EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS DE FUTUROS PROFESORES PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS DECIMALES

Patricia M. Konic

Tesis doctoral

Director: Juan D. Godino

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

2011

RESUMEN

La comprensión y el uso competente de los números decimales por parte de los alumnos de la escuela elemental plantea dificultades que han sido investigadas y descritas por diversas investigaciones didácticas. También se ha revelado que la enseñanza del tema no es una tarea fácil para los profesores, quienes con frecuencia carecen de los conocimientos necesarios, tanto sobre el propio contenido matemático como sobre su enseñanza.

En esta investigación abordamos el problema de la evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación primaria sobre los números decimales, mediante la construcción de un cuestionario que permite evaluar aspectos relevantes de dichos conocimientos necesarios para una enseñanza idónea de los decimales en la escuela primaria.

El diseño del cuestionario ha tenido en cuenta la síntesis de los resultados de investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de los decimales, así como el análisis de los significados de dicho objeto matemático, en particular la distinción entre las representaciones decimales y fraccionarias de los números decimales y las propiedades de los números racionales representados.

El cuestionario final elaborado, tras la realización de pruebas piloto, el uso de juicio de expertos y el análisis del tratamiento del tema en libros de escolares, ha sido aplicado a una muestra de 118 estudiantes de magisterio de la especialidad de educación primaria. Dicha aplicación ha permitido desvelar las dificultades de comprensión y uso competente de los decimales por parte de los futuros profesores de la muestra, las cuales en gran medida concuerdan con resultados de investigaciones previas. La aplicación del marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática ha permitido analizar la complejidad de objetos y significados puestos en juego en la resolución de las cuestiones y describir las características de los significados personales de los estudiantes sobre los números decimales y sus representaciones. El instrumento construido y los conocimientos aportados pueden servir para orientar el diseño y evaluación de acciones formativas de futuros profesores de educación primaria sobre el contenido específico investigado.

SUMMARY

The understanding and competent use of decimal numbers by elementary school students poses some challenges that have been investigated and described by various educational researchers. Their conclusions suggest that the teaching of this subject is not an easy task for teachers, who often lack the necessary knowledge, as regards both the mathematical content and its teaching.

In this research we address the problem of assessing the future primary school teachers' didactic and mathematical knowledge of decimal numbers through the construction of a questionnaire that evaluates relevant aspects of the knowledge required for a suitable teaching of decimals in primary school.

The questionnaire design took into account the synthesis of research on the teaching and learning of decimals, as well as the analysis of the meanings of this mathematical object; in particular the distinction between the decimal and fractional representations of decimal numbers, and the properties of the rational numbers.

The final questionnaire, which was developed after a pilot testing, the use of expert judgments and the analysis of the subject treatment in school books, has been applied to a sample of 118 primary education student teachers. The analysis of their responses revealed the participants' difficulties in understanding and making a competent use of decimals, which are largely consistent with previous research results. The application of the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction served to analyze the complexity of objects and meanings put into play when solving the questions and to describe the characteristics of participants' personal meanings about decimal numbers and their representations. The instrument constructed and the knowledge obtained in this research can guide the design and evaluation of training activities for future primary school teachers in this specific content.

ÍNDICE

CAPÍTULO 4

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE LA INTRODUCCIÓN DE LOS DECIMALES EN LIBROS DE TEXTO

CAPÍTULO 5

DISEÑO DE UN INSTRUMENTO PARA EVALUAR CONOCIMIENTOS DEL FUTURO PROFESOR SOBRE NÚMEROS DECIMALES

CAPÍTULO 6

TIPOS DE CONOCIMIENTOS Y CONFLICTOS

CAPÍTULO 7

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

ANEXOS:

INTRODUCCIÓN GENERAL

La formación matemática y didáctica de los futuros maestros de primaria constituye un campo de investigación científica y tecnológica que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas y de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas básicas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus respectivos maestros.

La caracterización de los conocimientos de los profesores en formación y en ejercicio, con relación a los contenidos matemáticos que deben enseñar es, como muestran las investigaciones didácticas (Ponte y Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis, y Ball, 2007; Swoder, 2007), un tema de reconocido interés.

Para los profesores de Educación Primaria, en especial, el dominio de los sistemas numéricos resulta necesario dada la importancia de la aritmética en la vida cotidiana y el papel de los números como elementos claves en la matemática, tanto desde un punto de vista formal como aplicado.

Es conocida y aceptada la complejidad que supone la comprensión de los números reales, especialmente en la escolaridad obligatoria. Esta situación alcanza a estudiantes universitarios, especialmente en lo concerniente al manejo de propiedades. Con los números irracionales tenemos la dificultad de distinguir la expresión decimal de los números reales, dado que esos decimales son, en general, tratados y asimilados sólo como proceso y no como entidad en sí misma (Socas, 2004).

Esta situación parece comenzar con los números racionales, sumando importancia al problema, ya que constituyen la base curricular para la enseñanza elemental. Una de las dificultades radica en la extensión de las propiedades de los números naturales a los números racionales, como lo indican diversas investigaciones (Brosseau, Brosseau y Warfield, 2006; Llinares, 2003), además del mencionado problema de distinción entre expresión y número (Socas, 2001; Arezzo, 2000; Cid, Godino y Batanero, 2004), siendo estos elementos una fuente importante de dificultades y obstáculos de diversos tipos (Brosseau, 1985; Vourgias, Vourgia, y Elia, 2003; Ruiz, 2004; Steinle y Stacey, 2004).

Ahora bien, cuando hablamos de números racionales, no podemos dejar de reconocer, y así lo expresan múltiples de investigaciones, los errores y dificultades que se presentan especialmente en la concepción y uso de los números decimales. Parece que, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, estos números ponen al descubierto la complejidad conceptual y representacional del concepto de número. Tal como expresa Vergnaud (2003, p. 135), “las dificultades en la adquisición de la noción de número, se encuentran especialmente a nivel de concepto...”, “no hay que confundir el número con su representación escrita…” “…sería imposible hablar de grandes números o de números decimales sin el recurso de su representación escrita”. Estas cuestiones también inciden para un uso adecuado de los números en sus diversos contextos y en la concepción de propiedades esenciales para avanzar hacia la construcción de conjuntos numéricos de mayor complejidad.

La expresión “número decimal” indica, en sí mismo, un número escrito en base diez, del mismo modo que la expresión “número binario”, indica un número escrito en base 2. En tal sentido claramente los números naturales y los números enteros son números decimales, su expresión es naturalmente escritura decimal; pero no lo serán, en general, los números racionales escritos en forma de fracción y tampoco los números irracionales como $\sqrt{2}$, π, etc. Para estos números existen diversas formas de representación y por ende una terminología específica para referir a cada una de ellas. Resulta oportuno destacar que, “en la tradición escolar la expresión “número decimal” designa casi siempre a números con coma, es decir, aquellos en los que se distingue una parte entera y una parte decimal separada de una coma” (Ferrari 2006, p.210)

No obstante, los “números decimales”, mirados desde la escritura decimal, es habitual distinguir los “números decimales finitos o limitados” de los “números decimales infinitos” y estos a su vez distinguiendo entre “números periódicos y no periódicos”.
Estas primeras cuestiones dan ya indicaciones de la complejidad existente en el estudio de los números y de la necesidad de tomar precauciones en la enseñanza para no generar problemas conceptuales derivados de la distinción entre representación y número.

Las propiedades juegan un papel esencial en el trabajo con los números. En este trabajo nos interesa, en particular, abordar el problema de la distinción entre número y expresión en el ámbito de los números racionales. En tal sentido, bien podemos pensar en dos subconjuntos de números racionales, uno formado por los racionales que admiten una representación fraccionaria cuyo denominador son potencias de 10, y el otro formado por el resto de los números racionales que no admiten dicha representación.

Esta aparente simplista consideración nos lleva a destacar que investigaciones precedentes dan muestra de grandes dificultades en la concepción, distinción y aplicación de estos números y consecuentemente de sus propiedades. Dificultades que aún subsisten después de varias décadas en las que se viene investigando en esta dirección.

Evidentemente las dificultades de carácter epistémico y cognitivo se hacen presentes con gran fuerza en el aprendizaje de los números; si a las dificultades mencionadas añadimos la complejidad que implica un proceso de enseñanza, resulta necesario que los formadores de futuros profesores indaguemos el estado en que se encuentra ese conocimiento requerido para la enseñanza.

Desde esta perspectiva, centrados en la formación de estudiantes para maestro, consideramos necesaria la profundización en el análisis de la naturaleza y desarrollo de los contenidos matemáticos específicos, para determinar y estudiar los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos. En nuestro caso hemos emprendido un estudio que toma a los números decimales como contenido específico, por su importancia en la escolaridad elemental, porque la diversidad de escritura merece una atención particular, por su utilidad tanto en la vida cotidiana como en la actividad científica. No obstante, lograr ese dominio no es tarea fácil. Existen investigaciones sobre profesores, que explican ideas matemáticas, psicológicas y pedagógicas para una enseñanza efectiva de este tópico (Steinle, Stacey y Chambers, 2006), que sostienen que "las dificultades en la interpretación de la notación decimal es la causa raíz del problema en las operaciones aritméticas con decimales, así como el redondeo, el trabajo con cifras significativas, y en general darle sentido a las matemáticas" (Steinle et al., 2006, p.1).

Por todo lo expuesto consideramos que una buena comprensión del sistema decimal es esencial para el tratamiento de dos contenidos básicos del currículo de la enseñanza elemental: *medidas y número*.

Desde un punto de vista global nuestro objetivo general es aportar nuevos conocimientos para la mejora de la formación inicial en matemáticas y didáctica de la matemática de los profesores de educación primaria teniendo en cuenta el contexto educativo español. En tal sentido, nos interesa evaluar qué tipo de conocimientos, necesarios para la enseñanza, poseen los futuros maestros sobre algunos aspectos inherentes a las expresiones y números decimales. Para ello, nos proponemos desarrollar y experimentar un instrumento de evaluación que nos permita lograr el objetivo señalado.

Nuestro interés se centra básicamente en dos vertientes, las cuales justifican la necesidad de actuación, al menos localmente, sobre la formación de futuros maestros.

- La persistencia de la problemática mencionada tanto en el aprendizaje tanto por los niños como por los estudiantes que ingresan a una carrera de formación docente.
- Como formadores, ser conscientes de la necesidad de cambio en la formación de maestros y aportar conocimientos fundados sobre cómo realizar dicha formación.

La memoria de tesis la hemos organizado en siete capítulos cuyo contenido describimos sucintamente a continuación.

En el capítulo 1 se realiza una descripción del estado de la cuestión, traducida en una organización de antecedentes relativos a las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de los números decimales, tanto con alumnos de primaria como futuros profesores. En primer lugar hacemos una breve reseña sobre el Sistema de Numeración Decimal, y describimos algunas concepciones epistemológicas sobre el número decimal desde la perspectiva de la enseñanza y aprendizaje. Luego se consideran investigaciones que enfocan a dichos números desde diferentes perspectivas, errores y dificultades en el aprendizaje, propuestas de abordaje de la enseñanza y los números decimales relacionados con la formación del futuro maestro. Finalizamos el capítulo sintetizando los conocimientos didácticos para los números decimales clasificados según las facetas epistémica (significados institucionales), cognitiva (significados personales) e instruccional (interacciones y uso de recursos).

En el capítulo 2 describimos el problema específico de investigación, el marco teórico, la metodología mixta de investigación (cualitativa y cuantitativa), y las fases en que se ha desarrollado.

El capítulo 3 lo dedicamos a presentar un estudio exploratorio de evaluación de significados sobre los decimales de un grupo de 49 estudiantes de magisterio de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, antes y después de recibir una instrucción específica sobre fracciones, racionales y números decimales. En dicho capítulo se describe el instrumento construido y los resultados obtenidos mediante su aplicación.

En el capítulo 4 presentamos un segundo estudio exploratorio, en este caso centrado en el análisis de libros de texto de educación primaria, en el que se trata de estudiar en qué medida los libros de texto de educación primaria tienen en cuenta los resultados de las investigaciones didácticas en el tema de los números decimales. Este estudio nos ha permitido, además, seleccionar algunas tareas a incluir en el cuestionario que permiten evaluar aspectos relevantes de las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento sobre decimales. El análisis se ha realizado sobre tres libros de texto de amplio uso en las escuelas españolas, aplicando a uno de ellos un estudio en profundidad de los objetos y significados puestos en juego, usando herramientas de análisis semiótico (Godino, 2002).

En el capítulo 5 describimos el proceso de construcción del cuestionario de evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre decimales, objetivo principal de nuestra investigación. Incluye la descripción del objetivo y tipo de instrumento, la especificación del contenido de la variable de objeto medición, la construcción de una versión piloto y su ensayo en una muestra reducida de estudiantes, el proceso de validación mediante juicio de expertos, para finalmente presentar la versión definitiva del cuestionario, junto con un análisis detallado del contenido curricular y ontosemiótico efectivamente evaluado. Concluye el capítulo con la presentación de los resultados cuantitativos de la aplicación del cuestionario a una muestra de 118 futuros profesores de educación primaria que cursan el segundo año de la carrera de Magisterio en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada.

El capítulo 6 incluye un estudio pormenorizado de dos categorías de variables cualitativas deducidas de las respuestas de los estudiantes a cada una de las 26 cuestiones que componen el cuestionario: tipos de conocimientos y conflictos de significados manifestados por los estudiantes. El análisis de las respuestas se contrasta con resultados de las investigaciones previas informadas en el capítulo 1.

En el capítulo 7 realizamos una síntesis y conclusiones de la investigación, teniendo en cuenta los objetivos e hipótesis formuladas en el capítulo 2; se incluye también un apartado en el que resaltamos las aportaciones de la tesis doctoral, y otro con donde reconocemos las limitaciones de la misma y algunas cuestiones abiertas.

Tras las referencias bibliográficas utilizadas incluimos los anexos que hemos considerado pertinentes, indicados en el índice, así como un resumen amplio de la tesis en idioma italiano para cumplir uno de los requisitos exigidos para optar a la mención de Tesis de Doctorado Europeo. Otro de los requisitos cumplidos fue la estancia durante tres meses en la Universidad de Bolonia en el Grupo de Investigación del profesor Dr. Bruno D'Amore, a quien agradecemos su extraordinaria acogida y colaboración.

CAPITULO 1

ÁREA PROBLEMÁTICA. ANTECEDENTES

1.1. INTRODUCCIÓN

Como hemos indicado en la introducción general, nos interesa determinar, cuál es el estado de conocimiento que muestran los futuros profesores para la enseñanza de los números decimales. Para ello, consideramos esencial, analizar la naturaleza y desarrollo de estos números y, en particular, estudiar los factores que condicionan los procesos para su enseñanza y aprendizaje.

Los números decimales, constituyen un contenido que históricamente han generado muchos problemas en su aprendizaje, como ponen de manifiesto diversidad de investigaciones. Precisamente la intención de este capítulo es evidenciar, a través de una revisión de antecedentes de investigación, el tipo de problemas del que es objeto el número decimal, desde una perspectiva educativa.

A modo de introducción al área problemática, en el apartado siguiente, describimos de manera sintética algunas cuestiones generales, ligadas a la naturaleza, origen e importancia, de estos números. En los apartados siguientes, nos adentramos en el estudio de antecedentes desde una clasificación que considera al número decimal, como objeto epistémico, su estado en el campo de investigación didáctica, su enseñanza, y su aprendizaje. Para finalizar recogemos cuestiones abiertas, que algunos investigadores destacan como relevantes para su estudio y reorganizamos la información recogida, rescatando aspectos relevantes estudiados sobre los números decimales, desde cuatro dimensiones: Epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica.

1.2. El SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

La necesidad de describir cantidades continuas ocurre en el comercio y en las actividades cotidianas que involucran medidas donde, el valor entre dos números enteros, correspondiente a una determinada unidad, necesita ser especificado y comunicado. Esto claramente no puede hacerse con los números enteros, lo que se traduce en un problema práctico. Por otra parte, desde una perspectiva teórica la matemática en su naturaleza va exigiendo de una generalización que permita ir solucionando tanto las limitaciones que cada teoría muestra para determinados avances como la necesaria descontextualización. Es así que la insuficiencia de los números naturales para resolver ecuaciones lineales obliga la extensión de este semigrupo a los números enteros y luego a los racionales, con el propósito de ir permitiendo la solución teórica de distintos tipos de ecuaciones. Entre estos dos contextos, con intereses claramente definidos, encontramos un tercero, el contexto educativo sobre el cual estamos particularmente interesados.

La primera discrepancia que surge en la comunidad matemática, educativa y en instituciones como la que integran los libros de texto, tiene relación con el interrogante ¿A qué llamamos número decimal? Al respecto, existen básicamente dos posturas; hay investigadores que consideran al número decimal como una forma de expresión de un número racional (Arezzo, 2000; Moreira, 2007), otros como un conjunto numérico con entidad propia (Brousseau, 1987; Socas, 2002; Cid, Godino y Batanero, 2004)

Previo a adoptar una postura a los fines de nuestra investigación, haremos un breve recorrido histórico sobre la aparición y uso de los números decimales, el cual hemos extraído de Centeno (1988) y Ferrari (2006).

Los autores describen que fue en la India donde se inventó el sistema de numeración decimal posicional; sin embargo, no lo aplicaron a las fracciones y continuaron usando el sistema sexagesimal en la actividad astronómica. Fueron los chinos los primeros en utilizar las fracciones decimales esencialmente para el peso y la medida. Los árabes adoptaron el sistema de numeración hindú y también los aplicaron a las fracciones. (El matemático Al-gludisi, lo usa para aproximar raíces cuadradas y raíces cúbicas irracionales).

Un uso sistemático de las fracciones decimales en problemas de aproximación se encuentra en el *Tratado de aritmética* del año 1172 de As-Samaw´al, donde se adopta la terminología “parte de la decena”, “parte de la centena”, para indicar los actuales décimos, centésimos, etc.

JemshidIbn Mesud Al-Kashi**,** fue el persa que en el siglo XV, dio un primer tratamiento sistemático y completo de las fracciones decimales en las dos obras: *“Tratado sobre la circunferencia del círculo” y “La llave de la aritmética”.* Su objetivo era construir un sistema de fracciones con las que pudiera efectuar las operaciones siguiendo las mismas reglas válidas para los números enteros. Enunció las principales reglas de las operaciones con fracciones decimales, las mismas que se utilizan hoy.

En Europa, el uso de las fracciones decimales se difundió muy lentamente. Los primeros indicios de primeros, segundos, terceros decimales, terminología que será retomada por Stevin, fue propuesta por el astrónomo Emmanuel Bonfils (1340-1377).

Una de las primeras obras en las que se utilizaron las fracciones decimales es en *“Die coss”*, un tratado de álgebra, muy conocido en su época, a tal punto que Rudolff**,** Cristoph (1500-1545) lo llamó el predecesor en matemática de toda Alemania. Rudolff retornó sobre las fracciones decimales en otro tratado en el año 1500, en el cual también muestra la división por 10, 100, etc. con el uso de la coma.

Con FrancoisViète (1540-1603), en el período simbólico del álgebra, comienza una verdadera batalla a favor de adoptar las fracciones decimales en lugar de los sexagesimales.

El impulso decisivo al uso generalizado de las fracciones decimales, aunque en el ámbito de la aritmética práctica, fue dado por Simon Stevin (1548-1620), físico, ingeniero y matemático quien fue considerado el inventor de las fracciones decimales. Su mérito fue haber expuesto con claridad, precisión y simplicidad las reglas de cálculo con las fracciones decimales. Estas manifestaciones se hallan en la “Disme”, obra de gran importancia traducida al francés. “La Disme” es una especie de aritmética, con la cual se pueden hacer todos los cálculos que se encuentran en el hacer de los hombres.

Stevin demostró su originalidad sugiriendo también la introducción metódica de la división decimal del peso y medida, siendo consciente de la dificultad que encontraría con la actuación de esta reforma. Pasaron dos siglos antes que esto se pusiera en acto, con la Revolución francesa se perfeccionó e inició el Sistema Métrico Decimal.

Con Stevin, termina la historia de la fracción decimal**,** y continúa con la del simbolismo decimal.

El problema de distinguir la parte entera de la parte decimal en la escritura de un número nace en el sistema de expresión polinomial de los números. Los símbolos usados por los matemáticos fueron diversos. El primero en darse cuenta del problema y en proponer una solución fue Al-Uglidisi, quien distingue la parte entera de la parte decimal poniendo un acento sobre la cifra de la unidad. Se hizo de ello una costumbre mental pero no comprendiéndose el sentido de dicho símbolo

Siguiendo en el mundo árabe Al-Kashi, hace la distinción de ambas partes escribiéndola con un color distinto o separándola con una barra vertical. Rudolff, usaba una barra vertical para realizar la separación de lo que nosotros llamamos parte entera y parte decimal, y que él llamaba "resto". Ej: Dividiendo 652 por 10, se obtiene 65/2, donde 65 es el cociente y 2 es el resto.

Viète, algunas veces utilizaba para la parte entera caracteres más grandes que los que usaba para la parte decimal, otras las separaba con una barra vertical, otras utilizaba una coma combinada con una raya que subrayaba la parte decimal. Ej.: 314.159,<u>265,35</u> (la primera coma de la izquierda es la decimal, las otras vienen puestas cada tres cifras decimales; mientras que el punto, partiendo de la derecha de la primera coma, vendrá puesto por un bloque de tres cifras.

Stevin, llamaba inicio a la parte entera y la indicaba con un cero encerrado en un círculo, la décima parte de la unidad de inicio la llamó primera y el símbolo un uno dentro de un círculo, la décima parte de la unidad de la primera la llamaba segunda y el símbolo un 2 encerrado en un círculo, y así sucesivamente.

Ej.: 27⓪8①4②7③, es el número que nosotros escribimos como 27,847.

La notación era muy complicada y trataron de simplificarla. Burgi (1552-1632) escribía 2414 colocando un cero debajo de la cifra 1, en lugar de nuestro 241,4.

No es unánime en la historia de la matemática a quien se le atribuye la introducción de la coma. Pero si hay acuerdos en consagrar como autor de la coma y el punto como separadores decimales a John Napier (1550-1617). En su primera obra usa indistintamente el punto y la coma, mientras que en su obra póstuma "*Mirifici logarithmorum canonis cosntructio"* del 1619 adopta el punto decimal.

Recién en el siglo XVIII con la adopción del Sistema Métrico Decimal, se da por finalizado el problema de que cada país y hasta cada región tuviera sus propias unidades de medida. Con este sistema se logra la independencia de la unidad del hombre y queda referida a la tierra; esto se establece en Francia por cuestiones comerciales.

Por dos siglos el punto fue preferido por los países anglosajones y la coma por los otros países europeos. Actualmente en las calculadoras se usa exclusivamente el punto decimal, también en la notación exponencial.

En la actualidad, un punto no siempre es usado para separar la parte entera de un número de las décimas, centésimas, etc. Muchas veces las notaciones producen confusiones cuando se trabajan en otros contextos. Los niños a veces confunden un punto decimal con un separador y ello puede llevar a error fundamentalmente cuando operan con la calculadora. Por ejemplo el punto, en ocasiones, es utilizado como separador entre unidades de tiempo. 1.30 (significa 1 hora y 30 minutos); 2.15.32, puede ser el tiempo que le tomó a un corredor una maratón en una determinada distancia (significa, 2 hs. 15 minutos y 32 segundos) y claramente ninguno de ellos son números decimales.

En la información deportiva, en general ocurre que la expresión decimal de un número no hace alusión a algún tipo de número racional específico. Esta paradoja surge del uso que se establece en dicho contexto y que no se corresponde ni con la expresión decimal de un número y menos aún con un número decimal. Un ejemplo de ello es que, en baseball, 7.2 indica que un "pitcher" (lanzador) ha lanzado la pelota 7 rondas completas y tiene 2 "outs" de la próxima ronda (donde se permiten 3 outs por ronda).

1.3. LOS NÚMEROS DECIMALES COMO CAMPO DE INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA

Es indudable la importancia que reviste el estudio de las problemáticas existentes en el aprendizaje y por ende en la enseñanza de los campos numéricos. Gran número de investigaciones en esta dirección y a lo largo de muchos años se vienen desarrollando en el intento de contribuir a la búsqueda de caminos alternativos a esta cuestión. De hecho existieron y existen grupos de investigación avalados por instituciones universitarias a nivel mundial que se ocuparon del estudio de los números, sus propiedades y fundamentalmente las dificultades que se desprenden de estudios escolares en sus diversas manifestaciones, a través de alumnos, futuros profesores y profesores en actividad. El Rational Number Project (RNP), fue fundado por la National Science Foundation en 1979, en la University of Minnesota (The College of Education &

Human Development). Es un proyecto de investigación que durante muchos años en forma continua, ha investigado el aprendizaje del estudiante y el perfeccionamiento del maestro, Siendo sus principales investigadores, Cramer, Harel, Lesh y Post (1979-2003). Ha sido reconocido como uno de los más grandes y duraderos multi-proyectos de investigación universitaria en la historia de la enseñanza de las matemáticas. Tomaron la decisión de poner a disposición las publicaciones en su formato original para su uso en el presente y el futuro de los investigadores y profesionales interesados en matemáticas, su enseñanza, su aprendizaje y su evaluación (http://cehd.umn.edu/rationalnumberproject/)

El logro más significativo del RNP es la colección de más de 90 artículos, capítulos de libros, varios libros y otras publicaciones del proyecto. La gran mayoría de estos se refieren a la enseñanza y el aprendizaje del número racional incluidos los conceptos de fracción, decimal, razón, división, medición y operadores. Han examinado las aportaciones de las comprensiones de la multiplicación y la división de los conceptos mencionados anteriormente y, a continuación, procedieron con el tratamiento del diseño de programas de desarrollo profesional para maestros.

En el año 2006 recibieron apoyo financiero para crear un módulo para ampliar el RNP con lecciones para los grados medios y complementaron trabajos previos incluyendo:

• Operaciones con fracciones
• Significado de decimales y porcentajes
• Operaciones con decimales y porcentajes

Estos investigadores, sostuvieron que en la medida que avanzaran en el desarrollo de nuevos módulos, se lograría mejor comprensión de por qué los estudiantes de la escuela media tienen dificultades significativas para trabajar con fracciones, decimales y porcentajes. Para apoyar el uso de este módulo, se propusieron crear un taller en línea para los profesores. Dicho seminario se basaría en los conocimientos que disponen los investigadores sobre el pensamiento de los estudiantes. Precisamente, el desarrollo del módulo: *Rational Number Project. Fraction, operations and initial decimal ideas* (2009), fue construido a partir de las primeras experiencias surgidas de la aplicación de un conjuntos de lecciones que ayudaron a los estudiantes a construir una comprensión conceptual y procedimental para las operaciones con fracciones. Lo destacable, para nuestro estudio, es que las mencionadas lecciones movilizaron oportunidades de desarrollar significado para los números decimales. Especialmente ideas de orden y equivalencia relacionadas con los números decimales, como así también operaciones de adición y sustracción.

Ya por los años setenta, en Francia, Guy Brousseau se propuso el objetivo de verificar experimentalmente una teoría que fue edificada durante muchos años: La Teoría de Situaciones Didácticas. Desde un constructivismo (no radical), se propone que los niños, bajo ciertas y en determinadas circunstancias, puedan edificar su propio conocimiento de las matemáticas. En esta dirección, dedicó gran parte de sus investigaciones a los números racionales (Brousseau, Brousseau y Warfield, 2004, 2007, 2008, 2009). Concretamente, llevó a cabo una extensa experiencia de enseñanza, junto a Nadine Brousseau (1985), aplicando un material elaborado para la enseñanza de los números racionales y los números decimales, ajustada al programa nacional. Desde esta línea de pensamiento, se desprenden también, una serie de trabajos de investigación traducidos en monografías y tesis doctorales. (Centeno, 1989; Douady y Perrin, 1990; Bolón, 1997).

Otra de las aportaciones significativas, es la contribución realizada por Steinle y Stacey (2006), quienes reúnen, en formato de CD, una serie de trabajos (estudios de casos, guías de enseñanza, test de diagnóstico de concepciones erróneas, materiales de ayuda para el profesor, contribuciones en formato de artículos de investigación, etc.), sobre los números decimales, en particular problemas relacionados al valor de posición. Se trata de una extensa investigación llevada a cabo en la universidad de Melbourne (Australia) junto a otras investigaciones realizadas por investigadores de todo el mundo. Se enfatiza que las dificultades en la interpretación de la notación decimal son la causa raíz de todos los problemas que surgen en las operaciones aritméticas con números decimales, en el redondeo, en el trabajo con cifras significativas y globalmente en cuestiones de sentido de las matemáticas.

Estos grupos de trabajo específicos sobre los números racionales, y en particular sobre los números decimales hablan por sí mismo, de la importancia y el desafío que implica aprender a trabajar con confianza con los números decimales por ser una parte importante de la aritmética elemental, necesaria en todos los ámbitos de la vida.

No obstante, la importancia mencionada es ampliamente conocida las dificultades que acarrea el dominio de este tema, particularmente en la escolaridad elemental y que se prolonga de manera clara en estudios más avanzados y sus aplicaciones.

Con el propósito de mostrar tipos de estudios vinculados a esta temática, es que en los próximos apartados describiremos sintéticamente, a modo de revisión, algunas investigaciones. Para ello hemos adoptado una clasificación basada en los siguientes aspectos: el sistema del número decimal como objeto epistémico, errores y dificultades en el aprendizaje de los números decimales, propuestas de enseñanza y estudios vinculados a la formación de profesores en dicho ámbito, como así también expresamos algunas cuestiones abiertas, planteadas por algunos de los investigadores tratados. Cerramos el capítulo con un apartado que reorganiza los antecedentes en conocimientos didácticos sobre los números decimales a partir de cinco dimensiones.

1.4. EL NÚMERO DECIMAL COMO OBJETO EPISTÉMICO

Tal como hemos anticipado en el apartado 1.2., una de las dificultades más importantes que se presenta a la hora invocar a los números decimales es precisamente, ¿De qué estamos hablando cuando hacemos alusión a la expresión “número decimal”?.

La distinción entre los elementos que pertenecen a los diferentes sistemas numéricos requiere de un “nombre” para identificarlos. De hecho, hablamos de número natural, entero, racional, irracional, etc. donde cada uno de estos términos está vinculado a su naturaleza, a sus propiedades tal como sostiene Socas (2001). No obstante, cuando se habla de número decimal, literalmente se hace referencia a la base de un sistema de numeración, esto es, la base diez; de igual modo que podría hablarse de número binario, por citar un ejemplo. Pero, por otra parte, también refiere, y especialmente en la escolaridad elemental, a un número que tiene unas propiedades intrínsecas. Esto, como ya lo anticipáramos en la introducción, es origen de conflictos relevantes.

Desde una perspectiva que considera la enseñanza y aprendizaje de los números decimales, a continuación describimos la concepción que adoptan algunos investigadores respecto a estos números.

Socas (2001), sostiene que los números decimales forman un conjunto que surge de manera confusa en el contexto de los sistemas numéricos. Esta afirmación se halla basada en dos cuestiones esenciales: “el objeto número decimal es caracterizado erróneamente, y la representación decimal de los diferentes números es identificada como un número decimal” (p. 297). Ambas cuestiones, derivadas de la naturaleza de este objeto y de los distintos tipos de representaciones en que se ve involucrado, generan una complejidad no solo epistemológica sino también semiótica. Por tal razón, considera a los números decimales "como un sistema numérico propio e independiente" (p. 314) y fundamenta esta decisión, por un lado haciendo emerger a los decimales asociados a las fracciones decimales como una prolongación del sistema de numeración decimal. Por otro lado su justificación es de tipo didáctico, descarta la posibilidad de generar ambigüedad en los sistemas numéricos, dado que normalmente se mezclan los problemas teóricos y prácticos de medir cualquier longitud.

Desde esta perspectiva, propone una organización de los sistemas numéricos para el ámbito escolar. "…en la que el conjunto D (números decimales) es considerado como un sistema numérico que permite enlazar y dar sentido a las diferentes representaciones numéricas" (p.315). El esquema de dicha propuesta será exhibido en el apartado 1.6.1. (Orientaciones curriculares).

Ruiz (2004) habla de "racionales decimales" para referir a objetos matemáticos asociados a las prácticas de medición de magnitudes y le asocia a estos números un formato de escritura que, al hacer alusión a su proximidad con los números naturales, entendemos refiere a la expresión polinómica. Pero también le otorga carácter de conjunto numérico.

Esta autora, al proponer su construcción en la escolaridad primaria, el primer interrogante que plantea da cuenta, con claridad, de la necesidad de cuestionar la noción:

"¿En qué consiste el conocimiento matemático: *números decimales* en la institución escolar? ¿Cómo se manifiesta? (Ruiz 2004, p.191).

Desde esta posición, plantea una serie de concepciones asociadas a los números decimales en la escuela. Dichas concepciones se conciben como modos diferentes de comprender una misma noción, las que, según el ámbito y condiciones resultan con mayor pertinencia o adecuación unas sobre otras. Se describen, a continuación seis concepciones que permiten construir las fracciones y los decimales en la escuela. Para cada una de ellas, la autora pone en evidencia algunas limitaciones.

C1: Extensión natural del sistema de numeración decimal (SND)

C2: Los números decimales a partir del Sistema Métrico Decimal (SMD)

Las siguientes concepciones son de origen fraccionario, donde el número decimal surge de las fracciones decimales $\frac{k}{10^n}$, como caso particular de las fracciones $\frac{n}{p}$.

C3: Fraccionamiento de la unidad

C4: Fracción como operador

C5: Fracción como cociente exacto

C6: La fracción como razón

Con respecto a la noción de razón, se aclara que debido a su riqueza, se podría pensar en ella como objeto central que precede a la fracción. Constituyéndose de este modo en el origen y no consecuencia de la fracción y del cociente.

Esta última idea es compatible, con la propuesta de Lachance y Confrey (2002), quienes al proponer un modelo alternativo para el desarrollo de la compresión conceptual en matemáticas, utilizan la razón y en particular los números decimales, para ilustrar dicha propuesta. En tal sentido, ubican la razón en el centro del modelo, a partir de la cual sostienen que los estudiantes pueden explorar constructos como fracción, decimal y porcentaje. Desde este punto de vista, las fracciones son un subconjunto de las razones y son usadas para describir cantidades y medidas. Los decimales, como una expresión en base 10 de las fracciones, son también usados para describir cantidades y medidas. De ese modo, fracciones y decimales son convertidos en casos específicos de la razón que expresan cantidades específicas, siendo posible expresar una cantidad de forma equivalente como fracción o decimal.

Desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), preguntarse ¿qué son los números decimales?, ¿qué quiere decir conocer los números decimales? requiere buscar las respuestas en la nociones de significado sistémico-pragmático y significado parcial de un objeto matemático, herramientas estas para "el análisis epistemológico de los productos culturales resultantes de la actividad matemática" (Godino, Font, Konic y Wilhelmi, 2009, p.6). En tal sentido, para describir el significado (institucional y personal) de un objeto matemático se utiliza la noción de sistemas de prácticas operativas y discursivas asociadas al campo de problemas en el que se pone en juego un objeto matemático. (Godino y Batanero,1994). De dichos sistemas de prácticas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización. Los sistemas de prácticas como así también los objetos emergentes se configuran en redes epistémicas y, por tanto, la descripción de estas redes debe ser un objetivo del análisis epistemológico al que hemos hecho mención.

Los diferentes contextos de uso de una noción delimitan significados específicos, que se sintetizan en diferentes definiciones de una noción. Por tanto la noción, en nuestro caso números decimales, no puede ser restringida a un solo contexto. Los diferentes contextos de uso, las prácticas matemáticas y los objetos emergentes de tales prácticas se estructuran de algún modo, formando una configuración epistémica local, o llamado también modelo. Cada configuración epistémica local modeliza un aspecto parcial del significado de la noción (significado parcial). Las relaciones que se establecen entre los distintos significados parciales asociados a la noción de número decimal, determinan la noción de significado global u holo-significado. (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007). En la Figura 1.1, se muestra un esquema de las relaciones entre las nociones mencionadas.

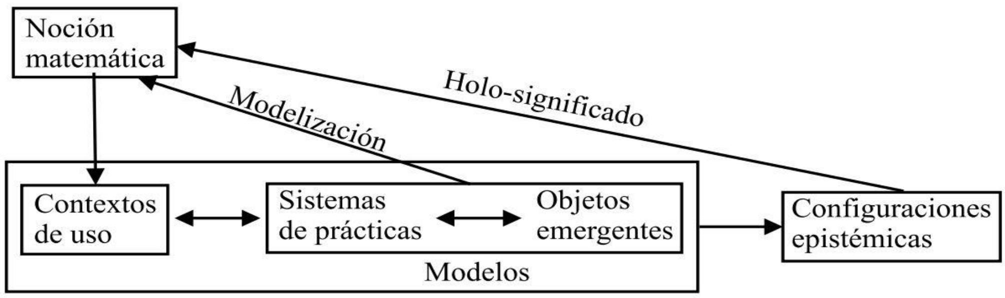


Figura 1.1: *Herramientas para el análisis epistemológico de una noción matemática (Wilhelmi y otros, 2007)*

Desde esta perspectiva, la noción de número decimal será el significado global u holo-significado que se obtendrá a partir de los diferentes significados parciales de dicho número. Estos a su vez, derivados de la consideración de los diversos contextos de uso, las prácticas matemáticas y los objetos que emergen de tales prácticas.

Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011), ya describen la complejidad ontosemiótica de los procesos de aprendizaje de la numeración decimal, en el caso de los números naturales. Cuestión a la que no escapan de hecho los números decimales. Precisamente por la tensión que genera esas dos vertientes entre las que transitan permanentemente los sistemas numéricos formales y los sistemas numéricos elaborados para la matemática escolar. Tensión que no permite ser flexibilizada si no se tienen herramientas que permitan comprender la mencionada complejidad.

Desde este enfoque dar una respuesta al interrogante que nos planteábamos inicialmente, ¿Qué es un número decimal?, requiere, como mínimo, ser consciente de la pluralidad de significados tanto formales como informales, los que en su conjunto configuran el significado global u holístico ya mencionado.

A los fines de ilustrar el caso de los números decimales, en la figura 1.2, se muestra el esquema que nos llevaría al significado holístico de estos números, desde la perspectiva sostenida por este enfoque.

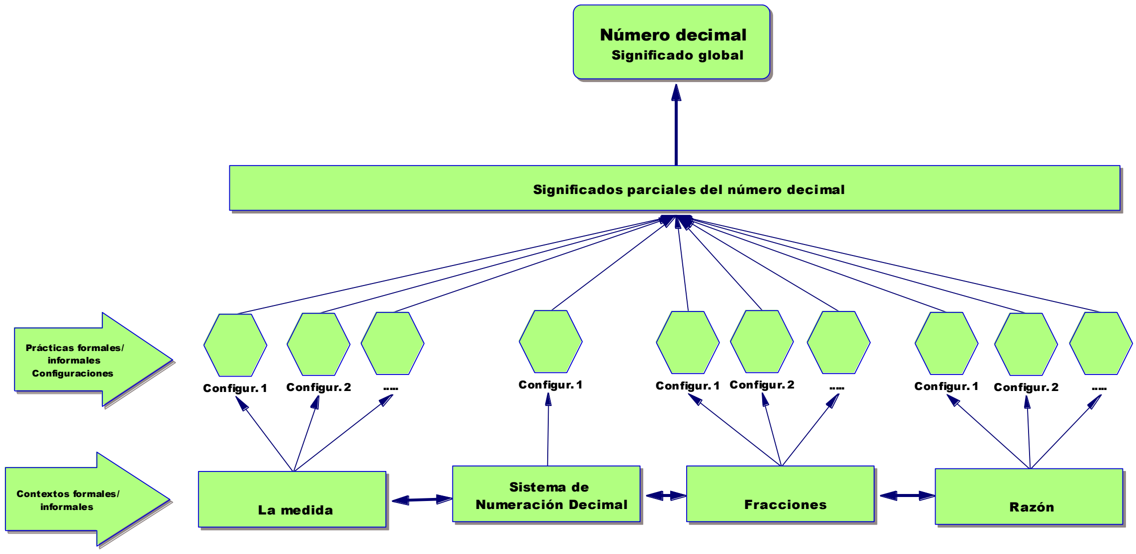


Figura 1.2: *Pluralidad de significados del número decimal*

Desde un punto de vista formal, de acuerdo con Socas (2002), el conjunto D de los números decimales queda determinado al definir en $Z \times N$ la siguiente relación binaria:

$$(a_1, n_1)\ R\ (a_2, n_2) \leftrightarrow a_1 10^{n_2} = a_2 10^{n_1}$$

donde el par (a, n) se escribe usualmente $\frac{a}{10^n}$. El conjunto D está constituido por todos los números racionales que se pueden representar mediante fracciones decimales:

$$D = \left\{ r \in Q | r = \frac{a}{10^n}, a \in Z, n \in N \right\}$$

Este subconjunto propio de Q es un anillo de integridad (sin divisores de cero) desde el punto de vista de la estructura algebraica con las operaciones de adición y multiplicación de racionales. Tiene además propiedades topológicas y operatorias útiles desde el punto de vista conceptual y de aplicación práctica. El conjunto D es denso en R, lo que permite aproximar cualquier número real con la precisión que se desee mediante una sucesión convergente de números decimales.

Como se prueba en Apostol (1976, pp. 14-15),

> Dado un número real $x \geq 0$, para todo $n \in N$ existe un decimal finito,
> $r_n = a_0,a_1a_2..a_n$, tal que $\boldsymbol{r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}}$.
> En consecuencia, $x = \sup\{r_n: n \in N\}$

El conjunto D no es el único subconjunto dentro de los racionales que tenga las mencionadas propiedades; bastaría tomar, por ejemplo, las fracciones diádicas, es decir, las que tienen por denominador una potencia de 2, expresables por un número finito de cifras en el sistema diádico o binario de numeración, para obtener otro de tales subconjuntos. El interés de considerar a D como un subconjunto destacado de Q viene principalmente de los tipos de algoritmos de las operaciones y de ordenación que permite la forma de escritura polinómica decimal abreviada asociada a la expresión fraccionaria decimal.

1.4.1. La distinción entre número y expresión decimal de un número

Coincidimos con O'Connor, (2001), cuando los profesores participantes de su investigación, refieren a que, en general, los estudiantes tienden a ver las expresiones escritas como cosas en sí mismas. Suelen considerar a expresiones diferentes de un número, como dos tipos diferentes de entidades matemáticas. Por ende, no pueden realizar la asociación necesaria para comprender la equivalencia de dos representaciones para una misma entidad numérica. En general, un alto porcentaje de alumnos distinguen un tipo de número de otro, simplemente mirando la escritura y no por las propiedades numéricas que los caracteriza.

Esta cuestión se hace aún más visible, en particular, en el caso de los números decimales y en las expresiones decimales de un número real. Muestra de ello son consideraciones como las siguientes: "número decimal como sinónimo de número real"… "número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con comas"…. "el número racional se identifica si su escritura es fraccionaria..." (Socas, 2001, p.302).

La problemática planteada nos conduce a considerar una cuestión esencial el ámbito de los sistemas numéricos, no ajena a las matemáticas en general, la cuestión de la representación.

1.4.2. El problema de la representación

Extensas y variadas son las investigaciones que abordaron y siguen abordando cuestiones vinculadas a la representación. Precisamente, el RNP, pone especial énfasis en la concepción de trabajo en cada tipo de representación y la necesaria traslación entre ellas. Richard Lesh, miembro fundador del grupo RNP (1979-2003), sugiere un modelo de enseñanza basado en las ideas de Piaget, Bruner y Dienes. Específicamente, en lo que concierne a las ideas matemáticas, y en particular los conocimientos sobre los números racionales, pueden ser expresados por cinco vías o formas de representación. Además, afirma que los niños aprenden si tienen la oportunidad de explorar sus ideas en cada una de esas vías y realizar las correspondientes conexiones entre ellas.

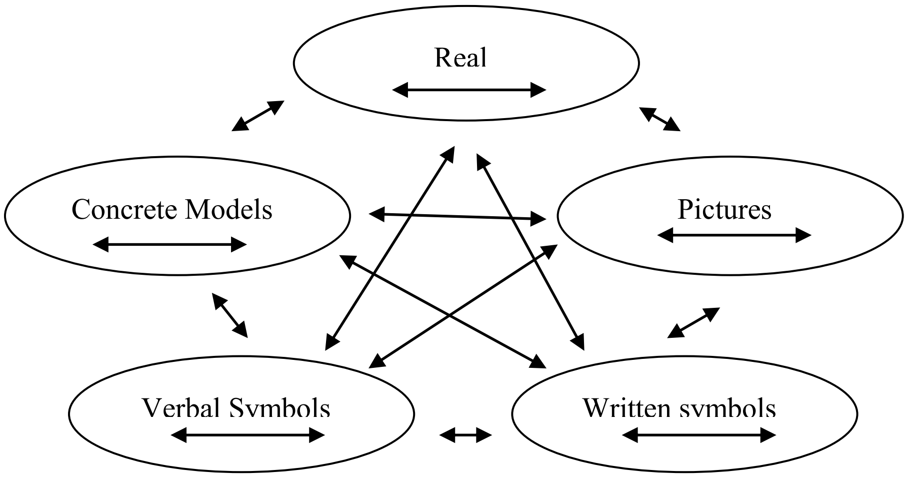


Figura 1.3. *Modelo de enseñanza propuesto por Lesh*

Sobre el funcionamiento de este esquema, a modo de ejemplo, se observa en la lección 12 (p.149) del módulo: *Rational Number Project. Fraction, operations and initial decimal ideas* (2009), el uso y traducción de diferentes representaciones. Estas se observan en el marco de la revisión del orden, equivalencia y práctica de la adición y sustracción de números decimales, en la resolución de problemas contextuales.

Como introducción a la clase, y a modo de revisión se da la siguiente actividad a todos los alumnos:

Estimar:

85+ 0.39= ¿Es mayor o menor que 1?

3.675+2.399= ¿Es mayor o menor que 6?

45,06+40,56= ¿Es mayor o menor que 5?

El propósito de esta lección es que los estudiantes tengan la oportunidad de practicar las ideas que tienen sobre los decimales, en cuanto a orden y equivalencia, para extender su trabajo a la adición y sustracción de decimales, usando símbolos. Posteriormente, se divide la clase en grupos y se les da una serie de problemas, los que pueden resolver en el orden que quieran. Luego de terminar la mitad de los problemas, se le asigna un problema particular a cada grupo para preparar y presentar a toda la clase. En este punto, los estudiantes no terminaron el resto de los problemas. Se les provee una lámina de papel, marcadores y cuadrículas de 10x10, que pueden cortar y colocar en el poster. Los estudiantes deben construir un amplio informe de su solución. Se explica que una presentación clara y buena, comunica no solo la respuesta, sino también cómo los estudiantes llegan a la respuesta. Las traducciones entre representaciones que se ponen en juego, en la serie de problemas dados, son las siguientes:

- De lo simbólico a lo gráfico y a lo verbal
- De una historia o problema real, a símbolos y a verbal
- De símbolos a símbolos y a verbal

Por su parte, Michaelidou, Gagatsis, y Pitta-Pantazi (2004), atendiendo a la importancia otorgada a los sistemas de representación, se plantean en su investigación interrogantes como los siguientes: ¿Pueden estudiantes de 12 años reconocer números decimales en diferentes sistemas de representación?, ¿pueden manejar con flexibilidad el concepto de número decimal dentro de un sistema de representación?, ¿pueden traducir con precisión conceptos decimales de un sistema de representación a otro?,

Los aspectos señalados inherentes a los significados del número decimal, tanto desde el punto de vista semántico como sintáctico, hacen que comience a ponerse en evidencia la gran complejidad que encierra el aprendizaje de esta clase de números.

1.5. El APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS DECIMALES

1.5.1 Errores y dificultades en los niños

Bernander y Clement (1985), elaboran un documento que trata sobre un catálogo de patrones de errores en cursos de aritmética elemental y de álgebra. El material para este catálogo fue obtenido de tres fuentes, en observaciones de clases de instructores y tutores en cursos de niveles "terapéuticos" de la Universidad de Massachusetts, investigaciones previas de instructores y tutores y en entrevistas clínicas focalizadas en conceptos algebraicos elementales de los estudiantes y sobre habilidades para resolver problemas. La intención de los autores es que este documento sea utilizado como elemento de investigación para instructores y tutores que enseñan estos conceptos. Entre los conceptos estudiados se halla un ítem destinado a números decimales en el que se describen los siguientes tipos de errores:

Errores sobre notación

a) Invirtiendo el Sistema Decimal

Error: Los estudiantes creen que las centésimas son más grandes que las décimas.

Ej.: 0.03 > 0.3, porque las centésimas son más grandes que las décimas

b) Fallas en el reconocimiento de decimales equivalentes

Error: los alumnos creen que agregar ceros al final de un número decimal, cambia el valor del número.

Ej.: 0.2 > 0.20, porque los estudiantes dicen que las décimas son más grandes que los centésimas.

Errores en operaciones con decimales

a) Convertir el número entero en un decimal

Error: Dada una lista de números decimales y números enteros, los estudiantes pondrán una coma delante del número entero, como en el siguiente ejemplo: 0.3 + 4.6 + 12 = convertirán el 12 en .12 antes de sumar.

b) Falla para reconocer decimales y números enteros como términos en una ecuación

Ej.: 3+x = 0.8. Dada una ecuación que contiene decimales y enteros, los estudiantes no pueden ver que tienen una combinación de términos, en este caso, que tienen que sustraer 3 de 8 décimas.

Centeno (1988), en el capítulo 9 (pp. 135-149) del texto *Números Decimales, ¿Por qué? Y ¿Para qué?*, menciona a diversos autores que a través de sus estudios confirman "la lentitud en la adquisición y dominio del concepto de número decimal". (p. 135). La autora se propone dar a conocer al maestro los aspectos del concepto de decimal que tienen mayor resistencia en la comprensión del alumno. Se describen errores tales como, errores relacionados con el concepto, escritura y operaciones de números decimales, entre ellos: valor de posición, errores relacionados con el cero, con el orden y con las operaciones.

En dicho capítulo cita seis niveles de errores que surgen de test aplicados por Brown (1981) a estudiantes sobre el nivel de comprensión adquirido sobre el tema "lugar de posición y números decimales".

Realiza un planteamiento sobre la importancia del conocimiento de los errores puesto que revelan la existencia de modelos implícitos erróneos con los que se pueden detectar las causas que impiden la evolución de un concepto. Describe las siguientes causas, "conocimiento insuficiente de las reglas de numeración decimal; conocimiento suficiente de los naturales, pero resistente al cambio de estatus; la forma en que se han presentado los decimales a los niños; teoremas implícitos que se fabrican los alumnos; aplicaciones a situaciones prácticas reales y más o menos familiares para los niños." (pp. 142,144). También realiza la distinción entre dificultad, conflicto, obstáculo y error y menciona los tres tipos de obstáculos estudiados por Brousseau.

Sirvent (2002), en su artículo *Períodos* manifiesta su preocupación por el escaso dominio que tienen los alumnos, que culminan la Educación Secundaria, de las operaciones en Z y en Q. A pesar de ser el bloque numérico, el más trabajado en dicho nivel. "Para la mayoría de los alumnos las expresiones decimales son todas iguales, se cogen de la calculadora tantas cifras decimales como indique el profesor y problema resuelto" (p.116). Manifiesta el especial desconocimiento de los alumnos acerca de los números irracionales, y como consecuencia desconocen la existencia de la expresión decimal no exacta; si bien algunos alumnos recuerdan la definición de número irracional no son conscientes que expresiones como π, e y $\sqrt{2}$ son estrictamente necesarias para expresar dichas cantidades como tales. Por ello es que sostiene la necesidad de prestar mayor atención a la relación entre la expresión decimal de un número racional y su expresión fraccionaria y evitar que dicha relación se convierta en un algoritmo, operativizado por una tecla de la calculadora, carente de contenido.

Vourgias, Vourgia y Elia (2003). En este artículo se han investigado representaciones de los números decimales y sus transformaciones con alumnos de 5to y 6to. grado de la escuela primaria. Se toma como base el concepto de representación de Kaput (1987). El instrumento utilizado consta de cuatro partes, cada una de las partes a su vez contiene cuatro cuestiones. En la primera parte las cuestiones están expresadas en forma de diagrama y los niños deben interpretar la conexión en forma simbólica y verbal. En la segunda parte se dan expresiones simbólicas y los niños deben interpretar la conexión en forma de diagramas y expresiones verbales. La tercera tiene cuestiones expresadas verbalmente y deben ser interpretadas simbólicamente y en forma de diagramas. La última parte contiene un ejercicio expresado en forma verbal; los niños deben resolver el ejercicio utilizando un diagrama o una expresión simbólica como ellos prefieran en el que deben plantear y resolver una resta con números decimales. Luego de realizarse el análisis de los datos se concluye lo siguiente:

- Hay una conexión no significativa en las respuestas sobre los diferentes tipos de representaciones (diagramas, simbólico, representación, representación verbal).
- La interpretación de las tareas de los niños del diagrama a la expresión simbólica y verbal presenta notable dificultad.
- De la expresión simbólica a la expresión verbal y al diagrama, los niños lo encontraron verdaderamente difícil, la interpretación en diagrama no resulta nada fácil para ellos.

Michaelidou, Gagatsis, y Pitta-Pantazi (2004). En este trabajo se examina la compresión del concepto de número decimal, en niños de 12 años. Se basan en el modelo que Janvier (1987) propone para la comprensión de un concepto matemático, reconocimiento y relación entre representaciones. Concretamente la investigación está orientada a dar respuesta a una serie de interrogantes vinculados íntimamente con la cuestión del reconocimiento, manejo y conversión de un número decimal en sus distintos sistemas de representación.

