Universidad de Granada

# TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.
Especialidad de Matemáticas.

# EVALUACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA SOBRE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN 3º DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Elaborado por: **Paola Posadas Prados**

Dirigido por: Juan Díaz Godino
Universidad de Granada

Curso: 2012/2013

ÍNDICE


Página

1. Introducción……………………………………………………………….. 3

2. Descripción de una experiencia de enseñanza de la ecuación cuadrática…………………………………………………………….…..... 4

2.1. El centro y el grupo clase………………………………………... 4

2.2. Diseño de la unidad didáctica………………………………… 5

2.2.1. Marco curricular. El libro de texto………………………… 5
2.2.2. Objetivos. Competencias……….……………………... 7
2.2.3. Contenidos, actividades y secuenciación……………… 8

2.3. Implementación del estudio …………………………………….. 11

2.4. Recogida de información y análisis de resultados……….…... 13

3. Conocimientos didáctico-matemáticos sobre las ecuaciones cuadráticas…………………………………………………………….... 22

3.1. Marco teórico, problema y metodología. Indicadores de idoneidad didáctica………………………………………………… 22

3.2. Selección y síntesis de investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática………………………….... 24

3.2.1. Faceta epistémica………………………………………….. 24
3.2.2. Faceta cognitiva…………………………………………….. 26
3.2.3. Faceta instruccional……………………………………… 33
3.2.4. Faceta ecológica……………………………………………. 41

4. Valoración de la idoneidad didáctica. Propuestas de cambios en el diseño, implementación y evaluación de la experiencia……………… 45

4.1. Facetas epistémica y ecológica…………………………………. 45
4.2. Facetas cognitiva y afectiva…………………………………….... 47
4.3. Facetas interaccional y mediacional……………………………. 48

5. Síntesis y conclusiones…………………………………………………... 49

Referencias…………………………………………………………………… 50

Anexos………………………………………………………………………… 52

## 1. INTRODUCCIÓN

Una de las tareas esenciales que debe realizar el profesor es la preparación de sus clases, teniendo en cuenta los objetivos, competencias y contenidos que debe procurar desarrollar en sus estudiantes, así como las restricciones del contexto en el que tiene lugar su enseñanza. Un componente importante de la formación recibida en el máster va orientado hacia la adquisición de destrezas en el diseño de unidades didácticas, como una estrategia de preparación de las clases.

Por otra parte la realización de las prácticas de enseñanza en los institutos es una ocasión crucial para entrar en contacto con la realidad educativa, tomar conciencia de las múltiples restricciones que el contexto en el que tiene lugar la enseñanza imponen al trabajo del profesor, así como de aplicar y desarrollar los conocimientos teóricos recibidos. Se comprueba que es necesario adoptar una posición reflexiva y autocrítica sobre el propio trabajo a fin de reconocer aquellos puntos sobre los que es necesario actuar para lograr una mejora progresiva de la enseñanza.

Esta es la razón por la que hemos optado por enfocar el trabajo de fin de máster hacia una reflexión sistemática sobre la experiencia de enseñanza vivida en la fase de prácticas, en la que he tenido la oportunidad de asumir la responsabilidad de la enseñanza de un tema, bajo la supervisión de la profesora tutora, concretamente la enseñanza de la ecuación cuadrática. Esta reflexión sistemática estará apoyada en el uso de la noción de idoneidad didáctica y el sistema de indicadores de idoneidad desarrollados por Godino y colaboradores en diversos trabajos (Godino, 2011). La finalidad es obtener criterios para el rediseño de la unidad didáctica que permitan introducir cambios fundamentados en la enseñanza del tema correspondiente.

Hemos organizado la memoria en los siguientes apartados. Tras esta introducción general, en la sección 2, describimos el diseño, implementación y evaluación de la enseñanza que hemos impartido durante el periodo de prácticas en 3^er curso de ESO en el IES Ángel Ganivet (Granada). Se realiza una breve descripción del instituto y del grupo en el cual se ha impartido la unidad, así como las características más relevantes del mismo. En esta sección también se describe el enfoque de la enseñanza de la ecuación de segundo grado según las orientaciones curriculares nacional y autonómica y su reflejo en el texto escolar utilizado.

Dado que la emisión de un juicio sobre la idoneidad de un proceso de enseñanza - aprendizaje requiere establecer previamente un marco de referencia hemos procedido, en la sección 3, a buscar y sintetizar publicaciones de innovaciones e investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado, clasificando los resultados en las facetas epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instrucccional, según propone la teoría de la idoneidad didáctica.

En la sección 4 incluimos el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza vivido orientado hacia la identificación de propuestas de cambio fundamentados, teniendo en cuenta la síntesis de conocimientos didáctico-matemáticos previamente elaborada en la sección 3.

## 2. DESCRIPCIÓN DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Durante el periodo de prácticas he tenido oportunidad de observar como funciona un centro educativo y participar, por primera vez, como docente en varios grupos y temas, pero ha sido en 3º de ESO donde he asumido un cierto grado de responsabilidad de la enseñanza. Esta es la razón por la cual la reflexión sobre la práctica docente que he vivido la centraré en este curso, y el contenido matemático que en las semanas correspondientes les tocaba estudiar.

### 2.1. El centro y el grupo clase

El instituto imparte la etapa de educación secundaria obligatoria ESO, distribuida en tres grupos por curso, y las modalidades de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, y Humanidades y Ciencias Sociales. El perfil económico y sociológico del alumnado es, mayoritariamente, de un sector social de clase media-alta de funcionarios y empresarios, y por otra parte de familias tradicionales, biparentales, de reducidas dimensiones que tienen un status económico acomodado. El centro dispone de unos 62 profesores. El número es apropiado para el tipo de centro, ya que permite que todos los cargos estén cubiertos y además pueda haber, si se desea (el centro así lo tiene en el grupo de 3º ESO), dos tutores por grupo.

La unidad didáctica se ha impartido en una clase de 3º de ESO. Se trata de un grupo heterogéneo de 29 alumnos (16 chicos y 13 chicas). Es un grupo bastante diverso en cuanto a factores sociales se refiere. Aun así, estas diferencias sociales no influyen en el trabajo diario. La motivación y la actitud frente a la asignatura son más bien negativas por parte de un pequeño número de alumnos. El resto del grupo, aproximadamente el 70%, muestra una actitud positiva en el aula, y muestran interés por la asignatura a través de sus ganas por participar en la clase.

Los alumnos presentan un comportamiento bueno en la asignatura de Matemáticas, aunque ha habido dos o tres alumnos que se han mostrado un poco más revoltosos, comportamiento que supongo que se debe al desinterés hacia la asignatura. En la reunión de la segunda evaluación he podido observar que hay otros profesores que sí presentan quejas acerca del comportamiento de este grupo, lo cual hace pensar que es el profesor el que influye mayoritariamente en el clima de clase.

En cuanto a las potencialidades de aprendizaje, es un grupo donde hay varios niveles. Aunque los muchachos tienen muchas posibilidades, en general, tienen dificultades de aprendizaje, a excepción de unos pocos alumnos que tienen un alto rendimiento académico.

La relación profesor-alumno es asimétrica, quedando bien definida la figura del profesor como autoridad. A pesar de ello, el trato entre profesor y alumno es muy cercano.

Como detalle curioso del funcionamiento diario de este grupo, comentar que los alumnos tienen sitio fijo asignado, la tutora elige donde y al lado de que compañero se sienta cada alumno. De manera que el trascurso de la clase no se vea afectado por el comportamiento del alumnado. Por otra parte, en este grupo siempre hay dos profesoras, una de ellas explica la materia y otra hace de “supervisora”, revisa los cuadernos para comprobar si traen los deberes hechos de casa, vigila a los alumnos para que estén atentos y copien la explicación, anotando en un cuaderno aquellos que no tengan un comportamiento correcto, etc.

Después del período de prácticas se puede afirmar que el comportamiento del grupo es correcto. Siempre han tenido una actitud respetuosa y cariñosa conmigo, desde el primer día, en los días que he intervenido. Los alumnos asumen las normas de la clase de matemáticas de una manera correcta. La mayoría de ellos, cumple con los horarios y con las reglas propias de la clase (ocupan su asiento correspondiente asignado por la tutora, participación, realización de tareas, traer la libreta y el libro, apuntes ordenados, etc.) sobre todo, aquellos que tienen interés por comprender las explicaciones responden de forma positiva, participando activamente en clase y realizando las tareas propuestas.

## 2.2. Diseño de la unidad didáctica

### *2.2.1. Marco curricular*

Los contenidos relacionados con este tema están recogidos en el actual documento curricular BOE número 174, Orden ECI/2220/2007, de 12 de Julio. Dentro de los seis bloques en que se divide el contenido matemático (Contenidos Comunes, Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas y Estadística y probabilidad), las ecuaciones de segundo grado se encuentran en el área de Matemáticas, dentro de los contenidos del tercer curso, en el Bloque de Álgebra.

Dichos contenidos en este nivel de 3º de ESO son los siguientes:

- Resolución de ecuaciones de segundo grado. Discusión según los resultados obtenidos.
- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, comprobando que la solución cumple las condiciones del enunciado del problema.
- Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.

En los criterios de evaluación se indican:

- Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para:

- Aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas.
- Combinar la resolución algebraica con otros métodos numéricos y gráficos, mediante el uso adecuado de los recursos tecnológicos.
- Contrastar y discutir los resultados obtenidos.

El campo de la resolución de problemas mediante ecuaciones de segundo grado va a consistir en resolver problemas numéricos y geométricos. En el segundo caso, se van a calcular áreas, perímetros o se va a aplicar el Teorema de Pitágoras (para calcular el lado de un triángulo rectángulo).

Los conocimientos previos que se requieren para el estudio de las ecuaciones de segundo grado son:

- Operaciones con fracciones.
- Raíces exactas.
- Operaciones con polinomios.
- Identidades notables.
- Descomposición en factores.
- Teorema de Pitágoras.

El estudio de las ecuaciones de segundo grado exige conocer las operaciones con fracciones. Constantemente van a aparecer ecuaciones cuyos coeficientes son fracciones y será necesario operar para suprimirlos y obtener otra ecuación equivalente más simple. Por ejemplo, en el caso de las ecuaciones incompletas sin término en x, los alumnos deberán reconocer raíces exactas para obtener la solución. Estos contenidos están incluidos en el Bloque de Números de 3º ESO.

En el Bloque de Álgebra de 3º de ESO, aunque en temas anteriores al de nuestra unidad didáctica, se estudian operaciones con polinomios, identidades notables y descomposición en factores. Igualmente, los alumnos deberán comprender estos contenidos para aplicarlos a la hora de resolver ecuaciones de segundo grado.

Además, es necesario que los alumnos recuerden el teorema de Pitágoras, para utilizarlo en la resolución de algunos problemas. El teorema de Pitágoras aparece en el curso anterior, en el Bloque de Geometría de 2º de Educación Secundaria Obligatoria. Por lo tanto será necesario hacer un recordatorio del mismo.

### *2.2.2. Objetivos. Competencia matemática*

Con esta unidad didáctica se pretende que los alumnos alcancen los siguientes objetivos:

- Resolver ecuaciones de segundo grado.
- Justificar el número de soluciones de una ecuación de segundo grado.
- Resolver problemas mediante ecuaciones de segundo grado.
- Ajustar la solución al enunciado del problema.

Estos objetivos se orientan a alcanzar una de las competencias básicas, la *competencia matemática*. Esta supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos. El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva a utilizar espontáneamente –en los ámbitos personal y social– los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.
(BOE núm. 174, 21 julio 2007, p. 31689)

### *2.2.3. Contenidos, actividades y secuenciación*

Aunque en el periodo de prácticas he tenido la oportunidad de observar y participar en la enseñanza de diversos temas matemáticos, la unidad que describimos y analizamos se centra en el estudio de las ecuaciones de segundo grado. Dentro de este tema, se han desarrollado los tipos de ecuaciones de segundo grado (completas e incompletas), así como la resolución de problemas contextualizados mediante ecuaciones de segundo grado.

La unidad didáctica se ha distribuido en siete sesiones donde, además de las explicaciones, se han hecho ejercicios, se ha realizado una prueba de evaluación formativa, para así ver si los alumnos han comprendido cómo resolver los distintos tipos de ecuaciones de segundo grado, y un examen sobre los contenidos del bloque de álgebra, incluyendo las ecuaciones cuadráticas. A continuación, se detalla la distribución de la materia en las sesiones:

*Sesión 1:*

- Forma general de una ecuación de segundo grado.
- Fórmula para obtener la solución.
- Ejemplos.
- Discriminante y número de soluciones.
- Ejercicio del libro propuesto para hacer en clase.

*Sesión 2:*

- Corrección del ejercicio propuesto en clase el día anterior.
- Repaso de lo explicado anteriormente.
- Ecuaciones de segundo grado incompletas. Solución.
- Ejemplos.
- Ejercicios del libro propuestos para casa.

Los últimos 25 minutos de clase, la profesora tutora les ha resuelto varios problemas mediante ecuaciones de primer grado.

*Sesión 3:*

- Corrección de los ejercicios propuestos en clase el día anterior.
- Pasos para resolver una ecuación de segundo grado.
- Ejemplos.
- Ejercicios del libro propuestos para casa.
- Evaluación escrita para observar si están comprendiendo los contenidos.

*Sesión 4:*

- Corrección de los ejercicios propuestos en clase el día anterior.
- Resuelvo problemas mediante ecuaciones de segundo grado.
- Ejercicios del libro propuestos para casa (para que practiquen en la resolución de problemas mediante ecuaciones de segundo grado).
- Reparto la evaluación con correcciones y anotaciones acerca de los errores que han cometido.

*Sesión 5:*

- Corrección de los problemas.
- Comienzo del nuevo tema.

*Sesión 6:*

- Repaso de contenidos de los dos últimos temas explicados y ronda de dudas.

*Sesión 7:*

- Examen.

El libro de texto seguido en las clases (Colera, Gaztelu y Oliveira, 2010) (Anexo 2) propone el estudio de la ecuación de segundo grado enfocado al aprendizaje de la fórmula para hallar las raíces para el caso general $ax^2+bx+c=0$, como se muestra en la figura 2.1. Una vez presentada la fórmula su uso se ilustra con un ejemplo particular, seguido de ejercicios resueltos y actividades. Se considera que la justificación de dicha fórmula es un proceso "largo y complicado"

Una ecuación de segundo grado es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Para despejar la $x$, se sigue un largo y complicado proceso que no vamos a ver aquí. El resultado final es la fórmula siguiente:

SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo (±) quiere decir que puede haber dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas dos soluciones pueden reducirse a una o a ninguna, según los casos.

## Número de soluciones

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación. El número de soluciones depende del signo de $\Delta$:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones:**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, solo hay **una solución:** $x = \frac{-b}{2a}$. Se llama **solución doble.**
- Si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ carece de sentido. La ecuación **no tiene solución.**

Figura 2.1. Resolución de la ecuación cuadrática en el libro de texto

Se sigue un proceso que va de la expresión general, que implica el uso de variables (incógnita y parámetros), a su aplicación a casos particulares mediante la asignación de valores numéricos a los parámetros. En el caso de las ecuaciones incompletas (sin la presencia de término lineal o constante) se introducen con un ejemplo la resolución mediante el despeje del término cuadrático (caso b=0), o mediante factorización (caso c=0) (Figura 2.2).

**Ecuaciones sin término en $x$, $ax^2 + c = 0$**

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede despejar $x$ con toda sencillez:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

**Ecuaciones sin término independiente, $ax^2 + bx = 0$**

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede sacar factor común la $x$ e igualar a cero cada uno de los dos factores:

$$(ax + b) \cdot x = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Soluciones: } x_1 = -\frac{b}{a}, \; x_2 = 0$$

Figura 2.2. Ecuaciones cuadráticas incompletas

Se observa, por tanto, que los autores del libro enfatizan una visión de las matemáticas como reglas a seguir, ilustradas con ejemplos de cómo interpretar tales reglas, seguidas de ejercitación para el dominio de la aplicación de las mismas. La resolución de problemas verbales que requieren la puesta en ecuación sigue la misma pauta, como se ve en la figura 3.

Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, por lo que es útil dar estos pasos:

1. Identificar los datos conocidos y lo que deseamos conocer. Dar nombre a la incógnita.
2. Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo conocido con lo desconocido.
3. Resolver la ecuación.
4. Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

Figura 2.3.Resolución de problemas

## 2.3. Implementación del estudio

Las clases suelen comenzar corrigiendo las tareas que los niños llevaban para casa y con un recordatorio de lo que se estudió en la clase anterior. Preguntando a los alumnos las dudas que se les han presentado para hacer hincapié en ellas y afianzar los conocimientos.

