alumnos se distraen hasta tener que llamarles la atención.

29:05. El profesor pregunta si está todo claro y ante la respuesta afirmativa, pasa a definir en la pizarra el término de grado 1 y el término independiente o de grado 0. Vuelven a aprovechar para distraerse algunos alumnos.

30:55. El profesor define variable e incógnita y solución también en la pizarra mientras sigue la distracción.

33:15. Se acaba de escribir en la pizarra y se deja un tiempo para que los alumnos copien.

34:20. El profesor repasa qué es el coeficiente y los monomios y se sigue dejando tiempo para que copien.

37:20. El profesor pregunta a los alumnos qué creen que es resolver una ecuación y éstos intentan definirlo. Se concluye con la definición formal.

38:15. El profesor avanza cuál sería el proceso de resolución para vincularlo con lo ya explicado hasta el momento.

39:15. El profesor define las ecuaciones equivalentes mientras muchos están distraídos. Se da traslado a la pizarra de lo expuesto y se explica cuál es la utilidad de la equivalencia para la resolución de ecuaciones. Aprovecha para adelantar el término reglas de la suma y el producto que explicará más adelante.

41:25. El profesor pone dos ejemplos de ecuaciones equivalentes y explica la forma de obtenerlas.

42:45. El profesor manda hacer el ejercicio 25 del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) en clase y explica el enunciado porque los alumnos no lo entienden.

44:45. El profesor comienza la corrección ya que ha observado que algunos ya lo han solucionado y los demás no quieren trabajarlo (de hecho se distraen mientras se explica la solución).

46:10. El profesor explica cuál es la utilidad de las ecuaciones como mecanismo de solución de problemas.

47:05. Ante la inminente finalización de la sesión el docente manda los ejercicios 26, 61 y 62 del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) como deberes.

48:50. FIN

SESIÓN 08 (24-02-2015)

En esta sesión han faltado dos alumnos (A2 y A3) y dos alumnos traen los deberes al completo y otro a medias.

0:00. El profesor pide los deberes para ver lo que han trabajado los alumnos y la mayoría no los trae.

2:55. El profesor comienza a corregir los ejercicios con la colaboración de los alumnos (se observan algunas recriminaciones a sus intervenciones entre ellos). Demuestran no saber qué es la equivalencia de ecuaciones.

4:30. Se observa un episodio disruptivo que interrumpe la clase y que apaciguarlo mediante castigo.

5:20. El profesor repasa el concepto de equivalencia de ecuaciones y aprovecha como ejemplos los apartados del ejercicio.

7:50. El profesor empieza a corregir el ejercicio 61 que plantea trabajar la identificación de la incógnita y los dos miembros. Hay participación de los alumnos para solucionarlo y se observa que no tienen claro los miembros por lo que se explica con un ejemplo tras el que se pregunta si está claro, como algunos contestan que sigue habiendo dudas, se explica otra vez diferenciándolos de los conceptos de término y coeficiente porque los confunden con el miembro.

11:55. Antes de abordar el ejercicio 62, el profesor repasa qué es una solución de una ecuación y lo que es el valor numérico de una expresión algebraica y la incógnita.

12:45. Se comienza con la corrección del ejercicio 62 con la participación de los alumnos.

13:35. Tras el primer apartado se hace necesario explicar otra vez que es la solución de una ecuación y qué es una igualdad y una identidad algebraicas.

14:35. Se aborda el siguiente apartado con A7, que está despistado y no entiende el ejercicio, pero parece haberse enterado de lo que es la solución de una ecuación. Aun así, se ponen otros ejemplos de valores de la incógnita que no son solución a modo de contraejemplo.

17:10. Se empieza el siguiente apartado que se encarga a A4 que no se ha enterado de la obtención del valor numérico, ni de la notación en la que no se pone el signo de multiplicación al producto, por lo que se le explica y entonces sustituye bien. Se vuelve a explicar con ejemplos cuando es solución y cuando no lo es.

20:45. Se encarga a A5 el siguiente apartado. A1 dice que no lo entiende. A5 no sabe qué hacer, no lo entiende y tampoco entiende la notación en la que en el producto se ahorra el signo, por lo que se vuelve a explicar. Alguno tiene problema con la multiplicación por cero que confunden con uno y además no entiende bien el hecho de que no cumplir la igualdad es motivo para desechar el valor como solución. El profesor da la explicaciones sobre lo observado y calcula la solución (que es un número decimal), pidiendo a los alumnos que demuestren si lo es o no realmente. Entre varios lo consiguen a duras penas. Se vuelve a repasar las condiciones que debe cumplir para que un valor sea solución.

28:00. Se corrige el último apartado. Se encarga A1 que se equivoca en las cuentas y A7 no sabe de dónde sale el valor que da el ejercicio para la incógnita por lo que se les explica. En general parecen haber entendido el concepto de solución pero aun así el profesor pregunta si lo han comprendido y la respuesta es afirmativa.

29:55. Se termina el ejercicio y A7 pregunta por algo intranscendente que interrumpe la clase.

30:45. El profesor manda para el trabajo de refuerzo en casa el ejercicio 63.

31:20. El profesor se interesa por la marcha del trabajo y la mayoría no lo ha empezado.

32:15. El profesor presenta los contenidos que se van a ver en esta sesión, en concreto las reglas de la suma y del producto para la obtención de ecuaciones equivalentes.

32:45. El profesor escribe en la pizarra para copiar la regla de la suma mientras se observa que varios están distraídos por lo que se les llama la atención.

34:30. El profesor repasa la concepción de ecuación equivalente.

34:45. Se comienza a poner un ejemplo para lo que se le pide a A5 que se invente una ecuación de primer grado pero no sabe, por lo que se le pide entonces una expresión algebraica, pero tampoco sabe por lo que el docente vuelve a repetir lo que es para ver si así lo consigue, pero tarda un poco y le soplan una muy simple. Se explica que hay que igualarla a otra que se le pide a A7 que lo consigue. Se aprovecha para repasar miembro, término, coeficiente y grado.

38:45. El profesor usa el ejemplo para aplicar la regla de la suma repasando la definición dada y también la equivalencia. Se detecta que sigue habiendo problemas con la suma de números enteros por lo que se repasa, así como el concepto de parte literal.

41:00. El profesor dice para qué sirve la regla de la suma y cómo utilizarla para simplificar determinadas ecuaciones.

41:50. El profesor pide a los alumnos que apliquen la regla de la suma sobre un ejemplo planteado para cambiar la ecuación a otra equivalente más simple. Se lían con cómo eliminar un número sumando otro pero lo consiguen y se explica cómo se elimina un término.

44:35. El profesor plantea otra aplicación de la regla de la suma para ver si se elimina otro término, pero los alumnos no lo ven a pesar de las pistas dadas, así que se les resuelve y se detecta que les sigue costando la suma de monomios.

