Universidad de Granada
Escuela Internacional de Posgrado

TRABAJO FINAL DE MASTER

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.
Especialidad de Matemáticas

EVALUACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA SOBRE PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES EN PRIMERO DE LA E.S.O.

Elaborado por: **Carlos José Aroza Ruano**

Dirigido por: **Juan Díaz Godino**
(Dpto. Didáctica de la Matemática)

Curso: 2015-2016

ÍNDICE

1.- INTRODUCCION...........................2

2.- DESCRIPCIÓN DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES 4

2.1.- CONTEXTO DEL CENTRO EDUCATIVO Y CARACTERÍSTICAS DEL GRUPO DE LA CLASE 4

2.2.- DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA 5

2.2.1.- MARCO CURRICULAR 6

2.2.2.- OBJETIVOS Y COMPETENCIAS MATEMÁTICAS 7

2.2.3.- CONTENIDOS, ACTIVIDADES Y SECUENCIACIÓN 8

2.3.- IMPLEMENTACIÓN DEL ESTUDIO 13

2.4.- RECOGIDA DE INFORMACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS 17

2.4.1.- OBSERVACIÓN DIRECTA DE LAS TAREAS PROPUESTAS EN CLASE 17

2.4.2.- PRUEBA DE EVALUACION AL FINAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA 23

3.- CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE LA PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES 31

3.1.- MARCO TEÓRICO, PROBLEMA Y METODOLOGÍA 31

3.2.- CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE LA PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES 33

3.2.1.- FACETA EPISTÉMICA 33

3.2.2.- FACETAS COGNITIVA Y AFECTIVA 38

3.2.3.- FACETAS INTERACCIONAL Y MEDIACIONAL (INSTRUCCIONAL) 44

3.2.4.- FACETA ECOLÓGICA 48

3.3.- TABLA RESUMEN DE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES 51

3.3.1.- FACETA EPISTÉMICA 51

3.3.2.- FACETAS COGNITIVA Y AFECTIVA 52

3.3.3.- FACETAS INTERACCIONAL Y MEDIACIONAL (INSTRUCCIONAL) 53

3.3.4.- FACETA ECOLÓGICA 54

4.- VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA. PROPUESTAS DE CAMBIOS EN EL DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA 56

4.1.- FACETAS EPISTÉMICA Y ECOLÓGICA 56

4.2.- FACETAS COGNITIVA Y AFECTIVA 59

4.3.- FACETAS INTERACCIONAL Y MEDIACIONAL (INSTRUCCIONAL) 60

5.- SÍNTESIS Y CONCLUSIONES 62

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 64

1.- INTRODUCCION

Una de las tareas esenciales que debe realizar el profesor es la preparación de sus clases, teniendo en cuenta los objetivos, contenidos y competencias que debe procurar desarrollar en sus estudiantes, así como las restricciones del contexto en el que tiene lugar su enseñanza. Un componente importante de la formación recibida en el máster va orientado hacia la adquisición de destrezas en el diseño de unidades didácticas, como una estrategia de preparación de las clases.

Por otra parte, la realización de las prácticas de enseñanza en los institutos es una ocasión muy importante para entrar en contacto con la realidad educativa, tomar conciencia de las múltiples restricciones que el contexto en el que tiene lugar la enseñanza imponen al trabajo del profesor, así como de aplicar y desarrollar los conocimientos teóricos recibidos. Se comprueba que es necesario adoptar una posición reflexiva y autocrítica sobre el propio trabajo a fin de reconocer aquellos puntos sobre los que es necesario actuar para lograr una mejora progresiva de la enseñanza.

Ésta es la razón por la que se ha optado por enfocar el trabajo fin de máster hacia una reflexión sistemática sobre la experiencia de enseñanza vivida en la fase de prácticas, en la que se ha tenido la oportunidad de asumir la responsabilidad de impartir una unidad didáctica, bajo la supervisión del profesor-tutor del centro educativo, concretamente la enseñanza de la "proporcionalidad y porcentajes" en el curso primero de la E.S.O. Esta reflexión sistemática estará apoyada en el uso de la noción de idoneidad didáctica y el sistema de indicadores de idoneidad, desarrollados por Godino y colaboradores en diversos trabajos (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2013). La finalidad es obtener criterios para el rediseño de la unidad didáctica, que permitan introducir cambios fundamentados en la enseñanza del tema correspondiente.

Este trabajo está así mismo fundamentado por estudios similares realizados bajo la dirección del profesor J. D. Godino, en particular por el Trabajo de fin de máster de Posadas (2013) y el artículo de síntesis realizado por Posadas y Godino (2014). Resaltamos que el tema abordado en este trabajo, la experiencia de enseñanza realizada, la síntesis de investigaciones e innovaciones sobre la enseñanza de la proporcionalidad en secundaria, las reflexiones y valoraciones son aportaciones originales.

La memoria se ha organizado en los siguientes apartados. Tras esta introducción general, en la sección 2, se describe el diseño, implementación y evaluación de la enseñanza que se ha impartido durante el periodo de prácticas en el primer curso de la E.S.O. en un instituto de educación secundaria de Granada. Se realiza una breve descripción del instituto y del grupo en el cual se ha impartido la unidad, así como las características más relevantes del mismo. En esta sección también se describe el enfoque de la enseñanza de la proporcionalidad y porcentajes según las orientaciones curriculares nacional y autonómica y su reflejo en el libro de texto escolar utilizado.

Dado que la emisión de un juicio sobre la idoneidad de un proceso de enseñanza-aprendizaje requiere establecer previamente un marco de referencia se ha procedido, en la sección 3, a buscar y sintetizar publicaciones de innovaciones e investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad y porcentajes, clasificando los resultados en las facetas epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional, según propone la teoría de la idoneidad didáctica.

En la sección 4, se incluye el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza vivido orientado hacia la identificación de propuestas de cambio fundamentados, teniendo en cuenta la síntesis de conocimientos didáctico-matemáticos previamente elaborada en la sección 3.

2.- DESCRIPCIÓN DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

Durante el periodo de prácticas se ha tenido la oportunidad de observar cómo funciona un centro educativo y de participar, por primera vez, como docente en varios grupos y unidades didácticas, pero ha sido en primero de la E.S.O. donde se ha asumido un cierto grado de responsabilidad de la enseñanza. Esta es la razón, por la que la reflexión sobre la práctica docente que se ha vivido, se centrará en este curso y el contenido matemático que en las semanas correspondientes tocaba estudiar: "la proporcionalidad y los porcentajes".

2.1.- CONTEXTO DEL CENTRO EDUCATIVO Y CARACTERÍSTICAS DEL GRUPO DE LA CLASE

El Instituto de Educación Secundaria está ubicado en Granada. Las tres áreas de competencias que oferta el instituto en cuestión son la científico-tecnológico (matemáticas, física y química, geología y biología y tecnología), la socio-lingüística y la artística. La estructura de grupos es de línea dos en la E.S.O. y tres en Bachillerato.

En lo que se refiere al perfil económico y sociológico del alumnado, éste procede mayoritariamente de un sector social de clase media-baja de trabajadores por cuenta ajena, propietarios de pequeños comercios o empresas de servicios, profesiones liberales y parados, así como de bastante población inmigrante.

Cabe destacar el elevado número de alumnado inmigrante que, en cuanto a la procedencia por las características de la zona, se recibe en cada curso, siendo alumnado de origen muy diverso: ecuatoriano, argentino, peruano, dominicano, coreano, sudafricano, marroquí, sirio, italiano, chino, coreano, islandés, entre otros; estando en los últimos cursos en torno a 12% el número de alumnos y alumnas inmigrantes de unas 20 nacionalidades diferentes.

La unidad didáctica se ha impartido en uno de los grupos de primero de la E.S.O. Se trata de una clase de 30 alumnos, compuesto por 8 alumnas y 22 alumnos, en la que cabe señalar el alto índice de alumnado inmigrante (hay un coreano, un sirio, dos marroquíes, un dominicano, dos colombianos, un centro africano, un argentino y dos ecuatorianos), lo que supone cierta heterogeneidad y diversidad cultural. Es un aula en la que es difícil mantener el orden al tratarse de un grupo numeroso, constantemente hay que llamarles la atención para que el desarrollo de la clase funcione bien, y en la que más del cincuenta por ciento del alumnado tiene muy poca motivación por aprender y por las matemáticas, ya que la mayoría de ellos (unos 17 alumnos) tienen muchas carencias básicas en conceptos matemáticos y procedimentales, como por ejemplo al operar con multiplicaciones y divisiones, que vienen arrastrando de su paso por la etapa de primaria, y que les impiden, en muchas ocasiones, seguir el curso normal de las clases.

Resulta evidente que, en cuanto a las potencialidades de aprendizaje, es en general, un "grupo de bajo rendimiento", tienen dificultades de aprendizaje, a excepción de unos pocos alumnos que tienen un alto rendimiento académico, unos 12 alumnos, que muestran motivación e interés por la asignatura a través de sus ganas por participar en la clase.

La relación profesor-alumno es asimétrica, quedando bien definida la figura del profesor como autoridad. A pesar de ello, el trato entre profesor y alumno es muy cercano. Durante los días en los que se ha intervenido en las clases, han tenido respeto hacia mi compañera de prácticas y hacia mí, han mostrado una actitud participativa dentro del aula, con intervenciones en la pizarra incluidas.

Como detalle curioso del funcionamiento diario de este grupo, comentar que los alumnos tienen sitio fijo asignado, el tutor elige donde y al lado de que compañero se sienta cada estudiante. De manera que el trascurso de la clase no se vea afectado por el mal comportamiento del alumnado.

Además, en este grupo han actuado, de manera simultánea, dos compañeros de prácticas, por lo que mientras uno explicaba la materia, el otro podía ejercer de supervisor, revisando los cuadernos para comprobar si traían los deberes hechos de casa, vigilaba a los alumnos para que estuvieran atentos y copiasen la explicación o solventada dudas y dificultades en la fase de resolución de tareas.

Por lo general, los alumnos asumen las normas de la clase de matemáticas de una manera correcta. La mayoría de ellos, cumple con los horarios y con las reglas propias de la clase (ocupan su asiento correspondiente asignado por el tutor, participan, realizan las tareas, traen la libreta y el libro a clase, etc.) sobre todo, aquellos que tienen interés por aprender.

2.2.- DISEÑO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En la programación didáctica del centro, para la materia de matemáticas del primer curso de la E.S.O., el capítulo nº 7 de proporcionalidad y porcentajes se sitúa, entre el resto de las unidades didácticas secuenciadas temporalmente, de la siguiente manera:

Primer trimestre:

- ✓ Unidad nº 1: Los números naturales. Potencias y representación gráfica.
- ✓ Unidad nº 2: Divisibilidad.
- ✓ Unidad nº 3: Los números enteros.
- ✓ Unidad nº 4: Los números decimales.

Segundo trimestre:

- ✓ Unidad nº 5: El sistema métrico decimal.
- ✓ Unidad nº 6: Fracciones. Operaciones con fracciones.
- ✓ ***Unidad nº 7: Proporcionalidad y porcentajes.***
- ✓ Unidad nº 8: Álgebra.

Tercer trimestre:

- ✓ Unidad nº 9: Rectas y ángulos. Figuras geométricas.
- ✓ Unidad nº 10: Áreas y perímetros.
- ✓ Unidad nº 11: Tablas y gráficas. El azar.

2.2.1.- MARCO CURRICULAR

Los contenidos curriculares relacionados con este tema, están recogidos en el anexo 1 del Real Decreto 1105/2014, del 26 de diciembre, por el que el M.E.C. establece el currículo básico de la E.S.O. y del Bachillerato. Dentro de los cinco bloques en que se divide el contenido matemático de primero de la E.S.O. (1.-Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, 2.-Números y álgebra, 3.-Geometría, 4.-Funciones y 5.-Estadística y probabilidad), la proporcionalidad y porcentajes se encuadra en el Bloque nº 2, en el relativo a números y álgebra. Dichos contenidos son los siguientes:

- ✓ Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales.
- ✓ Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- ✓ Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.

En el apartado de criterios de evaluación se indica:

5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.), para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real, en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directamente o inversamente proporcionales.

Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para alcanzar los siguientes estándares de aprendizaje:

5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.

5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directamente ni inversamente proporcionales.

Los conocimientos previos que se requieren para el estudio de proporcionalidad y porcentajes son los que se indican a continuación:

- ✓ *Fracciones:* Fracciones equivalentes: La relación entre los términos de dos fracciones equivalentes $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$, y las propiedades de las fracciones equivalentes.
- ✓ Resolución de problemas básicos de aritmética: Averiguar el valor de varios, conociendo el valor de uno y averiguar el valor de uno, conociendo el valor de varios.
- ✓ *Números Decimales:* Representación, ordenación, equivalencias y operaciones. Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones. Multiplicaciones y divisiones por 100.

Estos contenidos de los conocimientos previos están también incluidos en el bloque nº 2 de números y álgebra, del currículo básico establecido por el M.E.C. para el nivel educativo de primero de la E.S.O.

2.2.2.- OBJETIVOS Y COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Con esta unidad didáctica se pretende que los alumnos alcancen los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes.

2. Construir e interpretar tablas de valores correspondientes a pares de magnitudes proporcionales.

3. Conocer y aplicar técnicas específicas para resolver problemas de proporcionalidad directa e inversa.

4. Comprender el concepto de porcentaje y calcular porcentajes directos.

5. Resolver problemas de porcentajes.

Estos objetivos se orientan a alcanzar una de las competencias básicas, ***la competencia matemática***, que se entiende como la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas; en concreto, engloba los siguientes aspectos y facetas: pensar, modelar y razonar de forma matemática, plantear y resolver problemas, representar entidades matemáticas, utilizar los símbolos matemáticos, comunicarse con las matemáticas y sobre las matemáticas, y utilizar ayudas y herramientas tecnológicas; además, el pensamiento matemático ayuda a la adquisición del resto de competencias.

La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico.

En este proceso de resolución e investigación están involucradas muchas otras competencias, además de la matemática, entre otras; ***la comunicación lingüística***, al leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos; ***aprender a aprender,*** al ser capaz de autoevaluar sus conocimientos; ***el sentido de iniciativa y emprendimiento*** al establecer un plan de trabajo en revisión y modificación continua en la medida que se va resolviendo el problema; ***la competencia digital***, al tratar de forma adecuada la información y, en su caso, servir de apoyo a la resolución del problema y comprobación de la solución; ***la competencia social y cívica***, al implicar una actitud abierta ante diferentes soluciones; ***la de conciencia y expresiones culturales,*** al reconocer las matemáticas como fuerza conductora en el desarrollo de la cultura y las civilizaciones. (BOE núm. 3, del 3 de enero de 2015, p. 407-408)

El marco teórico de PISA recoge siete competencias matemáticas específicas, con las que se trabajará. La especificidad en este caso hace referencia a su singularidad cognitiva. Una descripción breve de su significado es la siguiente (O.C.D.E. 2013):

- ✓ ***Razonar y argumentar:*** Tiene que ver con llevar a cabo procesos de pensamiento enlazados de forma lógica, que permiten realizar inferencias a partir de los elementos de un problema, proporcionar o comprobar una justificación de los enunciados o soluciones.

- ✓ ***Comunicar:*** Se manifiesta en la lectura, descodificación e interpretación de enunciados, preguntas, tareas que permiten al sujeto formarse un modelo de una situación que quiere comprender, y también en la presentación de la solución, su justificación o explicación.

- ✓ ***Matematizar:*** Se centra en transformar un problema expresado en términos no matemáticos, a una forma estrictamente matemática, para su posterior resolución y generalización.

- ✓ ***Diseñar estrategias para resolver problemas:*** Disponer de un conjunto de procesos de control que guían para reconocer, formular y resolver eficazmente problemas.

- ✓ ***Representar:*** Tiene que ver con interpretar, traducir y emplear distintas expresiones para reflejar una situación, afrontar un problema o expresar sus resultados.

- ✓ ***Utilizar operaciones y lenguaje simbólico***: Comprensión, interpretación, manipulación y empleo de expresiones simbólicas en un contexto matemático. Pero también la comprensión y utilización de constructos basados en reglas y sistemas formales, así como el uso de algoritmos con ellos, para resolver problemas matemáticos.

- ✓ ***Utilizar herramientas matemáticas:*** Uso de herramientas físicas, calculadoras, informáticas, que pueden favorecer la actividad matemática, tanto para la resolución de problemas como para la comunicación de resultados.

2.2.3.- CONTENIDOS, ACTIVIDADES Y SECUENCIACIÓN

Aunque en el periodo de prácticas se ha tenido la oportunidad de observar y participar en la enseñanza de diversas unidades didácticas de matemáticas, la unidad que se describe y analiza se centra en el estudio de la proporcionalidad y porcentajes, en el curso de primero de la E.S.O. Dentro de esta unidad, se ha desarrollado la identificación y diferenciación de magnitudes que son directamente proporcionales e inversamente proporcionales, la resolución de tareas de proporcionalidad directa e inversa aplicando la regla de tres simple o el método de reducción a la unidad y finalmente el cálculo de porcentajes e incrementos porcentuales contextualizados en situaciones de la vida real.

El proceso de aprendizaje implementado a los alumnos, ha seguido básicamente la orientación y contenidos propuestos en el libro de texto (Colera & Gaztelu, 2010) que se viene usando en el primer curso de E.S.O., en el instituto en el que se han realizado las prácticas docentes, cuyo guion de contenidos para la unidad didáctica de proporcionalidad y porcentajes es el siguiente:

1. *Relación de proporcionalidad entre magnitudes.*
    1.1. *Relación de proporcionalidad directa.*
    1.2. *Relación de proporcionalidad inversa.*

2. *Problemas de proporcionalidad directa.*
    2.1. *Método de reducción a la unidad.*
    2.2. *Fracciones equivalentes en las tablas de valores directamente proporcionales.*
    2.3. *Regla de tres directa.*

3. *Problemas de proporcionalidad inversa.*
    3.1. *Método de reducción a la unidad.*
    3.2. *Fracciones equivalentes en las tablas de valores inversamente proporcionales.*
    3.3. *Regla de tres inversa.*

4. *Porcentajes.*
    4.1. *Concepto de tanto por ciento.*
    4.2. *Un porcentaje es una fracción.*
    4.3. *Porcentaje y números decimales.*
    4.4. *Algunos porcentajes especiales.*

5. *Un porcentaje es una proporción.*
    5.1. *Cálculo de una parte.*
    5.2. *Cálculo del total.*
    5.3. *Cálculo del tanto por ciento.*

6. *Aumentos y disminuciones porcentuales.*
    6.1. *Aumentos porcentuales: Método suma de porcentaje y de la regla de tres directa.*
    6.2. *Disminuciones porcentuales: Método resta de porcentaje y de la regla de tres directa.*

Siguiendo estos guiones del libro de texto, la unidad didáctica se ha impartido en once sesiones donde, además de las explicaciones (nociones teóricas), se han resuelto tareas. La última sesión se ha reservado para la realización de una prueba de evaluación formativa, para comprobar el nivel de comprensión de los alumnos sobre los diferentes conceptos de la unidad y valorar el nivel de aprendizaje procedimental en la resolución de los distintos tipos de tareas de proporcionalidad y porcentajes.