Posteriormente, se comienza a explicar la materia nueva. Durante la explicación de cada nuevo concepto se iba haciendo preguntas de cosas que los alumnos sabían para que siguieran la explicación. Además, se pone atención en los errores y dificultades que puedan surgir a los alumnos.

Por último, para fomentar el trabajo personal y un mayor grado de consecución de objetivos, cuando se acerca el final de la clase, normalmente proponía usa serie de ejercicios para que hagan en casa relacionados con la materia vista para que asentaran los conocimientos, las cuales se corregían al comienzo de la siguiente clase.

La introducción a la unidad se realiza a través de problemas sencillos, aumentando la dificultad de forma gradual. En todo momento he seguido el orden y los contenidos del libro de texto como guión, de modo que los niños puedan acceder con facilidad a la materia, aunque en algunos casos he aportado ejemplos que no aparecen en el libro.

Las ecuaciones de segundo grado (completas) fueron introducidas mediante su expresión general. Se trabajó la identificación de los coeficientes a partir de una expresión, la fórmula para obtener la solución (o las soluciones), poniendo énfasis en la utilización del doble signo que aparece en ella, y el número de soluciones (dos distintas, una doble o ninguna) según el signo de su discriminante.

Se realizaron bastantes ejemplos en los que los alumnos me indicaban cuáles eran los coeficientes de la ecuación y cómo se sustituían en la fórmula para calcular sus soluciones. De hecho, al finalizar la clase, los alumnos me comentaron que habíamos realizado muchos ejemplos y me afirmaron que habían comprendido cómo aplicar la fórmula. Al día siguiente, cuando procedí a resolver los ejercicios propuestos para casa, comprobé que los chicos habían realizado la tarea y no me plantearon problemas.

Posteriormente, se vio cómo aplicar unos procesos más simples para las ecuaciones de segundo grado en las que falta alguno de sus términos (es decir, las ecuaciones incompletas), sin necesidad de aplicar la fórmula. El alumnado presentó dificultades para comprender este proceso, por lo que realizamos varios ejemplos de cada tipo hasta que observé que los alumnos se familiarizaron con el proceso de extraer factor común cuando la ecuación no tiene término independiente y de tomar la raíz cuadrada (sin olvidar el doble signo) cuando la ecuación no tiene término en x.

A continuación, se muestra a los alumnos los pasos para resolver ecuaciones de segundo grado con una fisonomía complicada, su expresión no se presenta en la forma general, sino que deberán “arreglarlas”, suprimiendo denominadores y paréntesis, reduciendo términos semejantes, transponiendo términos, etc. Este proceso no les significó mucha dificultad, ya que el proceso es similar al proceso de resolución de ecuaciones de primer grado con una fisonomía parecida.

Durante la implementación de la unidad, insistí mucho en la importancia de los signos a la hora de resolver las ecuaciones. También se trabajó la relación entre las ecuaciones de segundo grado y la descomposición en factores; es decir, aplicar las identidades notables o extraer factor común. Por ejemplo, se realizó el siguiente ejercicio:

Resuelve igualando a cero cada uno de los factores:

a) $x(3x-1)=0$ c) $(x+1)(x+3)=0$ e) $(x-5)^2=0$

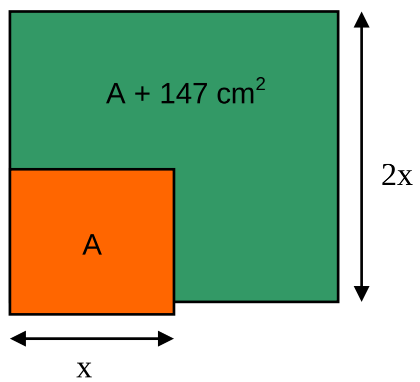
b) $3x(x+2)=0$ d) $(x-5)(x+5)=0$ f) $(2x-5)^2=0$

Después de corregir este ejercicio comprobamos que si desarrollamos estos productos, efectivamente, se trataba de una ecuación de segundo grado. También, se hicieron unos pocos ejemplos del caso inverso: cómo obtener una ecuación de segundo grado a partir de dos soluciones dadas. Expliqué la utilización de las identidades notables o la descomposición en factores, que ya habían estudiado, para resolver este tipo de ejercicios.

Finalmente, para estudiar las aplicaciones, se realizaron problemas que requieren el uso de las ecuaciones de segundo grado para su resolución, en donde se mostraba la aplicación de estas. Como ejemplo representativo de esto, se trabajaron los siguientes problemas:

1. Calcula los lados de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm y en el que la base mide 2 cm más que la altura.

2. Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en 147 cm$^2$. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



3. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es 40 $cm^2$. halla los catetos de este triángulo.

    *Nota: si un cateto mide x cm, el otro medirá (18-x) cm.*

4. La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será 60 $cm^2$. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

En cuando a la manera de trabajar en la clase, se realizaron de forma individual algunos ejercicios en el aula relacionados con la explicación, aunque se les permitía comentar el ejercicio con el compañero. Mientras, la profesora (en este caso yo) resolvía dudas a los alumnos individualmente. Después, el ejercicio era corregido en la pizarra; eran los alumnos quienes indicaban los pasos necesarios y la profesora los escribía en la pizarra. También, se comentaban los errores más comunes que presentan los ejercicios para que, así, aprendieran de ellos.

## 2.4. Recogida de información y análisis de resultados

Mi experiencia como docente en las prácticas me ha permitido conocer los errores y las dificultades más comunes en los que suelen incurrir los alumnos sobre esta materia, tanto en las dudas que me presentaban durante las explicaciones de clase, como en la corrección de la prueba escrita de evaluación formativa y en la corrección de la prueba escrita de evaluación sumativa, las cuales he tenido la oportunidad de corregir.

### *2.4.1. Prueba de evaluación formativa*

Después de explicar cómo se resuelven las ecuaciones de segundo grado y antes de comenzar a realizar problemas para ver la aplicación de las ecuaciones, quise comprobar si los chicos estaban comprendiendo los contenidos. Para ello, se realizó una prueba de evaluación formativa, con el fin de observar los errores y dificultades que se les presentaban y poder solventarlos, así afianzar su conocimiento. El Cuadro 1 contiene los enunciados de las tareas incluidas en la prueba de evaluación formativa. Se remarcó que la ecuación debe estar igualada a cero antes de comenzar a aplicar la fórmula que obtiene las soluciones.

Cuadro 1: Prueba de evaluación formativa

Sabiendo que las ecuaciones de segundo grado son de la forma $ax^2+bx+c=0$ y las soluciones son $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-x^2+3x=7-x$
b) $12x^2-3x=0$
c) $4x^2-16=0$
d) $\frac{2}{5}x^2=0$
e) $\frac{x+1}{2}+\frac{10x^2+3x}{8}=\frac{x^2}{4}+\frac{5}{8}$

A continuación se muestran los resultados cuantitativos de la prueba formativa sobre ecuaciones de segundo grado realizada por los alumnos. Para ello, se ha tenido en cuenta la siguiente valoración: 0 para aquellos alumnos que han cometido errores graves en la resolución del apartado, 1 para los que han realizado parte del apartado correctamente, y 2 para los que han realizado el apartado completo correcto. La figura 2.4 muestra la distribución de frecuencias de la puntuación total obtenida por los 20 alumnos que realizaron la prueba. La puntuación mediana es de 5, dos alumnos tuvieron puntuación 0, y uno la máxima puntuación, esto es, 10.

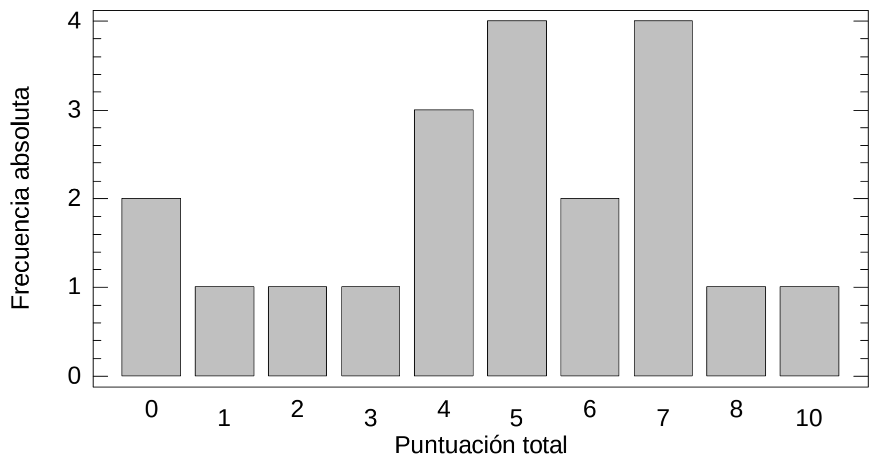


Figura 2.4. Distribución de frecuencias de la puntuación total

Describimos a continuación los principales errores observados en las respuestas dadas por los alumnos para cada uno de los ítems.

*Ítem a):* $-x^2+3x=7-x$

1. La solución de un alumno fue:

   $$-x^2+3x=7-x \Rightarrow -x^2+4x-7=0 \Rightarrow x^2=-\frac{7}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{7}{4}} \Rightarrow$$
   la ecuación no tiene solución

2. Tres alumnos aplican la fórmula antes de sumar los términos semejantes y cada uno responde de la siguiente manera:

   * Respuesta 1

   $$-x^2+3x=7-x \Rightarrow -x^2+3x-7+x=0 \Rightarrow a=-x^2,\, b=3x,\, c=0$$

   Sin embargo, aunque los coeficientes no son correctos y, además, toma la parte literal, el alumno sustituye correctamente los valores de a, b y c en la fórmula (toma a=-1, b=3 y c=0).

   * Respuesta 2

   $$-x^2+3x=7-x \Rightarrow -x^2+3x-7+x=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4-x^2-7}}{2}$$

   * Respuesta 3

   $$-x^2+3x=7-x \Rightarrow -x^2+3x-7+x=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2}$$

3. Por otro lado, aunque han sabido transformar la ecuación en su forma general, dos alumnos han tomado todos los coeficientes positivos, sin tener en cuenta el signo negativo de dos de los coeficientes; y un tercer alumno ha obviado el signo negativo de uno de los coeficientes. En el último caso, el hecho de no tener en cuenta que uno de los coeficientes es negativo pero si el otro puede considerarse un despiste; en cambio en los dos primeros casos puede tratarse de un error.

*Ítem b):* $12x^2-3x=0$

1. Dos alumnos han optado por indicar los coeficientes y aplicar la fórmula, en lugar de extraer factor común, aunque ambos han cometido algunos errores al calcular el valor de la raíz (no han tenido en cuenta al multiplicar que c=0).

2. Por otro lado, dos alumnos han extraído factor común correctamente, 3x(4x-1)=0. A continuación, uno de ellos respondió que las soluciones eran $x_1=0$ $y$ $x_2=4$, y la respuesta del otro fue $x_1=0$ $y$ $x_2=-4/1$.

*Ítem c):* $4x^2 - 16 = 0$

1. Un alumno, al despejar $x^2$ en la ecuación $4x^2 - 16 = 0$ y tomar raíz, obvió el doble signo, considerando solamente la solución positiva.

2. La solución dada por otro alumno fue:

$$4x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\pm\frac{16}{4}} \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -4$$

*Ítem d):* $\frac{2}{5}x^2 = 0$

Este fue uno de los apartados menos realizado por los alumnos y en el que más errores y dificultades presentaron. Por un lado, varios alumnos cometieron errores similares al despejar la ecuación. Dos alumnos llegaron a la conclusión de que la solución de la ecuación $\frac{2}{5}x^2 = 0$ es $x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ . Otro alumno respondió que la solución es $x = \sqrt{\pm\frac{2}{5}}$ . Y la respuesta de un tercer alumno fue que $x^2 = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{2}{5}}$ y, por tanto, la ecuación no tiene solución.

Por otro lado, la respuesta de dos alumnos (en el intento de suprimir el denominador) fue: $\frac{2}{5}x^2 = 0 \Rightarrow 10x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -0$

*Ítem e):* $\frac{x+1}{2} + \frac{10x^2 + 3x}{8} = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{8}$

Este último apartado lo realizaron pocos alumnos. Puede ser que se deba a que, según los alumnos, no les dio tiempo a realizar la prueba completa. En este caso, no se observó más error que el de una alumna que suprimió incorrectamente los denominadores, realizando lo siguiente:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{10x^2 + 3x}{8} = \frac{x^2}{4} + \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{2(x+1)}{8} + \frac{8(10x^2 + 3x)}{8} = \frac{4x^2}{8} + \frac{8 \cdot 5}{8}$$

*2.4.2. Examen del bloque de álgebra*

Finalizado el estudio del tema los alumnos realizaron un examen sobre el bloque de álgebra, que abarcaba tres temas: "El lenguaje algebraico", "Ecuaciones" y "Sistemas de ecuaciones". El examen fue aprobado por el 58% de los alumnos. Para evaluar si los alumnos comprenden el proceso de resolución de ecuaciones de segundo grado se propusieron las cuestiones del Cuadro 2:

Cuadro 2: Examen final

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$
b) $4(x^2 - 3) + x(x-2) = x^2 - 15$
c) $\frac{x^2+1}{3} - x = \frac{x^2-4}{6} + 1$

Resuelve los siguientes problemas (1) y (2), o bien el problema (3):

Problema (1):

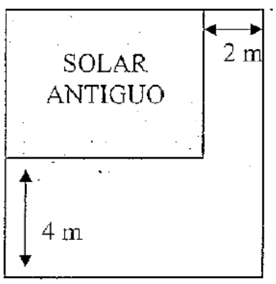
Un agricultor planta 2/5 de su huerta de alubias y 3/10 de tomates. Si aún tiene 240 $m^2$ sin plantar, ¿cuál es la extensión de la huerta?

Problema (2):

En un triángulo rectángulo, un cateto mide 2 cm menos que la hipotenusa y 14 cm más que el otro cateto. Calcula la longitud de los tres lados.

Problema (3):

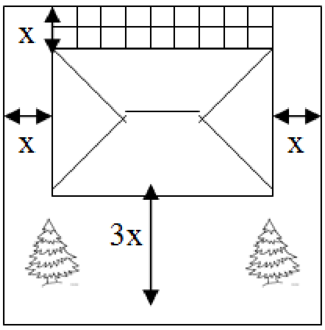
El pequeño terreno que heredó Jaime de sus padres no es un cuadrado perfecto. Calcula que tiene 2 m más de largo que de ancho. Decide comprarle a su vecino 4 m más en dirección sur y 2 m más en dirección este. Así consigue un terreno de 256 $m^2$.



1.- (1 punto) ¿Qué dimensiones tiene ahora el solar? ¿Es ya de planta cuadrada?

2.- Satisfecho con la ampliación, Jaime decide construir una vivienda. Le gusta mucho la jardinería y el cultivo de flores, así es que su vivienda va a ocupar un espacio en el interior del terreno y estará rodeada, por la parte frontal y por los laterales, de un jardín. En la parte trasera construirá un invernadero.

Quiere que la profundidad de la parte delantera del jardín sea 3 veces el ancho de las partes laterales, que será igual a la profundidad del invernadero. Para explicar bien que quiere, ha hecho este croquis:




a) (1 punto) ¿Qué dimensiones tendrá la casa si quiere que la planta tenga una superficie de 96 $m^2$?

b) (1 punto) ¿Qué superficie ocupará el invernadero?

El problema 3 solo lo eligió un estudiante que lo resolvió correctamente. Los alumnos tenían que resolver 2 cuestiones sobre ecuaciones de segundo, 3 que requerían hallar las soluciones y dos que implicaban el planteamiento y resolución de una ecuación cuadrática. Asignando dos puntos si la respuesta era correcta, 1 parcialmente correcta y 0 si no era respondida o se hacía de manera incorrecta, cada alumno podía tener una puntuación total de 10 puntos. La figura 2.5 incluye la distribución de frecuencias de dicha puntuación total. El total de alumnos que respondieron a las preguntas del examen fue de 29, la puntuación mediana, 4, 4 alumnos obtuvieron una puntuación de 0 y 1 de 10.

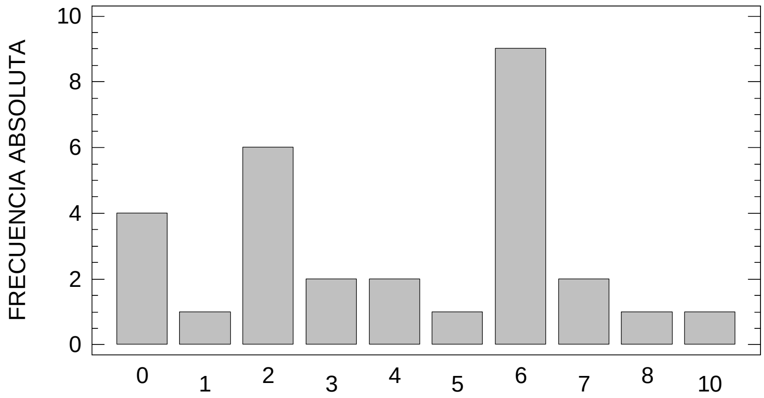


Figura 2.5. Distribución de frecuencias de la puntuación total

A continuación, se mencionan algunas respuestas relevantes dadas por los chicos en cada una de las actividades.