La investigación se desarrolló en tres fases. En la primera fase el test (A) se administró a 120 alumnos, con formato de opción múltiple con el propósito de examinar la habilidad de los estudiantes para reconocer y representar el concepto de número decimal dentro de una gama de representaciones dadas por segmentos, rectas, cuadrículas. El test B incluyó tareas de adición de números decimales. Algunos de los ítems fueron presentados exclusivamente en forma simbólica y otras tareas en rectas para examinar la habilidad de los estudiantes para pasar de la representación en la recta a una expresión simbólica y viceversa. El test C incluyó problemas que requerían del uso de números decimales. 60 estudiantes resolvieron el problema por el camino que deseaban y el resto fue instruido para resolver problemas utilizando la recta. En cuanto a los resultados obtenidos los autores manifiestan que han aplicado el análisis implicativo de Regis Gras que les permitió examinar no solo el nivel de dificultades de las tareas sino la relación entre las respuestas de los estudiantes en los tres cuestionarios. El porcentaje de éxito ha sido bajo en el reconocimiento de ítems y en la traducción entre ellos, lo que muestra que las representaciones de los números decimales no se hallan desarrolladas de manera suficiente y no son consistentes con un todo integrado. Se observó altos porcentajes de éxitos en representar el concepto de número decimal, utilizando la recta, el segmento y especialmente la cuadrícula, lo que se atribuyó a la instrucción en la que habitualmente se enfatiza la representación aislada. En cuanto al tipo de traducciones, en ambas presentaron dificultades, no obstante se observó más fácil el cambio de representación de la recta a la expresión simbólica que en el sentido inverso. En relación al rendimiento de las diferentes tareas se observaron problemas en el reconocimiento de las tareas de adición. Esto se dio porque las tareas presuponían una serie de traducciones de representaciones previas a la operación en sí misma. En cuanto a la resolución de problemas no se observaron diferencias significativas entre los estudiantes que resolvieron los problemas de manera libre y aquellos que utilizaron la recta numérica. Finalmente en cuanto al grado de compartimentalización o modularización se infiere del estudio que los estudiantes no han desarrollado una estructura cognitiva unificada concerniente al concepto de número decimal. Más aún, se observa una fuerte compartimentalización entre las tareas de los distintos test, ello demuestra que no hay coordinación entre reconocimiento, representación y traducción entre representaciones en los números decimales.

Steinle y Stacey (2004), realizaron un estudio a 900 estudiantes de diferentes escuelas de Australia desde el año 1995 a 1999. Alrededor de 3000 estudiantes entre 9 y 16 años completaron cerca de 10000 test y las respuestas individuales de los estudiantes fueron seguidas, en algunos casos por más de tres años. En el artículo se discute qué pasa con los estudiantes que mantienen un grupo de concepciones erróneas que generalmente resultan de la creencia de que un decimal que "se ve" más pequeño, es en realidad mayor. Se muestra como ejemplo de esta situación, un ítem donde se pide la comparación entre 4.45 y 4.4502. El razonamiento incorrecto que realizan es el siguiente: 4502 se ve más grande que 45, entonces 4.4502 es menor que 4.45

(generalizan la idea haciendo la comparación de las siguientes fracciones: 1/10000 es menor que 1/100, por lo tanto las diezmilésimas son mas chicas que las centésimas). Las autoras consideran este error interesante, porque es poco común y normalmente no reconocido por los profesores. Las autoras sostienen que los errores son sistemáticos y persistentes, no arbitrarios, por lo que se puede tener información sobre concepciones erróneas comunes sobre los decimales. Se establecen códigos para identificar grupos de estudiantes que tienen una concepción errónea particular. Algunos de los tipos que son presentados en este trabajo son los siguientes:

S1: Este código hace referencia a un *pensamiento focalizado en el denominador y el pensamiento lineal sobre el valor posicional del número.* Estos estudiantes consideran que 0.73 es más pequeño que 0.6 porque focalizan el tamaño en los denominadores (generalizan la idea que 1/100 es menor que 1/10). Estos estudiantes interpretan los decimales en términos de valor posicional y crean una falsa analogía.

S3: Abarca dos tipos de pensamiento. Se refiere a estudiantes con *pensamiento recíproco*, ya que hacen una analogía entre el hecho que si $1/73 < 1/6$, entonces concluyen que $0.73 < 0.6$, mientras que un estudiante con *pensamiento negativo* hace una analogía con $-73 < -6$. Claramente estos estudiantes tratan la parte decimal como si fueran números enteros. Helme y Steinle (2001) explican estos tipos de pensamientos en términos de las metáforas del espejo.

Otros-S: Aquí se colocan a los estudiantes que eligen decimales con menor cantidad de dígitos como el más grande, pero que no siguen exactamente el patrón S1 y S3. Son inconsistentes en la aplicación del pensamiento S1 o S3, o tienen una concepción errónea no identificada, o usan una combinación de ideas.

A2: Los estudiantes codificados como A2 responden correctamente sobre todos los tipos de decimales, excepto uno. Se los cataloga como estudiantes que usan *pensamiento de dinero*. Creen que 4.4502 es igual a 4.45 (Estos alumnos redondean o truncan el número decimal a dos posiciones decimales, y tratan los dígitos de la derecha del punto decimal como números enteros Si se realiza una indagación más profunda sobre estos decimales la mayoría responde que $4.4502 < 4.45$ (tal como se ha explicado precedentemente). Las investigadoras concluyen, en términos generales, que la naturaleza del pensamiento matemático de los estudiantes, en cierta medida, determina como progresa su pensamiento. Las mediciones muestran que A2 es la “mejor” de las concepciones erróneas que tienen los alumnos, seguido por S1 y luego S3. Los estudiantes identificados como A2 muestran una fuerte probabilidad para movilizar el conocimiento experto.

En los niveles más básicos los resultados demuestran que hay diferencias cualitativas y cuantitativas significativas entre, el progreso de los estudiantes y las diferentes concepciones erróneas. Los datos demuestran que la naturaleza del pensamiento matemático de los estudiantes, en cierta medida, determina como progresa su pensamiento. Que el progreso que realizan los estudiantes depende de dos cuestiones, de la naturaleza de las concepciones erróneas y del grado en que esas concepciones son sostenidas. Se podría esperar que tales fenómenos impliquen concepciones erróneas en otros tópicos.

Steinle (2004). En su tesis doctoral informa sobre un estudio longitudinal realizado a más de 3000 estudiantes acerca de la comprensión sobre la notación decimal. Se aplicó en una muestra de 12 escuelas en Victoria (Australia). Se aplicaron casi 10000 test en un período de 4 años. El test diagnóstico aplicado, test de comparación decimal, fue elaborado extendiendo y refinando otros test de la literatura, para identificar en los estudiantes 12 ideas erróneas sobre notación decimal.

La autora utiliza el término número decimal para referirse al número (en base 10), que se escribe con punto decimal, describe la forma en que el número está escrito y no al número abstracto en sí mismo.

El 30% de los estudiantes de 6° grado y el 70% de 10° grado demostraron suficiencia en estas pruebas; y el 25% entre los grados 7 y 10, eligieron el decimal con la menor cantidad de dígitos como el número más grande. A pesar de su alta prevalencia, este comportamiento no es bien conocido entre los profesores.

Se investigaron 3 fenómenos: persistencia, jerarquía y regresión. Las concepciones erróneas más persistentes son aquellas que tratan la parte decimal de un número como un número entero. La jerarquía de las concepciones erróneas fue determinada considerando la tasa relativa sobre la experiencia en la siguiente prueba: la jerarquía es diferente para estudiantes de primaria y de secundaria.

El 20% de los estudiantes se vieron involucrados en el proceso de regresión; es decir pudieron responder correctamente a un test sobre decimales, pero no pudieron hacerlo en una instancia posterior, lo que proporciona la prueba de que muchos estudiantes estarían recibiendo una formación más amplia que profunda, esto es no tratar la superación de concepciones erróneas. (Ejemplo: alumnos que siguen algoritmos de comparación de números decimales, ocurre que regresan a un concepto erróneo que tienen latente). Ello le permite hipotetizar a la autora que algunas concepciones erróneas se deben la intervención de la nueva enseñanza. En particular en lo referente a la enseñanza se rescatan las siguientes conclusiones:

Se ha demostrado que en la mayoría de los estudiantes persisten concepciones erróneas cuando pasan de un grado a otro en el transcurso de la escolaridad, y eso parece claro dado que la enseñanza que recibe la mayoría de los estudiantes es inapropiada para remover dichas concepciones. Los docentes necesitan examinar de manera crítica los textos y las actividades que utilizan en sus clases para determinar si los estudiantes con concepciones erróneas pueden superar esos problemas. Más aún los docentes necesitan reconsiderar sus creencias implícitas, deben poner énfasis en la estructura aditiva que se halla en la base del sistema de numeración decimal. Cuando se usan números decimales en un contexto que es considerado bueno para la enseñanza, hay que tener cuidado cómo se da ese decimal. El contexto más común es el de la medida donde se utilizan múltiplos y submúltiplos y el problema radica en que el número se le expresa con un tipo de unidad (30,43 m), siendo que la parte entera de ese número remite a un tipo de unidades y la decimal a otro. (30m y 43 cm). Ello no significa no utilizar este contexto, por el contrario, lo que se pretende es una buena interpretación de la representación y por supuesto el uso de otros contextos. Los docentes en general piden el redondeo con dos decimales, ello puede reforzar la idea que los decimales tienen una forma discreta y en consecuencia entre dos números dados (43,52 y 43,53) no existe otro. Estas, como otras cuestiones de esta índole sugieren que se debe reforzar el trabajo con el valor posicional de los dígitos. El uso de la recta numérica es fuertemente recomendado puesto que es un modelo representacional que es potencialmente fuerte para discutir la densidad de los decimales.

Merenluoto (2004). Se trata de un estudio piloto aplicado a 47 estudiantes Finlandeses de la escuela secundaria en los grados 7-9 y donde se determinaron algunos perfiles de tipo cognitivo- motivacional en relación al tema fracciones y números decimales. El procedimiento comenzó solicitándole a los alumnos que completaran un cuestionario con su propia estimación de cómo han comprendido las matemáticas enseñadas en la escuela, su auto-eficacia, seguridad y tolerancia en problemas matemáticos difíciles. En la segunda fase los estudiantes debían completar 26 preguntas sobre el concepto de número racional, clasificación de números, identificación de distintas representaciones de números, la densidad de los números en la recta y cálculos básicos.

El nivel de logro fue estimado por el profesor en una escala de 5 a 10, además de analizar las respuestas de manera cualitativa. También fueron medidas la tolerancia a la ambigüedad y la auto-estima del estudiante en matemáticas.

Los resultados mostraron que la mayoría de los problemas se encontraron con los números racionales. Se observó que los estudiantes tienen una alta tendencia a realizar transferencias erróneas de los números naturales al dominio de los números racionales. Los mayores problemas se encontraron con los números decimales y especialmente con el manejo de fracciones.

Las altas correlaciones entre los factores cognitivos y motivacionales muestra la importancia de considerar, para el logro del cambio conceptual, dicho aspecto motivacional en la investigación. Pero también se hace referencia a la compleja interacción de estas variables en el aprendizaje. El nivel de logro de los estudiantes en matemática tiene una significativa relación entre, la alta sensibilidad a las demandas cognitivas y la alta tolerancia a la ambigüedad. Como ha ocurrido con otros resultados empíricos con niveles superiores de escuela secundaria, la comprensión operacional moderada de los conceptos tiene una tendencia a evitar que los estudiantes sean conscientes del conflicto cognitivo.

Los resultados también confirman que en los intentos de enseñar para el cambio conceptual, es esencial considerar la distancia cognitiva entre los conocimientos previos de los estudiantes y el nuevo contenido a ser aprendido.

Vamvakoussi y Vosniadou (2004). Las autoras del artículo se desempeñan en el Departamento de Historia y Filosofía de las Ciencias (Laboratorio de Ciencia cognitiva) de una universidad nacional de Atenas (Grecia). En este artículo postulan que la aproximación al cambio conceptual del aprendizaje puede ser aplicado a las matemáticas, atendiendo a la particular naturaleza de este conocimiento. Se informa sobre un estudio empírico, en el que se investiga la comprensión de propiedades algebraicas de los números racionales en noveno grado de la escolaridad elemental, desde la perspectiva de cambio conceptual. Concretamente, muestran que los conocimientos previos sobre los números naturales, en particular la noción de discretitud, es una noción que limita en los estudiantes la comprensión de la densidad.

Estas autoras sostienen que el "enfoque para el cambio conceptual" es relevante para el aprendizaje de las matemáticas. Aunque por su naturaleza las matemáticas no requieran de un cambio radical de conceptos, se trata de favorecer y enriquecer los conocimientos previos. Desde esta perspectiva argumentan que hay mas desarrollo de los conceptos matemáticos, que una simple suma de ellos.

Cuando describen el rol del conocimiento previo en el aprendizaje de los números, destacan también que los números naturales se encuentran en el camino de la comprensión de los números racionales y que se generan numerosas concepciones erróneas tanto en los aspectos conceptuales como operacionales de los números. Por otra parte, dejan explícitas las condiciones requeridas para desarrollar el concepto de densidad. El concepto de número racional unifica los de números decimales, fracciones y enteros; para lo cual es necesario entender las distintas representaciones de los números racionales, como se relacionan, como así también las interrelaciones entre los subconjuntos de los números racionales. Afirman que esta comprensión generalmente es muy difícil de lograr. Por otra parte, los niños pueden inferir que hay infinitos números naturales basados en que par cada número natural hay un siguiente. Más tarde, sostienen que entre dos números racionales hay infinitos números, porque pueden encontrar siempre otro entre dos dados. Este es el camino de aproximación al infinito actual, de una manera potencial. Pero conocer el infinito potencial, no alcanza para asegurar que se comprenda la densidad.

En este punto, las investigadoras afirman que el desarrollo del concepto de densidad es un caso de cambio conceptual en el aprendizaje de la matemática. Desde el marco teórico desarrollado por Vosniadou (1994,2002), sustentan dos supuestos:

- Al asumir que el carácter discreto de los números naturales limita la comprensión de la estructura de los racionales, se espera que los estudiantes generan errores que reflejen ese supuesto.
- Que la comprensión de la densidad es un proceso lento y gradual. Por lo que se espera diagnosticar niveles intermedios de comprensión, que reflejen el esfuerzo de los estudiantes para asimilar la nueva información en sus estructuras previas. Se espera que los estudiantes que pertenecen a niveles intermedios de comprensión, tengan concepciones erróneas que puedan ser explicadas como modelos sintéticos.

Los participantes del estudio fueron 16 estudiantes de noveno grado, estudiantes de aproximadamente 15 años y con diferentes niveles de rendimiento en matemáticas.

La participación fue voluntaria. Todos los estudiantes fueron entrevistados individualmente. El cuestionario incluye 2 ítems sobre propiedades algebraicas de los números reales, 4 sobre densidad y 5 ítems sobre cuestiones preliminares con el propósito de facilitar algunas cuestiones previas.

Los resultados del estudio, vinculados a la propiedad de densidad, confirmaron que la tarea de determinar el número de racionales entre otros dos dados era una tarea bastante exigente, y que el desarrollo del concepto de densidad es un proceso gradual como era esperable. Se elaboraron 5 categorías de respuestas que corresponden a distintos niveles de comprensión, ellas van desde las repuestas mas ingenuas a las más sofisticadas (discretitud ingenua, discretitud avanzada, discretitud-densidad, densidad ingenua y densidad sofisticada). 9 estudiantes se ubicaron en la primera categoría, 2 en la segunda, 4 en la tercera, 1 en la cuarta y ninguno en la última. El supuesto de discretitud aparece claramente en las dos primeras categorías. Los estudiantes en la 3ra categoría discretitud-densidad, dan respuestas aparentemente incompatibles, en el sentido que no responden del mismo modo cuando los números decimales tienen el mismo número de dígitos que cuando son distintos. La alumna que se ubicó en la categoría densidad ingenua, si bien ya había desaparecido el carácter discreto, la densidad solo era reconocida dentro de un tipo de representación (o fraccionaria o decimal).
Los resultados confirman la hipótesis que la comprensión de la densidad es un proceso lento, gradual y condicionado por el presupuesto de la discretitud. Aumentar la sensibilidad de los educadores de matemáticas, sobre los problemas del cambio conceptual es un primer paso y puede llegar a explicar porqué los estudiantes tienden a olvidar algunas cosas. Para esto es importante crear entornos de aprendizaje donde los estudiantes puedan expresar y elaborar sus argumentos, de modo que puedan ser conscientes de sus creencias. Lo que se requiere de una reorganización de las estructuras de los conocimientos previos, donde no se pueden esperar resultados inmediatos, incluso después de un cuidadoso diseño de instrucción.

Gagatsis, Deliyianni, Elia y Panaoura (2010). Estos autores investigan la naturaleza del desarrollo de la flexibilidad representacional, en estudiantes de escuela primaria y secundaria. Lo hacen sobre la adición de números decimales, con el propósito de localizar perfiles de pensamiento de los estudiantes e identificar sus características. Esto es, buscar una posible tendencia de desarrollo en el pensamiento representacional de los estudiantes.

El estudio se basa en el supuesto teórico que hay diferentes perfiles de pensamiento representacional flexible de los decimales, y que éstos pueden representar distintos niveles progresivos de comprensión.

La investigación se llevó a cabo con 1700 estudiantes, correspondientes a 5to. y 6to. grado de primaria y 7mo. y 8vo. de la secundaria. El test contiene 19 ítems de representación múltiple y 4 tareas de resolución de problemas.

Las tareas de flexibilidad de representación-múltiple difieren según tres dimensiones:

- Tipos de transformación en la representación
- Los modos de representación
- El valor de los dígitos

Con respecto a las transformaciones se dieron tres tipos de tareas: de reconocimiento, de tratamiento y de conversión. En lo que refiere a los modos de representación se presentaron cuatro tipos de tareas: con la recta numérica, con áreas rectangulares, con áreas circulares y de representación simbólica. Para el valor de los dígitos, tareas en donde ambos sumandos son décimas o centésimas, y tareas donde los sumandos incluyeron décimas y centésimas respectivamente.

Los problemas se diferenciaron por los modos de representación. Se dieron de dos tipos: verbal y diagramas.

Los resultados de la investigación indicaron cuatro niveles jerárquicos de flexibilidad:

- Nivel de representación temprana
- Nivel simbólico
- Nivel transicional de representación-múltiple
- Nivel representacional- múltiple

El contraste más significativo se dio entre el Nivel Representacional Temprano y el Nivel Representacional Múltiple. Este hallazgo puede usarse en la práctica para facilitar la organización progresiva de las actividades de aprendizaje sobre los números decimales por niveles de dificultad. Los hallazgos de este estudio, en el dominio de los números decimales, están generalmente en línea con el perfil de las respuestas de los estudiantes para la flexibilidad representacional, en el dominio de la adición de fracciones. Más aún, el nivel de Representación-Múltiple Transicional, se ha dividido en dos clústeres, el simbólico y el de diagramas basado sobre el comportamiento de los estudiantes sobre la conversión de tareas. Los estudiantes en ambos clústeres muestran un rendimiento moderado en reconocimiento y tareas de resolución de problemas y alto rendimiento en el tratamiento de las tareas. Por un lado, los estudiantes en el clúster simbólico tienen un rendimiento pobre en la conversión de tareas desde un diagrama a una ecuación y rendimiento moderado en el sentido contrario. Por otro lado, en el clúster de diagramas exhiben bajo rendimiento en la conversión de tareas desde una ecuación a un diagrama y moderada en la conversión desde un diagrama a una ecuación.

El clúster simbólico en la adición de fracciones se corresponde con el Nivel Simbólico en la adición de números decimales.

También se ha investigado la relación entre niveles de jerarquía y grado escolar. La flexibilidad representacional mejora dentro de la misma etapa educativa. Particularmente, se desarrolla en primaria (5to. a 6to. grado) y en la educación secundaria (7mo a 8vo. Grado).

Los niveles de flexibilidad representacional identificados en los estudiantes reflejan cuatro niveles de pensamiento ordenados jerárquicamente en la suma de números decimales. No obstante, los hallazgos mostraron que la flexibilidad representacional fue independiente de la etapa educativa, ya que no se desarrolló desde la educación a la secundaria. Los resultados muestran que la distribución de los niveles jerárquicos es similar en la escuela primaria que en la secundaria, lo que fue un resultado no esperado.

1.5.2 Conocimiento sobre decimales en futuros profesores

Zazkis y Khoury (1993), investigan como los estudiantes para maestros de la escuela elemental, resuelven problemas relativos a conceptos de valor posicional y representaciones decimales de números racionales. Se examinan los problemas de los estudiantes en las estrategias de solución y la ocurrencia de errores sistemáticos. En este estudio las autoras citan a Matz (1980) rescatando dos tipos de errores, " a) Uso inapropiado de una vieja regla en una situación nueva; b) adaptación incorrecta de una regla conocida para resolver un problema nuevo".

Las autoras afirman que los conceptos de valor posicional y representación decimal de los números racionales son componentes esenciales del currículo de matemáticas en la escolaridad elemental. Este estudio evalúa la comprensión de los estudiantes para maestros de la escolaridad elemental del concepto de valor posicional a través de la discusión de estrategias sistemáticas que usan para construir representaciones "decimales" de fracciones en sistemas de numeración con bases distintas a la base 10. Los alumnos manifiestan tener conocimiento previo sobre la representación decimal de fracciones en base 10 y sobre números enteros expresados en otras bases distintas de la base 10. De 59 estudiantes solo 12 usaron estrategias correctas en la conversión de representaciones no decimales en representaciones decimales.

El foco del análisis se puso en la descripción de las estrategias usadas independientemente del tipo si se trataba de extrapolación de técnicas o concepciones erróneas. Se distinguieron las estrategias correctas de las incorrectas. La representación que se analiza es la del número 12.34 en base 5.

<u>Las estrategias correctas se dividieron en dos tipos: C_1 y C_2</u>

C_1- *Estrategia de conversión escrita en columna*

5	1 .	1/5	1/25	5^1	5^0 .	5^{-1}	5^{-2}	5	1 .	0.2	0.04
1	2 .	3	4	1	2 .	3	4	1	2 .	3	4

C_2- *Estrategia de notación expandida* (descomposición de la notación en función de las potencias de la base elegida)

12.34_{cinco}= 1x5+ 2x1 + 3x(1/5)+ 4x(1/25)=

$12.34_{cinco}= 1x5^1+ 2x5^0 + 3x\ 5^{-1}+ 4x5^{-2} =$

Esta opción solo fue desarrollada por uno de los estudiantes.

<u>Las estrategias incorrectas se dividieron en varios tipos:</u>

IA: Estrategia simétrica

12.34_{Cinco}= 1x5+2x1+3x0.5+4.0.25= 7 + 1.5 +1 = 9.5

5	1 .	0.5	0.25
1	2 .	3	4

La posible explicación de este hecho puede asociarse a la concentración simétrica del valor posicional con números en base 10. Ello hace que los alumnos hagan asociaciones como en espejo y que por eso se permitan colocar, por ejemplo 0.5 como imagen de 5 y 0.25 como simétrico de 25.

IB: Estrategia de sustitución de la fracción decimal

5	1	.	0.5	0.05
1	2	.	3	4

Estos alumnos interpretan el valor posicional del primer dígito a la derecha del punto como 1/b igual que en IA, pero el segundo dígito es interpretado como b/100.

Este error puede ser consecuencia de la ausencia de trabajo con potencias en bases distintas a la base 10.

IC: Estrategia de sustitución de la fracción común

$0.24_{seis} = 2x\ 1/6 + 4\ x\ 1/60$

Aquí los alumnos interpretan bien el primer dígito a la derecha de la coma, pero interpretan el valor posicional del dígito siguiente como 1/(bx10) y así sucesivamente.

ID: Estrategia sobre la ignorancia de la parte fraccional

$12.34_{Cinco}= 7.34$, entonces $12_{Cinco} = 7_{10}$

En esta situación, se opera bien con la conversión de la parte entera pero omiten el trabajo necesario con la parte fraccionaria.

IE: Estrategia de separación y unión

$12.34_{cinco} = 7.19_{10}$, entonces $12_{cinco} = 7_{10}$ y $34_{cinco} = 19_{10}$

La conversión es realizada teniendo en cuenta ambas partes por separado, es decir se convierte la parte entera por un lado, del mismo modo se hace con la parte decimal y luego se "los pega" como si esa fuese la relación. Una de las razones que produce este error es la forma en que se leen, en general, los números con coma.

IF: Estrategia simetría-punto

$12.34_{Cinco}= 1x5 +2x1+3x0.1+4x0.5=$……

Esta estrategia, en lo referente al primer valor posicional luego de la coma es un error del tipo descripto en IA, y luego se asocia cada potencia de b con 0.b, 0.0b, 0.00b,….

IG: Estrategia negativa

$12.34_{cinco}= 1x5+2x1+3x (-5)+4x(-25)= -108$

La estrategia utilizada parece provenir de la no distinción entre ($-b^n$) con b^{-n}.

IR: Error de lectura

12.34_{Cinco} como 1x5+2x1+34/25 y 0.24_{seis} como 24/36

En el caso en que la parte fraccionaria tenga más de un dígito, consideran la parte fraccionaria como un todo, asignándole como potencia de la base el mayor exponente que corresponda según el número de dígitos que allí intervienen.

A modo de conclusión, se puede destacar que varios estudiantes tienen dificultades para extender el concepto de valor posicional de la parte fraccionaria de un número en una representación no decimal.

Este estudio provee de indicadores sobre la compresión que tienen los futuros maestros sobre la representación de un número racional y los conceptos relacionados con el valor posicional. En el trabajo realizado demuestran insuficiente comprensión sobre la estructura del sistema de numeración y en particular sobre la representación de números racionales.

Putt (1994). En este artículo se refiere entre otros estudios fundamentalmente a la construcción de los números decimales por los estudiantes para profesor. Estudiantes para profesor en Australia y EE.UU respondieron a un cuestionario en el que debían ordenar 5 decimales y explicar como lo hicieron. Se describieron las explicaciones en 11 categorías, clasificadas según el tipo de respuestas incorrectas. Se encontraron patrones de respuestas y similitudes con resultados de estudios previos, en particular evidencias de 3 reglas halladas previamente. En este artículo el autor plantea que en estudios previos de matemáticas en USA, los estudiantes de los niveles medio y secundaria tienen dificultades en aquellos ítems que involucran orden en los números decimales, destacando que otros autores que investigan sobre el aprendizaje de las fracciones decimales indican que hay problemas con el conocimiento conceptual de los números decimales. La mayoría de los niños apelan a una comprensión instrumental, desconociendo la razón de la reglas de aplicación. La comprensión relacional que involucra relaciones entre concepto y comprensión de por qué una regla tiene su razón de ser no es trabajada. Como consecuencia los niños exhiben concepciones erróneas sobre los decimales como se indican en el estudio de la NAEP: Investigaciones que involucran orden en los números decimales con estudiantes de primaria y secundaria en

Francia, Canadá e Israel, investigaron la existencia y frecuencia de uso de las tres siguientes reglas implícitas identificadas por Sacksur-Grisvard y Leónard (1985, p. 161)

Regla 1: El número más pequeño es el que su parte decimal es un número entero más pequeño.

Regla 2: El número más pequeño es el que tiene más dígitos en la parte decimal

Regla 3: El decimal más pequeño tiene un cero inmediatamente después del punto decimal.

La regla aplicada con más fuerza es la 1, observada en distintas investigaciones.

Varios investigadores (Putt, 1994, p. 507) desarrollaron perfiles de conocimiento sobre la comprensión, en el área de números racionales, en 218 profesores de la escuela elemental. Concluyeron que muchos profesores de la escuela elemental no conocen suficiente matemáticas, y que solo una minoría de ellos podría hacer matemáticas y explicar sus soluciones de una manera pedagógica aceptable. Estas cuestiones ha llevado al autor de este artículo a examinar el conocimiento de los estudiantes para maestros en la mencionada área.

El autor menciona a una serie de investigadores y el tipo de problemas que ellos hallaron en el conocimiento de los estudiantes sobre números decimales. Así Lester (1984) encontró que el 50% de los profesores para maestros en formación (N>600) eran incapaces de alcanzar el 75% sobre un test de competencias aritméticas y mostró que los mayores y más frecuentes fallos se hallaban en torno a fracciones y números decimales. En un test sobre el conocimiento del concepto de decimal, Thipkong y Davis (1991) clasificaron en la categoría baja el 45% de los 65 estudiantes para profesor investigados. Destacaron la importancia de identificar las posibles debilidades en el conocimiento del contenido en los estudiantes para maestros así como los pasos que puedan tomarse para prevenir o corregir concepciones erróneas antes que influyan de manera adversa en el aprendizaje de los estudiantes.

Como se ha anticipado este estudio informa sobre las dificultades de los estudiantes para maestros en secuenciar decimales y el pensamiento que hay detrás de sus respuestas.

El estudio se aplicó a estudiantes para profesores de nivel primario y que comenzaban una asignatura denominada matemática para maestros. A ellos se les planteó la siguiente cuestión:

Colocar en orden de más pequeño a más grande:

0.606 0.0666 0.6 0.66 0.060

9 de los 29 estudiantes respondieron bien, además 10 tipos de respuestas diferentes fueron obtenidas por los 20 estudiantes restantes. Con estos resultados el autor decide investigar, a) la ocurrencia de la respuesta mencionada y otras respuestas entre estudiantes para profesor de primaria y escuela media y b) el razonamiento que hay detrás de cada respuesta, correctas e incorrectas, dadas por los estudiantes. Lo hace con grupos de estudiantes para maestros, para profesores de enseñanza media, y también toma grupos de EE. UU junto a los de Australia.

Como síntesis obtiene que el porcentaje de resultados incorrectos es alto en todas las cohortes. El 39% de los estudiantes Australianos después de 3 años de cursar el programa para profesor todavía tienen problemas para ordenar números decimales.

Con respecto a las explicaciones, las correctas fueron organizadas en 11 tipos de estrategias para ordenar. Las implicaciones para la instrucción y la investigación que el autor describe lo sintetiza en lo siguiente: La confusión de la comprensión de los estudiantes sobre decimales y fracciones en la primaria superior y en los primeros años de la escuela media, y los niveles de formación para profesores requiere de instrucción focalizada en el desarrollo conceptual, con vínculos concretos o representaciones “pictoriales” con expresiones orales y la escritura de símbolos para decimales. El modelado de los decimales utilizando materiales concretos o representaciones pictoriales y mostrarlos en una calculadora debe permitir a los estudiantes hacer conexiones de equivalencias entre, por ejemplo, 7 décimas, 70 centésimas y 700 milésimas, ya sea en forma fraccionaria o decimal, por ej. 0.7=0.70=0.700; y evitar que los estudiantes confundan el número de posiciones después del punto decimal con el tamaño del decimal. Permitiendo a los estudiantes manipular modelos concretos y pictoriales, tienen la oportunidad de realizar una construcción significativa, representaciones mentales personales sobre los decimales.

Socas (2001), sostiene que “La escritura decimal de los números ha producido confusiones entre lo que es un número decimal y lo que no es un número decimal, identificando más al número decimal por su escritura decimal que por sus propiedades intrínsecas, lo que ha originado cierta ambigüedad entre la escritura y el número decimal, de tal manera que decimal está asociado a números con comas en contraposición al número entero o número sin comas; esta acepción del término decimal es origen de diferentes errores” (p. 298-299).

Una clara ilustración de ello es la afirmación que el mismo Socas hace a través de un estudio, realizado durante los cursos 1993-97, en el ámbito de la formación del profesorado de Matemáticas en la educación secundaria. En ese estudio se pedía que los alumnos respondieran, al cuestionamiento sobre una lista de expresiones numéricas si representaban o no a un número que perteneciera a algunos de los conjuntos numéricos que se le indicaban: Naturales, enteros, decimales, racionales, irracionales y reales (N, Z, D, Q, I y R). En este estudio detectaron dos tipos de situaciones, en relación a los números decimales;

1. *“Identificación de un número decimal como sinónimo de número real”* (tendencia expresada por la mayoría)
2. *“identificación del número decimal como número expresado mediante una escritura numérica con comas”* (tendencia de una minoría)

La tendencia parece revertirse para la segunda situación cuando se trata de alumnos que están formándose para maestros.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K., y Bana, J. (2001). Estas autoras investigaron a estudiantes para profesor de la escuela elemental sobre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido sobre números decimales. Los futuros profesores completaron un test de comparación, incluyendo ítems que podrían presentar dificultad para los estudiantes. Acerca del 80 % de la muestra testeada por los expertos, indicaron que una proporción significativa de los profesores en formación tienen inadecuado conocimiento del contenido de los decimales. Confusión sobre el tamaño de un número decimal en relación al cero, fue una significativa e inesperada dificultad, encabezando las preocupaciones sobre la naturaleza de la fragmentación del conocimiento de los profesores en formación. La mayoría de los estudiantes tienen conciencia sobre las concepciones erróneas en los niños, *largo es mayor*, pero tienen poca conciencia sobre la concepción errónea, *corto es mayor*. Las explicaciones de los estudiantes para profesor sobre las razones que los niños pueden tener dificultad es buena. Identificando aspectos que hacen difícil la comparación, pero son menos capaces de explicar las causas de dicho conflicto. Los resultados puntualizan la necesidad en la formación de profesores de poner énfasis en el conocimiento del contenido que integre diferentes aspectos del conocimiento del número, y conocimiento del contenido pedagógico que incluya una exhaustiva comprensión de las dificultades comunes.

En este estudio se investigó el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido en los estudiantes para profesores de la escuela elemental. Las autoras eligen focalizar sobre los números decimales ya que es reconocido por mucho tiempo como una significativa fuente de dificultades para el aprendizaje y la enseñanza. Hay evidencias que los mismos docentes tienen dificultades con los números decimales. Existen algunas variaciones en la dirección del conocimiento del profesor, que han sido descritas, pero muchas investigaciones acuerdan que el conocimiento del contenido y una comprensión sobre el aprendizaje y el pensamiento de los estudiantes son aspectos críticos.

Las autoras manifiestan que el rol fundamental del conocimiento del contenido de los profesores en el aprendizaje de las matemáticas, fue fuertemente estudiado y publicado por Ma (1999), haciendo un estudio comparativo sobre China y U.S, con profesores de la escuela elemental. Se argumenta que la enseñanza efectiva está basada sobre la comprensión profunda de la matemática fundamental. Es decir, una profunda y bien conectada comprensión de la matemática elemental que incluye comprensión de cómo cada tópico se ajusta en torno a la estructura conceptual de la disciplina, así como la relación entre tópicos elementales e ideas matemáticas conceptualmente más avanzadas. Este conocimiento permite a los docentes abarcar desde una amplia variedad de áreas conceptuales conectadas – *knowledge packages*- para ayudar a los estudiantes a comprender nuevas ideas. El estudio de Ma contribuyó a un gran cuerpo de investigaciones que indicaron que la mayoría de los estudiantes y profesores en ejercicio tienen una comprensión empobrecida de la mayoría de los conceptos matemáticos y procesos que se requieren para enseñar. Informes sistemáticos reclaman que los cursos de educación para profesores no atacan suficientemente el problema. (Cockroft, 1982; Willis, 1990).

Las autoras justifican la elección del tópico números decimales para abordar su estudio en principio, por dos razones:

1) Por ser reconocido por mucho tiempo como fuente significativa de dificultades en su aprendizaje y enseñanza.
2) Porque existen evidencias que los mismos profesores tienen dificultades con los decimales

Este estudio investiga, el Conocimiento del Contenido (CK) y el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) sobre decimales, en estudiantes para profesor en la escuela elemental. El estudio está orientado por los siguientes interrogantes, los dos primeros relativos al CK, y los dos últimos al PCK.

- ¿Cuánto conocen los estudiantes para profesor sobre la numeración decimal?
- ¿Qué alcance tienen los estudiantes para profesor sobre la sensibilidad de sus propias dificultades en la numeración decimal?
- ¿Qué piensan los estudiantes para profesor sobre las dificultades en la comparación decimal de los estudiantes?
- ¿Cuáles son las características de las explicaciones de los estudiantes para profesor sobre las dificultades de los estudiantes?

La muestra fue de 553 estudiantes para profesor de la escuela elemental de 4 universidades en Australia y Nueva Zelandia. Se llevó a cabo con profesores en formación, también se incluyeron 25 profesores en prácticas, estos no eran estrictamente profesores en formación, puesto que tenían alguna experiencia en el campo.

Todos los participantes completaron el test de comparación (DCT). La tarea consistió en permutar el número mayor entre parejas de números decimales. Este test fue utilizado como un indicador fiable y rápido sobre la comprensión de la numeración decimal. Para finalizar el test los estudiantes de las universidades A, B y C realizaron los ítems de comparación, donde debían explicar por escrito las dificultades encontradas.

Las autoras justifican la utilización de este procedimiento por dos razones:

1) Investigar las ideas de los estudiantes para profesor sobre el dominio de los niños en el tema.
2) Como un instrumento metodológico para identificar si los estudiantes para profesor reconocen cuándo sus propias comprensiones son erróneas e incompletas.

Los datos fueron recolectados por docentes voluntarios de las universidades. En dicha recolección, se presentaron algunas variaciones. Por un lado los estudiantes para profesor (EpP) de la universidad D no contestaron los ítems con asterisco (que pedían explicaciones de las dificultades), en otra universidad un grupo completó el cuestionario, pero los ítems con asteriscos los trabajaron en una sesión.

Por ejemplo en la universidad A solo fue testeado un año de EpP, de los cuatro años que corresponden al programa para la escuela elemental. Ello fue un intento de investigar separadamente los resultados de los EpP de acuerdo al escenario de su curso.

La intención de este artículo no es relatar el rendimiento de la instrucción, sino mostrar un cuadro general de las interpretaciones de los EpP sobre los decimales.

Las autoras exploraron el CK y el PCK en EpP para la escuela elemental. Los resultados los resumen en recomendaciones para la formación de profesores.

<u>Sobre el CK</u>

Encontraron que el 80% de los EpPse pueden considerar como expertos en numeración decimal. Dos dificultades fueron identificadas principalmente:

a) El 13% comete errores cuando comparan un número decimal con el cero.
b) Una pequeña proporción mostró evidentes errores sobre "**corto es más grande"** (el número cuya escritura decimal es más corta es mayor)

Analizando los errores en forma conjunta, estos errores indican que la mayoría de los EpP no entienden la relación entre decimales, número entero, fracciones, cero y números negativos. Solo el 57% de los EpP dijeron que los niños pueden tener dificultades con los ítems del tipo que ellos mismos hicieron mal, indicando que una considerable proporción de los EpP no sospecharon que ellos habían cometido errores. Este fue particularmente el caso de los que cometieron errores del tipo "**corto es más grande".**

<u>Sobre el PCK</u>

Teniendo en cuenta el punto de vista de Shulman (1986) sobre cómo entienden los profesores las concepciones y concepciones erróneas de los estudiantes, las autoras examinaron el conocimiento de los EpP sobre las dificultades de los alumnos, y la naturaleza de las explicaciones que daban. EpP, demostraron un alto grado de conciencia sobre las concepciones de "más **largo es más grande",** pero se vieron pocas evidencias que los EpP tuvieran conciencia sobre las concepciones erróneas sobre "más **corto es más grande".**

Los resultados discutidos, además de indicar que por lo menos 1 de cada 5 EpP, en este estudio, no tienen un conocimiento bien integrado sobre la numeración decimal, supone el riesgo asociado de transferir sus propios errores a los estudiantes. Evidencia indirecta de este riesgo está dada por la variación sustancial de las destrezas entre clases de niños de grados 5 a 10, informados por Steinle y Stacey (1998) y la agrupación de concepciones erróneas con profesores particulares. A pesar de las grandes variaciones dentro y entre universidades de los conocimientos previos de los EpP sobre los decimales, el estudio no fue capaz de ligar los resultados con la enseñanza en cada universidad en particular. No obstante, las autoras fueron capaces de identificar áreas de dificultades comunes a todas las universidades. El test permitió ver que estas concepciones erróneas se dan porque hay un conocimiento integrado pobre sobre los conceptos fundamentales de número; una cuestión fuerte para la formación de los profesores es poner esfuerzo para desarrollar en los EpP, una comprensión bien conectada sobre decimales, fracciones, y enteros, incluyendo el cero.
Dado el escaso PCK de la mayoría de los EpP identificado en este estudio, las autoras recomiendan que los programas de formación, tienen que poner más atención en desarrollar este aspecto del conocimiento del profesor.

El test se mostró como una herramienta potente para iniciar la discusión sobre las dificultades de los niños y las razones que subyacen en las mismas. Recomiendan esta metodología para los formadores de profesores, como un primer paso para profundizar en la comprensión de las dificultades de los estudiantes con los decimales y el desarrollo de caminos apropiados para superarlas.

Chick (2003). En el artículo la autora, utiliza dos ítems para investigar aspectos del Conocimiento Pedagógico del Contenido del profesor de matemáticas. Los participantes son futuros profesores de primaria y secundaria, los que debían responder y dar razones para a) justificar el procedimiento de “agregar un cero” al final de un número entero cuando se realiza la multiplicación por 10, y b) explicar la equivalencia entre 3/8 y 37,5%.Se reconoce, por concepciones que plantean investigadores en esta línea, que el conocimiento pedagógico del contenido incorpora cuestiones específicas. Esto es, como el conocimiento sobre un tema es usado en la enseñanza, lo que implica conocer caminos para explicar y representar conceptos. En particular en la enseñanza de las matemáticas, esto incluye conocimiento de las representaciones y modelos que pueden ser usados para representar importantes principios matemáticos (ej. Uso de los bloques

aritméticos multibase, para ilustrar el sistema numérico de base 10), comprender las conexiones entre ideas matemáticas esenciales (ej. Entre decimales y fracciones), y un conocimiento de ejemplos y contraejemplos significativos (ej. Conocer que al dividir por un número entre 0 y 1, se obtiene un resultado mayor que el dividendo).
Los datos para el estudio fueron tomados de las respuestas que dieron futuros profesores a los dos ítems ya mencionados, los que forman parte de un cuestionario más amplio.29 estudiantes para enseñanza media y 38 para enseñanza primaria, para el primer ítem y, 16 y 20 respectivamente para el segundo ítem. Como el objetivo central estaba puesto en las explicaciones que daban los estudiantes, las respuestas fueron categorizadas en función de las razones dadas en la explicación.

Los resultados, en cuanto a la multiplicación por 10, mostraron que los futuros profesores tienen dificultades para escribir claramente las explicaciones de por qué la multiplicación por 10 puede llevarse a cabo agregando un cero al final de un número entero. El 14% de los estudiantes para enseñanza media, dieron respuestas satisfactorias, mientras que, solo el 8%, de futuros maestros lo lograron. Muchas justificaciones estaban basadas en la técnica del desplazamiento de la coma, omitiendo cuestiones conceptuales como el uso de términos: múltiplo, factor, aumento. En relación, a la equivalencia entre la fracción dada y la expresión en términos de porcentaje, se codificaron en función de cuántos tipos de explicaciones daban para la equivalencia y cuántas eran correctas. Se observó, en ambos grupos, que un porcentaje importante (76% para media y 65% para primaria), los estudiantes dieron 1,2 o 3 explicaciones y cada una de ellas correctas en cada caso. Una de las diferencias entre los dos grupos es que, en número mayor los futuros maestros utilizaron representaciones gráficas para justificar la equivalencia. Mientras que los estudiantes para enseñanza media, utilizaron variedad de estrategias de cálculos, sobre todo cuando no recordaban el algoritmo estándar. No obstante, varias fueran las respuestas correctas, cuyas justificaciones eran incorrectas o ambiguas.

Como conclusión la autora caracteriza las respuestas de los estudiantes como “decepcionantes”, especialmente en lo referente a la cuestión de la multiplicación por 10. Dichos estudiantes mostraron falta de fluidez en el lenguaje de valor posicional, en desmedro de la importancia que tiene un uso apropiado del lenguaje. A juzgar por las respuestas varios estudiantes utilizaron procedimientos de cálculo (como mover la coma hacia la derecha, por ejemplo). Esto da cuenta que para ellos, el procedimiento en sí mismo es la justificación, pero seguramente no comprenden la esencia de lo que subyace al procedimiento. Los resultados de la segunda cuestión fueron mejores, aunque es muy limitado el reducido número de modelos que disponen estos estudiantes. También se rescata que los mejores resultados obtenidos por los maestros, en cuanto a representaciones alternativas, se deben a que tienen mayores posibilidades de cursos en esta línea.

Moreno, Hernández y Socas (2004). Destacan el interés para la Didáctica de la Matemática de estudiar qué imagen mental tienen los profesores de primaria y secundaria sobre los Sistemas Numéricos, en particular sobre los números decimales. Afirman que la enseñanza-aprendizaje de los diferentes sistemas numéricos coloca a los números decimales (considerados como fracciones decimales), "como un conjunto que emerge de manera confusa dentro de los sistemas numéricos" (Socas, 2002).

En este trabajo se plantean 3 interrogantes para estudiar alumnos de la Facultad de Formación del Profesorado,

- ¿Qué competencias tienen los alumnos en relación con los números decimales?
- ¿Qué imagen mental tienen del número decimal?
- ¿Establecen correctamente las relaciones entre los diferentes Sistemas Numéricos?

Parten de la conjetura que "el conjunto D, es caracterizado erróneamente dentro de los sistemas numéricos y que la tendencia es identificar, al número decimal con su escritura decimal" (p. 256). Se plantean los siguientes objetivos:

- Estudiar y valorar los conocimientos y destrezas del alumnado acerca de los decimales,
- Analizar que significados conceptuales y procedimentales del número decimal tienen los alumnos y que relaciones establecen entre los conjuntos numéricos estudiados.

El trabajo central consiste en la elaboración de un cuestionario, su aplicación y descripción de resultados. Treinta y ocho preguntas de opción múltiple integran el cuestionario y son considerados aspectos sobre los números decimales relacionados con:

- Funcionalidad (uso y utilidad)

- Fenomenología (orden, densidad, representaciones, relaciones con los otros números)
- Concepto (significado conceptual y procedimental de estos números)

Las cuestiones están diseñadas para estimar: conocimientos y destrezas, detectar habilidades, aplicar procedimientos y resolver problemas.

Las preguntas se basan en los trabajos de Brown y Hart (1981), Centeno (1988), Socas (2001), actividades de libros de texto y elaboración propia. Se aplican a 36 alumnos de 1er. curso de Maestros de la Especialidad de Educación infantil.

En primer lugar se evalúan las competencias y luego las dificultades y errores.

Análisis e interpretación de resultados:

Se describen exhaustivamente las competencias, ubicándolas en una escala entre, alta media y baja (pp. 258-262).

Se observa que "los alumnos tienen dificultades para reconocer y diferenciar y para formular los números decimales, no tanto para operar con ellos, salvo en operaciones relacionadas con la división". (p.262). Se evidencian problemas con el orden, en números negativos. La densidad, es reconocida solo en procesos finitos. Las representaciones son aceptablemente reconocidas, formuladas y trabajadas.

Hay verdaderas dificultades para relacionar los diferentes números, es decir problemas de reconocimiento y diferenciación entre los distintos conjuntos numéricos.

Se exhiben varios trabajos particulares de los alumnos para ejemplificar los errores y dificultades y se toman algunos ítems particulares. Por último,

1) Se destaca la utilidad del cuestionario para detectar y organizar los errores cometidos, consideran necesario complementar con entrevistas clínicas para aportar más datos sobre los orígenes de los errores.
2) Muestran confusión en la terminología: naturales, enteros, decimales, etc.
   - No tienen claridad en las relaciones entre los distintos conjuntos numéricos.
   - Identifican a los números por su escritura y no por sus propiedades numéricas
3) Se valida la conjetura que el mayor porcentaje de errores se obtiene respecto a la

consideración del número decimal visto con comas, solo que aparecen otras posiciones intermedias mezclando ambas posiciones.

4) Sostienen que estos niveles de dificultad en los Sistemas Numéricos, en particular en los decimales, su tratamiento debe ser cuidado en la formación del profesorado.

Zazquis y Sirotic (2004). El estudio trata, como parte de una investigación más extensa, sobre la comprensión que futuros profesores de nivel secundario tienen sobre los números irracionales. El foco se halla en cómo distintas representaciones de los números irracionales influyen en las respuestas de los estudiantes. Para llevar a cabo el estudio diseñan dos cuestiones, las cuales fueron presentadas a 46 estudiantes. Las cuestiones fueron las siguientes:

1. *Considera el número siguiente 0.12122122212…. (hay un número infinito de dígitos donde la cantidad de dos entre los unos, crece de a uno). ¿Es este un número racional o irracional? ¿Cómo lo conoces?*
2. *Considera 53/83. Llamemos a este número M. Realizando la división, la calculadora muestra 0.63855421687. ¿Es M un número racional o irracional? Explica.*

La perspectiva teórica en la que se basan es la distinción entre "representaciones transparentes" y "representaciones opacas". Es decir, representaciones que muestran algunas características del número, mientras que ocultan otras.

Luego de la aplicación escrita de las cuestiones, 16 de los participantes de manera voluntaria participaron de una entrevista clínica a los fines de clarificar y extender las respuestas. A partir del relato de cada participante los investigadores observan, con respecto al primer ítem que, en general, responden bien pero justifican mal la irracionalidad haciendo alusión a un patrón común. Con respecto al segundo ítem, en general, terminan respondiendo que un número es racional o irracional dependiendo de su escritura. La respuesta proviene de la incapacidad de ver con la calculadora la repetición del periodo.

En cuanto a la relación entre la estructura de la representación y la repetición decimal es aparente, no existe realmente, dado que, no reconocen en la estructura fraccionaria el tipo de número que se trata. Se aferran a la repetición decimal y a la división confundiendo muchas veces patrón con repetición. Los resultados sugieren que, generalmente, los alumnos no suelen basarse en la transparencia de la representación dada, a la hora de determinar la racionalidad o irracionalidad de un número.

En síntesis, se evidencia que para un número significativo de alumnos las definiciones de número racional e irracional no forman parte del repertorio activo de conocimientos. Como recomendación general los autores sugieren que, en la práctica docente, se ponga énfasis sobre las representaciones y conclusiones que puedan derivarse a partir de su consideración.

Konic y Godino (2007). En este trabajo describimos y analizamos una secuencia de tareas seleccionadas por cuatro estudiantes para profesor para ser implementadas en una Institución educativa de Nivel Medio, en el contexto de la asignatura Práctica Docente (Universidad de Río Cuarto, Argentina). Se trata de una propuesta para primer año y que pretende cambiar el significado del concepto de número decimal que los niños traen de la escuela primaria. Conscientes de las dificultades existentes tanto en la concepción de número decimal como en la confusión que acarrea la expresión decimal de un número, se intentan plantear tareas que aborden dichas problemáticas. El estudio epistémico del modo en que se configura este número y las dificultades que acarrea coloca a los profesores en formación frente a un desafío que les obliga a tomar conciencia de las competencias necesarias para la puesta en marcha de un proceso instruccional idóneo.

Konic, Godino, Castro y Rivas (2007). En este trabajo presentamos algunos resultados de un proyecto de investigación centrado en la evaluación de las competencias en matemáticas y su didáctica de futuros profesores de matemáticas de educación primaria en el marco de los planes de formación vigentes en España. Este contexto educativo se caracteriza por la masificación de las aulas y el escaso número de créditos asignados al área de matemáticas, lo que condiciona de manera determinante la *idoneidad didáctica* de los procesos de estudio implementados (Godino y cols., 2007).

Comenzamos con una breve reseña de un libro de texto de primaria donde podemos observar un conflicto semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007) con la manera en que se presenta la noción de número decimal. Presentamos también los resultados de una evaluación de los significados personales atribuidos por una muestra de estudiantes de magisterio a los números decimales, y su relación con las restantes clases de números reales. Terminamos con algunas reflexiones finales, resaltando la necesidad de mejorar la idoneidad didáctica de los procesos de estudio del tema en la formación de maestros.

Las dificultades de comprensión de los números decimales no sólo afectan a los estudiantes de los distintos niveles educativos, sino que incluso podemos encontrar conflictos en libros de texto, lo que en principio puede llevar a conflictos y obstáculos en el aprendizaje matemático. Así, en un libro de primaria (Almodóvar y otros, 2005), encontramos descripciones sobre los números decimales que en una parte, los identifican con una forma particular de escritura, y al mismo tiempo, en otro apartado se pretende que los niños distingan el "mismo número" decimal bajo tres escrituras diferentes.

Cuando exploramos, en un grupo de 106 estudiantes de magisterio, la comprensión de los futuros maestros sobre los números decimales, hemos incluido en un examen escrito tres cuestiones en las que se pedía distinguir los distintos tipos de números y su relación con sus expresiones escritas. La finalidad era explorar en qué medida los futuros maestros están capacitados para reconocer y resolver los conflictos de significado ligados a la distinción entre los números decimales y sus diversas representaciones.Los resultados de este estudio revelan las dificultades de nuestros estudiantes para discriminar las distintas clases de números y su relación con las expresiones escritas, que concuerdan con las investigaciones previas (Verschaffel, Greer y Torbeyns, 2006). A modo de conclusión planteamos que nos parece necesario que los maestros profundicen en el estudio de los números y sean capaces de distinguir sus distintas funciones, las propiedades que distinguen los distintos tipos de números y los problemas que permiten resolver. Consideramos que ello sólo se logrará con una revisión profunda de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio implementados, lo que implica tener en cuenta las distintas dimensiones involucradas: epistémica, mediacional, emocional, interaccional y ecológica (Godino, Batanero y Font, 2007).

Moreira y David (2007). En este artículo los autores analizan la relación entre *conocimiento matemático académico* y *conocimiento matemático asociado con cuestiones que los profesores de matemáticas se enfrentan en la escuela.* Abordan solo los sistemas numéricos, donde presentan ejemplos que ilustran algunas áreas conflictivas entre dichas formas de conocimiento. Destacan dos cuestiones esenciales: por una parte, la importancia de hacer explícitos dichos conflictos y promover su discusión con los futuros profesores. La finalidad es desarrollar una percepción relevante de las matemáticas académicas. Por otra parte, la pertinencia de desarrollar más investigaciones para comprender mejor la extensión de estos conflictos y sus efectos, cuando se desarrollan diferentes clases de conocimiento matemático en los futuros profesores.

En lo referente a los números racionales, se plantea el contraste de dos perspectivas. Mencionan que para las matemáticas académicas el conjunto de los números racionales es un objeto muy simple, mientras que estudios demuestran que la construcción del sistema numérico es una de las más complejas operaciones de las matemáticas escolares. Desde una perspectiva práctica, la habilidad para hacer frente a muchos de estos conceptos efectivamente, mejora la habilidad para comprender y manejar situaciones y problemas en el mundo real. Desde una perspectiva psicológica, los números racionales proveen de una base esencial para el desarrollo y expansión de las estructuras mentales necesarias para la continuidad del desarrollo intelectual; por último desde una perspectiva matemática, la comprensión de los números racionales proveen una base en las que las operaciones algebraicas elementales pueden más tarde apoyarse.