A continuación, se detalla la impartición del contenido de la unidad, secuenciado temporalmente por sesiones:

Sesión nº 1:

- ✓ Identificación y diferenciación de magnitudes que son directamente proporcionales e inversamente proporcionales. Ejemplos en el contexto cotidiano.
- ✓ Resolución en clase de tareas donde se distinguen magnitudes proporcionales y se completan tablas de valores directamente e inversamente proporcionales.

Sesión nº 2:

- ✓ Problemas de proporcionalidad directa.
- ✓ Método de reducción a la unidad.
- ✓ Fracciones equivalentes en las tablas de valores directamente proporcionales.
- ✓ Regla de tres directa. Resolución de tarea ejemplo.
- ✓ Tareas del libro propuestas para casa.

Sesión nº 3:

- ✓ Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior.
- ✓ Problemas de proporcionalidad inversa.
- ✓ Método de reducción a la unidad.
- ✓ Fracciones equivalentes en las tablas de valores inversamente proporcionales.
- ✓ Regla de tres inversa. Resolución de tarea ejemplo.
- ✓ Tareas del libro propuestas para casa.

Sesión nº 4:

- ✓ Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior.
- ✓ Identificación y resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa mediante la regla de tres.
- ✓ Tareas del libro propuestas para casa.

Sesión nº 5:

- ✓ Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior.
- ✓ Resolución individual por parte del alumno de tareas del libro para ser evaluadas.

Sesión nº 6:

- ✓ Porcentajes: Concepto de tanto por ciento.
- ✓ El porcentaje como una fracción.
- ✓ Porcentajes y números decimales.
- ✓ Algunos porcentajes especiales.
- ✓ Resolución de tareas a modo de ejemplo para el cálculo del porcentaje de una cantidad.
- ✓ Tareas del libro propuestos para casa.

Sesión nº 7:

- ✓ Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior.
- ✓ El porcentaje como una proporción: Cálculo de la parte mediante la regla de tres.
- ✓ El porcentaje como una proporción: Cálculo del total mediante la regla de tres.
- ✓ El porcentaje como una proporción: Cálculo del tanto por ciento mediante la regla de tres.
- ✓ Resolución de tareas a modos de ejemplo.
- ✓ Tareas del libro propuestos para casa.

Sesión nº 8:

- ✓ Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior.
- ✓ Realización por parejas de tareas de porcentajes.

- ✓ Tareas del libro propuestos para casa.

Sesión nº 9:

- ✓ Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior.
- ✓ Aumentos porcentuales: Método suma porcentual y método regla de tres simple.
- ✓ Disminuciones porcentuales: Método resta porcentual y método regla de tres simple.
- ✓ Resolución de tareas a modo de ejemplo.
- ✓ Tareas del libro propuestos para casa.

Sesión nº 10:

- ✓ Corrección de las tareas propuestas en clase el día anterior.
- ✓ Repaso de la unidad de cara al examen y resolución de dudas.
- ✓ Resolución de tareas a modo de repaso de cara al examen.

Sesión nº 11:

- ✓ Examen de evaluación formativa.

El libro de texto seguido en las clases (Colera & Gaztelu, 2010) propone introducir la proporcionalidad directa e inversa como la relación de dos magnitudes:

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** cuando:

- Al multiplicar una (doble, triple, …), la otra se multiplica de la misma manera (doble, triple, …).
- Al dividir una (mitad, tercio, …), la otra se divide de la misma forma (mitad, tercio, …).

Dos **magnitudes** son **inversamente proporcionales** cuando:

- Al multiplicar una (doble, triple, …), se divide la otra (mitad, tercio, …).
- Al dividir una (mitad, tercio, …), la otra se multiplica (doble, triple, …).

De éstas relaciones de proporcionalidad (directa e inversa) se derivan herramientas que facilitan la resolución de algunos tipos de problemas aritméticos, que se concretan en dos métodos de resolución:

1. La reducción a la unidad.

Método de reducción a la unidad

Consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad.

Conociendo ese valor, es fácil completar cualquier par de valores correspondientes.

2. La regla de tres simple:

Regla de tres directa

Consiste en formar una pareja de fracciones equivalentes con los tres datos y la incógnita.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{MAGNITUD 1}} & & \underline{\text{MAGNITUD 2}} \\ a & \longrightarrow & m \\ b & \longrightarrow & x \end{array} \left.\right\} \frac{a}{b} = \frac{m}{x}$$

$$a \cdot x = b \cdot m \rightarrow x = \frac{b \cdot m}{a}$$

Regla de tres inversa

Para formar las fracciones equivalentes, se ha de invertir el orden de los valores en una de las magnitudes.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{MAGNITUD 1}} & & \underline{\text{MAGNITUD 2}} \\ a & \longrightarrow & m \\ b & \longrightarrow & x \end{array}$$

$$\frac{a}{b} = \underbrace{\frac{x}{m}}_{\text{VALORES INVERTIDOS}} \rightarrow x = \frac{a \cdot m}{b}$$

Para el concepto del tanto por ciento, éste se abarca desde diferentes perspectivas:

1. Como una operación (procedimental):

- El símbolo % se lee **por ciento:** 20% $\rightarrow$ veinte por ciento.
- Para calcular un determinado **tanto por ciento de una cantidad,** dividimos la cantidad entre 100 y multiplicamos por el tanto.

2. Como una fracción:

Tomar un determinado tanto por ciento de un total equivale a partir el total en porciones de cien unidades y tomar de cada porción el tanto indicado.

Un tanto por ciento equivale a una fracción que tiene por numerador el tanto y por denominador 100. $\Big\}$ $a\% \longleftrightarrow \frac{a}{100}$

3. Como un número decimal:

Para calcular un tanto por ciento de una cantidad, se multiplica la cantidad por el número decimal que resulta de dividir el tanto entre 100.

4. Como una proporción:

Para un determinado tanto por ciento, tomado sobre diferentes cantidades, **cada cantidad es directamente proporcional a la parte que le corresponde.**

Por último, se estudia la resolución de dos tipos de problemas muy frecuentes en el contexto de la vida real y cotidiana; el aumento y la disminución porcentual, analizados desde dos métodos o algoritmos de resolución: la suma o resta del porcentaje y la regla de tres directa de proporcionalidad.

Se observa, por tanto, que los autores del libro enfatizan una visión de las matemáticas como reglas o algoritmos a seguir, ilustradas con ejemplos de cómo interpretar tales reglas, seguidas de ejercitación procedimental para el dominio de la aplicación de las mismas.

2.3.- IMPLEMENTACIÓN DEL ESTUDIO

Las sesiones solían comenzar corrigiendo las tareas que los alumnos llevaban propuestas para realizar en casa y con un recordatorio de lo que se estudió en la sesión anterior. Se les preguntaba a los estudiantes las dudas o dificultades que se les habían presentado, para hacer hincapié en los conceptos o procedimientos implicados y afianzar los conocimientos clave. Posteriormente, se comenzaba a explicar la materia nueva. La introducción de contenido nuevo de la unidad didáctica se procuraba realizar siempre a través de ejemplos sencillos en situaciones de la vida cotidiana, aumentando el nivel de dificultad de forma gradual. Además, durante la explicación, se iban haciendo preguntas de los contenidos que los alumnos ya habían adquirido, para que mantuvieran el nivel de atención y siguieran la explicación.

Posteriormente, para desarrollar las explicaciones teóricas, se realizaban algunas tareas-ejemplos contextualizadas en situaciones de la vida real y se trataba de poner especial atención en los errores y dificultades que les podían surgir. Se hacía necesario enfatizar sobre los procedimientos y notaciones clave empleadas, tratando de justificarlos lo máximo posible. En esta fase de resolución de tareas, fomentaba la participación activa del alumno en clase mediante preguntas frecuentes y salidas a la pizarra, para mantener su nivel de atención.

Por último, para potenciar el trabajo personal y un mayor grado de consecución de objetivos, cuando se acerca el final de la clase, se proponían una serie de tareas para que realizasen en casa, relacionados con la materia impartida ese día, para que adquirieran cierta destreza procedimental y afianzasen, con abundante práctica, los conocimientos adquiridos. Dichas tareas se corregían al comienzo de la siguiente sesión. Cuando dichas tareas se comenzaban a realizar en horas de clase, se les permitía el trabajo en grupo por parejas.

En definitiva, se trataba de fijar unos hábitos de trabajo: atender a las explicaciones del profesor en la pizarra, empezar a trabajar las tareas de la materia impartida en clase y terminar de hacer el grueso de las tareas del libro en casa.

En todo momento se siguió el orden y los contenidos del libro de texto, utilizándolo como guion, de modo que los alumnos pudieran acceder con facilidad a la materia, aunque en algunos casos se aportaban ejemplos y tareas que no aparecían en el mismo.

El concepto de proporcionalidad directa fue introducido mediante series de valores de magnitudes proporcionales en tablas (en los que abundaban los ejemplos de cantidad-precio), que los alumnos debían rellenar. De ésta manera los estudiantes podían comprobar que cuando una de las magnitudes se multiplicaba por un número la otra magnitud que era directamente proporcional a la primera, también debía multiplicarse por el mismo número. Y no solo eso, sino que cuando una de las magnitudes se dividía por un número la otra magnitud, también debía dividirse por el mismo número por ser ambas magnitudes directamente proporcionales:

Aquí aparecen dos magnitudes, el número de balones y el coste (euros), y podemos construir una tabla con los valores correspondientes:

N.º DE BALONES	1	2	3	4	?	...	8
COSTE (EUROS)	5	10	15	20	25	...	?

Es evidente que existe una relación entre ambas magnitudes, lo que nos permite completar la tabla. Diremos que esa relación es de proporcionalidad directa.

El concepto de proporcionalidad inversa, fue introducido también, mediante ejemplos de serie de valores de magnitudes inversamente proporcionales en tablas, que ellos debían rellenar y en las que se relacionaban dichas magnitudes. De ésta manera los alumnos podían comprobar que cuando una de las magnitudes se multiplicaba por un número la otra magnitud, que era inversamente proporcional a la primera, debía dividirse por el mismo número. Y no solo eso, sino que cuando una de las magnitudes se dividía por un número, la otra magnitud debía multiplicarse por el mismo número, por ser ambas magnitudes inversamente proporcionales:

La relación existente entre las dos magnitudes (el número de caballos y el número de días que dura el heno) nos permite completar los valores de la tabla siguiente:

N.º DE CABALLOS	4	2	1	3	6
N.º DE DÍAS	15	30	60	20	?

Diremos que esta relación es de proporcionalidad inversa.

Una vez introducidos los conceptos de proporcionalidad directa e inversa, se les propusieron a los alumnos multitud de situaciones, en las que debían distinguir si las dos magnitudes que se les ejemplificaban eran o no, directamente o inversamente proporcionales:

Di cuáles de los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales:

a) El peso de una sandía y su precio.

b) La edad de una persona y su altura.

c) El tiempo que caminas a velocidad constante y la distancia que recorres.

d) La talla de un pantalón y su precio.

e) El tiempo que permanece abierto un grifo y la cantidad de agua que arroja.

f) El precio de un libro y su número de páginas.

Di cuáles de las magnitudes siguientes son inversamente proporcionales:

a) El número de operarios que desacargan un camión y el tiempo que tardan.

b) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir la distancia entre dos ciudades.

c) El precio de las manzanas y los kilos que puedo comprar con el dinero que llevo.

d) La capacidad de un vaso y el número de vasos necesarios para llenar una determinada jarra.

Posteriormente se les explicó, que una de las características que poseen los valores de dos magnitudes que son proporcionales, es que se pueden construir fracciones equivalentes con ellos (el reconocer cuando dos fracciones son equivalentes entre sí, fue objeto de estudio en la unidad didáctica justamente anterior de “fracciones”). Tanto para la proporcionalidad directa:

N.º DE CHOCOLATINAS	PESO (gramos)
1	20
2	40
3	60
4	80

Observa que con dos pares de valores correspondientes se construyen dos fracciones equivalentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{20}{40} \Leftrightarrow \underbrace{1 \cdot 40}_{40} = \underbrace{2 \cdot 20}_{40}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{60}{80} \Leftrightarrow \underbrace{3 \cdot 80}_{240} = \underbrace{4 \cdot 60}_{240}$$

Como para la proporcionalidad inversa (ejemplo: número de operarios y tiempo que tardan en descargar un camión):

N.º OPERARIOS	MINUTOS (min)
1	60
2	30
3	20
4	15

$$\frac{1}{2} = \overset{\text{INVERTIDOS}}{\frac{30}{60}} \rightarrow \underbrace{1 \cdot 60}_{60} = \underbrace{2 \cdot 30}_{60}$$

$$\frac{3}{4} = \overset{\text{INVERTIDOS}}{\frac{15}{20}} \rightarrow \underbrace{3 \cdot 20}_{60} = \underbrace{4 \cdot 15}_{60}$$

Observa que para formar los pares de fracciones equivalentes, se invierte el orden de los valores de una de las magnitudes.

Para que pudieran resolver problemas de valor faltante o desconocido en situaciones de proporcionalidad directa e inversa, se les explicó la regla de tres simple, que no es más que la construcción de dichas fracciones equivalentes para la obtención del dato incógnita:

Tres chocolatinas pesan 60 gramos. ¿Cuánto pesan ocho chocolatinas?

MAGNITUDES

N.º DE CHOCOLATINAS		PESO (g)
3	→	60
8	→	x

Con estos dos pares de valores formamos dos fracciones equivalentes:

$$\frac{3}{8} = \frac{60}{x} \rightarrow 3 \cdot x = 60 \cdot 8 \rightarrow x = \frac{60 \cdot 8}{3} = 160 \text{ g}$$

Solución: Ocho chocolatinas pesan 160 gramos.

Tres operarios descargan una furgoneta en 20 minutos. ¿Cuánto tardarán cinco operarios?

MAGNITUDES

N.º DE OPERARIOS	TIEMPO (min)
3	20
5	x

$$\left.\begin{array}{l} 3 \longrightarrow 20 \\ 5 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{x}{20}$$

FRACCIONES EQUIVALENTES

VALORES INVERTIDOS

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{20} \rightarrow 5 \cdot x = 3 \cdot 20 \rightarrow x = \frac{3 \cdot 20}{5} = 12$$

Solución: Cinco operarios tardan 12 minutos.

En la parte de la unidad didáctica de porcentajes, se impartió la nomenclatura y el concepto de porcentaje desde el punto de vista de una fracción, de un número decimal y de una proporción directa, permitiéndose en éste último caso, usar la regla de tres directa para resolver problemas de cálculo de porcentajes.

Como aplicación de los cálculos porcentuales se introdujeron los incrementos y disminuciones porcentuales, mediante dos métodos de resolución: la regla de tres directa y la suma o resta del porcentaje a la cantidad inicial.

Aumentos porcentuales

Un billete de avión a París costaba, el verano pasado, 460 €, pero desde entonces ha subido un 20%. ¿Cuál es el precio actual del billete?

- **Primera forma de resolución**

Precio antiguo ⟶ 460 €

Aumento ⟶ 20% de 460 = $\frac{20 \cdot 460}{100}$ = 92 €

$\boxed{\text{PRECIO NUEVO}} = \boxed{\text{PRECIO ANTIGUO}} + \boxed{\text{AUMENTO}} \rightarrow 460 + 92 = 552$ €

- **Segunda forma de resolución**

SIN SUBIDA	CON SUBIDA
100	120
460	x

$$\left.\begin{array}{l} 100 \longrightarrow 120 \\ 460 \longrightarrow x \end{array}\right\} \frac{100}{460} = \frac{120}{x} \rightarrow x = \frac{120 \cdot 460}{100} = 552 \text{ €}$$

Disminuciones porcentuales

Una tienda de electrodomésticos saca en oferta, con una rebaja del 15%, un televisor que antes costaba 900 €. ¿Cuánto cuesta, ahora, el televisor?

- **Primera forma de resolución**

Precio antiguo $\longrightarrow$ 900 €

Rebaja $\longrightarrow$ 15% de 900 $= \dfrac{15 \cdot 900}{100} = 135$ €

$\boxed{\text{PRECIO FINAL}} = \boxed{\text{PRECIO ANTIGUO}} - \boxed{\text{REBAJA}} \rightarrow 900 - 135 = 765$ €

- **Segunda forma de resolución**

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{SIN REBAJA}} & & \underline{\text{CON REBAJA}} \\ 100 & \longrightarrow & 85 \\ 900 & \longrightarrow & x \end{array} \Bigg\} \quad \frac{100}{900} = \frac{85}{x} \rightarrow x = \frac{85 \cdot 900}{100} = 765 \text{ €}$$

En cuando a la manera de trabajar en clase, los alumnos realizaban de forma individualizada algunas tareas en el aula, relacionadas con la explicación previamente impartida, aunque se les permitía comentar las dudas con el compañero de clase, mientras el profesor trataba de resolver otras dudas, de forma personalizada, al resto de los alumnos. Más tarde o en la sesión posterior, las tareas eran corregidas en la pizarra normalmente por el profesor, aunque, algunas veces, eran los propios alumnos quienes indicaban los pasos necesarios y el mismo profesor las escribía en la pizarra, y en esporádicas ocasiones, se realizaban salidas de los alumnos a la pizarra para su resolución. En todas las correcciones de las tareas, se trataba de enfatizar mucho sobre los errores que se hacían para que, de este modo, aprendieran a no cometerlos en futuras situaciones.

2.4.- RECOGIDA DE INFORMACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

La experiencia como docente en las prácticas, me ha permitido conocer los errores y las dificultades más comunes que suelen cometer los estudiantes sobre esta materia, tanto en las dudas que presentaban los alumnos durante las sesiones de clase, como en la corrección de las tareas propuestas que se recogían una vez terminaba la sesión, como en la corrección de la prueba escrita de evaluación formativa que se realizó al finalizar la unidad didáctica.