*Errores cometidos en el apartado a):*

1. $x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 + 4 \Rightarrow 4x^2 = 4 \Rightarrow \dfrac{4}{4x^2}$

2. Error al operar para calcular la raíz (solución dada por tres alumnos):

   $x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow a = 1, b = 3, c = -4$

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} \ldots\ldots.$$

3. Toma los coeficientes positivos:

   $x^2 + 3x - 4 = 0$

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} \ldots\ldots.$$

4. Fórmula errónea y error al operar para calcular la raíz:

   $x^2 + 3x - 4 = 0$

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{-b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-9 - 16}}{2} \ldots\ldots.$$

*Errores cometidos en el apartado b):*

1. $4(x^2-3)+x(x-2)=x^2-15 \Rightarrow 4x^2-12+2x-2x=x^2-15$
   $\Rightarrow 4x^2+2x-2x-x^2=-15+12 \Rightarrow 3x^2=-27 \Rightarrow x=\dfrac{-27}{3x^2}$

2. Al calcular la raíz de la fórmula, olvida que el coeficiente b está elevado al cuadrado. En cambio, en el apartado a) y b) aplica la fórmula correctamente. Por lo que se puede considerar un despiste.

3. $4(x^2-3)+x(x-2)=x^2-15 \Rightarrow 4x^2-12++2x-2x+3=x^2-15$
   $\Rightarrow 3x^2=-3 \Rightarrow x=\sqrt{3-3}=0$

4. Toma los coeficientes positivos. Por lo que el resulta al aplicar la fórmula es erróneo.

   $4(x^2-3)+x(x-2)=x^2-15 \Rightarrow ......... \Rightarrow 4x^2-2x+3=0 \to a=4, b=2, c=3.........$

5. No ordenar la ecuación en la forma general $ax^2+bx+c=0$, lo que da lugar a identificar de forma errónea los coeficientes. Esto implica que al aplicar la fórmula el resultado es erróneo.

   $4(x^2-3)+x(x-2)=x^2-15 \Rightarrow ......... \Rightarrow 4x^2+3-2x=0 \to a=4, b=3, c=-2.........$

*Errores cometidos en el apartado c):*

Los errores más comunes han sido, al suprimir denominadores, no multiplicar por el mínimo común múltiplo aquellos términos que se presentaban en forma de fracción. Algunas soluciones dadas por los estudiantes han sido las siguientes:

1. $\dfrac{x^2+1}{3}-x=\dfrac{x^2-4}{6}+1 \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{6}-\dfrac{x}{6}=\dfrac{x^2-4}{6}+\dfrac{1}{6} \Rightarrow$
   $3x^2+3-x=x^2-4+1 \Rightarrow 3x^2-x-x^2=-4+1+3 \Rightarrow x^2=-6 \Rightarrow x=\dfrac{-6}{1}$

2. $\dfrac{x^2+1}{3}-x=\dfrac{x^2-4}{6}+1 \Rightarrow 3x^2+3-x=6x^2-24+1.........$

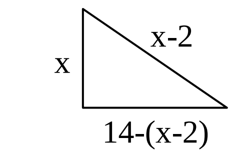
3. $\dfrac{x^2+1}{3}-x=\dfrac{x^2-4}{6}+1 \Rightarrow \dfrac{4x+2}{6}-\dfrac{2x}{6}=\dfrac{x-4}{6}+\dfrac{1}{6}..........$

4. $\dfrac{x^2+1}{3}-x=\dfrac{x^2-4}{6}+1 \Rightarrow 2(x^2+1)-x=x^2-4+1..........$

   (Este paso ha sido dado por dos alumnos)

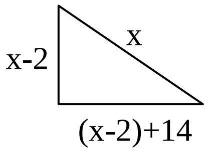
*Errores cometidos en el problema 2:*

1.



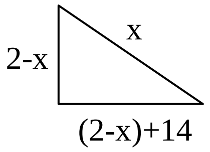

$$x^2 = (x-2)^2 + [14-(x-2)]^2$$
$$x^2 = 4 + x^2 - 4x + 196 - (4 + x^2 - 4x)$$
............

2.



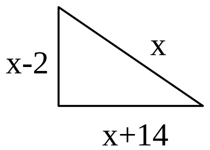

$$x + (x-2) + [(x-2)+14] = 0......$$

3.



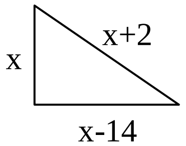

$$x^2 = 4 - x^2 + 4 - x^2 + 14^2.......$$

4.



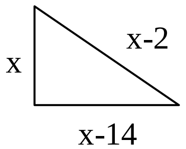

$$x = (x-2)^2 + (x+14)^2.......$$

5.



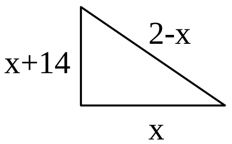

$$x^2 + x^2 - 196 = x^2 + 4.......$$

6.




$$x + (x-2) + (x-14) = 0......$$

7.




$$(2-x)^2 = (x+14)^2 + x^2.......$$

## 3. CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

En esta sección incluimos el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza vivido orientado hacia la identificación de propuestas de cambio. En primer lugar describimos brevemente el marco teórico que usamos, las cuestiones centrales de nuestra indagación y la metodología que aplicaremos.

Dado que la emisión de un juicio sobre la idoneidad de un proceso de enseñanza - aprendizaje requiere establecer previamente un marco de referencia hemos procedido (apartado 3.2) a buscar y sintetizar publicaciones de innovaciones e investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado, clasificando los resultados en las facetas epistémica-ecológica, cognitiva-afectiva e instruccional, según propone la teoría de la idoneidad didáctica.

### 3.1. Marco teórico, problema y metodología

Como indican Godino y Batanero (2008), el valor de la reflexión sobre la experiencia como un medio para estimular el aprendizaje ha sido destacado desde hace varias décadas. Schön (1983) describió la reflexión como "una continua interacción entre el pensamiento y la acción" (p. 281); y describió al "práctico reflexivo" como la persona que "reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura" (p. 50).

En trabajos recientes de diversos campos se ha introducido el concepto de "Reflexión guiada" como un proceso de indagación innovador en el que el práctico es asistido por un mentor (o "guía") mediante un proceso de auto-indagación, desarrollo, y aprendizaje a través de la reflexión, con el fin de llegar a ser enteramente efectivo. También en el campo de la formación de profesores se encuentran referencias en las que se informan de investigaciones en las que se desarrollan y experimentan técnicas específicas de "reflexión guiada" (Nolan, 2008).

En nuestro caso vamos a aplicar como herramienta o guía para la reflexión la noción de idoneidad didáctica. Esta noción teórica, sus dimensiones, criterios, y desglose operativo, han sido introducidas por Godino y colaboradores en diversos trabajos (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, 2011) como herramientas que permiten el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. La idoneidad didáctica tiene en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones epistémica – ecológica, cognitiva – afectiva, interaccional – mediacional implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes (Godino, 2011):

1) *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

2) *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

3) *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

4) *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

5) *Idoneidad afectiva*, grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

6) *Idoneidad ecológica*, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

El problema que abordamos en esta sección de la memoria de fin de máster lo podemos formular en los siguientes términos:

1. ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza - aprendizaje sobre las ecuaciones de segundo grado experimentado durante el periodo de prácticas en 3º de ESO?

2. ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica?

En el marco de la teoría de la idoneidad didáctica se establece que para poder emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático es imprescindible realizar una reconstrucción de los significados de referencia didáctica del tema correspondiente. Ello requiere proceder a una revisión sistemática de los resultados de las innovaciones e investigaciones realizadas en educación matemática sobre los aspectos epistémicos, ecológicos, cognitivos, afectivos, interaccionales y mediacionales. Esto nos lleva a plantearnos una cuestión previa:

3. ¿Cuáles son los resultados de las innovaciones e investigaciones previas realizadas sobre la enseñanza - aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado?

Estas serán las cuestiones que abordaremos en las siguientes secciones de esta parte de la memoria.

En el anexo 1 incluimos una síntesis de los criterios de idoneidad didáctica que, a modo de instrumento o guía de reflexión utilizaremos para valorar la idoneidad didáctica del proceso de enseñanza - aprendizaje que hemos experimentado.

## 3.2. Selección y síntesis de investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la ecuación cuadrática

En este apartado describimos trabajos publicados que aportan información relevante sobre distintas facetas del conocimiento didáctico-matemático acerca del estudio de las ecuaciones de segundo grado en educación secundaria. Concretamente tendremos en cuenta las facetas epistémica (o matemática), la faceta cognitiva y la instruccional, sobre las cuales hemos encontrado referencias significativas que nos servirán de apoyo para valorar la idoneidad didáctica del proceso de estudio que hemos experimentado.

### 3.2.1. Faceta epistémica

En nuestra búsqueda de referencias sobre la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre las ecuaciones de segundo grado hemos encontrado un artículo de Hanna y Barbeau (2008) que aporta criterios relevantes, al relacionar el estudio de estas ecuaciones con técnicas matemáticas cuyo dominio por los estudiantes se considera muy significativo.

Este artículo comparte la tesis central de Rav (1999, p.6) de que la “esencia de las matemáticas reside en inventar métodos, herramientas, estrategias y conceptos para resolver problemas”, por lo cual los autores centran la atención del mismo en explorar las consecuencias de esta tesis para la educación matemática. En particular, quieren poner de manifiesto que las pruebas deberían ser el foco primario de interés matemático, porque son las portadoras del conocimiento matemático incorporado en los métodos, herramientas, estrategias y conceptos puestos en juego en las mismas. Estas ideas son ejemplificadas en este artículo para el caso de la fórmula cuadrática, razón por la cual lo consideramos de especial interés para valorar la idoneidad epistémica de nuestra experiencia de enseñanza de las ecuaciones cuadráticas.

Los autores aportan argumentos convincentes de que el estudio de las ecuaciones cuadráticas puede permitir introducir técnicas matemáticas valiosas, más allá de la mera justificación de la fórmula general que produce las soluciones de dichas ecuaciones. Sintetizamos a continuación tales argumentos y las técnicas que proponen, más allá del mero aprendizaje memorístico de la fórmula y de su aplicación mecánica.

Los autores reconocen que usualmente los estudiantes aprenden a usar la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas particulares, aplicándola ciegamente, sin darse cuenta que pueden comprobar las soluciones sustituyendo los valores en la ecuación. Sin embargo, si hacen tales sustituciones, entonces, con una base empírica, llegarán a confiar indudablemente en ella y a aplicarla mecánicamente.

Los estudiantes pueden percibir que hay dos métodos independientes de resolver las ecuaciones cuadráticas, uno, factorizando, lo que no es garantía de éxito, y el otro usando la fórmula, que funciona en cualquier caso.

Una manera de comprobar que la fórmula funciona es sustituyendo los valores de x dados por la fórmula y verificar que ciertamente satisfacen la ecuación cuadrática. Esta es una prueba legítima, pero, ¿deja algo que desear? En el lado positivo de la balanza enfatiza lo que la fórmula de hecho produce: valores de la variable que satisfacen la ecuación. En el lado negativo, aparte de la complicación de la substitución, ¿cómo de probable es que los estudiantes serán capaces de aplicarla de manera flexible y fiable? No hay ninguna indicación de la significación de la fórmula, cómo puede surgir una tal expresión complicada, y cómo podría encajar con otras propiedades y aplicaciones de las funciones cuadráticas y otras funciones relacionadas. La fórmula es una caja negra. Verificar simplemente que la fórmula funciona tiene otro defecto: no sabemos que da las únicas soluciones de la ecuación cuadrática. Podría haber otros números que la verifican.

Una discusión de hecho de cómo se obtiene la fórmula nos lleva a cuestiones de estrategia. En vez de preguntar, ¿Cuál es una fórmula para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática?, preguntamos, ¿Cómo podemos resolver una ecuación cuadrática? Esta segunda cuestión nos induce a pensar sobre procesos más que sobre productos, y considerar cómo podemos comenzar.

Por ejemplo, podemos preguntar si hay ecuaciones cuadráticas que son fáciles de resolver. Hay dos posibles respuestas que podemos dar. Primero, podemos resolver ecuaciones cuando la cuadrática es factorizable en dos polinomios lineales. Segundo, podemos resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = k$, cuando k es positivo; ciertamente, en este caso la respuesta es: $x = \pm\sqrt{k}$ .

¿Hay alguna manera que podamos aplicar para reducir el problema de resolver una cuadrática general a uno de estos casos?

La mayoría de los estudiantes probablemente no sabrán cómo proceder a partir de aquí por sí mismos, y se les tendrá que enseñar la técnica de completar el cuadrado. El reconocimiento clave es que $ax^2+bx$ se puede reescribir como, $a(x^2+\frac{b}{a}x)$, y que la expresión entre paréntesis incluye a los dos primeros términos del desarrollo de $(x+\frac{b}{2a})^2$, y que difiere de este desarrollo por una constante, esto es, $\frac{b^2}{4a^2}$. De esta manera "completamos el cuadrado"; sumamos el término $\frac{b^2}{4a^2}$ en el lado izquierdo para obtener el cuadrado de un polinomio lineal, y después lo restamos de nuevo, sumando de este modo 0. Cuando $a\neq 0$, transformamos $ax^2+bx+c=0$, del siguiente modo:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta puede ser la primera vez que los estudiantes de escuela secundaria vean esta técnica general de sumar y después restar un término a una expresión, una técnica útil que verán con frecuencia a medida que avanzan en su estudio de las matemáticas. Observamos aquí que completar el cuadrado no surge lógicamente de un enunciado o un axioma previo. Más bien, es una técnica específica de un tópico y una herramienta matemática adicional que los estudiantes la pueden usar en otras situaciones similares. Añadiendo esta técnica a su caja de herramientas, los estudiantes pueden ser capaces de tomar ventaja de situaciones en las que es más efectivo usar esta técnica que simplemente aplicar la fórmula.

Incluso más útil que la propia fórmula es la estrategia de completar el cuadrado. Por ejemplo, dada la tarea de resolver la ecuación, $x^2-8x-48=0$, si no reconoce una factorización, el estudiante puede fácilmente poner la ecuación como $(x-4)^2 - 64$ en lugar de aplicar la fórmula.

Así pues, vemos que la consideración de la prueba tiene beneficios que van más allá de la mera validación de una fórmula. En este caso, ganamos la percepción de reducir la situación general a un tipo canónico, la comprensión de cómo el carácter de las raíces depende de los coeficientes, la seguridad de que la ecuación cuadrática no puede tener más de dos raíces. Ganamos el conocimiento de una técnica genérica cuyo rango de aplicabilidad es más amplio que la situación dada, y el conocimiento más amplio de que las ecuaciones cuadráticas pueden ser conectadas con un todo más comprensivo.

### 3.2.2. Faceta cognitiva

Sobre aspectos relevantes de la faceta cognitiva implicada en los procesos de estudio de las ecuaciones cuadráticas en educación secundaria hemos encontrado la referencia de Vaiyavutjamai y Clements (2006), *Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations*, la cual sintetizamos a continuación.

Este artículo informa de los resultados de una investigación realizada en seis clases de dos escuelas de Tailandia en la que se evalúa el impacto de un tipo de enseñanza tradicional sobre el aprendizaje de estudiantes de noveno grado sobre la ecuación cuadrática. Consideramos que este trabajo aporta información relevante para valorar la idoneidad cognitiva de la experiencia de enseñanza que hemos realizado, ya que tanto el tema, el estilo de enseñanza aplicado y el nivel educativo tienen grandes similitudes.

El artículo responde a la necesidad de tomar conciencia de los efectos de un estilo de enseñanza sobre el aprendizaje de los estudiantes en el cual el énfasis se pone en la manipulación de símbolos y con menor atención a los significados de los símbolos.

Se comienza reconociendo que ha habido menos investigación sobre este tema que sobre otros relacionados con el aprendizaje del álgebra, como el aprendizaje de las ecuaciones lineales. Las dificultades que tienen los estudiantes en aprender a resolver ecuaciones cuadráticas no son parte del conocimiento pedagógico del contenido de los profesores de matemáticas de secundaria, ni tampoco de los autores de libros de texto o artículos sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Usualmente el pensamiento del estudiante en estos contextos parece estar dominado por la necesidad de lograr dominio procedimental, y usualmente sin garantía de que se logre comprensión relacional. Hay evidencias de que el tipo de enseñanza tradicional, básicamente expositiva en las clases de matemáticas, enfatiza las destrezas de cálculo y falla en llamar la atención sobre las conexiones. Un énfasis excesivo en las destrezas es probable que resulte en un sacrificio de la comprensión y en la construcción de conocimiento conceptual.