Uno de los aspectos fundamentales es la construcción formal de Z, Q y R a partir de sucesivas extensiones de los conjuntos numéricos, que llevado al ámbito escolar, esta construcción matemática académica produce un objeto abstracto, cuyas propiedades y características esenciales están dadas. Por el contrario las investigaciones focalizan la importancia de las diferentes interpretaciones para la construcción de los niños del concepto de número racional. Los números racionales pueden ser interpretados desde seis caminos que además deben verse relacionados (comparación parte-todo, decimal, razón, cociente indicado, operador y medidas de cantidades continuas o discretas).

Otro tanto ocurre con las operaciones. Con diferentes sub-constructos se unifican bajo una forma abstracta, el significado de las operaciones desaparecen con los algoritmos que formalmente las definen. Las conexiones de operaciones entre dos conjuntos numéricos ya no son tan claras en términos escolares en un proceso de aprendizaje. Por ejemplo, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. ¿Cuándo las propiedades siguen siendo válidas en Q?

En definitiva para la enseñanza escolar, es importante descomponer el concepto en una variedad de formas (sub-constructos) y considerar explícitamente las diferentes posibilidades de interpretaciones.

La matemática académica es frecuentemente vista como una forma de organización del conocimiento matemático en que los conceptos están correctamente definidos y lógicamente interconectados. Es entonces probable asumir que el aprendizaje de las matemáticas académicas ayudará a los profesores de matemáticas a organizar su conocimiento profesional. Este estudio sugiere que este no es siempre el caso, en efecto el conocimiento matemático académico no puede ser "naturalmente" un instrumento útil para los profesores en la práctica escolar ya que algunos valores y formas de conceptualización de los objetos entran en conflicto con las demandas de la práctica.

Un interrogante que dejan abierto los investigadores es, ¿en qué medida y qué formas concretas de aproximación a las matemáticas académicas de los sistemas numéricos pueden efectivamente contribuir al trabajo profesional del profesor de matemáticas en las clases? Esta pregunta es esencial para la comunidad de los formadores de profesores para desarrollar un proceso de re- contextualización.

Hay un consenso en que los futuros profesores de secundaria y de la escolaridad superior deben aprender unas matemáticas académicas, y además formas de conocimiento matemático orientado a la escuela. Es tácitamente aceptado que es posible y necesario integrar ambas formas de conocimiento matemático, pero ¿cuál es exactamente el significado de integración en tal contexto?

Por ello en síntesis, los autores exhortan a una formación complementaria y específica en el proceso de formación de los futuros profesores. La explicitación de los elementos conflictivos es una contribución significativa a la comprensión sobre el rol de las matemáticas académicas en la formación de profesores.

1.6. LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS DECIMALES

1.6.1. Orientaciones curriculares

No podemos dejar de reconocer que, la expresión en forma decimal de un número ha ido, paulatinamente, desplazando a las fracciones, en cuanto a cálculos nos referimos, ya sea en forma manual o con recursos tecnológicos disponibles. No obstante, y pese a las múltiples y exhaustivas investigaciones, sobre los errores y dificultades producidos en el aprendizaje de este tema, nos lleva a inferir que acciones como las propuestas en los curriculares oficiales, o propuestas didácticas desarrolladas por investigadores, no parecen haber influido, de manera efectiva, en su tratamiento en el ámbito escolar.

El propósito de este apartado es, precisamente, recopilar algunos referentes curriculares vigentes, ya sean oficiales o no, a los fines de observar qué papel desempeñan en la organización y compresión de los sistemas numéricos.

Los Principios y Estándares para la Educación Matemática[1] **(NCTM)**, son una referencia obligada (en cuanto a niveles de concreción) curricular que nos brinda orientaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Tal lo planteado por el NCTM, los profesores deben conocer y entender con profundidad las matemáticas que deben enseñar para poder hacer uso de ese conocimiento de manera flexible. "También necesitan conocer las diferentes representaciones de un concepto, la fuerza y debilidad de cada una y cómo se relacionan entre sí. Necesitan conocer además qué ideas ofrecen dificultad frecuentemente a los alumnos y las formas en que pueden ayudar a superar sus concepciones erróneas más comunes." (p.18).

En lo que respecta a nuestro objeto específico de estudio, los números decimales, podemos encontrar varias referencias. En el *Estándar de Números y Operaciones*, se destaca la importancia del número en el currículo de matemáticas por su estrecha relación con todas las áreas de conocimiento, se sostiene que todas las matemáticas desde el inicio de la escolaridad están basadas en el número. "Una idea clave es que un número pueda ser descompuesto y pensado de varias formas…lo que constituye un primer paso importante en la comprensión de la estructura del sistema decimal de numeración" (p.35).

En cuanto a los números decimales, se expresa que su conocimiento y uso debería asegurarse bien, antes de llegar a los niveles superiores. "Los alumnos deberían llegar a comprender que los números pueden representarse de diversas maneras". (p.35). Se plantea que los alumnos debieran ver a los conjuntos numéricos desde una perspectiva más global, detectando las diferencias entre ellos y el tipo de propiedades que se conservan al pasar de un conjunto al otro.

La problemática de la distinción conceptual entre representación y objeto a representar es esencial para el trabajo matemático, desde la escolaridad elemental. Los alumnos no podrán reconocer que dos representaciones simbólicas, en apariencia diferentes, puedan

[1]National Council of Teachers of Mathematics(NCTM, 2000)

describir un mismo fenómeno, si en los niveles inferiores no han logrado establecer ese tipo de equivalencias o distinciones entre un número y sus posibles representaciones.

“El fundamento del trabajo con decimales tiene que ser la comprensión de los números naturales y del valor posicional. En los niveles 3-5, deberían haber aprendido a considerar a los números decimales como una ampliación natural del sistema de base 10 para representar cantidades menores que 1. Ahora en la etapa 6-8, deberían también comprender los decimales como fracciones cuyos denominadores son potencias de 10. La carencia de una sólida base conceptual puede entorpecer considerablemente el progreso de los alumnos; con frecuencia lleva a errores de comparación. Los alumnos necesitan también saber interpretar los números decimales como aparecen a veces en las pantallas de las calculadoras, truncados o redondeados.” (p.220). (Se mencionan muchas dificultades que encuentran los estudiantes en la comparación de fracciones).

En la etapa 9-12, los alumnos deberían comprender que los números irracionales solo se pueden aproximar mediante fracciones o decimales finitos o periódicos. (NCTM, 2000, p. 296).

Diseño Curricular de España para la Educación Obligatoria

<u>Sobre la educación Primaria</u>

Ministerio de Educación y Ciencia, REAL DECRETO 1513/2006 del 7 de diciembre (BOE 293 del 8 de diciembre del 2006), por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

En el Anexo 1 del mencionado documento se describen las competencias básicas a alcanzar por los alumnos, entre ellas se destaca en el apartado 2 la Competencia Matemática**.** En el primer párrafo de dicho apartado se expresa lo siguiente, “Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático. Tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

En el mencionado texto el apartado referido a Matemáticas, en la introducción, se menciona textualmente, “Es importante resaltar que para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, se precisa también, y principalmente, actuar con confianza ante los números y las cantidades, utilizarlos siempre que sea pertinente e identificar las relaciones básicas que se dan entre ellos". (pp. 43095/43096)

Específicamente en el Bloque 1. *Números y operaciones,* se describen los propósitos en términos generales,

"se pretende esencialmente el desarrollo del sentido numérico, entendido como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se puede expresar en capacidades como: habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal,……. Los números han de ser usados en diferentes contextos, sabiendo que la comprensión de los procesos desarrollados, y el significado de los resultados es un contenido previo y prioritario frente a la destreza del cálculo." (pp. 43096)

En la descripción de los contenidos, los números decimales se encuentran en el Tercer ciclo, en el Bloque 1: Números y operaciones, en el apartado titulado: Números enteros, decimales y fracciones. Concretamente se prescribe lo siguiente:

- Números decimales, valor de posición y equivalencias. Uso de los números decimales en la vida cotidiana.
- Ordenación de números enteros, de decimales y de fracciones por comparación y representación gráfica
- Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencias entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

En el Bloque 2: La medida: estimación y cálculo de magnitudes, no se encuentran referencias explícitas sobre la utilización de números decimales.

Con respecto al apartado de criterios de evaluación, en el punto 3 se expresa: Utilizar los números decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana. Ello se fundamenta así: "con este criterio se pretende comprobar la utilización de los diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, y la capacidad de identificarlos y utilizarlos como operadores en la interpretación y resolución de problemas" (p. 43101)

Sobre la educación secundaria obligatoria

Ministerio de Educación y Ciencia. REAL DECRETO 1631/2006 del 29 de diciembre (BOE 5 Del 5 de enero del 2007), por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

Al igual que para la educación primaria se establecen competencias, encontrándose entre ellas las Competencias Matemáticas, en la que se describen los mismos conceptos que para primaria.

En cuanto a la introducción general del apartado referido a matemáticas para este nivel se describe explícitamente: "El desarrollo del sentido numérico iniciado en la educación primaria continúa en la educación secundaria con la ampliación de los conjuntos de números que se utilizan y la consolidación de los ya estudiados al establecer relaciones entre distintas formas de representación numérica, como es el caso de fracciones, decimales y porcentajes (p. 750).

En cuanto a los contenidos, para el Primer Curso en el Bloque 2 referido a Números, en uno de sus párrafos se describe, "Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de fracciones…..". "Números decimales. Relaciones entre fracciones y decimales" (p. 753).

En cuanto a los criterios de evaluación, se solicita "Utilizar números naturales y enteros y fracciones y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información. Se trata de comprobar la capacidad de identificar los números y las operaciones siendo conscientes de su significado y propiedades…, y transmitir informaciones utilizando los números de manera adecuada" (p. 753).

Para el Segundo Curso se destaca, "Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes" (p. 754).

En relación a los criterios de evaluación, además de lo expresado para el primer curso se agrega, "Adquiere especial relevancia evaluar el uso de diferentes estrategias que permitan simplificar el cálculo con fracciones, decimales y porcentajes, así como la habilidad para aplicar esos cálculos a un amplia variedad de contextos" (p. 755).

Para el Tercer Curso, se puede apreciar que la descripción de contenidos referidos al Bloque 2, Números, hacen referencia a los números decimales en prácticamente toda su extensión. Agregándose especialmente lo siguiente, "Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz" (p. 756).

Finalmente, para el Cuarto Curso**,** es en la opción B donde se le atribuye gran importancia a los conjuntos numéricos. En el Bloque correspondiente a Números**,** se solicita, "Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números Irracionales. Representación de números en la recta real. Intervalos. Significados y diferentes formas de expresar un intervalo. Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso"….." Reconocimiento de situaciones que requieren la expresión de resultados en forma radical" (p. 759).

En los criterios de evaluación se solicita, "utilizar los distintos tipos de números y operaciones junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias" (p. 759).

Socas, M. (2001). Este investigador, luego de observar el tipo de contenidos que se sugieren para el tratamiento de los números decimales, en el currículo Canario, y al sostener el principio que hay una tendencia a "identificar los números reales como números decimales"; se abocó a estudiar el origen de tal identificación. En sus fundamentos encontró razones históricas y referencias, en textos matemáticos, significativas. No obstante, la premisa mencionada influyó en el desarrollo curricular de los sistemas numéricos en España. Del siguiente esquema, presentado en la figura 1.4, se infiere el tipo de clasificación propuesta para su uso en la escuela.

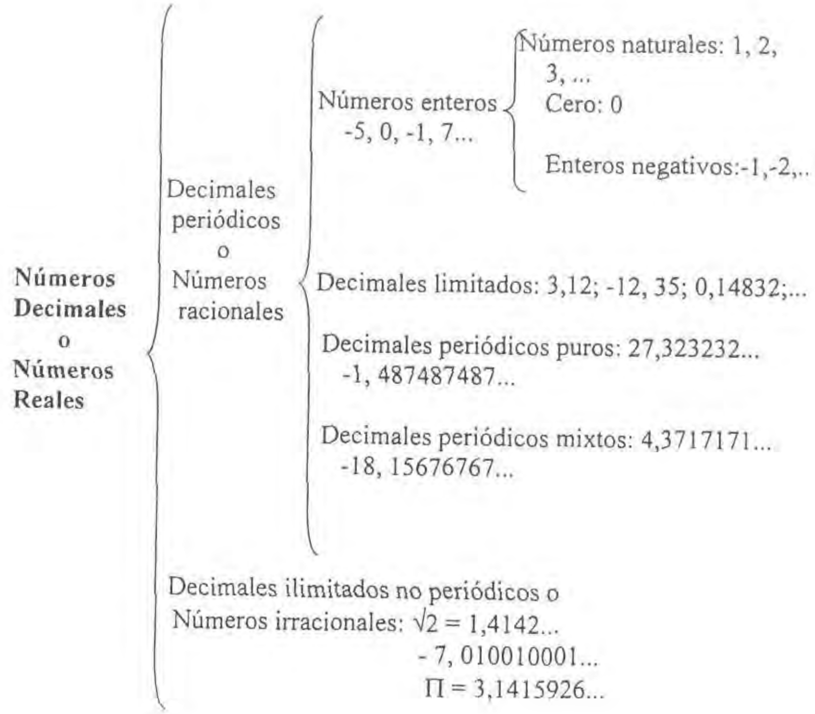


Figura 1.4: *Clasificación de los Sistemas Numéricos para uso escolar (Socas, 2001, p.306)*

Desde esta situación, donde didácticamente se producen tantos conflictos en el aprendizaje de los números decimales, y justificando al número decimal con estatus de sistema numérico, es que este autor propone una nueva organización curricular. Dicha propuesta intenta clarificar la organización de los sistemas numéricos, haciendo emerger a los números decimales con entidad propia. En la figura 1.5, se muestra el diseño de la propuesta.

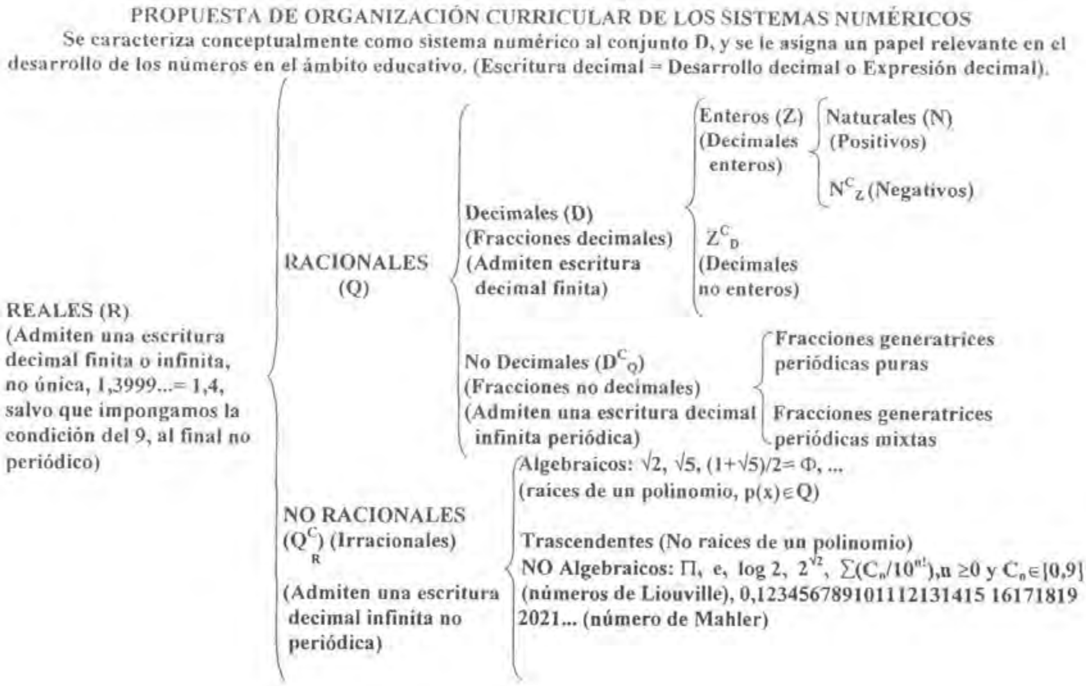


Figura 1.5.: *Propuesta de organización curricular de los Sistemas Numéricos (Socas, 2001, p. 316)*

1.6.2. Propuestas de enseñanza

Centeno (1998), en su texto *Números Decimales, ¿Por qué? Y ¿Para qué?* Dedica, específicamente los capítulos: 6, 7, 8 y 10 a aspectos relacionados con la enseñanza de los números decimales.

En el capítulo 6 (pp. 83-94), propone diferentes vías de entrada para la enseñanza de los números decimales en la escuela elemental,

- Como extensión natural del Sistema de Numeración Decimal
- A partir de la medida
- Presentación a partir de funciones numéricas

La regularidad que se observa en dichas presentaciones es la definición y la posibilidad de derivar en distintas propiedades.

El Capítulo 7 lo dedica a la presentación de materiales como recursos para la enseñanza de los números decimales, como las Regletas de Cuisenaire, Bloques aritméticos multibase de Dienes, Ábacos, la calculadora básica, el Mini computador de Papy y otros recursos como reglas graduadas, escalas, vasos graduados, papel cuadriculado, etc.

Plantea al final de este capítulo una serie de reflexiones en torno al uso de los recursos, en cuanto a la forma de utilización, la adecuación del recurso elegido para el momento oportuno, la razón o fin matemático de su utilización.

Un recurso que pone en juego Centeno, en el capítulo 8, son las Situaciones que permiten poner en funcionamiento el aprendizaje de las nociones. En tal sentido desarrolla el concepto de Situación dentro de la *Teoría de las Situaciones Didácticas* de Brousseau, y las distintas etapas de funcionamiento en que una Situación es puesta en el aula. Proporciona algunas sugerencias para la selección y construcción de situaciones de aprendizaje, exhibe dos situaciones didácticas con el propósito que el lector pueda analizar las condiciones de funcionamiento del conocimiento, dentro de la teoría mencionada.

El Capítulo 10 tiene por objetivo la articulación de los aprendizajes de modo tal que los números decimales puedan ser construidos en sus distintos significados. Para ello propone pensar en una estructura global, que permite desmembrar los aprendizajes necesarios a lograr en cada nivel y la comprensión necesaria para el paso hacia el nivel siguiente. Pone énfasis en la precaución que hay que tomar en etapas delicadas del proceso como, por ejemplo, los momentos en que las propiedades de los números y operaciones con naturales dejan de tener validez o no pueden ser extendidas a los números decimales.

Irwin (2001). Investigó el rol del conocimiento de los estudiantes sobre los decimales en cuestiones relacionadas con la vida cotidiana, como apoyo al desarrollo del conocimiento de los decimales. La muestra fue de 16 estudiantes, entre 11-12 años, pertenecientes a una región de condiciones económicas baja. Los estudiantes trabajaron en parejas (un estudiante más fuerte en su dominio de las matemáticas y otro más débil) para resolver problemas que atacan errores comunes sobre fracciones decimales. La mitad de las parejas trabajaron sobre problemas presentados en un contexto familiar y la otra mitad sobre problemas en otros contextos.

Las preguntas de investigación del estudio involucran: el rol del contexto, el rol de la colaboración de los pares y el rol del conflicto cognitivo en estudiantes ayudándose en la comprensión de decimales. Específicamente, la autora quiso descubrir que, cuando trabajan en pares, los estudiantes más competentes y menos competentes aumentan la comprensión de las fracciones decimales explorando la resolución de ciertos problemas. Todos los problemas fueron diseñados para promover conflictos cognitivos y la mitad de ellos fueron problemas contextualizados. La comparación de los resultados del pretest y postest, revelaron que los estudiantes que habían trabajado con problemas contextualizados tuvieron un progreso más significativo en su conocimiento sobre decimales que aquellos que trabajaron con problemas no contextualizados. Durante la resolución de los problemas fueron analizados los diálogos de los estudiantes entre pares, respecto a la argumentación usada. Resultados de este análisis sugirieron que la mayor reciprocidad se dio en los pares que trabajaron problemas contextualizados. Ello permitió postular que los estudiantes que resolvieron problemas contextualizados pudieron edificar una compresión científica de los decimales reflexionando sobre su conocimiento diario, como el referido al significado sobre números decimales y los resultados de los cálculos con decimales. Para todos los estudiantes, en esta investigación, discutir problemas que provoquen algún conflicto cognitivo, les dio la oportunidad de direccionar sus inconsistencias y reflexionar sobre su comprensión. Más aún la referencia al conocimiento diario hizo posible que la reflexión avance hacia la comprensión.

Para que las reflexiones en clase sean más efectivas, ambos profesores y estudiantes deben ser conscientes de la potencial relación entre el conocimiento de la vida diaria y el conocimiento científico.

O' Connor (2001). Se trata de un estudio de casos donde se examina la interacción durante la puesta en acción de actividades áulicas. El objetivo central es iluminar el trabajo del profesor provocando el pensamiento de los estudiantes, a través del uso de cuestiones matemáticas, desde una posición que genere discusión. El foco se centra en examinar los caminos a través de los cuales emergen ideas matemáticas, parcialmente formadas por las complejas interacciones en torno a los contenidos, propiedades inherentes a la forma del discurso y la estructura participante, como así también a los métodos computacionales disponibles.

Este trabajo apunta a contribuir a los esfuerzos de comprensión sobre cómo las ideas matemáticas pueden surgir de la lingüística y de un discurso consistente: no obstante, el foco primario está puesto en la descripción del complejo trabajo del profesor en la conducción de discusiones de todo el grupo. Se desarrolla en un 5to grado sobre una cuestión matemática en la que se intenta explorar relaciones entre fracción, representaciones decimales y números racionales. La discusión es enmarcada por el profesor con una doble cuestión "circular": ¿Puede una fracción convertirse en un decimal, y puede un decimal ser convertido en una fracción? El artículo intenta ofrecer una visión detallada del trabajo en torno a la conducción de tal discusión.

La autora sostiene la necesidad de comprender las relaciones en torno al contenido matemático del tópico en discusión, sus formulaciones lingüísticas, las limitaciones y potencialidades de las estructuras de la actividad, ocurridas en sus formas particulares de discusión, y el pensamiento y la comprensión que resulta de ello.

A los fines de este artículo, se han ofrecido tres fases de análisis.

1) Antes de hipotetizar sobre que puede el profesor encontrar o buscar en las palabras de sus estudiantes, se debe explicar el conocimiento matemático mínimo en torno al tópico de discusión, y una breve revisión de qué se sabe sobre la comprensión de los estudiantes en este dominio.

2) Antes de la descripción de cómo se conduce la discusión, se habla de la necesidad de proporcionar una descripción sinóptica de lo que resultó arduo durante la discusión previa.

Ambas fases introducen presupuestos necesarios para la comprensión de la tercera fase, que presenta una descripción más detallada sobre las demandas del trabajo hecho por el profesor en el manejo de la discusión.

El contenido de la pregunta se centró, como ya se dijo, en números racionales y su representación. Se muestra un proceso de sucesivos pasos de depuración de la misma, a partir de la discusión de los profesores. Su formulación definitiva fue: ¿Puede un número que puede ser representado con una fracción simple, ser representado en notación decimal? Y ¿Puede un número que puede ser representado como un decimal ser representado como una fracción simple?

El propósito era conseguir que, los estudiantes al centrarse en el proceso en el que números en un formato son transformados en otro, comenzaran a ver que decimales y fracciones son formas alternativas de representación, no diferentes tipos de números.

Era esperable que en la reflexión del contenido de la pregunta, fueran llevados a explorar las propiedades y limitaciones de cada forma representacional y varios métodos de transformación de uno en otro para la variedad de casos, de tal modo que lograran profundidad en las propiedades de los números racionales.

Luego de un exhaustivo detalle que muestra el modo de interacción entre profesor y estudiantes, a través de interrogantes, respuestas, ejemplos, contraejemplos, hipótesis y conclusiones que se van derivando del proceso se concluye, en términos generales, que:

- Este estudio de casos provee evidencias en cuanto a que no pueden considerarse las cuestiones matemáticas de manera aislada, y que se debe tener una completa visión de cómo se desarrolla la comprensión matemática de los estudiantes.
- Si se plantea una discusión abierta, en ausencia de un conocimiento claro del contenido, puede derivar en una visión parcial de la situación.
- Este estudio no provee suficiente detalle sobre los niños de manera individual, puesto que el foco está puesto en cómo la discusión afectó su pensamiento sobre ideas matemáticas relevantes.

Lachance y Confrey (2002). Conscientes del esfuerzo que muestran los estudiantes para comprender los números decimales, los autores realizan una propuesta de enseñanza. En este artículo, muestran los resultados de una instrucción para introducir la notación decimal y se presentan resultados con implicaciones para, la enseñanza decimal y el currículo de matemáticas en la escuela elemental.

La propuesta parte del propósito de adquirir sólidamente los conceptos de razón y proporción con problemas contextuales. En su opinión, la comprensión de estos conceptos permite que los estudiantes puedan construir y relacionar con compresión fracciones, decimales y porcentajes. Los autores destacan que, en general, la mayoría de las investigaciones en esta área tienden a evaluar el desarrollo de la notación decimal de manera aislada. Por otra parte, observan que en los libros de textos, decimales y fracciones se encuentran en capítulos separados y con frecuencia en diferentes partes del libro. No hay conexión entre capítulos y los referentes usados son diferentes en cada capítulo. Los decimales suelen ser presentado en el contexto de la moneda, y luego no logran volver a las equivalencias con fracciones.

Desde esta perspectiva, se propone un modelo alternativo para el desarrollo del conocimiento conceptual. La posición que adoptan es que la comprensión matemática emerge de la interacción entre el contexto cultural, acciones físicas, y lenguaje simbólico o sistemas de símbolos. Consideran que la creación de estas herramientas ocurren mejor cuando: 1) el contexto de un problema crea una necesidad para una idea en la mente del estudiante; 2) las ideas matemáticas y los símbolos latentes en un problema pueden ser percibidos a través de uno o más sentidos; 3) los estudiantes pueden elaborar y comunicar su comprensión matemática a través de múltiples representaciones; y 4) los conceptos emergen a través del trabajo sobre problemas y de interacciones en clase. En palabras de los autores, usando múltiples contextos y experiencias, consideran que se orienta a los estudiantes a una primera exploración y comprensión de grandes constructos como el de razón y usar dicha comprensión para explorar instancias más específicas como la fracción, el decimal y el porcentaje. Esto requiere de una propuesta de enseñanza muy diferente a la tradicional, e incluso diferente en términos curriculares. En este caso particular, el modelo alternativo coloca a la razón en una posición central. El esquema siguiente muestra esta idea.

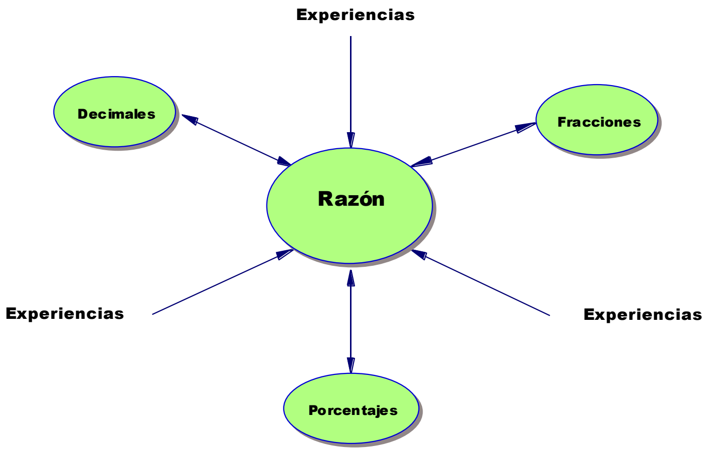


Figura 1.6: *Un modelo alternativo para el desarrollo de la comprensión conceptual (p. 510)*

La enseñanza de los números decimales se impartió en un período de aproximadamente seis semanas. Parte de ellas se trabajó con problemas contextuales en grupos pequeños de estudiantes. El primero de los problemas, un problema de pesos, estaba destinado a ser un problema de transición. La intención era que los estudiantes redescubrieran un amplio territorio de razón y proporción que los ayudara a prepararse para trabajar con notación decimal. En el problema de los pesos, a cada grupo de cuatro estudiantes se les dio un conjunto de "pesos" representados en cuatro formas diferentes (palotes, círculos, rectángulos y manchas) hechos de un material similar a la madera o plástico. A los estudiantes se les dijo que estas formas componen el sistema de peso de un país ficticio. Las cuatro formas tienen una relación multiplicativa entre ellas. (1 círculo=2 palotes, 3 círculos= 1 rectángulo, etc.). Se les dio a los estudiantes escalas para investigar el sistema de peso dado y para descubrir las diversas relaciones multiplicativas entre los pesos de las formas en ese sistema. Para finalizar, los estudiantes debían crear una guía para turistas donde debían explicar cómo funcionaba el sistema de peso en ese país ficticio. Los estudiantes llegaron a crear un sistema de notación para este sistema. La notación más común usada fue un código de cuatro dígitos, donde el primer dígito correspondía a la forma más pesada, y así sucesivamente hasta la de menor peso. Y donde el valor de cada dígito indicaba la cantidad de esas formas.

La variedad de notaciones que los estudiantes desarrollaron, llevó a la discusión de diferentes sistemas notacionales. Confrey usó el sistema notacional creado por los estudiantes para introducir la noción de sistema de numeración con bases consistentes (los estudiantes habían observado que el sistema de pesos, no había sido construida sobre una base de numeración coherente). Esto llevó a investigar sistemas numéricos con otras bases que no sea la base 10. En pequeños y grandes grupos trabajaron en problemas que involucraban bases, 2,4 y 6. A partir del trabajo con otras bases, comenzaron a construir una comprensión más profunda del valor posicional. Eventualmente, el trabajo con otras bases numéricas llevó a la discusión sobre la base numérica en base 10. Esto fue usado como disparador para explorar la notación decimal.

El segundo problema denominado: "juegos olímpicos con decimales", dio a los estudiantes una oportunidad de usar la notación decimal en el contexto de la medida. En cada grupo (cuatro estudiantes), cada estudiante contestó sobre los siguientes cuatro eventos:

- Al lanzar una bola de algodón ¿hasta dónde puede llegar?
- Al arrojar un plato de papel ¿hasta dónde puede llegar?
- Al lanzar una moneda hacia la pared, ¿Qué tan cerca se puede llegar?
- ¿Qué distancia se puede cubrir, luego de dar tres saltos?

Antes de completar cada evento, cada competidor tuvo que predecir la distancia que podría resultar. Luego de producidos los eventos, midieron las distancias y calcularon las diferencias entre sus predicciones y las actuales. Computaron los valores con unidades en el sistema de base 10. Durante el curso la totalidad de los estudiantes discutieron aspectos como medir en un sistema métrico, diferentes caminos para notar cantidades y diferentes métodos para calcular diferencias y totales con estas unidades.

El tercer problema, denominado "el problema dominó", dio a los estudiantes la oportunidad de realizar cálculos con números decimales. En esta tarea, debían predecir cuánto tiempo le tomaría caer 281,581 fichas de dominó. Para completar la tarea se les dio a los estudiantes aproximadamente 100 fichas, cronómetros que medían hasta las centésimas de segundos, y calculadoras. Como el número dado no tiene divisores enteros deberán idear un modelo más complejo para hacer sus predicciones.

En síntesis, los tres problemas ayudaron a los estudiantes a desarrollar más y mejor su comprensión sobre los números decimales y otros conceptos que emergieron del trabajo con los problemas.

Esta propuesta de trabajo siguió un proceso de investigación, cuyo análisis los autores describen exhaustiva de manera cuantitativa y cualitativa. Utilizando diversos instrumentos. Particularmente se exhiben, extensas partes de las discusiones que se produjeron durante el desarrollo de las sesiones.

Como conclusiones fundamentales, los autores afirman que el estudio sugiere que el camino que los estudiantes transitaron para llegar a su comprensión de la notación decimal no se desarrolló desde pequeñas a grandes ideas. Muchos de los estudiantes, de manera obvia y natural utilizaron sus experiencias previas sobre la amplia construcción de la razón, como una herramienta para dar sentido a un concepto-números decimales- inserto en dicha idea. Los estudiantes exhibieron habilidad para moverse en constructos similares- como desde las fracciones a los decimales- para construir más comprensión matemática. En sentido metafórico aludieron a dos hallazgos esenciales, es decir:

"La mejor ruta entre dos puntos no siempre es una línea recta", esta expresión, va en contra de una forma curricular que enfatiza rutas directas y aisladas para la compresión matemática. Cuestión esta, que es sostenida y defendida también en el pensamiento de los profesores. En suma, por no desarrollar ideas matemática amplias como base, y conectar muchas constructos, los estudiantes no pueden apreciar las matemáticas como sistema. El desarrollo de un currículo lineal, no permite divisar el mejor camino para ayudar a los estudiantes a alcanzar la alfabetización matemática.

El segundo hallazgo fue denominado: "hay más en el desarrollo del conocimiento conceptual que la mera definición de símbolos". La construcción de muchos conceptos matemáticos es con frecuencia vista como una cuestión de lenguaje. Este tipo de procesos es típico en la enseñanza de los números decimales, donde los manipulativos de base 10 son usados para ilustrar las cantidades representadas por los números decimales. Los autores manifiestan que si bien la conexión de símbolos con significado es esencial para la comprensión de los conceptos matemáticos, el desarrollo de cada significado es esencial para llegar a definiciones concretas para los símbolos.

Llinares (2003). En el libro Didáctica de la Matemática (Coord. Chamorro), desarrolla un capítulo destinado a fracciones, decimales y razón. En el destaca la importancia que tienen estos conceptos para el aprendizaje de las matemáticas; pone énfasis en el trabajo de la relación entre cantidades, en la utilización de nuevos sistemas de símbolos para representar esas relaciones y en la necesidad de ampliación del sistema de numeración decimal. Sostiene que para el maestro es importante considerar las características de los números racionales y los procesos de construcción de conocimiento de los alumnos. También indica que la dificultad en la enseñanza- aprendizaje de los números racionales se fundamenta en dos cuestiones esenciales:

- Están relacionados con distintos tipos de situaciones (de medida, con el significado de parte de un todo, o como parte de un conjunto de objetos, de reparto, como un operador, etc.)
- Tienen diferentes formas de representación (fracciones, fracciones decimales, expresiones decimales, porcentajes)

Con este propósito despliega una serie de situaciones que intentan mostrar las condiciones a tener en cuenta en el trabajo con estas nociones por parte de un docente.

Cid, Godino y Batanero (2004). Este trabajo se trata de un texto o manual para la formación matemática de los futuros profesores de educación primaria en el campo de los sistemas numéricos (números naturales y sistemas de numeración, operaciones aritméticas, fracciones, racionales, decimales, y números positivos y negativos). En el desarrollo del tema de los números decimales se pone especial cuidado en distinguir entre expresiones decimales y números decimales, en la línea apoyada, entre otros autores, por Socas (2001). Este texto incluye una parte diferenciada para los “conocimientos didácticos” específicos para cada una de los temas tratados (orientaciones curriculares, desarrollo cognitivo y progresión en el aprendizaje, situaciones y recursos y taller de análisis didáctico de errores y dificultades en el aprendizaje de los decimales).

Ruiz (2004). Presenta una propuesta basada en investigaciones previas desarrolladas por Brousseau, (1987,1992,1998,2002), además de monografías y tesis doctorales sobre la enseñanza de los números decimales. En las figuras 1.7 y 1.8 respectivamente, se adjuntan los dos esquemas de progresión del aprendizaje que propone en su trabajo.

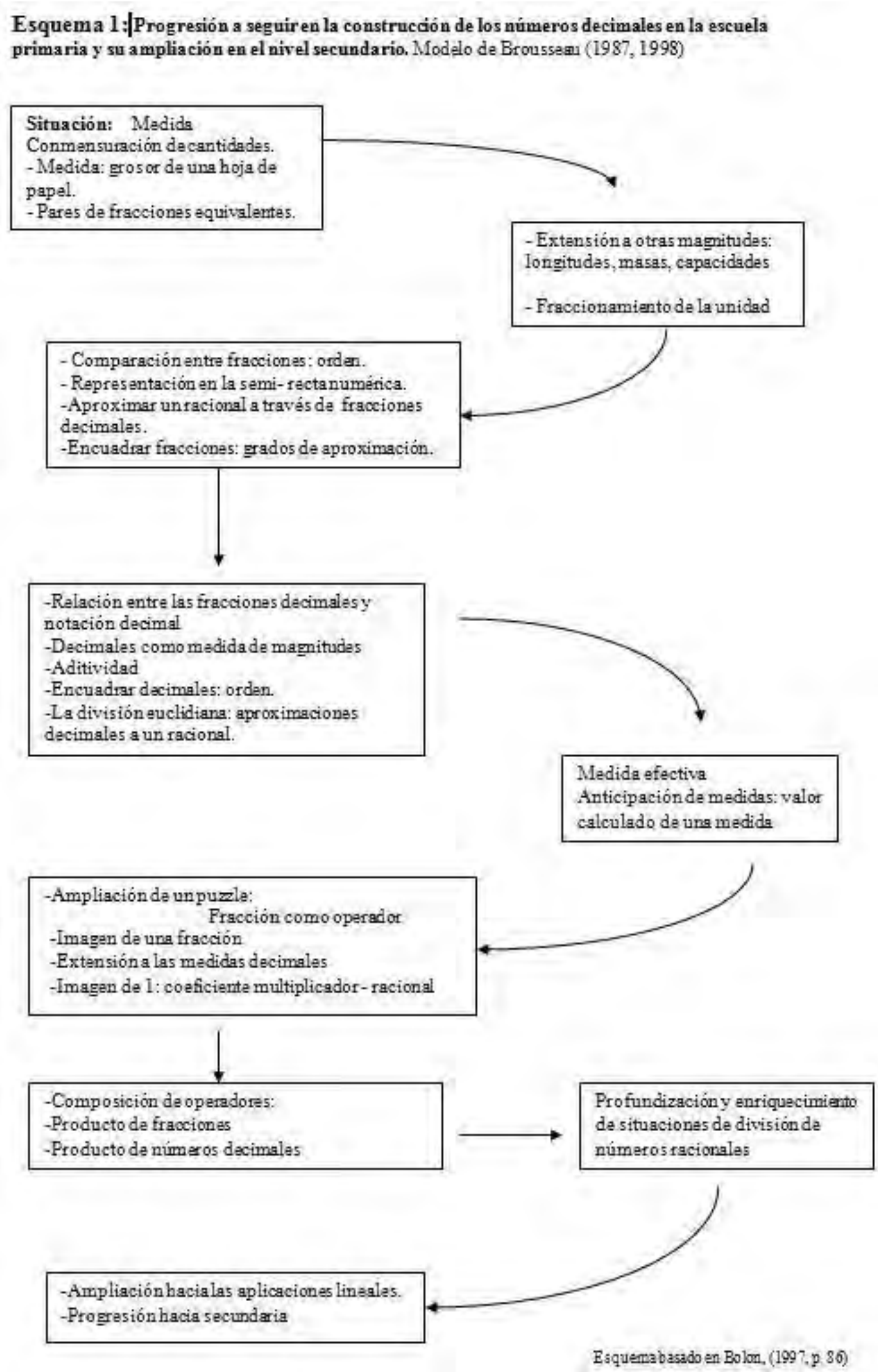


Figura 1.7: *Primera propuesta de progresión para la enseñanza de los números decimales*

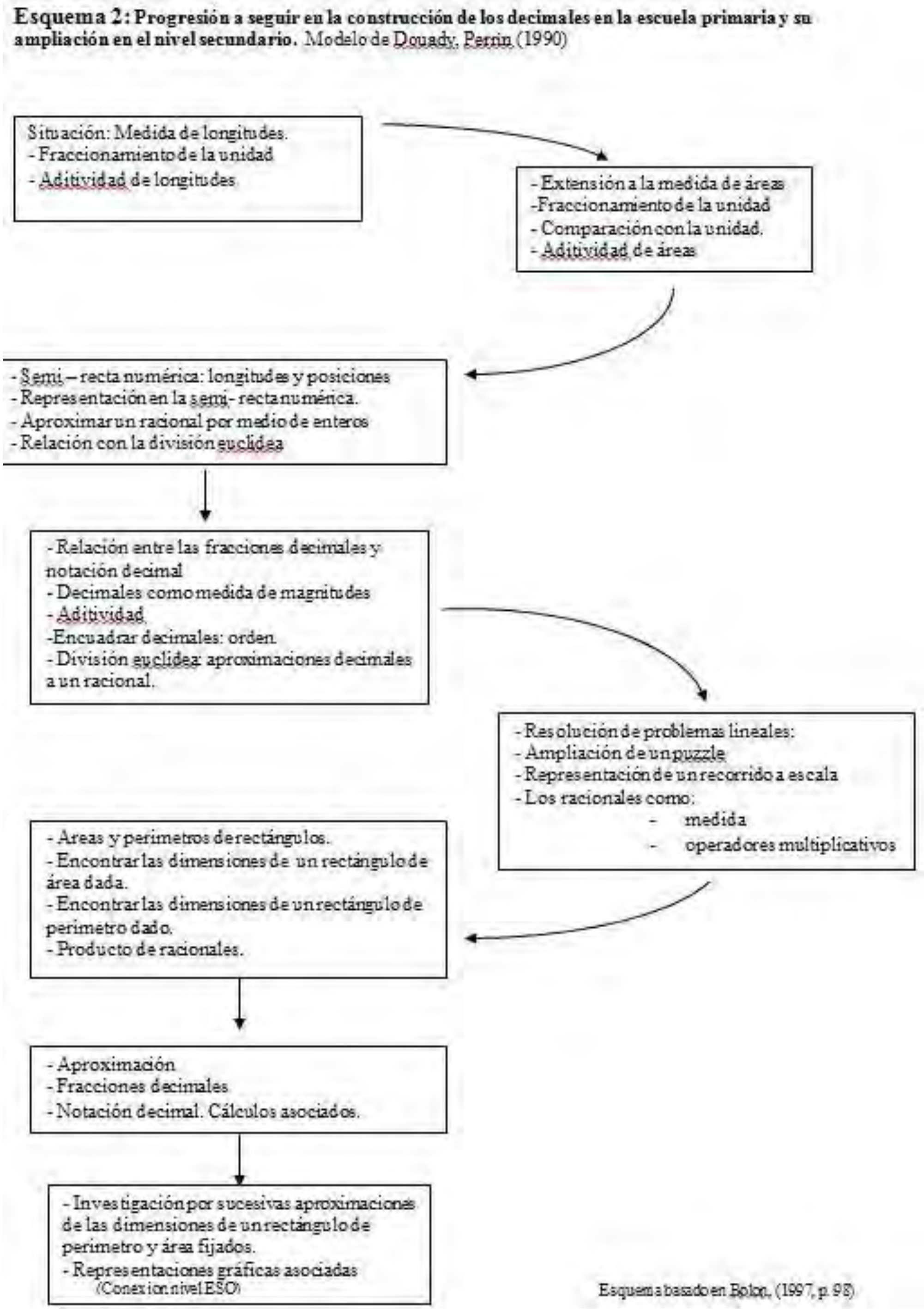


Figura 1.8: *Segunda propuesta de progresión para la enseñanza de los números decimales*

En función de estos esquemas, se proponen una serie de situaciones con el propósito de construir los números decimales en la escuela primaria. Dichas situaciones responden a:

- Situación generadora de razones y proporciones.
- Situaciones que permiten construir la concepción de fracción como "fraccionamiento de la unidad".

- Situación que permite construir la concepción de fracción como “operador”.
- Situación para graduar una cantidad de una longitud y su uso para ubicar fracciones y expresiones decimales.
- Situaciones que ponen en funcionamiento las propiedades del orden y la densidad de D^+.
- Situaciones para “invertir” los conocimientos anteriores y “anticipar” relaciones entre fracciones decimales y escritura decimal.

Por otra parte desarrolla un apartado sobre propiedades topológicas, donde se describen las características del tipo de actividades, que aproximan a los números decimales. El tipo de actividades refieren a lo siguiente,

- situar un número decimal entre los dos naturales más próximos
- situar una fracción entre dos naturales consecutivos
- comparar dos números decimales
- intercalar un número decimal entre otros dos
- graduación de longitudes

Bonotto (2006). El estudio refiere a una experiencia de enseñanza basada en una secuencia de actividades de clase con el propósito de lograr la comprensión de algunos aspectos de la estructura de los números decimales, en la escuela elemental. Este estudio es parte de un proyecto de investigación que intenta mostrar cómo un uso extensivo de “artefactos culturales” adecuados, incorporado a las matemáticas, puede jugar un rol fundamental en el razonamiento de los estudiantes. Como artefactos culturales se entienden, en esta investigación, algunas listas de precios de menús de restaurantes.

La autora manifiesta la importancia que los profesores reconozcan la cultura numérica adquirida por los niños fuera de la escuela, con el propósito de ofrecerles la oportunidad de desarrollar conocimiento matemático nuevo. El foco de atención está puesto en situaciones de la vida diaria. El entorno está focalizado en promover un enfoque hacia la modelización de una matemática realista.

En cuanto al marco teórico, parte de la premisa que reconoce el potencial que tienen las matemáticas como herramienta crítica para interpretar y comprender la realidad, la comunidad donde viven los estudiantes, o la sociedad en general.

Utiliza los términos “modelización emergente” para referir a un tipo de modelización diferente de la tradicional y que requiere del estudiante que disponga de algunos modelos matemáticos y herramientas para matematizar. Es un modelo donde las actividades son un vehículo para el desarrollo de los conceptos matemáticos.

Brousseau, Brousseau y Warfield (2007). Describen y analizan una experiencia llevada a cabo por Guy Brousseau y Nadine Brousseau, en la escuela “Jules Michelet” (Francia). En la experiencia se puso en práctica la enseñanza de una serie de tareas producida por G. Brousseau sobre los números racionales y decimales. Se trata de un manual que describe una secuencia de 65 lecciones, llevadas a cabo en un 4to. grado por docentes de la escuela citada, reproducidas en dos clases paralelas por más de quince años, participando de ese modo más de 750 alumnos. Las condiciones en las que se llevó a cabo la experiencia se reconocen como especiales, en el marco de un convenio de la Universidad de Bordeaux y la escuela. Los alumnos provienen de sectores de bajos recursos económicos. Se desempeñan tres profesores por cada dos clases, trabajan juntos, en un sistema muy estructurado donde el trabajo de los profesores e investigadores se apoya mutuamente. En este trabajo, continuación de otro donde se introducen los números racionales, se introducen los decimales con un significado conveniente para ordenar los números racionales y operar con ellos. La metodología aplicada en las clases sigue los lineamientos de la “Teoría de las Situaciones Didácticas”.

En lo que atañe al tópico específico, se deja explícito el pensamiento matemático sobre el que se rigen, algunos principios didácticos que gobiernan la estructura, y la enseñanza se realiza por medio de situaciones.

Establecen que racionales y decimales son dos respuestas diferentes a un mismo problema: encontrar números que aproximarán las medidas de cantidades continuas.

En tal sentido describen algunas cuestiones esenciales que se derivan de los principios mencionados:

- no se limitan a estudiar los aspectos tradicionales de las fracciones. En su lugar, consideran necesario estudiar el orden de un conjunto y la topología de los racionales y decimales.
- En este proyecto se trataría de enseñar primero los racionales para poder descubrir los beneficios de los números decimales. Se establecerían relaciones entre las tres

estructuras: números naturales, racionales y decimales para promover luego, la evolución de la relación entre ellas.

- Los racionales son usualmente presentados en forma de fracción, no obstante no siempre éstas son concebidas en sus distintos roles, como conceptos matemáticos diferentes (las fracciones como medida, como aplicaciones lineales o como razón). Se trataría de enseñar los dos primeros conceptos distinguiéndolos y de manera sucesiva. Por otro lado, las razones permanecerán por mucho tiempo como relaciones entre números naturales o "razones" entre dos números naturales. La identificación formal de estas relaciones con los números racionales deberá hacerse después del estudio de las aplicaciones lineales. Las manipulaciones con razones seguirían siendo familiares y fundamentales, pero implícitas.

Cramer, Wyberg, y Leavitt. (2009). Tal como hemos señalado al introducir el grupo RNP (Rational Number Project), en la sección 1.4, se plantea un tipo de organización de la enseñanza que valora el rol que juega el profesor en el aprendizaje de los estudiantes, como así también la necesidad de trabajo cooperativo por parte de los alumnos. Se propicia la discusión de las ideas, y el uso de manipulativos o modelos gráficos para representar fracciones y decimales. Esta concepción lleva a organizar las lecciones básicamente en cuatro partes. Una primera sesión corta (10 a 15 minutos) de "precalentamiento", cuyo objetivo es revisar las ideas desarrolladas en lecciones previas. Luego, se continúa con una sección de introducción a todo el grupo, siguiendo con reuniones de discusión en pequeños grupos. Se termina con una sección de acogida de lo discutido y una actividad a modo de cierre de la lección. El módulo también contiene una sección parte de tareas extraescolares para afianzar los conocimientos.

En particular, las actividades que se proponen para los números decimales siguen una trayectoria similar a la propuesta para la enseñanza de las fracciones. Se utilizan múltiples modelos para desarrollar el significado de los números decimales. Utilizan la cuadrícula de 10x10 y la recta numérica para propiciar ideas de orden y equivalencia. Sostienen que, la cuadrícula permite desarrollar fuertes ideas mentales que luego son el sustento para el trabajo con operaciones con decimales. Los decimales son introducidos utilizando la cuadrícula de 10x10 y la recta numérica. Después de trabajar con decimales, se retorna a la adición y sustracción de fracciones usando la recta numérica, porque han encontrado que la comprensión de los estudiantes del modelo de la recta numérica es más fácil con decimales que con fracciones. Para la suma utilizan un modelo especial que consiste en un conjunto de 3 cuadrículas, una para cada sumando y otra para el resultado.

Concretamente para los números decimales se plantean los siguientes objetivos:

- Uso de cuadrículas de 10x10, para desarrollar el significado de los números decimales basados en las fracciones y en la idea de valor posicional.

- Desarrollo de estrategias de orden basadas en imágenes mentales sobre modelos concretos, para juzgar el tamaño relativo de los decimales.

- Uso de cuadrículas de 10x10 para la comprensión de la equivalencia decimal.

- Representación de decimales y, de sumas y restas de decimales sobre la recta.

- Utilización de un modelo consistente en 3 cuadrículas 10x10, dos para los sumandos y otra para el resultado, para sumar y restar decimales.

- Resolver problemas de adición y sustracción decimal, de manera simbólica, y juzgar la razonabilidad de los resultados usando la estimación.

De las veintiséis lecciones que comprenden el módulo, a partir de la lección 9 se comienzan a desarrollar ideas sobre los números decimales (el inicio se conecta a partir de las fracciones decimales), y se continua su tratamiento, de manera específica, hasta la lección 15. A partir de allí se retorna a las fracciones para utilizar el modelo de la recta.

En cuanto a los conocimientos centrales y la secuencia que proponen se describe de la siguiente manera:

Los estudiantes deben crear un modelo para los decimales usando cuadrículas de 10x10, para mostrar décimas y centésimas. Estas deben estar expresadas en palabras, fracciones, símbolos y decimales.

Por otra parte deben desarrollar una comprensión de las milésimas y comenzar a ver la equivalencia entre décimas, centésimas y milésimas. Desarrollar, además, estrategias de orden para identificar el tamaño de dos decimales, por clasificación en un conjunto de decimales y encontrar un decimal entre dos dados.

Estimar sumas y diferencias usando imágenes mentales sobre cuadrículas de 10x10. Desarrollar estrategias para sumar y restar decimales.

Encontrar respuesta exacta a la suma y resta de decimales usando cálculo mental. Revisión de orden y equivalencia, y práctica de adición y sustracción en la resolución de problemas contextuales. Uso de la regla de medir, como modelo para los decimales para conectar este nuevo modelo con el modelo de la cuadrícula de 10x10.

Suh, Johnston, Jamieson y Mills (2008). El artículo muestra una experiencia de trabajo colaborativo en torno a la planificación y enseñanza de una lección sobre números decimales. Entre los participantes del proyecto, se encontraban maestros de 5to y 6to grado, ayudantes de estudio, un profesor de matemáticas universitario, un estudiante de doctorado y un especialista en matemática escolar. El objetivo central de la lección consistió en desarrollar, en los estudiantes, fluidez representacional y competencia matemática con decimales. Para la comprensión de la problemática representacional en matemática y justificar su importancia, se basaron en el modelo de representaciones múltiples propuesto por Lesh (2003). (Sobre este modelo, hemos referido en el apartado 1.5.2).

La lección se desarrolló en tres fases. La primera fase, refiere a la planificación colaborativa; la segunda, a la enseñanza con múltiples representaciones y la tercera, destinada a la reflexión sobre el desarrollo de la fluidez representacional. Algunos de los puntos esenciales que guiaron el proceso descrito fueron los siguientes:

- ¿Qué es importante y necesario de la comprensión matemática, para el estudiante?
- ¿A qué tipos de representaciones debería tener acceso un estudiante para dar sentido a un concepto?
- ¿Qué bases conceptuales y estrategias de enseñanza serían adecuadas para lograr un buen aprendizaje en los estudiantes?
- ¿Cómo responder a las eventuales dificultades de los estudiantes?

En la primera fase, los maestros construyeron un mapa conceptual con los conocimientos claves y los vinculados a ellos, necesarios para construir los conocimientos futuros. Además, identificaron representaciones o modelos para enseñar tales conceptos. Durante la discusión se enfatizó sobre lo que estudiantes deberían comprender, y la necesidad de relacionar fracciones con decimales a través de distintas representaciones. Concretamente, se habló de la estructura del sistema en base diez, el sistema de numeración posicional, de la importancia de la posición y del valor posicional. Otras cuestiones como la adición decimal, la estimación y la comprensión de magnitudes de números decimales fueron agregadas. También fueron discutidas las representaciones y actividades de aprendizaje utilizadas previamente. Se exploraron en profundidad formas de representación provenientes del uso de distintos recursos.

Evaluaron la efectividad de las representaciones utilizando criterios de transparencia, eficiencia, generalidad, claridad y precisión.

Como dijimos, la segunda fase consistió en la implementación de las tareas. Se comenzó con conocimientos previos sobre fracciones y decimales a través de una clase de discusión. Antes de comenzar, los profesores colocaron en la pizarra una serie de valores y palabras sueltas como, decimal, fracción, punto decimal, décimas, centésimas. El interrogante que lanzó la discusión fue: ¿Qué había de nuevo respecto a fracciones y decimales? Ante ello, los alumnos intentaban poner en correspondencia las palabras con los valores e incluso, utilizar otras representaciones para mostrar su compresión. Fue entonces cuando se puso a punto el nuevo vocabulario surgido, equivalencia, redondeo, estimación, sumandos, suma. Luego, los profesores distribuyeron cuadrículas de 10x10, cada tarjeta tenía sombreado un valor diferente. Los alumnos, trabajando en pares, debían asignar un valor utilizando notación fraccionaria y decimal. También podían utilizar un cuaderno de notas donde se ponía en evidencia la flexibilidad representacional, al buscar las equivalencias entre distintos sistemas de representación. Del mismo modo, se trabajó con la adición aprovechándose en este caso la oportunidad de relacionar la distancia que separa a un número decimal del 1, a partir de la suma de dos decimales.