2.4.1.- OBSERVACIÓN DIRECTA DE LAS TAREAS PROPUESTAS EN CLASE

Después de impartirse la parte de la unidad didáctica de la proporcionalidad directa e inversa y tras realizarse numerosas tareas que fueron corregidas en clase, se comprobó, antes de comenzar la parte de la unidad de porcentajes, el nivel de aprendizaje que los alumnos habían adquirido de los contenidos impartidos hasta ese momento. Para ello, en la sesión nº 5 se recogió, para ser corregida y evaluada, una relación de tareas representativa que se les propusieron a los alumnos, para que las realizasen durante la sesión de clase, con el fin de observar los posibles errores y dificultades que se les iban presentando y poder así actuar para tratar de solventarlos.

A continuación, se relacionan los enunciados de las tareas que fueron seleccionadas. Se trata, básicamente, de problemas en los que el alumno debe detectar si las magnitudes son directamente o inversamente proporcionales y poder posteriormente, calcular el valor desconocido o faltante:

1 ▼▽▽ Indica los pares de magnitudes que son directamente proporcionales (D), los que son inversamente proporcionales (I) y los que no guardan proporcionalidad (X).

a) El tiempo que está encendida una farola y la cantidad de energía que gasta.

b) El número de páginas de un periódico y su precio.

c) La velocidad de un tren y el tiempo que tarda en ir de Córdoba a Badajoz.

d) El peso de un queso y su coste.

e) El caudal de una fuente y el tiempo que tarda en llenar un cántaro.

f) El número de asas de un jarro y su capacidad.

2 ▼▼▽ Un besugo de un kilo y doscientos gramos ha costado 14,40 €. ¿Cuánto costará otro besugo de ochocientos gramos?

3 ▼▼▽ Un autobús de línea, a 80 km/h, tarda 25 minutos en cubrir la distancia entre dos pueblos. ¿Cuánto tardaría si fuera a 100 km/h?

4 ▼▼▽ Un jardinero, con su máquina cortacésped, tarda 18 minutos en segar una parcela de 200 metros cuadrados.

¿Qué superficie puede segar en hora y media?

5 ▼▼▽ Un grifo, con un caudal de 12 litros por minuto, ha tardado tres cuartos de hora en llenar un depósito.

¿Cuál deberá ser el caudal para llenar el mismo depósito en 20 minutos?

A continuación, se muestran los resultados cuantitativos de la observación directa sobre la recogida y corrección de las tareas propuestas y realizadas en clase sobre la proporcionalidad directa e inversa, realizada por los 30 alumnos. Para ello, se tuvo en cuenta la siguiente valoración: 0 para aquellos alumnos que habían cometido errores graves en la resolución de la tarea o no la habían realizado, 1 para los que habían realizado parte de la tarea correctamente, y 2 para los que habían realizado la tarea totalmente correcta. La siguiente gráfica (*figura nº 1*), muestra la distribución de frecuencias de la puntuación total obtenida por los 30 alumnos. La puntuación mediana fue de 5, tres alumnos obtuvieron puntuación 0, y dos la máxima puntuación, esto es, 10.

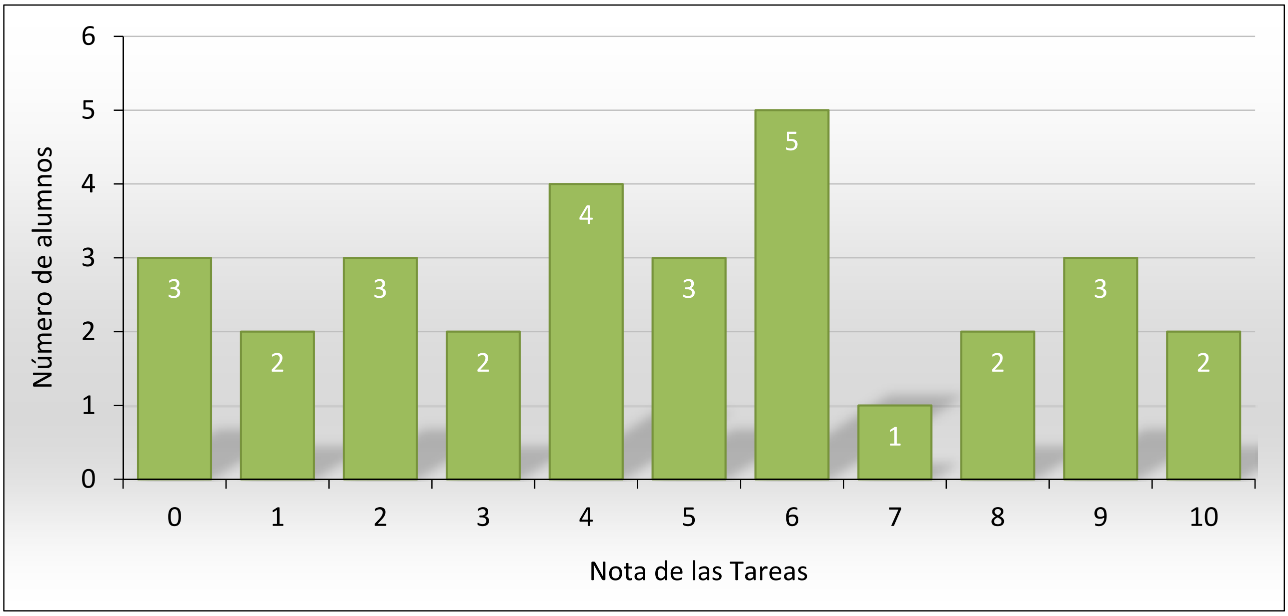


Figura nº 1: Distribución de frecuencias de la nota de las tareas corregidas.

Se describe a continuación los *principales errores y dificultades* observados en las respuestas dadas por los alumnos para cada una de las tareas:

<u>Tarea nº 1:</u>

▼▽▽ Indica los pares de magnitudes que son directamente proporcionales (D), los que son inversamente proporcionales (I) y los que no guardan proporcionalidad (X).

a) El tiempo que está encendida una farola y la cantidad de energía que gasta.

b) El número de páginas de un periódico y su precio.

c) La velocidad de un tren y el tiempo que tarda en ir de Córdoba a Badajoz.

d) El peso de un queso y su coste.

e) El caudal de una fuente y el tiempo que tarda en llenar un cántaro.

f) El número de asas de un jarro y su capacidad.

- ✓ El apartado b) fue marcado por el 65% de los alumnos como magnitudes que son directamente proporcionales: “El número de páginas de un periódico y su precio”.
- ✓ El apartado c) fue marcado por el 70% de los alumnos como magnitudes que son directamente proporcionales: “El tiempo empleado en recorrer una distancia y la velocidad”.

- ✓ El apartado e) fue marcado por el 70% de los alumnos como magnitudes que son directamente proporcionales: “El caudal de un grifo y el tiempo de llenado de un cántaro”.
- ✓ El apartado f) fue marcado por el 30% de los alumnos como magnitudes que son directamente proporcionales: “El número de asa de un jarro y su capacidad”.

De ésta tarea, se puede deducir que el error cometido más frecuente ha sido el de no saber distinguir cuando dos magnitudes son directamente o inversamente proporcionales. A los alumnos parece que les cuesta más identificar las magnitudes que son inversamente proporcionales (mayor número de errores en los apartados c y e). Algunos alumnos llegan a asociar la proporcionalidad directa a que cuando una magnitud crece, la otra también, pero no que este crecimiento debe seguir una razón de proporcionalidad (errores en los apartados b y f).

<u>Tarea nº 2:</u>

▼▼▽ Un besugo de un kilo y doscientos gramos ha costado 14,40 €. ¿Cuánto costará otro besugo de ochocientos gramos?

- ✓ El 20% de los alumnos no supieron plantear la regla de tres simple directa.
- ✓ No distinguen las magnitudes que son directamente proporcionales, planteando para la magnitud 1, el número de besugos y para la magnitud 2, el precio del besugo en € por kilo:

$$\begin{array}{ccc} \textit{Besugos.} & & \textit{Precio } (€/kg). \\ 1 & \rightarrow & 14{,}40 \\ 2 & \rightarrow & x \end{array}$$

- ✓ Plantean correctamente la regla de tres simple directa, pero construyen erróneamente las fracciones equivalentes para resolver el problema.

$$\begin{array}{ccc} \textit{kg de besugo.} & & \textit{Precio } (€). \\ 1{,}20 & \rightarrow & 14{,}40 \\ 0{,}80 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$\frac{1{,}20}{0{,}80} = \frac{x}{14{,}40}$$

- ✓ Operan con números decimales incorrectamente.
- ✓ No despejan adecuadamente la x de una ecuación:

$$0{,}80x = 17{,}28$$

$$x = 17{,}28 - 0{,}80$$

$$x = 16{,}48$$

- ✓ No identifican en la solución la unidad de la magnitud preguntada.

De ésta tarea, puede deducirse que el error más común cometido es el de saber distinguir convenientemente del enunciado del problema, las magnitudes que son directamente proporcionales. En segundo lugar, saber construir las fracciones equivalentes una vez planteada la regla de tres directa. En tercer lugar, operar correctamente con números decimales (multiplicación y división) y, por último, saber despejar el valor desconocido.

<u>Tarea nº 3:</u>

> ▼▼▽ Un autobús de línea, a 80 km/h, tarda 25 minutos en cubrir la distancia entre dos pueblos. ¿Cuánto tardaría si fuera a 100 km/h?

- ✓ El 25% de los alumnos no supieron plantear la regla de tres simple inversa.
- ✓ Muestran muchas dificultades en distinguir las magnitudes que son inversamente proporcionales. Más del 70% de los alumnos plantearon el problema como uno de proporcionalidad directa:

$$\begin{array}{ccc} Velocidad\ (km/h). & & Tiempo\ (minutos). \\ 80 & \rightarrow & 25 \\ 100 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$\frac{80}{100} = \frac{25}{x}$$

$$80x = 100 \cdot 25$$

$$x = 31{,}25\ minutos.$$

- ✓ Operan con números decimales incorrectamente.
- ✓ No despejan adecuadamente la x de la ecuación.
- ✓ No identifican en la solución la unidad de la magnitud preguntada.

De ésta tarea, puede deducirse que el error cometido más común es el de saber distinguir convenientemente del enunciado del problema, las magnitudes que se relacionan. En segundo lugar, saber discernir si las magnitudes son directamente o inversamente proporcionales. En tercer lugar, operar correctamente con números decimales (multiplicación y división) y, por último, saber despejar el valor desconocido.

<u>Tarea nº 4:</u>

> ▼▼▽ Un jardinero, con su máquina cortacésped, tarda 18 minutos en segar una parcela de 200 metros cuadrados.
> ¿Qué superficie puede segar en hora y media?

- ✓ El 70 % de los alumnos no unificaron las unidades de las magnitudes o lo hicieron erróneamente, a la hora de plantear la regla de tres directa.

$$\begin{array}{ccc} Tiempo\ (horas). & & Superficie\ (m^2). \\ 0{,}18 & \rightarrow & 200 \\ 1{,}50 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$\frac{0{,}18}{1{,}50} = \frac{200}{x}$$

$$0{,}18x = 1{,}5 \cdot 200$$

$$x = 1.666{,}6\ m^2.$$

De ésta tarea, se puede deducir que el error cometido más común es el de saber distinguir convenientemente del enunciado del problema, las magnitudes que se relacionan y operar convenientemente para pasar de una unidad a otra en el sistema métrico decimal.

<u>Tarea nº 5:</u>

▼▼▽ Un grifo, con un caudal de 12 litros por minuto, ha tardado tres cuartos de hora en llenar un depósito.
¿Cuál deberá ser el caudal para llenar el mismo depósito en 20 minutos?

- ✓ El 70 % de los alumnos no unificaron las unidades de las magnitudes o lo hicieron erróneamente, a la hora de plantear la regla de tres inversa.

$$\begin{array}{ccc} Caudal\ (l/m). & & Tiempo\ (horas). \\ 12 & \rightarrow & 0{,}75 \\ x & \rightarrow & 0{,}20 \end{array}$$

- ✓ El 74 % de los alumnos plantean la resolución del problema aplicando la regla de tres directa.

$$\begin{array}{ccc} Caudal\ (l/m). & & Tiempo\ (horas). \\ 12 & \rightarrow & 0{,}75 \\ x & \rightarrow & 0{,}20 \end{array}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{0{,}75}{0{,}20}$$

$$12 \cdot 0{,}20 = x \cdot 0{,}75$$

$$x = 3{,}2\ l/m.$$

- ✓ El 50 % de los alumnos no plantearon correctamente la regla de tres inversa al colocar los valores en las magnitudes que no les correspondían:

$$\begin{array}{ccc} Caudal\ (l/m). & & Tiempo\ (horas). \\ 12 & \rightarrow & 0{,}75 \\ 0{,}20 & \rightarrow & x \end{array}$$

De ésta tarea, puede deducirse que el error cometido más común es el de saber distinguir convenientemente del enunciado del problema, las magnitudes que se relacionan. En segundo lugar, saber discernir si las magnitudes son directamente o inversamente proporcionales. En tercer lugar, plantear correctamente la regla de tres inversa y, por último, operar convenientemente para pasar de una unidad a otra en el sistema métrico decimal.

2.4.2.- PRUEBA DE EVALUACION AL FINAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Al finalizar la unidad didáctica, los alumnos fueron examinados mediante una prueba de evaluación formativa por escrito (*figuras nº 2 y nº 3*), para comprobar si éstos aprendieron los contenidos y alcanzaron los objetivos que se habían propuesto.

El examen, que sólo fue aprobado por el 57% de los alumnos, constaba de 10 tareas igualmente valoradas cada una de ellas con un punto.

Dichas tareas fueron fijadas según los siguientes criterios de evaluación recogidos en el anexo nº 1 del R.D. 1105/2014, para el contenido de proporcionalidad y porcentajes:

1. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.

Además, con este examen, se pudo comprobar si finalmente los alumnos habían alcanzado los siguientes estándares de evaluación, recogidos en el anexo nº 1 del R.D. 1105/2014:

1.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.

1.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente proporcionales.

Prueba escrita para el alumnado de 1º ESO A
Tema 9: Proporcionalidad y porcentajes

NOMBRE____

1. **Calcula**
   a. 50% de 80 =
   b. 25% de 80 =
   c. 50% de 24 =
   d. 25% de 24 =
   e. 20% de 35 =
   f. 10% de 450 =

2. **En mi clase somos 24; el 50%, chicas. ¿Cuántas chicas somos en clase?**

3. **Se han hecho 1000 papeletas para una rifa y ya se ha vedido el 75%. ¿Cuántas papeletas se han vendido? ¿Cuántas quedan?**

4. **Al comprar un jersey que costaba 80 euros, me han rebajado el 10%. ¿Cuánto me han rebajado?**

5. **Roberto compra unos pantalones de 60 €, pero le hacen una rebaja del 20%. ¿Cuánto le rebajan? ¿Cuánto paga?**

Figura nº 2: Primera parte de la prueba final de evaluación formativa.

Prueba escrita para el alumnado de 1º ESO A
Tema 9: Proporcionalidad y porcentajes

NOMBRE____

6. **Di si son o no directamente proporcionales:**
   a. El peso de una sandía y su precio
   b. La edad de una persona y su altura
   c. El tiempo que caminas a velocidad constante y la distancia que recorres
   d. La talla de un pantalón y su precio
   e. El tiempo que permanece abierto un grifo y la cantidad de agua que arroja

7. **Di cuáles de las magnitudes siguientes son inversamente proporcionales**
   a. El número de operarios que descargan un camión y el tiempo que tardan
   b. La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir la distanca entre dos ciudades
   c. El precio de las manzanas y los kilos que puedo comprar con el dinero que llevo
   d. La capacidad de un vaso y el número de vasos necesarios para llenar una determinada jarra

8. **Un pintor barniza tres ventanas en una hora. ¿Cuántas ventanas barnizará en una jornada de 8 horas?**

9. **Cuatro cajas de galletas pesan 2,4 kg. ¿Cuánto pesarían cinco cajas iguales a las anteriores?**

10. **Cuatro segadores cortan un campo de heno en tres horas. ¿Cuánto tardará un solo segador? ¿Y seis segadores?**

Figura nº 3: Segunda parte de la prueba final de evaluación formativa.

A continuación, se muestran los resultados cuantitativos de la prueba final de evaluación escrita, propuesta sobre proporcionalidad directa e inversa, realizada a los alumnos. Para ello, se tuvo en cuenta la siguiente valoración: 0 para aquellos alumnos que habían cometido errores graves en la resolución de la tarea o no la habían realizado, 0,5 para los que habían realizado parte de la tarea correctamente, y 1 para los que habían realizado la tarea totalmente correcta. En la siguiente gráfica (*figura nº 4*), se muestra la distribución de frecuencias de la puntuación total obtenida por los 30 alumnos que realizaron la prueba. La puntuación mediana fue de 5, dos alumnos obtuvieron puntuación 0, y dos la máxima puntuación, esto es, 10.

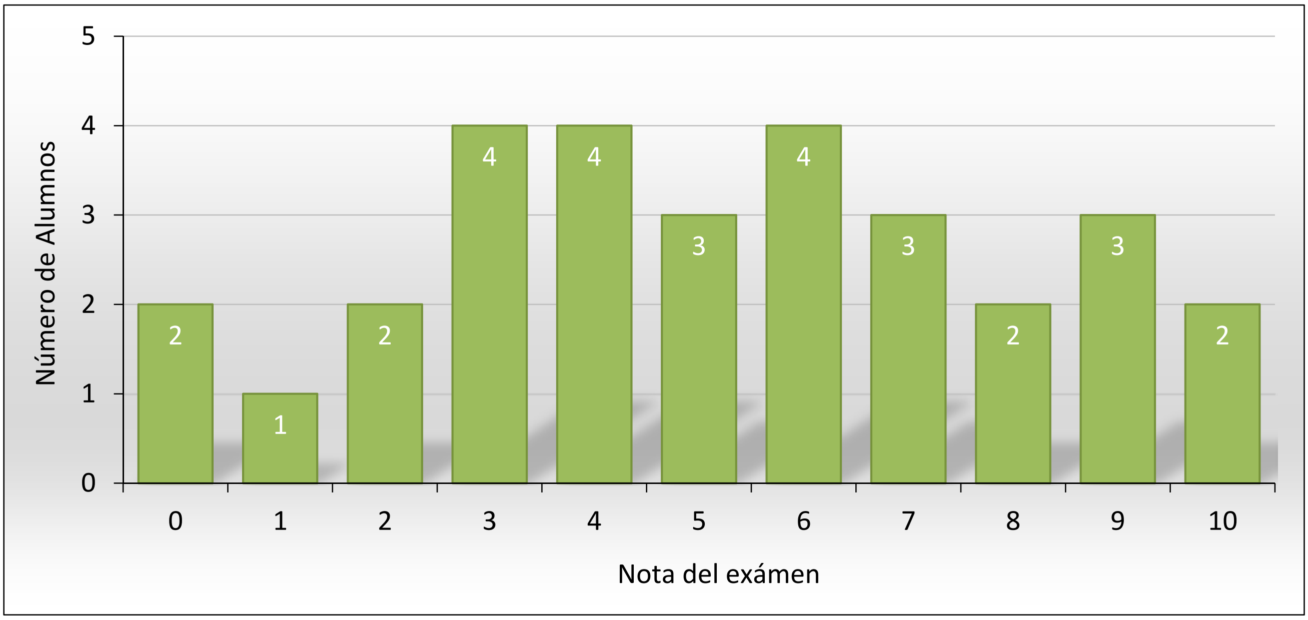


Figura nº 4: Distribución de frecuencias de la nota del examen.