*Diseño del estudio*

La finalidad del estudio fue investigar cómo lecciones tradicionales sobre las ecuaciones cuadráticas, en las que el énfasis es enseñar a los estudiantes de grado 9 a resolver ecuaciones cuadráticas mediante factorización (y aplicación de la ley del factor nulo), mediante "completación del cuadrado", y mediante la fórmula cuadrática, influye en el desarrollo en el estudiante de conocimiento, destrezas, conceptos y comprensión con respecto a las ecuaciones cuadráticas.

La muestra de estudiantes fue de 231 estudiantes de seis clases de grado 9 en dos escuelas del gobierno en Tailandia, quienes fueron instruidos por cuatro profesores. Los estudiantes recibieron 13 lecciones sobre ecuaciones lineales y desigualdades y 11 lecciones sobre ecuaciones cuadráticas. Durante las 11 lecciones sobre ecuaciones cuadráticas los profesores enseñaron una secuencia de lecciones estándares en las clases de matemáticas de secundaria, incluyendo factorización y la ley del factor nulo (si $a \times b = 0$, entonces $a = 0$, o $b = 0$, o ambos, a y b son 0), completar cuadrados, y el uso de la fórmula cuadrática.

Este artículo aporta información relevante básicamente sobre la faceta cognitiva de los procesos de estudio de las ecuaciones cuadráticas en secundaria. Se distingue entre la comprensión instrumental frente a la relacional, entendidas como propone Skemp (1978), las cuales son evaluadas mediante dos tipos de instrumentos:

- Un cuestionario escrito con 18 cuestiones en las que se pide resolver un conjunto de otras tantas ecuaciones cuadráticas (conocimiento procedimental o instrumental) y
- Un guión de entrevista, que atiende al componente de comprensión relacional. En la entrevista se pide resolver las ecuaciones:

$$(x-3)\ (x-5) = 0\ ;\ x^2-x = 12;\ x^2 = 9;\ 2x^2 = 10x$$

Con la entrevista se pretendía conocer si los estudiantes, después de haber recibido la instrucción sobre el tema, reconocerían, antes de intentar resolver las ecuaciones, si tendrían dos, una o ninguna solución. Asimismo, se quería determinar si los estudiantes,

- Tendrían una mejor apreciación de los principios matemáticos implicados, por ejemplo, de cómo la ley del factor nulo puede ser aplicada.
- Se darían cuenta que en las ecuaciones del tipo $(x-3)(x-5) = 0$, $x^2-x = 12$, y $2x^2 = 10x$, las dos x representan la misma variable.
- Sabrían que una solución a una ecuación cuadrática es un número que, sustituido en las ecuaciones genera un enunciado verdadero.

*La investigación informa de los siguientes resultados*

Después de las 11 lecciones sobre ecuaciones cuadráticas la mayoría de los estudiantes participantes encontraron difícil resolver la mayoría de las cuestiones del Test de Ecuaciones Cuadráticas (18 ecuaciones para resolver, p. 61). La puntuación media global después de la enseñanza fue de 6.17 de un total posible de 18 para los 231 estudiantes.

Los autores identificaron un tipo de concepción incorrecta de los estudiantes entrevistados que consideran como fundamental. Excepto dos estudiantes, los restantes de los 18 entrevistados no piensan que las dos x en la ecuación $(x-3)(x-5) = 0$ representan una única variable que puede tomar distintos valores, en particular $x = 3$, y $x = 5$, y que corresponden a las dos únicas soluciones de dicha ecuación.

La mayoría obtuvieron para dicha ecuación las soluciones $x = 3$ y $x = 5$, pero cuando se les preguntó que comprobaran sus soluciones, sustituyeron $x = 3$ en $(x-3)$ y $x = 5$ en $(x-5)$ y concluyeron que puesto que $0 \times 0 = 0$ sus soluciones eran correctas. Pensaron que las dos x en $(x-3)(x-5) = 0$ representaban diferentes variables y deberían tomar valores diferentes. Esta concepción incorrecta también se manifestó con otras ecuaciones como, $x^2 - x = 12$.

Los autores consideran que esta concepción incorrecta puede estar relacionada con una mala interpretación por parte de los estudiantes de la expresión frecuente que se hace al estudiar este tipo de ecuaciones, "que las ecuaciones cuadráticas pueden tener dos soluciones diferentes". Esto puede significar en la mente de los estudiantes que si aparecen dos x en una ecuación entonces éstas *deberían* tomar valores diferentes. Esto puede explicar por qué algunos estudiantes dan una sola solución a ecuaciones del tipo $x^2 = 9$. "En palabras de uno de los entrevistados, "en esa ecuación la x aparece solo una vez, y por tanto hay una sola solución" (p. 72). Como consecuencia de esta concepción errónea, los estudiantes no comprenden la ley del factor nulo, o cómo comprobar las soluciones de la ecuación cuadrática.

*Conclusiones y comentarios finales.*

El análisis de los datos de las entrevistas reveló que muchos entrevistados que obtuvieron soluciones correctas de hecho tenían serias concepciones incorrectas sobre lo que realmente es una ecuación cuadrática. Sus respuestas eran correctas pero, desde un punto de vista matemático, no sabían de lo que estaban hablando. Dar respuestas correctas a una prueba tradicional de papel y lápiz sobre ecuaciones cuadráticas meramente sirvió para reforzar sus concepciones incorrectas sobre la naturaleza de una variable en una ecuación cuadrática.

¿Hay formas factibles de enseñanza que permitan a los estudiantes, no solo a los de mayor capacidad, el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, y otros tópicos matemáticos, de una manera relacional?

Algunos profesores e investigadores educativos piensan que una aproximación de enseñanza que coloca el estudio de las ecuaciones, incluyendo las ecuaciones cuadráticas, dentro del estudio de las funciones - la llamada aproximación “funcional” - es bastante más probable que consiga una comprensión relacional en los estudiantes que la tradicional aproximación expositiva, procedimental, de resolución de ecuaciones, sobre todo si se acompaña con el uso de tecnología moderna como las calculadoras gráficas (Drijvers & Doorman, 1996; ….)

Los autores concluyen con la propuesta de posponer el estudio de las ecuaciones cuadráticas a cursos posteriores al 9. “El fallo bien documentado de muchos - casi con seguridad la mayoría de los estudiantes de secundaria en el mundo- de enfrentarse a las demandas de las ecuaciones cuadráticas sugiere que los diseñadores del currículo deberían retrasar la inclusión de las ecuaciones cuadráticas en los currículos hasta el Grado 10, Grado 11, o Grado 12” (p.73-74).

### ***Evaluación de la comprensión relacional***

El trabajo de Didiş, Baş, y Erbaş (2011) proporciona información útil sobre la faceta cognitiva del conocimiento didáctico-matemática relacionado con las ecuaciones cuadráticas, mostrando también, como lo hace el de Clements (2006), las carencias de los estudiantes en cuanto a la comprensión relacional de estos objetos matemáticos. La investigación se realizó con una muestra de 113 estudiantes de 10º grado a los que se aplicó un cuestionario con 7 preguntas abiertas, de las cuales 3 de ellas trataban de evaluar aspectos no meramente instrumentales.

Dado que los estudiantes simplemente memorizan los procedimientos y las fórmulas para resolver las ecuaciones, tienen poca comprensión de su significado, no comprendiendo qué hacer y porqué. El estudio se diseñó para describir el razonamiento de los estudiantes cuando resuelven diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas con una incógnita, en particular cuando usan la técnica de factorización.

Los ítems que diseñaron para evaluar aspectos conceptuales fueron los siguientes:

*Cuestión 5.*

Para resolver la ecuación (x-3)(x-2) = 0 para números reales, Ali respondió simplemente, “x=3, o x=2” ¿Es esta respuesta es correcta?. Si es correcta, ¿cómo puedes mostrar su corrección?

*Cuestión 6:*

Un estudiante dio la siguiente respuesta a este problema:

Resuelve, $x^2-14x+24=3$:

$(x-12)\cdot(x-2)=3$
$(x-12)\cdot(x-2)=3\cdot 1$
$x-12=3$ ; $x-2=1$
$x=15$; $x=3$
Conjunto de soluciones = {3, 5}

¿Es correcta la respuesta del estudiante? Explica y justifica tu respuesta.

*Cuestión 7:*

A continuación se da la solución de la ecuación cuadrática: “$2x^2 = 3x$”
Según tú, ¿es correcta o no esta solución? Explica y justifica tu respuesta.
Solución:

Paso I: $2x^2=3x$
Paso II: $2\cdot x\cdot x=3\cdot x$
Paso III: $2\cdot x =3$
Paso IV: $x= 3/2$
Conjunto de soluciones = {3/2}

Los autores informan que los estudiantes intentan resolver las ecuaciones de la manera más rápida posible, sin fijar la atención en sus estructuras y significado conceptual. Reconocen que sería necesario realizar entrevistas clínicas para poder profundizar en sus razonamientos, pero que básicamente revelan una comprensión de tipo instrumental.

Reconocen que los profesores juegan un papel importante para estimular el aprendizaje relacional de los estudiantes. El conocimiento de las dificultades de los estudiantes sobre las ecuaciones cuadráticas debería ser una parte importante del conocimiento pedagógico del contenido de los profesores.

### 3.2.3. Faceta instruccional

En Radford y Guerette (1996) se describe una secuencia de tareas centradas en la resolución de problemas geométricos relacionados con rectángulos y cuadrados, con el fin de que los estudiantes inventen la fórmula que resuelve las ecuaciones de segundo grado. A continuación incluimos una descripción resumida de la secuencia de tareas, la cual se propone realizar en grupos de trabajo cooperativos, así como usando recursos gráficos y manipulativos, razón por la cual incluimos esta investigación en este apartado[1].

En primer lugar, se pide a los alumnos encontrar un método para resolver el siguiente problema:

*Problema 1*

¿Cuáles deben ser las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 20 y cuya área es 96 unidades cuadradas?

Después, el profesor, con ayuda de grandes figuras de cartón, explica el proceso para resolver el problema: se toma un cuadrado cuyo lado es 10, entonces su área es 100 (Fig. 11). Luego, hay que cortar 4 unidades cuadradas del cuadrado de lado 10 (Fig. 12) para obtener una figura cuya área es 96. Esto se puede conseguir (que es la idea clave de la resolución) mediante la reducción de un pequeño cuadrado de lado 2 (Fig. 12). Con el fin de obtener un rectángulo, cortamos el rectángulo por la línea de puntos que se muestra en la figura 13 y lo colocamos verticalmente a la derecha (Fig. 14). Así, los lados buscados miden 12 unidades y 8 unidades.

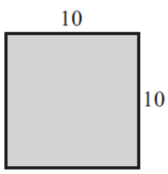


FIGURE 11

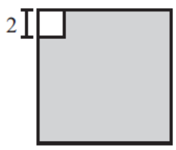


FIGURE 12

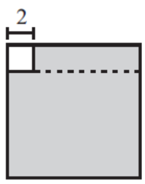


FIGURE 13

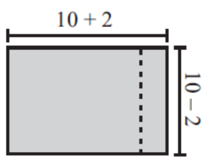


FIGURE 14

---

[1] En el marco de la teoría de la idoneidad didáctica la descripción a priori de las tareas y el sistema de prácticas involucradas en su solución se pueden considerar también formando parte de la faceta epistémica del conocimiento matemático.

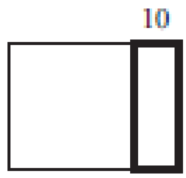
A continuación, se dan otros problemas similares a los alumnos para resolver en grupos. Con el fin de evitar la repetición, se pide a los estudiantes resolver otro problema en el que el área del rectángulo es 30 y el perímetro 12. El profesor pide que describan por escrito, de forma clara, los pasos a seguir para resolver este tipo de problema. Posteriormente, se inicia una discusión de dichos pasos. Trabajando en grupos cooperativos, los estudiantes tienen que discutir y llegar a un acuerdo sobre los puntos que podrían causar un conflicto o puedan dar lugar a una mejora. Cuando todos los miembros del grupo están de acuerdo, el profesor elige uno de los estudiantes de cada grupo para presentar el trabajo. Esto permite a algunos estudiantes entender mejor la enseñanza pretendida. Después de esto, a los estudiantes se les pide que planteen los propios problemas con la siguiente restricción: los lados del rectángulo tienen que ser expresados en números naturales, y luego, como segundo ejercicio, en números enteros. Los estudiantes pueden incluso encontrar respuestas fraccionarias.

Muchos estudiantes tienen algunos problemas para escribir el mensaje en términos generales, es decir, sin hacer referencia a los números particulares para el perímetro y el área. El hecho de que los estudiantes traten de usar el lenguaje natural para expresar sus ideas en problemas particulares simplificará la posterior transición al lenguaje algebraico para problemas generales.

En segundo lugar, se presenta a los alumnos un problema que requiere el uso de un método diferente:

*Problema 2:*

La longitud de un rectángulo es de 10 unidades. Su anchura es desconocida. Ponemos un cuadrado en uno de los lados del rectángulo, como se muestra en la figura. Juntas, las dos formas tienen un área de 39 unidades cuadradas. ¿Cuál es el ancho del rectángulo?




El profesor, haciendo uso de grandes figuras de cartón, recorta el rectángulo inicial verticalmente en dos (Fig. 17). A continuación, toma una de las piezas y la coloca en la base del cuadrado (Fig. 18). Ahora los estudiantes se dan cuenta de que la nueva forma geométrica es casi un cuadrado. El profesor señala entonces que la nueva forma se puede completar con el fin de que sea un cuadrado. Para ello, un pequeño cuadrado, cuyo lado es x (Fig. 19), se tiene que añadir. El pequeño cuadrado tiene un área igual a 25. Por lo tanto, el área del nuevo cuadrado (Fig. 19) es 39 + 25 = 64. Su lado es entonces igual a 8. De la figura 19 se deduce que x +5 = 8, que nos lleva a x = 3.

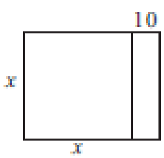



FIGURE 16

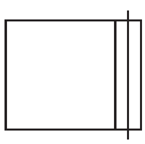


FIGURE 17

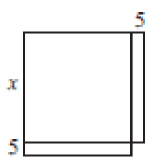



FIGURE 18

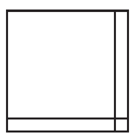
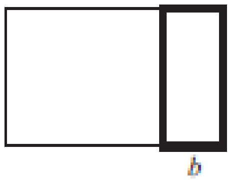


FIGURE 19

A continuación, se dan otros problemas similares a los alumnos a resolver en grupos. Al igual que en la primera parte, a los estudiantes se les pide que realicen una descripción escrita de los pasos a seguir para resolver este tipo de problema.

Por último, los alumnos seguirán trabajando sobre un problema del mismo tipo que los problemas 1 y 2. La diferencia es que los números concretos no se dan ni para la base del rectángulo ni para el área que cubren las dos formas juntas. El objetivo es ayudar a los estudiantes a reinventar la fórmula que resuelve los problemas anteriores de manera general. El profesor sugiere usar la letra "b" para la base del rectángulo y "c" para el área de ambas formas.

La ecuación final es: $x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{a}\right)^2} - \frac{b}{a}$




Traduciendo el problema geométrico a lenguaje algebraico se tiene que: si el lado desconocido es "x", entonces el área del cuadrado es $x^2$ y la del rectángulo es bx, por lo que la suma de las dos áreas es igual c, es decir: $x^2 + bx = c$. Ahora, para vincular las ecuaciones de la fórmula, el profesor da algunas ejemplos (como $x^2 + 8x = 9$, $x^2 + 15x = 75$) y pide a los estudiantes resolverlas mediante la fórmula.