En la tercera fase, se evaluó el resultado obtenido producto de la aplicación de las dos primeras fases. En síntesis los autores observaron que las representaciones:

- Fomentaron la flexibilidad del pensamiento y la generalización.

  (Puesto que, el uso de las distintas representaciones permite ver, desde los conocimientos previos de la base 10 y sus relaciones con números enteros, que los decimales son una extensión del sistema de numérico de base 10 y no un sistema diferente).

- Fueron usadas para evaluar la comprensión matemática de los estudiantes.

  (Interrogantes del tipo: ¿Por qué decidió colocar el dígito en lugar de los décimos?, ¿Qué otros dígitos podría considerar en tal posición? ¿Cómo cambiar los dígitos sin afectar la suma?, llevó a los estudiantes a pensar, hacer conjeturas, y validar su hipótesis utilizando las concepciones adquiridas).

- Sirvieron como herramientas para comunicar ideas matemáticas.

> (Las múltiples representaciones como la cuadrícula decimal, la tabla de valor posicional, los dígitos, el vocabulario y los símbolos numéricos, facilitaron la habilidad de los estudiantes para comunicar y dar sentido a las ideas matemáticas cuando trabajaron en parejas).

En síntesis, el uso de múltiples representaciones y de la traslación flexible de una a otra promocionó el desarrollo del sentido numérico del número decimal.

1.6.3 El papel de los recursos

Thompson (1994). La intención que persigue este autor es reflexionar sobre el papel de los manipulables en la enseñanza para ayudar a la comprensión matemática, abogar por un uso juicioso y reflexivo de los mismos. El planteo sobre el uso de los materiales pone en discusión dos cuestiones, la acción y la comprensión. Sostiene que para hacer un uso beneficioso de ellos el profesor debe preguntarse, "« ¿Qué quiero que mis alumnos *comprendan*?» en lugar de « ¿Qué quiero que mis alumnos *hagan*?" (p.557). Comenta, que generalmente se piensa que un cubo de madera está más próximo a los alumnos que si se realiza un dibujo, cuando se lo usa como unidad para explicar el sistema decimal. "Necesitan crear una imagen del cubo. Que el cubo sea un material concreto no aporta al sistema decimal".

Este comentario no quiere decir que nunca haya una diferencia significativa para los alumnos entre los dibujos y los objetos reales. Viene a significar que los materiales no llevan implícitos significados matemáticos para los alumnos. Puede existir gran diferencia entre cómo los alumnos experimentan con materiales concretos y sus experiencias con dibujos o representaciones, pero esa diferencia está en cómo ambos son usados.

Cramer, Wyberg y Leavitt (2009). Consideran que el círculo es un modelo manipulativo muy importante para el trabajo con fracciones puesto que permiten crear imágenes mentales sobre ellas. No obstante consideran otros materiales que durante las clases han puesto en juego los alumnos, como papel de plegado para fracciones equivalentes, "papel encerado" (un modelo de área) para la multiplicación de fracciones, cuadrículas de 10x10 para los decimales, y la recta numérica para fracciones y decimales. Para la suma y resta de decimales usan lo que denominan "tablero decimal" sobre cuadrículas de 10x10 (se trata de un conjunto de tres grillas de 10x10, dos para los operadores y otra para el resultado). Además objetos como el "meter stick" (regla para medir), que utilizan los estudiantes como modelo para los decimales como conexión desde la cuadrícula de 10x10.

1.7. ALGUNAS CUESTIONES ABIERTAS DE INVESTIGACIÓN

Ante las problemáticas planteadas de diversas índoles, a continuación describimos algunas intenciones, aspiraciones y/o planteos que surgen de la comunidad de investigadores en esta línea.

Moreno, Hernández y Socas (2004). Sostienen la necesidad de organizar propuestas de enseñanza-aprendizaje en la formación del profesorado, que tomen en cuenta los errores detectados. Que los errores preconcebidos quizás tenga su origen en desarrollos erróneos en la escolaridad primaria y secundaria. Los estudiantes deben participar activamente en tareas que les permita confrontarse con los problemas, es decir se deben provocar conflictos mentales que les permita afrontar una conceptualización adecuada del número decimal. La continuidad de este estudio con otros grupos de alumnos en la Formación de Maestros, sostienen les permitiría no solo analizar los errores sino determinar su origen.

Chick (2003). A partir de su investigación, con futuros profesores para enseñanza primaria y media, sostiene que una componente fundamental del conocimiento pedagógico del contenido, parece ser lo que podría llamarse fluidez conceptual. Lo que significa no solo dominio de procedimientos y conceptos, también la habilidad para articularlos. En tal sentido, resulta necesario tiempo en cursos de preparación para hacer frente a los conceptos matemáticos fundamentales y explorar representaciones para ellos con el propósito de lograr tal fluidez. Con el mismo propósito, se enfatiza que disponer de un instrumento de evaluación escrito, ofrece algunas ventajas prácticas, como la facilidad de uso para un estudio mayor; y también, como un medio eficiente para reunir alguna información preliminar, sobre la comprensión de los profesores.

Michaelidou, Gagatsis, y Pitta-Pantazi(2004). En relación a lo investigado sobre la integridad del concepto de número decimal, desde una perspectiva que toma en cuenta el reconocimiento del número, la representación y la relación entre las distintas representaciones, se espera que las futuras investigaciones se actué sobre la organización y conducción de programas de intervención. Programas que muestren, particularmente a la recta como uno de los significados de la representación de los números decimales.

1.8. SÍNTESIS DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS DECIMALES

. En esta sección hacemos una síntesis de los conocimientos didácticos identificados en las investigaciones, clasificándolos en cinco apartados, de acuerdo con las siguientes dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino, Batanero y Font, 2007): dimensión epistémica (contenido matemático); dimensión cognitiva (conocimientos de los estudiantes y cuestiones de aprendizaje); dimensión instruccional (modos de organizar la enseñanza y el uso de recursos); dimensión ecológica (aspectos curriculares y relaciones con otras áreas y temas); dimensión afectiva (aspectos vinculados al interés, la motivación, la auto-estima, etc.)

1.8.1. Dimensión epistémica

Los números racionales (y por tanto también los números decimales) se pueden escribir mediante fracciones o con notación decimal (abreviatura de la correspondiente expresión polinómica). Es importante no confundir los números con sus posibles formas de expresión, ya que lo que caracteriza a los números racionales (y decimales) son sus propiedades topológicas y algebraicas (Brousseau, Brousseau y Warfield, 2007, p. 282). El conocimiento, comprensión y el uso competente de los números racionales requieren el dominio de una red de nociones relacionadas entre sí, todas ellas ligadas al campo conceptual de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1983; Ohlsson, 1988; Baturo y Cooper, 1998; Lamon, 2007).

La importancia del estudio de estos números en la escolaridad obligatoria es ampliamente reconocida; por un lado, por la necesidad de medir de manera aproximada cantidades continuas, lo que supone abordar un problema de interés práctico (Centeno, 1988; Ferrari, 2006). Por otro lado, desde una perspectiva teórica, la matemática va exigiendo de una generalización que permita ir solucionando tanto las limitaciones que cada teoría muestra para determinados avances, como la necesaria descontextualización. Es así que la insuficiencia de los números naturales para resolver ecuaciones lineales obliga la extensión del semianillo de los números naturales a los números enteros, y luego a los racionales, con el propósito de dar solución teórica a distintos tipos de ecuaciones (Ferrari, 2006). Cabe destacar que Moreno, Hernández y Socas (2004), en concordancia con la posición de Brousseau y Brousseau (1987), señalan la necesidad de organizar la enseñanza de los números decimales de tal manera que sean considerados como un conjunto con entidad propia.

1.8.2. Dimensión cognitiva - afectiva

Investigaciones llevadas a cabo por Steinle, Stacey y Chambers (2006), entre otros autores, sostienen que las dificultades en la interpretación de la notación decimal son la causa de muchos problemas que surgen en las operaciones aritméticas con números decimales, en el redondeo, en el trabajo con cifras significativas y globalmente en cuestiones de sentido de las matemáticas.

Son bien reconocidos, desde hace tiempo, aspectos relativos al número decimal que implican dificultades en su aprendizaje. En relación a ello, en la literatura, se describen errores relacionados con:

- El concepto de número decimal (reconocimiento del número decimal, valor de posición, conflictos con el cero) (Centeno, 1988; Zazkis y Khoury, 1993**;** Socas, 2001; Steinle, 2004; Socas, 2004; Michaelidou, Gagatsis y Pitta-Pantazi, 2004; D'Amore, 2008; D'Amore y Fandiño, 2009).
- La escritura y/o representación (distinción entre número y representación, equivalencias, transformaciones, aproximación decimal) (Socas, 2001; Sirvent, 2002; O`Connor, 2001; Suh, Johnston, Jamieson y Mills, 2008; Vourgias, Vourgia y Elia, 2003**;** Cid, Godino y Batanero, 2004; Michaelidou, Gagatsis y Pitta-Pantazi, 2004; Steinle, 2004; Chick, 2003; Zazquis y Sirotic**,** 2004; Konic, Godino, Castro y Rivas, 2007; Gagatsis, Deliyianni, Elia y Panaoura**,** 2010).
- Propiedades (orden, densidad de los decimales en Q) (Centeno, 1988; Put, 1994; Ruíz, 2004; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004**;** Socas, 2004**;** Steinle, Stacey y Chambers, 2006).
- Procedimientos (comparación) (Steinle, Stacey, 2004; Stacey at al., 2001)
- Las operaciones (Bernander y Clement,1985**;** Centeno, 1988; Graeber y Tirosh, 1988; Baturo y Cooper, 1998; Roditi, 2003; Chick, 2003)

También se han desarrollado algunas investigaciones que tienen en cuenta aspectos de tipo afectivo, tal es el caso del estudio realizado por Merenluoto (2004), quien estudió perfiles de tipo cognitivo - motivacional en relación a las fracciones y números decimales en estudiantes de los primeros cursos de la escuela media. En su estudio evaluó aspectos como la tolerancia a la ambigüedad y la auto-estima del estudiante en matemáticas.

1.8.3. Dimensión instruccional

La enseñanza de los decimales es usualmente abordada siguiendo diversos principios psico-pedagógicos aplicados en educación matemática, dando mayor o menor protagonismo a los estudiantes en la construcción del conocimiento. En este apartado debemos destacar las investigaciones realizadas en la década de los 70 por Guy y Nadine Brousseau sobre la enseñanza de los racionales en la escolaridad obligatoria (Brousseau y Brousseau, 1987; Brousseau, Brousseau y Warfield, 2004). Estas experiencias están basadas en la Teoría de Situaciones en la cual se enfatiza la construcción del conocimiento por los propios alumnos, esto es, siguiendo principios socio-constructivistas sobre el aprendizaje matemático. En Centeno (1988) encontramos ejemplos de situaciones de estudio de los decimales diseñadas y experimentadas por Brousseau. También en Ruiz (2004) se presentan modelos de situaciones basadas en las ingenierías didácticas producto de experimentaciones e investigaciones llevadas a cabo por diversos autores.

Así mismo, Steinle, Stacey y Chambers (2006) elaboraron lecciones y juegos, planteando puntos de discusión con el propósito de diagnosticar concepciones erróneas, conectar los decimales con los números enteros y las fracciones, trabajar operaciones con decimales, desarrollar habilidades en la estimación y detectar propiedades de los decimales.

Cramer, Wyberg y Leavitt (2009), en el marco del NRP (National Number Project), a partir de un proyecto de investigación y desarrollo sobre la enseñanza de los números racionales, han elaborado, entre otros documentos, un texto que ofrece guías para el profesor y una serie de lecciones que abordan la enseñanza de las fracciones, operaciones e ideas iniciales sobre los decimales, con una metodología que intenta integrar y relacionar de manera constante estos conceptos. En esta misma línea, y basadas en el modelo de Lesh, el equipo integrado por Suh, Johnston, Jamieson y Mills (2008) realizaron un trabajo colaborativo en torno a la planificación y enseñanza de una lección sobre números decimales. Evaluaron la efectividad de las representaciones utilizando criterios de transparencia, eficiencia, generalidad, claridad y precisión.

En el marco del Proyecto Edumat-Maestros y bajo la dirección y edición de Godino (2004) se elaboraron dos textos: Matemática para maestros y Didáctica de la matemática para maestros. En ellos, para cada tópico tratado en sus diferentes capítulos y en particular para los Sistemas Numéricos, se desarrollan los siguientes aspectos: Contextualización profesional, Conocimientos matemáticos y Conocimientos didácticos.

Por otra parte cabe destacar otros investigadores que, en esta dimensión, se abocaron al tratamiento de algunos tópicos específicos. Una descripción somera es la que se presenta a continuación.

- Conocimiento profesional en relación al contenido matemático
    - ✓ Relación entre conocimiento matemático académico y conocimiento matemático escolar (el caso de los números). Moreira y David (2007)
    - ✓ Interacción en el aula. Propósito: Iluminar caminos de acción en el profesor, a partir de la provocación del pensamiento de los estudiantes ante cuestiones matemáticas, desde una posición que genere discusión, ante la complejidad de relaciones que emergen del tratamiento de nociones y propiedades en los números. (O´Connor, 2001).
    - ✓ Trabajo del contenido números decimales en el contexto de los sistemas numéricos y desarrollo de conocimientos didácticos específicos en relación a dicho contenido, en la formación de maestros. (Cid, Godino y Batanero, 2004)
- Propuestas de trabajo integral entre las nociones de fracciones, decimales y razón.
    - ✓ Propuesta de introducción de los decimales a partir de la razón. Desde la perspectiva del cambio conceptual. (Lachance y Confrey, 2002).
    - ✓ Se enfatiza en la relación entre cantidades y la necesidad de nuevos símbolos y la ampliación del sistema de numeración decimal. (Llinares, 2003).

Diversos son los materiales que a lo largo de la historia se han utilizado como recursos para trabajar los números decimales, desde las regletas de Cuisenaire, bloques multibases, ábacos, cuadrículas, reglas para medir, el tablero decimal, la recta numérica, la calculadora, hasta el ordenador. Actualmente existen diversos recursos informáticos que permiten, tanto al docente como al alumno, disponer de una herramienta interactiva que proponen, a través de la visualización y ejercitación autónoma, nuevas herramientas en apoyo de la compresión y justificación de nociones, propiedades, algoritmos. Un ejemplo de interés puede verse en el sitio: http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2008/visualizador_decimales/menu.html. Así mismo existen otro tipo de recursos que cumplen un rol mediacional importante, el libro de texto, por ejemplo, es usado con frecuencia por el profesor como "auxiliar" en el proceso de enseñanza, siendo por tanto un factor clave en el modo en que el profesor interacciona con los alumnos. Un texto escolar puede ser utilizado por el docente como referente para organizar sus clases, pero también como una "guía" de estudio para los alumnos. Putt (1994), sobre el uso de los materiales pone en discusión dos cuestiones, la acción y la comprensión. Dado que no siempre del mero hecho de actuar con ciertos recursos, se logra el tipo de comprensión matemática que se pretende. Por lo que exhorta a un uso reflexivo de los mismos.

1.8.4. Dimensión ecológica

La utilidad de los números decimales para el desenvolvimiento social de las personas se reconoce tanto en las investigaciones educativas como en las prescripciones curriculares (Irwin, 2001; Ministerio de Educación y Ciencia, 2006; NCTM, 2000). Brousseau (1987,1988), establece un modelo de progresión a seguir en la construcción de los números decimales en la escuela primaria con proyección al nivel secundario. Socas (2001) propone una organización curricular que hacer emerger a los números decimales con entidad propia. En este contexto, cabe destacar que los conceptos de valor posicional y representación decimal de los números racionales son consideradas componentes esenciales del currículo de matemáticas en la escolaridad elemental (Zazkis y Khoury, 1993; Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin y Bana, 2001).

Irwin (2001) rescata la importancia del contexto de la vida diaria, como promotor en la resolución de problemas con números decimales, ya que afirma que los estudiantes pueden realizar una compresión científica de estos números reflexionando sobre su conocimiento diario. En esta misma línea encontramos la posición de Bonotto (2006), quien fija el foco de atención en situaciones de la vida diaria, con el propósito de promover un enfoque hacia la modelización de una matemática realista.

Por su parte, en la concepción y diseño de los libros de textos actuales, se observa una fuerte tendencia a presentar tareas que buscan vincular situaciones de la vida cotidiana con los contenidos matemáticos respectivos.

CAPITULO 2

PROBLEMA DE INVESTIGACION. MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

2.1. INTRODUCCIÓN

Como se desprende del Capítulo 1, extensas y diversas son las cuestiones que se movilizan en torno a los números decimales. También diversas y de gran cuantía han sido las investigaciones dedicadas al problema del aprendizaje de estos números. Gran parte de ellas refieren a errores y dificultades que manifiestan los niños en el aprendizaje, y en menor escala errores vinculados a estudiantes para futuros profesores. Por otra parte, no han sido pocas las razones y propuestas de diversa índole, que se dieron para explicar y afrontar tales dificultades. Aun así, nos preguntamos, ¿Por qué las problemáticas vinculadas a este tipo de números continuaron manifestándose de manera persistente?

En este capítulo, centrados en la preocupación de la formación de los futuros profesores en cuanto a los números decimales, y mediante sucesivas aproximaciones, derivamos en la definición de nuestro problema de investigación. Describimos los elementos teóricos que consideramos pertinentes para el desarrollo de la investigación, formulamos objetivos y planteamos algunas hipótesis iniciales. Por último, describimos las fases del plan de acción y el método implementado en cada fase de la investigación.

2.2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Los planteos generales que se realizaron en el capítulo 1, sobre el tópico números decimales, unido a la descripción de antecedentes de investigación, nos permitió evidenciar un área problemática, con un nivel de globalidad que da cuenta acerca de estos números, desde distintas perspectivas. Particularmente, interesa destacar, la diversidad de cuestiones vinculadas a su concepción como objeto epistémico, su aprendizaje y su enseñanza.

Si centramos nuestra atención en el ámbito del aprendizaje, observamos preocupante que las investigaciones demuestren dificultades sobre el conocimiento de estos números, no solo en los niños, sino también en los estudiantes para profesor, y aún en los profesores en actividad.

Este estado de la cuestión nos permitió vislumbrar, como formadores de futuros profesores, la necesidad de realizar una evaluación comprensiva de lo que sucede actualmente, con esta parcela de la matemática, en los estudiantes para profesor. Tal como sostienen Hill, Ball y Schilling (2008), los educadores en matemática debemos hacer más por explicar estos fenómenos, y desarrollar instrumentos nuevos, más sensibles, que permitan captar las claves de las características del problema del conocimiento para enseñar.

En esta dirección, nos planteamos nuestro primer interrogante:

¿Cuál es el estado actual del conocimiento para enseñar que, sobre los números decimales, tienen los estudiantes para profesor?

Este planteo derivó en una cuestión más específica:

¿Qué conocimiento, sobre el contenido números decimales, poseen los estudiantes para profesor de enseñanza primaria?

Previamente a abordar esta cuestión hemos considerado necesario analizar modelos teóricos sobre las categorías de conocimientos del profesor de matemáticas usadas en la investigación en educación. En este sentido consideramos necesario plantearnos la siguiente cuestión de tipo teórico:

CT: ¿Las categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas propuesto por Ball y colaboradores son suficientes y operativas para caracterizar dichos conocimientos?

A los fines de caracterizar los conocimientos sobre los decimales de los futuros profesores nos planteamos las siguientes cuestiones específicas:

C1: *¿Poseen conocimiento suficiente y adecuado del contenido números decimales?*

C2: *¿Dan evidencias de un conocimiento que les permita vincular, de manera coherente, distintos aspectos del contenido?*
C3: *¿Existen indicadores que revelen que poseen un conocimiento amplio sobre este contenido?*
C4: *¿Demuestran comprensión al valorar la tarea realizada por un alumno de primaria?*

Así es que, centramos nuestro problema de investigación en la exploración del estado del conocimiento que muestran futuros profesores para la enseñanza primaria. Dicha exploración se realiza sobre algunos aspectos inherentes al conocimiento del contenido: números decimales.

A los fines de organizar el plan de trabajo, en primer lugar describiremos las herramientas teóricas que utilizaremos para el desarrollo del problema, lo que haremos en el apartado siguiente.

2.3. MARCO TEÓRICO

Para comenzar con el estudio, es necesario precisar que entendemos por conocimiento en el contexto de nuestro problema, esto es, caracterizar un tipo de conocimiento destinado a la formación de futuros profesores de matemáticas. Si bien, es ampliamente aceptado por la comunidad de investigadores en educación de profesores de matemáticas, que es de interés y un problema de investigación caracterizar el conocimiento matemático para la enseñanza, no es menos cierto que hay una comprensión limitada de ello, tal como manifiestan Silverman y Thompson (2008). No obstante, en nuestro caso, adoptamos en primera instancia la noción "Conocimiento matemático para la enseñanza", introducida por Ball y colaboradores en diversos trabajos de investigación (Ball 2000, Ball, Lubienski y Mewborn, 2001), además de considerar la tipología que describen estos autores para dicho conocimiento. No obstante, como nuestro objetivo es evaluar conocimientos puestos en juego por estudiantes para profesor, necesitamos disponer de un instrumento que nos permita llevar a cabo tal medición. En tal sentido, la tipología propuesta por los mencionados investigadores, en sí misma no aporta criterios detallados sobre los componentes de cada tipo de conocimiento, condición que consideramos esencial para hacer operativo nuestro estudio. Encontramos que el "Enfoque Ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; 1998; Godino 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) dispone de herramientas teóricas adecuadas para hacer una interpretación y desglose operativo de las categorías mencionadas. Por otra parte, dichas herramientas posibilitan la realización de análisis detallados sobre la diversidad de entidades matemáticas involucradas en una tarea (ítem de un cuestionario), o las que eventualmente manifieste un sujeto a través de su resolución. En los siguientes apartados, presentamos una síntesis de las nociones teóricas, que sirven de base a nuestra investigación.

2.3.1. Conocimiento matemático para la enseñanza

Ball, Hill y Bass (2005), ya describían el conocimiento matemático para enseñar del siguiente modo, "Se trata de una clase de conocimiento profesional de las matemáticas distinta de la requerida por otras profesiones que utilizan las matemáticas de manera intensiva, tales como ingeniería, física, contabilidad, o la carpintería" (p.18).

En la conceptualización del Conocimiento matemático para enseñar (MKT), Schilling y Hill (2007), especifican que: "los profesores no solo necesitan realizar cálculos básicos por sí mismos, también necesitan proveer a los estudiantes de explicaciones de por qué se trabaja con ciertos procedimientos, diagnosticar errores en los procedimientos de los estudiantes, comprender procedimientos correctos no estándares" (p. 76).

Hill, Ball y Schilling (2008), definen entonces el MKT, como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno." (p.374).

Hill et al. (2008), clasifican el conocimiento puesto en juego por el profesor en dos grandes grupos (conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido) y en seis categorías[1], tal como se muestra en la Figura 2.1.

[1] Las siglas que serán utilizadas en el texto, corresponden a la expresión inglesa asignada para cada categoría del " Mathematical Knowledge for Teaching" (MKT).

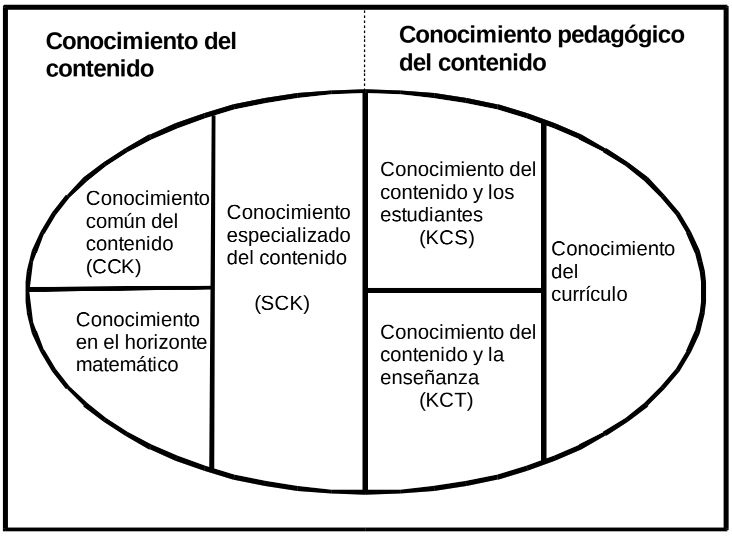


Figura 2.1.: Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p.377)

Como podemos observar, para abordar el conocimiento del contenido, consideran tres categorías: Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático. Para el conocimiento pedagógico del contenido, también establecen otras tres categorías: Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y Conocimiento del Currículo.

A continuación describiremos aquellas categorías de conocimiento que utilizaremos en nuestra investigación.

Cuando los mencionados investigadores refieren al Conocimiento del contenido Común (CCK), lo hacen de la siguiente manera: "se describe como el conocimiento que es usado en el trabajo de la enseñanza, en las formas comunes con las que es usada en muchas otras profesiones u ocupaciones que también utilizan las matemáticas" (p.377).

En cuanto al Conocimiento Especializado (SCK), lo caracterizan como "el conocimiento matemático que permite a los profesores participar particularmente en *tareas de enseñanza,* incluyendo cómo representar con precisión las ideas matemáticas, dar explicaciones matemáticas para reglas comunes y procedimientos, y examinar y comprender métodos de solución, no usuales, a los problemas". (pp. 377,378).

Estos investigadores consideran también, que el conocimiento del contenido debe apoyarse en una visión más amplia de los mismos, en el sentido, que le permita al profesor proyectarlos hacia otros niveles educativos. Es decir, un conocimiento que le proporcione perspectiva. Entendemos que, a esto refieren cuando hablan de Conocimiento en el Horizonte y que nosotros denominaremos Conocimiento Ampliado (Godino, 2009, p. 25).

En tanto que, al considerar el conocimiento pedagógico del contenido, definen el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), proporcionando algunas características esenciales que debe adquirir un profesor: “Por ejemplo, cual es la mejor manera de construir el pensamiento matemático en los estudiantes, o como solucionar los errores de los estudiantes. Está focalizado en la comprensión de los profesores de cómo los estudiantes aprenden un contenido particular”. (p. 378).

El desarrollo de las categorías mencionadas, es indudable que constituyen un fuerte avance para investigar en el dominio del conocimiento específico del profesor. No obstante, muchas cuestiones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, su contenido, estructura, y el modo en que influye en la enseñanza y el aprendizaje, permanecen abiertas.

En este sentido, Hill, et al. (2008), argumentan que en la investigación en educación matemática, faltan estudios que demuestren que los profesores poseen un conocimiento diferente del conocimiento del contenido en sí mismo. Además sostienen que no se han desarrollado, validado, ni publicado medidas para evaluar programas diseñados para mejorar el conocimiento de los maestros en este dominio, y cómo este conocimiento se relaciona con el logro de los estudiantes.

Si bien, se registran algunas líneas de desarrollo con el propósito de evaluar el Conocimiento del contenido (CK) y el Conocimiento Pedagógico del contenido (PCK), y por ende validar los respectivos instrumentos, suelen ser poco comparables dadas las diferencias en su aplicación. Especialmente en cómo se conciben estas categorías y a qué población se aplica (Krauss, Baumert y Blum, 2008). Tal es el caso de los grupos, que se mencionan a continuación, y que llevan adelante sus propios estudios sobre tests para las mencionadas categorías de conocimiento. El proyecto “Cognitively Activating Instruction, and the Development of Students´ Mathematical Literacy” (COACTIV), sobre Competencia Profesional de los profesores y financiado por la fundación alemana de investigación (DFG); The Michigan group, encabezado por Deborah Ball y colaboradores, desde el año 1990, con un marco teórico sobre el estudio de “Teacher Education and Learning to Teach” (TELT); y “Mathematics Teaching in the 21st

Century" (The MT21 study), estudio piloto correspondiente a: "The International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA),ejecutado en Alemania y focalizado en futuros profesores de escuela secundaria.

Coincidimos con Hill et al. (2008), dado que en esa dirección nos dirigimos, que "los educadores necesitan hacer más para explicar estos fenómenos- comenzando por nuevos desarrollos, más instrumentos sensibles que describan las características claves del profesor". (p. 373).

2.3.2. "**Enfoque Ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)**

El "Enfoque Ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), es un marco teórico que articula puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. En su estructura se incluye un modelo epistemológico sobre las matemáticas, basado en presupuestos antropológicos/socioculturales, un modelo de cognición basado en la semiótica, un modelo instruccional de tipo socio-constructivista y un modelo sistémico-ecológico que relaciona las dimensiones anteriores.

Las nociones que brinda el EOS pueden ser utilizadas como herramientas que posibilitan analizar y comprender, de manera sistemática, diversos aspectos implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En particular, como herramientas para realizar un análisis didáctico de un contenido o tarea matemática.

En este marco teórico se considera como *análisis didáctico*, "el estudio sistemático de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido curricular- o de aspectos parciales del mismo- con unas herramientas teóricas y metodológicas específicas" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; p.4).

Por su parte, debido a la complejidad que subyace a estos procesos, por la interacción de distintas componentes (contenido, estudiantes, profesor, medios, contextos), el EOS considera necesario identificar distintas facetas intervinientes en los procesos de instrucción y varios niveles de análisis. Cuestiones que caracterizan de manera sistemática y que describimos en los apartados siguientes.

2.3.2.1. Facetas y niveles de análisis didáctico

El EOS propone para el análisis didáctico, facetas y niveles de análisis. Concretamente se describen seis facetas y cuatro niveles de análisis. Las facetas propuestas refieren a las siguientes dimensiones: Epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica. Con respecto a los niveles se describen, un nivel que hace referencia a las prácticas matemáticas y didácticas, otro a las configuraciones de objetos y procesos matemáticos y didácticos, un tercero que refiere a las normas y metanormas, y un último nivel vinculado a la noción de idoneidad. La figura 2.2, ilustra un modo de visualizar este conglomerado de facetas y niveles.

Figura 2.2: Facetas y niveles del conocimiento del profesor (   )

Para nuestro estudio consideramos claves las facetas epistémica y cognitiva, dado que nos centramos principalmente en dichas facetas . No obstante, también consideraremos las restantes facetas en una de las primeras fases del proceso, puesto que, nos resultan de utilidad para estructurar un modelo de referencia didáctico global para la enseñanza y el aprendizaje de los números decimales. A partir de la mencionada referencia global podemos derivar en un referente didáctico local, que nos permite validar la elaboración de un instrumento. Dicho instrumento nos debe permitir evaluar algunas categorías y tipos de conocimientos específicos que poseen los estudiantes para profesor.

Un referente didáctico sobre los números decimales, que nos proporcione indicadores para la elaboración del cuestionario, requiere la consideración de una multiplicidad de aspectos que intervienen en un proceso didáctico. Consideramos que, el amplio espectro de investigaciones que hemos recopilado en el Capítulo 1, es una fuente de información pertinente y relevante. No obstante, entendemos necesario que esa información tenga un alto grado de representatividad para nuestro objeto estudio. Por ello es que las facetas consideradas por el EOS, resultan operativas para este fin, dada la amplitud de aspectos considerados. Con vista a ello es que, a continuación, transcribimos una breve caracterización de tales facetas (Godino, 2009).

1. *Epistémica*: Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
2. *Cognitiva*: Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
3. *Afectiva*: Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
4. *Mediacional*: Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
5. *Interaccional*: Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
6. *Ecológica:* Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,... que soporta y condiciona el proceso de estudio.

En cuanto a los niveles de análisis, haremos referencia a los dos primeros dado que, desde el estudio de las prácticas matemáticas y, la configuración de objetos y procesos matemáticos puestos en juego en el desarrollo de una tarea, podemos analizar los tipos de conocimientos que poseen los estudiantes.

Se designa con *prácticas matemáticas y didácticas* a la descripción de acciones que se realizan al resolver una tarea matemática, y que ha sido propuesta para dar contexto a los contenidos y promover el aprendizaje. En tanto que, para dar cuenta de la complejidad de los objetos y significados de las prácticas matemáticas, como explicación de los conflictos emergentes, se hace referencia a las *configuraciones de objetos y procesos.* Se trata, por tanto, de la descripción de objetos y procesos matemáticos intervinientes en la realización de las prácticas.

2.3.2.2. Herramientas para el análisis didáctico

Tal lo anticipado, nuestro propósito es evaluar los conocimientos puestos en juego por estudiantes para profesor de primaria, en el ámbito de los números decimales, tomando como referencia un modelo didáctico local. Para ello, necesitamos elaborar un instrumento que nos permita llevar a cabo nuestro propósito. Esto es, elaborar una serie de ítems (tareas), traducidos en situaciones/problemas que colaboren en el logro de los objetivos. Interesa, como primer paso de aval del instrumento, llevar a cabo un doble proceso: por un lado, a partir de indicadores extraídos del referente didáctico, diseñar y/o elegir tareas. Por otro, una vez elegidas las tareas, realizar un análisis exhaustivo tanto de los de los objetos matemáticos que allí se movilizan, como el modo en que se configuran.

El EOS, ha elaborado categorías de análisis específicas para las dimensiones epistémica y cognitiva. Para ello, parten de las nociones de *práctica* y de *institución*, donde al objeto matemático se lo entiende como una entidad que emerge e interviene en las prácticas. En tal sentido, se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Cuando esas prácticas son propias de una persona, se las designa como prácticas personales; y cuando son compartidas en el seno de una institución[2], como prácticas institucionales.

Las nociones de práctica e institución definidas por el EOS, resultan por tanto, adecuadas para la investigación. Nuestro interés radica en estudiar y describir las prácticas matemáticas planificadas por una institución y las desarrolladas por un sujeto interviniente, con la finalidad de explicar conflictos semióticos que se producen en su realización.

Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales se habla de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-

[2] Las instituciones se conciben como comunidades de prácticas; dado que, se entiende por institución, al conjunto de personas vinculadas a una misma clase de situaciones problemáticas.

alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007).

Por tanto, la resolución de los ítems (prácticas matemáticas puestas de manifiesto), permitirán poner en descubierto objetos matemáticos involucrados y las relaciones que se establecen entre ellos.

En el EOS la noción de significado se usa de dos maneras diferentes, aunque relacionadas. En primer lugar, el significado se concibe de una manera simple, potente y operativa mediante la noción de función semiótica (Eco, 1978): El significado es el contenido de cualquier semiótica, esto es, el contenido de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, o significado), establecido por un sujeto (persona o institución) según un cierto criterio o código de correspondencia. El contenido de las funciones semiótica, y por tanto el significado, puede ser un objeto personal o institucional, unitario o sistémico, ostensivo o no ostensivo; puede ser un concepto/definición, un problema/situación/tarea, procedimiento, argumento, o un elemento lingüístico. De acuerdo con la semiótica de Peirce, el EOS también asume que tanto la expresión (antecedentes de una función semiótica) y el contenido (consecuente) puede ser cualquier tipo de entidad.

Otro modo posible de abordar el problema del "significado" es hacerlo en términos de uso. Desde esta perspectiva el significado de un objeto matemático debe ser entendido en términos de lo que se puede hacer con él. Esta es una perspectiva "sistémica", ya que considera el significado de un objeto como el conjunto de prácticas en que dicho objeto juega un papel determinante (o no). Estas dos maneras de entender el significado se complementan entre sí, puesto que las prácticas matemáticas implican la activación de configuraciones de objetos y procesos que están relacionados mediante funciones semióticas.

En el EOS se interpreta el conocimiento de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

La relación que el EOS establece entre conocimiento y funciones semióticas permite interpretar las cuestiones de índole cognitiva en términos semióticos, esto es, la cuestión de caracterización de los conocimientos de un sujeto con relación a un objeto se puede formular de manera equivalente en términos de los significados personales del sujeto con relación al objeto. Se entiende que tales significados están constituidos por los sistemas de prácticas operativas y discursivas que el sujeto realiza en las que el objeto interviene de manera determinante, y por tanto, implican comprensión y competencia.

Según como se jerarquice el sistema de prácticas, se establecen diferentes tipos de significados, tanto desde el punto de vista personal como institucional, como se muestra en la figura 2.3. Para los significados personales: significado global, declarado y logrado; para los institucionales: significado referencial, pretendido, implementado y evaluado. El proceso de enseñanza y aprendizaje implica, de hecho, un acoplamiento gradual de significados por parte del sujeto interviniente. Dicha relación, se representa en la parte central de la figura.

2.3: Tipos de significados pragmáticos

A los fines de nuestro trabajo, haremos alusión a los significados declarado y referencial. Desde la perspectiva institucional, el EOS define *significado referencial* como el sistema de prácticas que es utilizado como referencia para elaborar el significado pretendido, es decir, como una parte del significado holístico[3] del objeto

[3] Se describe el *holo-significado* de un objeto matemático, como la interacción de modelos matemáticos asociados a dicho objeto (Wilhelmi, Godino y Lacasta ,2007).

matemático. Desde la perspectiva personal, se define *significado declarado* como el resultado de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de una evaluación, consideradas tanto las expresiones correctas como incorrectas.

Con ello, aún así, tenemos la posibilidad de realizar un análisis más detallado. Podemos indagar acerca del tipo de objetos que intervienen en una práctica matemática. La respuesta del EOS es que en toda práctica intervienen y emergen una serie de objetos primarios. La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios introducidos en el EOS responden a esta necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, a fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los objetos primarios a los que hacemos alusión son identificados como: situaciones/problemas, definiciones/conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y tipos de lenguaje. Estos seis tipos de entidades asumen la ventaja de ampliar la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales.

Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. En la fig. 2.4., se reflejan las entidades primarias y el modo en que están se configuran.

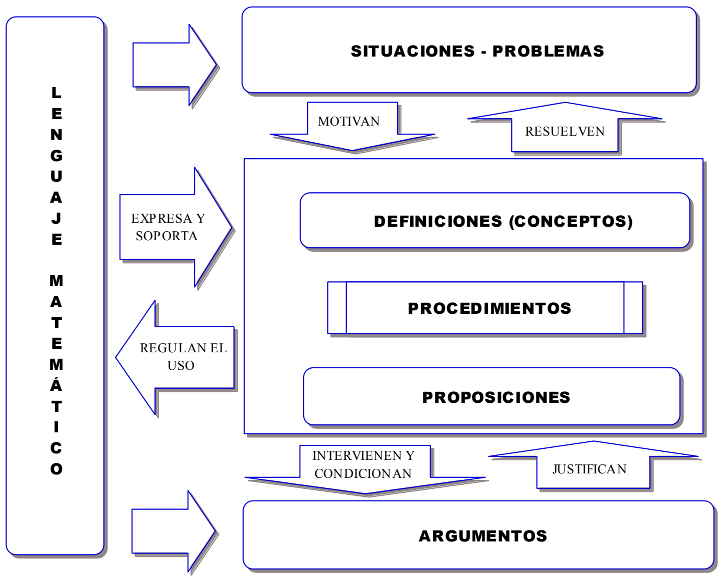


Figura 2.4. Configuración de objetos primarios

Es necesario notar que estas entidades primarias son funcionales y por tanto tienen un carácter relativo dependiendo del juego de lenguaje en que participan. Además, pueden ser compuestas, es decir poner en juego entidades de otros tipos.

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, Batanero y Font, 2007):

- *Personal – institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994, p. 338). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La "cognición personal" es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la "cognición institucional" es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.
- *Ostensivo – no ostensivo.* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, etc.). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).
- *Expresión – contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica[4]. La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con

[4] Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un PLANO DE LA EXPRESIÓN colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un PLANO DEL CONTENIDO (…) Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (…) (Eco, 1976, 83-84).

otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un *antecedente* (expresión, significante) y un *consecuente* (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- *Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo)*. Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función $y = 2x + 1$) y una clase más general (p.e., la familia de funciones $y = mx + n$). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y cols, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.
- *Unitario – sistémico*. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios

Procesos

Tanto las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos indicados en la Figura . La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos:

- institucionalización – personalización;
- generalización – particularización;

- análisis/descomposición – síntesis/reificación;
- materialización /concreción – idealización/ abstracción;
- expresión/representación – significación.

La consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008) y de estos con los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y por tanto, clarificar la naturaleza del "objeto matemático" usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal.

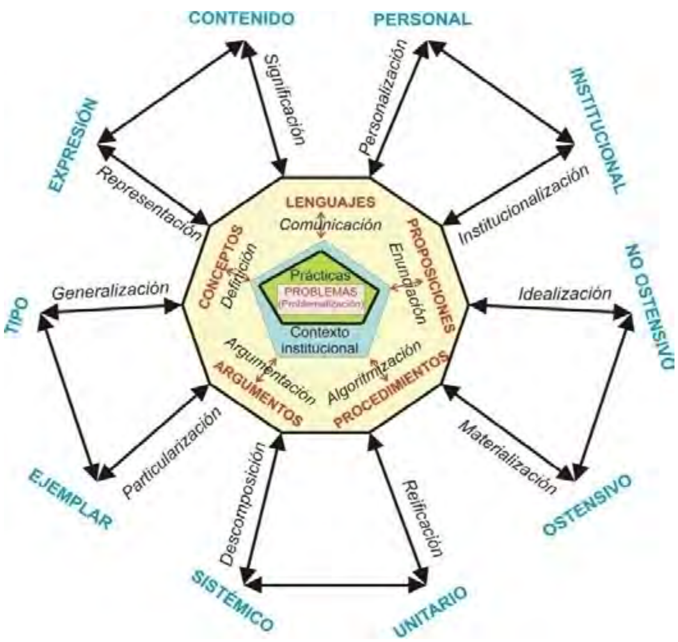


Figura 2.5. Configuración de objetos y procesos matemáticos

2.3.3. La evaluación en el marco del EOS

Precisamos a continuación la noción de evaluación que orienta nuestra investigación dentro del marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. Como se expone en Godino y Batanero (1994), el problema de la evaluación de los conocimientos matemáticos, cuya importancia para la investigación y la práctica de la educación matemática puede apreciarse en múltiples trabajos (Romberg, 1989; Webb, 1992; Rico et al, 1992; Niss, 1993; Giménez, 1997; Wilian, 2007; Wilson, 2007), es planteado por Wheeler (1993) desde su dimensión epistemológica: Si necesitamos evaluar el conocimiento matemático de los estudiantes para una multiplicidad de fines, la primera cuestión que debe dilucidarse se refiere a la naturaleza del propio conocimiento. La razón que da este autor nos parece obvia: "¿Cómo podemos evaluar lo que no conocemos?" (p. 87). Esta problemática se corresponde en el marco del EOS con la caracterización de significados sistémicos. Precisamente, una de las finalidades de la epistemología del conocimiento matemático desarrollada en dicho marco es proporcionar criterios para la elaboración de una teoría de la evaluación del mismo, pero previamente se necesita adoptar o elaborar una teoría sobre su naturaleza, variedad y estructura.

Como indican Godino y Batanero (1998), la determinación de los conocimientos subjetivos precisa necesariamente de procesos de inferencia, a partir de los conjuntos de prácticas observadas en la situación de evaluación, cuya validez y fiabilidad hay que garantizar. Los términos de validez y fiabilidad son usados en su acepción más amplia: ausencia de sesgo y precisión en los procesos de muestreo de situaciones, sujetos, tiempos y circunstancias inevitables en todo proceso de medición educacional y psicológica (Messick, 1991; Feldt y Brennan, 1991). La complejidad de este proceso de inferencia se deduce del hecho de que no solo existen interrelaciones entre los conocimientos referidos a diferentes objetos matemáticos, sino que, incluso para un objeto matemático dado, el conocimiento de un sujeto sobre el mismo, no puede reducirse a un estado dicotómico (conoce o no conoce) ni a un grado o porcentaje unidimensional (conoce X por ciento), lo que hace difícil aplicar a la evaluación de los conocimientos las teorías clásicas psicométricas de maestría de dominio o del rasgo latente (Webb, 1992; Snow y Lohman, 1991). Es necesario progresar hacia modelos integrales y articulados de evaluación matemática (Fortuny, Giménez y Alsina, 1994; Giménez, 1997).

Al reconocer esta complejidad queda patente el problema de la evaluación de los conocimientos. ¿Cuáles son los criterios aplicables para la elección e interpretación del sistema de indicadores empíricos que debemos usar para caracterizar el estado cognitivo global (o parcial), o sea, el conocimiento y competencia de un sujeto sobre un objeto matemático reconocido como objeto de saber? Aunque esta problemática, que podemos denominar como de la *semiometría* (Godino y Batanero, 1998) para diferenciarla de la problemática psicométrica, supone una nueva línea de investigación de tipo metodológico en los estudios didácticos, en el marco del EOS se puede apuntar al menos un primer criterio sobre la selección de las situaciones de evaluación.

El carácter observable de las prácticas sociales permite, mediante un estudio fenomenológico y epistemológico realizado adecuadamente, determinar, para un objeto dado, el campo de problemas asociado, así como los significados institucionales, concretados en las correspondientes configuraciones epistémicas. El análisis de las variables didácticas del campo de problemas proporciona un criterio para estructurar la población de las posibles tareas de las cuales debe extraerse una muestra representativa, si se quiere garantizar la validez de contenido del instrumento de evaluación. Estos dos elementos proporcionarán unos primeros puntos de referencia a tener en cuenta para diseñar las situaciones de evaluación pertinentes para la evaluación de los conocimientos subjetivos, y también para el diseño de ingenierías adecuadas.

En nuestra investigación entendemos, por tanto, la evaluación como caracterización de significados personales y su comparación con un significado institucional de referencia. Los significados son entendidos en un doble sentido, como sistemas de prácticas operativas y discursivas, y como trama de funciones semióticas entre los objetos constituyentes de las configuraciones asociadas a los sistemas de prácticas. Tales funciones semióticas son interpretadas además como conocimientos (que en la perspectiva pragmatista y antropológica del EOS incluyen comprensión y competencia).

2.4. OBJETIVOS

Definido el problema de investigación, en el apartado 2.3, hemos descrito las herramientas teóricas que consideramos pertinentes para abordar dicho problema. Para adentrarnos en su tratamiento hemos planteado una serie de objetivos generales y específicos. Los cuales formulamos a continuación.

Objetivo generales

Desde el enfoque ontosemiótico se considera esencial disponer de un significado de referencia respecto del objeto de estudio. En nuestro caso particular, se trata de estructurar un modelo de referencia didáctico global para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales. A partir de ello podemos derivar en un referente local adecuado a nuestros fines. Por tal razón, el primer objetivo se plantea del siguiente modo:

O$_G$1: Elaborar un modelo didáctico de referencia local, para evaluar conocimientos sobre los números decimales.

Dado que los libros de textos son un referente importante para los docentes, y existen pocas investigaciones vinculadas a los números decimales, es que se tratará de explorar si el modo en que se introducen los números decimales en los textos escolares toman en cuenta las problemáticas detectadas por las investigaciones. Por ello, nos proponemos:

O$_G$2: Analizar trayectorias de enseñanza de los números decimales, en algunos libros de textos escolares.

Por último, interesa analizar conocimientos que poseen los futuros profesores respecto a a aspectos relevantes para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales. En tal sentido, nos proponemos:

O$_G$3: Evaluar significados personales que, sobre los números decimales, poseen futuros profesores para la enseñanza primaria.

Objetivos específicos

Para dar cumplimiento al **O$_G$1**, hemos planteado los siguientes objetivos específicos:

O$_E$1.1: Recopilar y sintetizar los conocimientos aportados en las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de los números decimales

O$_E$1.2: Reorganizar los antecedentes de investigación en categorías y dimensiones según el marco teórico adoptado para la investigación.

Para llevar a cabo el **O$_G$3**, se requiere elaborar un instrumento adecuado para realizar las mediciones correspondientes. Por tal razón, el primer objetivo específico lo planteamos del siguiente modo:

O$_G$3.1: Construir un instrumento de medición para evaluar aspectos relevantes del conocimiento común, especializado y ampliado sobre los números decimales por parte de futuros profesores de educación primaria. También se incluirán algunos aspectos del conocimiento del contenido y los estudiantes.

A través de los s*ignificados personales* manifestados por los futuros profesores, en la aplicación del instrumento de medición, nos proponemos:

O$_E$3.2: *Prever conflictos semióticos sobre los significados institucionales de los decimales y contrastar su presencia en los significados personales de los estudiantes.*

2.5. HIPÓTESIS INICIALES

Entendemos las hipótesis de nuestra investigación, como expectativas de resultados. Con relación a la cuestión de tipo teórico formulada partimos de la siguiente hipótesis:

H1: La aplicación de herramientas teóricas aportadas por el "Enfoque Ontosemiótico sobre el Conocimiento y la Instrucción Matemática" (EOS), permite hacer operativas las categorías del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (modelo MKT) planteadas por Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball, y Schilling, 2008).

Sobre las cuestiones relacionadas con los conocimientos sobre decimales de los futuros profesores de educación primaria formulamos las siguientes hipótesis:

H2: Los futuros profesores manifestarán un conocimiento insuficiente para abordar con idoneidad la enseñanza de los decimales en educación primaria. De manera más específica carencias significativas con relación a aspectos relevantes del,

H2.1. Conocimiento común del contenido

H2.2. Conocimiento ampliado

H2.3. Conocimiento especializado.

2.6. METODOLOGÍA Y FASES DE INVESTIGACIÓN

El enfoque metodológico general de la investigación tiene un doble componente cualitativo y cuantitativo, pudiéndose describir como investigación de tipo mixto (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009). Gall, Borg y Gall (1996, p. 767) (Citado en Hart et al.

(2009), p. 28) define la investigación cuantitativa como, “indagación que se basa en el supuesto de que las características del entorno social constituye una realidad objetiva que es relativamente constante en el tiempo y el entorno. La metodología dominante es describir y explicar las características de esta realidad mediante la recogida de datos numéricos sobre conductas observables de muestras y sometiendo estos datos a análisis estadísticos”.

Similarmente, los autores citados definen la investigación cualitativa como, “indagación que se basa en el supuesto de que los individuos construyen la realidad social en la forma de significados e interpretaciones, y que estas construcciones tienden a ser transitorias y situacionales. La metodología dominante consiste en descubrir estos significados e interpretaciones mediante el estudio de casos en profundidad en entornos naturales y sometiendo los datos resultantes a inducción analítica” (p. 767).

Nuestra investigación consta de dos partes, una parte teórica (justificación y elaboración de un modelo didáctico de referencia) y otra empírica. La segunda parte incluye la construcción de un cuestionario de evaluación para aplicar a futuros profesores de enseñanza primaria, y un estudio de evaluación como resultado de la aplicación del cuestionario. Para llevar a cabo esta segunda etapa se organizan una serie de estudios, los que describimos a continuación.

2.6.1. Estudios de tipo teórico y de síntesis

Estos estudios se conforman en dos bloques. El primer bloque lo componen la justificación de la investigación y determinación del área problemática. Estos aspectos se han fundamentado en el capítulo 1, a partir de un amplio estudio de investigaciones previas, donde se observó, entre otras cosas:

- la importancia del estudio de los números decimales en la escolaridad elemental.
- la amplia gama de errores y dificultades existentes, y persistentes en la enseñanza y aprendizaje de este tipo de números, en todos los niveles educativos.
- La necesidad de construir instrumentos de evaluación, que permitan caracterizar el estado de este conocimiento con fines de enseñanza, en futuros profesores.

El segundo bloque consta de la elaboración de un modelo didáctico de referencia local para la enseñanza de los números decimales

2.6.2. Elaboración de un cuestionario y análisis de resultados de su aplicación

El centro de interés para este bloque es la elaboración de un instrumento de evaluación sobre los números decimales, su aplicación y el análisis de resultados. Como hemos anticipado, para el tratamiento de este bloque se implementarán una serie de estudios.

Estudio 1. Un estudio exploratorio sobre conocimientos del contenido números decimales, en estudiantes para profesor para enseñanza primaria.

Como una primera aproximación a nuestro problema de investigación, se implementa un estudio, con carácter exploratorio, en el que se fija la atención sobre la comprensión general de los conjuntos numéricos, por parte de los maestros en formación. En particular, se aborda la distinción entre número y representación. El proceso que se sigue para este estudio, se plantea de la siguiente manera:

- Elaboración y justificación (análisis del contenido) de un cuestionario corto (pre-test).
- Aplicación del cuestionario y análisis de resultados.
- Elaboración y justificación de un nuevo cuestionario (análisis del contenido), luego de un proceso de instrucción (pos-test).
- Aplicación del post-test y análisis de resultados

Estudio 2. Elaboración de un instrumento para evaluar conocimientos didácticos sobre números decimales, de futuros profesores para enseñanza primaria. Para la elaboración del cuestionario se tomaron en cuenta los siguientes aspectos:

- Definición semántica de la/s variable/s objeto de medición, para la cual se realizó un análisis de contenidos provenientes del significado de referencia local, en todas sus dimensiones. Se elabora una tabla de contenidos.
- Se propone un banco inicial de ítems, algunos de elaboración propia, otros extraídos de investigaciones y también reformulaciones.
- Se somete el instrumento a juicio de expertos (expertos en didáctica de la matemática, preferentemente investigadores en el campo numérico y de formación de profesores) para validar la tabla de contenidos, justificar la selección de los ítems y realizar las reformulaciones pertinentes.

- Aplicación del cuestionario a una muestra de estudiantes para profesor. Determinación del grado de corrección de las respuestas, y estudios de aporte a la fiabilidad del cuestionario.

El cuestionario que vamos a construir es un instrumento de medición ya que, por medio de las preguntas planteadas a los encuestados, proporciona una estimación de conocimientos y capacidades de los sujetos, que no son accesibles por simple observación o encuesta (Dane, 1990, Barbero, 1993). Se trata de construir un instrumento de medida centrada en el sujeto (Millman y Greene, 1989), orientado a localizar a los alumnos en diferentes puntos de un continuo teórico "conocimiento de los números decimales", en función de sus respuestas al cuestionario. Las interpretaciones hechas a partir de las respuestas se refieren a un dominio específico, es decir, harán referencia a lo que los sujetos hacen o son capaces de hacer y sus conocimientos y errores sobre el mismo (test referido a criterio).