Se describen, a continuación, los *principales errores y dificultades* observados en las respuestas dadas por los alumnos, para cada una de las tareas:

<u>Tarea nº 1:</u> Calcula:

a) 50% de 80 =
b) 25% de 80 =
c) 50% de 24 =
d) 20% de 35 =
e) 10% de 450 =

- ✓ El 80% de los alumnos mostraron dificultades a la hora de realizar las operaciones mentalmente, pese a que en ninguno de los apartados aparecen operaciones con decimales difíciles de calcular.
- ✓ Presentan errores a la hora de operar con decimales (multiplicaciones y divisiones).
- ✓ Uno de los alumnos marca la solución como un porcentaje, es decir:

$$50\% \; de \; 80 = 40\%$$

- ✓ Dos de los alumnos multiplican la cantidad por el tanto, pero no la dividen por cien:

$$50\% \; de \; 80 = 50 \cdot 80 = 4000$$

- ✓ Cuatro de los alumnos dejan esta tarea prácticamente en blanco.

De ésta tarea, puede deducirse que el error cometido más común es el de operar correctamente con números decimales, en segundo lugar, los errores relativos a notaciones y, en tercer lugar, los errores conceptuales y procedimentales al calcular el porcentaje de una cantidad.

<u>Tarea nº 2:</u> En mi clase somos 24; el 50 %, chicas. ¿Cuántas chicas somos en clase?

- ✓ Tan sólo dos de los alumnos en clase responden mal a ésta pregunta; uno de ellos responde ¿26? Y el otro da una respuesta errónea al equivocarse en la operación de la división:

$$50\%\ de\ 24 = 24 : 2 = 14$$

De ésta tarea, puede deducirse que el error cometido más común es el operar correctamente (división) y, por otra parte, la dificultad conceptual a la hora de calcular el porcentaje de una cantidad.

<u>Tarea nº 3:</u> Se han hecho 1000 papeletas para una rifa y ya se ha vendido el 75%. ¿Cuántas papeletas se han vendido? ¿Cuántas quedan?

- ✓ Tres de los alumnos en clase responden mal a ésta pregunta; dos de ellos la dejan en blanco y otro comete un error a la hora de operar con decimales:

$$75\%\ de\ 1.000 = 1000 \cdot \frac{75}{100} = 1000 \cdot 0{,}75 = 200\ papeletas\ se\ han\ vendido.$$

$$1000 - 200 = 800\ papeletas\ quedan\ por\ vender.$$

- ✓ Uno de los alumnos divide por el ciento, pero no lo multiplica por el tanto, es decir:

$$75\%\ de\ 1.000 = 1000 \cdot \frac{75}{100} = 1000 : 100 = 10\ papeletas\ se\ han\ vendido.$$

$$1000 - 10 = 990\ papeletas\ quedan\ por\ vender.$$

De ésta tarea, puede deducirse que el error cometido más común es el de operar correctamente con números decimales (multiplicación) y, por otra parte, el error conceptual a la hora de calcular el porcentaje de una cantidad.

<u>Tarea nº 4:</u> Al comprar un jersey que costaba 80 euros, me han rebajado el 10%. ¿Cuánto me han rebajado?

- ✓ Dos de los alumnos asocian el problema a un cálculo de decremento porcentual y, además, proceden en el cálculo erróneamente:

$$80€ - 10\% = 70€.\ \ Me\ han\ rebajado\ 10€.$$

- ✓ Tres de los alumnos dejan el problema en blanco.

De ésta tarea, puede deducirse que el error cometido más común es conceptual que es el de calcular el porcentaje de una cantidad.

<u>Tarea nº 5:</u> Roberto compra unos pantalones de 60 euros, pero le hacen una rebaja del 20%. ¿Cuánto le rebajan? ¿Cuánto paga?

- ✓ Tres de los alumnos entienden que es un problema de decremento porcentual, pero proceden erróneamente:

$$60€ - 20\% = 40€. \ Me\ ha\ costado\ 40€\ y\ me\ han\ rebajado\ 20€.$$

- ✓ Un 27 % de los alumnos dejan el problema en blanco.

De ésta tarea, pueden deducirse que los errores cometidos más comunes son conceptuales, que son el de calcular el porcentaje de una cantidad y el de calcular el decremento porcentual.

<u>Tarea nº 6:</u> Di si son o no directamente proporcionales:

- ***a) El peso de una sandía y su precio.***
- ***b) La edad de una persona y su altura.***
- ***c) El tiempo que caminas a velocidad constante y la distancia que recorres.***
- ***d) La talla de un pantalón y su precio.***
- ***e) El tiempo que permanece abierto un grifo y la cantidad de agua que arroja.***

- ✓ Dos de los alumnos dejan la tarea en blanco.
- ✓ Más del 50% de los alumnos comete al menos un fallo en alguno de los apartados.

De ésta tarea, se deduce que el error cometido más frecuente es conceptual, que es el de no saber distinguir cuando dos magnitudes son directamente proporcionales. La mayoría de los alumnos que cometen algún fallo en esta tarea es porque llegan a asociar la proporcionalidad directa a que cuando una magnitud crece, la otra también, pero no que este crecimiento debe seguir una razón de proporcionalidad (detectándose un mayor número de errores en los apartados b y d).

<u>Tarea nº 7:</u> Di cuales de las magnitudes siguientes son inversamente proporcionales:

- ***a) El número de operarios que descargan un camión y el tiempo que tardan.***
- ***b) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en cubrir la distancia entre dos ciudades.***
- ***c) El precio de las manzanas y los kilos que puedo comprar con el dinero que llevo.***
- ***d) La capacidad de un vaso y el número de vasos necesarios para llenar una determinada jarra.***

- ✓ Dos de los alumnos dejan la tarea en blanco.
- ✓ Más del 80% de los alumnos comete al menos un fallo en alguno de los apartados.

De ésta tarea se deduce que el error cometido más frecuente es conceptual, que es el de no saber distinguir cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales. A los alumnos parece que les cuesta más identificar las magnitudes que son inversamente proporcionales, detectándose un mayor número de errores en los apartados b, c y d.

<u>Tarea nº 8:</u> Un pintor barniza tres ventanas en una hora. ¿Cuántas ventanas barnizará en una jornada de 8 horas?

- ✓ Tan solo tres de los alumnos deja el problema en blanco, el resto lo soluciona correctamente, aunque no todos planteando la regla de tres directa.

De ésta tarea, puede deducirse que la mayor dificultad presentada es la de saber distinguir convenientemente del enunciado del problema las magnitudes que se relacionan, los datos que se presentan, el dato que se pide y las operaciones que hay que realizar.

<u>Tarea nº 9:</u> Cuatro cajas de galletas pesan 2,4 kg. ¿Cuánto pesarían cinco cajas iguales a las anteriores?

- ✓ El 30% de los alumnos no supieron plantear la regla de tres simple directa, o la plantearon incorrectamente al colocar los valores en las magnitudes que no les correspondían:

$$\begin{array}{ccc} Peso\ (kg). & & Cajas. \\ 2{,}4 & \rightarrow & 4 \\ 5 & \rightarrow & x \end{array}$$

- ✓ Plantean correctamente la regla de tres simple directa, pero construyen erróneamente las fracciones equivalentes para resolver el problema.

$$\begin{array}{ccc} Cajas. & & Peso\ (kg). \\ 4 & \rightarrow & 2{,}4 \\ 5 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$\frac{4}{2{,}4} = \frac{x}{5}$$

- ✓ Operan incorrectamente (multiplicación y división) con números decimales.

$$\frac{4}{2{,}4} = \frac{x}{5}$$

$$2{,}4x = 20$$

$$x = \frac{20}{2{,}4}$$

$$x = 12$$

- ✓ No identifican en la solución la unidad de la magnitud preguntada.

- ✓ No despejan adecuadamente la x de la ecuación:

$$4x = 5 \cdot 2{,}4$$

$$x = 12 - 4$$

$$x = 8\ kg.$$

De ésta tarea, puede deducirse que el error cometido más común es el de saber distinguir convenientemente del enunciado del problema las magnitudes que se relacionan y reconocer que son directamente proporcionales. En segundo lugar, saber plantear correctamente la regla de tres directa. En tercer lugar, construir correctamente las fracciones equivalentes. En cuarto lugar, operar sin errores (multiplicación y división) y, por último, saber despejar el valor desconocido en una ecuación.

<u>Tarea nº 10:</u> Cuatro segadores cortan un campo de heno en tres horas. ¿Cuánto tardará un solo segador? ¿Y seis segadores?

- ✓ El 25% de los alumnos no supieron plantear la regla de tres simple inversa.
- ✓ Muestran muchas dificultades en distinguir las magnitudes que son inversamente proporcionales. Más del 73% de los alumnos plantearon el problema como uno de proporcionalidad directa:

$$\begin{array}{ccc} Nº\ de\ segadores. & & Tiempo\ (horas). \\ 4 & \rightarrow & 3 \\ 6 & \rightarrow & x \end{array}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{3}{x}$$

$$4x = 6 \cdot 3$$

$$x = 4{,}5\ horas.$$

- ✓ Operan incorrectamente (multiplicación y división) con números.
- ✓ No despejan adecuadamente la x de la ecuación.

$$4x = 18$$

$$x = 18 - 4$$

$$x = 14\ horas.$$

De ésta tarea, puede deducirse que el error cometido más común es el de saber distinguir correctamente del enunciado del problema las magnitudes que se relacionan, y reconocer que son inversamente o directamente proporcionales. En segundo lugar, saber construir correctamente las fracciones equivalentes una vez planteada la regla de tres inversa. En tercer lugar, operar sin errores con números decimales (multiplicación y división) y, por último, saber despejar el valor desconocido en la ecuación.

3.- CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE LA PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

En esta sección, se incluye el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza docente experimentado, orientado hacia la identificación de propuestas de cambio. En primer lugar, se describe brevemente el marco teórico usado para plantear el problema, las cuestiones centrales de la indagación y la metodología que se aplica en los procesos de enseñanza.

Dado que la emisión de un juicio sobre la idoneidad en un proceso de enseñanza-aprendizaje, requiere establecer previamente un marco de referencia, se ha procedido (apartado 3.2) a buscar y sintetizar publicaciones de innovaciones e investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad y porcentajes, clasificando los resultados en las facetas epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional, según propone la teoría de la idoneidad didáctica (Godino, 2013).

3.1.- MARCO TEÓRICO, PROBLEMA Y METODOLOGÍA

Como indican Godino y Batanero (2008), el valor de la reflexión sobre la experiencia como un medio para estimular el aprendizaje ha sido destacado desde hace varias décadas. Estos autores describen la *reflexión* como *una continua interacción entre el pensamiento y la acción*; y describen al *práctico reflexivo* como la persona que *reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura*.

Como recogen Godino y Batanero (2008), en trabajos más recientes de diversos campos se ha introducido el concepto de *reflexión guiada* como *un proceso de indagación innovador en el que el práctico es asistido por un mentor (o guía) mediante un proceso de auto-indagación, desarrollo, y aprendizaje a través de la reflexión, con el fin de llegar a ser enteramente efectivo*. También recogen, cómo en el campo de la formación de profesores, se pueden encontrar numerosas referencias relativas a investigaciones en las que se desarrollan y experimentan técnicas específicas de *"reflexión guiada"*.

En este caso, se va a aplicar como herramienta o guía para la reflexión, la noción de idoneidad didáctica. Esta noción teórica, sus dimensiones, criterios, y desglose operativo, pueden consultarse en los trabajos de Godino y colaboradores (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, 2013) como herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula.

La idoneidad didáctica tiene en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e interaccional-mediacional implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas.

La *idoneidad didáctica de un proceso de instrucción* se define *como la articulación coherente y sistémica de seis componentes* (Godino, 2013):

1. ***Idoneidad epistémica***, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

2. ***Idoneidad cognitiva***, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

3. ***Idoneidad afectiva***, grado de implicación (interés, motivación, etc.) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución, como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

4. ***Idoneidad interaccional.*** Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad, desde el punto de vista interaccional, si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y, por otra parte, permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

5. ***Idoneidad mediacional***, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

6. ***Idoneidad ecológica***, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

El problema que se abordará en esta sección del Trabajo Fin de Máster, se puede formular en los siguientes términos:

- ***¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje, sobre la proporcionalidad y porcentajes, experimentado durante el periodo de prácticas en primero de la E.S.O.?***

- ***¿Qué cambios se podrían introducir, en el diseño e implementación del proceso de estudio, para incrementar su idoneidad didáctica?***

En el marco de la teoría de la idoneidad didáctica, se establece que, para poder emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático, es imprescindible realizar una reconstrucción de los significados de referencia didáctica del tema correspondiente. Ello requiere proceder a una revisión sistemática de los resultados de las innovaciones e investigaciones realizadas en educación matemática, sobre los aspectos epistémicos, ecológicos, cognitivos, afectivos, interaccionales y mediacionales del tema en cuestión. Esto lleva a plantear una cuestión previa:

- ***¿Cuáles son los resultados de las innovaciones e investigaciones previas realizadas sobre la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad y porcentajes?***

Estas serán las cuestiones que se abordarán en las siguientes secciones de esta parte del trabajo.

3.2.- CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE LA PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

Como se ha indicado, el objetivo del proceso formativo es llevar al futuro profesor, a un análisis de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza cursado, orientado hacia la identificación de propuestas de cambio fundamentadas. Es por ello por lo que, en primer lugar, se ha realizado una recopilación y síntesis de las principales investigaciones e innovaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad y porcentajes, para construir un fundamento que oriente la reflexión final. Con ayuda del tutor se identificaron, sintetizaron y clasificaron, los conocimientos didáctico-matemáticos sobre la proporcionalidad, de acuerdo a las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica.

En este apartado, se incluyen los principales resultados de dicha síntesis, que serán usados como apoyo para valorar de manera fundamentada, la idoneidad didáctica de la experiencia de enseñanza descrita en la sección 2.

3.2.1.- FACETA EPISTÉMICA

Desde una perspectiva epistémica, la proporcionalidad puede ser desarrollada desde tres enfoques o puntos de vista; uno centrado en la noción de proporción (enfoque aritmético), el otro centrado en la noción de función (enfoque algebraico) y el último, centrado en la semejanza de figuras (enfoque geométrico).

ENFOQUE ARITMÉTICO (PROPORCIÓN):

Primeramente, habrá que detenerse en el análisis de los conceptos de *razón* y *proporción*.

Godino y Batanero (2003) hacen un estudio sistemático de la proporcionalidad desde el punto de vista de la formación matemática y didáctica de los maestros de educación primaria. Estos autores resaltan la importancia de clarificar los conceptos ligados a la proporcionalidad, en particular las nociones de razón, la proporción y las magnitudes proporcionales, las cuales se desarrollarán a continuación brevemente:

- *Razón:*

Se denomina *razón* de dos números reales, a la comparación entre una parte y otra parte, denominándose a los números que se comparan, *términos de la razón*. *"Razón"* no siempre es sinónimo de "*fracción*", lo cual puede acarrear dificultades de comprensión para los estudiantes. La idea clave es que la fracción es cualquier par ordenado de números enteros, cuya segunda componente es distinta de cero; mientras que una razón es un par ordenado de cantidades de magnitudes. Cada una de esas cantidades vienen expresadas mediante un número real y una unidad de medida.

El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones:

- ✓ Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos.

- ✓ Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado.

- ✓ Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. Por ejemplo, la razón "c" a "d", se puede denotar como "c:d", o "c → d".

- ✓ En las razones, el segundo componente puede ser cero.

- ✓ Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado. Esta es una diferencia principal entre "razón" y "fracción", ya que las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.

- ✓ Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos (2:5), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos (3:7) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas fracciones se puede definir una "suma de razones" del siguiente modo: 2:5 + 3:7 = 5:12. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones.

Dos razones son inversas cuando los términos de una son los mismos de la otra, pero dispuestos en orden inverso.

- *Proporción:*

Se define proporción a la expresión de igualdad de dos razones. En este caso, una proporción aparece en general bajo la forma de una igualdad entre dos fracciones equivalentes, esto es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. En consecuencia, el producto cruzado de los numeradores y denominadores serán iguales entre sí, es decir, $a \cdot d = b \cdot c$.

Para este primer desarrollo o enfoque, el aritmético, se reconocen dos procedimientos algorítmicos de acuerdo al tipo de problema que se trate: problemas de comparación o de valor faltante.

Para *problemas de comparación*, el procedimiento de resolución es netamente aritmético, la proporción es la relación de igualdad entre las dos razones, esto es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, con a, b, c y d números reales cualesquiera, donde $a \cdot d = b \cdot c$.

Para *problemas de valor faltante*, en el procedimiento de resolución, la proporción es una relación de igualdad entre las dos razones, en la que uno de los términos es un valor desconocido, esto es $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, donde a, b y c son números reales cualesquiera y x es el valor faltante.

▪ *Magnitudes proporcionales:*

Dadas dos magnitudes A y B, se dice que son directamente proporcionales si están en correspondencia, de tal manera que los valores numéricos de las medidas de las cantidades que se corresponden, forman dos series de números proporcionales entre sí.

Se dice que dos magnitudes A y B, son inversamente proporcionales si los valores[1] tomados de la magnitud A y los inversos de los valores tomados de la magnitud B, forman dos series proporcionales. Esta situación se presenta cuando el producto de valores tomados de las magnitudes A y B es constante.

Porcentajes: La notación de porcentajes y el razonamiento de proporcionalidad, que se pone en juego cuando uno de los términos que intervienen en las proporciones toma el valor 100, se utiliza en una amplia variedad de situaciones de la vida diaria. La expresión "x %" es una manera alternativa de expresar la fracción $x/100$, pero el concepto de porcentaje proviene de la necesidad de comparar dos números entre sí, no sólo de manera absoluta (cuál de los dos es mayor), sino de una manera relativa, es decir, se desea saber qué fracción o proporción de uno representa respecto del otro. En estas situaciones se suele utilizar el número 100, que es bien familiar, como referencia. Al situarlo como denominador de una fracción, su numerador nos indica qué porción de 100 representa.