El siguiente paso es dar a los estudiantes la ecuación $ax^2 + bx = c$ .Esta ecuación se divide por a (suponiendo $a \neq 0$), y nos lleva a la anterior ecuación. Basta entonces sustituir ‘b’ por ‘b/a' y 'c' por 'c/a', en la fórmula anterior, lo que da la nueva fórmula:

$$x = \sqrt{\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b}{2a}$$

El último paso es considerar la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$ y encontrar la fórmula que la resuelve. Esta ecuación se puede reescribir como $ax^2 + bx = -c$. Así, tenemos que sustituir ‘c’ por ‘-c’ en la fórmula y se obtiene la fórmula general:

$$x = \sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con el fin de obtener todas las soluciones numéricas hay que considerar la raíz cuadrada negativa de $b^2 - 4ac$. Esto nos lleva a la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*Conclusión y comentarios particulares.*

Que los alumnos puedan producir una fórmula de este tipo y darse cuenta de la cantidad de trabajo que la fórmula guarda se aprecia mucho por los estudiantes. Esto les da un sentido "práctico" de la fórmula. Sin embargo, muchos estudiantes necesitan un poco de tiempo con el fin de abandonar el contexto geométrico y limitarse a la utilización numérica de la fórmula. Además, hay muchos estudiantes que prefieren seguir pensando en términos de la técnica geométrica. Algunos estudiantes tienen la impresión de que ya no entienden si sólo utilizan una fórmula. Entendimiento, para muchos de ellos, no parece significar simplemente "ser capaz de hacer algo".

Este enfoque tiene como objetivo proporcionar un marco útil para ayudar a los estudiantes a desarrollar un sentido de los símbolos. Vale la pena mencionar que el uso de manipulativos y técnicas geométricas para derivar la fórmula fueron apreciadas por los estudiantes de secundaria. Una niña, por ejemplo, dijo: "Yo entiendo mejor con los dibujos, me parece mucho más interesante y divertido que el resto de las matemáticas."

El paso de los números a las letras no consiste en una transcripción simple. Estas experiencias incluyen una etapa de generalización y de la reorganización de las acciones que abre una descripción mucho más amplia de los objetos matemáticos.

***Enfoque geométrico y funcional del estudio de las ecuaciones cuadráticas usando tecnología***

En Galván, C. (2006) se describe el proceso a seguir en el aula para el estudio de la variación del perímetro de los rectángulos de igual área y la construcción geométrica de éstos, que nos conduce hacia la resolución geométrica de ecuaciones de segundo grado, haciendo uso de un programa de geometría interactivo, GEUP, que ayuda a la construcción de las figuras.

El proceso de resolución de ecuaciones de segundo grado desde la geometría podría utilizarse en la enseñanza con el objetivo de mostrar la comunicación entre la geometría, el análisis y el álgebra, que ayuden a una mejor comprensión de las matemáticas.

Las actividades elaboradas por Galván (2006), y que vamos a sintetizar a continuación, podrían trabajarse con alumnos de 4º de ESO, preferiblemente en un aula donde cada alumno pueda disponer de un ordenador, o bien trabajando en grupos de tamaño reducido. El momento más adecuado podría ser como ampliación en el estudio de ecuaciones de 2º grado.

1) Variación del perímetro de los rectángulos de igual área

¿Tienen el mismo perímetro todos los rectángulos cuya área es 12 u2? Bastará con un ejemplo: un rectángulo de 3 x 4 tiene menor perímetro que uno de 2 x 6. Pero, *¿Cómo varía el perímetro de los rectángulos de igual área si varía su base x*?

Utilizaremos la gráfica de la función $y = A / x$, que nos proporciona una visualización de los rectángulos que son equivalentes entre sí: cada punto de ella tiene por coordenadas la base ($x$) y la altura ($y$) de un rectángulo cuya área es la misma ($A$). A la suma de la base y la altura ($x + y$) la llamaremos "semiperímetro" ($s$). En los mismos ejes donde tenemos la gráfica de $y = A / x$ iremos representando, punto a punto, la gráfica de la función $s = x + A / x$.

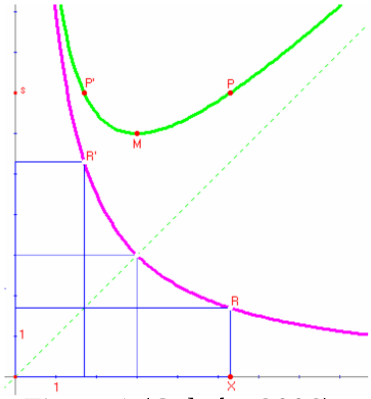


Figura 1 (Galván, 2006)

Se pretende que los alumnos trabajen solos, que observen y que extraigan sus propias conclusiones. Finalmente, entre todos, se analiza esta variación, relacionando el lenguaje de la gráfica con el algebraico y con el geométrico. Además, se puede atender a la continuidad, al crecimiento y decrecimiento, a las asíntotas, al punto mínimo…

El programa permite tratar de forma general el problema: podemos disponer de las gráficas correspondientes a cualquier valor del área sin más que utilizar su valor como parámetro y ayuda a la visualización: si movemos el punto X sobre el eje de abscisas, observaremos el rectángulo que corresponde a cada uno de estos puntos y, a la vez, los correspondientes puntos R y P moviéndose, R sobre su curva la gráfica de $y = A / x$, y P sobre la gráfica de la función $s = x + A / x$. También, a la inversa, podemos mover los puntos R o P sobre sus lugares geométricos y observar los rectángulos que corresponden a cada posición. Así, podemos observar la variación del perímetro cuando varía la base del rectángulo.

2) Rectángulos equivalentes a un cuadrado

*“¿Cómo construir un cuadrado equivalente a un rectángulo dado?”*

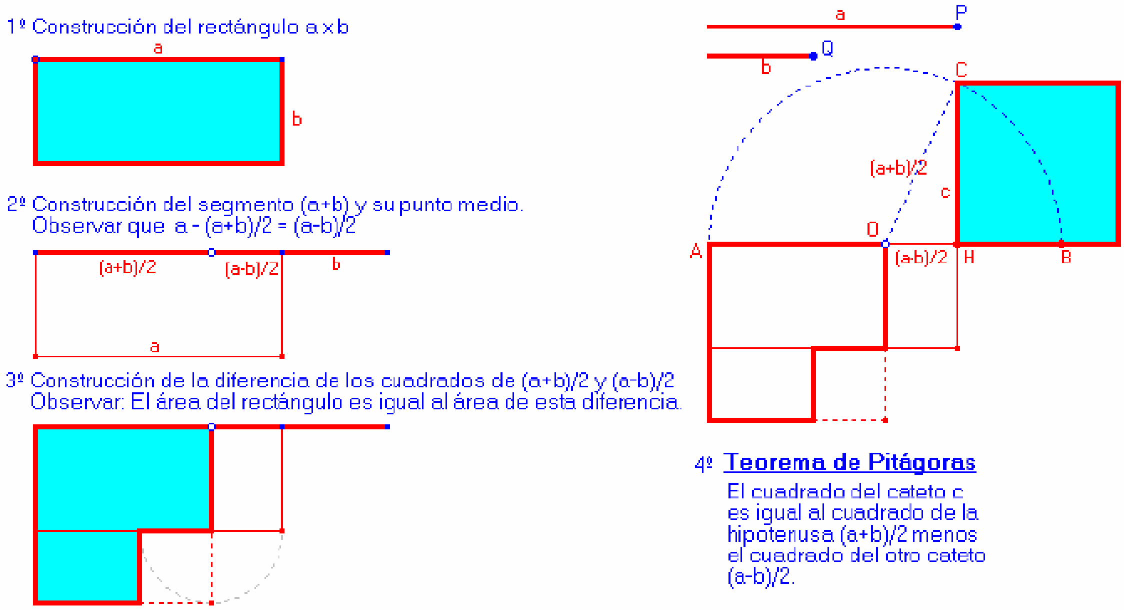



Figura 2 (Galván, 2006)

Observamos que el diámetro de la circunferencia es la suma de la dimensiones del rectángulo, AB = *a* + *b,* donde *a* = AH y *b* = HB.

*“¿Cómo construir un rectángulo equivalente a un cuadrado dado?”*

Se da al alumno la oportunidad de pensar por sí mismo. El profesor intentará facilitar el razonamiento, haciendo preguntas o reflexiones. Supongamos un cuadrado de área 9. Se trata de encontrar, partiendo del segmento que es el lado del cuadrado, los segmentos que serán la base y la altura de los rectángulos de forma geométrica, utilizando una regla sin graduar y un compás*.* Se conseguirán rectángulos diferentes.

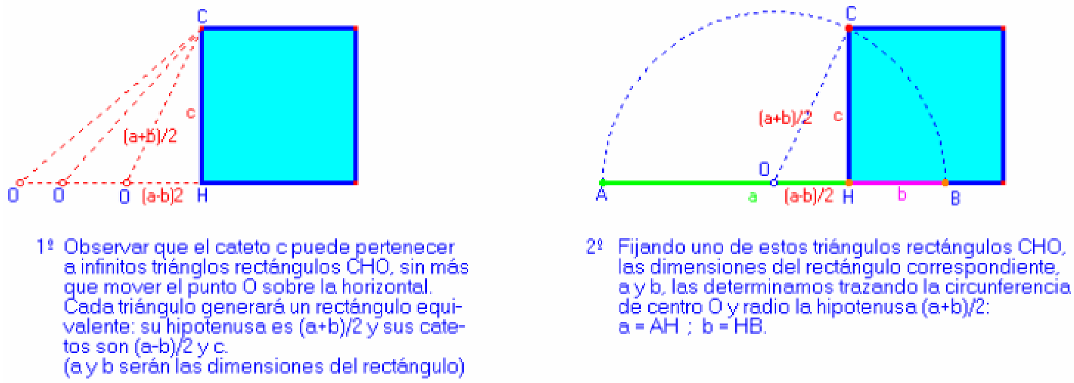



Figura 3 (Galván, 2006)

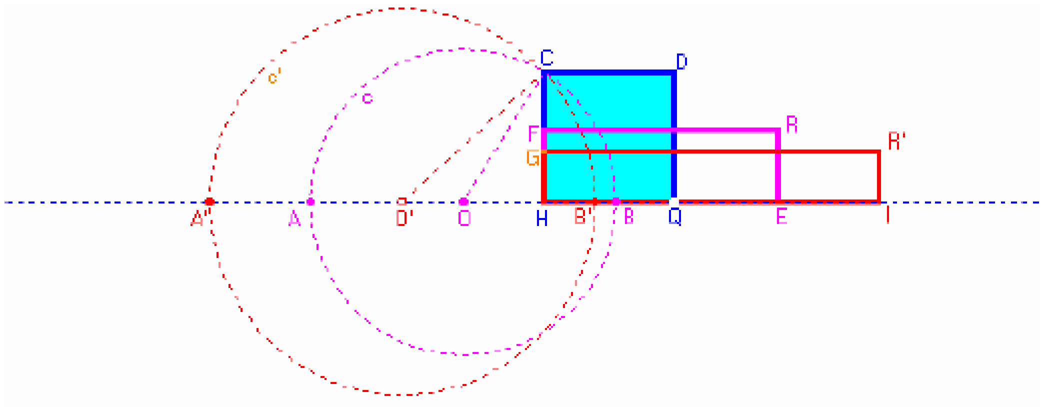


Figura 4 (Galván, 2006)

3) Ecuaciones de 2º grado

En este proceso de formación de rectángulos de igual área tenemos ante nuestra vista la solución geométrica de una ecuación de 2º grado: "cada rectángulo queda determinado por su área y su perímetro", "dos números *a* y *b* están determinados por su producto y su suma".

De esta forma podemos resolver, también, sistemas de ecuaciones de dos incógnitas que da origen a una ecuación de segundo grado:

*"Hallar dos números sabiendo que su suma es s y su producto es p".*

Si los números desconocidos son x e y, el sistema $x + y = s$; $x \cdot y = p$ conduce a la ecuación $x^2 - sx + p = 0$, que puede tener dos raíces reales: a y b. Este problema geométrico de encontrar las dimensiones del rectángulo conocidos su perímetro y su área exige que los números s y p sean positivos, así como tienen que ser positivas las dos raíces. Pero veamos las posibilidades, según el signo de las raíces, para una ecuación de segundo grado completa cuyo coeficiente de $x^2$ sea uno y con s y p positivos:

1. **a y b positivas:** $(x-a)(x-b) = 0$; $x^2 - (a+b)x + ab = 0$; $\mathbf{x^2 - sx + p = 0}$
2. **a y b negativas:** $(x+a)(x+b) = 0$; $x^2 + (a+b)x + ab = 0$; $\mathbf{x^2 + sx + p = 0}$
3. **a y b de distinto signo**, $(a > 0)$: $(x-a)(x+b) = 0$; $x^2 + (b-a)x - ab = 0$, que , según el signo de la diferencia $(b-a) = d$, se tienen las ecuaciones:
   $|b|>|a| \Leftrightarrow \mathbf{x^2 + dx - p = 0}$ la raíz de mayor valor absoluto es negativa.
   $|b|<|a| \Leftrightarrow \mathbf{x^2 - dx - p = 0}$ la raíz de menor valor absoluto es negativa.

Para la resolución geométrica es fundamental distinguir qué nos indica el coeficiente de x, es decir, saber si el dato conocido es la suma $(a+b) = s$ o la diferencia $(b-a) = d$. El signo de las raíces no lo vamos a obtener geométricamente, sino que lo debemos asignar nosotros según sea el caso que estemos resolviendo.

En las **ecuaciones de los casos 1 y 2** ($x^2 \pm sx + p = 0$) tenemos los datos s y p, la hipotenusa es $\frac{s}{2} = \frac{a+b}{2}$ y el cateto $\sqrt{p} = c$ .Tenemos que hallar el otro cateto $\frac{a-b}{2}$ para tener resuelta la ecuación.

En la Fig. 5 observamos la construcción realizada con GEUP: trazamos la circunferencia de diámetro AB = (a+b) = s. Sobre la perpendicular a AB en su punto medio O, marcamos el segmento OC' = lado del cuadrado cuya área es p. Al trazar la paralela a AB por C' obtenemos el punto C como intersección de ésta con la circunferencia. Con lo cual el segmento C'C = OH = cateto (a–b)/2, que es el que queríamos encontrar.

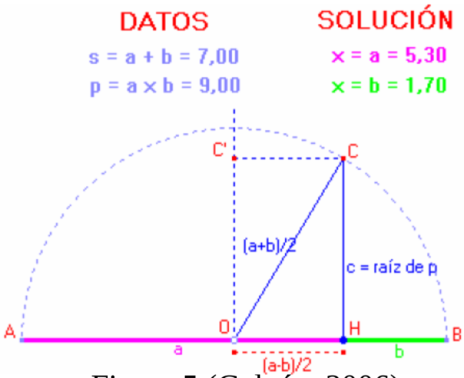


Figura 5 (Galván, 2006)

El cateto c, lado del cuadrado, no puede ser mayor que la hipotenusa (a+b)/2. Para que la ecuación $x^2 - sx + p = 0$ tenga solución tiene que cumplirse: $\frac{s}{2} \geq \sqrt{p}$. O lo que es igual: $s^2 \geq 4p$. Lo cual concuerda con la discusión desde el punto de vista algebraico (el discriminante de esta ecuación es $\Delta = s^2 - 4p$ ).

- Si la hipotenusa es mayor que el cateto ($\frac{s}{2} > \sqrt{p}$), la ecuación tiene dos soluciones a y b, que son las dimensiones del rectángulo equivalente al cuadrado de área p.
- Si la hipotenusa es igual que el cateto ($\frac{s}{2} = \sqrt{p}$), la ecuación tiene una sola solución, el único rectángulo posible es el cuadrado de área p.

Observando las gráficas de la Fig.1, nos fijamos que todas las sumas posibles (a+b) son mayores o iguales que 2c (c = lado del cuadrado, que es el rectángulo de perímetro mínimo). Veamos (en el dibujo) que las coordenadas de los puntos R y R', que son las dimensiones de los rectángulos de área 9 y perímetro 7 corresponden a las dos soluciones a = 5,30 y b = 1,70 (o viceversa) de la ecuación $x^2 - 7x + 9 = 0$, que es la resuelta geométricamente en la Fig. 5. Con las gráficas de las funciones de la Fig.1 podemos obtener las soluciones correspondientes a las ecuaciones $x^2 \pm sx + 9 = 0$.

Observemos la Fig.5. Las raíces son $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ y $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$. Veamos la expresión de estas en función de s y p:

$$x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - p} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

Sólo nos queda resolver las **ecuaciones en el caso 3** ($x^2 \pm d\,x - p = 0$). En ellas los datos son d y p. Disponemos de los dos catetos $\frac{d}{2} = \frac{a-b}{2}$ y $\sqrt{p} = c$. Tenemos que hallar la hipotenusa para tener resuelta la ecuación. Es evidente que estas ecuaciones siempre tienen solución.

Podemos ver la construcción geométrica en la siguiente figura (Fig. 6). El programa permite introducir los valores de d y p como parámetros. Podemos variar sus valores y obtener, de inmediato, la construcción y la solución correspondiente a la ecuación planteada en cada caso. En la figura aparece la solución de las ecuaciones $x^2 \pm 3x - 10 = 0$.