Respecto al dilema entre precisión y amplitud de contenido, se adoptará un compromiso en función del tiempo disponible. Mientras que un test unidimensional es muy fiable, podría tener menor validez o cubrir una gama muy estrecha de contenidos. Por ello se tomará un contenido más amplio, incluso cuando la fiabilidad podría ser menor. Esto está relacionado con la dimensionalidad del contenido del instrumento que se refiere a la homogeneidad o heterogeneidad teórica del contenido (Millman y Greene, 1989). Debido a la variedad de tipos de problemas y propiedades relacionadas con los números decimales, se espera que los resultados empíricos muestren más de una dimensión al reflejar el contenido del dominio.

Estudio 3. Evaluación de significados personales de futuros profesores sobre números decimales.

Uno de nuestros objetivos fundamentales es determinar el tipo de conocimientos que poseen los estudiantes para profesor. Dicho en términos específicos de la herramienta teórica utilizada, evaluar los significados personales puestos de manifiesto por dichos estudiantes, en relación a algunas de las categorías del conocimiento. Para ello, luego de determinar el grado de corrección y para completar la evaluación de las respuestas dadas por los estudiantes al cuestionario, se definen dos nuevas variables de análisis de tipo cualitativo: Una referida a los conocimientos puestos en juego en la resolución de los ítems, y la otra relativa a los conflictos manifestados.

Los estudios mencionados precedentemente se describen en los capítulos correspondientes.

CAPITULO 3

UN ESTUDIO EXPLORATORIO CON MAESTROS EN FORMACIÓN

3.1. INTRODUCCIÓN

La distinción entre los conceptos matemáticos y sus diversas representaciones se considera necesaria para un aprendizaje con comprensión. Cada representación es apropiada para cierta clase de situaciones y conlleva prácticas matemáticas específicas que atribuyen a los conceptos significados parciales cuya articulación coherente supone un esfuerzo educativo. “Desde el punto de vista pragmático, "comprender" o "saber" un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas que le son propuestas en el aula” (Font, Godino, D’Amore, 2007, p. 15).

A los fines de tener una primera aproximación sobre conocimientos que poseen los profesores en formación, fijamos la atención, en este capítulo, en las dificultades que plantea la comprensión de los conjuntos numéricos. En particular, nos abocamos a explorar *la distinción entre un número decimal y las expresiones decimales de los números reales.*

Como afirma Centeno (1988), “debemos distinguir bien cuándo hablamos de un número y cuándo nos referimos a una de sus diversas formas de representarlo. Hablamos de número cuando nos ocupamos de su función, de los problemas que permite resolver o de las propiedades que le distinguen de otras clases de números” (p. 22).

En tal sentido interesa que los futuros profesores sean conscientes, en primer lugar, de cuestiones vinculadas a la dimensión epistémica de este tópico, como las siguientes,

$\frac{1}{5}$, **es un número decimal**, porque puede escribirse de la forma $A/10^n$, donde A es un número entero y n un número natural. Es decir, puede ser escrito de la forma $\frac{20}{100}$ y todas sus formas fraccionarias equivalentes, además de una escritura con comas donde el número de cifras decimales es finito, esto es 0,20; además de todas sus formas de representación equivalentes. Nos encontramos con el caso de $\frac{1}{9}$, que es un número racional pero **no es un número decimal,** porque no puede ser representado en forma de fracción decimal.

En el caso de problemas relacionados con superficies circulares, en cuya resolución se halla involucrado el número π, no se podrá medir exactamente la circunferencia tomando por unidad el diámetro. No tendremos ningún número racional que sea la medida exacta de la longitud de la circunferencia. Luego el resultado de estos problemas **no será un número decimal** porque los números decimales son una clase particular de números racionales.

No obstante, cada uno de estos números que no consideramos decimales puede ser **aproximado** por un número decimal, otorgando la posibilidad de acercarnos tanto como queramos a las medidas de magnitudes continuas.

El conocimiento de estas distinciones implica para un futuro profesor, además, disponer de competencias para la enseñanza que tome en cuenta las dificultades que acarrea la comprensión de estas cuestiones; esto es, conocimientos que le permitan analizar y reflexionar también sobre las dimensiones cognitiva e instruccional.

Tal lo anticipado, nuestro propósito es, frente a la enseñanza de tópicos como el que nos interesa en este trabajo, realizar una primera exploración sobre los conocimientos que poseen los futuros maestros sobre los números decimales y las expresiones decimales de los números reales.

3.2. METODOLOGÍA

El análisis de los conocimientos y comprensiones de los estudiantes sobre los números y expresiones decimales lo vamos a realizar utilizando algunas de las herramientas teóricas del "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática"

(EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). En particular vamos a utilizar las nociones de sistema de prácticas institucionales y la correspondiente configuración epistémica asociada, y sistemas de prácticas personales y la correspondiente configuración cognitiva. Tal como lo hemos anticipado en el Capítulo 2, ambas configuraciones (epistémicas y cognitivas) hacen operativos los sistemas de prácticas fijando la atención en la red de objetos emergentes e intervinientes en dichas prácticas. Los tipos de objetos matemáticos que componen las configuraciones según el EOS son los siguientes: elementos lingüísticos, situaciones-problemas, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos.

Para describir y analizar los conocimientos matemáticos involucrados en las tareas que forman parte de los instrumentos construidos, en este trabajo, se estudiaron *configuraciones epistémicas* (redes de objetos institucionales) como un análisis a-priori que permitió delimitar la validez de las *cuestiones* seleccionadas, anticipar conflictos potenciales en las respuestas de los alumnos e identificar las variables y valores para evaluar los significados personales de los estudiantes.

3.2.1. Objetivos y preguntas de investigación

Desde esta posición y atendiendo a las dificultades que acarrea la enseñanza y aprendizaje de estos números en la escolaridad elemental, (Brosseau, Brosseau y Warfield, 2004; Nowlin, 2007; Stacey, 2001; Zazquis, 1993; Steinle, 2004; Gagatsis, Elía y Panaoura, 2010), nos planteamos los siguientes interrogantes:

> ¿Qué significado atribuyen los estudiantes para maestros a los números decimales?
>
> ¿Cómo relacionan el concepto de número decimal con el resto de los números?
>
> ¿Qué manejo realizan de las propiedades que permiten la evolución del conocimiento hacia conjuntos numéricos de mayor complejidad?
>
> ¿En qué medida cambian los significados que atribuyen a los números decimales luego de un proceso formativo específico?

Nuestro problema, en esta etapa de la investigación, se centra en el estudio del tipo de significados personales (Godino, Batanero y Font, 2007) que, sobre algunos aspectos de los números decimales, ponen de manifiesto un grupo de estudiantes para maestros durante el desarrollo de un proceso de formativo.

El objetivo central es, determinar en qué medida los profesores en formación de nuestro contexto educativo comprenden determinados aspectos vinculados a los números decimales, antes y después, de un proceso formativo.

3.2.2. Población y muestra

Los sujetos participantes son 49 estudiantes para maestros que cursan primer año de la carrera, en la Universidad de Granada. Se aplicó un cuestionario inicial en diciembre de 2007, y uno final en febrero de 2008; ambos en forma individual. El cuestionario final se aplicó luego del estudio del tema fracciones, números racionales y decimales siguiendo el texto de Cid, Godino y Batanero (2004), donde se incluyen ejemplos y ejercicios similares a las cuestiones propuestas. Durante la sesión de clase presencial (2 horas) dedicada a decimales se planteó la distinción entre los distintos tipos de números y la necesidad de distinguirlos de las formas de expresión.

3.2.3. Fases e instrumentos de recogida de datos

El estudio se plantea en dos fases, una fase de indagación inicial en la que se aplica un cuestionario que contempla cinco situaciones, la primera con cuatro ítems, la segunda con tres ítems y las tres últimas con un ítem cada una. Luego de un proceso de instrucción llevado cabo sobre números decimales y expresiones decimales de un número se aplica un cuestionario de evaluación, como segunda fase, el cual consta de cuatro ítems.

Los instrumentos consisten en un cuestionario inicial para evaluar los significados personales iniciales de los futuros maestros y un cuestionario final para evaluar su evolución luego de un proceso formativo. Aclaramos que la finalidad del estudio es exploratoria, y no un experimento que pretendiera probar alguna hipótesis sobre los efectos del tratamiento sobre la evoluciones de los significados personales de los estudiantes.

3.3. ESTUDIO EXPLORATORIO: FASE 1

3.3.1. El cuestionario

Se plantearon 5 cuestiones para indagar aspectos vinculados al significado de número, en particular al de número decimal, y se determinaron las siguientes variables de análisis:

- Reconocimiento de un número como perteneciente a un *conjunto numérico específico*, y su posible pertenencia a otros conjuntos.
- Comprensión del significado de *sucesor* de un número.
- Distinción entre el *concepto de número y su representación.*
- Identificación de los *números racionales* a través de distintas representaciones (expresión decimal, lenguaje natural, expresión fraccionaria, ubicación en la recta)
- Distinción entre *número decimal y expresión decimal de un número racional.*

A continuación se describen los ítems que componen el cuestionario inicial:

Ítem 1. Como sabes, existen distintos conjuntos numéricos (naturales, racionales, decimales, irracionales y reales). Indica a cual de estos conjuntos numéricos pertenece cada uno de los siguientes números (un mismo número puede pertenecer a más de un conjunto):

a) 7 b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{7}$ d) π

Naturales, racionales, decimales, irracionales, reales.

Ítem 2. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Dar el número **natural** que sigue inmediatamente después del 54

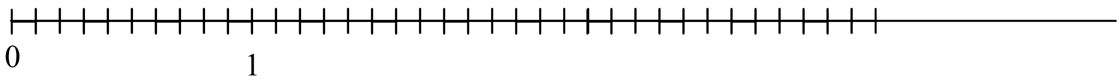
b) Dar el número **entero** que sigue inmediatamente a 23’5

c) Dar el número **decimal** que sigue inmediatamente a 32’13

Ítem 3. Agrupar los carteles que representan el mismo número

Ítem 4. Ubica en la recta numérica los números,

$$\textit{Tres décimas; 0,3; un tercio; } \frac{3}{10}; \ \frac{10}{3}$$



Ítem 5. Expresa mediante una escritura decimal finita los números siguientes, en los casos que sea posible. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) π

3.3.2. Análisis a-priori. Descripción del análisis y resultados por ítem

Tal como hemos anticipado, para ambos instrumentos se realizó un análisis a-priori. El mismo consistió en un estudio de configuraciones epistémicas asociadas a cada ítem. El principal propósito fue de delimitar la validez de los ítems seleccionados y anticipar posibles conflictos en las prácticas desarrollados por los estudiantes. Para tal fin, hemos analizado el tipo de lenguajes, conceptos/definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos a que dan lugar dichas situaciones. Dichos elementos junto a los significados atribuibles en el contexto, nos proporcionaron las mencionadas configuraciones epistémicas.

3.3.2.1. Estudio del ítem 1

Consideramos que, para trabajar con confianza e idoneidad con un tipo particular de números, es esencial poder "distinguirlo" en cualquier ámbito en el que se halle inmerso. Entendemos por distinción, reconocerlo con su propia entidad, es decir, con las características que lo definen, las propiedades que lo distinguen, así como los elementos que lo vinculan a otros números. Con esa motivación es que hemos seleccionado el presente ítem, para el cual analizamos en la Tabla 3.1 su configuración epistémica.

Tabla 3.1. *Configuración epistémica asociada al ítem 1*

Tipos de objetos	*Significado*
Expresiones lingüísticas	
"…Existen distintos conjuntos numéricos…"	Evoca la existencia de conjuntos numéricos cuyos elementos se diferencian por su naturaleza
Naturales, racionales, decimales, irracionales, reales	Descripción y enumeración de la totalidad de conjuntos numéricos incluidos en el campo de los números reales
7, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{7}$, π	Representaciones de números particulares, que pueden pertenecer a uno o mas de los conjuntos mencionados
Un mismo número puede pertenecer a mas de un conjunto	Alerta sobre la posible intersección entre conjuntos numéricos.
Conceptos/definiciones	
Conjunto numérico	Agrupación de números a través de características comunes
Número natural, racional, decimal, irracional y real	Definición de cada tipo de número
Propiedades/proposiciones	
P1: Si un número es natural es entero, decimal, racional y real P2: Si un número es entero, es decimal, es racional y es real P3: Si un número es racional, es real P4: Si un número es racional, no es irracional.	Permiten decidir si un elemento pertenece a un determinado conjunto
Procedimientos	
Analizar la pertenencia de cada número a un conjunto numérico	Pone en juego la definición de número natural, decimal, racional, irracional, real.
Ubicar cada número en el/los conjuntos correspondientes	Identifica características del número que le permita ser ubicado en uno o más conjuntos.
Argumentos	
Aplicación de definiciones, propiedades o relaciones entre los números.	Proporcionar características comunes y no comunes de los números dados a los fines de la comparación.

La configuración epistémica que representa al ítem, pone en descubierto elementos significativos que nos permiten anticipar posibles conflictos semióticos. Podemos identificar los siguientes:

- Dificultad para discriminar los distintos campos numéricos.
- Confusión en la relación de inclusión entre los campos numéricos.
- Identificar una expresión decimal de un número cualquiera como número decimal.

La tabla 3.2., incluye los porcentajes de respuestas a los distintos apartados de la cuestión 1.

Tabla 3.2. *Porcentajes de respuestas a la cuestión 1 (n=49)*

Natural		Racional		Decimal		Irracional		Real	
Respuesta	*%*	*Respuesta*	*%*	*Respuesta*	*%*	*Respuesta*	*%*	*Respuesta*	*%*
Sólo 7	84	3/4, 1/7 y 7	6	3/4, 1/7 y 7	6	Solo π	55	Todos los Números	50
7 y otros	6	3/4, 1/7 y π	6	3/4, 1/7 y π	35	π y 1/7	8	Todos menos π	8
		¾ y 1/7	82	Sólo π	53	π y **7**	6	Solo 7	30
		3/4	6	¾ y π	4	Solo 7	6	Solo 3/4	4
				3/4	2	No contestan	25	No contestan	4

De los resultados de la aplicación del ítem, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- En general, no existen problemas con la consideración de 7 como número natural.
- Solo el 6% reconoció como racionales a $\frac{3}{4}$,$\frac{1}{7}$ y 7, mientras que el 82% considera racional a un número si viene dado por su expresión fraccionaria.
- El 53% toma solo a π como número decimal, elevándose al 90% si consideramos otros números junto a π. Ningún alumno identifica como decimales solo a 7 y $\frac{3}{4}$ que son los correctos. El 6% considera un número natural como decimal y el 41% otorga a $\frac{1}{7}$ decimal.
- El 55% considera a π irracional, cuando ha considerado en muchos casos, en el ítem anterior, a π también como decimal**.** El 25% no encuentra un irracional en la lista.
- El 50 % parece saber que cualquier número es real, pero el 30% considera que solo 7 es un número real.

Podemos observar que se evidencian fuertes dificultades en el reconocimiento de las distintas clases de números, coincidiendo con estudios previos similares (Verschaffel, Greer y Torbeyns, 2006; Moreno, Hernández y Socas, 2004; Merenluoto, 2004; Centeno,1988).

En particular, el conocimiento de los números racionales se halla altamente compartimentalizado y no relacionado con otros conocimientos matemáticos más amplios, tal como sostienen Socas (2001) y Moseley(2005).

Más aún, cuando hablamos de números decimales las problemáticas son fuertemente significativas. Existen dificultades para considerar como decimal a un número natural, como así también un racional expresado en forma fraccionaria. Como contrapartida se considera número decimal a un número irracional o a un número racional (no decimal), expresado como fracción.

3.3.2.2. Estudio del ítem 2

Como mencionábamos al introducir el ítem1, una de las condiciones esenciales para la conceptualización de un número (del tipo que fuere), es el reconocimiento de sus propiedades. De manera recíproca, implica reconocer si la propiedad que es válida para determinado conjunto numérico, lo sigue siendo para otro. En tal sentido, el ítem 2 ha sido seleccionado para evaluar de manera directa el reconocimiento del ámbito de validez de la propiedad sucesor. Y de manera indirecta, el conocimiento que los estudiantes manifiestan acerca de esta propiedad en el terreno de los números decimales. Cuestionamiento esencial que subyace a la propiedad de densidad.

En la Tabla 3.3, se exhibe el tipo de objetos que intervienen en la situación presentada y el significado que se le atribuye en el contexto dado.

Tabla 3.3. *Configuración epistémica asociada al ítem 2*

Tipos de objetos	*Significado*
Expresiones lingüísticas	
Número natural, número entero, número decimal	Destacar el tipo de número requerido
Número que sigue inmediatamente a…	Alude a la noción de sucesor
54; 23’5; 32’13	Expresa con símbolos números decimales
Conceptos/definiciones	
Número natural	Definición de Peano: Cada elemento tiene un único siguiente, hay un primer elemento y contiene todos los elementos siguientes de los anteriores
Número entero	Número natural precedido de un signo + (positivo) o – (negativo). (Peacock,1830)
Número decimal	Número racional que puede ser escrito de la forma $A/10^n$, donde A es un número entero y n un número natural.
Sucesor de un número natural	Remite a la definición de Peano de número natural
Propiedades/proposiciones	
Relación menor en **Z**	Dados dos números enteros a y b, $a<b$ si $\exists\, c \in Z$, tal que $b=a+c$.

Relación mayor en **Z**	Dados dos números enteros a y b, $a > b$ si $\exists c \in Z$, tal que $a = b + c$.
Todo número natural tiene un sucesor	Existe una función s: N→N que asocia a cada n∈N un elemento s(n) ∈ N, llamado el sucesor de n.
D es denso en Q	Dado dos números decimales cualesquiera, siempre se puede encontrar otro entre ellos.
Procedimientos	
Buscar el siguiente de un número perteneciente a un conjunto determinado	Interpretación de la noción de "sucesor"
Analizar la existencia del "número siguiente" a otro dado	Ámbito de aplicación de la noción sucesor
Argumentos	
Ningún número decimal, no entero, tiene sucesor	Remite a la propiedad de densidad de D en Q

Acorde a la configuración epistémica de este ítem, se esperan encontrar los siguientes conflictos:

- Extensión de la propiedad sucesor a otros campos numéricos distintos de N.
- Considerar la parte decimal de un número expresado con coma, como si fuera un número entero.
- Declarar que no existe un número entero que le siga al número 23,5.

De la aplicación del ítem 2 podemos observar, en la Tabla 3.4, los porcentajes de respuestas a los distintos apartados.

Tabla 3.4: *Porcentajes de respuestas a la situación 2 (n=49)*

a)		***b)***		***c)***	
Respuestas	%	Respuestas	%	Respuestas	%
Bien	100	Bien	100	No se puede	8
Mal	0	Mal	0	32.14	74
				32.131	10
				32.13 inf. ceros y un 1 al final	4
				Otros	4
Total	100	Total	100	Total	100

Sólo el 8% consideró imposible encontrar un sucesor para 32'13. Mientras que, el 92% trasladó el concepto sucesor a los números decimales, desconociendo absolutamente el carácter denso de este tipo de números. Parece que trataron a la parte decimal del número como si fuese un número natural e independiente.

Evidentemente, los conflictos anticipados se manifestaron con gran fuerza. Fue ampliamente difundido por Brosseau (1989), que el conocimiento de los números naturales resulta un obstáculo para evolucionar en el aprendizaje de otros campos numéricos. En particular, el problema de "trasladar" el concepto de sucesor a ámbitos no válidos es muy frecuente en los niños, según la literatura de investigación. Ruíz (2004), lo menciona como error-"discretización" de D^{+}, mientras que D´Amore (2009), lo ejemplifica y cita como obstáculo didáctico. No obstante, los significados personales que manifestaron los estudiantes para profesor, coinciden con lo que expresan Vamvakoussi y Vosniadou (2004), en cuanto a que el conocimiento, particularmente de las propiedades numéricas, da lugar a importantes significados erróneos en los nuevos campos numéricos.

3.3.2.3. Estudio del ítem 3

Ya hemos hablado de la importancia que tiene el reconocimiento de un número dentro de un campo determinado. En ese camino, otro aspecto importante que colabora o, en su defecto complejiza tal reconocimiento es la forma en que tal número se presenta. Por tanto, conocer que un número puede verse bajo distintas representaciones, identificarlas adecuadamente y establecer relaciones entre ellas, no parece ser un tema simple. No obstante, constituye uno de los significados parciales necesarios en la conceptualización El presente ítem lleva por objetivo, identificar números decimales a través de distintas representaciones. La Tabla 3.5, nos muestra una configuración epistémica del mismo.

Tabla 3.5. *Configuración epistémica asociada al ítem 3*

Tipos de objetos	*Significado*
Expresiones lingüísticas	Distintas expresiones de un mismo número
" 3 décimas"	
0,3	
$\frac{3}{10}$	
$\frac{3}{10}$; $\frac{10}{3}$	Expresiones equivalentes de números distintos
Conceptos/definiciones	
Número decimal	Número racional que puede ser escrito de la forma $A/10^n$, donde A es un número entero y n un número natural.
Número racional	Clase de fracciones equivalentes
Equivalencia de representaciones de un número	Dos expresiones son equivalentes si remiten al mismo número.
Propiedades/proposiciones	
P1: Un número racional admite distintas representaciones	Remite a la equivalencia de representaciones

Procedimientos	
Comparar representaciones numéricas	Determinar la existencia de un mismo número bajo representaciones equivalentes
Argumentos	
Aplicación de definiciones, cálculos y técnicas de conversión	Justificar la propiedad P1

Cabe aclarar que este ítem ha sido extraído de un libro de texto para primaria (Almodóvar y otros, 2005). En dicho texto, encontramos descripciones sobre los números decimales que por una parte, los identifican con una forma particular de escritura (escritura con coma), y al mismo tiempo, en otro apartado se pretende que los niños distingan el "mismo número" decimal bajo tres escrituras diferentes. Lo que representa claramente un conflicto semiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), y en consecuencia puede llevar a posteriores conflictos y obstáculos en el aprendizaje matemático tal lo señalado por Konic, Godino, Castro y Rivas (2007).

En nuestro caso, la tarea planteada en el texto la quisimos aplicar a futuros profesores fuera del contexto mencionado, con el fin de observar si en sus significados personales se reconocían otros tipos de representaciones de un número decimal, aparte de la polinómica. Para lo cual entendimos que podían presentarse los siguientes conflictos:

- Representaciones diferentes corresponden a números distintos
- Un mismo número puede tener solo dos tipos de representaciones (coloquial-fraccionaria o decimal-coloquial, o fraccionaria-decimal)

Cabe destacar que, en general, los estudiantes no evidenciaron dificultades en la identificación de un número decimal ante las distintas y equivalentes formas en que fueron presentadas: coloquial, fraccionaria y polinómica. El 96% de ellos, ha resuelto correctamente el ítem (47 de 49 estudiantes). Solo dos alumnos, manifestaron el segundo conflicto anticipado.

3.3.2.4. Estudio del ítem 4

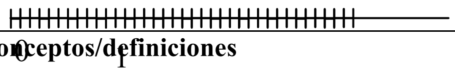
Con este ítem nos proponemos ahondar sobre los significados personales manifestados por los futuros profesores, no solo en el reconocimiento de distintas representaciones para un número. De manera específica, centramos también nuestra atención en la distinción de números racionales que para algunos casos, bajo la supuesta apariencia de equivalentes, en realidad resultan ser uno de ellos una aproximación decimal del otro.

Para este fin, introducimos en éste ítem la recta numérica, como otra forma de representación. Precisamente, porque este recurso permite llevar a cabo la graduación regular de una cantidad de longitud, con el propósito de ubicar expresiones fraccionarias y, en particular, expresiones decimales de un número.

Concretamente nos interesa corroborar la existencia efectiva de flexibilidad representacional que parecen indicar los resultados del estudio del ítem 3.

En la siguiente tabla mostramos la configuración epistémica asociada al ítem.

Tabla 3.6. *Configuración epistémica asociada al ítem 4*

Tipos de Objetos	*Significado*
Expresiones lingüísticas	
"Ubica en la recta numérica…."	Asignación de un punto en la recta, cuya ubicación represente al número pedido.
Tres décimas; $0{,}3$ *;un tercio;* $\frac{3}{10}$ $\frac{10}{3}$	Distintas representaciones para un mismo número. Número distractor que permite evaluar la claridad de la representación.
	Tipo de representación que permite valorar el reconocimiento de un mismo número independientemente del modo en que este expresado.
Conceptos/definiciones	
Recta numérica	
Unidad de medida	Referente o término de comparación que permite determinar cuantas veces está contenido en otra cantidad.
Unidades decimales	Segmento que ha sido dividido en 10 partes iguales, y que es tomado como unidad de medida.
Sub-unidades	
Propiedades/proposiciones	
A cada número racional le corresponde un punto en la recta	Monomorfismo entre puntos de la recta y los números racionales
Si la unidad esta dividida en 10 partes, cada una de ellas corresponde a 1/10 de la misma.(idem,100, 1000..)	Interpretación, representación y expresión de las partes de una unidad.
Procedimientos	
Interpretar las unidades de la recta	Concepto de unidad
Asociar un número con un punto de la recta	Ubicación en el plano de un referente (único) para el número indicado
Lectura de puntos de la recta con distintas unidades de medida	Manejo de unidades equivalentes
Argumentos	
A distintas representaciones de un número le corresponde el mismo punto de la recta	Distinción entre número y representación

Del estudio realizado a través de la configuración epistémica, deducimos que se puede esperar la ocurrencia de los siguientes conflictos:

- Ubicar un número, expresado con distintas representaciones, en puntos distintos de la recta.
- Identificar un número con representaciones que no le corresponden.
- Confusión en la lectura e interpretación de unidades de medida y sub-unidades.

La tabla 3.7 muestra los resultados obtenidos tras la aplicación de este ítem.

Tabla 3.7. *Porcentajes de respuestas a la situación 4 (n=49)*

Grado de corrección	**%**
Bien	8
Regular	67
Mal	25
Total	100

En primer lugar, entendemos necesario realizar las siguientes aclaraciones con respecto al grado de corrección. Hemos considerado:

- Bien, a quienes realizaron todas las representaciones correctamente. Entendiendo por correcto incluso el caso en que se representara a 1/3 y/o 10/3 de manera aproximada.(sobre la escala dada, sin construir una escala conveniente).
- Regular, a quienes realizaron bien al menos tres de las cinco representaciones pedidas.
- Mal, en el resto de los casos.

De los resultados obtenidos, podemos observar que solo el 8% (4 estudiantes) logró resolver bien el ítem. No obstante, cabe aclarar que ninguno de ellos ha hecho una representación precisa; ni para1/3*,* ni para 10/3.

Quienes se ubicaron en la categoría de regular, esto es el 67%, las dificultades se presentaron también con los mismos números mencionados anteriormente (1/3y 10/3). En general, asignaron un mismo punto a números distintos (1/3 y 3/10) o representaron a un número con otro 33/10 en lugar de10/3. Tal como señalan O´Connor (2001) y Socas (2001) los estudiantes tienden a ver las expresiones escritas como cosas en si mismas. No analizan las propiedades, se quedan simplemente mirando la escritura.

Por otra parte, se dieron algunos casos curiosos que reafirman la inconsistencia de los resultados obtenidos para este ítem con respecto al anterior. En el siguiente caso, podemos observar que si bien el estudiante declara explícitamente la igualdad $\frac{10}{3} = 3{,}333...$, no obstante representa a dicho número con 33/10. (Fig. 3.1)

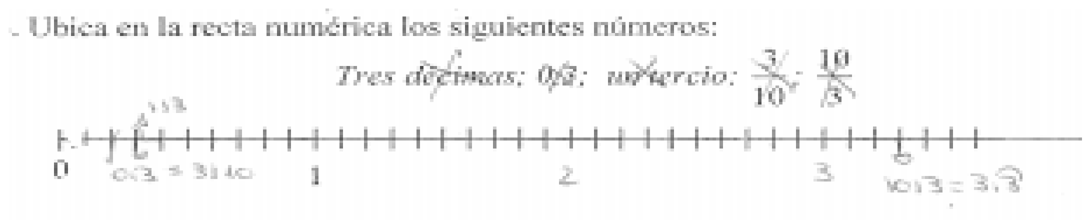


Figura 3.1. Un significado personal de representaciones de 10/3.

Vemos, en este otro caso, que el estudiante parece entender a 1/3, como una parte de 3, pero desvinculado de la recta. No puede relacionar el significado que pone en juego, con el que se requiere en el ítem, 1/3 como punto que identifica a dicha fracción sobre una determinada graduación de la recta.

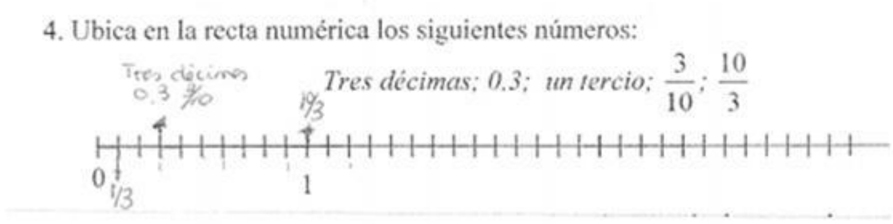


Figura 3.2: Un significado personal de la representación de 1/3 en la recta.

El estudio de este ítem nos permite observar que podemos confundirnos si nos quedamos conformes solo con la evaluación realizada a través del ítem 3. Es claro que la cuestión funciona, en el mejor de los casos, en una sola dirección. Es decir, hay un reconocimiento de equivalencia en ciertas formas de representación y para cierto tipo de números (decimales). Pero cuando se introduce un recurso, como en este caso la recta, y se solicita que sean ellos quienes busquen la representación “equivalente”, aparecen conflictos del tipo que hemos anticipado y aún más. Los significados personales se hallan limitados para la identificación del objeto (número) y por ende en la posibilidad de realizar una transformación.

Tal como concluyen Michaelidou, Gagatsis y Pitta-Pantazi (2004), en su estudio sobre los números decimales, no hay coordinación entre reconocimiento, representación y transformación de representaciones.

3.3.2.5. Estudio del ítem 5

Somos conscientes que uno de los tipos de representaciones numéricas más usuales, en los diferentes ámbitos de la matemática, del mundo científico e incluso en la vida cotidiana, es la representación polinómica de un número (dicho en términos corrientes, los "números con coma" o frecuentemente llamados "números decimales").

El término número decimal, como ya describimos en nuestra área problemática en el Capítulo 1, es generador de muchos conflictos. No obstante, nosotros hemos adoptado una definición para número decimal, con la cual queda perfectamente establecida la distinción entre dicho ente numérico y la noción de representación decimal de un número. Desde este punto, y con el propósito de seguir profundizando en la búsqueda de factores condicionantes que impiden un manejo idóneo de los campos numéricos, es que centramos nuestra atención en explorar las relaciones que establecen los estudiantes para profesor entre número decimal, expresión decimal y aproximación decimal de un número. Consideramos que dicha distinción resulta esencial para evitar conceptualizaciones y usos erróneos en los diversos contextos en que la expresión decimal de un número, en particular en su forma polinómica, como ya anticipamos, es ampliamente utilizada.

En la tabla 3.8, se pueden observar los elementos que intervienen en este ítem y el significado que hemos atribuido según el contexto.

Tabla 3.8. *Configuración epistémica asociada al ítem 5*

Tipos de Objetos	*Significado*
Expresiones lingüísticas	
"expresa mediante una escritura decimal finita.., cuando sea posible"	Obliga a reconocer un número decimal cualquiera sea su expresión y dar una expresión equivalente concreta: la expresión con coma
$\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \pi$	Símbolos que representan números reales particulares
Conceptos/definiciones	
Expresión decimal finita	Expresión que representa a un número decimal
Número irracional	Número real cuya expresión decimal contiene infinitas cifras decimales no periódicas

Número racional	Número real cuya expresión decimal puede tener un número finito de decimales o un número infinito periódico.
Expresión decimal periódica	Expresión cuya parte decimal contiene cifras que se repiten de manera regular.
Propiedades/proposiciones	
P1: Todo número racional se puede expresar por medio de una fracción	Remite a dos tipos de fracciones: fracciones decimales y fracciones cuya expresión decimal es periódica.
P2: Existen números racionales que pueden expresarse mediante escritura decimal finita	Numero decimal
Procedimientos	
Tratar la fracción como operador	Búsqueda del cociente entre numerador y denominador
Determinar si el número dado es decimal	Observar el cociente y el resto de la división
Argumentos	
Técnicas para hallar la fracción generatriz del número racional	Justificar la propiedades

A continuación describimos dos posibles conflictos semióticos que pueden surgir durante las prácticas desarrolladas por los estudiantes:

- Considerar a un número racional periódico por su escritura como decimal (2,3 (3 con arco))
- Identificar la aproximación decimal de un número real con dicho número

En la tabla 3.9, se pueden observar los resultados obtenidos de la aplicación del ítem.

Tabla 3.9: Porcentajes de respuestas a la situación 5 (n=49)

Respuestas	%	Respuestas	%	Respuestas	%
Bien	90	Bien	20	Bien	29
Mal	4	Mal (truncamiento o periodicidad con arco)	60	Mal (dan una aproximación decimal)	59
No c.	6	Mal (otros)	14	Mal (dan expresión decimal con indicación de infinitas cifras)	6
		No contesta	6	No contesta	6
Total	100	Total	100	Total	100

En términos generales podemos realizar las siguientes valoraciones:

Se observaron pocas dificultades cuando el número es decimal y su expresión es fraccionaria, y un alto porcentaje cuando el número es racional no decimal.

En el caso de 1/3, el 80% no resolvió bien la situación, y dentro de ellos el 60% consideró el arco indicativo de la cifra periódica como símbolo de finitud, o dio una aproximación decimal del número como equivalente a él.

En cuanto al número π, la situación también resultó conflictiva, pese a ser un número "conocido" desde edades muy tempranas. Apenas el 30% argumentó la imposibilidad de ser expresado por medio de un número decimal finito, y el 65% dio una aproximación decimal de este número como equivalente a él.

Una de las consecuencias importantes de los resultados obtenidos, con respecto a 1/3 y π, es que las definiciones de número racional e irracional no se encuentran efectivamente disponibles como lo hemos visto en el ítem 1, y lo confirman Zazquis y Sirotic (2004).

Para los alumnos las expresiones decimales parecen ser todas del mismo tipo como afirma Sirvent (2002), pero además sin conciencia significativa de la entidad numérica que representan o dejan de representar, a través de la variación decimal.

3.4. ESTUDIO EXPLORATORIO: FASE 2

Como hemos visto, en la primera fase de estudio exploratorio, los ítems planteados referían intencionalmente a la tipología *Conocimiento Común* de algunos aspectos del contenido números decimales. Decimos intencionalmente, dado que a estos alumnos se los evaluaría por los *significados personales* manifestados, al inicio de la carrera de profesor para primaria. Esto es, suponemos una formación básica proveniente de la escolaridad primaria y media.

En función de las dificultades observadas en la primera fase del estudio exploratorio, y teniendo en cuenta que este grupo de alumnos participaría de un proceso formativo específico sobre los números decimales, es que nos propusimos realizar una nueva exploración posterior a dicho proceso. Antes de adentrarnos en el estudio exploratorio de la segunda fase, describimos una serie de elementos que configuran el proceso formativo recibido por los estudiantes.

La asignatura “Matemáticas y su didáctica” (Diplomatura de Educación Primaria, Facultad de Educación de Granada) en la que se desarrolló este tema, dispone de 6 hs. organizadas en tres partes. 2 hs. destinadas a teoría, 2 hs. de resolución de problemas y 2 hs. de actividades con modalidad de taller.

En el desarrollo de las clases de teoría, se presentó el Tema 3 destinado a los números racionales, previamente se desarrollaron conceptos vinculados a las fracciones. Se comienza justificando la necesidad de los números racionales y se introduce la definición formal como el cociente indicado entre dos números enteros con la restricción correspondiente para el denominador. Se lo caracteriza también como el representante de una familia de fracciones equivalentes. Se establece la importancia del uso de una u otra fracción dentro de la clase de fracciones equivalentes, identificada con un representante, según el contexto de uso y la relación de éstas con el número que representan (distinción entre equivalencia e igualdad). Se introduce la noción de razón haciendo las distinciones pertinentes con el concepto de fracción, como así también la fracción como operador. También se definen las operaciones básicas presentadas a través de situaciones problemáticas generalmente extraídas de libros de textos escolares. También se habla de orden y comparación de números racionales a través de la comparación de fracciones. Por último, en la primera parte de este tema, se plantea la propiedad de densidad y se discuten los límites del concepto de sucesor.

En la segunda parte, se desarrollan las expresiones y números decimales. Se comienza con actividades introductorias que requieren la distinción de los distintos campos numéricos, para luego cerrar con un esquema de conjuntos donde se exhibe las relaciones entre ellos. Se retoma la comparación entre números racionales y la equivalencia de representaciones de un número por medio de tareas. Se aborda la distinción entre expresión decimal y número decimal. Se avanza en la mencionada distinción a través de una reflexión, realizada sobre una tarea presentada en un libro de texto generadora de “eventuales conflictos cognitivos en los niños”. Se ejemplifican diversos modos de representación de un número decimal (como fracción , como expresión decimal, como porcentaje).Se caracteriza al número decimal a través de la fracción decimal, destacándose las características del denominador. Se deja expresa la distinción entre número decimal y notación decimal de un número. Se analizan relaciones entre número decimal y número racional, poniéndose en juego también la notación decimal. Se muestra que el número de cifras decimales es una característica de la expresión decimal y no del número, dado que un número decimal puede ser representado por diferentes expresiones decimales. Se desarrolla un número decimal de forma polinómica como otra forma de representación de dicho número. Se mencionan una serie de utilidades de estos números. Las operaciones de multiplicación y división son motivadas por medio de situaciones que obligan a que estas sean desarrolladas, poniendo en juego el significado más que el algoritmo en sí mismo.

Como complemento del desarrollo que se ha descrito precedentemente, a los estudiantes se les provee de una selección de tareas resueltas (se proponen al menos dos formas de resolución), con el objetivo de analizar los conocimientos puestos en juego en la solución de problemas elementales de matemáticas. En ellos se solicita: resolver el problema, generalizar el enunciado sustituyendo datos por variables, explicar y justificar las soluciones indicando conceptos, propiedades y procedimientos desarrollados. Como contenido matemático se trabaja con números decimales, expresados en forma polinómica y fraccionaria, equivalencias entre ellas, con aproximaciones decimales y con medidas en distintos contextos.

Por otra parte se les solicita a los estudiantes la resolución de unas serie de problemas en los que se tratan: expresiones decimales periódicas y su equivalencia en forma fraccionaria, aproximaciones de números irracionales, se explicita la propiedad de densidad, expresiones polinómicas de números expresados "con coma" en distintas bases. También se dan tareas donde se debe poner en juego la definición de número racional con o sin el recurso de la calculadora.

Ahora bien, visto el proceso formativo del que fueron partícipes estos estudiantes, en esta segunda fase, se decidió elaborar una situación compuesta por solo cuatro cuestiones. Estas, en su conjunto, ponen en juego significados que consideramos esenciales y que focalizan características específicas tanto del número decimal como del número racional (poniendo en descubierto las distinciones). El propósito de la tarea es evaluar significados personales de los estudiantes en torno a *la distinción entre el concepto de número decimal y la expresión decimal de un número* en un contexto de números racionales.

3.4.1. Análisis de objetos y significados del cuestionario final

El instrumento para evaluar la segunda fase contempla la siguiente indicación y contenido:

Resuelve las siguientes cuestiones:
a) ¿Son decimales los números 1’3456789 y 27’454545…. (45 repetido indefinidamente)?
Justifica la respuesta.
b) ¿Cuál es la fracción que es igual a 27’454545…. (45 repetidamente)?
c) ¿Es un número decimal el número cuya expresión decimal es 4’58999...(una infinidad de 9)?
Justifica la respuesta.
d) Explica la diferencia entre “número decimal” y “expresión decimal de un número real”

Los apartados que integran la tarea se hallan intencionalmente vinculados entre si, a los fines de poder valorar si los significados personales se hallan próximos al significado institucional pretendido, y observar eventuales disparidades, entre ambos tipos de significados a través de la presencia de posibles conflictos semióticos. Para ello hemos desarrollado una configuración epistémica integral de la tarea, la cual se describe en las Tablas 3.10 a 3.14.

.Tabla 3.10. *Elementos lingüísticos puestos en juego en la tarea*

Objetos	***Significados***
“¿Son decimales los números….?”	Concepto de número decimal
“45 repetido indefinidamente” “una infinidad de 9”	Periodicidad e infinitud de cifras decimales
1’3456789 27’454545… 4’58999…	Expresiones decimales de números racionales: Racional decimal Racional no decimal Racional decimal con expresión decimal periódica
“Cual es la fracción que…”	Fracción generatriz de un número racional
“Explica la diferencia entre número decimal y expresión decimal….”	Distinción conceptual entre ambas nociones
Expresión del procedimiento para hallar la	Procedimiento de cálculo de la fracción generatriz

fracción generatriz	
Expresión de las justificaciones en los incisos a) y c)	Argumentos que establecen la verdad de las proposiciones

Tabla 3.11. *Conceptos/definiciones puestos en juego en la tarea*

Objetos	*Significados*
Fracción	Representante de un número racional
Número decimal	Número racional que tiene como representante una fracción decimal
Número racional	Clase de fracciones equivalentes
Expresión decimal de un número real	Representación de un número real en la forma: a'bcd…, donde a,b,c,d,…. Son números naturales
Número decimal cuya expresión decimal tiene infinitas cifras.	Expresión del número decimal a,bc…(d+1) en la forma: a,bc…d99999…
Fracción generatriz de la expresión decimal periódica de un número racional	Fracción que interpretada, al dividir numerador y denominador genera la expresión decimal del racional correspondiente

Tabla 3.12. *Propiedades/proposiciones puestos en juego en la tarea*

P1: Para toda expresión decimal periódica existe una fracción generatriz	Permite decidir si el racional correspondiente es un número decimal
P2: Si la expresión con comas de un número racional se puede convertir en fracción decimal, entonces el racional es un número decimal.	Permite decidir si el racional correspondiente es un número decimal
P3: a) 1'456789 es decimal b) 27'454545…no es decimal c) La fracción generatriz de b) es: $\frac{302}{11}$ d) El número 4'589999…., es el decimal 4'59	a) Establece que 1'456789 pertenece a la clase de los números decimales. b) Determina que el número 27'454545… no pertenece a la clase de los decimales. c) Justifica que el número 27'454545…., no pertenece a la clase de los decimales. d) Caracteriza a los números decimales con expresión decimal infinita.
P4: Si en la descomposición en factores primos del denominador de una fracción irreducible solo existen las potencias de 2 y 5, entonces el racional respectivo es un	Permite decidir si el racional correspondiente es un número decimal.

número decimal.	

Tabla 3.13.: Procedimientos puestos en juego en la tarea

Objetos	*Significados*
Técnica para hallar la fracción generatriz de un número racional	Obtención de fracciones generatrices par decidir si el número es decimal
Comparación conceptual entre número y expresión decimal de un número	Establecer diferencias entre ambos conceptos

Tabla 3.14.: Argumentos puestos en juego en la tarea

Objetos	*Significados*
A1: Deductivos, considerando los casos expresión decimal finita, periódica pura o mixta.	Establecen la verdad de la proposición correspondiente
A2: Del cambio de representación se cumple la definición de número decimal	
A3: De la forma de representación, con coma, que tenga un número y la aplicación de la propiedad P2, se determina si un número es decimal	
Teorema directo: multiplicando numerador y denominador por potencias de 2 y/o 5 convenientemente. Teorema recíproco: Reducción al absurdo (Godino y cls, 2004, p. 129)	

Las tablas precedentes describen la gran variedad de objetos que intervienen en esta tarea, como así también el significado que se le atribuyen en el contexto en que ella ha sido planteada. Por lo tanto a partir de la configuración epistémica de la tarea son esperables los siguientes conflictos:

- Considerar que un número cuya expresión decimal tiene infinitas cifras periódicas no puede representar a un número decimal.
- Tomar el concepto de número decimal y el de expresión decimal de un número racional como equivalentes.

Dado que para esta tarea, se ha pedido explícitamente a los estudiantes que justificaran, para cada caso, sus respuestas es que en el análisis de las mismas hemos considerado de manera expresa tipos de argumentación utilizadas.

3.4.2. Descripción del análisis y resultados

En este apartado realizamos una breve descripción de los resultados obtenidos de la aplicación de la tarea. También rescatamos significados personales que se desprenden del análisis de las prácticas desarrolladas en la resolución de la tarea.

La tabla 3.15 incluye los porcentajes de respuesta y tipos de argumentaciones dadas por los estudiantes a la cuestión a).

Tabla 3.15: Porcentaje de respuestas y argumentaciones del inciso a) (n= 49)

¿Es decimal 1’3456789?	%	TIPO DE ARGUMENTACIÓN	%
Correcto	77,5	Es expresable como fracción decimal	34
Incorrecto o no contesta	22,5	La cantidad de cifras decimales es finita	13
		El cociente es exacto	3
		Las cifras decimales no son periódicas (argumentación incompleta)	5
		Argumentaciones incompletas	10,5
		Argumentación mal- otros tipos	18,5
		No argumenta	16
¿Es decimal 27’454545…?		**TIPO DE ARGUMENTACIÓN**	
Correcto	51	Tiene infinitas cifras decimales	4
Incorrecto	39	Tiene infinitas cifras decimales periódicas	16
Ambiguas o no responden	10	Responde a partir de la fracción generatriz	48
		Es un decimal periódico	8
		La división no es exacta	4
		No argumenta	20

Observamos que, para el primer caso dado, 1’3456789, el 77,5% de los estudiantes responde que efectivamente se trata de un número decimal. No obstante, poco más del 60% logra dar una justificación y solo el 50% lo hace de manera correcta. Las justificaciones se reparten entre tres tipos, de las cuales el hecho de que el número pueda expresarse como fracción decimal es la que lleva el mayor porcentaje (34%).

Dentro de las incompletas cabe destacar el caso de quienes afirman que la razón está en que “las cifras decimales no son periódicas”. En estos casos, no queda claro, quizás porque quede implícito, que esta afirmación es válida porque el número de cifras que componen la “parte decimal” es finita. (Aunque los estudiantes, en general, no lo mencionan).

En tanto que para el segundo caso (27’454545…), el porcentaje de respuestas correctas descendió al 51%. Nos parece interesante destacar que, independientemente del grado de corrección, el 80% de los estudiantes realizó algún tipo de argumentación. Entre ellas el 52% eligió tipos de argumentaciones correctas, dado que el 48% ha hecho explícita una justificación buscando la fracción generatriz equivalente a esta expresión y de ese modo poder caracterizar el número dado, y el 4% apeló a la imposibilidad de finitud de la expresión decimal dada. En los casos restantes, el tipo de argumentaciones quedan incompletas y por lo tanto no suficientes para garantizar las afirmaciones. El problema central se ubica en que solo fijan la atención en la “forma” de la representación y “descuidan” observar características del número dado que garanticen la afirmación de la respuesta (Duval, 1993; O´Connor, 2001, Socas 2001).

La tabla 3.16 incluye los porcentajes de respuesta y tipos de argumentaciones dadas por los estudiantes a la cuestión b)

Tabla 3.16: Porcentajes de respuestas y argumentaciones inciso b) (n= 49)

SOLUCION	%	TIPO DE ARGUMENTACIÓN	%
Bien	43	Aplica la técnica estándar	100
Mal	39	Técnica mal	58
		No aplica la técnica	5
		No argumenta	26
		Otras	11
No lo hace	18		

En este apartado solicitar una expresión fraccionaria para el número racional 27,4545…, provee al estudiante medios con los cuales se puede corroborar, si efectivamente la respuesta dada en el apartado anterior es correcta, en caso de no haber utilizado este recurso para justificar su respuesta. No obstante, nos encontramos con que solo el 43% aplica correctamente la técnica, tanto que el 57% o la aplica mal o ni siquiera la plantea (18%). Esto supone, que un alto porcentaje de estudiantes no tiene, en su repertorio de conocimientos, disponible la técnica que permite argumentar de manera experta el carácter de “no decimal” que posee el número dado.

La tabla 3.17 incluye los porcentajes de respuesta y tipos de argumentaciones dadas por los estudiantes a la cuestión c).

Tabla 3.17: Porcentajes de respuestas y argumentaciones inciso c) *(n= 49)*

SOLUCIÓN	%	TIPO DE ARGUMENTACION	%
Si	33	Usa la fracción generatriz	31
		Por aproximación	12,5
		Porque tiene cifras decimales	12,5
		No interpreta la función generatriz	19
		No argumenta	19
		Otros	6
No	49	Mal uso de la técnica de la fracción generatriz	8
		"Si es periódico, no puede ser"	34
		No cumple la definición de número decimal	4
		No argumenta	27
		Otros	27
No responde	18		

Con el propósito de ahondar aún mas, en la cuestión de la identificación de la tipología de un número a partir de su expresión decimal, entramos en un terreno que en este caso "exige" implícitamente recurrir a la fracción generatriz de la expresión dada (4,58999…) para poder dar una respuesta adecuada. La posibilidad de que el número dado sea decimal, queda evidentemente fuera de las expectativas del alumno. Solo el 33% afirma que el número es decimal y el 31%, lo hace utilizando la fracción generatriz como medio de argumentación. En tanto que, el 49% resuelve que el número no es decimal, quedándose la mayoría (34%) observando la expresión independientemente de sus características. En ambos casos, las respuestas son cerradas y en "ningún" caso se observan indicadores de posibilidad de una respuesta dual. Esto muestra una efectiva compartimentalización del conocimiento, tal como señala Moseley (2005) y un contrato didáctico (Brosseau, 1989) que les asegura que siempre las respuestas son únicas. No obstante, como se ha observado en la descripción del proceso formativo, este tipo de situaciones habían sido planteadas y trabajadas en clase.

Cabe aclarar que el persistente propósito de buscar la fracción generatriz como medio de justificación no es caprichoso, ni interesa como técnica en si misma. Es claro que se busca que se relacione dicha técnica con la posibilidad de pasar a otra forma equivalente de expresar un número (como fracción), lo que posibilita “acercarse” con mejores posibilidades a las condiciones que permiten la conceptualización del número dado.

Conclusiones globales sobre el ítem d)

Sólo el 14% pudo expresar con cierta claridad las diferencias entre número decimal y expresión decimal de un número real. En general, no describieron la distinción y quienes lo intentaron expresaron explicaciones confusas.

3.5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

En cuanto a lo obtenido en la primera fase de la exploración podemos puntualizar, a modo de síntesis, las siguientes conclusiones:

- Los significados personales de los estudiantes sobre el concepto de número decimal se presentan confusos; en general tales significados se hallan ligados a una de las formas de expresión, con coma, y en algunos casos como fracción.

- El conjunto de los números decimales (D), es el que mayores dificultades presenta en su relación con el resto de los números. Su inserción introduce, en el uso, una amplia gama de confusiones que atraviesa y tiñe a todos los sistemas numéricos.

- Se observaron dificultades en el significado y manejo de propiedades como la determinación del ámbito de validez del sucesor de un número, evidenciando conflictos de significado que obstaculizan la comprensión de la densidad del conjunto numérico D; siendo esta propiedad fundamental para avanzar hacia la construcción de otros conjuntos numéricos.

En lo que refiere a la segunda fase, se observó una mejora considerable en el reconocimiento de un número decimal, aunque las argumentaciones presentaron un importante grado de confusión. Ello se vio vinculado estrechamente con las expresiones decimales de un número que, aunque habían sido estudiadas, los alumnos no lograron un conocimiento que les permitiera zanjar el problema de la distinción entre número y expresión. Tal como afirma Duval (1993), el riesgo que se corre es precisamente que el estudiante confunda las representaciones con el objeto matemático y aprenda, de alguna manera, a trabajar con ellas pero sin lograr concebir el objeto matemático.

3.6. OBSERVACIONES FINALES

De la exploración de investigaciones realizadas en el capítulo 1, podemos observar dificultades existentes en la enseñanza y aprendizaje de los números decimales, como así también las implicaciones que ello acarrea tanto para el desempeño en la vida cotidiana como en el abordaje de conocimientos nuevos en el área de los números. Se pone de manifiesto también la necesaria revisión de textos y actividades planteadas para el aula por parte de los docentes en actividad. Si bien las prescripciones curriculares exhiben la importancia del tratamiento de esta clase de números, como se muestran en los NCTM, generalmente en los niveles inferiores de prescripción se hallan orientaciones poco claras y compartimentalizadas sobre este tópico.

Un exhaustivo tratamiento de los números decimales, puede ser el centro de una problemática general que permita contribuir a "destrabar" el conjunto de errores, dificultades y confusiones que hemos detectado, no solo para la concepción y uso de los números decimales sino para una transición con significado hacia la incorporación de los otros conjuntos numéricos.

Esto no es suficiente, necesitamos tener un conocimiento más amplio y específico no solo sobre las dificultades sino también, sobre el tipo de conocimientos que poseen estos estudiantes que obviamente requieren de una formación específica y adecuada para su función.

En tal sentido, resulta importante explorar no solo significados personales sobre el conocimiento común del contenido, sino indagar sobre las posibles formas en que el conocimiento de dicho contenido se encuentra disponible en el estudiante con fines de enseñanza.

CAPITULO 4

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE LA INTRODUCCIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES EN LIBROS DE TEXTO

4.1. INTRODUCCIÓN

Del estudio exploratorio realizado en el Capítulo 3, se observa que muchos de los problemas mencionados siguen plenamente vigentes aún en estudiantes que ingresan a la universidad, lo que hemos fundamentado con las investigaciones citadas.

Como se desprende del Capítulo 1, las orientaciones curriculares y las investigaciones didácticas proponen el desarrollo de competencias a lograr por los alumnos de primaria en cuanto a los números decimales. En principio podemos suponer que los libros de textos interpretan, desarrollan y aplican las orientaciones curriculares, y tienen en cuenta las experiencias e investigaciones didácticas realizadas sobre los contenidos matemáticos abordados.

Estos hechos citados precedentemente nos movilizan a realizar un segundo estudio, de carácter exploratorio. Esto es, un estudio referido a los libros de textos, entendiendo que constituyen un tipo de institución de referencia inmediata utilizado en la planificación y desarrollo de un proceso formativo.

Para el mencionado estudio, nos planteamos las siguientes cuestiones, ¿En qué medida los libros de texto de educación primaria, consideran los resultados de las investigaciones didácticas en el tema de los números decimales? ¿Qué aspectos se podrían mejorar?