48:35. El profesor introduce la explicación de la regla del producto para terminar obteniendo la solución de la ecuación del ejemplo propuesto anteriormente.

49:10. El profesor escribe en la pizarra un enunciado de la regla del producto mientras varios aprovechan para distraerse.

50:20. El profesor propone realizar un ejemplo para lo que pide a A6 una ecuación de primer grado que sabe poner. Se le empieza a aplicar la regla del producto y se explica que en la multiplicación/división se ve afectado todo el miembro a diferencia de la suma que actúa sobre el término semejante. Se pone otro ejemplo de aplicación de la regla del producto con una fracción.

54:00. Se retoma el ejemplo de la regla de la suma que quedó a medias y se aísla un valor numérico para una x lo que se identifica con la solución.

56:15. FIN (no se manda deberes).

SESIÓN 09 (25-02-2015)

En esta sesión han faltado cuatro alumnos (A2, A3, A4 y A6) y no hay deberes.

0:00. El profesor repasa las reglas de la suma y el producto y su utilidad, también la equivalencia de ecuaciones y su solución.

3:20. El profesor manda los ejercicios 30, 31 y 32 del libro de texto (Vizmanos et al., 2010) y se deja tiempo a los alumnos para hacerlos. Hay interacción entre alumnos y se resuelven algunas dudas puntuales por parte del profesor en relación con lo explicado. Se observa que las ecuaciones más fáciles alguno las resuelve de forma intuitiva (mediante un método de ensayo y error) por lo que se vuelven a explicar las reglas y la forma de comprobar las soluciones. Se repasa también el concepto de igualdad e identidad algebraicas.

9:30. El profesor explica el símil de la balanza y soluciona un ejemplo de cómo aplicar las reglas de la suma y el producto para obtener la solución de una ecuación.

13:20. Se pregunta si queda claro lo explicado y tras la respuesta afirmativa se deja otra vez tiempo para que solucionen los ejercicios. Dudan cómo aplicar la regla de la suma del primer ejercicio por lo que se vuelve a explicar resolviendo el primer apartado y se comprueba que es solución de la ecuación, pero aún hay gente que no se entera porque están distraídos.

15:55. A8 dice que todavía no se entera y se vuelve a explicar resolviendo otro apartado.

18:40. El profesor vuelve a explicar el concepto general de la regla de la suma y la equivalencia. También la trasposición de términos entre los miembros de una ecuación como alternativa, pero a los alumnos les resulta más lioso por lo que se vuelve a las reglas.

20:30. Como A1 no se entera aún, se le vuelve a explicar varias veces con la ayuda de distintos ejemplos.

23:55. A7 aún no se entera por lo que el profesor se lo explica de nuevo corrigiendo algunos apartados más. También se explica cómo operar con opuestos y números enteros ya que no los dominan.

28:10. De nuevo se les deja que sigan trabajando.

29:45. A1 vuelve a preguntar una duda sobre el ejercicio y se le explican las operaciones con números enteros que no domina.

31:15. El profesor llama la atención a A7 que no hace nada y revisa cómo va.

32:55. El profesor vuelve a explicar la regla de la suma resolviendo otro apartado porque comprueba que siguen sin entenderla.

35:45. De nuevo se corrige otro apartado explicando lo mismo.

37:50. El profesor hace recapitulación de lo hecho y vuelve a explicar la regla de la suma y su aplicación.

39:35. Se vuelve a dejar más tiempo para seguir haciendo los ejercicios planteados.

40:30. El profesor resuelve otro apartado y vuelve a repetir la explicación. Se observa que alguno se lía cuando la solución de la ecuación es cero.

43:30. Se deja más tiempo para la resolución de los ejercicios planteados.

44:20. El profesor deja como deberes los ejercicios pendientes y pide que se aborde en clase el ejercicio 35, pero primero explica cómo cambiar el signo negativo de la x. Para ello, termina de corregir el ejercicio 30. A lo largo de las explicaciones se ha considerado indistintamente la posición de la x en el primero o el 2º miembro.

46:00. Se comienza con el ejercicio 35 para ver la regla del producto combinado con la de la suma, por lo que se explica la regla del producto resolviendo un apartado del ejercicio.

48:25. El profesor resuelve otro apartado para explicar de nuevo lo mismo. Observa que en general los alumnos no saben hacer bien operaciones básicas.

51:00. Con los deberes claros, se manda para el trabajo los ejercicios 33, 36, 64 y 65.

51:20. FIN.

SESIÓN 10 (03-03-2015)

En esta sesión no han faltado los alumnos y cinco traen los deberes completos y otro a medias.

0:00. Comienza la sesión con la corrección de los deberes. En concreto con el ejercicio 31. Primero se repasa la suma de monomios, la regla de la suma, la equivalencia y solución de una ecuación.

2:15. Se aplica la regla de la suma con la colaboración con los alumnos. Se detecta que algunos no se aclaran.

3:00. El profesor repasa como comprobar que un valor de x es solución de la ecuación.

3:20. Se sigue con el siguiente apartado del ejercicio 31 con la colaboración de los alumnos.

4:25. Siguiente apartado. Continúa la participación activa de los alumnos.

5:15. Siguiente apartado también con participación aunque se observa que bastantes están distraídos y que A2 no hace nada, por lo que hay que llamarle la atención aunque no responde de manera inmediata.

7:50. Se aborda el siguiente apartado en el que continúa la participación pero también las distracciones que desembocan en molestia que hay que atajar con el castigo de A2 y A9.

9:10. Se empieza con la corrección del ejercicio 32, para lo que previamente el profesor repasa algunas nociones como las de coeficiente, regla del producto y los casos en que la incógnita quedaba aislada y negativa en uno de los miembros de una ecuación que hay que explicar dos veces por que en la primera los alumnos manifestaron no entenderlo.

14:50. El profesor menciona que también se puede usar la trasposición que se verá más adelante y sigue con la corrección. La participación en este caso es muy pequeña.

18:20. Se aborda el último apartado en el que si hay participación. Además se comprueba la solución y se aclara el signo menos de una incógnita aislada en uno de los miembros ya que aún sigue ocasionando dificultades.

21:30. El profesor explica de nuevo la regla del producto antes de hacer el ejercicio 35.

22:20. El profesor comienza a corregir el ejercicio 35 invitando a participar a los alumnos pero con poco éxito. Hace hincapié en que la incógnita puede estar en cualquiera de los dos miembros y la igualdad se lee indistintamente.

> 25:00. El profesor explica las operaciones con números enteros ya que observa que son un obstáculo para la resolución del ejercicio, tras lo que pregunta si está claro a lo que todos responden que sí salvo A1 que tiene alguna duda puntual con las sumas y restas que se le aclaran.
>
> 27:00. Se retoma la corrección del ejercicio y A1, que no se entera, plantea dudas sobre la resolución que tiene en su cuaderno. El problema sigue residiendo en las operaciones. En este caso relacionado con la propiedad conmutativa y el inverso de una fracción, por lo que el docente opta por hacer una explicación para todo el alumnado.
>
> 31:10. Se retoma la resolución del ejercicio y se finaliza preguntando si todo está claro, a lo que se responde afirmativamente.