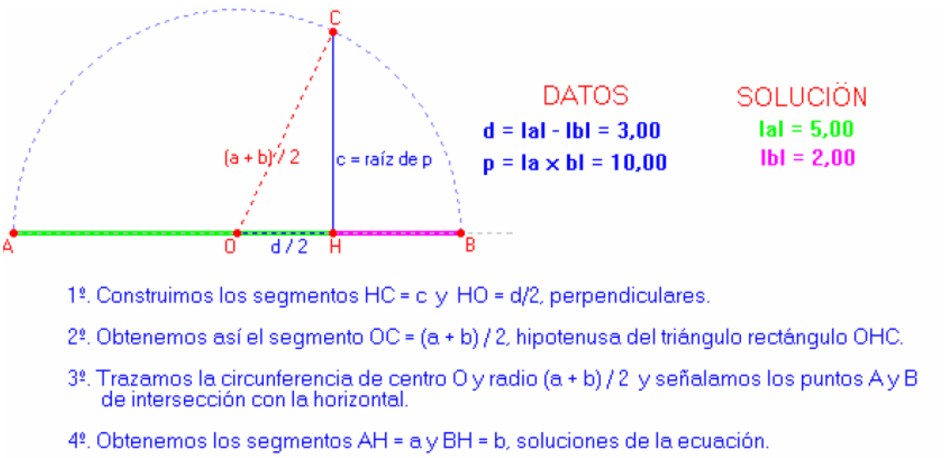



Figura 6 (Galván, 2006)

Galván enfatiza como conclusión la utilidad del Teorema de Pitágoras. A lo largo de los siglos, números y figuras han caminado unidos ayudando así a la construcción del edificio matemático. Quizás en nuestra enseñanza deberíamos intentar no separarlos demasiado, porque pensamos que unidos nos ayudan a comprender, a profundizar y a avanzar en el conocimiento.

### 3.2.4. Faceta ecológica

En esta faceta contemplamos la posición de algunas propuestas curriculares sobre el estudio de las ecuaciones cuadráticas y un ejemplo de actividad relacionada con la vida cotidiana.

En los Principios y Estándares 2000 del NCTM se hace referencia al estudio de las funciones cuadráticas en los niveles de "high school" (grados 9-12). En estas orientaciones curriculares no se menciona el tema de la resolución de las ecuaciones de segundo grado, sino que se incluyen propuestas para su tratamiento en conexión con las funciones cuadráticas. Concretamente en el estándar de álgebra se indica que los alumnos de Secundaria deberían tener experiencias interesantes explorando las propiedades de diferentes tipos de funciones. Por ejemplo, deberían aprender que la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ es cuadrática, que su gráfica es una parábola y que ésta es "abierta hacia arriba" porque el coeficiente de $x^2$ es positivo. Deberían también llegar a saber que algunas ecuaciones cuadráticas carecen de raíces reales, y que esta característica corresponde al hecho de que sus gráficas no cortan al eje de abscisas. Y deberían ser capaces de determinar las raíces complejas de tales ecuaciones.

Así mismo se considera que ser capaz de operar con símbolos algebraicos es también importante, porque la habilidad para transformar expresiones algebraicas capacita para expresar las funciones en formas que revelen distintos tipos de información sobre ellas. Por ejemplo, dada la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x - 3$, algunas de cuyas propiedades gráficas fueron discutidas antes, los alumnos deberían ser capaces de expresarla en la forma $f(x) = (x - 1)^2 - 4$, en la que se puede identificar fácilmente el vértice de la parábola. Igualmente, deberían saber darle la forma $f(x) = (x-3)(x + 1)$, que permite deducir inmediatamente que las raíces son $x = 3$ y $x = -1$. (NCTM, 2000; p. 305)

En el documento Common Core State Standards for Mathematics (2011), se menciona la resolución de las ecuaciones cuadráticas (p. 65):

1. Resolver ecuaciones e inecuaciones en una variable.
2. Resolver ecuaciones lineales e inecuaciones en una variable, incluyendo ecuaciones con coeficientes representados mediante letras.
3. Resolver ecuaciones cuadráticas de una variable.

    a. Uso del método de completar el cuadrado para transformar cualquier ecuación cuadrática en x en una ecuación de la forma $(x-p)^2 = q$ que tenga las mismas soluciones. Derivar la fórmula cuadrática a partir de dicha forma.
    b. Resolver ecuaciones cuadráticas mediante inspección (p. e., para $x^2 = 49$), tomando raíces cuadradas, completar el cuadrado, la fórmula cuadrática y factorizando, según la forma inicial de la ecuación.
    c. Reconocer cuándo la fórmula cuadrática da soluciones complejas y escribirlas como $a \pm bi$ para números reales a y b.

Como hemos indicado en la sección 2 de esta memoria las orientaciones curriculares tanto del MEC como de la Junta de Andalucía hacen una mención a las ecuaciones de segundo grado en el curso de 3º de ESO, las cuales son concretadas por los autores de libros de texto de maneras muy diferentes. Como se puede ver en el Anexo 2, Colera et al. (2010) hacen una presentación desarrollando el tema de una manera básicamente procedimental. Se presenta la fórmula para hallar las soluciones sin ninguna justificación, seguida de explicaciones del uso y aplicación de la fórmula.

El tratamiento dado al tema por otros autores, como la colección del Proyecto Sur (Pérez et al., 1999), es muy diferente (Anexo 3). Toman la opción de presentar el tema en 4º curso y no en 3º; además comienzan la discusión de ejemplos particulares de ecuaciones cuadráticas desarrollando técnicas progresivas de factorización y completación de cuadrados. Finalizan el estudio de la resolución general de la ecuación cuadrática justificando la fórmula.

### *Una aplicación de las ecuaciones cuadráticas en la vida real*

El equipo del Shell Center de la Universidad de Nottingham (Swan, Dawson, Evans et al., 2012) ha desarrollado un documento curricular (una lección, o unidad didáctica) que lo consideramos como un documento de referencia para la faceta instruccional y ecológica[2] (aplicación a la vida real) de la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas. Dicho documento parte de un proyecto de la Universidad de Nottingham y de la Universidad de California en Berkeley orientado a la elaboración de recursos para la evaluación en matemáticas.

En particular, la lección ayuda a identificar y facilitar el aprendizaje a los estudiantes que tienen las siguientes dificultades:

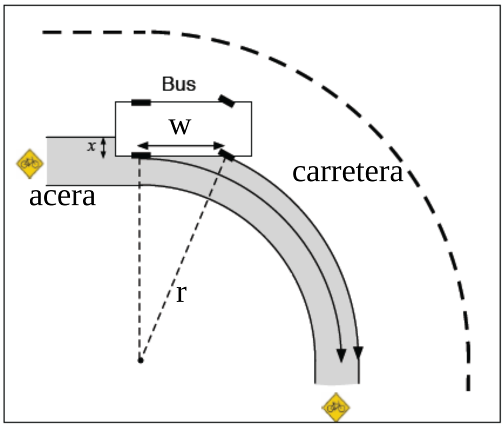
- Dar sentido a una situación de la vida real y decidir sobre las matemáticas que se pueden aplicar al problema.
- Resolver ecuaciones cuadráticas tomando raíces cuadradas, completando el cuadrado, usando la fórmula cuadrática, y factorizando.
- Interpretar los resultados en el contexto de una situación de la vida real.

[2] Es claro que esta actividad también involucra las facetas epistémica (conocimientos institucionales) e instruccional (modos de trabajo de los alumnos)

*Descripción de la situación-problema.*

**Cortando las esquinas**


Cuando un autobús gira en una curva, se debe desplazar hacia fuera para que las ruedas traseras no invadan el carril bici. En esta imagen, a medida que el autobús gira en la curva, la rueda delantera está sobre el borde del carril bici, pero la rueda trasera está dentro del carril bici.




El diagrama del margen muestra la geometría de esta situación. La distancia entre las ruedas delantera y trasera se llama distancia entre ejes, w. La letra r representa el radio del borde exterior del carril bici. La distancia marcada con x muestra la cantidad que la rueda trasera invade el carril bici.

Piensa en las ruedas delanteras y traseras de un autobús. ¿Qué puedes decirme sobre cómo se mueven? *[Las delanteras giran para dirigir el bus, las ruedas traseras están fijadas en paralelo al cuerpo del autobús. La distancia entre ejes entre cada par de ruedas es fija.]*

La distancia fija entre los ejes de la rueda delantera y la trasera se llama la distancia entre ejes. Cuando las ruedas delanteras giran en la esquina de una calle, describen un círculo en la calzada. ¿Qué pasa con la rueda trasera al mismo tiempo? *[La rueda trasera corta la esquina.]*

*Cuestiones planteadas a los estudiantes:*

1. Usar el diagrama para probar que $x^2 - 2xr + w^2 = 0$.

2a. Si $w$ = 10 pies y $r$ = 17 pies, ¿Cuál será la distancia que la rueda trasera invade el carril bici?

2b. Si se desea que la rueda trasera no invada el carril bici, sino que justamente esté sobre el borde exterior de dicho carril, ¿A qué distancia debe separar el conductor la rueda delantera del borde?

*Planificación del desarrollo de la lección.*

- Antes de la lección los estudiantes intentan resolver el problema de manera individual. El profesor revisa su trabajo y plantea cuestiones que los estudiantes deben responder para ayudarles a mejorar sus soluciones.
- Al comienzo de la lección, los estudiantes responden a las cuestiones de manera individual.
- A continuación los estudiantes son agrupados en equipos y trabajan colaborativamente sobre la misma tarea.
- En los mismos grupos pequeños, los estudiantes reciben algunos ejemplos de soluciones dadas por otros estudiantes para que las comenten y evalúen.
- En una discusión con la clase completa, los estudiantes explican y comparan las diferentes estrategias de solución que han visto y usado.
- Finalmente los estudiantes repasan lo que han aprendido.

*Materiales requeridos*

- Cada estudiante necesitará una copia de la tarea, *Cortando las esquinas*, y el cuestionario, ¿Cómo trabajaste?
- Cada pequeño grupo de estudiantes necesitará una copia ampliada de la tarea, *Cortando las esquinas*, y una copia de cada una de las Muestras de Respuestas para Discutir.

Habrá calculadoras disponibles para los estudiantes que las requieran, así como también un proyector de ayuda para las discusiones colectivas de la clase.

*Tiempo requerido*

15 minutos antes de la lección, una lección de 90 minutos (o dos lecciones de 45 minutos), y 10 minutos en una lección de seguimiento (o para trabajo en casa). El tiempo exacto dependerá de las necesidades de la clase.

*Contenidos matemáticos tratados en la lección*

- Resolver ecuaciones e inecuaciones en una variable.
- Definir razones trigonométricas y resolver problemas que implican triángulos rectángulos.
- Aplicar conceptos geométricos en situaciones de modelización.

*Estándares de la práctica matemática (competencias) puestos en juego*

- Dar sentido a los problemas y perseverar en su resolución.
- Razonar de manera abstracta y cuantitativa.
- Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros.
- Modelación matemática.

## 4. VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA. PROPUESTAS DE CAMBIOS EN EL DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE LA EXPERIENCIA

En esta sección analizamos el diseño, implementación y evaluación de la experiencia de enseñanza de las ecuaciones cuadráticas vivida en el periodo de prácticas, descrita en la sección 2, teniendo en cuenta los conocimientos didáctico-matemáticos sintetizados en la sección 3. Se trata de responder a las preguntas que formulamos en la sección 3.1, las cuales motivan nuestra indagación:

1. ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza - aprendizaje sobre las ecuaciones de segundo grado experimentado durante el periodo de prácticas en 3º de ESO?
2. ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica?

En definitiva se trata de valorar la idoneidad didáctica de la experiencia y de identificar propuestas fundamentadas de posibles cambios en un futuro rediseño de la unidad didáctica.

### 4.1. Facetas epistémica y ecológica

El proceso de estudio implementado ha seguido básicamente los contenidos y orientación propuestos en el libro de texto que se viene usando en el tercer curso de ESO en el instituto en el que he realizado las prácticas (Colera et al., 2010): presentación y aprendizaje de la fórmula general para hallar las soluciones de la ecuación cuadrática. Como se puede observar en la figura 2.1 (sección 2) no hay una problematización previa que lleve a la búsqueda, tras un proceso de generalización, de soluciones para las ecuaciones cuadráticas. Se presenta un resultado, una fórmula de cálculo, cuya justificación se descarta por ser un proceso “largo y complicado”. Se transmite la visión de la matemática como sistema de reglas generales que hay que saber interpretar y seguir en cada caso, para lo cual es suficiente mostrar algunos ejemplos aclaratorios y ejercitar su aplicación en casos similares. La resolución de problemas verbales (puesta en ecuación) es también una cuestión de seguir unas reglas (figura 2.3).

Sería necesario contemplar el uso de situaciones introductorias que lleven al planteamiento de ecuaciones cuadráticas y motiven la búsqueda de procedimientos eficaces para su solución. En este sentido la situación descrita en Swan, Dawson, Evans et al., (2012), “Cortando las esquinas”, puede ser usada con dicha finalidad.

Los conceptos de variable, incógnita y parámetro no se discuten y aclaran con ocasión del estudio de las ecuaciones cuadráticas, como también algunas propiedades básicas involucradas en su resolución, como la ley del factor nulo. La ecuación cuadrática es una especie de caja negra, una "máquina" que admite una cierta clase de números como entrada y produce como resultado dos números, uno o ninguno.

Como hemos visto en la sección 3 hay alternativas a este planteamiento procedimental / algorítmico, tanto desde el punto de vista de la investigación (Hanna y Barbeau, 2008), como de las innovaciones educativas (Pérez et al, 1999). Es posible y deseable diseñar una unidad didáctica que contemple la introducción de las técnicas de completar el cuadrado, y de factorización, al menos en casos sencillos. También es posible combinar el uso del lenguaje algebraico junto con el geométrico, como muestran los trabajos de Radford y Guerete (1996) y Galván (2006), lo que facilita la comprensión de las transformaciones algebraicas que llevan a establecer la fórmula general de resolución de las ecuaciones de segundo grado. En consecuencia, podemos calificar la idoneidad epistémica del proceso implementado como baja por las razones mencionadas. En los trabajos citados encontramos criterios y recursos para su mejora.

Desde el punto de vista de las orientaciones curriculares hemos encontrado apoyo para retrasar el estudio a cursos posteriores al 3º de ESO, y relacionar la resolución de las ecuaciones cuadráticas con el de las funciones cuadráticas (procesos de modelización funcional), lo que permitirá dar sentido a la búsqueda de los ceros de la función cuadrática, entre otras, como la función exponencial, usando las nuevas tecnologías (calculadoras gráficas, software de cálculo simbólico).

La introducción de los cambios mencionados permitiría poner en juego, y en consecuencia desarrollar, "estándares de la práctica matemática"[3] (competencias, entendidas como expectativas generales de aprendizaje) tales como:

- Dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos
- Razonar de manera abstracta y cuantitativa
- Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los otros
- Modelizar con matemáticas.

[3] *Common Core State Standards for Mathematics.* National Governors Association Center for Best Practices (NGA Center) and the Council of Chief State School Officers (CCSSO) (USA).

## 4.2. Facetas cognitiva y afectiva

El análisis de los resultados obtenidos en la evaluación de los aprendizajes logrados en nuestra experiencia de enseñanza ha revelado algunas dificultades en la resolución de ecuaciones cuadráticas, aunque el énfasis en nuestro caso ha sido en aspectos básicamente procedimentales.

El estudio de Vaiyavutjamai y Clements (2006) reveló también la existencia de dificultades de tipo conceptual (comprensión de la variable, aplicación de propiedades, entre otras), al ser entrevistados una muestra de estudiantes. Esta investigación fue realizada con estudiantes de 9 grado, lo que corresponde al curso de 3º de ESO (entendiendo que los estudiantes estudiarán posteriormente los grados, 10, 11 y 12, antes de iniciar los estudios universitarios). Una conclusión de esta investigación es retrasar el estudio del tema a cursos posteriores, lo que mejoraría la idoneidad cognitiva del proceso de estudio, y posiblemente también la afectiva.

Los instrumentos de evaluación de los aprendizajes deberán ser mejorados para obtener información tanto de aspectos procedimentales como aspectos conceptuales y argumentativos. El cuestionario desarrollado por Vaiyavutjamai y Clements (2006) para evaluar las destrezas de los estudiantes en la resolución de ecuaciones cuadráticas incluyó un conjunto de 18 cuestiones (figura 4.1), por lo que permite cubrir de manera más sistemática y válida los diferentes tipos de ecuaciones que se espera resuelvan los estudiantes.

| | |
|---|---|
| Q1: $(x-3)(x-5)=0$ | Q10: $2x^2=10x$ |
| Q2: $x(x+2)=0$ | Q11: $\frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{2}x$ |
| Q3: $x^2+2x-3=0$ | Q12: $x^2+6=5x$ |
| Q4: $x^2-x=12$ | Q13: $(x-1)(x+1)=3$ |
| Q5: $2x-3x^2=-5$ | Q14: $x^2+1=2x$ |
| Q6: $(x-1)^2=4(x-1)$ | Q15: $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=0$ |
| Q7: $(x-2)^2=0$ | Q16: $x^2-2x+3=0$ |
| Q8: $4-x^2=0$ | Q17: $2x^2+3x-2=0$ |
| Q9: $x^2=9$ | Q18: $2(x^2-1)=x$ |

Figura 4.1. Cuestionario de Vaiyavutjamai y Clements (2006)

Las cuestiones incluidas en el instrumento desarrollado por Didiş, Baş, y Erbaş (2011) (sección 3) pueden ser útiles para evaluar aspectos conceptuales y argumentativos.