Las respuestas a estas cuestiones serán dadas a través del análisis, en primera instancia y desde una visión global, de cómo se introducen los números decimales en dos libros de textos para la escuela primaria y que luego profundizamos, con un análisis exhaustivo de una lección en un tercer texto[1]. Este último estudio tiene el propósito de explorar un tipo análisis que permita identificar los contenidos tratados, tipos de problemas usados para introducir las nociones, representaciones, elementos conceptuales, procedimentales, propiedades y modos de argumentación, así como la presencia de posibles conflictos potenciales.

El análisis exhaustivo de la lección[2] introductoria al tópico números decimales, se realiza en un texto de matemática para cuarto grado de la escolaridad primaria (Peña, Aranzubía y Santaolalla, 2008). Presentamos una descripción global de la lección, tras lo cual se realiza un análisis sistemático utilizando algunas herramientas teóricas del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero, Font, 2007; Godino, Font y Wilhelmi, 2006).

Este capítulo lo organizamos en tres secciones. En la primera sección describimos aspectos generales ligados al tratamiento de los números decimales en dos libros de textos, tras lo cual derivamos algunas conclusiones sobre esta primera visión, apoyados en resultados de investigaciones. En la segunda sección abordamos el estudio sistemático de las distintas secciones del libro mencionado y en la última sección incluimos algunas reflexiones finales y recomendaciones para el docente[3].

4.2. ASPECTOS GENERALES SOBRE LA INTRODUCCIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES EN DOS LIBROS DE TEXTOS

Como hemos anticipado uno de los recursos dominantes en muchas clases de matemáticas es el libro de texto. El profesor utiliza el libro de texto de matemáticas de diferentes maneras, dado que las interacciones específicas entre profesor, estudiante y libro de texto son complejas. La mayoría de los profesores siguen un texto cuando planifican e implementan el currículo. Dada esa fuerte influencia de los libros de textos, coincidimos con Shield y Dole (2009) que la forma en que los temas son presentados en ellos requiere de un análisis detallado. Por otra parte, las investigaciones ponen énfasis

---

[1] Se trata de un libro de uso amplio actualmente en España.
[2] Entendemos aquí por lección a un conjunto de tópicos agrupados en una unidad temática de referencia, que se desarrolla en un corto periodo de tiempo.
[3] Parte del contenido de este capítulo ha sido publicado en Konic, Godino y Rivas (2010).

que frecuentemente los libros de textos son compilaciones de ejercicios que requieren de un bajo nivel de procedimientos y que poco hacen por promover la comprensión conceptual, tal como señalan Vincent y Stacey (2008). En ese sentido, es que nos proponemos en este apartado analizar el tipo de elementos de significado presentes en los textos y el modo en que estos se relacionan. El propósito final es determinar si este recurso resulta facilitador de un aprendizaje con comprensión de los números decimales.

4.2.1. Texto 1

El libro que hemos seleccionado es el de Almodóvar et al. (2005), Matemáticas para cuarto curso de primaria de la editorial Santillana. La introducción a los números decimales, en este texto, se encuentra en la lección 12, pp. 154-167, bajo el título "Números para la fiebre". A los fines de observar la estructura general de la lección y la relación de contenidos, la hemos dividido en cuatro unidades de análisis. En la tabla 4.1 se puede ver dicha estructura.

Tabla 4.1. *Descomposición de la lección en unidades de análisis*

Unidad de análisis	**Sub-unidades**	**Contenido**	**Páginas**
$\mathbf{U_1}$		Situación introductoria a la lección	154-155
$\mathbf{U_2}$		Revisión de conocimientos previos	155
$\mathbf{U_3}$	U_{21}	La unidad y la décima	156
	U_{22}	Tareas	157
	U_{23}	La centésima	158
	U_{24}	Tareas	159
$\mathbf{U_4}$	U_{31}	Los números decimales	160
	U_{32}	Tareas	161
$\mathbf{U_5}$ (**Distintos tipos de tareas**)	U_{51}	Situaciones de compra	162-163
	U_{52}	Resolución de problemas	164
	U_{53}	Actividades	165
	U_{54}	Tareas de revisión	166-167

Como se ve en la estructura de la lección, la misma se inicia con una situación introductoria. Se desarrolla en un contexto real, y cercano a los intereses de un niño de esa edad. La situación pone en juego medidas de cantidades de temperatura corporal. También se utiliza el termómetro como recurso para valorar dicha temperatura. Dicha valoración se efectúa en principio, a través de un juego de lenguajes que relaciona lenguaje coloquial (“temperatura corporal”, “fiebre”), lenguaje simbólico (41 grados, 41 con 4, 42 grados), lenguaje gráfico (41 y 4 “rayitas”) y por último un gráfico graduado donde se indica la temperatura del termómetro con la expresión: 41,4. A esta situación, sigue un apartado que propone reflexionar sobre la lectura. Específicamente sobre cómo se podría expresar con un número el significado de “pasar tantas rayitas de 41”. Inmediatamente se muestra un termómetro digital que expresa 21.3° y donde se solicita explicar qué temperatura marca el termómetro.

Una primera reflexión sobre esta unidad, nos permite observar que hace su primera aparición el número decimal, como un “modo de expresar” la medida de una cantidad de diferentes magnitudes. Según Ruiz (2004), una de las concepciones habituales con la que son introducidos de manera temprana los números decimales con el propósito de facilitar a los alumnos la utilización de las unidades convencionales de medida. Ese tipo de cantidades, son expresadas en el texto con un número “con coma”, y también como un número “con punto”.

El hecho que en la reflexión sobre la situación introductoria se solicite expresar numéricamente “pasar tantas rayitas de 41”, requiere simplemente de una “imitación” (observar el gráfico de la ilustración, Fig. 4.1) y no de una respuesta basada en un significado emergente de un proceso de representación. Este hecho, puede representar un primer conflicto para la posterior comprensión del significado de décimas, centésimas, milésimas, etc.

Figura 4.1: Ilustración de la situación introductoria

La segunda unidad que hemos fijado hace una revisión, a través de interrogantes, del nombre de los elementos que forman parte de una división y los correspondientes a una fracción. Elementos que, por otra parte, no son puestos en juego en los apartados posteriores.

La unidad siguiente, que hemos denominado como **U_3,** inicia con el tratamiento de la unidad, la décima y las centésimas. Se trabaja la unidad gráficamente representada por medio de rectángulos divididos en 10 o 100 partes iguales, ello para introducir los conceptos de décima y centésima respectivamente. A partir de las definiciones que se desprenden de un contexto real traducido a un gráfico rectangular, se establece las siguientes notaciones como equivalentes:

"1 décima se escribe $\frac{1}{10}$ ó 0,1" y "1 unidad = 10 décimas"

De igual modo para la centésima:

"1 centésima se escribe $\frac{1}{100}$ ó 0,01" y

"1 unidad = 100 centésimas 1 décima= 10 centésimas"

Con respecto a las tareas referidas a las décimas, de las cinco presentadas, tres de ellas están destinadas explícitamente a relacionar los distintos tipos de representaciones. En dos de ellas se vinculan (representaciones simbólicas) con la representación gráfica; y en la otra solo representaciones simbólicas, en las tres formas vistas precedentemente. En la última tarea se requiere operar con grados y décimas, en un contexto de temperaturas.

La mayoría de las tareas vinculadas a las centésimas, están destinadas a relacionar unidades, décimas y centésimas expresadas en lenguaje coloquial. Así mismo, se plantea una tarea idéntica a la de las décimas, (identificación de carteles con representaciones equivalentes) pero con centésimas.

El desarrollo de las décimas y centésimas, se hace de manera completamente estanca e independiente del problema motivador inicial. Como si la situación inicial ya tuviera las necesarias respuestas y por ende vamos hacia un capítulo aparte. De hecho, que esto es así, precisamente porque ya "se ha fijado" cómo representar la temperatura del pájaro, y no se ha dejado abierta ninguna necesidad que obligue a otorgar significado a la representación numérica que ha sido dada.

Por otra parte, si bien con el tratamiento de las décimas y centésimas se utilizan diversas representaciones para un mismo número, estas equivalencias pueden quedar en un trabajo de manipulación representacional y no necesariamente ligadas al tipo de número que representan, dado que no se hace mención en general a esa relación. Parece que "las décimas y las centésimas" fuesen entidades aisladas, independientes con estatus en sí mismas.

En la unidad que hemos designado con $\mathbf{U_4}$, se hace mención al número decimal. Este es identificado con una forma de expresión particular, "la expresión con coma", y surge de observar la relación entre unidades, décimas y centésimas expresadas en forma gráfica.

La primera tarea de la unidad, tiene el propósito de reforzar la distinción entre "parte entera" y "parte decimal" del número. Esto como, sostienen Brousseau y Brousseau (1987), conlleva el conflicto potencial de tratar luego a este número como dos números enteros separados por una coma. Las dos tareas siguientes, requieren componer y descomponer un número expresado "con coma" o en forma coloquial, en unidades y décimas en centésimas. La tercera tarea permite identificar, en un número expresado con coma, el valor que asume una cifra según la posición que ocupa. Este tipo de tareas contribuye a la necesaria comprensión del valor de una cifra según la posición que ocupe en su representación polinómica, tal lo extensamente fundamentado por Steinle (2004). Por último la tarea que ocupa el último lugar en esta unidad, persigue el propósito de expresar un número decimal en forma de fracción. Resulta curioso como esta forma de representación se impone a través de una regla, como podemos observar en la figura 4.2.

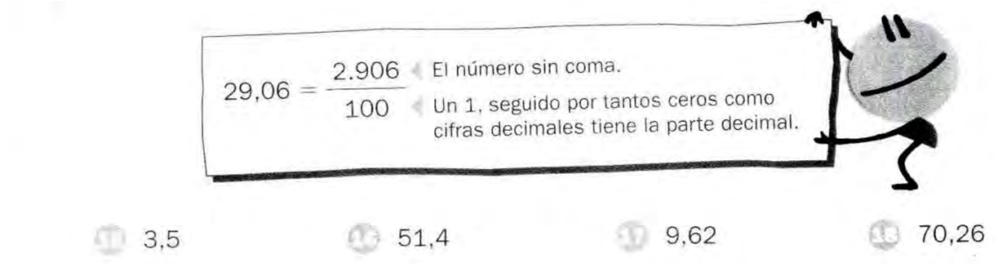


Figura 4.2: Conversión de un número decimal de expresión decimal a fraccionaria

Evidentemente, no se pone en juego todo el trabajo previo realizado en torno a la relación entre unidades, décimas y centésimas. La expresión polinómica 29,06 de dicho número decimal se puede leer entre otras formas, como 2906 centésimas, la que puede ser reconocida como expresión equivalente a 2906/100, cuestiones estas que han sido trabajadas ya en esta lección. Esta forma de relacionar los conocimientos previos, evita imponer, al inicio, una regla carente de sentido dado que estas relaciones pueden ser perfectamente establecidas por el niño. Un hecho que, lejos de dar significación a la equivalencia de relaciones introduce, según describe Brousseau (1997), obstáculos de tipo didáctico que impiden poner en funcionamiento los conocimientos previos y disponibles en el estudiante, como así también la fijación de un contrato didáctico sobre lo que "se debe hacer". Estos hechos ponen claros límites a la posibilidad de desarrollo de significados personales que estén próximos al significado institucional compartido por la comunidad de investigadores (Godino y Batanero, 1994).

La unidad $\mathbf{U_5}$, agrupa todo tipo de situaciones y tareas que se plantean al final de la lección. Nos remitiremos especialmente a la sub-unidad U_{51}, que trata de los números decimales en el contexto del dinero. Este contexto ha sido utilizado expresamente para introducir la suma y la resta. Es indudable que el contexto es cercano y de fácil comprensión para el niño, pero no "el más adecuado" como modelo para la concepción de las operaciones. Lachance y Confrey (2002), observan que en los libros de textos, no hay conexión entre capítulos y los referentes usados son diferentes en cada capítulo. Los decimales suelen ser presentados en el contexto de la moneda, y luego no logran volver a las equivalencias con fracciones, necesarias para argumentar la razón de ser de los algoritmos. Precisamente, en el texto, estas operaciones se plantean fomentando el tratamiento de los números decimales como si estos fueran enteros y operar en consecuencia del mismo modo. Este tratamiento anticipa conflictos a la hora de abordar otras operaciones. Concretamente, en el caso de la multiplicación o la división, "se conserva el modelo equivocado creado en la escuela elemental en base al cual la multiplicación aumenta los valores" (D'Amore y Fandiño, 2009).

Algunas precisiones finales sobre la lección

Vemos que los autores del libro, por una parte identifican los números decimales con una forma particular de escritura, y al mismo tiempo pretenden que los niños distingan el "mismo número" bajo tres escrituras diferentes. Tal como se observa en la siguiente tarea, (p. 157).

Copia y colorea del mismo color los carteles que representan el mismo número

Figura 4.3: Carteles que representan el mismo número.

Se pretende que el niño identifique "algo" que tienen en común estos "carteles". ¿Qué es eso que aquí se llama número? ¿De qué número se trata? Este hecho puede generar conflictos cognitivos en el niño ligados a conceptos, representaciones, propiedades, argumentaciones y por ende a las relaciones entre ellos.

De igual modo, la tarea que requiere de operar con grados y décimas, obliga no solo a pensar en la representación de un número en nuevo contexto, sino que, al no haber sido trabajadas las décimas de manera integrada con otro tipo de valores en un solo número, y menos aún operar con ellas, cabe preguntarse ¿con qué tipo de número asociará tal representación? ¿O es que ese número se queda solo en el plano de un tipo de representación, la coloquial, a través de la cual pocas veces "se ve" la presencia de un número?

4.2.2. Texto 2

El segundo libro que hemos seleccionado es el de Ferrero et al. (2008), Matemáticas para cuarto curso de primaria de la editorial Anaya. El inicio al tratamiento de los números decimales, en este texto, lo encontramos en la lección 7, (pp. 90-102). Del mismo modo, que para el texto precedente, para el análisis hemos divido la lección en unidades y sub-unidades como se muestra en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2. *Descomposición de la lección en unidades de análisis*

Unidad de análisis	**Sub-unidades**	**Contenido**	**Páginas**
U_1		Situación introductoria a la lección	90-91
	U_{21}	Las décimas	92
U_2	U_{22}	Tareas	92-93
	U_{23}	La centésima	94
	U_{24}	Tareas	94-95
U_3	U_{31}	Comparación y ordenación de números decimales	96
	U_{32}	Tareas	96-97

U_4	U_{41} U_{42}	Suma y resta de números decimales Tareas	98 98-99
U_5 **(Distintos tipos de tareas)**	U_{51} U_{52} U_{53}	Tareas de síntesis Tareas de refuerzo Tareas de desarrollo de competencias	100 100-101 102

El tema números decimales es introducido con una situación problemática, en el contexto de medidas. El contexto general que convoca es el deporte y por lo tanto se habla de alturas de niños, tiempo de récord obtenido en una carrera, altura máxima obtenida en una competencia de saltos. Y como caso especial la situación de un niño que queda fuera de la competición por tener "unas décimas de fiebre". Las medidas involucradas en la situación se vienen expresadas de dos maneras: lenguaje coloquial (1metro y 53 centímetros; 14 segundos y 8 décimas) y lenguaje simbólico formal (12,07 metros). Luego de la presentación de la situación se propone hablar sobre el texto, en términos generales y luego se plantean una serie de interrogantes que pretenden poner en evidencia las medidas expuestas en la situación.

Del mismo modo, que en el texto anterior, se prosigue con el tratamiento de las décimas y la centésima como una sección aparte, la que nosotros hemos identificado como unidad **U_2**. En este caso, el número decimal aparece de forma inmediata al iniciarse el tratamiento de las décimas. Es así que surge el número decimal como "un modo de expresar cantidades menores que la unidad". Desde esa perspectiva se presenta "la décima" como cada parte en que queda dividida la unidad cuando se divide en 10 partes iguales. La representación de las décimas se hace mostrando tres "formas" equivalentes (gráfica por medio de rectángulos, y dos escrituras: fraccionaria y "con coma").

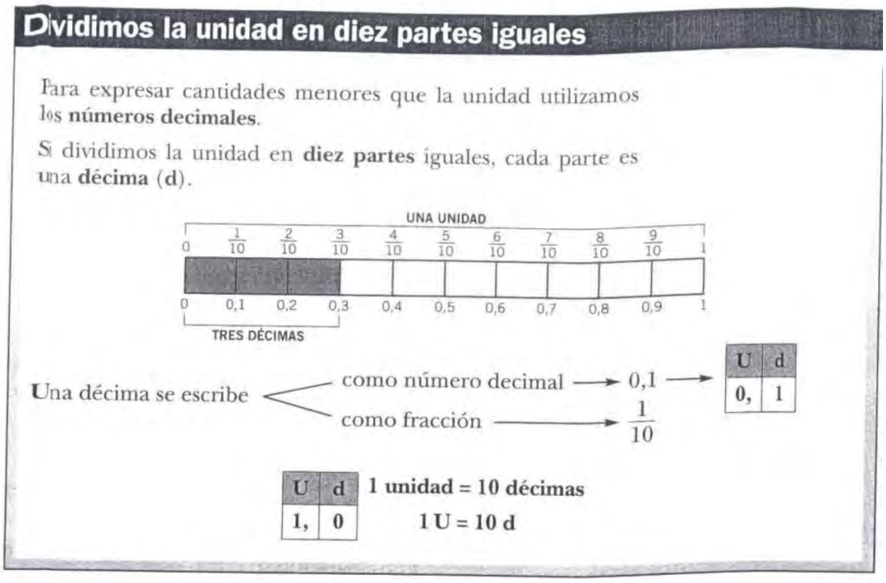


Figura 4.4: Presentación de las décimas

Pero esto genera un conflicto de significados. Por un lado el número decimal es una forma de escritura, pero también un número como su propio nombre lo indica. Por otra parte, como se ve en la Fig. 4.4, 0,1 y 1/10 son representaciones equivalentes para una décima. Luego, queda la "impresión" que algunas cosas son representaciones y otras números (0,1 y 1/10), o algunas números y representación a la vez (0,1). Pero entonces, cabe preguntarse ¿1/10 no es un número y 0,1 si lo es?

Estas ambigüedades productos del discurso, no resultan inofensivas. Precisamente comienzan, desde edades muy tempranas, a potenciar la generación de un conflicto semiótico significativo en la matemática en general y en los números en particular. La distinción y relación entre representación y objeto representado. (Duval, 1993; Socas, 2001).

Inmediatamente siguen una serie de tareas en las que, de manera constante, las consignas hablan de expresar con un número decimal y/o con una fracción a ciertos números dados. Como reforzando de manera permanente, el carácter numérico para los números decimales y el carácter representacional a las fracciones.

Cabe destacar en este contexto de trabajo con las décimas y centésimas el uso de la recta numérica como recurso representacional, no habitual a estas edades y que las investigaciones rescatan como favorecedora de la concepción de número decimal. No obstante, en este texto, siempre es utilizada para expresiones decimales y nunca con expresiones fraccionarias, contrariamente a la posición de diversas investigadores que promueven el trabajo relacional entre las distintas representaciones de un número (Michaelidou, Gagatsis y Pitta-Pantazi, 2004; Vourgias, Vourgia y Elia, 2003; Cramer, Wyberg y Leavitt, 2009) . Por último cabe destacar que el tratamiento de la centésima es idéntico, por lo que omitimos hacer alusión expresa a ella.

En la próxima unidad de análisis que hemos establecido, es decir la unidad **U$_3$**, se trata la comparación y ordenación de números decimales. Se inicia la sección estableciendo una regla para comparar dos números decimales. Se comparan solo las "partes enteras" del número decimal, si es que éstas son distintas. En tanto que, si las partes enteras son iguales, se pasa a observar "la parte decimal" de ambos números. En este caso se enuncia que "es mayor el número que tiene mayor parte decimal", seguidamente se muestra con un ejemplo dicha comparación, destacándose la comparación de las partes decimales como si estas fuesen números enteros.

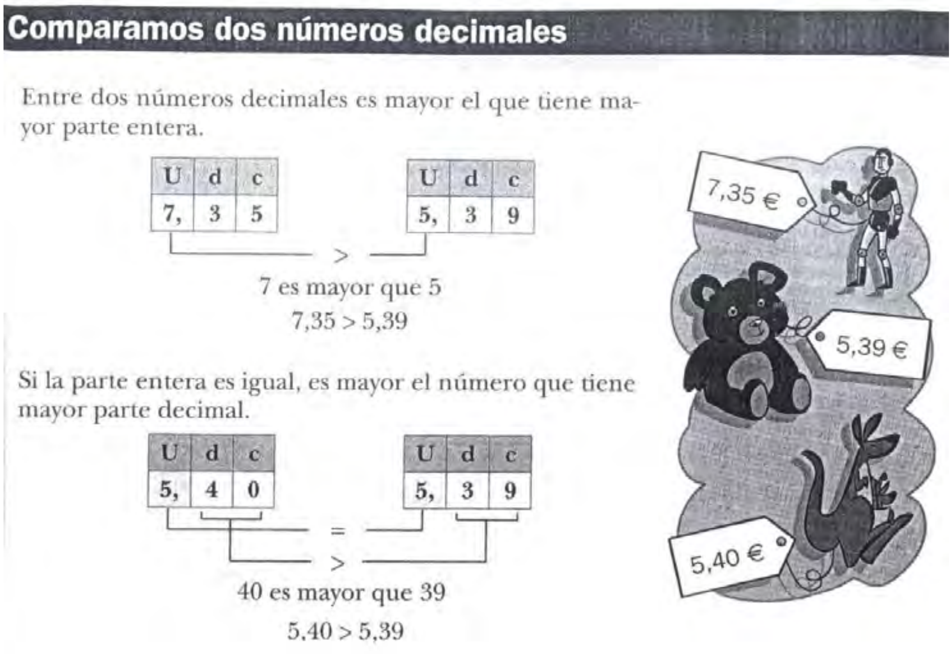


Figura 4.5: Comparación de dos números decimales

Ya hemos mencionado que una de las dificultades que obstaculiza el trabajo con estos números, en particular el proceso de comparación, reside en considerar al número decimal como si fuesen dos números enteros separados por una coma. Precisamente en el proceso de ordenación se observan serias dificultades cuando se quieren comparar las "partes decimales" en casos no estándares como los presentados al inicio del tema. Se trata de aquellos casos en que la "parte decimal" de ambos números, por ejemplo, no tienen la misma cantidad de cifras. Múltiples investigaciones muestran errores en este sentido al comparar, por ejemplo, 5,4 y 5,39 se suele afirmar que 5,4 es menor que 5,39, porque 4 es menor que 39.

Este ejemplo tan simple, lleva claramente a observar que, nuevamente no se relacionan los conocimientos adquiridos para la décima y la centésima particularmente en lo referente a la relación que existe entre ellas y su rol en el sistema de numeración posicional.

La próxima sección que hemos denominado unidad $\mathbf{U_4}$, está destinada a la suma y resta de números decimales. Estas operaciones, al igual que en el texto anterior son introducidas en el contexto de dinero y se induce al tratamiento de dichas operaciones como si fuesen números enteros. Para ello se describe un algoritmo, en el que mediante tres indicaciones, se explicita el procedimiento a seguir.

Algunas precisiones finales sobre la lección

En esta lección la ausencia de un trabajo con el valor posicional es un vacio importante, dado que es la base de la construcción de un sistema de numeración posicional, tal como sostienen Stacey y Steinle (2006). Se rescata la presencia de variadas representaciones, entre ellas la recta numérica. No obstante, no se observan instancias que efectivamente pongan en juego las múltiples relaciones entre ellas. Muestra de ello se observa en las secciones siguientes donde “se pierde” la posibilidad de conexión entre el concepto número decimal, tal como ha sido presentado y sus formas de representarlo. Generándose potenciales conflictos de significado esencialmente entre las concepciones de número decimal, representación y la correspondiente significación de estos elementos en los diversos contextos de medida en que se van presentando.

4.2.3. Conclusiones generales

En general, del análisis global realizado a ambos textos, podemos extraer algunas cuestiones que, desde nuestra visión resultan relevantes para un proceso formativo.

Los conocimientos del contenido que se espera desarrollar se presentan de manera estanca, como grupos de contenidos cerrados en sí mismos sin la necesaria articulación coherente entre conceptos, lenguaje, propiedades, argumentos de modo tal que su configuración epistémica promueva la significación parcial de aquellos elementos puestos en juego en el texto. Las trayectorias planteadas a lo largo de la lección, como las secciones en sí mismas adolecen de configuraciones epistémicas “idóneas” que favorezcan un desarrollo coherente de los conocimientos a partir de las dificultades que las investigaciones ya han mostrado suficientemente.

4.3. ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE UNA LECCIÓN INTRODUCTORIA DE LOS NÚMEROS DECIMALES

El libro que hemos seleccionado para este análisis es el de Peña et al. (2008), Matemáticas de cuarto curso de la editorial SM. La lección del libro se inicia con una situación-problema introductoria y motivadora, luego se desarrollan apartados que refieren a conceptos vinculados a los números decimales. Se incluye también un tercer bloque con actividades y ejercicios que procuran el desarrollo de algunas competencias específicas. Las unidades y sub-unidades en las que hemos dividido la lección, para hacer un análisis sistemático y facilitar las referencias entre secciones, se indican en la Tabla 4.3. A título de ejemplo, el análisis de la primera unidad lo hacemos con mayor detalle, mostrando la aplicación de algunas nociones del "enfoque ontosemiótico" al análisis de libros de texto (Godino, Font y Wilhelmi, 2006); esta metodología permite identificar la trama de objetos y significados que se ponen en juego en un texto matemático, y ayuda a reconocer su complejidad. Para el resto de las secciones o unidades fijamos la atención en algunos puntos que consideramos relevantes desde el punto de vista de la didáctica de los números decimales.

Tabla 4.3. *Descomposición de la lección en unidades de análisis*

Unidad de análisis	**Sub-unidades**	**Contenido**	**Páginas**
U_1		Situación introductoria a la lección	92-93
U_2	U_{21} U_{22} U_{23}	La décima y la centésima Actividades Problemas	94-95
U_3	U_{31} U_{32} U_{33}	Valor de posición Actividades Problemas	96-97
U_4		Lectura y escritura de números decimales	98-99
U_5	U_{51} U_{52}	Comparar números decimales Actividades	100-101

	U_{53}	Problemas	
U_6		Resuelve problemas	102
U_7		Aprende a aprender	103
U_8		Recuerda lo anterior	104
U_9		Pon a prueba tus competencias	105

4.3.1. Análisis de la situación introductoria

La unidad U_1, situación-problema introductoria (Fig. 1), comienza con una cuestión referida a la condición (altura) que le es requerida a un niño para poder participar en un juego y la estrategia que el niño intenta para acceder, dado que no cumple con la condición requerida. Podríamos inferir que esta situación-problema pretende poner en evidencia al "número decimal", a través de su uso, y especialmente la importancia que cobra la centésima en ese contexto cotidiano. De ello se deduce que el objetivo de esta situación-problema, en su conjunto, podría responder al interrogante general, ¿Qué es un número decimal y porqué son importantes las partes decimales de una unidad?


Los números decimales

La última vez que Juan quiso montar en la Montaña Espacial se quedó con las ganas. Había que medir 1,32 m como mínimo. Y él medía 1,29 m.

–¡Pero si me falta muy poco! –dijo Juan.

–Las normas son las normas –le responde Elisa.

Pero hoy Juan lo tiene todo preparado. Se ha puesto unos zapatones con 3 cm de suela de goma y el pelo de punta. ¡Cada pelo mide 4 cm! Le va a sobrar altura. O eso cree...

Sin embargo, cuando llega a la atracción, Elisa le hace descalzarse, le chafa el pelo con la mano y lo mide. Juan se teme lo peor.

–A ver si has crecido desde la última vez... –dice Elisa–. ¡Justito! 1,32. ¡Que disfrutes!

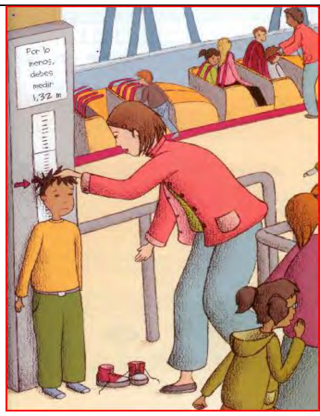


Figura 4.6: Situación-problema introductoria

A continuación, en las tablas 4.4. a 4.8 presentamos el estudio de los “objetos matemáticos”[4] y significados atribuidos a los mismos que se ponen en juego en la unidad U_1.

Tabla 4.4. *Elementos lingüísticos y significados*

EXPRESIÓN	SIGNIFICADO
“medir 1,32 m como mínimo”	Procedimiento de medida directa de la altura; número decimal; unidad de medida, m; medida mínima de referencia
Él medía 1,29 m	Altura inicial del niño
“falta muy poco”	Estimación de la diferencia con la medida de referencia
Escala gráfica	Instrumento de medida directa de longitudes;
3cm, 4 cm.	Medidas de cantidades de longitud en cm. que son añadidas.
“Juan se teme lo peor”	Estimación de la disminución de altura al restar las cantidades añadidas
“¡Justito! 1,32”	Igualdad de cantidades; altura del niño y medida de referencia, 1,32.

Los elementos lingüísticos referidos en la Tabla 4.4, dan cuenta de una diversidad de objetos que se ponen en juego en la situación. Se observa que estos elementos refieren a la medida, siendo este uno de los contextos de uso de los números decimales y posible modo de ser abordados (Centeno, 1988).

Tabla 4.5. Identificación de conceptos y significados

CONCEPTOS	SIGNIFICADOS
Magnitud	Atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (altura de una persona).
Cantidad	Valor que toma una magnitud en un objeto particular (altura del niño, referencia, metro, cm.)
Unidades de longitud (metros, centímetros)	Cantidades usadas para medir

[4] Consideramos como objeto matemático, no solo a los conceptos y procedimientos, sino también los elementos de lenguaje, propiedades y argumentaciones usadas (Godino, Batanero y Font, 2007).

Número decimal	Número racional para el que al menos existe una expresión decimal finita; forma alternativa de escribir 1 m y 32 cm.
Escala de medida	Dispositivo para la medida directa.

Los elementos conceptuales identificados requieren del conocimiento de nociones relativas a la medida; esto es, estimación, unidades de medida, y de relaciones entre ellas. La escritura 1,32 m como forma alternativa y práctica de escribir 1 m y 32 cm lleva implícita la complejidad de la simplificación de dos unidades de medida (m y cm) en una (m).

Tabla 4.6. *Identificación de procedimientos y significados*

PROCEDIMIENTO	SIGNIFICADO (Uso asignado)
Medir	Hallar la altura del niño mediante una escala métrica (maestra).
Estimación de una medida mediante la suma de cantidades	Hallar la altura incrementada por los zapatos y el pelo (niño)
Comparación mediante superposición	Comprobar que la altura del niño es mayor o igual que 1,32m (maestra)
Comparación de medidas	Comprobar que la altura incrementada es mayor o igual que 1,32m. (niño)

Los procedimientos de medición comprenden mediciones directas, indirectas y estimaciones. La medición directa significa aplicación de un instrumento de medida mediante superposición, procedimiento utilizado por la maestra para medir al niño. La medida indirecta se realiza cuando el objeto en cuestión no puede medirse directamente, pero se determina su medida mediante operaciones aritméticas aplicadas a la medida de sus partes (Godino, Batanero y Roa, 2004). La medición utilizada por el niño es una forma de medición indirecta donde se hace uso de la estimación.

Tabla 4.7. *Identificación de proposiciones y significados*

PROPOSICIÓN	SIGNIFICADO (Uso asignado)
P1: 1,29 m < 1,32 m.	Determinar la entrada del niño a la atracción.
P2: 1,32 m < 1,29m+3cm+4cm	Incrementar la altura y compararla con la norma.
P3: Juan mide “Justito 1,32”.	Permitir la entrada a la atracción.

La suma de las cantidades requiere hacer transformaciones en las unidades de medida. En la proposición, $1{,}32\text{m} < 1{,}29\text{m}+3\text{cm}+4\text{cm}$, el signo “+” refiere a la suma de cantidades de magnitud, no a la suma de números.

Tabla 4.8**.** *Identificación de argumentos y significados*

ARGUMENTOS	SIGNIFICADOS (Uso asignado)
A1: $1{,}29\text{ m} + 0{,}03\text{ m} = 1{,}32\text{ m}$.	
A2: $1{,}32\text{ m} < 1{,}29\text{m}+3\text{cm}+4\text{cm}$, porque, $1{,}29\text{m} + 0{,}03\text{m}+0{,}04\text{m} = 1{,}36\text{m} > 1{,}32\text{m}$.	Justificación de las proposiciones
A3: Comprobación empírica de la medida de Juan.	

Las justificaciones de P1 y P2 son de naturaleza deductiva, esto es, ponen en juego propiedades del semi-módulo de la magnitud longitud. La comprobación empírica de la altura final de Juan (1,32m) pone en descubierto las dificultades que origina la comprensión de la medida.

4.3.2. Décima y Centésima

Esta sección se halla encabezada por las definiciones de décima y centésima, desarrolladas en un contexto formal o intra-matemático; las actividades que le siguen llevan el propósito de afianzar estas definiciones y distintas formas de expresión de las mismas, presentadas en el mismo tipo de contexto. Por último, un tercer apartado se halla destinado a problemas, los cuales se plantean en contexto cotidiano y pretenden poner en juego las nociones desarrolladas.

En la *sub-unidad* U_{21} (Fig. 2), los elementos lingüísticos expresan las definiciones de décima y centésima, y también distintos modos de representarlas. Los conceptos generales de unidad, décima y centésima son materializados y particularizados mediante un modelo de áreas (rectangulares). Las proposiciones, 1 unidad = 10 décimas y 1 unidad = 100 centésimas, presuponen un procedimiento de síntesis basado en la suma de áreas.

Cabe destacar que las proposiciones, $1 \text{ décima} = 1/10 = 0{,}1$ y $1\text{centésima} =1/100=0{,}01$ surgen explícitamente solo como “formas de escrituras” equivalentes. No se apela, por ejemplo, a plantear 1/10 (1/100) como una “división” de un entero en 10 (100) partes iguales, uno de los múltiples significados de la fracción mencionados por Fandiño (2009) y que además ha sido trabajado en la unidad anterior.

Fig. 4.7. Décima y centésima

En la siguiente *sub-unidad* U_{22} (Fig. 3) se presenta una serie de tareas que requieren para su resolución la aplicación directa de la definición de décima o centésima, así como la asociación por analogía de los tipos de representaciones que se presentan asociadas a las definiciones mencionadas.

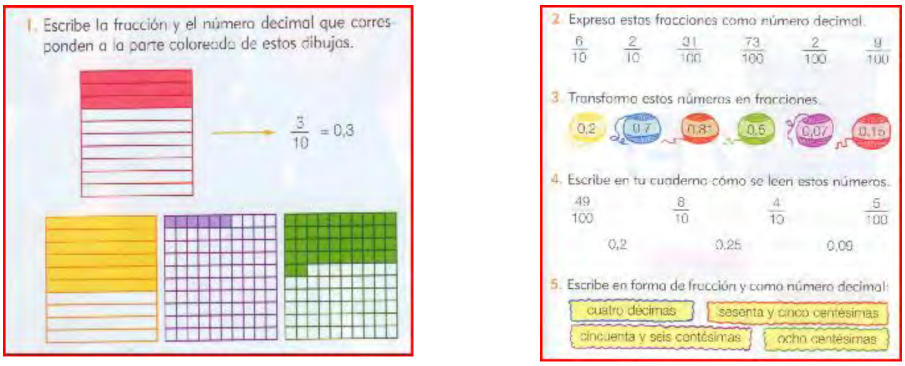


Fig. 4.8. Tres representaciones semióticas del mismo número

En los elementos lingüísticos identificados, se observa que la fracción decimal es una forma de representar a un número decimal haciendo referencia al mismo objeto que la expresión “número decimal”. Así mismo, las figuras consideradas (rectángulo, cuadrícula) también son representaciones de números decimales. En particular, la expresión en lenguaje natural “cuatro décimas” refiere a cualquiera de las representaciones mencionadas de un número decimal. Conviene observar que la expresión “escribe un número decimal” es solicitada por el autor, y por lo tanto, el niño deberá “asociarla” a alguna expresión que, en principio, no conoce dado que nunca se habló previamente de número decimal. Esto lo puede colocar ante el conflicto potencial cognitivo, ¿Qué es un número decimal?, dado que en la presentación del tema (U_{21}) este eventual número, había sido presentado como una forma de escritura, sin hacer alusión precisa a ella.

El texto incluye una colección de “actividades” que requieren del alumno la aplicación de las definiciones de décima y centésima dadas en U_{21} así como las proposiciones incluidas en dicha unidad. Las respuestas a estas actividades constituyen proposiciones (enunciados) cuya justificación implícita es de naturaleza deductiva, ya que se trata de seguir las definiciones y proposiciones establecidas previamente.

Por último en la *sub-unidad de análisis U_{23}*, se presentan ejercicios cuyo objetivo es la puesta en juego fundamentalmente de los conceptos desarrollados previamente. Cabe destacar que la resolución de los ejercicios pone en juego todos los elementos que han sido presentados al comienzo de la unidad. El número decimal, en este caso, está representando un valor de décimas o de centésimas.

Algunas conclusiones sobre el tratamiento de la décima y centésima

De la interpretación de los elementos conceptuales y procedimentales, podemos observar que el número decimal comienza a asociarse por el uso vinculado a una de las formas de representación esto es, como una expresión con coma; por otra parte es claro que a esa expresión se le atribuye el carácter de número, mientras que la expresión fraccionaria del mismo “parece” no tener ese carácter.

Esto pone en evidencia lo que las investigaciones y el diseño curricular vienen reclamando, un trabajo que garantice en el alumno una verdadera comprensión del concepto de número. Para ello es necesario un trabajo sistemático con los distintos tipos de representaciones y sus formas de equivalencia, que no queden reducidas a la mera manipulación de símbolos carentes de significación. Evitando de este modo uno de los conflictos más importantes que deriva en la concepción errónea de que un número sea asociado a “un tipo” particular de representación.

La importancia de trabajar con las distintas representaciones de los sistemas numéricos es ampliamente conocida (Llinares, 2003; Michaelidou, Gagatsis y Pitta-Pantazi, 2004), en particular para el número decimal; esto se tiene en cuenta en la unidad U_1. No obstante, en la trayectoria plasmada en la unidad se comienza a observar ciertas ambigüedades en el uso de expresiones cuando refieren a un concepto y cuando refieren a su representación. Esto potencia la aparición de un conflicto de tipo cognitivo, como es la distinción entre número y expresión de un número, ya referido por Socas (2001) y Konic, Godino, Castro y Rivas (2008).

4.3.3. Valor de posición

En esta unidad se parte de la representación gráfica de dos cuadrículas divididas en 100 partes, de las cuales se han pintado una cuadricula completa y 17 partes en la otra (Fig. 5). Se utiliza dicha representación (dibujo) y su correspondiente expresión en lenguaje natural (1 unidad y 17 centésimas) para introducir la expresión 1,17. Luego se presentan una serie de actividades que pretenden los siguientes objetivos: distinguir la parte entera y la parte decimal de un número decimal, reconocer un número decimal a través de su expresión coloquial en términos de unidades, decenas, centenas, décimas, centésimas, etc., y determinar el valor que tiene una cifra según su ubicación en un número decimal expresado con coma. En este tipo de actividades, se pone énfasis en distinguir el valor que una cifra tiene según su posición. Por último, se presentan problemas cuya intención es hacer funcionar la forma de composición de un número decimal utilizando el significado que se le ha asignado a cada una de sus partes.

En la *sub-unidad* U_{31} se introduce la expresión 1,17, a la que inmediatamente se le atribuye el carácter conceptual de número decimal. El elemento lingüístico clave que se utiliza para establecer la equivalencia de estas representaciones se sintetiza en, "es decir 1,17".

La expresión, "los números decimales tienen dos partes, separadas por una coma", deja establecida una definición o conceptualización para el número decimal. Para estas nuevas expresiones "parte entera" y "parte decimal", se introducen proposiciones que caracterizan estas nociones, en términos de unidades, decenas, centenas para el primer caso y décimas, centésimas, etc. para el segundo caso.

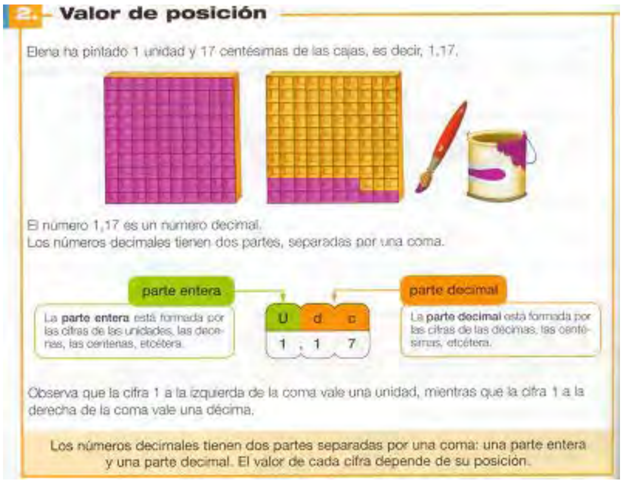


Fig. 4.9. Valor de posición

A continuación se realiza una observación sobre la diferencia de valor que asume la cifra 1 dependiendo de su ubicación. A propósito de ello, en el cierre de la sección se observa la proposición, “el valor de cada cifra depende de su posición”, la que se desprende como consecuencia de la definición de número decimal establecida previamente y retomada aquí. La justificación de esta propiedad está ligada a las definiciones de parte entera y parte decimal mencionadas.

Podemos observar algunas cuestiones significativas:

- Para introducir el valor de posición el autor primero introduce el número decimal como expresión y como concepto. El concepto se halla ligado exclusivamente a una forma de escritura (la escritura con coma).
- Las definiciones de décima y centésima presentadas en la unidad anterior (U_2), de manera descontextualizada, podrían adquirir significación o necesidad de estudio en esta sub-unidad U_{31}
- La proposición, “el valor de cada cifra depende de su posición”, se establece como generalización a partir de la observación particular del valor que toma una misma cifra en dos posiciones diferentes, observadas también en un número específico.

En referencia a la *sub-unidad U_{32}*, podemos observar que, el valor de una cifra según su posición puede quedar solo a nivel de expresión, dado que a nivel conceptual se refuerza la separación en partes del número decimal, cuestión muy referida en las investigaciones por el riesgo de tratar esas partes como entidades independientes y en consecuencia como números enteros, pudiendo impedir la conceptualización del número decimal a través de nuevas significaciones progresivas (Irwin,2001; Merenluoto, 2004; Suh, et al., 2008).

La décima y la centésima, en la unidad U_2, han sido presentadas y trabajadas en su mayoría como expresión fraccionaria, forma que no es retomada en ninguna ocasión en estas secciones, puesto que tal como han sido presentados los elementos de significado las expresiones fraccionarias no son requeridas ni necesarias para el desarrollo de las actividades planteadas. No obstante, la fracción decimal como soporte para argumentar sobre el rol que asumen las cifras que constituyen un número decimal, en su representación "con coma", desde edades tempranas, puede colaborar en la distinción futura entre número decimal y expresión decimal de un número real.

Entre los problemas presentados en la *sub-unidad U_{33}*, interesa destacar dos de ellos.

El primero, problema 14, p. 97 dice lo siguiente:

Averigua de qué número se trata.

- *La parte entera es 16.*
- *Las centésimas es la mitad de la parte entera.*
- *Las décimas es la mitad de las centésimas.*

En este problema se solicita encontrar un número dadas ciertas condiciones que deben cumplir las cifras que lo componen. El "tipo" de problema es rico, puesto que da la posibilidad al alumno de construir un número a partir de la interpretación que el niño ha dado a cada posición y el significado que tiene el valor de la cifra según su posición. No obstante, se puede evidenciar un posible uso "abusivo" de lenguaje que da lugar a conflictos epistémicos y cognitivos.

Cuando se indica "las centésimas es la mitad de la parte entera", ¿a qué está haciendo referencia dicha expresión? Tratemos de interpretarla; la parte entera son 16 unidades, luego su mitad son 8 unidades, este sería el valor asignado a las centésimas, es decir, 800 centésimas. A su vez, las décimas son la mitad de 800 centésimas esto es 400 centésimas, o equivalentemente 40 décimas. Luego, como 800 centésimas son equivalentes a 8 unidades y 400 centésimas a 4 unidades, el número buscado sería: 16 u + 8 u + 4 u= 28 u. y con ello, según esta interpretación el número pedido es 28.

No obstante, la forma en que se hallan expresadas las condiciones, puede llevar al niño a no considerar la relación entre la posición que ocupa una cifra y el valor asignado a la cifra que ocupa dicha posición. Es decir, podría pensar que el *valor* de la cifra de las centésimas es 8 (8 centésimas), y el *valor* de la cifra de las décimas es 4 (4 décimas) con lo cual el número encontrado sería el número decimal 16,48.

En el segundo problema, el 16, de la pág. 97 (Fig.6), ocurre algo similar, con el agravante que se proporcionan las cifras y por lo tanto el niño se verá forzado a realizar una interpretación que no es la que expresa la segunda condición.

Si el valor de las décimas es 2, tendríamos 2 décimas, luego como las centésimas valen el triple de las décimas, entonces tendríamos 6 décimas, es decir 60 centésimas, luego el valor de las centésimas debería ser 60. El cual obviamente no corresponde. Ahora, si el valor de las décimas es 6, el triple de su valor es 18 décimas o 180 centésimas, es decir 1 unidad y 8 décimas. Por lo tanto, ninguna de las posibilidades dadas se corresponde con los valores pedidos y en consecuencia el número decimal buscado no existe. Contra la afirmación de existencia dada en la consigna del problema.

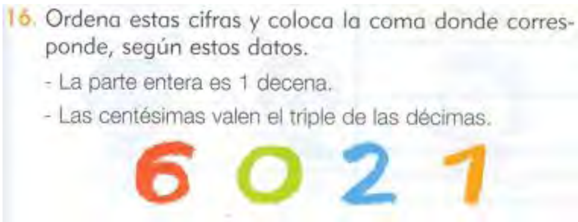


Fig. 4.10: Escritura de un número decimal

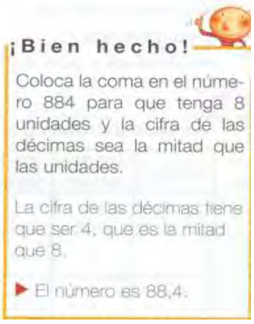


Fig. 4.11: Desarrollo de una situación

El análisis precedente y el desarrollo presentado en el texto al final de la página 97, como se observa en la Fig.7, confirman la existencia de un conflicto epistémico centrado en la interpretación de elementos lingüísticos y que se pone de manifiesto por la forma en que se configuran objetos conceptuales, proposicionales y argumentativos en el desarrollo de la unidad.

Algunas conclusiones del tratamiento del valor de posición

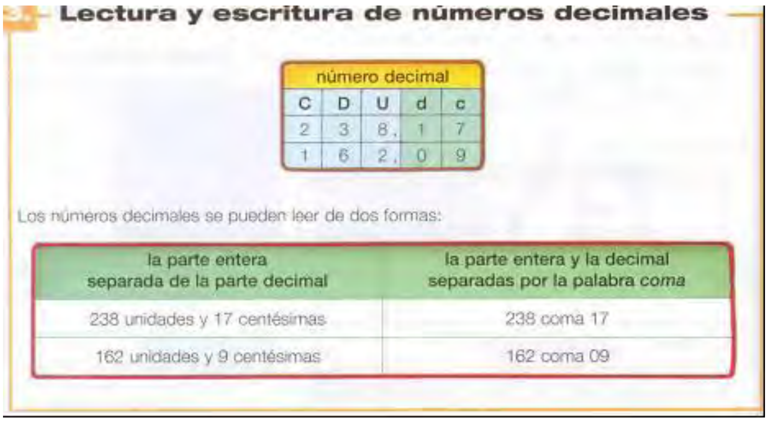
Cabe resaltar que el número decimal se define aquí como una forma de representación (la representación con coma). Pues dicha representación proviene de la equivalencia con una fracción, la cual es obtenida y representada a partir de la visualización gráfica de la relación entre una unidad y la cantidad de áreas iguales que se representan en dicha gráfica. No obstante se percibe en toda la unidad, que se le ha otorgado más el carácter de número que de expresión de un número.

Las actividades enfatizan la distinción entre ambas partes del número, lo que resulta potencialmente positivo en términos conceptuales, siempre que el tratamiento de cada una de sus partes contribuya a que el niño reconozca a dicho número como un todo, y a cada una de sus partes con la entidad que corresponda (unidad, decena, centena, décima, centésima, etc.). Conviene tener bien presente que puede ser confundido el número indicativo de la cifra con lo que ella representa efectivamente según su posición, tal como se ha demostrado en el análisis de la sub-unidad U_{33}; comprensión que resulta imprescindible para la significación conceptual del número decimal.

La situación-problema de la Fig. 6, es una situación potencialmente rica para la conceptualización de un número decimal, en su expresión con coma, a partir del conocimiento de los valores y posición de las cifras. El hecho que en la consigna se indique: “y coloca la coma donde corresponde”, no deja posibilidad al alumno que sea él quien determine el tipo de número que se le está pidiendo.

4.3.4. Lectura y escritura

En esta unidad se pone énfasis en dos formas de escritura y de lectura, con coma y en lenguaje coloquial, expresadas en términos de unidades, decenas, centenas, décimas, centésimas, etc. Cabe destacar que, pese a que la fracción ha sido la forma con la que se presenta y vincula el número decimal en sus primeras apariciones, dicha forma se halla ausente en esta unidad, como se observa en su introducción (Fig. 4.12).



Lectura y escritura de números decimales

número decimal				
C	D	U	d	c
2	3	8,	1	7
1	6	2,	0	9

Los números decimales se pueden leer de dos formas:

la parte entera separada de la parte decimal	la parte entera y la decimal separadas por la palabra *coma*
238 unidades y 17 centésimas	238 coma 17
162 unidades y 9 centésimas	162 coma 09

Fig. 4.12: Lectura y escritura de números decimales

Otra cuestión de interés es el problema que se presenta en la página 99, en el que se habla de un termómetro que marca 13 grados y 7 décimas. Se plantean los interrogantes ¿Qué temperatura hay?, ¿Cómo se escribe?; la respuesta dada es "13,7 y se lee trece coma siete". Ya hemos comentado sobre la importancia del contexto de la medida. En este caso por un lado se expresan 13 grados (lo que indica la cantidad en una unidad de medida) y se agrega 7 décimas (lo que indica simplemente un número). La respuesta mostrada es 13,7 (lo cual hace referencia a un número decimal). Este modo de expresión alerta sobre conflictos potenciales. Este juego de "imprecisiones" o "ambigüedades" puede dificultar la comprensión de los números decimales, tanto en el contexto intra-matemático, como en otros contextos.

4.3.5. Comparación de números decimales

Los números en todas las actividades están expresados "con coma" y la parte decimal, en casi todas las situaciones, en centésimas. Los procedimientos quedan reducidos a una aplicación sistemática de la regla de comparación establecida (ver Fig. 9). Por último, y respondiendo a la estructura de las unidades precedentes se presenta en el texto una sección con tres situaciones problemáticas.

En la *sub-unidad* U_{51} se presentan dos números decimales y se describe un procedimiento para realizar la comparación: "Entre dos números decimales, es menor el que tiene la menor parte entera. Si la parte entera coincide, comparamos la parte decimal, cifra por cifra, empezando por las décimas". La justificación de este procedimiento está basada en la comparación de los valores de las cifras representadas en cada una de las "posiciones" que componen cada número decimal.

Se introducen dos nuevas notaciones, los símbolos mayor (>) y menor (<). Derivándose de todo ello la técnica de comparación, la que se describe en el párrafo final de la Fig. 4.13.

Fig. 4.13: Comparación de números decimales

En la comparación de dos números decimales, actividad presentada en *la sub-unidad U_{52},* la misma se plantea a partir de un ejemplo que involucra a números decimales con igual número de cifras en la parte decimal. Algunos conflictos difícilmente serán detectados por el profesor, si solo proporciona a los alumnos números decimales cuya parte decimal, en ambos números, aparece siempre con el mismo número de cifras. Al menos dos son los conflictos que se pueden manifestar y que son señalados por los investigadores. Los niños suelen considerar, por ejemplo, que 0,53 > 0,6 porque 53 > 6, asumiendo las partes decimales como números enteros (Irwin, 2001; Merenluoto, 2004; Suh, et al., 2008); mas aún no se considera la presencia implícita del cero en las centésimas (D`Amore, 2008). En otro caso, que 0,73 < 0,6, puesto que generalizan la idea que 1/100 es menor que 1/10 y es la que aplican a la parte decimal (Steinle y Stacey, 2004).

Un problema que podríamos catalogar como "rico" se plantea en la página 101 del texto: ¿Qué número es mayor, 11 décimas o 111 centésimas? Este problema puede promover el uso de la fracción decimal como medio adecuado para dar respuesta al problema. No solo a la conversión de lenguaje coloquial a fracción, también a la posibilidad de uso de la equivalencia de fracciones.

En la *sub-unidad U_{53}* nos encontramos con tres situaciones-problemas. En la Fig. 10, presentamos una de ellas.

29. Estos son los resultados de la carrera de 100 metros lisos. ¿Cuáles podrían ser las marcas del que ganó la medalla de plata?

puesto	oro	plata	bronce
segundos	12,57		12,65

Fig. 4.14: Densidad de números decimales

En el problema 29 se pregunta, ¿Cuáles podrían ser las marcas obtenidas en una carrera entre 12,57 y 12,65? La discusión de este problema puede resultar útil para ir generando la idea intuitiva de densidad de los números decimales en los números racionales; pero también podría ser conflictivo para el alumno si solo se remite al contexto en que está planteado. Es muy probable que los niños den como respuesta solo 7 números decimales y no se les ocurra pensar en la posibilidad de mayor precisión (Bonotto, 2006). Las actividades que sigan a esta tarea serán esenciales para la construcción futura de la propiedad de la densidad de los números racionales en los números reales. En estos casos, el sucesor de un número, propiedad válida para los números naturales, es frecuentemente trasladada a los números decimales no solo por los niños sino también por maestros en formación inicial (Konic, 2008).