33:35. El profesor explica verbalmente el procedimiento para la resolución de ecuaciones.

> 34:30. El profesor apunta en la pizarra los pasos a seguir para la resolución de ecuaciones.
>
> 36:20. El profesor pone un ejemplo de ecuación de primer grado con todos los elementos (denominadores, paréntesis…).

41:40. El profesor manda hacer en clase los ejercicios 40 y 41 y deja tiempo a los alumnos para que los trabajen en clase.

46:30. El profesor explica la notación que expresa el producto de un coeficiente por una incógnita sin utilizar el signo de operación y el trabajo con paréntesis ya que detecta que no está claro.

47:00. En el tramo final de la sesión el profesor manda como deberes para casa los ejercicios 66 y 67 y para el trabajo de refuerzo el 68 y 69.

48:30. FIN

SESIÓN 11 (04-03-2015)

En esta sesión no han faltado los alumnos y solo trae uno los deberes al completo y otro a medias.

0:00. El profesor empieza a corregir el primer ejercicio mandado como deberes con la participación de los alumnos. Aprovecha para repasar el proceso de la multiplicación por números negativos de un paréntesis porque observa que plantea dificultades.

3:55. Una vez que se han simplificado las expresiones, se está en disposición de aplicar las reglas de la suma y del producto que previamente vuelve a explicar el docente.

4:55. Sigue la corrección del ejercicio.

6:40. El profesor avanza que se va a ver trasposición de términos para la solución de ecuaciones.

7:00. El profesor repasa el símil de la balanza virtual.

7:40. El profesor explica la trasposición de términos para la solución de ecuaciones de primer grado.

8:25. El profesor retoma la corrección del ejercicio pero sin conseguir la participación de los alumnos.

12:20. Tras la corrección el profesor pregunta si se ha entendido todo y si hay alguna duda y A1 dice que se lía simplificando las expresiones por lo que se le explica.

13:20. El profesor comienza a corregir el ejercicio 41 con la participación de los alumnos.

18:30. Cuando se termina la corrección el profesor pregunta si todo está claro y tras la respuesta afirmativa de los alumnos, explica la diferencia y las ventajas de resolver problemas utilizando el álgebra.

19:40. El profesor empieza a corregir el ejercicio 66 con la participación del alumnado.

> 24:55. El profesor detecta que sigue habiendo problemas con los números enteros y explica las operaciones básicas con ellos.
>
> 26:50. Se retoma la corrección del ejercicio tras llamar la atención a dos alumnos distraídos.
>
> 27:25. El profesor deja tiempo de clase a los alumnos para hacer el último apartado del ejercicio 66 ya que no lo han trabajado.
>
> 28:55. El profesor resuelve algunas dudas puntuales relativas a reducción de ecuaciones con paréntesis y denominadores.
>
> 32:30. El profesor comienza a corregir el apartado mandado con la participación de los alumnos.

36:20. El profesor repasa multiplicación de fracciones para solucionar una duda de A7.

37:00. El profesor comienza a corregir el ejercicio 67 con la participación de los alumnos.

> 41:25. El profesor vuelve a explicar la suma de números enteros que sigue planteando dificultades a los alumnos.
>
> 42:20. Se retoma la corrección del ejercicio 67.

47:25. Tras acabar la corrección, el profesor da unas indicaciones para la entrega del trabajo de refuerzo que se debe haber realizado en casa.

48:00. El profesor resuelve el primer apartado del ejercicio 69 (mandado para el trabajo de refuerzo en casa), a petición de A5, para repasar cómo se trabaja con ecuaciones que tienen denominadores.

51:20. El profesor en la recta final de la sesión explica que las soluciones de una ecuación pueden ser fraccionarias y decimales y adelanta que solo queda centrarse en problemas.

52:00. FIN

SESIÓN 12 (05-03-2015)

En esta sesión ha faltado un alumno (A3) y no hay deberes.

0:00. El profesor comienza introduciendo la utilidad de las ecuaciones para la resolución de problemas empleando el razonamiento algebraico apoyándose en un ejemplo del día anterior. Se destacan las reglas de resolución de problemas empleando álgebra para lo que se repasa el concepto de traducción del lenguaje natural a algebraico, expresión algebraica, operaciones con monomios, ecuaciones y sus soluciones, semejanza y proceso de resolución de ecuaciones, poniendo un ejemplo de cada uno.

4:50. El profesor aborda el problema 70 como ejemplo de resolución. Se estructura el problema en datos, demanda, planteamiento, cálculos y solución. Los alumnos no intervienen aunque el docente les va haciendo preguntas para tratar de que hagan el seguimiento. No obstante, algunos se distraen.

> 15:10. Los alumnos manifiestan que los problemas en general son liosos y el docente opta por repasar rápidamente lo más relevante de lo hecho. También se aprovecha a continuación para explicar otras traducciones al lenguaje algebraico.

18:05. Terminada la explicación introductoria el profesor manda a los alumnos que hagan el problema 71 para lo que les deja tiempo lectivo.

> 21:00. El profesor resuelve una duda planteada por A7 relativa a que no tiene claro qué es una incógnita por lo que se le ponen ejemplos, así como de las relaciones entre ellas.
>
> 22:30. A1 plantea una duda sobre la interpretación del enunciado y A9 trata de contestarle, como no lo hace bien, interviene el profesor y da una explicación general del mismo.
>
> 23:20. Se observa que A4 trata de hacerlo por tanteo sin éxito. Todos intercambian ideas pero no llegan a nada porque no se fijan en las condiciones ni las interpretan.
>
> 25:30. El profesor comienza la corrección en colaboración con los alumnos que ponen en común el trabajo realizado. Se detecta que no saben hacer traducciones simples por lo que se hace hincapié en ese proceso intentando hacerles razonar a ellos.

32:20. El profesor manda hacer en clase el problema 75, dejando para el trabajo de refuerzo de casa el 73 y 74.

33:00. El profesor plantea cuando poner el examen y se abre debate para fecharlo.

> 35:50. El profesor da una explicación del enunciado del problema porque los alumnos dicen que no lo entienden.
>
> 37:00. El profesor orienta a los alumnos para la identificación de las partes del problema mientras muchos están distraídos.
>
> 38:00. El profesor comienza a resolver el problema porque los alumnos no son capaces de solucionarlo y a pesar de ello varios siguen distraídos.

42:00. El profesor manda el problema 76 para hacer en clase.

42:50. El profesor manda para el trabajo de refuerzo los problemas 78, 79 y 80 y pide a los alumnos que continúen con el problema en curso pero muchos se distraen.