### 4.3. Facetas interaccional y mediacional

Los modos de interacción en el aula que implementé en mi experiencia responden básicamente a un modelo tradicional: el profesor presenta la expresión general de la ecuación cuadrática, explica el significado de los parámetros, presenta algunos ejemplos, y los alumnos realizan ejercicios. Son escasos los momentos en que se concede un grado de autonomía a los estudiantes, exceptuados los momentos de trabajo individual para realizar ejercicios en clase o en casa.

Sería deseable introducir cambios en el proceso de enseñanza orientados a que los alumnos planteen cuestiones y presentan soluciones; exploren ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usen una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos.

En la experiencia se utilizaron únicamente los recursos propios del aula del instituto y al alcance de los alumnos: pizarra, libro de texto y calculadora. No utilicé recursos manipulativos ni recursos tecnológicos TIC ya que en realidad no los consideré necesarios para apoyar la enseñanza y aprendizaje de los contenidos planificados.

La distribución de los estudiantes no era aleatoria, ni escogida por ellos mismos, ya que el comportamiento de los alumnos en el aula variaba según el compañero con el estuvieran sentados. Además, a esta clase siempre asisten dos profesoras, una que se encarga de explicar la materia y otra que se encarga de que los alumnos tuvieran un comportamiento correcto, copiaran las explicaciones, etc. Esta disposición ayudó a que el funcionamiento de la clase fuera el correcto.

El número de alumnos (29) y su distribución eran idóneos. El horario de las clases de matemáticas fue muy bueno. Las cuatro horas semanales de clase estaban colocadas por la mañana (lunes de 9:15 a 10:15 horas, martes de 10:15 a 11:15 horas, miércoles de 11:45 a 12:45 horas y jueves de 12:45 a 13:45 horas). El hecho de no tener clase ni a primera ni a última hora de la mañana, además de no tener clase los viernes, propició que la mayoría de los alumnos trabajara de forma correcta y el comportamiento fuera bueno.

El tiempo dispuesto para las clases también fue correcto y suficiente para enseñar los contenidos pretendidos. Fueron un total de 5 horas de clase más una hora de examen. El número de sesiones permitió tratar los contenidos más importantes del tema y adaptar la temporización y la distribución de los contenidos al nivel del aula.

Es cierto, que tanto el número de alumnos como el horario y la gestión del tiempo han sido correctos. Pero la mejora de la idoneidad mediacional del proceso llevaría a incluir actividades con material manipulativo (como el sugerido en el trabajo de Radford y Guerete), y también recursos informáticos (como el descrito en Galván, 1996).

## 5. Síntesis y conclusiones

La elaboración de esta Tesis de Fin de Máster, con la orientación sugerida por el director, me ha permitido conocer y aplicar unas herramientas útiles para analizar la propia práctica docente. Focalizar la atención en la valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza vivido me ha llevado a tomar conciencia de la necesidad de recopilar, analizar y sistematizar los conocimientos didáctico-matemáticos disponibles, que son resultados de la abundante investigación que se viene realizando a nivel internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de los distintos temas curriculares. La consulta de la base de datos MathEduc muestra que esto es general para cualquier tema matemático, por lo que cualquier propuesta de cambio en el diseño, implementación y evaluación de un curso o una unidad didáctica debe tener en cuenta los resultados de las innovaciones e investigaciones previas.

En nuestro caso, la enseñanza de la ecuación cuadrática fue implementada en un contexto educativo específico, el cual impone condicionamientos difíciles de superar: tiempo asignado, material de aprendizaje (libro de texto), así como una manera o concepción implícita de entender la matemática y su enseñanza, compartida por el Departamento correspondiente. Estas restricciones, u otras, siempre estarán presentes en nuestra práctica como profesores de matemáticas; pero es importante tomar conciencia de las mismas, así como de conocer otras maneras de concebir la matemática, su enseñanza y aprendizaje. La reconstrucción de un significado de referencia didáctico-matemático amplio es imprescindible para introducir progresivamente propuestas de cambio fundamentadas.

La noción de idoneidad didáctica proporciona una síntesis global sobre los procesos de estudio matemáticos, pero su aplicación requiere realizar los análisis previos de las diversas facetas implicadas. En particular, la idoneidad epistémica requiere caracterizar los tipos de problemas, los sistemas de prácticas institucionales correspondientes, así como la reconstrucción de las configuraciones y procesos matemáticos implicados. La idoneidad cognitiva precisa elaborar información detallada de los significados personales de los estudiantes y la identificación de conflictos de aprendizaje potenciales. La idoneidad interaccional y mediacional requiere analizar las trayectorias de estudio y las interacciones didácticas entre el docente, los estudiantes y los medios disponibles.

El análisis de las normas ayudará a comprender los factores ecológicos que condicionan los procesos de estudio, y por tanto la valoración de la idoneidad ecológica. Si bien es cierto que el Decreto de Enseñanzas Mínimas del MEC hace referencia al estudio de las ecuaciones cuadráticas en 3º de ESO lo hace de manera poco concreta, dejando en consecuencia un cierto grado de libertad a los autores de libros de texto y los departamentos de matemáticas de los institutos.

El mayor condicionamiento para la enseñanza implementada ha venido de la decisión de usar el texto de Colera et al. (2010). Tras esta decisión puede haber una concepción por parte de los profesores del departamento que valora positivamente el aprendizaje de algoritmos y atribuye una cierta incapacidad de los estudiantes para la comprensión conceptual y la argumentación deductiva.

Otro factor restrictivo para la introducción de cambios en los contenidos y el consiguiente uso de medios tecnológicos es el tiempo disponible para el desarrollo del tema; el programa de estudio de las matemáticas de 3º de ESO, y en general, en toda la ESO nos parece excesivamente recargado de contenidos, lo que puede dificultar la implementación de innovaciones como las que hemos identificado en nuestra indagación.

La formación inicial y permanente de profesores es un factor esencial para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esa formación debe orientarse al desarrollo profesional de los profesores, y ello supone que éstos adquieran y pongan en práctica un profundo conocimiento especializado del contenido en sus diversas facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, 2009). En mi caso, la estrategia formativa adoptada por mi supervisor de prácticas y director del TFM la considero como positiva ya que permite motivar y dar sentido a la búsqueda sistemática del conocimiento especializado del contenido, guiada por la pregunta, ¿Cómo mejorar mi práctica profesional?

## REFERENCIAS


Colera, J. Gaztelu, I. y Oliveira, M. J. (2010). *Matemáticas 3º Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.

Didiş, M. G., Baş, S., & Erbaş, A. (2011). Students' reasoning in quadratic equations with one unknown. En The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-7). University of Rzeszów: Poland. http://www. cerme7. univ. rzeszow. pl/WG/3/CERME7_WG3_Gozde. pdf.

Galván, C. (2006). Desde la cuadratura de polígonos a ecuaciones de segundo grado. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 5, 23-35.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME,* Recife, Brasil.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2008) Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Conferencia Invitada al VI CIBEM*, Puerto Montt (Chile), 4-9 Enero 2009.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1), 39-88.

Hanna, G. y Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM. Mathematics Education*, 40, 345-353.

National Council of the Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. (2011). *Common core state standards for mathematics*. (Disponible en, http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf)

Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood*, 33 (1), 31-36

Pérez, R. (Coordinador) (1999). *Construir las matemáticas. 4º ESO*. Granada: Proyecto Sur.

Radford, L. and Guerette, G. (1996). Second degree equations in the classroom: a Babylonian approach. En V. J. Katz (Ed.), Using History to Teach Mathematics (pp. 69 76). Washington, D.C: The Mathematical Association of America.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7 (1), 5-41.

Swan, M., Clarke, N., Dawson, C., Evans, S., Burkhardt, H., Crust, R., Noyes, A. y Pead, D. (2012). Solving quadratic equations: Cutting corners. *Mathematics Assessment Resource Service.* University of Nottingham & UC Berkeley. (Disponible en, http://map.mathshell.org/materials/lessons.php?taskid=432 )

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York, NY: Basic Books.

Vaiyavutjamai, P. y Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal,* 18 (1), 47-77.

ANEXO 1.
GUÍA PARA LA VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS[4]

**1. Idoneidad epistémica o matemática**: *Grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) en el proceso de estudio representan bien a los contenidos de referencia.*

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
| --- | --- |
| **Situaciones-problemas** | - Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones-problemas que permitan contextualizar, ejercitar, aplicar y generalizar el conocimiento matemático, los cuales proceden de la propia matemática y de otros contextos.<br>- Se proponen situaciones de generación de problemas |
| **Lenguajes** | - Se usa un amplio repertorio de representaciones (materiales, icónicas y simbólicas) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas.<br>- Se favorece que los estudiantes construyan, perfeccionen y usen sus propias representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas.<br>- El nivel del lenguaje usado es adecuado a los estudiantes a que se dirige. |
| **Reglas** (Definiciones, propiedades, procedimientos) | - Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen<br>- Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado<br>- Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar y generalizar definiciones, propiedades y procedimientos |
| **Argumentos** | - Se favorece el razonamiento y la prueba de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba.<br>- Los estudiantes formulan con frecuencia conjeturas sobre relaciones matemáticas, las investigan y justifican.<br>- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. |
| **Relaciones** | - Se favorece el establecimiento y el uso de conexiones entre las ideas matemáticas (problemas, representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos)<br>- Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.<br>- Se reconocen y aplican las ideas matemáticas en contextos no matemáticos.<br>- Los contenidos matemáticos se presentan y estudian como un todo organizado |

[4] Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/index.htm

**2. Idoneidad ecológica:** *Grado de adaptación curricular, socio-profesional, apertura a la innovación y conexiones intra e interdisciplinares*

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| **Adaptación al currículo** | - Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares |
| **Apertura hacia la innovación didáctica** | - Se realizan y promueven procesos de innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva<br>- Se integra el uso de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo |
| **Adaptación socio-profesional y cultural** | - Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes |
| **Educación en valores** | - Se contempla la formación en valores democráticos (respeto por la diversidad, tolerancia, integración, cooperación...) y se dan oportunidades para que los estudiantes realicen cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural ( pensamiento crítico) |
| **Conexiones intra e interdisciplinares** | - Los contenidos (conceptos, procedimientos, …) se relacionan entre sí mostrando las estructuras que los organizan.<br>- Los contenidos matemáticos se aplican y relacionan con los contenidos de otras disciplinas. |

**3. Idoneidad cognitiva:** *Grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.*

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| **Conocimientos previos**<br>(Se tienen en cuenta los mismos elementos que en la idoneidad epistémica) | - Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio)<br>- Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar en sus diversas componentes (tienen una dificultad manejable) |
| **Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales** | - Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo<br>- Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes |
| **Aprendizaje**<br>(Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos ) | - Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia):<br>- Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; competencia metacognitiva (planificación, control, evaluación, análisis-síntesis)<br>- La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia<br>- Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones. |

**4. Idoneidad afectiva:** *Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes*

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| **Intereses y necesidades** | - Las tareas se refieren a temas de interés para los estudiantes<br>- Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional |
| **Actitudes** | - Se promueve la participación en las actividades y responsabilidad en el trabajo en equipo.<br>- Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.<br>- Se incentiva la perseverancia y el trabajo sistemático. |
| **Emociones** | - Se promueve la autoestima y seguridad en sí mismo para realizar tareas matemáticas (evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas).<br>- Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas. |

**5. Idoneidad interaccional:** *Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje***.**

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| **Interacción docente-discente** | - El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)<br>- Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.)<br>- Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento<br>- Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.<br>- Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase |
| **Interacción entre discentes** | - Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes<br>- Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos<br>- Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión |
| **Autonomía** | - Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos) |
| **Evaluación formativa** | - Se realiza una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos usando técnicas variadas y pertinentes. |

**6. Idoneidad mediacional:** *Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje*.

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| **Recursos materiales** (Manipulativos, calculadoras, ordenadores) | - Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido<br>- Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones |
| **Número de alumnos, horario y condiciones del aula** | - El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida<br>- El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora)<br>- El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido |

**7. Idoneidad temporal:** *Grado en que el tiempo invertido (enseñanza colectiva, tutorización y trabajo individual) es adecuado para el aprendizaje de los conocimientos pretendidos.*

| COMPONENTES | INDICADORES |
|---|---|
| **Temporal-epistémica** | - El contenido y sus diversos significados se distribuyen de manera racional a lo largo del tiempo asignado al estudio<br>- Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema<br>- Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión |
| **Temporal-cognitiva** | - Los objetivos de aprendizaje tienen en cuenta las etapas de desarrollo evolutivo de los estudiantes |
| **Temporal-instruccional** | - La gestión del tiempo instruccional tiene en cuenta los diversos momentos requeridos para el desarrollo de los distintos tipos de aprendizajes (exploración, formulación, comunicación, validación, institucionalización, ejercitación, evaluación) |
| **Temporal-ecológica** | - El tiempo asignado al proceso de estudio en el diseño curricular es adecuado para lograr el aprendizaje del contenido programado. |

ANEXO 2.
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. LIBRO DE TEXTO USADO

# 3 Ecuaciones de segundo grado

WWW 3. Ayuda al razonamiento. Obtención de la fórmula que resuelve la ecuación de segundo grado. RC

**Ejemplo**

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

es una ecuación de segundo grado, donde:

$$a = 3,\ b = -5,\ c = -2$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 > 0$$

Por eso, esta ecuación tiene dos soluciones.

AR WWW 4. Ayuda para resolver ecuaciones de segundo grado.

Una ecuación de segundo grado es de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Para despejar la $x$, se sigue un largo y complicado proceso que no vamos a ver aquí. El resultado final es la fórmula siguiente:

SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El doble signo (±) quiere decir que puede haber dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas dos soluciones pueden reducirse a una o a ninguna, según los casos.

## Número de soluciones

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación. El número de soluciones depende del signo de $\Delta$:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones:**

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, solo hay **una solución:** $x = \frac{-b}{2a}$. Se llama **solución doble.**
- Si $\Delta < 0$, $\sqrt{\Delta}$ carece de sentido. La ecuación **no tiene solución.**

**Ejercicio resuelto**

**Resolver estas ecuaciones:**

**a)** $x^2 - 6x + 5 = 0$

**b)** $4x^2 + 4x + 1 = 0$

**c)** $3x^2 + 2x + 7 = 0$

a) $x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

b) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2}$ Solución doble.

c) $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-80}}{6}$ No tiene solución.

**Actividades**

**1** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ d) $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ f) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ g) $x^2 - 3x + 15 = 0$ h) $x^2 - 0{,}1x + 0{,}2 = 0$

S

AC

## Ecuaciones incompletas

Las ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ en las que los coeficientes $b$ o $c$ son cero se llaman **incompletas:** $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$.

Aunque pueden resolverse aplicando la fórmula general, es posible encontrar sus soluciones de forma mucho más sencilla. Por ejemplo:

- $3x^2 - 75 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{75}{3} = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$
- $7x^2 + 11x = 0 \rightarrow x(7x + 11) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 7x + 11 = 0 \rightarrow x = -\frac{11}{7} \end{cases}$

**Ten en cuenta**

- Si $x^2 = 25$, entonces $x = \pm 5$, pues 25 tiene dos raíces cuadradas, 5 y $-5$.
- Para que un producto de dos factores sea igual a cero, es necesario que sea 0 alguno de ellos:

$x \cdot (7x + 11) = 0$

$x = 0$ o bien $7x + 11 = 0$

**Ecuaciones sin término en $x$, $ax^2 + c = 0$**

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede despejar $x$ con toda sencillez:

$$x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

**Ecuaciones sin término independiente, $ax^2 + bx = 0$**

Para resolver las ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$ no es necesario aplicar la fórmula general, pues se puede sacar factor común la $x$ e igualar a cero cada uno de los dos factores:

$$(ax + b) \cdot x = 0 \rightarrow \text{Soluciones: } x_1 = -\frac{b}{a},\ x_2 = 0$$

### Ejercicio resuelto

**Resolver:**

**a)** $\mathbf{2x^2 - 98 = 0}$

**b)** $\mathbf{2x^2 + 98 = 0}$

**c)** $\mathbf{5x^2 + 95x = 0}$

a) $2x^2 - 98 = 0 \rightarrow 2x^2 = 98 \rightarrow x^2 = \frac{98}{2} = 49 \rightarrow x = \pm\sqrt{49} = \pm 7$

Las soluciones son $x_1 = 7$, $x_2 = -7$.

b) $2x^2 + 98 = 0 \rightarrow 2x^2 = -98 \rightarrow x^2 = -\frac{98}{2} = -49$

No tiene solución, porque el cuadrado de un número no puede ser negativo.