Con la expresión "*regla de tres*" se designa un procedimiento, que se aplica a la resolución de problemas de proporcionalidad, en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y se requiere calcular el cuarto (valor desconocido o valor faltante). Aplicando correctamente el razonamiento, supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución de problemas de proporcionalidad, ya que se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero. Aunque con frecuencia, muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo que están haciendo; en cierto modo, el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. Por lo que el alumno puede quedarse atrapado en las manipulaciones numéricas, vacías del significado relativo a las razones y las proporciones.

ENFOQUE ALGEBRAICO (FUNCIÓN):

Para este segundo tipo de desarrollo o enfoque, desde la perspectiva funcional, algunos autores conciben el razonamiento proporcional como un razonamiento que involucra una función lineal en un sistema de dos variables, que permite llegar a conclusiones acerca de una situación o un fenómeno que puede ser caracterizado por una razón constante. Así pues, el modelo matemático es una función de la forma $y = k \cdot x$, en el que k es la razón constante unitaria, generalmente conocida como constante de proporcionalidad. La gráfica cartesiana de este tipo de función es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

---

[1] Dicho de manera más precisa, "si los valores numéricos de las medidas de las cantidades de magnitud, …" Usualmente no se suelen distinguir con claridad los conceptos de magnitud, cantidad, unidad de medida, medida de una cantidad, valor numérico de la medida, lo cual puede ser fuente de confusión. De hecho, en el libro de texto usado en la experiencia de enseñanza, no se hacen estas distinciones conceptuales, lo cual podría explicar algunas dificultades manifestadas por los estudiantes.

De esta manera, el razonamiento proporcional es conceptualizado en los siguientes pasos:

1. Identificación de dos variables que se relacionan proporcionalmente “a” y “b”.

2. Reconocimiento de la constante de proporcionalidad $k = \frac{a}{b}$, que determina la función lineal dada por $y = k \cdot x$.

3. La aplicación de los datos y relaciones dados para encontrar un valor adicional de una variable extensiva (problemas de valor faltante) o comparación de dos valores de la variable intensiva.

En muchas situaciones prácticas, se establecen relaciones entre las cantidades de dos magnitudes (en tablas de valores), de tal modo, que las cantidades de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número (constante de proporcionalidad) las distintas cantidades de la otra. En general, se dice que dos series de números, con el mismo número de elementos, son proporcionales entre sí, si existe un número real fijo k, llamado razón de proporcionalidad, que permite escribir cada valor de la segunda serie como producto de k por los valores correspondientes de la primera serie. A esta función lineal, también se le conoce como función de proporcionalidad.

La relación entre ambas series de números, también se puede describir diciendo que se establece una aplicación lineal de coeficiente k, entre los conjuntos numéricos correspondientes: $f(A) \to B$, cumpliéndose que, $f(k \cdot \mathrm{a}) = k \cdot f(\mathrm{a})$, y además que $f(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = f(\mathrm{a}) + f(\mathrm{b})$.

Conexión entre las expresiones de la proporcionalidad como proporción y como función lineal:

Se puede observar que para una razón conocida de “a” es a “b”, de la expresión $y = k \cdot x$, se puede escribir $y = \frac{a}{b}x$, de la cual se puede obtener la proporción donde $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$

Aunque, se debe discernir, que estas dos interpretaciones se refieren a dos formas de desarrollo diferentes del conocimiento relativo a la proporcionalidad.

ENFOQUE GEOMÉTRICO (SEMEJANZA):

Este enfoque o desarrollo geométrico de la proporcionalidad, se basa en el principio de que la génesis de la proporción, debe buscarse en la percepción de las figuras. Se parte de que el alumno sabrá dibujar una figura proporcional a un modelo dado, antes de aprender el concepto de proporción por su desarrollo aritmético o algebraico.

La razón principal para el estudio de las proporciones en el dominio espacial es que, según la mayoría de autores, el análisis de los estudios es mucho más fácil que en terreno no geométrico. Y esto es debido a que el alumno, antes de saber razonar sobre figuras semejantes, sabe discernir, sólo por simple percepción, si determinadas figuras están o no en la misma razón de proporcionalidad.

De una manera informal la *semejanza* puede definirse como la variación en tamaño entre dos objetos o cuerpos, pero manteniendo sus formas idénticas. Se puede decir entonces que, dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma, pero sus tamaños son diferentes.

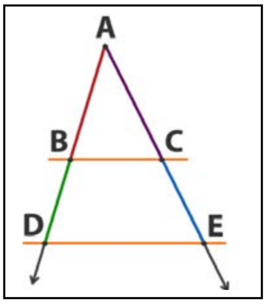
Godino y Ruiz (2002) hacen un estudio sistemático de la proporcionalidad geométrica desde el punto de vista de la formación matemática y didáctica de los maestros de educación primaria. Estos autores desarrollan el concepto de las transformaciones semejantes de figuras geométricas introduciendo previamente los conceptos de la razón de segmentos y de los segmentos proporcionales:

- *Razón de segmentos:* El proceso de medir una longitud consiste en encontrar el número de veces que tenemos que usar otra longitud, tomada como unidad, para cubrir la longitud dada siguiendo una técnica precisa. La medida que se obtiene depende de la unidad elegida, y puede ser un número natural, racional, o irracional. Si se elige un segmento "*u*" como unidad de medida, se puede asignar a cualquier otro segmento un número real, que será su medida con la unidad "*u*". La razón entre dos segmentos se define como la razón numérica entre sus respectivas medidas usando una unidad determinada. Simbólicamente,

$$\frac{PQ}{RS} = \frac{m_u(PQ)}{m_u(RS)};$$

donde $m_u(PQ)$ y $m_u(RS)$ indican las medidas de los segmentos PQ y RS con la unidad "*u*".

- *Segmentos proporcionales:* Se dice que dos pares de segmentos son proporcionales si las razones que se establecen entre cada par son iguales. Una fuente inagotable de segmentos proporcionales la da el *Teorema de Thales*: "*Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.*" Simbólicamente, según la *figura nº 5*:



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

Figura nº 5.

Una consecuencia directa del teorema de Thales es que, toda paralela a un lado de un triángulo determina con los otros dos un nuevo triángulo cuyos lados son proporcionales a los del primero, es decir se construye un nuevo triángulo semejante al primitivo (semejanza de triángulos).

- *Transformaciones semejantes:* Las Isometrías son un tipo de transformaciones que se pueden aplicar a las figuras planas, de tal manera que hacen conservar las longitudes y los ángulos de las figuras a las que se aplican. Estas son básicamente las traslaciones, los giros, las simetrías y cualquier combinación de las anteriormente citadas. Existe también un tipo de transformaciones que no conservan las longitudes, pero si los ángulos. Éstas son las homotecias (dilataciones o contracciones), que conservan la forma de las figuras y, por tanto, los ángulos y la proporción entre los elementos correspondientes.

Sea O un punto del plano y k un número real positivo. Una homotecia de centro O y factor de escala k (*figura nº 6*) es la transformación geométrica que convierte cada punto A del plano, distinto de O, en el punto A' situado en la semirrecta OA, de tal manera que OA' = k·OA y deja invariante el punto O. Cuando el factor de escala (k) es mayor que 1, la imagen de la figura transformada por la homotecia será mayor a la original, y se dirá que la transformación es una expansión. Si k < 1 la transformación de tamaño es una contracción. Finalmente, si k = 1, todos los puntos permanecen en su misma posición y la transformación es la identidad.

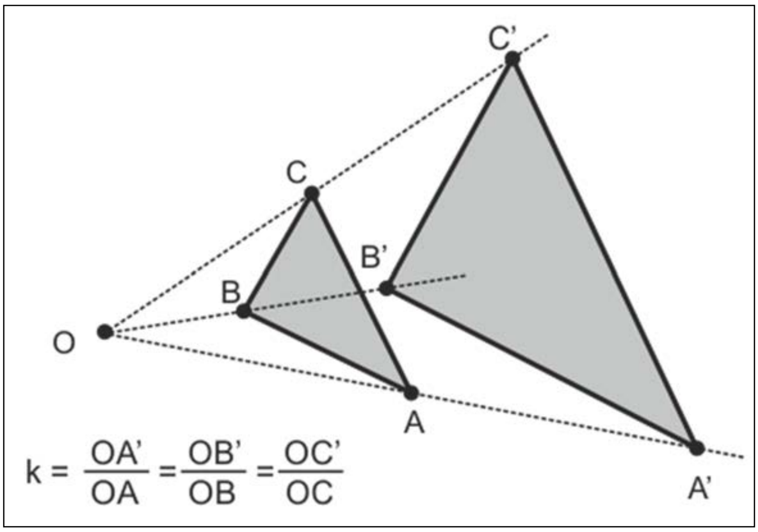


Figura nº 6: Homotecia de centro O y factor de escala k.

Toda *semejanza* o *transformación de semejanza* es la composición de una homotecia y una isometría (traslación, giro, simetría o combinación entre ellos). Así pues, dos figuras son semejantes si todos sus ángulos son iguales (congruentes) y las longitudes de sus lados correspondientes (homólogos) son proporcionales.

3.2.2.- FACETAS COGNITIVA Y AFECTIVA

En esta sección se presentará una síntesis de conocimientos sobre aspectos del aprendizaje de la proporcionalidad tomando como fuente principal la tesis doctoral de Fernández Lajusticia (2001). De acuerdo con este autor, es a Piaget a quien posiblemente se deba uno de los usos más difundidos del término razonamiento proporcional en el ámbito de la didáctica. Éste considera, esta forma de razonamiento, como una de las ocho fases básicas que caracterizan el nivel de desarrollo formal de la persona. El razonamiento proporcional se adquiere en el estadio de las operaciones formales, en el que se requiere del uso de un razonamiento hipotético deductivo, el cual le permite al sujeto utilizar una relación matemática (razón) y a partir de ésta deducir una segunda relación también matemática (proporción). El razonamiento proporcional, como uno de los componentes importantes del pensamiento formal es, por tanto, alcanzado en la adolescencia. Las nociones de comparación y covariación son la base del razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción. El desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales, en los primeros niveles de la adolescencia, obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una gran variedad de disciplinas, que van desde el álgebra, la aritmética o la geometría hasta algunos aspectos de la biología, la física y la química.

Sin embargo, diversas investigaciones recientes, han demostrado que la adquisición de la buena destreza de razonamiento proporcional, es insatisfactoria en cualquier rango de edad de la población en general. Esta destreza se desarrolla más lentamente de lo que se había supuesto; incluso hay evidencias de que una gran parte de las personas nunca la adquieren en absoluto, debido a que esta cuestión no se enseña bien en los centros educativos, que con frecuencia sólo estimulan la manipulación de símbolos, fórmulas y algoritmos carentes de significado.

Fernández Lajusticia (2001) recoge en su tesis, cómo los trabajos de Piaget explican la manera en que el alumno, después de cumplir once o doce años de edad, y tras recorrer un camino que requiere procesos de observación, reflexión y experimentación, puede llegar a comprender el concepto de proporción.

En síntesis, en el estadio de las operaciones formales el sujeto logra adquirir el concepto de proporción, por ejemplo, observando el comportamiento de una balanza. De esta forma, ha de descubrir-reflexionar sobre el equilibrio producido por dos pesos iguales para, seguidamente, experimentar en función de la distancia de los pesos al centro y luego, relacionar a través de un proceso reflexivo-constructivo, las dos causas con igualdad de efectos. De esta manera, el individuo está en capacidad de construir el concepto de proporción, tras descubrir-construir dos relaciones previas y a continuación, la relación de ambas entre sí. El razonamiento proporcional queda caracterizado por ser una relación entre relaciones.

Cinco son las fases, propuestas por Fernández Lajusticia (2001), en el proceso de construcción del razonamiento proporcional:

- *Fase 1:* El estudiante, ante una situación-problema, centra su atención en una parte de la información relevante del enunciado, es decir, solo considera una variable a la vez y, por lo tanto, su análisis de la situación es parcial.

- *Fase 2:* Se identifican las variables del problema y su correlación, pero ésta se establece de manera cualitativa, de tal forma que situaciones que impliquen tratamientos numéricos, quedan fuera del alcance de las posibilidades de solución. Este tipo de análisis es importante, pues dan herramientas de control sobre los procesos cuantitativos propios de la siguiente fase.

- *Fase 3:* Se caracteriza por el uso de estrategias centradas en el reconocimiento de patrones de correlación entre las cantidades, pero desde una perspectiva aditiva más que multiplicativa. En esta fase se utilizan reglas que permiten comparar, incrementar, decrecer o hacer relaciones parte-todo.

- *Fase 4:* Se reconocen estructuras y relaciones que coordinan la variación de dos cantidades, fundamentalmente a partir de estrategias de reconocimiento, de coordinación y de regularidades crecientes y decrecientes (fundamentalmente se trata de análisis de escalares).

- *Fase 5:* Se fundamenta en la comprensión de la relación de proporcionalidad propiamente dicha, a partir del establecimiento de la constante de proporcionalidad, como una razón que relaciona cualquier par de valores correspondientes, a cada una de las cantidades que se comparan.

Por otra parte, Fernández Lajusticia (2001) recoge en su trabajo las diferentes actuaciones de los alumnos al abordar tareas de razón y proporción, que han sido estudiadas por distintos investigadores atendiendo a tres aspectos: las estrategias correctas o que se consideran satisfactorias; las estrategias incorrectas o no satisfactorias y la categorización de actuaciones de acuerdo con un mayor o menor uso del razonamiento proporcional:

- ***Estrategias correctas:***

Tourniaire y Pulos (1985) (citado por Fernández Lajusticia, 2001, p. 65) consideran que las más resaltadas son las ***multiplicativas*** y las de ***construcción progresiva***.

a) En las ***multiplicativas***, los alumnos relacionan los datos multiplicativamente de dos formas: una en la que la relación la establecen entre el antecedente y el consecuente de una razón y la extienden a la otra, y otra en la que la relación la establecen entre los productos cruzados. Esta segunda, es el método que usualmente se enseña en la escuela y que se utiliza para resolver problemas de valor faltante, también denominado regla de tres. Sin embargo, ésta no debe considerarse como una estrategia relevante de razonamiento proporcional, pues los estudiantes la acaban usando de manera mecánica, es decir, su uso no implica el razonamiento proporcional por sí mismo ni tampoco se genera de una forma natural, sino que es un método o algoritmo para resolver problemas de proporciones y no una estrategia para resolver un problema en el que esté involucrado un razonamiento proporcional.

b) La estrategia de ***construcción progresiva***, se caracteriza porque en ella los alumnos establecen una relación en una razón y la extienden aditivamente a la otra. Para ilustrarla se puede emplear el siguiente problema de los caramelos: Si en la tienda de dulces dos caramelos cuestan ocho céntimos, ¿cuánto cuestan seis caramelos?. La actuación del alumno puede ser: 8 céntimos para 2 caramelos, 8 más para otros 2 caramelos, son 16 céntimos para 4 caramelos, y 8 más para otros 2 caramelos, son 24 céntimos para 6 caramelos. O bien, construir la siguiente tabla de proporcionalidad:

Caramelos	2	4	6
Coste	8	16	24

La construcción de este tipo de tablas para organizar los datos del problema, capacita a los alumnos para comprender más fácilmente la preservación de las razones internas que hay entre los datos de una serie y la constancia de las relaciones externas que hay entre los datos de las series. Sin embargo, si las relaciones entre los datos del problema no son enteras, muy pocos estudiantes utilizan este tipo de estrategia con éxito, pues difícilmente podrán construir aditivamente las dos series de datos.

Una forma de caracterizar las ***estrategias multiplicativas***, es la que hace Fernández Lajusticia (2001), atendiendo a la naturaleza de las cantidades que relacionan los alumnos o a cómo relacionan los datos del problema. Por ejemplo, si los problemas que han de resolver los alumnos son de proporcionalidad, tanto si se trata de comparación numérica de razones como de valor faltante, se identifican tres tipos de estrategia para su resolución:

1. Una primera estrategia que denomina *"de la razón unitaria"* o también *"¿cuánto por uno?"*: En ella está implícita la búsqueda del factor constante asociado a la relación funcional para la unidad, es decir, que los alumnos relacionan cantidades entre magnitudes en la búsqueda de la razón de la unidad. Se puede ver más claro utilizando el siguiente ejemplo: Si Mark tarda 20 minutos en recorrer 4 km, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer 12 km? En este tipo de estrategia de resolución, los alumnos se preguntan primero ¿cuánto tiempo tardará en recorrer 1 km? y encuentran la razón unidad 5 minutos/1 km, para después resolver: entonces para 12 km empleará [5 minutos/1 km] x 12 km = 60 minutos.

2. Una segunda estrategia que denomina *"del factor de cambio"* o *"tantas veces como"*: En ella, el alumno reconoce el factor multiplicativo asociado a la relación interna entre los datos de cada magnitud. Tomando como ejemplo una variación del problema anterior, puede verse más claro: Si Mark tarda 20 minutos en recorrer 4 km, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer 8 km.? En este caso, los alumnos resuelven el problema utilizando las relaciones internas de cada magnitud y razonan: si 8 km es el doble de 4 km entonces tardará el doble de tiempo, que son 2 x 20 minutos = 40 minutos. Esta estrategia les es fácil de usar cuando el factor de cambio es un número entero.

3. La tercera es el algoritmo de los productos cruzados, de la cual ya se ha hecho referencia anteriormente.

- ***Estrategias incorrectas:***

Parece que la utilización de estrategias, que se consideran erróneas o no satisfactorias, es consecuencia del mal uso de estrategias correctas o del uso de estrategias inadecuadas, tal y como recoge en su trabajo Fernández Lajusticia (2001):

a) Una estrategia errónea frecuente en la resolución de problemas de razón y proporción la denomina *"ignorar parte de los datos del problema"*. En este caso, los alumnos intentan resolver el problema con una sola parte de los datos del enunciado del problema. Por ejemplo, si el problema es de comparación de razones entonces intentan resolverlo comparando únicamente los antecedentes (o los consecuentes) de las dos razones y toman la decisión mediante un razonamiento de tipo directo (o inverso).

b) En otros casos, por ejemplo, si el problema es de valor faltante, el alumno ante la necesidad de obtener una solución numérica, opera con parte de los datos y obtiene una respuesta numérica. Esta estrategia la denomina como *"operaciones al azar"*.

c) Por último, otra estrategia errónea, es la que denomina *"estrategia aditiva o de la diferencia constante"*. En este caso, los alumnos relacionan los términos de una razón aditivamente, la cuantifican por sustracción entre los dos primeros términos de la razón y esta diferencia la aplican a la segunda razón. Esta estrategia puede ser el resultado de otra de retroceso, a la hora de resolver problemas en los que las razones no son enteras. Por ejemplo, cuando un alumno usa la estrategia de construcción progresiva, en problemas con relaciones enteras y luego usa la estrategia de diferencia constante, cuando las relaciones son no enteras. El tamaño de los números puede favorecer también el uso de esta estrategia errónea.