46:40. El profesor procede a solucionar el problema con la colaboración forzada de los alumnos.

48:05. FIN.

SESIÓN 13 (11-03-2015)

En esta sesión se llevó a cabo una prueba escrita final (cuyo enunciado se puede consultar en la adenda 3 del anexo II) para la cual el alumnado tuvo una semana (en horario no lectivo) para trabajar y afianzar los conocimientos. Ese mismo día estaba prevista la entrega de un trabajo que consistía en la solución a una serie de ejercicios del libro de texto que el profesor había propuesto para el refuerzo de los contenidos abordados en cada sesión.

Hay que destacar una serie de observaciones generales antes de analizar los resultados de la prueba en sí:

- Faltó un alumno que por tanto no hizo la prueba (A3).
- El mismo alumno que en el caso de la prueba inicial, A2 (que además de negarse a ejercitarse, ha mostrado el mayor índice de distracción), deja las actividades en blanco permaneciendo distraído durante toda la sesión. Ante los comentarios del profesor responde que "no sabe nada" y se niega a intentar tan siquiera leerlo.

- Otro alumno solo trató de hacer la actividad 8 y la hizo mal demostrando, entre otras cosas, que no tiene claro el concepto de incógnita, ni el de coeficiente ni el de miembros de una ecuación, a pesar de haber sido repetidos a lo largo de la instrucción en múltiples ocasiones a lo largo del proceso. El resto del tiempo permaneció distraído dejando los enunciados a un lado, sin interés manifiesto por volver a abordarlo, contestando a los comentarios del profesor que "no sabía más".

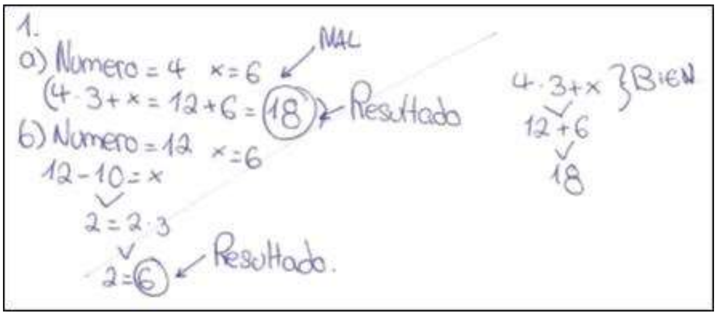
- Se observa en la mayoría de los alumnos que hicieron la prueba que durante numerosos intervalos dispersos a lo largo de su periodo de trabajo parecían distraerse abandonando su tarea y dejando los útiles de escritura. De hecho, las actividades planteadas se ven poco trabajadas y con ausencia de justificaciones que aportaran fundamento a las respuestas.

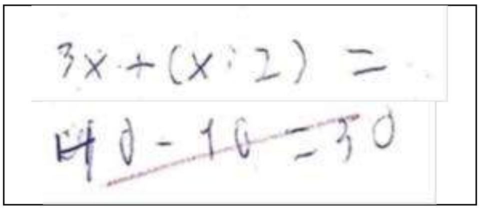
- Nadie entregó el trabajo de refuerzo, luego se interpreta que el trabajo fuera del horario lectivo fue escaso o nulo.

En lo que se refiere al análisis de cada actividad realizada, se aportan las respuestas de cada alumno y se comenta lo más relevante.

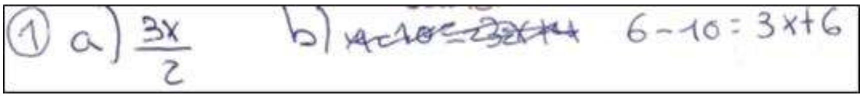
Actividad 1.

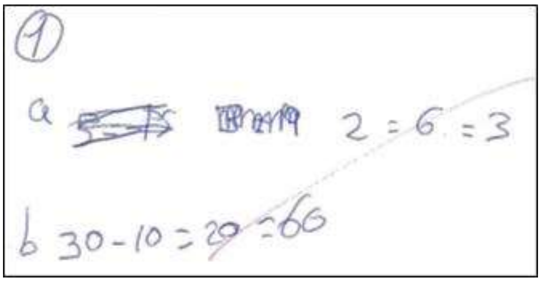
Dos alumnos hacen una interpretación puramente aritmética y en seguida dan un valor numérico concreto sobre el que trabajar, pero no son capaces de interpretar bien las secuencias descritas.



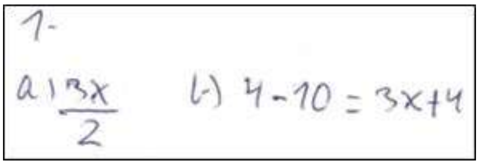


Otros dos alumnos son sospechosos de haberse copiado puesto que sus respuestas son erróneamente paralelas. En el primer apartado interpretan algebraicamente bien el “triple de un número” pero luego ambos lo dividen por dos siendo incapaces de interpretar la segunda parte de la sentencia. En el segundo apartado, ambos recurren a valores numéricos para interpretar la igualdad descrita y no son capaces de hacerlo puesto que lo mezclan en el segundo miembro con la expresión algebraica del “triple de un número” que sí parecen haber entendido. La forma en que lo expresan es idéntica salvo que cambian de valor numérico usado.

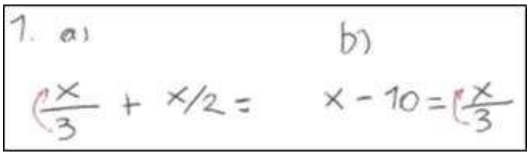




Otro alumno hace correctamente el primer apartado pero en el segundo recurre a valores numéricos expresando aritméticamente la sentencia de manera errónea.



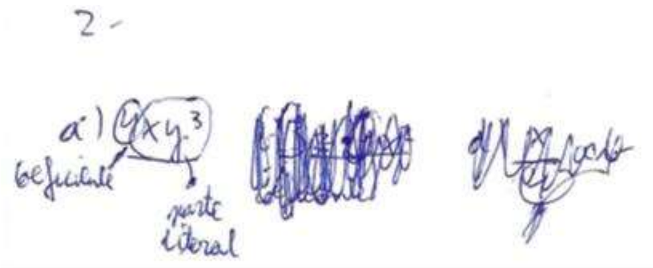
Finalmente, otro alumno, comprende bien las dos expresiones salvo por el error de confundir el triple con la tercera parte.



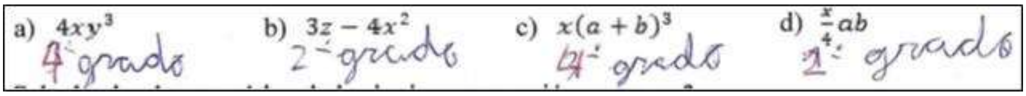
Actividad 2.