Es decir, $\sqrt{-49}$ no tiene sentido.

c) $5x^2 + 95x = 0 \rightarrow x(5x + 95) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x + 95 = 0 \rightarrow x_2 = -95/5 = -19 \end{cases}$

### Actividades

**2** Resuelve:

a) $7x^2 - 28 = 0$ b) $7x^2 + 28 = 0$ c) $4x^2 - 9 = 0$ d) $3x^2 + 42x = 0$

e) $3x^2 = 42x$ f) $11x^2 - 37x = 0$ g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14(x + 4)$ h) $7x^2 + 5 = 68$

## Reglas para resolver ecuaciones de segundo grado

- Si la ecuación de segundo grado está completa (tiene todos sus términos), aplica la fórmula.
- Si es una ecuación incompleta, tal como hemos visto en el apartado anterior, podrás resolverla con facilidad sin aplicar la fórmula.
- Si tiene una fisonomía complicada, arréglala: quita denominadores, suprime paréntesis, agrupa términos y pásalos todos al primer miembro.

  Solo cuando esté simplificada, aplica uno de los consejos anteriores.
- Comprueba las soluciones. Si la ecuación proviene de un problema con enunciado, haz la comprobación sobre él, pues es posible que alguna de las soluciones carezca de sentido real, como veremos en la página siguiente.

### Ten en cuenta

- $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$ → Aplica la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ → Despeja $x^2$…
- $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ → Saca la $x$ como factor común…

## Ejercicio resuelto

**Resolver la ecuación siguiente:**

$$\frac{x^2+3}{6} + \frac{x^2-7}{4} = \frac{(x+4)^2}{2} - \frac{1-9x}{12}$$

$$\frac{x^2+3}{6} + \frac{x^2-7}{4} = \frac{(x+4)^2}{2} - \frac{1-9x}{12} \qquad \text{mín.c.m. } (6, 4, 2, 12) = 12$$

- Quitamos denominadores multiplicando por 12:

$$2(x^2+3) + 3(x^2-7) = 6(x+4)^2 - (1-9x)$$

- Desarrollamos los cuadrados, simplificamos y quitamos paréntesis:

$$2x^2 + 6 + 3x^2 - 21 = 6(x^2 + 8x + 16) - 1 + 9x$$

$$2x^2 + 6 + 3x^2 - 21 = 6x^2 + 48x + 96 - 1 + 9x$$

- Agrupamos los términos, pasándolos todos al primer miembro:

$$2x^2 + 3x^2 - 6x^2 - 48x - 9x + 6 - 21 - 96 + 1 = 0$$

$$-x^2 - 57x - 110 = 0 \quad \to \quad x^2 + 57x + 110 = 0$$

- Aplicamos la fórmula, teniendo en cuenta que $a = 1$, $b = 57$, $c = 110$:

$$x = \frac{-57 \pm \sqrt{57^2 - 4 \cdot 1 \cdot 110}}{2 \cdot 1} = \frac{-57 \pm \sqrt{2\,809}}{2} = \frac{-57 \pm 53}{2} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -55 \end{cases}$$

- Comprobamos que tanto para $x = -2$ como para $x = -55$, el valor que toma el primer miembro de la ecuación inicial coincide con el valor que toma el segundo miembro.

## Actividades

**3** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(3x + 4)(5x - 7) = (2x + 7)^2 + 53$

b) $\dfrac{x^2 - 3x}{2} + 2 = \dfrac{x + 12}{6}$

c) $\dfrac{(x+1)^2}{2} - \dfrac{3(x-1)}{4} + \dfrac{3x(x+1)}{2} = \dfrac{3}{2}$

d) $3x(x+1) - \dfrac{(x-2)^2}{2} = (x+1)(x-1) + 15$

# 4 Resolución de problemas con ecuaciones

Plantear una ecuación a partir de un problema es traducir a lenguaje algebraico las condiciones que ligan lo que se sabe con lo que se desea conocer. Conviene proceder de forma organizada, por lo que es útil dar estos pasos:

1. Identificar los datos conocidos y lo que deseamos conocer. Dar nombre a la incógnita.
2. Relacionar mediante una igualdad (ecuación) lo conocido con lo desconocido.
3. Resolver la ecuación.
4. Interpretar la solución ajustándola al enunciado.

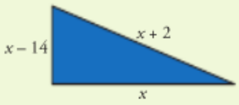
**Observación**

En la próxima unidad, al estudiar sistemas de ecuaciones, podrás utilizar más de una incógnita. Verás que así se simplifica la tarea de traducir un enunciado a ecuaciones.

## Problemas resueltos

**1. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 2 cm menos que la hipotenusa y 14 cm más que el otro cateto. Calcular la longitud de los tres lados.**

1.




Para relacionar las tres longitudes, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$(x-14)^2 + x^2 = (x+2)^2$$

Desarrollamos: $x^2 - 28x + 196 + x^2 = x^2 + 4x + 4$

Simplificamos: $x^2 - 32x + 192 = 0$

Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 192}}{2} = \frac{32 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{32 \pm 16}{2} \begin{cases} x_1 = 24 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

- $x_1 = 24$. *Solución:* los lados miden 10 cm, 24 cm y 26 cm.
- $x_2 = 8$. *No es solución* válida, porque uno de los lados tendría una medida negativa.

**2. Un repostero ha mezclado 12 kg de azúcar de 1,10 €/kg con una cierta cantidad de miel de 4,20 €/kg. La mezcla sale a 2,34 €/kg. ¿Cuánta miel puso?**

2.

| | CANTIDAD (kg) | PRECIO (€/kg) | COSTE (€) |
|---|---|---|---|
| AZÚCAR | 12 | 1,10 | $1{,}10 \cdot 12 = 13{,}20$ |
| MIEL | $x$ | 4,20 | $4{,}20x$ |
| MEZCLA | $12 + x$ | 2,34 | $2{,}34(12 + x)$ |

Relación: COSTE DEL AZÚCAR + COSTE DE LA MIEL = COSTE DE LA MEZCLA

$13{,}20 + 4{,}20x = 2{,}34(12 + x) \quad \rightarrow \quad 13{,}20 + 4{,}20x = 28{,}08 + 2{,}34x$

$1{,}86x = 14{,}88 \quad \rightarrow \quad x = 14{,}88/1{,}86 = 8$ kg de miel.

## Actividades

AR www **5.** Refuerza la resolución de problemas mediante ecuaciones.

**1** La base de un rectángulo es 9 cm mayor que su altura. Su área mide 400 cm$^2$. Calcula las dimensiones de este rectángulo.

**2** Al mezclar 60 kg de café de 7,20 €/kg con café superior de 9,60 €/kg, resulta una mezcla de 8,70 €/kg. ¿Cuánto café superior se ha utilizado?

ANEXO 3.
Matemáticas 4º ESO. Proyecto Sur
Pérez, R. (Coordinador) (1999). *Construir las matemáticas. 4º ESO.* Granada: Proyecto Sur.

## RESOLVEMOS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Ya te has encontrado distintos tipos de ecuaciones de segundo grado. Ahora vamos a aprender a resolverlas. Observa las siguientes ecuaciones de segundo grado:

$$x^2 - 16 = 0,$$
$$x^2 - 5 = 4,$$
$$(x + 3)2 - 25 = 9$$
$$x^2 + x = 2.$$

¿En qué se parecen?, ¿qué diferencias encuentras entre ellas?

Observa la siguiente ecuación: $x^2 = -1$. ¿Tiene soluciones? ¿Por qué?

No olvides que existen ecuaciones de segundo grado que no tienen ningún número real por solución.

Sin embargo, otras ecuaciones de segundo grado sí tienen solución. Por ejemplo, la ecuación $x^2=25$ tiene solución. ¿Cuáles son sus soluciones?

Hoy ha llegado Eva muy contenta a clase de Matemáticas. Nico le ha preguntado a qué se debía su alegría y Eva le ha contestado:

– *¿Recuerdas que la profesora dijo el otro día que hoy íbamos a empezar a aprender a resolver ecuaciones de segundo grado? Pues ayer le resolví a mi padre un "problemilla" que tenía utilizando una ecuación de segundo grado.*
– *¿Qué problema era? ¿Sabré resolverlo yo?, dime, dime...* – Dijo Nico.
– *Como sabes, mi padre es carpintero. Ayer necesitaba cortar un tablón de madera en forma rectangular que tuviese el doble de largo que de ancho y cuya superficie tenía que ser de 8 m². ¿Sabes como lo hice?*
– *Déjame pensar...*


1º En primer lugar, llama $x$ a la anchura del tablón
2º Expresa con una ecuación el problema.
3º ¿Cuál será el largo del tablón?
4º ¿Y su superficie?
5º Plantea la ecuación sabiendo que la superficie tiene que ser de 8 m².
6º ¿Cuánto debe vale $x$?
7º Observa que la solución válida de la ecuación es $x = 2$, pero no olvides que la ecuación que has planteado tiene dos soluciones:

$$x = 2 \text{ y}$$
$$x = -2.$$

***Recuerda***
La ecuación $x^2 = d$, cuando $d$ es un número positivo, tiene dos soluciones:

$$x = \sqrt{d} \text{ y}$$
$$x = -\sqrt{d}.$$

Resuelve la siguiente ecuación, que también es muy sencilla:

$$x^2 - 16 = 0$$

¿Por qué la ecuación $x^2 = 16$ es equivalente a la ecuación anterior?

¿Qué números dan 16 al elevarlos al cuadrado? ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación anterior? ¿Hay más? Comprueba que las soluciones obtenidas son correctas.

Haz ahora el producto $(x - 4)(x + 4)$. ¿Qué observas?

• Resolvamos la siguiente ecuación:

$$x^2 - 5 = 4.$$

Observa detenidamente la ecuación. ¿Puedes escribir una ecuación equivalente a $x^2 - 16 = 0$ que tenga la forma que tenía la ecuación anterior?

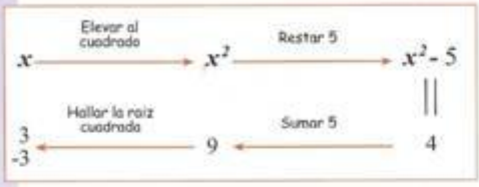
Observa que si sumas 5 a ambos miembros de la igualdad obtienes una ecuación equivalente y que ésta es igual de fácil que la primera que resolviste:

$$x^2 - 5 + 5 = 4 + 5$$

Por tanto, $x^2 = 9$.

En consecuencia, $x$ es la raíz cuadrada de 9; es decir, $x$ es igual a -3 ó a 3. Comprueba que las soluciones obtenidas son correctas.

Analiza lo que has hecho ayudándote del siguiente esquema:




Observa que resolver la ecuación $x^2 - 5 = 4$ es equivalente a resolver $x^2 - 9 = 0$.

Haz el producto $(x-3)(x+3)$. ¿Qué observas?

• Resolvamos ahora la siguiente ecuación: $2(x^2 + 2) = 22$.

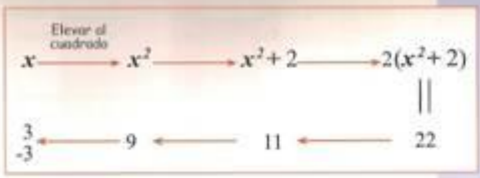
Si divides ambos miembros de la ecuación por 2, obtendrás la siguiente ecuación equivalente:

$$x^2 + 2 = 11$$

Pasa a un miembro las expresiones que tengan $x$ y en el otro deja los demás:

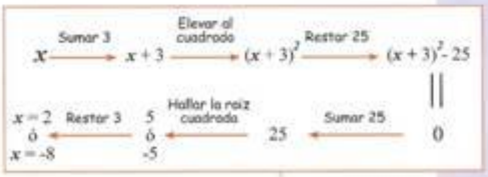
$$x^2 = 11 - 2,$$
$$x^2 = 9.$$

lo que hemos hecho para resolver la ecuación completando el siguiente diagrama:




Haz el producto $2(x - 3)(x + 3)$ y haz $2(x^2 + 2) - 22$. ¿Qué observas?

• Resuelve la ecuación $(x + 3)^2 - 25 = 0$, ayudándote del siguiente diagrama:




Haz el producto $(x-2)(x-(-8))$ y desarrolla $(x + 3)^2 - 25$. ¿ Qué ocurre?

Plantea una ecuación que te permita resolver el siguiente problema:

*La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 2 unidades mayor que el cateto mayor. Éste, a su vez, es dos unidades mayor que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?*

Llama $x$ a la longitud del cateto mayor. La longitud de la hipotenusa será entonces $x+2$, y la del otro cateto será $x-2$. Aplica ahora el teorema de Pitágoras y desarrolla la expresión que resulta. Si has obtenido que: $x^2-8x=0$, lo has hecho bien. Si te has equivocado, revisa los cálculos.

Para resolver esta ecuación, saca factor común $x$ en el primer miembro de la ecuación:

$$x(x-8)=0.$$

Ya sabes que para que el producto de dos números sea cero, alguno de ellos debe ser cero. En este caso, el producto de $x$ y $x$-8 es cero; por tanto, $x=0$ o bien $x-8=0$. Es decir, $x=0$ o bien $x=8$.

La solución de la ecuación $x=0$ no sirve como solución del problema ¿Por qué? En consecuencia, la solución es $x=8$. Los lados del triángulo miden 6, 8 y 10 unidades.

**Definición**

Las ecuaciones de la forma $ax^2+bx=0$, pueden resolverse simpre:

1º Sacando $x$ factor común $ax^2+bx = x(ax+b)$.

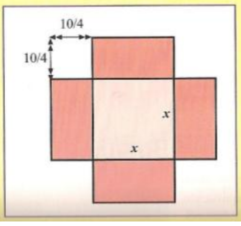
2º Igualando a cero ambos factores: $x = 0$ y $ax+b = 0$.

Es decir, las soluciones son $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$.

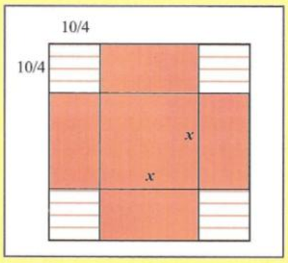
Intenta resolver tú las ecuaciones: $(x-3)(x+6) = 0$ y $5x^2+6x = 0$.

Al-Jwarizmi resolvía ecuaciones de segundo grado algebraicamente y trataba de demostrar la autenticidad de sus soluciones con métodos geométricos influenciado por las demostraciones geométricas que se realizaban en Grecia.

*Por ejemplo, para resolver la ecuación* $x^2+10x=39$, *traza un cuadrado que representa* $x^2$ *y sobre el cuadrado construye cuatro rectángulos cuyos lados son 10/4 y* $x$.




*Completando el cuadrado mayor, aparecen en las esquinas cuadrados de área* $(10/4)^2=25/4$, *de forma que* $10x$ *es el área de los cuatro rectángulos y 25 es el área de los cuatro cuadrados de las esquinas.*




Entonces el área del cuadrado mayor es

$$25+(x^2+10x)=25+39.$$

Luego $25+(x^2+10x)=64$ unidades.

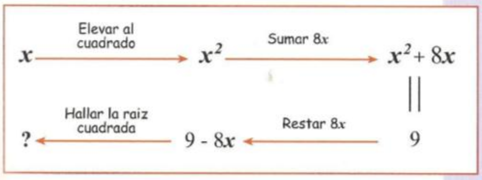
Por tanto, el lado del cuadrado mayor es de 8 unidades y, en consecuencia, el lado del cuadrado menor (es decir, $x$) será igual a

$$x=8\text{-}10/4\text{-}10/4, \text{ o bien}$$
$$x=8\text{-}2.5\text{-}2.5, \text{ que en definitiva es}$$
$$x=3.$$

• Vamos a resolver la ecuación:

$$x^2 + 8 = 9.$$

¿Qué sucede si aplicas el método anterior?




¡¡¡NO FUNCIONAN LAS TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES UTILIZADAS ANTES!!!

Volvamos al principio y hagamos un dibujo para ver qué pasa.

Empezamos construyendo un cuadrado de área $x^2$.

Sobre el cuadrado construye cuatro rectángulos de área $2x$; es decir, cuatro rectángulos de lados $x$ y 2.