- ***Estrategias de actuación de acuerdo con un mayor o menor uso del razonamiento proporcional:***

Los trabajos más destacables son los de Karplus (1983) y Lamon (1993b) (citados por Fernández Lajusticia, 2001, p. 71):

- Karplus establece una secuencia de cuatro amplias categorías:

1. Categoría I (incompleta, ilógica), aquí se incluyen las actuaciones de los alumnos que adivinan la respuesta por intuición y no dan explicaciones o que utilizan los datos de una manera ilógica o que utilizan operaciones cuantitativas no apropiadas.

2. Categoría Q (cualitativa), en ésta se incluyen las actuaciones de los alumnos que justifican su respuesta usando los cuatro términos dados y comparándolos mediante expresiones de tipo cualitativo como: “'más”, “menos” o “equivalentes”.

3. Categoría A (aditiva), en la que se incluyen las actuaciones de alumnos que, usando todos los datos, obtienen la respuesta mediante la estrategia aditiva de la diferencia constante.

4. Categoría P (proporcional), en ésta se incluyen los alumnos que usan las relaciones proporcionales entre todos los datos para obtener la respuesta, aunque haya errores aritméticos. Esta categoría la dividen en tres subcategorías:
    4.1. Si usan la relación externa o funcional (entre magnitudes).
    4.2. Si usan la relación interna o escalar (intra magnitudes).
    4.3. Si usan otro tipo de comparación.

- Otra categorización es la que hace Lamon (1993b) (citado por Fernández Lajusticia, 2001, p. 72), quien ordena en seis niveles, en relación con un menor o mayor razonamiento proporcional, las diferentes estrategias o actuaciones que usan los alumnos:

1. En el primer nivel, sitúa las actuaciones de los estudiantes que no tienen una interacción con el problema o que no responden.

2. En el segundo nivel, los alumnos dan respuestas sin justificar o usan sin éxito el método de ensayo o error o estrategias aditivas incorrectas.

3. En el tercer nivel, los alumnos construyen patrones numéricos sin comprensión de las relaciones numéricas que utilizan.

4. En el cuarto nivel, se incluyen las actuaciones de los estudiantes que muestran tener capacidad para resolver los problemas usando materiales manipulativos, técnicas de conteo o de apareamiento, estrategias de construcción progresivas y reconocimiento de

patrones para la construcción de tablas de proporcionalidad, pero no demuestran la comprensión de las propiedades estructurales de una proporción.

5. En el quinto, los estudiantes dan pruebas de un razonamiento proporcional de tipo cualitativo, usan correctamente el lenguaje cualitativo implícito en una comparación de razones y para ello utilizan las relaciones entre los cuatro datos del problema.

6. En el sexto, los estudiantes usan correctamente el lenguaje algebraico para representar proporciones y muestran su comprensión de las relaciones numéricas entre los datos, tanto las escalares (dentro de una magnitud) como las funcionales (entre magnitudes).

En la actualidad, los estudios se dirigen a establecer, cada vez con mayor precisión, características cognitivas específicas que permitan promover el desarrollo del razonamiento proporcional y el aprendizaje de la proporcionalidad por medio de la resolución de situaciones y problemas de razón y proporción. Los resultados de diversas investigaciones recientes, proporcionan orientaciones sobre cómo ayudar a los alumnos en este desarrollo del razonamiento proporcional. Algunas de estas orientaciones, propuestas por Godino y Batanero (2003), son las siguientes:

1. Proporcionar una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos, que pongan en juego relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes.

2. Estimular la discusión y experimentación en la comparación y predicción de razones. Procurar que los alumnos distingan las situaciones de comparación multiplicativa (proporcionalidad), de las no multiplicativas, proporcionando ejemplos y discutiendo las diferencias entre ellas.

3. Ayudar a los alumnos a relacionar el razonamiento proporcional con otros procesos matemáticos. El concepto de fracción unitaria es muy similar al de tasa unitaria. El uso de tasas unitarias para comparar razones y resolver proporciones, es una de las técnicas más apropiadas.

4. Reconocer que los métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo “regla de tres” para resolver problemas de proporcionalidad, no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional y no se deberían introducir hasta que los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente.

Desde la faceta afectiva, existen principalmente dos aspectos importantes que contribuyen adecuadamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional. Uno de ellos y más general, es el que refiere a concebir el aula de clase como un espacio social (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009), en el que se debe impulsar la participación del alumno, promover su responsabilidad en el trabajo tanto individual como grupal y fomentar su interés y motivación por la materia, haciéndole asumir la responsabilidad del compromiso de aprender los contenidos impartidos.

El segundo de estos aspectos se refiere más particularmente a la visión del contenido matemático de la proporcionalidad y los porcentajes como algo socialmente útil y preciso, que conforma un aprendizaje de cosas que se usan en el día a día de la gente, que contribuye con un desenvolvimiento social adecuado y que, por ende, su aprendizaje es de interés para las personas. De esta forma, el razonamiento proporcional constituye la base de un adecuado desenvolvimiento de la persona en actuaciones comunes de la vida diaria (por ejemplo, considerar la relación precio/peso o precio/número de piezas para elegir un producto), y además es el fundamento de diversos contenidos científicos en el resto del currículo escolar (física, química, economía,…)

El profesor es una pieza fundamental para fomentar el interés y la motivación del alumno, dotando de sentido el contenido matemático de la proporcionalidad y mostrando su aprendizaje como una acción útil para el adecuado desenvolvimiento del alumno en el entorno que le rodea. Este objetivo es alcanzable desarrollando experiencias de enseñanza, tareas y aprendizajes de la proporcionalidad en las que se tengan en cuenta situaciones próximas al contexto sociocultural del alumno.

3.2.3.- FACETAS INTERACCIONAL Y MEDIACIONAL (INSTRUCCIONAL)

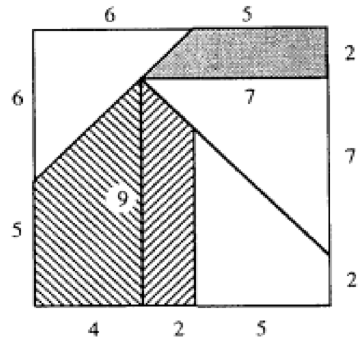
Desde una perspectiva instruccional, Fernández Lajusticia (2001), propone intervenir didácticamente por medio de una secuencia de tareas asociadas a la noción de razón y con un alto contenido de comparaciones proporcionales cualitativas, actuando desde edades tempranas, previas y preparatorias para que tal noción de proporcionalidad sea producto de las mismas. No dejar para más tarde su aprendizaje, en la que necesariamente su adquisición estará vinculada con el enfoque o desarrollo algebraico (función lineal), enfoque o desarrollo geométrico (semejanza) y el enfoque o desarrollo aritmético (proporción). Este autor propone un inicio de la enseñanza de la proporcionalidad informal, intuitivo y cualitativo dirigido hacia la meta de la formalización y la algoritmización. Tratando de buscar una secuencia del contenido y de las tareas relativas a la proporcionalidad que permita ir, desde un conocimiento de naturaleza intuitiva-cualitativa, hacia un conocimiento cuantitativo (de estructura multiplicativa), haciendo uso de recursos que fomenten la manifestación de estrategias por parte del alumno, del razonamiento proporcional.

La propuesta didáctica de Fernández Lajusticia (2001), se basa en la planteada por Piaget (1996), la cual sostiene que, en el desarrollo del razonamiento proporcional en la persona, el razonamiento cualitativo debe preceder al cuantitativo. En esta propuesta de trayectoria de aprendizaje deben tenerse en cuenta inicialmente las estrategias de resolución que emplean los alumnos, es decir, se debería partir de las estrategias de resolución informales de los estudiantes y reconducirlos a la adquisición de razonamientos funcionales-algebraicos. Esta conexión puede ser realizada por medio de tareas resolubles con estrategias informales, intuitivas y cualitativas, que avancen hacia tareas resolubles por medio de estrategias de construcción progresiva y dirigidas finalmente a los procesos de algoritmización y algebrización. Estos últimos procesos, deben ser presentados como herramientas que optimizan la resolución de las tareas y los problemas, puesto que economizan los procedimientos, pero nunca como estrategia didáctica para explicar la proporcionalidad. En conclusión, lo buscado en la propuesta de enseñanza, debe ser precisamente que los algoritmos sean el punto de llegada o resultado de un profundo razonamiento y no el punto de partida con un aprendizaje meramente mecánico, porque como lo manifestó Albert Einstein, “la fórmula es lo último que se coloca”.

En el proyecto Edumat-Maestros (Godino & Batanero, 2003), se describen algunas tareas y recursos que son fundamentales para iniciar al alumno en el estudio de la proporcionalidad. A continuación, se exponen algunos de ellos:

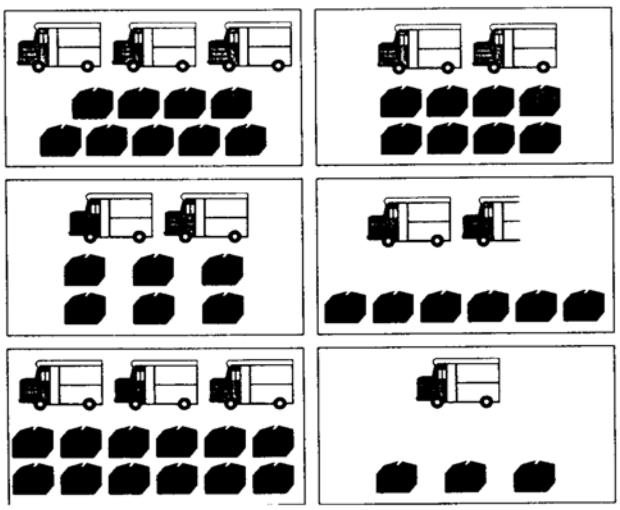
1. Tarea introductoria de construcción y medición, el Puzle: Este tipo de tareas de introducción a la proporcionalidad está basada en el enfoque geométrico. En ellas, se realizan mediciones para construir modelos físicos o visuales de razones equivalentes a una figura dada, con el fin de proporcionar ejemplos tangibles de proporciones y observar relaciones numéricas, mediante el empleo de material manipulativo. En concreto esta tarea del puzle es la diseñada y experimentada por Brousseau.

Tarea nº 1: El Puzle.
Los alumnos deben construir y recortar en una cartulina un puzle parecido al de la figura contigua. Pero lo tienen que hacer más grande para los niños del parvulario con la siguiente condición: el lado que mide 4 cm en la figura dada, deberá medir 7 cm en el modelo a construir de cartulina. Además, hay que poder hacer la misma figura del cuadrado con el puzle grande de cartulina.
Es una actividad que se propone para realizar por grupos, en el que cada grupo hará una única pieza de cartulina y al final del trabajo se juntaran todas para comprobar que encajen.



2. Selección de razones equivalentes: En este tipo de tareas, se presenta una razón entre cantidades de objetos o medidas y los alumnos deben seleccionar una razón equivalente entre otras dadas. El centro de atención será el apoyo intuitivo de por qué los pares seleccionados tienen la misma razón. En estas actividades es de gran utilidad incluir pares de razones que no sean proporcionales pero que tengan una diferencia común. Por ejemplo, 5/8 y 9/12 no son razones equivalentes, pero la diferencia entre los numeradores y los denominadores es la misma. La situación fuerza a los alumnos a pensar en términos multiplicativos y no aditivos.

Tarea nº 2:
Preparar fichas en las que se muestren objetos diferentes en diversas cantidades, como se muestra en las figuras (cajas y camiones). ¿Hay algunas fichas en que la razón entre las cajas y los camiones sea la misma? Dada una ficha, los alumnos deben seleccionar otra ficha que tenga la misma razón entre el número de objetos.
Esta tarea lleva a los alumnos a realizar una comparación numérica multiplicativa y no visual, e introduce la noción de razón como tasa (comparación de cantidades de magnitudes diferentes). Una tasa unitaria corresponde al caso en que una ficha tiene un solo objeto de una clase (por ejemplo, 1 camión y tres cajas).
Objetos emparejados con monedas o billetes sería una manera de introducir el precio como una razón.
En el contexto de probabilidad se pueden presentar diferentes cajas con fichas de dos colores y analizar cuáles dan la misma probabilidad de obtener una bola de determinado color.



3. Progresiones crecientes y decrecientes de cantidades: Un tipo de tarea que se puede proponer para introducir las series proporcionales, es la continuación de series de cantidades que se corresponden según un factor de escala referidas a contextos familiares. Estas tareas se deben proponer también de manera que, en lugar de multiplicar por un factor constante, la operación consista en dividir.

Tarea nº 3: ¿Qué hay en la bolsa?
Esta actividad pone en juego nociones informales sobre probabilidad considerada como una razón. Poner fichas de dos colores en una bolsa. Por ejemplo, 4 rojas y 8 azules. Explicar a los alumnos que hay fichas de colores diferentes dentro de la bolsa, pero no decir el número de fichas ni el número de colores. Sacudir la bolsa y hacer que un alumno saque una ficha, registre el color y volver a ponerla dentro de la bolsa. Después de 10 o 15 extracciones, preguntar cuántas fichas de cada color piensan que puede haber en la bolsa y anotar el número que digan. Después de algunos ensayos más, preguntar cuál es el menor número posible de fichas que piensan puede haber en la bolsa.
A continuación, se puede dar a los alumnos uno de los siguientes datos: el número total de fichas que hay en la bolsa o el número de fichas de uno de los colores. Ver si con esta información pueden predecir cuántas fichas de cada color hay en la bolsa. “¿Qué ocurriría si hubiera más fichas? ¿Qué otros números de cada color podría haber en la bolsa?
La discusión es útil, aunque los niños no acierten la razón correcta de fichas de cada color. Se puede continuar extrayendo fichas para ver que la razón se mantiene, aunque no de manera exacta.
La experiencia se puede variar cambiando la razón entre el número de fichas de cada color, o incluso añadir fichas de otro color. Después de ver el contenido de la bolsa, discutir qué otros números de fichas de cada color produciría el mismo resultado. Los grupos de alumnos pueden explorar la extracción de fichas en bolsas con razones iguales de colores, pero con números de fichas diferentes y comparar los resultados.

Las tareas descritas hasta este momento proporcionan a los alumnos un concepto intuitivo de razón y proporción, por lo que serán de gran ayuda en el desarrollo inicial del razonamiento proporcional.

Un segundo paso de utilidad práctica para la enseñanza de este tipo de razonamiento por medio de las tareas, es el cálculo del valor desconocido o faltante de alguno de los cuatro términos que intervienen en una proporción. El conocimiento de una razón se puede usar para hallar el valor de otra. Las tareas en las que aparezcan ***comparaciones de cantidad-precio***, ***el uso de escalas en los mapas***, ***la solución de problemas de porcentajes y el empleo de recursos informáticos que se ofrecen en internet*** (http://math.rice.edu/~lanius/proportions/index.html) son algunos ejemplos de recursos prácticos en las que se precisa resolver proporciones. Los alumnos deberán aprender a plantear estos problemas de manera simbólica, aplicando algún tipo de algoritmo y a resolverlos numéricamente.

Tal y como recoge en su trabajo Fernández Lajusticia (2001), hay que tener en cuenta que existen variables en las tareas de razón y proporción, que afectan a las actuaciones de los estudiantes al intentar resolverlas. Estas variables están basadas fundamentalmente en la ***estructura de la tarea*** y en el ***contexto del problema***.

Fernández Lajusticia (2001) sostiene además que la ***estructura numérica de las tareas*** de razón y proporción influye en las actuaciones de los alumnos, ya que toda tarea de razonamiento proporcional simple implica dos razones y por tanto relaciones entre cuatro datos numéricos. Este autor explica que, en una tarea donde la razón resulte un número entero o donde los datos numéricos sean de tamaño reducido o donde el factor multiplicativo asociado a la relación sea familiar, favorece su resolución de forma correcta, tanto si son problemas de valor faltante como si son de comparación de valores. Si por el contrario las relaciones que hay entre los datos de un problema no son enteras, entonces los alumnos tienen mayor dificultad para resolverlos y favorecen el uso de estrategias incorrectas. Puede ocurrir que al intentar resolver este tipo de problemas los estudiantes quieran utilizar una estrategia de razonamiento proporcional correcta, y que dada su dificultad recurran a estrategias aditivas incorrectas. Por ejemplo, el hecho de que algunos alumnos quieran evitar las fracciones es causa de este tipo de error. Por lo tanto, una variable que favorece la resolución correcta de los problemas de razón y proporción, y los hace más sencillos, es *la presencia de una unidad entre los datos del enunciado*. Entre los problemas en los que las relaciones entre los datos no son enteras, la presencia de una unidad en el enunciado hace que alguna relación pueda representarse mediante una fracción unitaria, siendo en este caso los más sencillos de resolver, y dentro de éstos, si la fracción es 1/2 a 1/3, o 1/3 a 1/17, etc.

Otra variable estructural que tiene en cuenta Fernández Lajusticia (2001), es el *orden en que se presentan los datos en los problemas de valor faltante.* Es decir, el lugar que ocupa el dato desconocido, la incógnita X, con respecto a los otros tres en los enunciados de los problemas. Atendiendo a esta variable hay cuatro tipos de problema de valor faltante: [X:B-C:D]; [A:X-C:D]; [A:B-X:D]; [A:B-C:X]. De estos cuatro, él considera que tiene menos dificultad el cuarto.

El otro componente mencionado por Fernández Lajusticia (2001), que afecta a las actuaciones de los alumnos en la resolución de los problemas de proporcionalidad, es el ***contexto en el que se desarrolla la situación de la tarea***. Él considera que hay cuatro variables de contexto que tienen influencia en las actuaciones de los alumnos; tres son intrínsecas al problema: *la presencia de una mezcla, la familiaridad con el contexto y la presencia de cantidades continuas*; y una está ligada a la presentación del problema: *el uso de materiales manipulativos*.