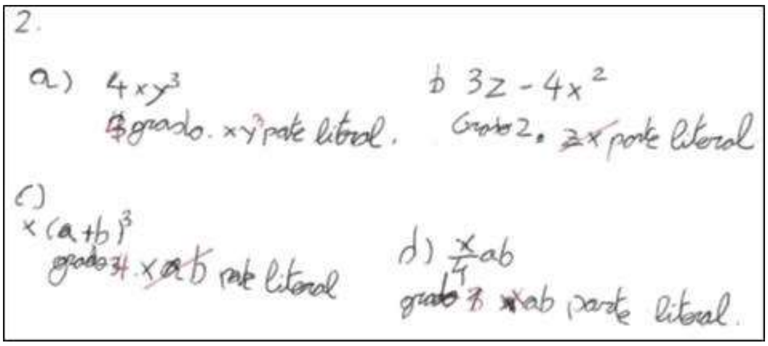
En general no manifiestan tener claro el concepto de monomio ni los elementos que lo componen.

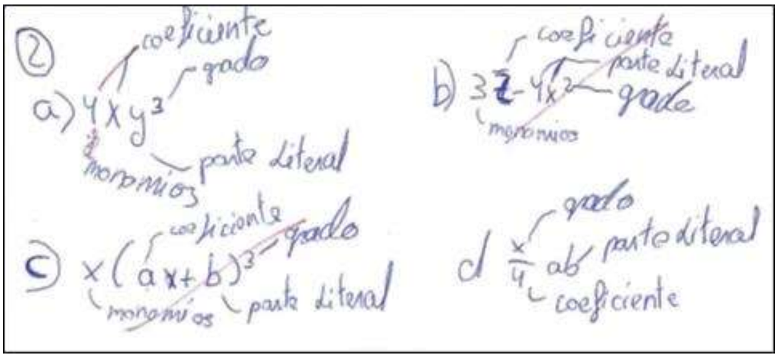
Uno de los alumnos es capaz de identificar que no todas las expresiones son monomios, sin embargo solo reconoce aquella en la que es fácil separar el coeficiente de la parte literal y no identifica el grado en ningún caso.



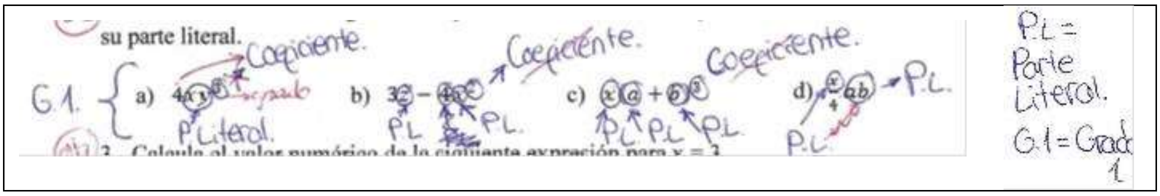
Otros tres estudiantes identifican el grado con el mayor exponente visible independientemente de donde esté situado y no identifican cuáles no son monomios ni tienen clara cuál es la parte literal.

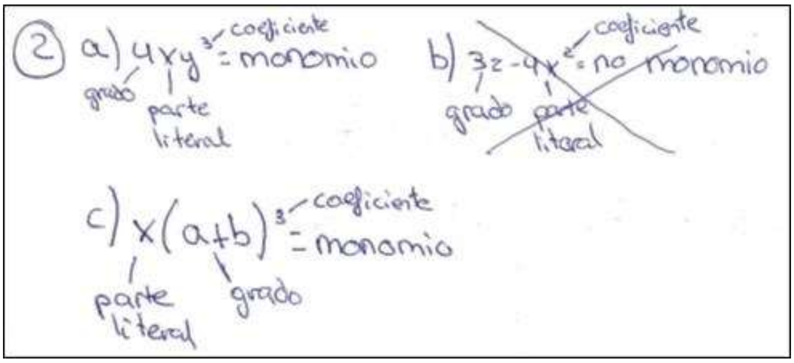






Otros dos hacen lo mismo, pero además confunden el grado con el coeficiente y viceversa.





Actividad 3.

Todos interpretan bien que hay que sustituir el valor numérico en la expresión pero cuatro de los seis que hacen la actividad se equivocan con las operaciones con números enteros.

3

$$1 - x - \frac{6-2x}{4} + 5$$

$$1 - 3 - \frac{6-2\cdot 3}{4} + 5$$

$$\cancel{2-6} \quad \cancel{x=7} \quad 2 - \frac{6-6}{4} + 5$$

$$1 - x - \frac{6-2x}{4} + 5 = 1-3-\frac{6-2x}{4}+5 = 2-\frac{6-2x}{4}+5 = 2-\frac{6-2\cdot 3}{4}+5 =$$

$$2-\frac{6-6}{4}+5 = 2-\frac{0}{4}+5 = 2-0+5 = -2+5 = \cancel{+7}\ 3$$

3.-

$$1 - x - \frac{6-2x}{4} + 5$$

$$1 - 3 - \frac{6-2\cdot 3}{4} + 5$$

$$2 - \frac{6-6}{4} + 5 \qquad x = -2$$

3

$$1 - x - \frac{6-2x}{4} + 5$$

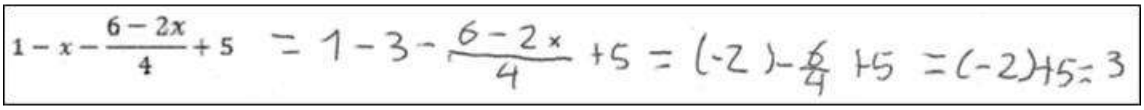
$$1 - 3 - \frac{6-2\cdot 3}{4} + 5$$

$$2 - \frac{6-6}{4} + 5$$

$$x = 7$$

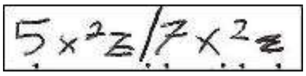
Los otros dos sí lo hacen bien, aunque el segundo da un paso intermedio erróneo que parece solucionar copiándose de su compañero.

$$1 - x - \frac{6-2x}{4} + 5 \qquad 1-3 - \frac{6-6}{4} + 5 = (-2) - \frac{0}{4} + 5 = (-2) + 5 = 3$$

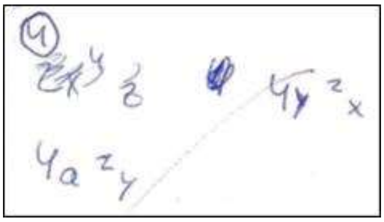


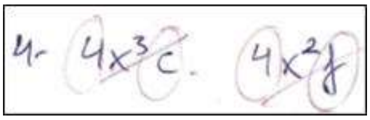
Actividad 4.

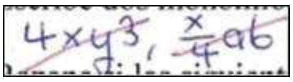
Dos alumnos lo hacen bien.



Hay otro que no contesta y los otros tres interpretan al contrario la semejanza y modifican la parte literal dejando sin variar el coeficiente.