Algunas conclusiones sobre la comparación de decimales

La comparación es el procedimiento que subyace a una de las propiedades más importantes en la construcción de los conjuntos numéricos, la densidad. Por ello es que, desde la escolaridad elemental debieran establecerse las bases necesarias y adecuadas para ir generando de manera progresiva el infinito potencial y llegar en cursos avanzados a una aproximación conceptual del infinito actual. Tener esto presente implica considerar vías adecuadas de enseñanza que "garanticen" la transición y minimicen la presencia de conflictos. Como hemos observado en el análisis de esta unidad, es necesaria la presencia de una gama diversa de números decimales con diferente número de cifras decimales, en las actividades que involucran la comparación. El tipo de problemas presentados debieran contemplar además de la aplicación de una técnica, la argumentación correspondiente que justifique dicha técnica, utilizando, por ejemplo la fracción, que ha sido trabajada en lecciones anteriores, u otras formas de representación que pongan en juego los elementos básicos de una expresión decimal, esto es unidades, decenas, centenas…, décimas, centésimas, milésimas…..

4.3.6. Conclusiones generales sobre el texto

Los autores del texto proponen iniciar el estudio los números decimales con una situación motivadora. Efectivamente, el problema planteado responde a una cuestión de la vida cotidiana, lo que puede involucrar emotivamente al alumno y en cuyo enunciado se hallan expresiones que refieren a números decimales.

La situación introductoria utilizada refiere al contexto de la medida, de uso común en la enseñanza de los números decimales, donde se utilizan múltiplos y submúltiplos de una unidad de medida (Ohlsson, 1988; Lamon, 2007). En este contexto el número decimal 1,32 interviene para expresar la medida de una longitud usando un solo tipo de unidad de medida, en este caso, el metro. La comprensión de esta manera de expresar la medida puede ser conflictiva para los alumnos, ya que la parte entera de ese número remite a un tipo de unidad y la decimal a otra (1 m y 32 cm). La situación propuesta requiere además realizar una operación de suma de cantidades de magnitudes (1,29m+3cm+4cm), la que frecuentemente es interpretada como una suma de números enteros (Brousseau, 1987).

Tal como sostiene Steinle (2004), estas observaciones no implican dejar de lado el contexto de la medida, por el contrario, lo que se pretende es una buena interpretación de la representación.

El profesor puede usar la situación introductoria para contextualizar las nociones de número decimal (1,32), comparación de decimales (1,29 < 1,32) y sumas que incluyen números decimales (1,28 m + 4cm + 3cm = 1,35m > 1,32m). Los números decimales intervienen aquí en un contexto de medida, como una forma abreviada de expresar medidas complejas (1,32m quiere decir, 1m, 3dm y 2cm, o también 1m y 32cm), conocimiento previo que debe estar disponible para el niño. Sin embargo, este uso refuerza la concepción de que el número decimal no es otra cosa que dos naturales separados por una coma (Centeno, 1988; Socas, 2001; Steinle, Stacey y Chambers, 2006) ocultando el valor de posición: el 3 refiere a decímetros que son la décima parte del metro y el 2 a centímetros, que es la décima parte del decímetro y la centésima parte del metro. La conexión decímetro - décima y centímetros - centésima (partes de la unidad m), debe haberse enseñado previamente para que el uso de los decimales en esta situación tenga sentido pleno.

Algunas cuestiones que el maestro podría plantear en su clase a partir de esta situación:

- ¿Por qué la altura de una persona se mide sin zapatos y con el pelo aplastado?
- Si efectivamente, como había supuesto Juan, fuera posible medirse incluyendo los zapatos y el pelo levantado ¿Cuál sería la altura total de Juan, medida en metros y centímetros? ¿Cuál sería la altura total de Juan, medida sólo en metros?
- ¿Qué significa 1,32m? ¿Cuántos decímetros son 32cm?

4.4. REFLEXIONES FINALES SOBRE EL ESTUDIO

En la introducción de este artículo nos planteábamos los siguientes interrogantes, ¿En qué medida concuerda el libro de texto analizado con los resultados de las investigaciones didácticas con la enseñanza de los números decimales? ¿Qué aspectos se podrían mejorar? Hemos identificado, a partir del análisis de las lecciones, aspectos señalados en diferentes investigaciones, que pueden originar conflictos de significado (lingüísticos, conceptuales, procedimentales, proposicionales y de argumentación). Al señalar tales conflictos, se persigue mejorar el uso de la información proporcionada por el libro de texto, para el desarrollo de la actividad de enseñanza. En esta dirección presentamos a continuación algunas reflexiones y sugerencias para el profesor.

El inicio del estudio del número decimal requiere trabajar de manera adecuada nociones como la posición que ocupa una cifra y su valor. En tal sentido la décima y la centésima son nociones que corresponden ser trabajadas, como también lo afirma la prescripción curricular (BOE, 2006). No obstante, mediante el análisis realizado, se puede observar que tal introducción se realiza en el texto de manera formal y que las distintas tareas colocadas como actividades se movilizan en un contexto puramente matemático. Este modo de abordar la décima y la centésima no deja clara la correspondencia que dichas nociones tienen con las unidades empleadas en el contexto de la medida (m, dm y cm).

Cabe destacar que cuando se aborda el valor de posición de cada cifra de un número decimal, es aquí donde claramente la décima y la centésima deberían cobrar significación. No obstante, como estas nociones son presentadas solo como expresión lingüística (5 centésimas, 2 décimas, etc.), el significado del valor de una cifra según su posición puede quedar encubierto si no se requiere la utilización de la expresión fraccionaria de la décima y la centésima como medio para justificar dicho valor. La representación fraccionaria es la única que ha sido construida, como hemos mencionado, a partir de la adición de áreas de una cuadrícula y su relación con la unidad. La expresión fraccionaria proporciona medios para la argumentación, ya que la expresión con coma solo se establece como una forma de escritura equivalente a la fraccionaria y por lo tanto se presenta implícitamente como una convención.

Consideramos necesario que el valor que asume una cifra según su posición, sea claramente argumentado por el niño, al menos en los comienzos de su uso. Esto es, no solo utilizar la expresión lingüística "tantas décimas" o "tantas centésimas" como medio de distinción, sino su justificación a través de la expresión entera o fraccionaria (según corresponda) del número que representa el valor de la cifra. Por ejemplo, en el número decimal 1,17, el primer 1 corresponde al número entero (valor) 1 y el segundo 1, corresponde al número fraccionario (valor) 1/10 o 1 décima. Esto contribuirá a concebir las necesarias distinciones entre número y expresión de un número. (Konic, Godino, Castro y Rivas, 2007; Socas, 2001).

La propiedad central en esta lección es indudablemente la relación de orden en los números decimales. De este modo se comienza a sentar las bases para la concepción de otra propiedad fundamental, la densidad de los números decimales en el conjunto de los números racionales. Podemos decir que se trata de un elemento curricular clave, que conlleva una gran complejidad y que si no se realiza un tratamiento didáctico adecuado para favorecerlo, prevalecerá, como hasta el momento, la generación de uno de los conflictos cognitivos más estudiados: la incomprensión de la densidad de los números racionales en el conjunto de los reales.

La enseñanza del número decimal se prescribe en el currículo español, a partir del tercer ciclo, esto es 5º grado de la escolaridad primaria. Mientras que en los libros de textos, comienza a desarrollarse en el 4º curso; teniendo en cuenta la complejidad del aprendizaje de los decimales, revelada en este análisis, no parece pertinente anticipar la edad a la cual los niños comienzan a estudiar este contenido matemático. Con un enfoque didáctico diferente (véase, por ejemplo, las experiencias realizadas por Brousseau y su equipo) será posible tratar el tema en cuarto nivel.

CAPITULO 5

DISEÑO DE UN INSTRUMENTO PARA EVALUAR CONOCIMIENTOS DEL FUTURO PROFESOR SOBRE NÚMEROS DECIMALES

5.1. INTRODUCCION

Tal como hemos señalado en la Introducción General de este trabajo, la persistencia de la problemática del aprendizaje de los sistemas numéricos en general y de los números decimales en particular en los distintos ámbitos educativos, nos obliga como investigadores y formadores a ser conscientes de la necesidad de cambio en la formación de maestros, al menos a nivel local. Ante esta cuestión, el interés de nuestra investigación se dirige a determinar el estado de la formación de los futuros profesores y a la identificación de factores condicionantes para el aprendizaje de los números decimales. Para ello consideramos que un primer paso es disponer de un instrumento a través del cual sea posible acceder a dicha información, y con ello proveer a posteriori orientaciones para su formación.

De las investigaciones previas sobre el tema en cuestión, desarrolladas en el Capítulo 1, y los estudios exploratorios realizados en los Capítulos 3 y 4, se observa la conveniencia de elaborar un instrumento comprensivo de evaluación que se ajuste a nuestros objetivos. Esto es, evaluar "aspectos y tipos de conocimiento que, para la enseñanza de los números decimales, poseen los futuros maestros". Para este fin, se vio la necesidad de realizar una serie de estudios que enunciamos a continuación y que son desarrollados en los siguientes apartados:

Estudio 1: Fundamentación y especificación el contenido de la variable objeto de medición.

Estudio 2: Construcción de una versión piloto del cuestionario, aplicación a una muestra, valoración mediante juicio de expertos y revisión del instrumento.

Estudio 3: Descripción de la versión definitiva y análisis epistémico detallado de cada uno de los ítems del cuestionario.

Estudio 4: Aplicación del cuestionario a una muestra de 118 estudiantes para profesor y estudio de la fiabilidad del instrumento.

5.2. OBJETIVO Y TIPO DE INSTRUMENTO

La historia y nuestro referente didáctico para la enseñanza y aprendizaje de los números decimales, afirman la necesidad de introducir y trabajar con números decimales en la escolaridad elemental. No obstante, y a pesar de ser uno de los temas que desde hace tiempo ha sido abordado, en diversos contextos, y por muchos investigadores, el producto de dichas investigaciones no impacta en la resolución del problema de la enseñanza y aprendizaje de estos números. Esto lo podemos confirmar también, con los dos estudios exploratorios realizados en los capítulos 3 y 4. Desde nuestra perspectiva, entendemos que incidir en la formación de los futuros profesores es condición necesaria en la pretensión de generar cambios que favorezcan un aprendizaje con significado. Por ello es que el *objetivo inicial,* para la construcción del instrumento, es: *aportar información sobre el tipo de conocimiento y conflictos específicos que los futuros profesores para enseñanza primaria tienen respecto a los números decimales.*

Tal lo descrito en el apartado 2.3.1. del Capítulo 2, si bien se han elaborado e implementado instrumentos para medir algunas de las categorías del conocimiento matemático para enseñar, son pocos los instrumentos que puedan describir características claves del conocimiento del profesor. En nuestro caso, no encontramos un instrumento que nos permitiera evaluar, las tres categorías de conocimiento correspondientes, particularmente, al Conocimiento del Contenido de los números decimales, según el marco teórico adoptado para esta investigación. En tal sentido, se emprende la tarea de elaborar un instrumento para tal fin.

Al tratar de evaluar el conocimiento del contenido números decimales, se tuvo en cuenta que es un *constructo inobservable* (León y Montero, 2002), razón por la cual sus características deben ser inferidas de las respuestas de los estudiantes. Se trata de un instrumento de medición porque a través de las tareas planteadas a los encuestados, nos provee una estimación de conocimientos de los sujetos, a los que no se podría acceder por simple observación o encuesta (Dane, 1990; Barbero, 1993; citados por Díaz, 2007).

El instrumento, se dirigió a un grupo de estudiantes para profesor de enseñanza primaria del último año de la carrera, si bien podría ser aplicado a otras poblaciones de estudiantes. Permitirá tomar decisiones sobre las prácticas desarrolladas por los estudiantes (significados personales) con referencia a un dominio curricular concreto, los números decimales, en lo referente a conocimientos de este contenido con fines de enseñanza.

5.3 ESPECIFICACIÓN DEL CONTENIDO DE LA VARIABLE OBJETO DE MEDICIÓN

Este apartado está orientado a especificar el contenido de la variable objeto de medición. Dado que en nuestra variable intervienen dos componentes, una de tipo curricular (que refiere al contenido números decimales), y otra que denominamos onto-semiótica (que refiere al significado institucional del contenido mencionado, con fines de enseñanza), partimos desde el análisis de las distintas facetas presentes en las investigaciones recopiladas en el Capítulo 1. Nos referimos a significados de número decimal, errores investigados, enfoques de enseñanza, las prescripciones curriculares y otras cuestiones vinculadas a la variable que consideramos fundamentales para su estudio: tal es el caso de la distinción entre la concepción de número decimal y sus diversas formas de representación, como así también el manejo y concepción de la aproximación decimal de un número. Además, contemplamos las propiedades y operaciones entre este tipo de números, y elementos de los estudios exploratorios realizados en los capítulos 3 y 4.

Esta información se constituyó en un significado de referencia global, que permitió determinar conocimientos didácticos del contenido números decimales. En particular, permitió la selección de algunos ítems provenientes de las investigaciones y la selección de contenidos curriculares que participarían en el cuestionario.

El esquema de la figura 5.1 destaca y sintetiza los elementos esenciales que participan, y determinan el significado global del número decimal en el que basamos nuestra investigación.

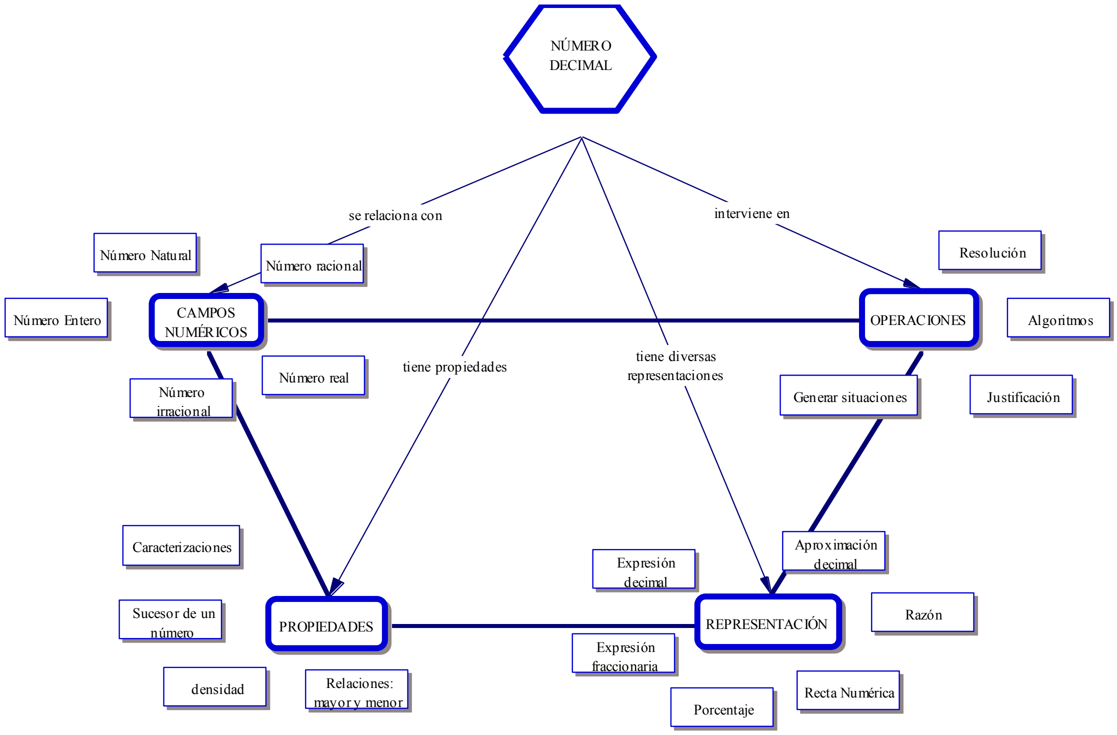


Figura 5.1: *Esquema de elementos centrales vinculados al número decimal*

En la tabla 5.1, enumeramos los distintos contenidos sobre los números decimales que consideramos fundamentales para la construcción del cuestionario. La decisión de incluir estos contenidos está basada, como ya anticipamos, en los estudios previos realizados sobre los diversos significados de los números, inferidos de las investigaciones didácticas realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de estos números. Esta tabla la interpretamos como una manera de operativizar una parte del significado global institucional, esto es la determinación de contenidos matemáticos vinculados a los números decimales, que usaremos como referente local para construir el cuestionario y evaluar posteriormente los significados personales de los estudiantes.

Tabla 5.1: *Contenidos seleccionados para la evaluación*

1	Distintas representaciones del número racional. (Distinción entre número y representación de un número racional)
2	Valor posicional de las cifras; parte entera, parte decimal de una expresión decimal.
3	Concepto/definición de número decimal.
4	Relación del número decimal con los restantes tipos de números (Naturales, racionales (no decimales), reales)
5	Distinción entre número decimal y expresión decimal de un número: a. Expresiones decimales finitas (como resultado de divisiones enteras con resto 0)

	b. Expresiones decimales finitas (como medio de expresión de medidas complejas) c. Expresiones decimales periódicas, puras y mixtas. Casos especiales: Período 0 y 9. d. Expresiones decimales no periódicas. (Números irracionales)
6	Caracterización de los números decimales a partir de la descomposición del denominador de fracciones representantes en factores primos.
7	Fracción generatriz de expresiones decimales. (Finitas o periódicas)
8	Ordenación de números decimales
9	Densidad de los decimales en el conjunto de los racionales
10	Operaciones con números decimales: adición y sustracción; multiplicación y división: a. Significado de operaciones con números decimales b. Algoritmos y sus justificaciones
11	Aproximación decimal de números racionales. Redondeo
12	Aproximación decimal de números irracionales
13	Justificación de propiedades y procedimientos

Por tanto, la tabla 5.1, refleja un desglose de los contenidos que intervienen en la componente curricular de la variable que nos proponemos evaluar. Un análisis más detallado del contenido de los diversos ítems seleccionados será incluido en la sección 5.7.

5.4. CONSTRUCCIÓN DE LA VERSIÓN PILOTO DEL CUESTIONARIO

En este apartado se aborda la elaboración de un banco inicial de ítems que en conjunto deberán poner en juego los distintos tipos de conocimientos del contenido, sobre los números decimales. Se abordará también una prueba empírica de estos ítems en una muestra de estudiantes para futuro profesor. En los pasos siguientes se describe el método seguido en la elaboración de los ítems iniciales, la muestra participante en la prueba, resultados de la prueba y evaluación por juicio de expertos.

Para la construcción del cuestionario nos apoyamos, en el significado de referencia global para los números decimales, que nos proporciona, como ya anticipáramos, la información que hemos presentado en el Capítulo 1. Este referente junto a los contenidos seleccionados en la Tabla 5.1, y los dos estudios exploratorios (Cap. 3 y Cap. 4), constituyen nuestro Significado Institucional de Referencia Local para la elaboración del instrumento. El cuestionario piloto inicial consta de 11 ítems con sub-ítems, lo que en su totalidad constituyen 27 ítems. En la tabla 5.2., mostramos los enunciados que componen dichos ítems.

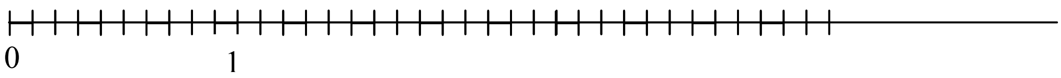
Tabla 5.2. *Ítems que componen la Prueba Piloto*

Ítem 1. Explica con tus propias palabras que entiendes por número decimal.

Ítem 2.

a) Ubica en la recta numérica los siguientes números,

Tres décimas; 0,3; un tercio; $\frac{3}{10}$; $\frac{10}{3}$



b) Representa los números anteriores usando gráficos de áreas rectangulares.

Ítem 3. En un libro de texto para 4º grado encontramos el siguiente problema:

Averigua de que número se trata.
- La parte entera es 16
- Las centésimas es la mitad de la parte entera
- Las décimas es la mitad de las centésimas

Pedro da como respuesta 16,48, indicando que el número pedido tiene 8 centésimas y 4 décimas. Pero María dice que el problema está mal planteado por la siguiente razón:

La mitad de la parte entera son 8 unidades, que no pueden ser centésimas, porque una centésima es cien veces mas pequeña que la unidad.

a) ¿Quién lleva razón, Pedro o María? Justifica tu respuesta.
b) Escribe el enunciado de la tarea de una forma diferente para evitar el conflicto de interpretación entre Pedro y María.

Ítem 4.
a) ¿Qué cero suprimirías en el número 470,05 para obtener un número mayor? ¿Y para obtener un número menor? Justifica ambas elecciones.
b) ¿Dónde podemos intercalar un cero en el número 19,38 para obtener un número más grande? ¿Y para obtener un número más pequeño? Escribe todas las posibilidades. Justifica las respuestas.
c) Un número está formado por unidades, decenas, centenas, décimas y centésimas. ¿En qué posición colocarías un 0 para obtener un número mayor? ¿En qué posición colocarías un 0 para obtener un número menor? Justifica las respuestas.

Ítem 5. Resuelve las siguientes cuestiones:
a) ¿Es decimal el número 1,3456789? Justifica la respuesta.
b) ¿Es decimal el número 0,454545…. (45 repetido indefinidamente)? Justifica la respuesta.
c) ¿Es un número decimal el número cuya expresión decimal es 4,10999…. (9 repetido indefinidamente)? Justifica la respuesta.

Ítem 6. Expresa mediante una escritura decimal finita los números siguientes, en los casos que sea posible. Justifica la respuesta.

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) π

Ítem 7. Una maestra propuso el siguiente problema a sus alumnos:
Sonia ganó el concurso de salto de longitud. Saltó más de 4,12 metros y menos de 4,16 metros. ¿Cuáles pueden ser las marcas de Sonia?
a) Resuelve el problema.
b) A la primera pregunta del problema anterior, cuatro alumnos dieron las siguientes respuestas:
Luís: *4,12m; 4,13m; 4,14m; 4,15m y 4,16m.*
José: *Todas las medidas comprendidas entre 4,12 m y 4,16 m*
Ana: *4,13m; 4,14m y 4,15m*
¿Han respondido todos bien? Justifica tu respuesta.
c) ¿Es posible responder a la pregunta cuantos metros saltó Sonia con un único número decimal?

Ítem 8. En un libro de 6º curso de primaria encontramos la siguiente regla, la cual viene ilustrada con un ejemplo, pero no se justifica:

> *"Para multiplicar dos números decimales, los multiplicamos sin tener en cuenta las comas y en el resultado separamos con una coma, desde la derecha, tantas cifras como decimales tienen entre los factores"*

Un alumno quiere saber porqué se hace de esa manera. ¿Cómo justificarías esta regla, utilizando un ejemplo?

Ítem 9.
a) Como sabes el número racional 2/5 se puede representar en forma decimal: 2/5=0,4. ¿Se puede representar **cualquier** número racional dado como una fracción en forma decimal? Distingue los casos posibles y justifica.
b) Como sabes el número racional 0,7 se puede escribir en forma fraccionaria (0,7 = 7/10) ¿Se puede escribir en forma fraccionaria **cualquier** número dado en forma decimal? Distingue los casos posibles y justifica la respuesta.
c) Dada la expresión fraccionaria irreducible de un número racional, ¿Que condición debe cumplir el denominador de dicha fracción para que represente a un número decimal?

Ítem 10.
a) El número: 0,12122122212…. ¿es racional o irracional? Justifica la respuesta.
b) Consideremos el número $\frac{53}{83}$. Al hacer la división la calculadora muestra 0.63855421687.
¿Es $\frac{53}{83}$ un número racional o irracional? Justifica la respuesta.
c) Una aproximación decimal de π es 3,141592. Escribe dos aproximaciones decimales de π cuyo error sea menor que 1 centésima y una milésima respectivamente. Justifica las respuestas.

Ítem 11.
a) Enuncia un problema de la vida cotidiana que se resuelva con la siguiente operación de sumar tres números decimales: 3,325 + 10,4 + 0,45
b) Enuncia un problema de la vida cotidiana que se resuelva con la siguiente operación de multiplicación de dos números decimales: 2,255 x 1,7
c) Enuncia un problema de la vida cotidiana que se resuelva con la siguiente operación de división de dos números decimales: 5,76: 1,8

Los ítems que componen el cuestionario, provienen de distintas fuentes. Corresponden a ítems seleccionados de investigaciones, de libros de textos escolares, de elaboración propia y reformulaciones. La selección y elaboración de estos ítems, cubren los contenidos especificados en la tabla 5.1. La mayoría de los ítems se focalizan en la evaluación un contenido central (y también contenidos secundarios), y una categoría de *Conocimiento del Contenido* números decimales. Destacamos que, también hemos incorporado tres ítems que corresponden a una de las categorías del grupo: *Conocimiento Pedagógico del Contenido*. Concretamente a la categoría *conocimiento del contenido y los estudiantes.*

Hemos visto que uno de los conflictos más relevantes que se desprende, de partida, en el Significado Institucional de Referencia alude a la *concepción de número decimal*. Moreno, Hernández y Socas (2004), destacan el interés de conocer qué imagen mental tienen los profesores sobre los sistemas numéricos, en particular sobre los números decimales. Por lo expuesto es que, consideramos esencial introducir en el cuestionario un ítem que permitiera valorar qué tipo de concepción manifiestan los estudiantes sobre estos números y la coherencia de su aplicación en el resto de la prueba. Este es el propósito que se refleja en el **ítem 1** a través de la evaluación del *conocimiento común* manifestado sobre el mencionado contenido.

La incorporación del **ítem 2**, se fundamenta en dos de los ejes representados en la Fig. 5.1, la relación del número decimal con los distintos *campos numéricos* (en el conjunto de los racionales) utilizando, como medio, diferentes *formas de representación.* Se pretende valorar el *conocimiento común* de estos contenidos. Parte de este ítem ya había sido implementado en el estudio exploratorio presentado en el Capítulo 3 presentando ciertas dificultades. Se amplió las posibilidades de representación de los números dados a otro ámbito: el contexto de gráficos rectangulares. La expectativa de esta modificación se centró en valorar si los futuros profesores exhibían algún tipo de representación "no estándar", tanto en lo referente a las unidades tomadas, como a las formas de partición realizadas.

Steinle (2004), entre otras cuestiones, realiza una fuerte sugerencia en cuanto a la necesidad de reforzar el trabajo con el valor posicional de los dígitos. Sostiene que los docentes deben examinar de manera crítica los textos, las actividades e incluso sus creencias implícitas. Esto es fundamental, debido a que la persistencia de concepciones erróneas de un curso a otro, se deben a que la enseñanza que reciben la mayoría de los estudiantes no es apropiada para remover las concepciones erróneas. Motivados por estas cuestiones hemos elaborado el **ítem 3**. La situación ha sido extraída de un libro de

texto escolar de circulación actual, considerando que es uno de los referentes inmediatos que suele utilizar el profesor (este texto, forma parte del estudio exploratorio realizado en el Capítulo 4). A la mencionada situación, le hemos adaptado dos cuestiones, con el propósito de evaluar *conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento del contenido y estudiantes*. Se trata de una tarea en la que el contenido involucrado se centra en la *representación decimal de un número racional* (CCK), a través del manejo de los conceptos de posición, valor y relaciones entre ellos, y que permite al futuro profesor participar en dicha tarea, en cuanto a cómo representar con precisión las ideas matemáticas (SCK).
Por otra parte, se focaliza en la comprensión de los profesores de cómo los estudiantes aprenden un contenido; además de ver cómo solucionar errores de los estudiantes (KCS).

Las investigaciones han demostrado ampliamente los conflictos que genera el cero, tanto en posición como en valor cuando se halla inmerso, como cifra, en la representación decimal de un número. Para el **ítem 4**, siguiendo la misma línea del ítem 3 en cuanto al contenido representación decimal de un número racional, hemos introducido precisamente como variable de análisis, el cero. Por otra parte, se pone en juego la relación de mayor (menor) que circunda otro de los ejes centrales exhibidos en la Fig.5.1, *las propiedades*. La valoración de este ítem se propone ir más allá del conocimiento del contenido común: con qué precisión el estudiante responde y comunica una tarea que requiere poner en juego procedimientos propios de la matemática. En este caso, decidir sobre la posibilidad o imposibilidad de solución de una situación, y eventualmente el "barrido" y justificación de la totalidad de soluciones válidas. Más aún, intentar modelar una generalización. Estas cuestiones nos permiten evaluar aspectos del *conocimiento especializado del contenido.*

El **ítem 5** ha sido elaborado con el propósito específico de evaluar la concepción de número decimal, a partir de su expresión decimal. Las investigaciones, por un lado enfatizan que los conceptos de valor posicional y representación decimal de los números racionales son considerados componentes esenciales en el diseño curricular de la enseñanza de las matemáticas en la escuela elemental (Zazkis y Khoury, 1993; Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin y Bana, 2001). Por otra parte, también demuestran que hay una fuerte tendencia a determinar el carácter de un número "observando" solo la forma de escritura, sin tomar en cuenta las propiedades que lo caracterizan (Socas, 2001; Sirvent 2002; Michaelidou, Gagatsis y Pitta-Pantazi, 2004). Nuestro interés se centró en motivar otras posibilidades en la determinación de las respuestas. Conscientes que los futuros profesores disponen de recursos, como las técnicas de conversión de expresiones decimales periódicas a fracción, como recurso "fiable" para la toma de decisión, se solicitó en todos los casos una justificación para dicha decisión. Como podemos ver en la Fig. 5.1, la posibilidad de determinar la concepción de *número decimal*, por medio de alguna caracterización, es una propiedad esencial. Por tanto, en este ítem se evalúa *conocimiento común del contenido.*

Otra cuestión que se ha visto y señalado insistentemente, es el problema de la distinción entre número y la expresión decimal de un número. La identificación de ambas nociones cuando se utiliza una aproximación decimal del número es fuente de diversos conflictos tal como señalan Socas (2001) y Sirvent (2002); entre ellos la falta de reconocimiento del estatus de un número. Ejemplos de uso tan simples como, la identificación representacional $\pi = 3{,}14$, o $1/3 = 0{,}33$, con frecuencia lleva a otorgar a estos números el carácter de número decimal, desconociendo tanto el estatus irracional de π, como el de racional no decimal de 1/3. Conflicto que tiene clara solución desde la concepción de aproximación decimal de un número real. Por tanto, el **ítem 6** lleva el propósito de evaluar estas concepciones a partir del uso de la definición de número decimal. Este ítem pone en correspondencia los tópicos centrales *representación* y *campos numéricos,* intervinientes en el esquema de la Fig. 5.1. Si bien podríamos pensar que el ítem 6 solo evalúa *conocimiento común,* desde la perspectiva de la enseñanza y especialmente para un profesor de enseñanza primaria, consideramos que se trata de un *conocimiento ampliado* del contenido. La razón es que esta problemática se centra en la distinción de campos numéricos que serán trabajados en cursos superiores, como es el caso de los números irracionales. Precisamente la confusión originada en los primeros cursos de la escolaridad primaria, prevalece como conflicto en otros niveles de aprendizaje. Por tanto una visión y manejo esclarecedor de estos temas otorgaría al maestro una perspectiva "amplia" de los campos numéricos en relación al problema de sus diversas representaciones, en particular, la representación decimal.

La idea de discreto es una noción previa fundamental que limita a los estudiantes la comprensión de la densidad (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004). La incorporación del **ítem 7**, lleva como objetivo evaluar si la *propiedad de densidad* de D (decimales) en Q (racionales), se halla presente en los estudiantes. Si bien, esta propiedad no forma parte del currículo escolar de primaria, es claro que es un *conocimiento avanzado* que debería formar parte del bagaje de conocimientos de un futuro profesor de primaria. La finalidad, es no perder la orientación que la concepción del infinito potencial debe dar lugar, en algún momento de la escolaridad secundaria, a la de infinito actual. En tal sentido, impedir con tareas inadecuadas, la necesaria evolución ya mencionada requiere del conocimiento de la mencionada propiedad. Desde esta perspectiva, el ítem permite evaluar el mencionado *conocimiento ampliado*, como así también *el conocimiento de este contenido y los estudiantes.* Puesto que, para éste último caso, se pide al futuro profesor valorar respuestas alternativas a la situación, acorde a las respuestas dadas por los niños.

Resulta frecuente que *las operaciones con números decimales*, especialmente en la escolaridad primaria, sean introducidas directamente a través de una regla que describe un algoritmo. Los libros de textos escolares dan una muestra de ello, como lo confirma nuestro estudio exploratorio del Capítulo 4. Por otra parte, Kalder (2007), sostiene que la mayoría de los estudiantes para profesor conocen los procedimientos o algoritmos para resolver una operación, pero no conocen los conceptos que subyacen a esos procedimientos. Más allá, que las prescripciones curriculares lo soliciten expresamente como es el caso, por ejemplo, de NCTM (2000). Realizar perfectamente la multiplicación de dos números decimales, no es suficiente para justificar y explicar el algoritmo a los estudiantes (Ball, 2003). Para justificar un algoritmo se requiere que el profesor disponga de una variedad de representaciones, que pueda seleccionar las que considere más apropiadas según la situación, elección de números adecuados, situaciones que puedan modelizar la operación. Ante esta situación, y considerando que la argumentación es un elemento de significado esencial para la formación de un futuro profesor, es que introducimos el **ítem 8.** Con este ítem interesa evaluar dos categorías dentro del conocimiento matemático para la enseñanza: *conocimiento especializado del contenido y conocimiento del contenido y estudiantes.* Un aspecto destacado del conocimiento especializado consiste en dar explicaciones matemáticas para reglas comunes y procedimientos, como la justificación de algoritmos y proposiciones que, aunque no formen parte de las competencias a desarrollar en los alumnos de primaria, proporcionarán al profesor una comprensión más profunda del contenido a enseñar y mayor flexibilidad en las estrategias de enseñanza. Por otra parte, una característica del conocimiento del contenido y estudiantes es proporcionar al estudiante la mejor manera de construir el pensamiento matemático. En este ítem, encontramos estas cuestiones estrechamente vinculadas.

La cuestión de las relaciones entre distintas representaciones de un número aporta al desarrollo de su significado como entidad conceptual y apoyan a la caracterización de propiedades algebraicas. Esta relación esencial es muy difícil de adquirir como lo demuestran diversas investigaciones (Moskal y Magone, 2000). O'Connor (2001), teniendo en cuenta dicha importancia analiza el proceso llevado a cabo por profesores que conducen una clase, con el propósito de que los alumnos puedan responder a los siguientes interrogantes: ¿Puede cualquier fracción ser convertida en decimal?, y recíprocamente, ¿Puede cualquier decimal ser convertido en fracción? Apoyándonos en la investigación de O'Connor incluimos en nuestro cuestionario el **ítem 9.** Este ítem contribuye al *conocimiento del contenido*: relación entre *número y expresión decimal de un número.* Pone en juego tanto la conceptualización, la precisión de la representación de las nociones matemáticas, como la relación entre conceptos. Actividades estas esenciales que permiten al futuro profesor participar con solidez en la formulación o evaluación de tareas de enseñanza. En tal sentido, el ítem nos permite evaluar *conocimiento especializado del contenido.*

Tal como hemos tratado de manera específica en el ítem 9, la problemática de las representaciones nuevamente retomamos este aspecto, dado que lo consideramos esencial para la comprensión del número decimal (conceptualización de los distintos tipos de números). Con el **ítem 10**, evaluamos la distinción entre *número racional y número irracional.* Parte de este ítem ha sido seleccionado de una investigación realizada por Zasquis y Sirotic (2004). Se trata precisamente de una investigación sobre la interpretación que hacen futuros profesores sobre los conceptos de número racional e irracional a través de distintas representaciones. Los dos primeros sub-ítems que mostramos a continuación corresponden a dicha investigación. El ítem c) lo hemos elaborado nosotros; con él ponemos en relación el carácter irracional del número π, y su relación con una representación decimal del mismo. El tratamiento de los números irracionales en la escolaridad elemental, especialmente en números que intervienen en la práctica cotidiana, puede pensarse como un *conocimiento común.* Pero, desde la perspectiva de la enseñanza, ese conocimiento suele presentarse conflictivo para usos y tratamientos en cursos más avanzados. Por tanto, entendemos que este ítem evalúa un *conocimiento ampliado del contenido números*, necesario para un futuro profesor en tanto posibilita el uso de ellos, pero desde una perspectiva que le permita ejercer cierto "control" para evitar futuros conflictos de significado.

El **ítem 11**, está motivado por una investigación llevada a cabo por Kalder (2007), en la que se solicita a un grupo de futuros profesores para escuela media que creen una historia que ilustre el problema de dividir 3 ¾ por ½. Solo unos pocos pudieron hacerlo, y quienes lo hicieron no lograron que la historia se adecuara a la operación solicitada. Entendemos que para un futuro profesor de escuela primaria, es muy importante dotar de significado a una *operación,* desde un contexto de la vida diaria. Más allá de la simple aplicación de un algoritmo que la resuelva. En esa dirección hemos planteado tres operaciones con números decimales, para las cuales se requiere elaborar un problema que se resuelva con ellas. Encuadramos este ítem como *conocimiento especializado*, dado que elaborar un problema constituye ciertamente una tarea de enseñanza, que requiere además precisión conceptual en la representación. Por otra parte, elaborar un problema a partir de ciertas condiciones, puede entenderse en el contexto de formación, como un problema poco habitual, cuyo método de solución "no es usual".

Como hemos anticipado, nuestra variable de análisis consta de dos componentes. En el presente apartado hemos justificado la selección de los ítems, desde una visión general que contempla tanto los contenidos de tipo curricular, como el tipo de conocimientos que se pretende evaluar. La componente onto-semiótica, se materializa a través de un análisis detallado de los conocimientos puestos en juego en la solución de estos ítems. Dicho estudio se incluye en el apartado 5.7, para la versión definitiva del cuestionario.

5.5. APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO A UNA MUESTRA PILOTO

El cuestionario piloto se aplicó a un grupo de 12 estudiantes para profesor de enseñanza primaria, que estaban cursando su primer año de estudios (curso 2009-2010). El tema en cuestión aún no había sido desarrollado en la asignatura "Matemáticas y su Didáctica" del plan de estudios de magisterio (especialidad de Educación Primaria). Los participantes accedieron a la prueba de manera voluntaria. El objetivo de esta evaluación era valorar, especialmente, la comprensión de los enunciados del instrumento y la adecuación del tiempo estimado para su resolución (se estimaron 2 horas.). El cuestionario fue administrado en forma individual.

Durante la aplicación del cuestionario, los estudiantes no solicitaron explicaciones sobre las consignas. Al finalizar el mismo, algunos de ellos manifestaron no completar algún ítem por “no recordar” sobre algún tema particular. No obstante, la mayoría resolvió por encima del 80% del cuestionario. Por lo que, inferimos que el nivel de comprensión de los ítems fue alto.

En cuanto al tiempo podemos informar que, de los 12 participantes 1 empleó 30 minutos, 1 empleó la totalidad del tiempo asignado (2 hs.) y los 10 alumnos restantes lo resolvieron en torno a 1 hora y 30 minutos. Por tanto, observamos que el tiempo estimado resultaría adecuado.

Con respecto a los ítems, podemos señalar algunas cuestiones específicas, observadas a partir de la corrección de los mismos:

Cabe destacar con respecto al ítem 2a), que si bien se proporcionó un espacio (cuadro), con la intención que pudieran trazar otra/s rectas con unidades más adecuadas que la dada, para la representación de números como 1/3 o 10/3, ninguno hizo uso de ello y ubicaron una aproximación de dichos números en la recta dada.

Los ítem que más dificultades presentaron para los estudiantes fueron: 3b), 8, 10c) y 11b).

En relación al ítem 3b), se plantearon tres tipos de cuestiones erróneas:

- No elaborar una redacción alternativa esclarecedora de problema.
- Manifestar que no había problema de interpretación, por tanto no había nada que corregir.
- Parafrasear la redacción de la situación dada.

En el ítem 8, se pudo observar que la justificación es entendida por los estudiantes, como “una explicación de lo mismo”. Por lo tanto,

- Se mostraban solo un ejemplo del algoritmo.
- La justificación consistió en describir la misma técnica.

Resultó curioso lo obtenido para el ítem 10c), dado que, en varios casos:

- No pudieron dar una aproximación de π, acorde a las condiciones dadas.
- No plantearon una justificación matemática adecuada, para las aproximaciones dadas.

En general, la ausencia de justificaciones fue notable y en los casos que las hubiera, tenían más bien un carácter "explicativo". Pocas fueron las argumentaciones realizadas utilizando alguna noción matemática, propiedad, o técnica adecuada.
Con esta información, y de la revisión realizada al instrumento, a través de juicio de expertos, procedimos a la adecuación del cuestionario, para una nueva versión.

5.6. REVISIÓN DEL INSTRUMENTO MEDIANTE JUICIO DE EXPERTOS

La construcción de un cuestionario requiere un proceso de elaboración progresiva que tenga en cuenta aspectos tales como:

- Comunicabilidad: Redacción correcta, claridad y consistencia. En nuestro caso el director de la investigación y estudiantes de doctorado leyeron versiones previas. Así mismo, se discutieron algunos ítems en sesiones de seminarios. También se solicitó a los estudiantes que participaron en la prueba piloto posibles dificultades de comprensión.
- Nivel adecuado de dificultad. Se tuvieron en cuenta en la selección y elaboración de los ítems una serie de dificultades y errores sobre los números decimales, descritas en el estudio realizado en el Capítulo 1.
- La adecuación a las especificaciones del cuestionario. Este aspecto fue valorado mediante el juicio de expertos que se describe a continuación.

Con la tabla de especificaciones de contenidos y los ítems elaborados y/o seleccionados, que a nuestro juicio cubrían los objetivos propuestos se procedió a la fase de valoración por medio de expertos externos. Este es uno de los criterios esenciales que se usa en la construcción de instrumentos (López Feal,1986). El propósito es validar el contenido del cuestionario y usar la información provista por los expertos para realizar una selección definitiva de los ítems.

En la valoración mediante juicio de experto se requirió que una muestra de formadores de profesores evaluasen los ítems respecto a una serie de criterios (Millman y Greene,1989; Thorndike,1989).

Participaron un total de seis expertos, todos ellos vinculados a la investigación y enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas, con títulos de Máster y Doctor y pertenecientes a distintos países (España, Italia, Argentina), cubriendo así dos universidades españolas y dos extranjeras. Para tal fin, se preparó un cuestionario cuya versión completa se puede ver como Anexo 5.1.

Se pretendió, fundamentalmente, establecer consenso sobre la relevancia entre los ítems presentados y los contenidos que pretendían evaluar. No obstante, también se sugería realizar comentarios y correcciones en la redacción de los mismos, así como cualquier sugerencia que consideraran relevante. Se envió a los expertos una carta de presentación explicando el objetivo de la investigación y requiriendo su colaboración. Se incluían también algunas aclaraciones específicas sobre lo requerido. En la Tabla 5.3, puede verse un ejemplo de lo solicitado.

Tabla 5.3. *Ejemplo de pregunta incluida en el cuestionario para expertos*

Evaluación mediante juicio de expertos
Estamos en el proceso de elaboración de un cuestionario. En la terminología del "conocimiento matemático para la enseñanza" el objetivo del cuestionario es evaluar el conocimiento común y especializado sobre los números decimales de futuros profesores. Hemos excluido cuestiones relacionadas con el "conocimiento pedagógico del contenido". Requerimos su colaboración para evaluar: - El grado de relevancia del contenido propuesto. - El grado de adecuación de los ítems para evaluar la comprensión de ese contenido. - La ausencia de algún contenido importante. - La redacción de los enunciados de los ítems. Le solicitamos completar unas tablas, en las que hemos establecido una escala de 1 a 5, donde 1: indica, Nada relevante/adecuado y 5: Muy relevante/adecuado. Puede agregar, si lo cree pertinente, algún contenido que considere no ha sido contemplado. En la construcción del cuestionario hemos considerado necesario distinguir entre número decimal y expresión decimal de un número real, adoptando la siguiente definición para número decimal: "Llamamos número decimal, al número racional que admite al menos una representación fraccionaria decimal (esto es, una fracción cuyo denominador es, o puede ser, convertido en potencia de 10)". **Contenido 4.** Distinción entre número decimal y expresión decimal de un número **Ítems que lo evalúan** ***Ítem 4*** Resuelve las siguientes cuestiones: a) ¿Es decimal el número 1,3456789? Justifica la respuesta. b) ¿Es decimal el número 0,454545…. (45 repetido indefinidamente)? Justifica la respuesta. c) ¿Es un número decimal el número cuya expresión decimal es 4,10999…. (Una infinidad de 9)? Justifica la respuesta. ***Ítem 8 b)*** *Como sabes el número racional 0,7 se puede escribir en forma fraccionaria (0,7 = 7/10) ¿Se puede escribir en forma fraccionaria* **cualquier** *número dado en forma decimal? Distingue los casos posibles y justifica la respuesta. (Este caso tal vez debiera ir primero)*

Valoración del contenido e ítems:					
Contenido e ítems	1: Nada	2	3	4	5: Mucho
Distinción entre número decimal y expresión decimal de un número					
El ítem 4 ¿es adecuado para este contenido?					
El ítem 8 b) ¿es adecuado para este contenido?					
Sugerencias sobre la redacción de los ítems:					

En la Tabla 5.4, se presenta la media de las puntuaciones asignadas por los expertos a cada uno de los ítems y contenidos que se proponen evaluar. Se aceptaron todos los ítems que recibieron una valoración superior a 3, con excepción del ítem 6c que nosotros consideramos pertinente. Se descartaron los ítems 7c) y 11a) , se realizaron algunas adecuaciones a los ítems 2a), 2b), 4a), 4b), 5, 6, 8, 9a), 10c), 11b) y 11c), especialmente en lo referente a clarificar la redacción, y se agregaron 2 ítems sugeridos por los expertos (7 y 11 de la nueva versión).

Tabla 5.4: *Media de la puntuación asignada a la relación ítem/contenido*

ITEM		CONTENIDO	Frecuencia de la puntuación					
			1	2	3	4	5	Media
1			-	-	-	1	5	4,83
2	2a	1	-	-	-	3	3	4,50
		4	-	-	1	1	3	4,40(*)
	2b	1	1	-	1	1	2	3,60(*)
		4	1	-	1	1	2	3,60(*)
3		2	1	1	1	-	3	3,50
4		2	-	-	-	-	5	5,00(*)
		8	-	-	-	-	5	5,00(*)
5	5a	3	-	-	-	-	5	5,00
		5ª	1	-	-	1	4	4,17
		7	-	1	-	-	5	4,50
	5b	3	-	-	-	-	5	5,00
		5c	-	-	-	1	4	4,80
		7	-	1	-	-	5	4,50
	5c	3	-	1	-	-	5	4,50
		5c	-	-	1	1	3	4,40(*)
		7	-	1	1	-	4	4,17
6	6a	3	-	1	-	-	4	4,40(*)
		4	-	-	1	1	3	4,40(*)
		5a	-	-	-	2	4	4,67
	6b	4	-	-	1	1	3	4,40(*)
		5c	-	-	-	1	4	4,80(*)
	6c	4	-	-	3	-	2	2,60(*)
		5a	-	-	-	1	3	3,80(*)

		12	1	1	1	1	1	2,50
7	7a	9	1	-	1	-	3	3,80(*)
	7b	9	1	-	-	-	4	4,20(*)
	7c	9	1	-	1	-	3	3,80(*)
8		10b	-	-	-	2	3	4,60(*)
9	9a	5a	-	-	1	-	4	4,60(*)
		5c	-	1	-	2	2	4,00(*)
	9b	5a	-	-	1	-	5	4,67
		5c	-	1	-	2	2	4,00(*)
		5d	1	-	1	1	2	3,60(*)
	9c	6	-	-	-	1	5	4,83
10	10a	5d	-	-	1	1	3	4,40(*)
	10b	11	2	-	1	-	3	3,33
	10c	2	-	-	1	-	4	4,60(*)
		8	1	-	2	-	2	2,80(*)
		12	1	-	-	2	3	4,00
11		5b	-	1	2	1	1	3,40(*)
		10ª	2	1	-	-	3	3,17

(*) Las medias marcadas con (*) están calculadas sobre 5 respuestas, ya que uno de los expertos no asignó puntuación a alguno de los ítems.

A continuación describimos observaciones realizadas por los expertos y las correspondientes modificaciones hechas por nosotros. Con respecto al ítem 2a), un evaluador sugirió ampliar el número de representaciones a realizar en la recta. Literalmente manifestó, "falta variedad de ejemplos (todos se centran en el 3)". En este caso, incorporamos 2 formas de representación para un nuevo número, 2 y $\frac{10}{5}$. La sugerencia de otro evaluador proponía reconsiderar las divisiones realizadas en la recta, esto es adecuar la división para favorecer la ubicación de los números solicitados. Con respecto a ello, al agregar dos representaciones nuevas se decidió solo marcar las unidades enteras y dejar a cargo del alumno la/s división/es que considere adecuada/s para realizar correctamente las representaciones pedidas.

Con respecto al ítem 2b), se incorporó una cuadrícula a los fines de facilitar la decisión sobre el tipo de unidades de medida a utilizar.

En relación al ítem 4, se mejoró la redacción de los sub-ítems a) y b).

El ítem 5 si bien fue aceptado con alta puntuación, uno de los evaluadores realizó una sugerencia que hemos considerado muy pertinente. Refirió a la incorporación de un sub-ítem que interrogara si un número natural era decimal. Se incorporó, entonces el sub-ítem 5d): "¿Es decimal el número 3?". Consideramos aceptable y oportuno, incluir entre los números racionales un número natural. La falta de reconocimiento de un número natural como número decimal, es ciertamente reconocida.

En lo que refiere al ítem 6, se modifica el enunciado, no solo con el propósito de ofrecer claridad en la redacción, sino también, con la intención de enfatizar la concepción de número decimal que en la versión piloto quedaba implícita. Esta ha sido también una sugerencia manifestada por uno de los evaluadores.
La consigna de la primera versión planteaba lo siguiente: "Expresa mediante una escritura decimal finita los números siguientes, en los casos que sea posible. Justifica la respuesta" (a) 1/5, b) 1/3, c) π).
La nueva versión, se describió del siguiente modo: "Dadas las siguientes expresiones numéricas, identifica cuales de ellas representa un número decimal mostrando, en los casos que sea posible, su escritura decimal finita" (a) 1/5, b) 1/3, c) π).

En el caso del ítem 8, se hizo una corrección en relación al modo en que se plantea, el hecho de utilizar un ejemplo para facilitar la justificación. Por ello es que, en lugar de "¿cómo justificarías esta regla, utilizando un ejemplo?", en la nueva versión, se redactó del siguiente modo: "¿Cómo justificarías esta regla? Puedes usar un ejemplo para describir la justificación". La razón que fundamenta el cambio, es que en la primera versión, se tiende a apoyar la idea que la justificación podría ser la simple descripción del algoritmo desarrollado con el ejemplo.

Para el ítem 10c), con el propósito de unificar el lenguaje usado en la investigación, hemos reemplazado el término "aproximación decimal de π" por "expresión decimal aproximada de π". Por otra parte, se redujo la solicitud a una sola expresión decimal aproximada para π.

Con respecto al ítem 11, acorde a la sugerencia de uno de los expertos, hemos condicionado la redacción de los problemas a un contexto específico. Introducimos el contexto de porcentajes en el caso de la multiplicación y de medida de magnitudes en el caso de la división. Por otra parte consideramos, que dos operaciones serían suficientes para valorar si el futuro profesor puede otorgarles un significado adecuado. Por esta razón se suprime el ítem 11a).

Por último, como ya anticipamos, en la nueva versión se introducen dos ítems que llevan la numeración 7 y 11.

Vamvakoussi y Vosniadou (2004), sostienen que la comprensión de los números racionales no es especialmente difícil. Lo que ocurre es que el conocimiento previo de los números naturales es el apoyo que los estudiantes toman cuando tratan con las propiedades de los números racionales y este conocimiento suele operar en contra para la adquisición de propiedades algebraicas de los números racionales. Por esta razón, el **ítem 7** (ver tabla 5.5, nueva versión del instrumento) ha sido introducido para evaluar de manera directa el ámbito de validez de la *propiedad sucesor* de los números naturales. El propósito es realizar un acercamiento previo al tratamiento que los estudiantes hacen a los números decimales, a aspectos que subyacen a la propiedad de densidad. El contenido se focaliza en las propiedades, dentro del esquema general de contenidos de la Fig. 5.1. Por su estructura, la evaluación del ítem se centra en el *conocimiento del contenido y estudiantes.*

Otra de las sugerencias fue introducir un ítem que tomara en cuenta el tema de la precisión. La precisión es un tema que, tanto en la vida cotidiana como curricularmente, está muy presente. Una muestra de ello es que, en los Principios y Estándares 2000 del NCTM se solicita este tema explícitamente para todos los niveles. Nowlin (2007), afirma que los futuros profesores no controlan la precisión en el sentido contextual. No saben cuándo y cómo deben usar aproximaciones. Parece que esto depende más de los recursos disponibles (por ejemplo, del uso de la calculadora y sus posibilidades), que del contexto en sí, y no de las propiedades de los números en cuestión. Lachance y Confrey, (2002), por su parte, sostienen que muchas investigaciones tienden a evaluar el desarrollo de la notación decimal en forma aislada, y no en conexión con otros constructos matemáticos como por ejemplo la razón y la fracción. El propósito del **ítem 11** es, precisamente, evaluar la distinción entre *número decimal y expresión decimal de un número.* Cuestión que, pone en juego explícitamente la precisión por el tipo de datos que se proporcionan en la situación. Por otra parte, con este ítem se evalúan dos tipos de conocimientos que aquí se presentan estrechamente vinculados: *conocimiento especializado del contenido y conocimiento del contenido y estudiantes.* Se trata una tarea de enseñanza en la que el futuro profesor debe demostrar capacidad para examinar y comprender distintas formas de resolución del problema, pero además debe demostrar que comprende por qué razón los niños hacen uso de ese tipo de conocimientos.

En síntesis, en este apartado hemos fundamentado los cambios realizados al cuestionario, tomando en cuenta la valoración del juicio de expertos, mayores precisiones en cuanto a las investigaciones y algunos resultados de la aplicación del cuestionario a un grupo de estudiantes, como estudio piloto.

5.7. VERSIÓN DEFINITIVA DEL CUESTIONARIO. ANÁLISIS A PRIORI DE LOS ÍTEMS

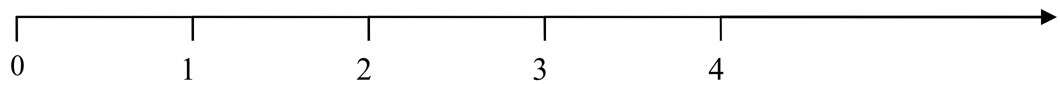
En este apartado incluimos la versión definitiva del cuestionario (Tabla 5.5) en la cual hemos introducimos los cambios explicados en el apartado anterior. Así mismo realizamos un análisis detallado de los conocimientos puestos en juego en los ítems aplicando la noción de configuración epistémica y describimos potenciales conflictos de significado al ser respondidos por los futuros profesores de educación primaria.