La familiaridad en los contextos en los que se desarrolla la situación de proporcionalidad, puede determinar la facilidad o dificultad de los problemas. La variable “familiaridad” resulta beneficiosa en la resolución de problemas de razón y proporción, sólo si el sujeto está familiarizado con el uso de razones en ese contexto.

La otra variable de contexto intrínseca al problema, es que las magnitudes de referencia que están presentes en una situación de razonamiento proporcional sean discretas o continuas. La presencia de cantidades discretas permite una visualización más sencilla y mejor de la tarea y favorece la resolución del problema mediante técnicas sencillas de agrupación o apareamiento.

Finalmente, la variable “*uso de materiales manipulativos*” en la presentación o resolución de problemas, no le parece que tenga efectos importantes en gran parte de los alumnos, para este tipo de aprendizaje. Sin embargo, otros autores han resaltado la importancia del uso de representaciones visuales o simbólicas para la formulación y resolución de los problemas.

Para terminar, Fernández Lajusticia (2001) tiene en cuenta otras variables de contexto, tales como: *la presencia de determinadas expresiones verbales en el enunciado y el contenido del mismo*. En relación con la primera, considera que entre las características semánticas de la estructura del problema que facilitan su resolución, está la presencia explícita en el texto de expresiones del tipo “*por cada*” o “*de cada*”.

3.2.4.- FACETA ECOLÓGICA

1. Diseño Curricular Base del M.E.C.

La proporcionalidad y porcentajes se contempla en diferentes bloques temáticos dentro del currículo, recogidos en el anexo nº 1 del Real Decreto 1105/2014, del 26 de diciembre, por el que el Ministerio de Educación y Ciencia establece los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del currículo básico para la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. Dichos bloques temáticos son concretamente el nº 2, relativo a números y algebra y el nº 3, correspondiente a geometría, tal y como se muestran en las tablas resumen nº 1 y nº 2:

Tabla nº 1: Contenidos, criterios de evaluación y estándares del bloque nº 2: Números y Álgebra.

Bloque nº 2. ***Números y Álgebra***		
Contenidos	*Criterios de evaluación*	*Estándares de aprendizaje evaluables*
Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales. *Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.* *Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.*	*1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.* *4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.* *5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.*	*1.1. Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.* *1.2. Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.* *1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.* *4.1. Desarrolla estrategias de cálculo mental para realizar cálculos exactos o aproximados valorando la precisión exigida en la operación o en el problema.* *4.2. Realiza cálculos con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales decidiendo la forma más adecuada (mental, escrita o con calculadora), coherente y precisa.* *5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversón o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.*

		5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente proporcionales. *5.3. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.*

Tabla nº 2: Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje del bloque nº 3: Geometría.

Bloque nº 3. ***Geometría***		
Contenidos	Criterios de evaluación	*Estándares de aprendizaje evaluables*
Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	*4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.*	*4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.* *4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.*

2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000):

En los grados 3-5 se menciona el tema en la forma siguiente:

- Comprensión numérica: reconocer y generar formas equivalentes de formas comunes en que se representan las fracciones, decimales y porcentajes.

- Los estudiantes deben comprender el significado de un porcentaje como parte de un total y usar porcentajes comunes como 10 o 50 por ciento. Al estudiar las fracciones decimales y porcentajes conjuntamente pueden aprender a pasar de una a otra forma equivalente.

- Asimismo, en conexión con la estadística se sugiere que *los alumnos representen datos en gráficos de líneas y barras,* en cuya construcción aparece implícitamente la proporcionalidad.

En los grados 6-8 se menciona:

- Trabajar con flexibilidad con fracciones, decimales y porcentajes para resolver tareas.

- Comprender porcentajes mayores que 100 y menores que 1.

- Comprender y usar razones y proporciones para representar relaciones cuantitativas.

3. **Estándares para la Matemática Escolar en EE.UU. (Common Core Curriculum Standard):**

En el grado 7 se menciona el tema de "razón y proporcionalidad" de la siguiente forma: "*Entender los conceptos de razón y relación proporcional para resolver problemas"*

1. Comprender el concepto de razón y utilizarlo para describir una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes.

2. Entender el concepto de razón unidad (tasa unidad) asociada a una razón del tipo a/b, con b ≠ 0 y emplearla en el contexto de relación de proporcionalidad.

3. Usar la razón de proporcionalidad para resolver problemas matemáticos y de la vida real, por ejemplo, mediante serie de valores proporcionalmente equivalentes en tablas, diagramas de barra, diagramas lineales de doble entrada numérica y ecuaciones.

   3.1. Hacer tablas numéricas de razones equivalentes relacionadas con cantidades, con números enteros de medidas, encontrar valores faltantes en las tablas y dibujar los pares de valores en el plano de coordenadas cartesiano. Utilizar las tablas de valores para comparar razones de proporcionalidad.

   3.2. Resolver problemas tipo de razón unidad (tasa unidad), incluyendo los relacionados con precio-cantidad y los de velocidad uniforme.

   3.3. Utilizar la razón de proporcionalidad para convertir unidades de medida; manipular y transformar unidades correctamente cuando se multiplican o dividen cantidades.

En el grado 8 se menciona el tema de "razón y proporcionalidad" de la siguiente forma: "*Analizar relaciones proporcionales y usarlas para resolver problemas matemáticos y de la vida real:"*

1. Calcular la razón unidad (tasa unidad) asociada a razones de fracciones, incluyendo razones de longitudes, áreas y otras magnitudes en igual o diferentes unidades de medida.

2. Reconocer y representar relaciones proporcionales entre cantidades.

   2.1. Decidir si dos cantidades son proporcionales, por ejemplo, comprobando razones equivalentes en una tabla o dibujándolas en un plano de coordenadas cartesianas y chequeando si el gráfico es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

   2.2. Identificar la constante de proporcionalidad en tablas, gráficas, ecuaciones, diagramas y descripciones verbales donde hay una relación de proporcionalidad.

   2.3. Representar relaciones proporcionales con ecuaciones.

   2.4. Explicar lo que un punto (x, y) en el gráfico de una relación proporcional significa en cuanto a la situación, con especial atención a los puntos (0, 0) y (1, r) donde r es la constante de proporcionalidad.

3. Usar relaciones proporcionales para resolver problemas multipaso de razón de proporcionalidad y de porcentajes.

3.3.- TABLA RESUMEN DE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

Para realizar un análisis más sistemático de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza vivido, se seguirán las tablas resumen de indicadores generales de idoneidad propuestas por Godino (2013), pero particularizándolas a la enseñanza del tema impartido de "proporcionalidad y porcentajes" en sus facetas: epistémica, cognitiva-afectiva, instruccional y ecológica.

3.3.1.- FACETA EPISTÉMICA

En la tabla nº 3 se incluyen los componentes e indicadores que permiten analizar la idoneidad epistémica o matemática en la enseñanza de la proporcionalidad y porcentajes. Éstos, permitirán comprobar el grado en el que los contenidos impartidos en el proceso de enseñanza representan adecuadamente a los contenidos de referencia.

Tabla nº 3: Componentes e indicadores de idoneidad epistémica.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Relaciones	▪ *Se identifican y desarrollan de una manera organizada los tres tipos de enfoques o tratamientos de la proporcionalidad: el geométrico, el aritmético y el algebraico.* ▪ *Se establecen conexiones entre los distintos tipos de enfoque o desarrollos de la proporcionalidad (geométrico, algebraico y aritmético) mediante problemas, representaciones gráficas, relaciones conceptuales, notaciones matemáticas, procedimientos, etc.* ▪ *Se aplica la proporcionalidad y los porcentajes en contextos no matemáticos como la física, la química, la economía, etc.*
Situaciones-problemas	▪ *Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de la proporcionalidad y porcentajes.* ▪ *Se promueve que el alumno genere problemas de proporcionalidad y porcentajes.*
Lenguaje matemático	▪ *Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación matemática (gráfica, simbólica, tablas de valores, material manipulativo, etc.) en los desarrollos conceptuales y procedimentales de resolución de tareas de proporcionalidad y porcentajes, realizando traducciones y conversiones entre los distintos tipos.* ▪ *Se fomenta que los alumnos manejen y construyan las diferentes expresiones y representaciones matemáticas de la proporcionalidad y porcentajes (gráficas, símbolos, tablas de valores, material manipulativo, etc.) a través de las tareas.* ▪ *El nivel del lenguaje matemático empleado es el adecuado para los estudiantes del nivel educativo de primero de la E.S.O.*
Reglas (Definiciones, propiedades y procedimientos)	▪ *Se presentan de manera clara los conceptos y procedimientos fundamentales de la proporcionalidad y porcentaje para el nivel educativo de primero de la E.S.O.* ▪ *Se proponen tareas donde los alumnos tienen que reconocer y aplicar definiciones, propiedades y procedimientos de la proporcionalidad y los porcentajes.*

Argumentos	▪ *Se plantean tareas de proporcionalidad y porcentajes que fomenten la reflexión, el razonamiento y la argumentación por parte del alumno.* ▪ *Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones de los contenidos de proporcionalidad y porcentaje son adecuados para el nivel educativo de primero de la E.S.O.*

3.3.2.- FACETAS COGNITIVA Y AFECTIVA

En la tabla nº 4 se incluyen los componentes e indicadores que permiten analizar la idoneidad cognitiva y afectiva en la enseñanza de "la proporcionalidad y porcentajes". Éstos, permitirán comprobar el grado en el que los contenidos impartidos son adecuados para los alumnos, es decir, si se encuentran en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes; y por otro lado, valorar el grado de implicación, interés y motivación del alumnado en el aprendizaje de esta materia.

Tabla nº 4: Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva y afectiva.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Conocimientos previos.	▪ *Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de la proporcionalidad en su desarrollo geométrico, aritmético y algebraico (tanto si se han estudiado anteriormente como si el profesor le dedica unas sesiones previas).* ▪ *Los contenidos pretendidos de proporcionalidad y porcentajes pueden ser alcanzados en sus diferentes tratamientos (geométrico, aritmético y algebraico) por el alumnado, teniendo un nivel de dificultad accesible.*
Aprendizaje	▪ *Los distintos instrumentos de evaluación empleados deben indicar si los alumnos logran los niveles de aprendizaje pretendidos.* ▪ *Los instrumentos de evaluación tienen en cuenta la evaluación de los distintos niveles de adquisición del aprendizaje.* ▪ *Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.* ▪ *Las tareas que se seleccionan para evaluar son representativas de los aprendizajes pretendidos.*
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales.	▪ *Se incluyen tareas de ampliación y de refuerzo.* ▪ *Se fomenta el acceso y el logro de todos los estudiantes al contenido del tema de la proporcionalidad y porcentajes.*
Intereses y necesidades	▪ *Las tareas se contextualizan en temas de interés para los alumnos.* ▪ *Se proponen tareas de proporcionalidad y porcentajes que valoran su utilidad en la vida cotidiana y profesional del alumno.*
Actitudes	▪ *Se promueve la participación del alumnado en las tareas y la responsabilidad en el trabajo en equipo.* ▪ *En la resolución en común de tareas se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.*

	▪ *Se incentiva la constancia y el trabajo sistemático.*
Emociones	▪ *Se promueve la autoestima y seguridad en sí mismo para realizar tareas de proporcionalidad y porcentajes (evitando el rechazo, fobia o miedo a las tareas propuestas).* ▪ *Se resaltan las cualidades de estética y precisión de la proporcionalidad y los porcentajes.*

3.3.3.- FACETAS INTERACCIONAL Y MEDIACIONAL (INSTRUCCIONAL)

En la tabla nº 5 se incluyen los componentes e indicadores que permiten analizar la idoneidad interaccional y mediacional en la enseñanza de la proporcionalidad y porcentajes. Éstos, permitirán comprobar el grado en que los modos de interacción identifican y resuelven conflictos de significado, favorecen la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas; y por otra parte, permitirán comprobar el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Tabla nº 5: Componentes e indicadores de idoneidad interaccional y mediacional.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Interacción docente- discente	▪ *El profesor hace una presentación adecuada del tema de proporcionalidad y los porcentajes (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, emplea ejemplos, etc.).* ▪ *Reconoce y resuelve los errores y dificultades de los alumnos tanto los conceptuales como los procedimentales (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.).* ▪ *En la resolución de tareas en común se busca llegar a consensos con base al mejor argumento entre los diferentes alumnos.* ▪ *Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para captar y mantener la atención de los alumnos durante las actuaciones del profesor en la pizarra.* ▪ *Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.*
Interacción entre discentes	▪ *Se favorece la argumentación, el diálogo y la comunicación entre los alumnos en la resolución de las tareas.* ▪ *Se favorece la inclusión en el grupo del alumno y se evita la exclusión.*
Autonomía	▪ *Se contemplan momentos en los que los estudiantes asuman la responsabilidad del estudio de forma individual (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacen conexiones, resuelven tareas, etc.).*
Evaluación formativa	▪ *Se realiza una observación continuada del progreso cognitivo de los alumnos usando los adecuados instrumentos de evaluación.*

Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	▪ *Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir situaciones, tareas, lenguajes, procedimientos y argumentaciones de la proporcionalidad y los porcentajes.* ▪ *Las definiciones y propiedades de la proporcionalidad y los porcentajes son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.*
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	▪ *El número y la distribución de los alumnos en clase permite llevar a cabo la enseñanza de la unidad didáctica con el proceso instruccional pretendido.* ▪ *El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora).*
Temporal	▪ *Se dedican las suficientes sesiones de clase para desarrollar los contenidos de la proporcionalidad y los porcentajes.* ▪ *El tiempo asignado a la unidad didáctica de porcentajes y proporcionalidad en la programación didáctica es el adecuado para lograr el aprendizaje de su contenido.* ▪ *Los tres tipos de enfoques de la proporcionalidad (el geométrico, el aritmético y el algebraico) se desarrollan secuencialmente, de una manera racional y lógica, durante las sesiones destinadas a esta unidad didáctica.* ▪ *Se dedica el tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.*

3.3.4.- FACETA ECOLÓGICA

En la tabla nº 6 se incluyen los componentes e indicadores que permiten analizar la idoneidad ecológica en la enseñanza de la proporcionalidad y porcentajes. Éstos, permitirán comprobar el grado de adaptación curricular, socio-profesional, apertura a la innovación y conexiones intra e interdisciplinares; es decir, el grado en que la enseñanza de "la proporcionalidad y porcentajes" resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza.

Tabla nº 6: Componentes e indicadores de idoneidad ecológica.

COMPONENTES:	DESCRIPTORES:
Adaptación al currículo	▪ *Los contenidos de la proporcionalidad y porcentajes, su implementación y evaluación se ajustan a las directrices curriculares del M.E.C.*
Apertura hacia la innovación didáctica	▪ *Se realizan y promueven tareas innovadoras basadas en la investigación.* ▪ *Se integra el uso de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proceso de enseñanza de la proporcionalidad y porcentajes.*
Educación en valores	▪ *Se contempla la formación en valores democráticos (respeto por la diversidad, tolerancia, integración, cooperación...) y se dan oportunidades para que los alumnos realicen cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural (pensamiento crítico).*

Adaptación socio-profesional y cultural	▪ *Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los alumnos.*
Conexiones intra e interdisciplinares	▪ *Los contenidos de la proporcionalidad y porcentajes, desarrollados desde sus tres enfoques: el geométrico, el aritmético y el algebraico, se relacionan entre sí mostrando las estructuras que los organizan.* ▪ *Los contenidos de la proporcionalidad y porcentajes se aplican y relacionan con los contenidos de otras disciplinas: física, química, economía, etc.*

4.- VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA. PROPUESTAS DE CAMBIOS EN EL DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA

En esta sección se analiza el diseño, implementación y evaluación de la experiencia de enseñanza de la unidad didáctica de proporcionalidad y porcentaje vivida en el periodo de prácticas, descrita en la sección 2, teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos sintetizados en la sección 3, así como los criterios de idoneidad didáctica propuestos en Godino (2013). Se trata de responder a las preguntas que se formularon en la sección 3.1 que motivan dicha indagación:

- ***¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica, del proceso de enseñanza-aprendizaje sobre la proporcionalidad y porcentajes, experimentado durante el periodo de prácticas en primero de la E.S.O.?***

- ***¿Qué cambios se podrían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio, para incrementar su idoneidad didáctica?***

En definitiva, se trata de valorar la idoneidad didáctica de la experiencia y de identificar propuestas fundamentadas de posibles cambios, para un futuro rediseño de la unidad didáctica.

4.1.- FACETAS EPISTÉMICA Y ECOLÓGICA

El proceso de estudio implementado, ha seguido básicamente los contenidos y orientaciones propuestas en el libro de texto (Colera & Gaztelu, 2010), que se viene usando en el primer curso de la E.S.O., en el instituto en el que se ha realizado la práctica docente. En éste, a lo largo de todo el desarrollo de la unidad didáctica, se plantea únicamente un enfoque en el estudio y tratamiento de la proporcionalidad: *el aritmético*, echándose en falta el enfoque o desarrollo geométrico y el algebraico. Además, el concepto de la proporcionalidad desde este enfoque aritmético, se simplifica básicamente en la transmisión de un algoritmo (la regla de tres), que hay que saber aplicar y operar en cada caso. Para poder desarrollar éste método, el libro de texto reduce el concepto de "*la proporción*" a un nuevo nombre para dos fracciones equivalentes y el de "*la razón*" a un nuevo nombre para la fracción, no contemplándose otro tipo de tratamiento o de tareas que ayuden al alumno a desarrollar el razonamiento proporcional mediante la reflexión. Desde el punto de vista de la estructuración del contenido, este algoritmo no se debería haber introducido hasta que el alumno hubiera ejercitado o tuviera, un cierto dominio de otros métodos de comprobación y resolución más intuitivos. Resulta evidente que su contenido es básicamente procedimental, haciendo de la "regla de tres" el único método de resolución de los problemas de proporcionalidad, centrando al alumno en una actuación meramente mecánica, vacía de conceptos, carente de razonamientos y exenta de reflexión sobre si los problemas que se plantean son o no de proporcionalidad.

Otro de los aspectos que se echa en falta según los indicadores de idoneidad epistémica, es haber empezado introduciendo la enseñanza de la proporcionalidad desde un enfoque o desarrollo geométrico (la semejanza de figuras), siendo el aprendizaje de la proporcionalidad mucho más fácil e intuitivo en este dominio para el estudiante, tal y como se desarrolló en el punto 3.2 de éste trabajo. Este enfoque geométrico de la proporcionalidad no está presente en el libro de texto, ni en la parte de desarrollo teórico ni en la sección de tareas.