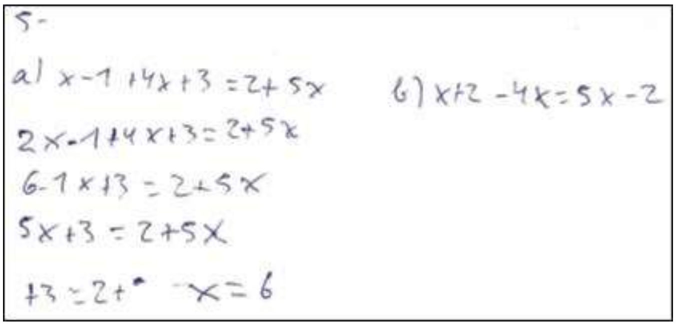






Actividad 5.

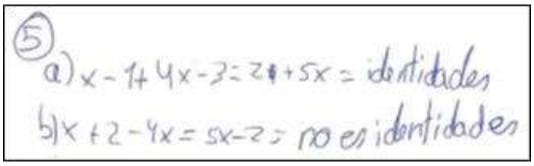
Solo un alumno trata de reducir términos en el primer apartado para tratar de contestar, pero su lía y deja el segundo apartado sin hacer. Se observa que trabaja solo sobre el primer miembro y no es capaz de agrupar los términos semejantes por lo que se limita a sumar y restar coeficientes sin tener en cuenta la incógnita.

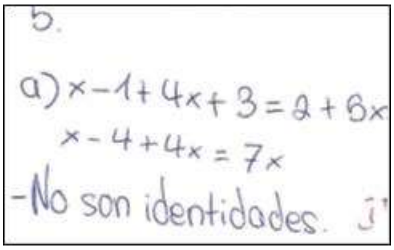


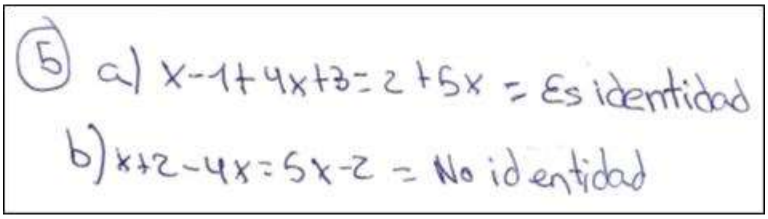
Los otros cinco dan una contestación directa, aleatoria y sin ningún tipo de razonamiento.


a) $x-1+4x+3=2+5x$ No b) $x+2-4x=5x-2$ Si


a) $x-1+4x+3=2+5x$ No b) $x+2-4x=5x-2$ Si

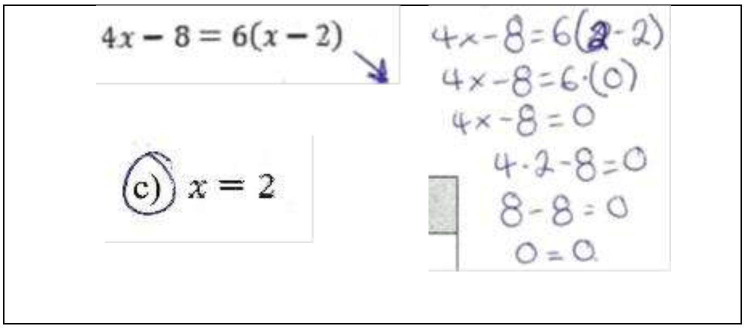

5
a) $x-1+4x-3=2+5x$ = identidades
b) $x+2-4x=5x-2$ = no es identidades


5.
a) $x-1+4x+3=2+5x$
$x-4+4x=7x$
-No son identidades.


5 a) $x-1+4x+3=2+5x$ = Es identidad
b) $x+2-4x=5x-2$ = No identidad

Actividad 6.

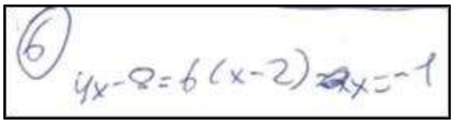
Dos alumnos no la hacen, del resto, tan solo uno justifica el resultado obtenido sustituyendo el valor escogido en la ecuación comprobando que la verifica.


$4x-8=6(x-2)$

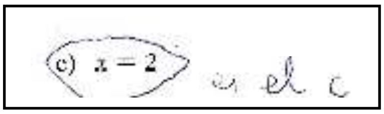
c) $x=2$

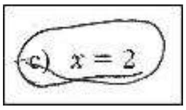
$4x-8=6(2-2)$
$4x-8=6\cdot(0)$
$4x-8=0$
$4\cdot2-8=0$
$8-8=0$
$0=0$

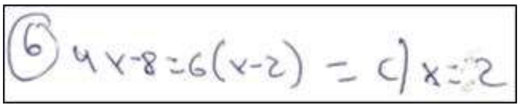
Otro estudiante responde de manera incorrecta, pero como no justifica su respuesta, induce a pensar que la ha escogido aleatoriamente de entre las posibles.



Los demás responden correctamente pero sin ninguna justificación. Cabe pensar que han hecho la comprobación mentalmente.



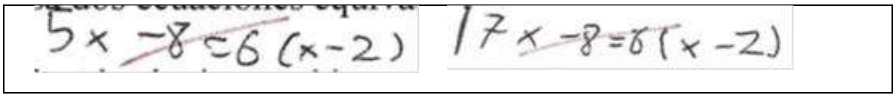




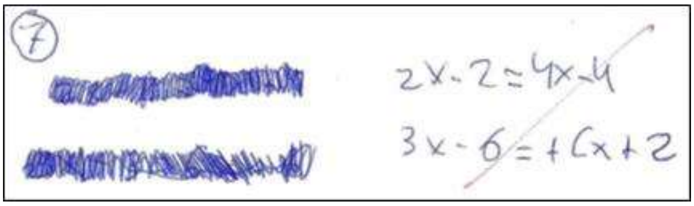
Actividad 7.

Tres alumnos la dejan en blanco y los otros tres no la hacen bien.

De ellos, uno se conforma con cambiar el coeficiente del primer término que encuentra en el primer miembro.



Los otros dos parece que se copian entre ellos y proponen ecuaciones con una cierta semejanza en la estructura, pero donde los coeficientes parecen ser aleatorios, aunque guardan cierta similitud con el concepto de múltiplo de un número.



7 $2x-2=4x-4$

$4x-8=6(x-2)-$

Actividad 8.

Las respuestas a esta actividad han sido muy variadas, pero todas con el denominador común de ser parcial o totalmente erróneas o incompletas.

Uno de los estudiantes lo confunde todo, especialmente los miembros, que confunde con coeficientes. En cuanto a la incógnita, parece saber que tiene que ver con la letra pero no tiene claro cómo.

Ecuación	Incógnita	Coeficiente del término de primer grado	Primer miembro	Segundo miembro
$3-7y=12$	$7y$	y	3	7
$18=6t$	$6t$	t	16	6
$\frac{d}{7}-14=0$	$\frac{d}{7}$	d	7	14

Hay dos alumnos que identifican bien la incógnita pero dejan en blanco los coeficientes pedidos y en cuanto a la identificación de los miembros, uno lo hace bien y el otro elimina la incógnita y se queda con los coeficientes y signos de operación.

Ecuación	Incógnita	Coeficiente del término de primer grado	Primer miembro	Segundo miembro
$3-7y=12$	y		$3-7y$	12
$18=6t$	t		18	$6t$
$\frac{d}{7}-14=0$	d		$\frac{d}{7}-14$	0

Ecuación	Incógnita	Coeficiente del término de primer grado	Primer miembro	Segundo miembro
$3-7y=12$	y		[illegible]	12
$18=6t$	t		~~18=6~~	~~6~~
$\frac{d}{7}-14=0$	[illegible]		7-14	0

Otro alumno, en principio identifica bien la incógnita pero la tacha y coloca los coeficientes del primer términos de la izquierda, en la segunda columna pone los coeficientes de los segundos términos que observa en las expresiones independientemente del miembro al que pertenezcan. Como primer miembro, identifica las incógnitas y como segundo, identifica solo aquellos que son exclusivamente numéricos, dejando, por tanto, el central en blanco.

Ecuación	Incógnita	Coeficiente del término de primer grado	Primer miembro	Segundo miembro
$3-7y=12$	~~7~~ 3	-7	~~3~~ y	12
$18=6t$	~~t~~ 18	6	~~18~~ t	
$\frac{d}{7}-14=0$	~~d~~ 7	14	d	0

Otro alumno interpreta la incógnita como los números que aparecen en el segundo miembro y para el caso central en que va acompañado de la incógnita pone la solución a la ecuación. En la columna en que tenía que identificar el coeficiente del término de primer grado coloca las incógnitas y como primer y segundo miembro pone los coeficientes de los términos que aparecen en primera y segunda posición independientemente del miembro a que pertenezcan.

Ecuación	Incógnita	Coeficiente del término de primer grado	Primer miembro	Segundo miembro
$3-7y=12$	12	y	3	7
$18=6t$	3	t	18	6
$\frac{d}{7}-14=0$	0	d	7	14

Finalmente, los dos alumnos restantes, identifican bien los miembros y dejan en blanco la columna del coeficiente y en la de la incógnita uno la deja en blanco y otro coloca los signos visibles (el menos y el igual).

Ecuación	Incógnita	Coeficiente del término de primer grado	Primer miembro	Segundo miembro
$3-7y=12$			$3-7y$	12
$18=6t$			18	$6t$
$\frac{d}{7}-14=0$			$\frac{d}{7}-14$	0

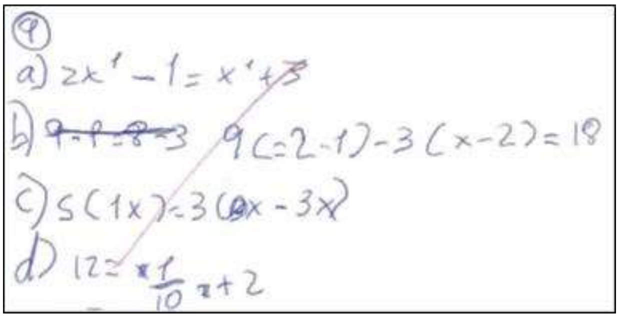
Ecuación	Incógnita	Coeficiente del término de primer grado	Primer miembro	Segundo miembro
$3-7y=12$	$- =$		$3-7y$	12
$18=6t$	$=$		18	$6t$
$\frac{d}{7}-14=0$	$- =$		$\frac{d}{7}-14$	0

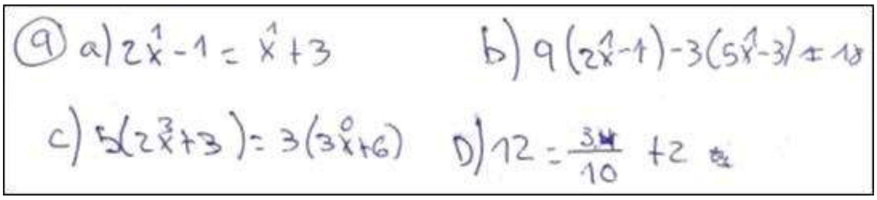
Actividad 9.

Dos alumnos la dejan sin hacer, de ellos uno pone en los dos primeros apartados dos números enteros positivos aleatoriamente.

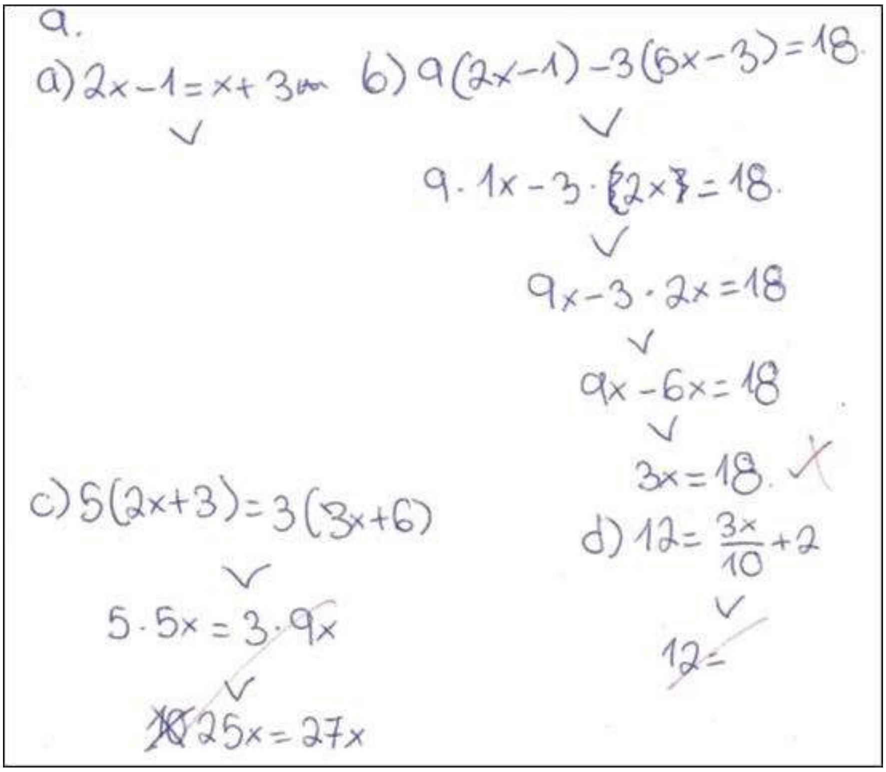
a) $2x-1=x+3$ $=6$	b) $9(2x-1)-3(5x-3)=18$
c) $5(2x+3)=3(3x+6)$ $=5$	d) $12=\frac{3x}{10}+2$