Tampoco se contempla el enfoque o desarrollo algebraico de la proporcionalidad; el razonamiento proporcional debe concebirse también, como un razonamiento que involucre una función lineal en un sistema de dos variables, que permita llegar a conclusiones acerca de una situación o fenómeno que pueda ser caracterizada por una razón constante. El modelo matemático de la proporcionalidad, debe enfocarse también, como una función de la forma $y = k \cdot x$, en el que k es la *constante de proporcionalidad* y en la que la gráfica en el plano cartesiano, de este tipo de función de proporcionalidad, es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Sorprende pues, la inexistencia en el libro de texto de este tipo de lenguaje gráfico, que muestre la linealidad entre magnitudes directamente proporcionales y que ayude a interpretar la noción de magnitudes proporcionales.

Dado el reducido enfoque en el tratamiento de la proporcionalidad, que realiza el libro de texto, se omiten las conexiones y referencias entre sus distintos tipos de desarrollo (el geométrico, el algebraico y el aritmético) a través de las tareas, los conceptos, los procedimientos o las representaciones gráficas, que facilitarían y mejorarían la comprensión del razonamiento proporcional en el alumno.

Por el contrario, debido a los contextos en los que se tratan los conceptos y sobre todo las tareas que se proponen a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica, se ve enriquecido el estudio de algunos otros contenidos intradisciplinares como son el de los números racionales, la equivalencia de fracciones, los números decimales y el sistema métrico decimal; y otros contenidos interdisciplinares como son la física, la química y la economía, reconociéndose y aplicándose en éstos últimos propiedades de la proporcionalidad y los porcentajes.

En cuanto a la serie de tareas contenidas en el libro de texto y que se propusieron a los alumnos para su resolución, suponen una muestra representativa para ejercitar y aplicar el contenido pretendido, aunque se omiten actividades del tipo en los que los alumnos tengan que formular sus propios problemas de proporcionalidad y porcentajes, tal y como aconsejan los indicadores de idoneidad epistémica.

En referencia al lenguaje matemático empleado, éste es el adecuado para un nivel educativo de primero de la E.S.O., aunque, tanto en la parte de tareas como en la parte de los desarrollos conceptuales, se puede comprobar el empleo de una pobre tipología de expresiones y representaciones matemáticas, destacándose únicamente el empleo del lenguaje simbólico y numérico mediante tablas de valores. Esto es debido a la inexistencia de los tratamientos o enfoques geométrico y algebraico de la proporcionalidad, que echan mano principalmente en sus desarrollos del lenguaje gráfico (función lineal) y manipulativo (construcción de figuras semejantes).

Desde la perspectiva curricular o ecológica, la proporcionalidad es introducida en el libro de texto (Colera & Gaztelu, 2010) mediante ejemplos, que llevan a definir cuando existe proporcionalidad directa o inversa entre dos magnitudes, echándose en falta definiciones conceptuales fundamentales como son los de la “*razón*”, la “*proporción*” y la “*constante de proporcionalidad*”, que ni siquiera son mencionadas en alguna sección del libro y que sí se recogen como conceptos clave en las orientaciones curriculares del M.E.C. para este nivel educativo.

La gran mayoría de las tareas de la unidad didáctica, al contextualizarse en situaciones de la vida real, contribuyen a la formación socio-cultural y profesional de los alumnos, destacándose en éste sentido la parte del libro relativa a los porcentajes. Muchas de las tareas se relacionan con otras disciplinas como son la física (relación de las magnitudes velocidad-espacio-tiempo), la química (mezclas), la economía (intereses y repartos porcentuales), etc. Aunque, por otra parte, destaca negativamente la inexistencia de tareas innovadoras basadas en la investigación docente, como puedan ser el trabajo por proyectos, las tareas grupales o el empleo de las nuevas tecnologías.

Con respecto a la componente temporal de la idoneidad epistémica, se considera que el empleo de las sesiones dedicas al desarrollo del contenido más importante, de tipo conceptual y procedimental de la proporcionalidad y porcentajes, en sus tres enfoques o desarrollos (aritmético, geométrico y algebraico) sería escaso si, además, se quiere dedicar el tiempo suficiente a los contenidos que presentan una mayor dificultad de comprensión y aprendizaje.

Uno de los errores y dificultades más significativos, detectados en algunos alumnos mediante los dos instrumentos de evaluación llevados a cabo, fue el de saber distinguir entre la proporcionalidad directa y la inversa. El libro de texto le dedica muy poco contenido (principalmente en tareas) a ésta cuestión y hubiera sido conveniente dedicarle algo más de tiempo e incluso enfatizarlo aún más, dándole una mayor importancia a la proporcionalidad desde un tratamiento cualitativo más que cuantitativo.

Respecto a la secuenciación temporal del contenido curricular, se justifica suficientemente, (apoyado por lo expuesto anteriormente en la parte de la faceta epistémica), retrasar el estudio de la proporcionalidad y porcentajes en la programación didáctica del centro, anteponiendo unidades didácticas relacionadas con la semejanza de figuras y con las funciones lineales, que sirvan como sustento a los diferentes tratamientos que requiere el tema.

De ésta manera, podría iniciarse la unidad didáctica de proporcionalidad desde la perspectiva geométrica, empleando la semejanza de figuras y desarrollarse posteriormente de un modo algebraico, mediante la función lineal y su representación gráfica en el estudio de las magnitudes proporcionales. La introducción de estos cambios permitiría desarrollar las siguientes competencias matemáticas:

- ✓ *Razonar y argumentar* en la resolución de tareas de proporcionalidad y porcentajes.
- ✓ *Diseñar estrategias para resolver problemas* de proporcionalidad y porcentajes.
- ✓ *Representar e interpretar* la linealidad de magnitudes directamente proporcionales.
- ✓ *Representar e interpretar* figuras semejantes a una razón de proporcionalidad.

En consecuencia, por todas las razones mencionadas anteriormente, se podría calificar la ***idoneidad epistémica y ecológica*** del proceso de enseñanza implementado como baja. En los trabajos citados en la sección 3 se pueden encontrar más criterios y recursos para su mejora.

4.2.- FACETAS COGNITIVA Y AFECTIVA

Desde el enfoque aritmético de la proporcionalidad, que propone el libro de texto, los conocimientos previos que se requieren para el estudio de proporcionalidad y porcentajes son:

1.- Fracciones y su equivalencia, así como la relación multiplicativa existente entre los términos extremos de dos fracciones equivalentes ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$).

2.- Resolución de problemas básicos de aritmética.

3.- Operaciones con números decimales (especialmente multiplicaciones y divisiones por 100) y relaciones entre fracciones y números decimales.

Todos estos contenidos, incluidos en el bloque nº 2 de números y álgebra de las orientaciones curriculares del M.E.C., se impartieron según la programación didáctica del centro, en las unidades nº 4 (“*Los números decimales*”) y nº 6 (“*Fracciones y operaciones con fracciones*”). Sin embargo, los resultados obtenidos en las dos evaluaciones llevadas a cabo (corrección de tareas de clase y examen evaluativo formativo) no fueron muy satisfactorios, pese a que los contenidos impartidos de la proporcionalidad y porcentajes fueron de un nivel de dificultad accesible y acorde al de primero de la E.S.O. Muchos de los alumnos presentaron serias dificultades y errores a la hora de operar con números decimales y fracciones, por lo que se debería haber dedicado una sesión inicial al repaso de éstos conocimientos previos.

Uno de los aspectos positivos del libro de texto es que, en la sección de tareas, todas ellas vienen marcadas con un código de triángulos, según el nivel de dificultad que presentan (véase la página 18: desde un triangulito las más fáciles, hasta tres triángulos las más difíciles), lo que facilitó el trabajo de adaptación curricular, proponiendo para algunos alumnos tareas de refuerzo y para otros, en el menor de los casos, tareas de ampliación. Gracias a ello, se facilitó el logro de los aprendizajes pretendidos de la unidad didáctica a todos los alumnos de la clase, que partían desde su propio y personal nivel de conocimiento.

Para evaluar el ritmo y el nivel de aprendizaje de los alumnos sobre el contenido impartido, se utilizaron dos instrumentos de evaluación: la recogida y corrección de una serie representativa de tareas, a mitad de la unidad didáctica y un examen de evaluación formativo, al final de ésta. Estos dos instrumentos tuvieron en cuenta en su calificación, los distintos niveles de adquisición del aprendizaje pretendido y una vez corregidos, se repartieron entre los alumnos para que comprobasen y revisasen donde habían cometido los errores. Además, mediante el instrumento evaluativo llevado a cabo a mitad de la unidad didáctica, se pretendió detectar, por parte del profesor, dónde se habían producido las dificultades y errores más comunes, para tratar de adaptar y reconducir la enseñanza didáctica, enfatizando más sobre los conceptos y procedimientos clave implicados.

Por otra parte, que el contenido y la serie de tareas propuestas del libro de texto tuvieran familiaridad con el contexto, enriqueció bastante la propuesta didáctica, no solo en el aspecto atencional y motivacional, ya que los alumnos valoraban la utilidad de esta parte de las matemáticas en sus vidas, sino porque, facilitó su entendimiento a la hora de recibir instrucciones con las que debían enfrentarse a los problemas.

La dinámica didáctica desarrollada a lo largo de las sesiones, pretendió sistematizar e incentivar una constancia del trabajo en el alumno: atender a las explicaciones del profesor, empezar a trabajar las tareas de la materia impartida en clase y terminar de hacer las tareas en casa. También, la realización de las tareas por parejas y la socialización de sus correcciones a lo largo de las sesiones de clase, con preguntas frecuentes y salidas esporádicas a la pizarra, contribuyeron a potenciar la autoestima de los alumnos a la hora de enfrentarse a problemas de proporcionalidad y todos los alumnos mostraron siempre una actitud muy positiva para este tipo de estrategia de trabajo, promoviéndose la participación de los alumnos en las tareas.

En consecuencia, se puede calificar la ***idoneidad cognitiva-afectiva*** del proceso implementado como de media-baja por las razones antes mencionadas. En los trabajos citados en la sección 3 se pueden encontrar más criterios y recursos para su mejora.

4.3.- FACETAS INTERACCIONAL Y MEDIACIONAL (INSTRUCCIONAL)

Los modos de interacción en el aula que se implementaron en la experiencia docente de prácticas, respondieron básicamente a un modelo tradicional: el profesor primero explica los conceptos y procedimientos, ejemplificándolos en contextos de la vida cotidiana para hacerlos más claros y enfatizando los contenidos clave, para que posteriormente, los alumnos realicen diversas tareas relacionadas con lo impartido. Hubiera sido deseable introducir algunos cambios en el proceso de enseñanza, orientados a que los alumnos planteasen cuestiones y presentasen soluciones; explorando ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usando una mayor variedad de herramientas para razonar, argumentar, hacer conexiones, resolver dificultades y comunicarlas.

Son escasos los momentos en los que se les concedía un grado de autonomía a los estudiantes, exceptuando los momentos de trabajo individual para la realización de las tareas propuestas para casa. Por el contrario, en el trabajo de las tareas en clase, a los alumnos se les permitían que realizasen consultas por parejas con su compañero de pupitre, lo que favoreció el diálogo, la argumentación y la comunicación entre ellos. Igualmente sucedía con las salidas esporádicas de algunos alumnos a la pizarra durante la fase de resolución de las tareas, o con las preguntas lanzadas a los alumnos durante la fase de explicación del profesor. Éstas, no solo contribuyeron a implicar y captar la atención y la motivación de los alumnos, sino que también facilitó la inclusión de los alumnos en la dinámica de clase.

En esta experiencia didáctica se utilizaron únicamente los recursos propios del aula del instituto al alcance de los alumnos: pizarra, proyector, libro de texto y calculadora. No se emplearon recursos manipulativos ni otros recursos TICs ya que en realidad no se consideraron necesarios para apoyar la enseñanza y aprendizaje de los contenidos planificados.

La distribución de los alumnos en el aula no fue aleatoria, ni escogida por ellos mismos, ya que su comportamiento variaba según el compañero con el que estuvieran sentados. Además, durante las sesiones estuvieron presentes dos profesores de prácticas, lo que ayudó a que el funcionamiento de la clase fuera el correcto en cuanto a comportamiento y atención. Cuando los dos profesores trabajaban en clase las tareas, los alumnos tenían una atención más personalizada y una mayor dedicación, disponiendo de varias fuentes de consulta para resolver sus dudas. A su vez a los profesores les servía para llevar a cabo un mejor seguimiento del progreso cognitivo de los estudiantes.

El número de alumnos (30) y su distribución eran idóneos, pero el horario de las clases de matemáticas no fue el adecuado. De las cinco horas semanales de clase, tres estaban colocadas por la mañana antes del recreo (lunes de 9:15 a 10:15 horas, miércoles de 9:15 a 10:15 horas, jueves de 8:15 a 9:15 horas), pero las dos horas restantes se situaban a última hora, el último día de la semana (viernes 12:45 a 14:45 horas). El hecho de tener la clase a primera hora los jueves y las dos últimas los viernes, no propiciaba un nivel adecuado de atención y motivación en clase del alumno, por lo que su comportamiento era complicado de gestionar en estas horas de trabajo.

La mejora de la ***idoneidad interaccional y mediacional*** del proceso, nos llevaría a incluir actividades y tareas con material manipulativo y con recursos informáticos, como los recogidos en el *Proyecto Edumat-Maestros* (Godino & Batanero, 2003) que pueden constituir herramientas novedosas y útiles para alcanzar los aprendizajes pretendidos.

5.- SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

La elaboración de este Trabajo de Fin de Máster, con la orientación sugerida por mi tutor, me ha permitido conocer y aplicar unas herramientas útiles para analizar la práctica docente. Focalizar la atención en la valoración de la idoneidad didáctica, del proceso de enseñanza vivido, me ha llevado a tomar conciencia de la necesidad de recopilar, analizar y sistematizar los conocimientos didáctico-matemáticos disponibles. Estos son resultado de la abundante investigación que se viene realizando a nivel internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de los distintos temas curriculares, por lo que cualquier propuesta de cambio en el diseño, implementación y evaluación de todo un curso o una sola unidad didáctica debe tener en cuenta los resultados de las innovaciones e investigaciones previas.

En mi caso, la enseñanza de la proporcionalidad y porcentajes, fue implementada en un contexto educativo específico, el cual impone condicionamientos difíciles de superar: tiempo asignado (programación didáctica del centro), material de aprendizaje (libro de texto), así como una manera o concepción implícita de entender la matemática y su enseñanza, compartida por el departamento de matemáticas del centro. Estas restricciones, u otras, siempre estarán presentes en nuestra práctica profesional como profesores; pero es importante tomar conciencia de las mismas, así como de conocer otras maneras de concebir la matemática, su enseñanza y aprendizaje. La reconstrucción de un significado de referencia didáctico-matemático amplio es imprescindible para introducir progresivamente propuestas de cambio fundamentadas.

Como indican Posadas y Godino (2014), la noción de idoneidad didáctica proporciona una síntesis global sobre los procesos de estudio matemáticos, pero su aplicación requiere realizar los análisis previos de las diversas facetas implicadas. En particular, la idoneidad epistémica requiere caracterizar los tipos de problemas, los sistemas de prácticas institucionales correspondientes, así como la reconstrucción de las configuraciones y procesos matemáticos implicados. La idoneidad cognitiva precisa elaborar información detallada de los significados personales de los estudiantes y la identificación de conflictos de aprendizaje potenciales. La idoneidad interaccional y mediacional requiere analizar las trayectorias de estudio y las interacciones didácticas entre el docente, los estudiantes y los medios disponibles. El análisis de las normas ayudará a comprender los factores ecológicos que condicionan los procesos de estudio, y por tanto la valoración de la idoneidad ecológica. Si bien es cierto que el M.E.C., a través del Real Decreto 1105/2014 que establece el currículo básico de la E.S.O., hace referencia al estudio de la proporcionalidad y porcentajes de forma conjunta en los cursos de primero y segundo de la E.S.O., dejando en consecuencia una cierta libertad sobre la elección del nivel de dificultad en contenidos, a delimitar entre los dos cursos, a los autores de libros de texto y a los departamentos de matemáticas de los centros educativos.

El mayor condicionamiento para la enseñanza implementada ha venido de la decisión de usar el libro de texto (Colera & Gaztelu, 2010). Tras esta decisión, puede haber una concepción, por parte de los profesores del departamento, que valora positivamente el aprendizaje de algoritmos y atribuye una cierta incapacidad de los estudiantes para la comprensión conceptual y la argumentación deductiva.

Otro factor restrictivo para la introducción de cambios en los contenidos y el consiguiente uso de medios tecnológicos es el tiempo disponible para el desarrollo del tema; la programación didáctica de las matemáticas de primero de la E.S.O., y en general, en toda la E.S.O. parece excesivamente recargado de contenidos, lo que puede dificultar la implementación de innovaciones como las que se han identificado en nuestra indagación.

La formación inicial y permanente de profesores es un factor esencial para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esa formación debe orientarse al desarrollo profesional de los profesores, y ello supone que éstos adquieran y pongan en práctica un profundo conocimiento especializado del contenido en sus diversas facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, 2009). En mi caso, la estrategia formativa adoptada por mi supervisor de prácticas y director del T.F.M. la considero muy positiva, ya que me permite motivar y dar sentido a la búsqueda sistemática del conocimiento especializado del contenido guiado por la pregunta, ¿Cómo mejorar mi práctica profesional?

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fernández Lajusticia, A. (2001). *Precursores del racionamiento proporcional: un estudio con alumnos de primaria.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.

Colera, J. & Gaztelu, I. (2010). *Matemáticas 1.* Toledo: Anaya.

Fiol, M. L., & Aymemí, J. M. F. (1990). *Proporcionalidad directa: la forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.

Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). La proporcionalidad. *Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat–Maestros.* (Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf)

Godino, J. D., & Batanero, C. (2008) Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Conferencia Invitada al VI CIBEM*, Puerto Montt (Chile), 4-9 enero 2009.
(Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/eos/fprofesores_reflexion_guiada_22dic08.pdf)

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., & Ruiz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
(Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf)

Godino, J. D., Moll, V. F., Wilhelmi, M. R., & de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *27*(1), 59-76.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1996). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. (M. T. Cevasco, Trad.). París: Presses Universitaires de France. (Trabajo original publicado en 1955). (Traducido del Francés: De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent, 1955)

Lamon, S. J. (1993b). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

National Council Teacher Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM, 2000.

National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. (2011). *Common core state standards for mathematics.*
(Disponible en, http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf)

Posadas, P. (2013). *Evaluación de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre ecuaciones de segundo grado en 3º de educación secundaria obligatoria*. Tesis de Fin de Máster. Universidad de Granada.
(Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/TFM_Posadas.pdf)

Posadas, P., & Godino, J. D. (2014). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*.
(Disponible en, http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores/Posadas_reflexion.pdf)