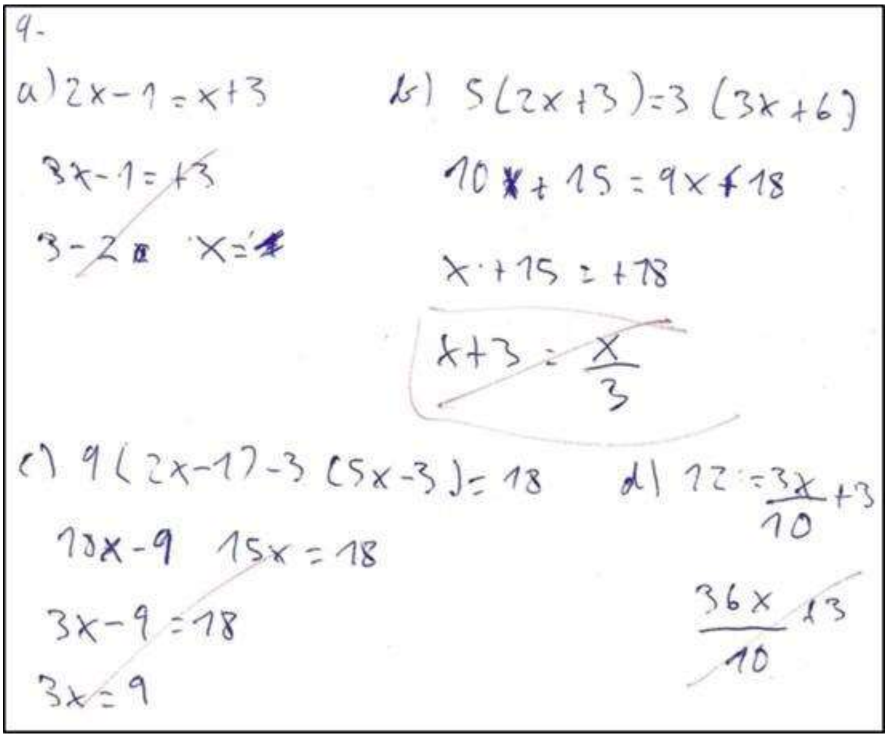
Otros dos estudiantes tratan de hacerlo por el método de prueba y error sustituyendo un valor aleatorio numérico y fácil de operar, pero desisten enseguida sin dar respuesta, por lo menos parece que tienen claro que una solución debe verificar la igualdad.





Los dos alumnos restantes intentan aplicar un procedimiento de resolución de ecuaciones pero se lían con su desconocimiento de las operaciones con paréntesis y signos negativos por lo que desisten pronto tras dar algunos pasos equivocados que les conducen a expresiones intermedias más simples que no saben resolver.





9-

a) $2x-1=x+3$

$\cancel{3x-1=+3}$

$\cancel{3-2x \quad x=4}$

b) $5(2x+3)=3(3x+6)$

$10x+15=9x+18$

$x+15=+18$

$\cancel{x+3=\frac{x}{3}}$

c) $9(2x-1)-3(5x-3)=18$

$\cancel{18x-9 \quad 15x=18}$

$\cancel{3x-9=18}$

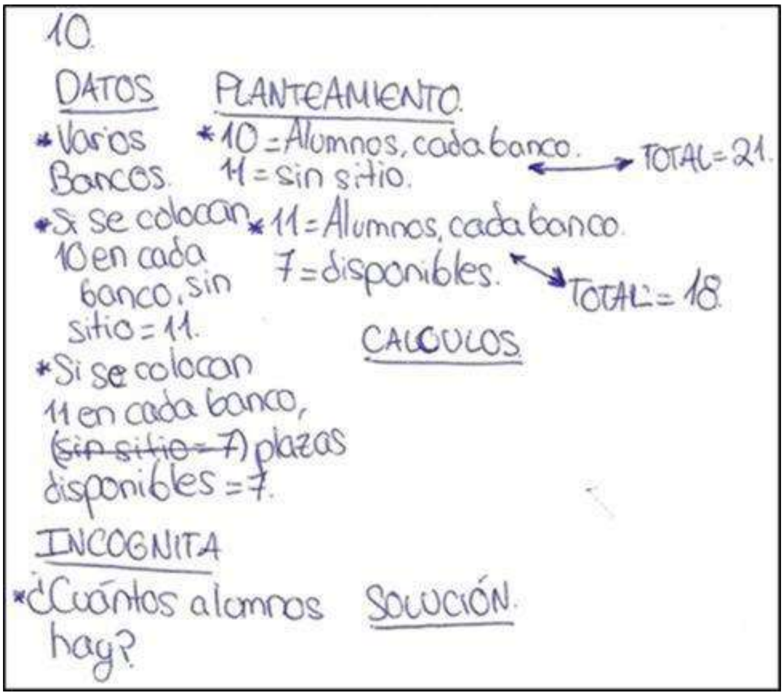
$\cancel{3x=9}$

d) $12=\frac{3x}{10}+3$

$\cancel{\frac{36x}{10}+3}$

Actividad 10.

Tres alumnos lo dejan en blanco. De los otros tres uno se conforma con identificar los datos y la demanda del problema.



10.

DATOS

*Varios Bancos.

*Si se colocan 10 en cada banco, sin sitio = 11.

*Si se colocan 11 en cada banco, ~~(sin sitio = 7)~~ plazas disponibles = 7.

INCOGNITA

*¿Cuántos alumnos hay?

PLANTEAMIENTO.

*10 = Alumnos, cada banco. 11 = sin sitio. ⟷ TOTAL = 21.

*11 = Alumnos, cada banco. 7 = disponibles. ⟷ TOTAL = 18.

CALCULOS

SOLUCIÓN.

Los otros dos hacen lo mismo pero llegan más lejos planteando como solución una suma de los datos numéricos que ofrece el problema, por lo que ninguno aplica conceptos algebraicos.

10

Datos
- 10 alumnos cada banco
- sin sitio 11 alumnos
- si se colocan 11 alumnos cada banco.
- Quedan 7 plazas disponible.

Incognita
¿Cuántos alumnos hay?

Planteamiento

$$\begin{array}{r} 11 \\ +10 \\ \hline 21 \end{array}$$

Solución
Hay 21 alumno.

10

Datos
~~en un istituto se ponen 10 bancos uno detras de otro~~ en un istituto se han colocado varios ~~bancos~~ bancos dispuesto uno detras de oto. Si se colocan 10 alumnos encada banco que dan sin citio 11 alumnos y si se cobcan 11 alumnos en cada banco quedan 7 plazas disponibles

Sncognita
cuantos alumnos hay

planteamiento
sumar

calculo
10 + 11 = 21 + 7 = 28

solucion
~~en~~ en total hay 28 alumnos