Tabla 5.5. *Ítems que componen la nueva versión del cuestionario*

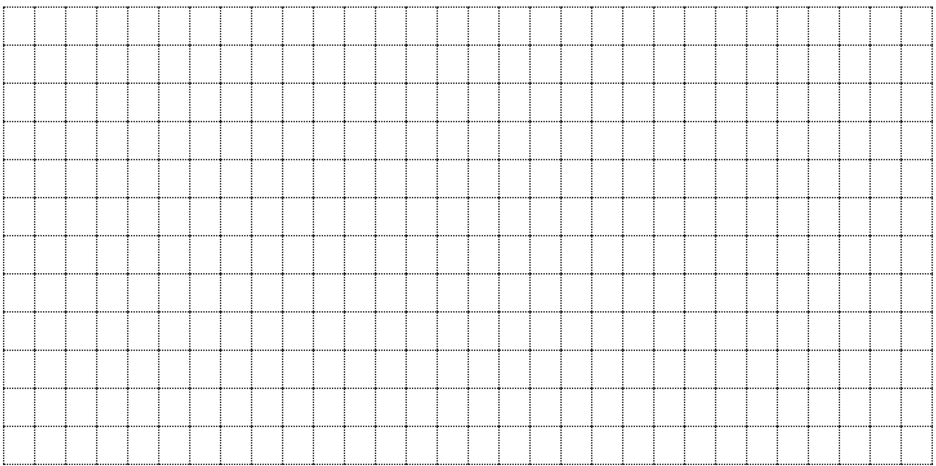
Ítem 1:
Explica con tus propias palabras que entiendes por número decimal.

Ítem 2:
a) Señala en la recta numérica los siguientes números,

Tres décimas; 0,3; un tercio; $\frac{3}{10}$; $\frac{10}{3}$; 2; $\frac{10}{5}$.



b) Representa los números anteriores usando gráficos de áreas de figuras rectangulares.



Ítem 3:
En un libro de texto para 4º grado encontramos el siguiente problema:

Averigua de que número se trata.
- La parte entera es 16
- Las centésimas es la mitad de la parte entera
- Las décimas es la mitad de las centésimas

Pedro da como respuesta 16,48, indicando que el número pedido tiene 8 centésimas y 4 décimas. Pero María dice que el problema está mal planteado por la siguiente razón:

La mitad de la parte entera son 8 unidades, que no pueden ser centésimas, porque una centésima es cien veces mas pequeña que la unidad.

a) ¿Quién lleva razón, Pedro o María? Justifica tu respuesta.

b) Escribe el enunciado de la tarea de una forma diferente para evitar el conflicto de interpretación entre Pedro y María.

Ítem 4:
a) ¿Se podría suprimir un cero en el número 470,05 de tal manera que se obtenga un número mayor? ¿Y un número menor? Justifica ambas respuestas.

d) ¿Se podría intercalar un cero en el número 19,38 de tal manera que se obtenga un número mayor? ¿Y para obtener un número menor? Escribe todas las posibilidades. Justifica las respuestas.

c) Un número está formado por unidades, decenas, centenas, décimas y centésimas. ¿En qué posición intercalarías un 0 para obtener un número mayor? ¿En qué posición intercalarías un 0 para obtener un número menor? Justifica las respuestas.

Ítem 5:
a) ¿Representa un número decimal la expresión 1,3456789? Justifica la respuesta.

b) ¿Representa un número decimal la expresión 0,454545…. (45 repetido indefinidamente)? Justifica la respuesta.

e) ¿Es un número decimal el número cuya expresión decimal es 4,10999…. (9 repetido indefinidamente)?. Justifica la respuesta.

f) ¿Es decimal el número 3?

Ítem 6:
Dadas las siguientes expresiones numéricas identifica cuales de ellas representa un número decimal mostrando, en los casos que sea posible, su escritura decimal finita.

$$\text{a) } \frac{1}{5} \qquad \text{b) } \frac{1}{3} \qquad \text{c) } \pi$$

Ítem 7:
La siguiente cuestión corresponde a una prueba realizada por una maestra para evaluar el conocimiento de sus alumnos acerca de los números decimales.

Sabemos que el número siguiente del número natural 54 es el 55.
a) ¿Existe un número natural que siga inmediatamente a 23,5? ¿Cuál, o cuales serían?
b) ¿Existe un número decimal que siga inmediatamente a 32,13? ¿Cuál, o cuales serían?

Tres alumnos respondieron de la siguiente manera:
Nicolás ha respondido: el 24 y el 32,14; Ruth ha respondido: el 24 y el 32,131; Florencio ha

respondido: el 23 y el 32,12.

¿Son correctas las respuestas de los alumnos? Justifica tu respuesta.

Ítem 8:
Una maestra propuso el siguiente problema a sus alumnos:
Sonia ganó el concurso de salto de longitud. Saltó más de 4,12 metros y menos de 4,16 metros. ¿Cuáles pueden ser las marcas de Sonia?
a) Resuelve el problema.
b) A la primera pregunta del problema anterior, cuatro alumnos dieron las siguientes respuestas:
Luís: *4,12m; 4,13m; 4,14m; 4,15m y 4,16m.*
José: *Cualquier medida de longitud comprendida entre 4,12 m y 4,16 m.*
Ana: *4,13m; 4,14m y 4,15m.*

¿Han respondido todos bien? Justifica tu respuesta.

Ítem 9:
En un libro de 6º curso de primaria encontramos la siguiente regla, la cual viene ilustrada con un ejemplo, pero no se justifica:

> *"Para multiplicar dos números decimales, los multiplicamos sin tener en cuenta las comas*
> *y en el resultado separamos con una coma, desde la derecha, tantas cifras como decimales*
> *tienen entre los factores"*

Un alumno quiere saber porqué se hace de esa manera. ¿Cómo justificarías esta regla? Puedes usar un ejemplo para describir la justificación.

Ítem 10:
a) Como sabes el número racional 2/5 se puede representar en forma decimal: 2/5=0,4. ¿Se puede representar, en forma decimal, **cualquier** *número racional dado como una fracción? Distingue los casos posibles y justifica.*

b) Como sabes el número racional 0,7 se puede escribir en forma fraccionaria (0,7 = 7/10) ¿Se puede escribir en forma fraccionaria **cualquier** *número expresado en forma decimal? Distingue los casos posibles y justifica.*

c) Dada la expresión fraccionaria irreducible de un número racional, ¿Que condición debe cumplir el
denominador de dicha fracción para que represente a un número decimal?

Ítem 11:
Un maestro propone a sus estudiantes el siguiente problema: La madre de Lucía quiere hacerse un vestido. Para hacerlo compra un tercio de metro de tela y la mitad de un tercio de metro de tela. Si el metro de dicha tela cuesta 10 euros, ¿Cuánto le costó la tela a la madre de Lucía?
Isa y José los resolvieron así:

Isa:
$\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0,5$ *; 0,5 x 10 = 5; la tela costó 5 euros.*

José:
$\frac{1}{3}=0,33$*; 0,33:2 = 0,16; 0,33 + 0,16 = 0,49; 0,49 x 10 = 4,9; la tela costó 4,9 euros.*

Explica porqué Isa y José obtienen resultados diferentes.

Ítem 12:

d) El número: 0,121221222122221…. ¿es racional o irracional? Justifica la respuesta.

e) Consideremos el número $\frac{53}{83}$. Al hacer la división la calculadora muestra 0.63855421687.

¿Es $\frac{53}{83}$ un número racional o irracional? Justifica la respuesta.

f) Una expresión decimal aproximada de π es 3,141592. Escribe una expresión decimal aproximada de π cuyo error sea menor que 1 milésima. Justifica la respuesta.

Ítem 13:

a) Enuncia un problema de la vida cotidiana, en un contexto de uso de porcentajes, que se resuelva con la siguiente operación de multiplicación de dos números decimales: 2,255 x 1,7.

b) Enuncia un problema de la vida cotidiana, en un contexto de medida de magnitudes, que se resuelva con la siguiente operación de división de dos números decimales: 5,76: 1,8.

La acepción de validez que mejor se adapta a nuestra investigación es la de validez de contenido y es una cuestión de grado, puesto que no puede reducirse a cero o uno. Para estudiar la validez de contenido el investigador debe comprobar que el instrumento constituye una muestra adecuada y representativa de los contenidos que se pretenden evaluar con él (Muñiz, 1994). Ya hemos informado sobre la validez del contenido de los ítems, a partir de: el significado de referencia global para la enseñanza de los números decimales, del referente local (extraído del global) a los fines de especificar contenidos, de la valoración del juicio de expertos, y de observaciones de la aplicación de la prueba piloto. Un análisis detallado y a-priori de los conocimientos puestos en juego en la solución de los ítems que componen el instrumento, nos ha permitido mostrar, desde una perspectiva onto-semiótica, tanto los elementos de significado intervinientes, como así también el modo en que estos se configuran. De manera dialéctica, el desarrollo de las configuraciones epistémicas nos permitió determinar aspectos fundamentales de la validez del contenido de los ítems, además de anticipar potenciales conflictos de significado.

En los siguientes apartados realizamos el mencionado análisis sistemático de cada uno de los ítems, incluyendo la siguiente información:

— Contenidos centrales y secundarios que se pretenden evaluar.

— Elemento/s centrales de significado en que se centra el ítem y elementos secundarios.
— Una propuesta de resolución experta.
— Descripción de la configuración epistémica del ítem en términos de objetos y significados atribuidos.
— Descripción de potenciales conflictos de significado.

5.7.1. Análisis del Ítem 1

Recordemos que el primer ítem propuesto para el cuestionario lleva el siguiente enunciado:

Explica con tus propias palabras que entiendes por número decimal.

Como hemos anticipado, el objetivo de este ítem es evaluar que concepción de número decimal poseen los futuros profesores. El elemento de significado central del ítem está centrado en un concepto/definición. En el siguiente cuadro exhibimos dos posibles resoluciones expertas para este ítem, las cuales podemos interpretar como las prácticas operativas y discursivas que un sujeto experto realizaría para resolver la tarea requerida:

R1: Llamamos número decimal al número racional que admite al menos una representación fraccionaria decimal (una fracción, cuyo denominador es, o puede ser, convertido en potencia de 10) R2: Un número decimal es un número racional que admite una expresión decimal finita.

En la tabla 5.6, analizamos con detalle los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.6: *Configuración de objetos y significados del ítem 1*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
Número decimal Número racional Expresión decimal finita Representación fraccionaria decimal	Concepto de número decimal Concepto de número racional Expresión polinómica abreviada de un número decimal. Fracción cuyo denominador es una potencia de 10
CONCEPTOS	

Número decimal	Una clase especial de número racional caracterizado por sus representaciones fraccionarias y polinómicas, así como propiedades topológicas como la densidad en Q.
Número racional	Una clase especial de números reales que admiten una expresión fraccionaria, se estructuran como un cuerpo ordenado y otras propiedades topológicas como la densidad en R.
Fracción decimal	Una forma de representar un número decimal.
PROPIEDADES	
Un número decimal se puede expresar en forma fraccionaria no decimal, cuando dicha expresión sea equivalente a una decimal (la descomposición en factores primos del denominador solo contiene los dígitos 2 o 5, o sus potencias)	Se usa cuando el número decimal se define refiriendo a expresiones fraccionarias.
Valor posicional de las cifras decimales (décimas, centésimas, …)	Se usa en la representación decimal de los números decimales

Como se puede observar en la configuración epistémica, se movilizan elementos de significado centrados especialmente en conceptos y propiedades. Estos elementos, sumados a los lingüísticos, en este ítem cobran una importancia especial. La identificación de una tipología numérica con un “nombre”, requiere no solo recordar una expresión lingüística; el alumno se enfrenta a una complejidad epistémica propia de los sistemas numéricos. La distinción de elementos como parte de una clase numérica, requiere de un conocimiento profundo de las propiedades que los caracterizan. De esta complejidad que evidenciamos y de las investigaciones previas (Brousseau, Brousseau y Wanfierld, 2004; Socas, 2001 y 2004; Ferrari, 2006; Ruiz, 2004; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004), podemos anticipar, a modo de hipótesis para esta clase de números en particular, la aparición de algunos conflictos de significado los que describimos del siguiente modo:

- Un número es decimal si está formado por dos partes separadas por una coma.
- Un número es decimal si no es entero.
- Un número decimal está formado por dos números enteros separados por una coma.

5.7.2. Análisis del Ítem 2

Este ítem se halla centrado en el procedimiento de representación de un número racional en la recta, cuyo propósito es identificar un número a través de distintas tipos de representaciones. Es así que con él se pretende evaluar los siguientes contenidos: *El contenido 1* que hace referencia a distintas representaciones del número racional, más específicamente a la distinción entre número y representación de un número racional.

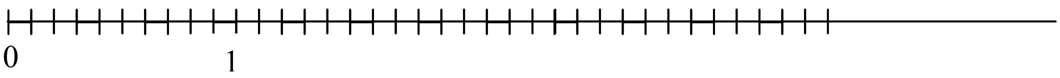
Por otra parte, el c*ontenido 4* que hace alusión a la relación del número decimal con las restantes clases de números (naturales, racionales, reales).

Sub-ítem 2a)

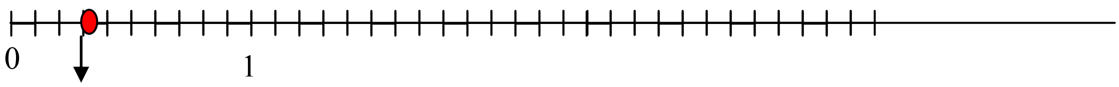
El primer apartado del ítem 2 lleva el siguiente enunciado:

Ubica en la recta numérica los siguientes números,

Tres décimas; 0,3; un tercio; $\frac{3}{10}$; $\frac{10}{3}$



La resolución esperada para este sub-ítem se muestra sobre las dos rectas siguientes:



Tres décimas$= 0{,}3 = \frac{3}{10}$

Gráfico 5.1: *Representación de tres décimas, 0,3 y 3/10.*

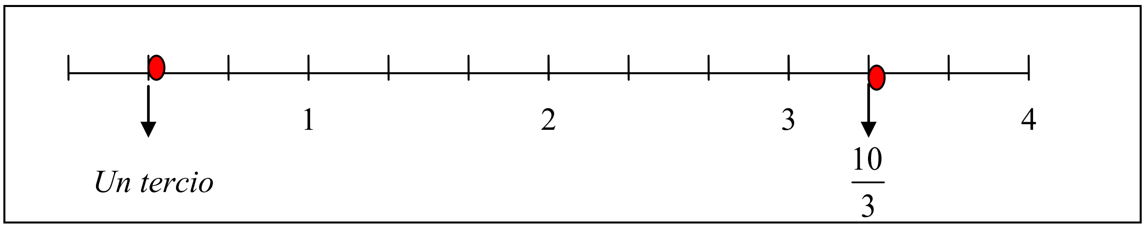


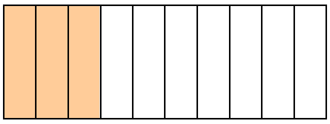
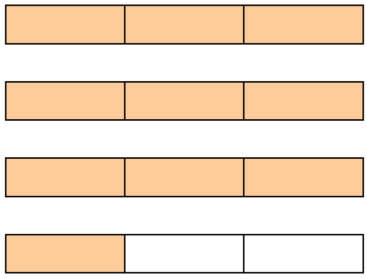
Gráfico 5.2: *Representación de 1/3 y 10/3.*

Sub-ítem 2b)

El siguiente enunciado corresponde al segundo apartado del ítem 2:

Representa los números anteriores usando gráficos de áreas rectangulares

Algunas resoluciones posibles para este ítem:

 *Tres décimas= 0,3=* $\frac{3}{10}$	 *un tercio*	 $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$

Cabe aclarar, que hemos propuesto una resolución "típica" o "estándar" para éste ítem, la que encontramos generalmente en los libros de textos escolares. No obstante, existen una diversidad de representaciones, las que sería deseable esperar variando las unidades de medida y las formas de partición.

En la tabla 5.7, analizamos con detalle los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.7: *Configuración de objetos y significados del ítem 2*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
Ubica en la recta numérica Tres décimas = 0,3= 3/10 (ubicados sobre el mismo punto en la recta) (marcado de un tercio y 10/3 sobre la recta) Gráficos de áreas de figuras rectangulares	- Representación gráfica lineal de los números racionales - Interpretación de la escala numérica y conteo - Propiedad: Igualdad de tres representaciones, notacional y gráfica - Representación de racionales no decimales -Concepto de fracción
CONCEPTOS	
Recta numérica racional Número racional decimal Número racional no decimal Fracción propia Fracción impropia (número mixto)	Correspondencia biyectiva entre puntos de la recta real y los números racionales Tres décimas Un tercio, 10/3 Como relación de una parte respecto de un todo (área rectangular), dividido en partes iguales (tres décimas, un tercio) 10/3 = 3+1/3
PROPIEDADES	

P1: Si dos o más expresiones numéricas se ubican en el mismo punto de la recta entonces refieren al mismo número. P2: El punto marcado en el gráfico 1 representa a tres décimas, 0,3 y 3/10 P3: Los puntos marcados en el gráfico 2 ubican un tercio y 10/3 P4: Áreas con formas y/o tamaño diferentes pueden representar el mismo número.	Se usa cuando se afirma que tres décimas=0,3=3/10 Respuestas al apartado a) Respuesta al apartado b)
PROCEDIMIENTOS	
Representar un número racional en la recta numérica (elección de unidad natural y fraccionaria, redondeo decimal, conteo, …) Representar una fracción (propia e impropia) según el modelo de áreas rectangulares	Se usa para representar los números dados en la escala dada Se usa en el apartado b)
ARGUMENTOS	
P1, P2 y P3, son respuestas verdaderas ya que se obtienen como resultado de aplicar la definición de número racional y el procedimiento de representación de los números reales sobre la recta numérica (marcado de la unidad, división de la unidad en partes iguales, … P4 es verdadera porque las relaciones entre las áreas representadas corresponden a los racionales solicitados.	Justificación de las soluciones dadas

Este ítem, además de poner en funcionamiento la identificación de números racionales, pone en conexión la concepción de número racional (en particular decimal), con diferentes formas de representación. Podemos afirmar, tal como lo manifiestan investigadores como Baturo (2000); Verschaffel, Creer y Torbeyns, (2006); Socas, (2001); Gagatsis et al. (2010) que la representación y las relaciones entre ellas, resultan esenciales para la concepción de un número. Cada tipo de representación aporta un significado y una caracterización diferente a esa concepción, al igual que el reconocimiento y manejo de las equivalencias, no como mera manipulación sintáctica.

De la configuración epistémica, podemos ver la variedad y multiplicidad de elementos que emergen de una práctica "tipo". Por otra parte, los significados puestos en juego requieren de precisión y un importante de grado de exhaustividad en la concepción de número y representación. En este sentido, el reconocimiento y sólida argumentación de la validez de relaciones entre estas concepciones resulta fundamental. Por lo expuesto, son esperables algunos conflictos específicos como los que enunciamos a continuación:

- Identificar 1/3 con 3/10, 10/3 con 33/10

- Considerar que una aproximación de un número racional, representa exactamente a ese número.
- Omitir representar algunas expresiones equivalentes.
- Para los gráficos de áreas rectangulares, omitir la unidad de medida considerada.

5.7.3. Análisis del Ítem 3

El ítem 3 evalúa el *contenido 2***.** Expresión decimal de un número racional (valor posicional de las cifras; parte entera, parte decimal) y el ítem se halla centrado en la interpretación de una situación/problema por lo que elemento central es de tipo lingüístico. (Modo de redacción del problema).

Recordamos que el enunciado correspondiente a este ítem es el siguiente,

En un libro de texto para 4º grado encontramos el siguiente problema:

> *Averigua de que número se trata.*
> *- La parte entera es 16*
> *- Las centésimas es la mitad de la parte entera*
> *- Las décimas es la mitad de las centésimas*

Pedro da como respuesta 16,48, indicando que el número pedido tiene 8 centésimas y 4 décimas. Pero María dice que el problema está mal planteado por la siguiente razón:

> *La mitad de la parte entera son 8 unidades, que no pueden ser centésimas, porque una centésima es cien veces más pequeña que la unidad.*

a) ¿Quién lleva razón, Pedro o María? Justifica tu respuesta.
b) Escribe el enunciado de la tarea de una forma diferente para evitar el conflicto de interpretación entre Pedro y María.
Una resolución para el mencionado ítem puede ser la siguiente:

Sub-ítem 3a)

María tiene razón, puesto que si las centésimas son la mitad de la parte entera, entonces las centésimas serían la mitad de 16 unidades, esto es 8 unidades y por lo tanto no serían centésimas. Tendríamos:
16 unidades + 8 unidades. Lo mismo ocurre con las décimas, si tienen que ser la mitad de las centésimas serían 4 unidades. Luego el número estaría formado por 16 u + 4 u + 8 u= 28 u.

Sub-ítem 3b)

Al enunciado le falta distinguir entre **cifra y valor** que toma esa cifra según su **posición**. Para evitar el conflicto que tienen Pedro y María debería redactarse del siguiente modo:

> *Averigua de que número se trata*
> *- La parte entera es 16*
> *- La* **cifra de las** *centésimas es la mitad* **del valor de la cifra de la** *parte entera*
> *- La* **cifra de las** *décimas es la mitad* **del valor de la cifra de** *las centésimas*

En la tabla 5.8., analizamos los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.8. *Configuración de objetos y significados del ítem 3.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
Averigua de qué número se trata	Determinar un número desconocido (que se compone de unidades, decenas, décimas y centésimas)
La parte entera es 16	Asignación de un valor a las unidades y decenas del número decimal desconocido
Las centésimas es la mitad de la parte entera	Asignación de un valor a las centésimas del número desconocido mediante la operación aritmética de dividir por 2
Las décimas es la mitad de las centésimas	Asignación de un valor a las décimas del número desconocido mediante la operación aritmética de dividir por 2.
16,48	Expresión polinómica (reducida) del número decimal obtenido por uno de los niños, como respuesta al problema.
CONCEPTOS	
Cifra o guarismo	Símbolos numéricos usados para representar los números
Expresión decimal de un número decimal	Expresión polinómica de un número decimal
Unidades, decenas	Unidades enteras de primer y segundo orden en la expresión decimal de un número
Décima, centésima	Unidades decimales de primer y segundo orden en la expresión decimal de un número
PROCEDIMIENTOS	
Cálculo de las centésimas y décimas del número mediante división por 2 …	Se usa para hallar la parte decimal del número desconocido
PROPIEDADES	
Valor posicional de las cifras de un número decimal (una decena son 10 unidades, …)	Se usa en la expresión polinómica de los números
P1: María tiene razón; el enunciado del problema es incorrecto P2: Es necesario distinguir entre cifra y valor de una cifra	Soluciones de la tarea
ARGUMENTOS	
P1: Debido a que en el enunciado de la tarea no se distingue entre cifra y valor posicional de una cifra la solución es conflictiva P2: Al distinguir entre cifra y valor de una cifra se elimina la ambigüedad.	Justificación de las soluciones dadas

Tal lo anticipado, en este ítem se conjugan elementos de tres componentes del conocimiento para la enseñanza. Nos referimos al conocimiento del contenido *expresión decimal de un número racional,* del *conocimiento especializado del contenido* y del *conocimiento de dicho contenido en relación con los estudiantes.* La configuración epistémica representada en tabla 5.8, nos muestra, de manera explícita, los objetos que intervienen en el ítem; y los significados que asumen según su participación en cada momento y lugar de la tarea (o de la resolución de la tarea). Si bien, los tipos de objetos que se ponen en juego son elementales, debido a las problemáticas expuestas en la introducción del ítem, se podría esperar la aparición de los siguientes conflictos:

- Decidir que ambos niños tienen razón
- No contemplar la distinción entre cifra y valor posicional de una cifra
- Dificultad para establecer relaciones entre las unidades de diversos órdenes (unidades, decenas, centenas…, décimas, centésimas, milésimas…)
- En la nueva redacción del problema se introducen variables o constantes distintas (cambio de la situación).
- La nueva redacción del problema no es clara o es imprecisa.

5.7.4. Análisis del Ítem 4

Este ítem permite evaluar los siguientes contenidos curriculares: *El contenido 2*. Expresión decimal de un número racional (Valor posicional de las cifras; parte entera, parte decimal) y el *Contenido 8*. Ordenación de números decimales. Se halla focalizado en tres elementos de significado centrales (procedimiento/expresión/propiedad) siendo la argumentación el elemento que atraviesa el proceso requerido para su resolución.

Recordamos que los enunciados que componen el ítem son los siguientes:

a) ¿Qué cero suprimirías en el número 470,05 para obtener un número mayor? ¿Y para obtener un número menor? Justifica ambas elecciones.
b) ¿Dónde podemos intercalar un cero en el número 19,38 para obtener un número más grande? ¿Y para obtener un número más pequeño? Escribe todas las posibilidades. Justifica las respuestas.
c) Un número está formado por unidades, decenas, centenas, décimas y centésimas. ¿En qué posición colocarías un 0 para obtener un número mayor? ¿En qué posición colocarías un 0 para obtener un número menor? Justifica las respuestas.

A continuación proponemos una resolución experta para el ítem indicado.

Sub-ítem 4a)
Para obtener un número mayor que 470,05 solo se puede suprimir el 0 de las décimas, porque

si se suprimiera el cero de las unidades tendríamos un número menor de unidades por lo tanto el número sería menor.
Suprimiendo el 0 ubicado en la posición de las décimas el número que resulta es 470,5 que es mayor que 470,05 ya que ambos están compuestos por 470 unidades; no obstante el primero tiene 50 centésimas, mientras que el segundo 5 centésimas y claramente 50 centésimas es mayor que 5 centésimas.
Para obtener un número menor debe suprimirse el 0 correspondiente a las unidades. Así el número resultante será 47,05 es decir 47 unidades y 5 centésimas que es menor que 470 unidades y 5 centésimas.

Sub-ítem 4b)

Para obtener un número mayor que 19,38 tenemos 2 posibilidades para ubicar al 0, estas son: 190,38 o 109,38. El cero debe ocupar el lugar de las unidades o el lugar de las decenas.
Para obtener un número más pequeño el 0 debe ubicarse como décima o como centésima. Los números serían 19,038 y 19,308. En ambos casos el valor de las unidades y decenas es el mismo, pero el primero está compuesto por 38 milésimas que son menores que 38 centésimas, y el segundo por 308 milésimas que son menores que 38 centésimas.

Sub-ítem 4c)

Para obtener un número mayor se debe colocar un cero en la posición que ocupa la cifra de las unidades, o las decenas o las centenas. De este modo las cifras dadas inicialmente formando la parte entera del número aumentan de valor: las unidades pasan a decenas, las decenas a centenas, etc.
Para obtener un número menor se debe colocar un cero en la posición de las décimas o las centésimas. De este modo las cifras dadas inicialmente como parte decimal disminuyen de valor: las décimas pasan a valer centésimas y las centésimas milésimas.

En el enunciado y resolución de este ítem se ponen en juego los objetos y significados indicados en la tabla 5.9.

Tabla 5.9. *Configuración de objetos y significados del ítem 4.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
a) ¿Qué cero suprimirías en el número 470,05 para obtener un número mayor? ¿Y para obtener un número menor? Justifica ambas elecciones. b) ¿Se podría intercalar un cero en el número 19,38 para obtener un número mayor? ¿y para obtener uno menor?	Valor posicional de las cifras Ordenación de números decimales Procedimiento de comparación de números decimales
CONCEPTOS	
Valor posicional de las cifras	El valor de las cifras de un número cambia según sea su posición en la escritura del mismo
Ordenación de números decimales	Un número es mayor (menor) que otro si la diferencia entre ambos es mayor o menor que 0.
Expresión decimal de un número decimal	Forma polinómica de un número decimal (reducida)
PROCEDIMIENTOS	

Técnica de comparación de números decimales (comparar la parte entera, y después la decimal,…)	Se usa para justificar P2 y P3
PROPIEDADES	
Intercalar o suprimir un cero cambia el valor de las cifras de un número P1: a) 470,5; 47,05 P2: b) 190,38 y 109,38 ; 19,038 y 19,308	 Soluciones al apartado a) Soluciones al apartado b)
ARGUMENTOS	
A1: Porque 470,5 es mayor que 470,05 (50 centésimas es mayor que 5 centésimas); y porque 47,05 es menor que 470,05 (47 unidades < 470 unidades) A2: Porque 190,38 y 109,38 son ambos mayores que 19,38 (190 unidades y 109 unidades son mayores que 19 unidades);y porque, 19,038 y 19,308 son ambos menores que 19,38 (38 milésimas y 308 milésimas son menores que 38 centésimas)	Justifica P2 Justifica P3

El apartado c) de este ítem pone en juego los objetos primarios indicados en la tabla aunque generalizados a un número cualquiera de dos cifras enteras y dos decimales (proceso de generalización de los procedimientos y argumentos).

Los conflictos originados por el cero en el sistema de numeración decimal han sido ampliamente difundidos (Centeno, 1988; Socas, 2001; Ruiz, 2004; D´Amore y Fandiño, 2009). En particular, en el tratamiento de los números decimales esta situación se torna aún más problemática. La presencia del cero, especialmente como cifra que integra la "parte decimal" de la expresión decimal de un número, genera confusión entre el cero como cifra y como valor. Esto afecta especialmente, a la equivalencia, a la comparación y las operaciones entre otras cuestiones. Como ya lo anticipáramos, con este ítem se pone en juego el cero en la expresión decimal de un número decimal y donde la tarea requiere del procedimiento de comparación. La configuración epistémica, deja en descubierto, la fuerte presencia del valor posicional de una cifra y los distintos roles que va desempeñando en el desarrollo de la tarea, durante el proceso de comparación. Estos elementos intervienen como lenguaje, concepto, propiedad, procedimientos, y argumentos. En consecuencia, la configuración permite anticipar algunos conflictos ya detectados por las investigaciones y otros específicos del contexto de la tarea. Describimos los siguientes:

- No es posible suprimir un cero para obtener un número mayor y/o un número menor (apartado a)).
- Conflicto con el rol del cero en la "parte decimal" del número.
- Omisión de posibilidades que permiten las condiciones dadas.

- Incomprensión del alcance de un proceso de generalización.
- Ausencia de argumentación o argumentación incompleta.

5.7.5. Análisis del Ítem 5

Este ítem se ha presentado a través de cuatro apartados, donde todos tienen como denominador común y central la evaluación del *contenido 3*. Concepto/definición de número decimal, donde subyacen además *el Contenido 7*, es decir, la fracción generatriz que representa la expresión decimal del número dado y el *Contenido 13,* que exige la justificación de propiedades y/o procedimientos utilizados en la resolución. A su vez, cada sub-ítem mide contenidos que le son específicos y que describimos en el análisis de cada apartado.

Como podemos observar, el elemento de significado central al que apunta este ítem es del tipo concepto/definición. No obstante, aparecen de manera secundaria técnicas o procedimientos que facilitan la respuesta (conversión de un número racional, expresado en forma decimal, a la forma fraccionaria), y donde la argumentación utilizada para dar respuesta al interrogante planteado, pone de manifiesto tanto la presencia o ausencia de los contenidos mencionados como el modo en que éstos son utilizados.

Sub-ítem a)

Recordamos que en este apartado se planteó el siguiente interrogante:

¿Representa un número decimal la expresión 1,3456789? Justifica la respuesta.

Este ítem también nos permitió evaluar, de manera específica, el *Contenido 5a)*. Se trata de la distinción entre número decimal y expresión decimal de un número, en el caso particular de expresiones decimales finitas (como resultado de divisiones enteras con resto 0).

Una resolución para dicho ítem que exhibimos a continuación, nos permitió determinar objetos centrales y secundarios allí presentes.

El número 1,3456789 es decimal ya que puede ser expresado por una fracción decimal. Es decir:

$$1{,}3456789 = \frac{13456789}{10^7}$$

Sub-ítem b)

Este apartado ha sido planteado de la siguiente manera:

¿Representa un número decimal la expresión 0,454545…. (45 repetido indefinidamente)? Justifica la respuesta.

Además de los contenidos mencionados para el ítem 5 en general, para este apartado debemos anexar el *contenido5c)*, puesto que, al tratarse de la expresión decimal de un número racional, resulta necesario adoptar algún procedimiento de conversión que permita decidir qué tipo de número es el representado. Más aún, tratándose de un caso especial (período 9) en el que puede que una decisión tomada a simple vista deje encubierto su verdadero estatus numérico.

Una solución para este sub-ítem, puede ser la indicada a continuación:

El número 0,454545… no es decimal como se muestra al hallar la fracción generatriz.

Si llamamos	$x = 0{,}454545\ldots$, (1)
Multiplicando por 100,	$100x = 45{,}4545\ldots$ (2)
haciendo la resta entre (2) y (1)	$99x = 45$
Se obtiene	$x = \dfrac{45}{99}$

Por lo tanto: $0{,}454545\ldots = \dfrac{45}{99} = \dfrac{5}{11}$, es decir su fracción generatriz no es decimal.

Sub-ítem c)

Al plantear el siguiente interrogante, nos encontramos que evalúa los mismos contenidos que los del apartado anterior.

¿Es un número decimal el número cuya expresión decimal es 4,10999…. (9 repetido indefinidamente)? Justifica la respuesta.

La diferencia esencial radica en que una mirada rápida de la expresión, teniendo en cuenta "la apariencia" de la expresión, puede llevar a una respuesta errónea. Ello nos permite evaluar, desde una perspectiva diferente, los contenidos que hemos descrito.

Una resolución para esta tarea, es la que proponemos en el siguiente cuadro:

Para decidir buscamos la fracción generatriz del número 4,10999…

Si llamamos $x = 4{,}10999\ldots$, entonces:

Multiplicando por 1000, $1000x = 4109{,}999\ldots$ (1)

Multiplicando por 100, $100x = 410{,}999\ldots$ (2)

Restando (2) de (1), $900x = 3699$

Se deduce que $x = \dfrac{3699}{900}$

El número 4,10999… es decimal ya que puede ser expresado por una fracción decimal:

$$4'10999\ldots = \frac{3699}{900} = \frac{411}{100}$$

Sub-ítem d)

La pregunta correspondiente a este sub-ítem fue la siguiente:

¿Es decimal el número 3?

El hecho de cuestionar si un número natural es un número decimal, pone a prueba, en primer lugar, la fortaleza de la concepción de número decimal que poseen los estudiantes, e indirectamente su relación con otros tipos de números.

El número 3 es decimal ya que puede ser expresado por una fracción decimal, es decir:

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{3}{10^0}$$

Y también en notación polinómica finita, $3 = 3\times10^0 + 0\times10^{-1} + 0\times10^{-2} = 3{,}00$

En la tabla 5.10 resumimos los objetos centrales que intervienen en el enunciado y soluciones de los distintos apartados del ítem 5.

Tabla 5.10. *Configuración de objetos y significados del ítem 5.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
¿Representa un número decimal la expresión 1,3456789? Justifica la respuesta	Concepto de número decimal Representación decimal de un número decimal Justificación de una proposición
Escritura fraccionaria decimal Fracción generatriz	Fracción decimal Concepto de fracción general; procedimiento de hallar la fracción generatriz
0,454545…. (45 repetido indefinidamente)	Expresión decimal periódica pura
4,10999…. (9 repetido indefinidamente)	Expresión decimal periódica mixta
3	Número decimal
CONCEPTOS	
Número decimal Fracción decimal Número natural Número racional Fracción generatriz	Conceptos particularizados a los casos de números y fracciones que intervienen en los enunciados y resoluciones.
PROCEDIMIENTOS	
Conversión de la expresión decimal finita de un número racional a una expresión fraccionaria decimal	Es usada en el apartado a) y d)
Técnica de cálculo de una fracción generatriz	Aplicada para determinar si las expresiones decimales periódicas representan o no un número decimal
PROPIEDADES	
Si un número racional es expresable mediante fracción decimal, entonces el número es decimal. P1: El número 1,3456789 es decimal P2: El número 0,454545… no es decimal P3: El número 4,10999… es decimal P4: El número 3 es decimal	Enunciados que responden a las cuestiones
ARGUMENTOS	
A1: …ya que 1,3456789 = $\frac{13456789}{10^7}$ A2: Porque su fracción generatriz no es decimal., 0,454545…= $\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$ A3: Porque 4’10999…= $\frac{3699}{900}=\frac{411}{100}$ A4: Porque 3= $3\times10^0 + 0\times10^{-1} + 0\times10^{-2} = 3{,}00$	Justificaciones de las proposiciones

Con el ítem 1, nuestro objetivo era evaluar la concepción de número decimal que poseen los futuros profesores. Con éste ítem interesa ahora, evaluar la puesta en funcionamiento del concepto número decimal. Se pretende el reconocimiento y justificación del carácter decimal o no de un número racional, a través de una expresión decimal del mismo. Ya habíamos comentado específicamente en el estudio exploratorio del Capítulo 3, y posteriormente en el ítem 2 de este cuestionario, los conflictos que ocasiona el reconocimiento de un número como perteneciente a un determinado tipo (decimal, racional, irracional, etc.). También, en la fundamentación de este ítem, hemos advertido la importancia que tiene el manejo de las representaciones de un número y sus propiedades o caracterizaciones. Concretamente, entre dichas representaciones, la representación decimal de un número racional tiene gran importancia curricular. A su vez, este tipo de representación por ser tan conocida, desde edades tempranas, se le suele otorgar un carácter absoluto para la determinación de una tipología numérica. Sin embargo, sabemos que en muchos casos "observar" solo el comportamiento de las cifras decimales de un número, no alcanza para determinar su tipología. Los números que intervienen en el ítem, ponen de manifiesto en la configuración que, solo a través de definiciones, propiedades, técnicas y argumentos se puede garantizar la afirmación. Por tanto, consideramos la aparición de los siguientes conflictos, como potenciales, en la resolución de la tarea:

- Un número es decimal porque su expresión es decimal.
- Un número es decimal si se puede escribir como fracción.
- Si la "parte decimal" de la expresión decimal de un número no es periódica, entonces el número es decimal.
- Si la expresión decimal de un número es infinita, entonces el número no es decimal.
- Si un número es entero, entonces no es decimal.

5.7.6. Análisis del Ítem 6

Este ítem, ha sido seleccionado entre los ítems que formaron parte del pre-test implementado como primera prueba piloto, con el fin de evaluar *Conocimiento Común del Con*tenido en estudiantes que inician la carrera, tal como se describió en el Capítulo 3. En esa oportunidad el objetivo principal era evaluar la distinción que los estudiantes realizaban entre número y expresión decimal de un número.

En esta instancia el contenido principal a evaluar ha sido el mismo, esto es, el *Contenido 5.* Distinción entre número decimal y expresión decimal de un número. Las razones de su incorporación estuvieron basadas en la falta de comprensión que demostraron los estudiantes sobre el tema. Cuestión que se esperaría ver superada o al menos mejorada en los futuros profesores, luego de la instrucción recibida durante su carrera. Otros contenidos que también se pretende evaluar, en términos generales, con este ítem es el *Contenido 4.* Relación del número decimal con los restantes tipos de números (naturales, racionales (no decimales), reales), y el *Contenido 13.* Justificación de propiedades y procedimientos. Luego, en cada subítem en particular, se evalúan cuestiones específicas incorporadas en el *Contenido 5.* Distinción entre número decimal y expresión decimal de un número, las cuales se identificarán de manera detallada en el análisis que hacemos en la tabla 5.11.

El ítem 6 quedó enunciado del siguiente modo:

> Dadas las siguientes expresiones numéricas identifica cuales de ellas representa un número decimal mostrando, en los casos que sea posible, su escritura decimal finita.
>
> a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) π

Una resolución para el ítem, se presenta en el siguiente desarrollo,

a)	b)	c)
$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ $\frac{1}{5}$ puede ser expresado con una escritura decimal finita.	$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots\ldots$ es un número racional periódico y no admite una escritura decimal finita. $\frac{1}{3}$ se puede aproximar por números decimales. Por ej: $\frac{1}{3} \cong 0{,}333$ o $\frac{1}{3} \cong 0{,}3333333$	π es un número irracional y por lo tanto no puede ser representado mediante una escritura decimal finita. Puede ser aproximado por números decimales. $\pi = \frac{longC}{d}$, donde C: Circunferencia, *d*: diámetro de C Ejemplos de aproximaciones: $\pi \cong 3{,}1416$ o $\pi \cong 3{,}14159265$

En la tabla 5.11, analizamos con detalle los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.11. *Configuración de objetos y significados del ítem 6.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
Dadas las siguientes expresiones numéricas, identifica cuales de ellas representa un número decimal, mostrando, en los casos que sea posible, su escritura decimal finita. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) π Justifica la respuesta.	Números reales Técnica de cambio de representación fraccionaria a decimal Práctica argumentativa
CONCEPTOS	
Números reales: decimal, racional e irracional Expresión decimal finita	Particularizados en un decimal 1/5, racional no decimal 1/3 e irracional π Forma de representación de números decimales
PROCEDIMIENTOS	
Paso de representación fraccionaria a decimal mediante la búsqueda de fracciones decimales equivalentes, o dividiendo numerador por denominador. Aproximación decimal de un número racional Aproximación decimal de un número irracional	Se usa para proporcionar la escritura finita en el caso en que es posible, o argumentar que no existe. Al dar una aproximación para 1/3. Al dar una aproximación de π.
PROPIEDADES	
Todo número decimal se puede representar mediante una escritura decimal finita. P1: 1/5 = 0,2 P2: 1/3 no es posible P3: π no es posible P4: Todo número real se puede aproximar mediante un número decimal.	Respuestas a las cuestiones a) b) y c) Aproximaciones decimales para 1/3 y π
ARGUMENTOS	
A1: En efecto, $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=0{,}2$ A2: 1/3 es la expresión fraccionaria irreducible de un racional cuyo denominador contiene el factor primo 3; luego no es posible hallar una fracción decimal equivalente A3: No es posible porque π es un número irracional A4: Una aproximación para 1/3 puede ser: $\frac{1}{3} \cong 0{,}333$ Una aproximación para π puede ser: $\pi \cong 3{,}1416$	Justificación de las respuestas Justifica la propiedad P4

Tal como hemos señalado, en el estudio exploratorio realizado en el Capítulo 3, hemos detectado diversos conflictos en torno a la relación entre número decimal y expresión decimal de un número. Como consecuencia de este estudio, en Konic, Godino, Castro y Rivas, (2007), hemos puesto en evidencia esta situación. En relación a esta problemática, en el post-test realizado a estos mismos alumnos, siguieron manifestándose muchas dificultades para poder expresar esta distinción.

Del posterior tratamiento de esta problemática en un espacio curricular de la carrera, se esperaba si no revertir, al menos percibir mejoras sensibles sobre esta cuestión. No obstante, y observando el desarrollo de la configuración epistémica, pensamos que ciertos conflictos podían ser bastante persistentes. Entre ellos, consideramos la posibilidad de reaparición de los siguientes:

- La expresión decimal finita de 1/3 es $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$
- 1/3 no tiene expresión decimal finita, pero es un número decimal
- $\frac{1}{3} = 0,3$ o $\frac{1}{3} = 0,333$, etc.
- π es un número decimal, porque $\pi = 3.14$, o $\pi = 3.1415$, etc.

5.7.7. Análisis del Ítem 7

Tal como hemos justificado en el apartado 5.6., del presente capítulo, la incorporación de éste ítem persigue el propósito de evaluar, previamente a la propiedad de densidad, los significados personales que manifiestan los estudiantes para profesor, en relación a propiedades que son válidas para los números naturales y no para los racionales. Tal es el caso de la relación sucesor en Z (enteros), y que las investigaciones ya han demostrado resultan un obstáculo para la concepción de nuevas propiedades en ámbitos numéricos más amplios (Brousseau, Brousseau y Warfield, 2007; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004; Moreno, Hernández y Socas, 2004; Ruiz, 2004). Los contenidos centrales y secundarios que se evalúan son los siguientes:

El *Contenido 8*: Ordenación de números decimales, y el *Contenido 9*: Densidad de los decimales en el conjunto de los racionales son los que se hallan presentes en este ítem.

Se trata entonces de evaluar de manera particular, de qué modo se hacen presentes los tipos de *Conocimiento común del contenido y Conocimiento del contenido y estudiantes* vinculados a la propiedad sucesor.

Por lo tanto el elemento de significado en que se centra el ítem es el de una propiedad, que como ya hemos anticipado, se trata del análisis de validez de la propiedad sucesor en otros dominios numéricos.

Recordamos que, este ítem se enunció del siguiente modo:

La siguiente cuestión corresponde a una prueba realizada por una maestra para evaluar el conocimiento de sus alumnos acerca de los números decimales.

Sabemos que el número siguiente del número natural 54 es el 55.

a) *¿Existe un número natural que siga inmediatamente a 23,5? ¿Cuál, o cuales serían?*

b) *¿Existe un número decimal que siga inmediatamente a 32,13? ¿Cuál, o cuales serían?*

Tres alumnos respondieron de la siguiente manera:

Nicolás ha respondido: el 24 y el 32,14; Ruth ha respondido: el 24 y el 32,131; Florencio ha respondido: el 23 y el 32,12.

¿Son correctas las respuestas de los alumnos? Justifica tu respuesta.

Esperamos que el estudiante proporcione una respuesta similar a la siguiente:

- El número natural que sigue inmediatamente a 23,5 es 24.
- No existe un número decimal que siga inmediatamente a otro, dado que entre dos decimales siempre existe otro decimal.

Por lo tanto:

Nicolás y Ruth han respondido bien para el número natural que le sigue a 23,5; y mal para el decimal que le sigue a 32,13.

Florencio ha respondido mal en ambas situaciones.

En la tabla 5.12 analizamos con detalle los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.12. *Configuración de objetos y significados del ítem 7.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
El número siguiente del número natural 54 es el 55 a) ¿Existe un número natural que siga inmediatamente a 23,5? ¿Cuál, o cuáles serían? b) ¿Existe un número decimal que siga inmediatamente a 32,13? ¿Cuál, o cuáles serían? ¿Son correctas las respuestas de los alumnos?	Aplicación de la propiedad sucesor de N. Concepto de sucesor de un número natural Procedimiento para hallar el sucesor de un número natural (conteo) Propiedad de densidad del conjunto de números decimales (no existe sucesor) Valoración del significado personal de “siguiente” de un número en los niños, de parte del fututo profesor.
CONCEPTOS	
Número natural Número decimal Ordenación de números naturales	Particularizado en 54, 55, 24 Particularizado en 23,5, 32,13 Particularizado en 55 es el sucesor de 54
PROCEDIMIENTOS	
Cálculo del siguiente a un número natural mediante recitado de la serie numérica	Usado para dar el número natural siguiente a 23,5

PROPIEDADES	
P1: Todo número natural tiene un siguiente P2: Nicolás y Ruth han respondido bien para el número natural que le sigue a 23,5; P3: Nicolás y Ruth han respondido mal para el decimal que le sigue a 32,13. P4: Florencio ha respondido mal para ambos números	Propiedad que se usa en el ejemplo: el siguiente de 54 es 55. Proposiciones que responden a las cuestiones planteadas
ARGUMENTOS	
A1: Axioma que define los números naturales A2, A3 y A4: Porque entre cada par de números decimales existe siempre otro decimal	Justificación de las respuestas

Toda la tarea gira en torno a valorar y aplicar la noción "siguiente de un número", es decir determinar el ámbito de aplicación de la propiedad sucesor. Por lo tanto los conflictos esperados están relacionados con los conocimientos previos que tienen los futuros profesores (y/o los niños), sobre los números naturales. Describimos los siguientes:

- El sucesor de un número decimal es un número decimal
- No existe un número natural que le siga a un número decimal
- Inconsistencia/s entre la/s respuesta/s dadas por el futuro profesor y la valoración que éstos hacen sobre las respuestas de los niños.

5.7.8 Análisis del Ítem 8

Como mencionábamos, en el ítem anterior, los números naturales juegan un rol esencial para la adquisición de nuevas propiedades algebraicas en los números racionales. La idea de discreto, es una noción previa fundamental que limita a los estudiantes la comprensión de la densidad (Ruiz, 2004; Vamvakoussi y Vosniadou, 2004). Por esta razón, el presente ítem lleva como objetivo indagar específicamente esta cuestión. Los contenidos seleccionados son el *Contenido 9.* Densidad de los decimales en el conjunto de los racionales y el *Contenido 13*: Justificación de propiedades y procedimientos. En este caso, el elemento de significado central que pretendemos evaluar es una propiedad: la densidad de D (decimales) en Q (racionales).

Dado que los libros de textos constituyen uno de los primeros y más cercanos referentes, tanto para el alumno como para el profesor, el ítem ha sido extraído de un libro de texto para niños de 4º curso de la escuela primaria. En consecuencia, consideramos que también un análisis, desde la perspectiva del tipo de situaciones que se ofrecen, en dichas *instituciones,* resulta importante para intentar dilucidar otros posibles aspectos vinculados a las dificultades mencionadas, como puede ser precisamente la elección de una tarea inadecuada.

La tarea se propone en el texto de la siguiente manera:

Una maestra propuso el siguiente problema a sus alumnos: Sonia ganó el concurso de salto de longitud. Saltó más de 4,12 metros y menos de 4,16 metros. ¿Cuáles pueden ser las marcas de Sonia? a) Resuelve el problema. b) A la primera pregunta del problema anterior, cuatro alumnos dieron las siguientes respuestas: Luís: *4,12m; 4,13m; 4,14m; 4,15m y 4,16m.* José: *Todas las medidas comprendidas entre 4,12 m y 4,16 m* Ana: *4,13m; 4,14m y 4,15m* ¿Han respondido todos bien? Justifica tu respuesta

Presentamos aquí, una solución para el problema planteado:

a) Las marcas de Sonia pueden tomar cualquier valor racional entre 4,12 y 4,16, y por tanto el conjunto de soluciones tiene cardinal infinito. b) Solo José ha respondido bien; esta respuesta coincide con la dada en el apartado anterior. Luis responde mal por dos razones. Una al considerar las medidas 4,12m y 4,16m ya que están excluidas del problema, y la otra al no considerar que entre dos números decimales siempre se puede encontrar otro número decimal. Ana también responde mal, por la misma razón que Luis al no considerar que entre dos números decimales hay otro, aunque si excluye las medidas que corresponden a los extremos del intervalo.

En la tabla 5.13, analizamos con detalle los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.13. *Configuración de objetos y significados del ítem 8.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
Sonia saltó más de 4,12 metros y menos de 4,16 metros. ¿Cuáles pueden ser las marcas de Sonia? Resuelve el problema Los alumnos… ¿Han respondido todos bien?	Números decimales, expresados en forma decimal Intervalo abierto de números reales (números mayores que 4,12 y menores que 4,16) Evaluar el conocimiento de la propiedad densidad Evaluar la interpretación que el futuro profesor hace sobre las respuestas de los niños.
CONCEPTOS	
Número decimal Medida de longitud	Valor numérico de medidas de longitud Medida fraccionaria con unidad principal el metro, 4,12 metros, …

Intervalo abierto de números reales Infinito actual	(4.12, 4.16) El cardinal del intervalo abierto es infinito
PROCEDIMIENTOS	
PROPIEDADES	
Densidad de D en Q: $\forall a \; y \; b \in D, \exists \, c \; \in D \vert \, a < c < b$ P1: La marca de Sonia puede ser cualquier medida comprendida entre 4,12 m y 4,16 m. P2: Los demás alumnos han respondido mal.	Respuestas a las cuestiones a) y b)
ARGUMENTOS	
A1: Suponiendo que la unidad de medida puede ser el milímetro u otra menor de cualquier longitud, entonces el valor numérico de la medida puede ser cualquier número real del intervalo (4.12, 4.16)	Justificación de las respuestas

La densidad es una propiedad topológica y por tanto, la recta numérica es un recurso adecuado para generar la idea de insuficiencia de los números naturales para completar cada punto de la recta (Ruiz, 2004). No obstante, construida tal propiedad, para evaluar su concepción hemos seleccionado un problema contextualizado, y adecuado a niños de escolaridad primaria. Precisamente lo que se quiere medir es el alcance de la reflexión del futuro profesor. En tal sentido se espera encontrar un *conocimiento ampliado* sobre las propiedades de los números que gobierne en la respuesta al problema. Se espera, que el futuro profesor muestre las posibilidades de respuestas ligadas al conocimiento de las propiedades de los números. Es decir, si las respuestas están ligadas al contexto, que se ponga en evidencia el reconocimiento de la existencia de todas las posibilidades (ligadas al contexto intramatemático). Asimismo, en la interpretación y justificación de las respuestas de los niños, poder reconocer los conflictos que algunos de ellos manifiestan ligados a un significado lejano del pretendido. Por tanto, la configuración epistémica nos permite anticipar la posibilidad del surgimiento de los conflictos que enunciamos a continuación.

- Exhibir un conjunto finito de valores como solución al problema.
- Mostrar un conjunto infinito de valores pero “limitado” (sub-conjuntos infinitos del intervalo dado)
- Cualquier medida de longitud entre 4,12 m y 4,16 es equivalente al conjunto {4,13m, 4,14m ,4,15m}
- Las tres respuestas de los niños, son equivalentes o posibles.

- Inconsistencia/s entre la/s respuesta/s dadas por el futuro profesor y la valoración que éstos hacen sobre las respuestas de los niños.

5.7.9. Análisis del Ítem 9

Hill, Ball y Schilling (2008), resaltan la importancia que tiene analizar qué conocimientos tienen los estudiantes para explicar conceptos y qué modelos usan para poder facilitar la comprensión de los estudiantes.

En este caso, hemos considerado la prueba como una de las cuestiones importantes que debe desarrollar un futuro profesor e incorporar en el bagaje de su formación. En tal sentido, la incorporación de este ítem lleva como objetivo central la justificación de un algoritmo, esto es, el algoritmo de la multiplicación de números decimales y por ende el elemento de significado central es de tipo argumentativo.

Entendemos la prueba o justificación, en el contexto de la enseñanza y aprendizaje elemental y/o obligatoria, desde una perspectiva comprensiva (Harel y Sowder, 2007), puesto que incorpora diversos factores: matemáticos, histórico-epistemológicos, cognitivo, sociológico e instruccional. Desde esta posición, la prueba es interpretada subjetivamente; una prueba son justificaciones de proposiciones establecidas por una persona o una comunidad. En este marco incorporamos "el esquema de prueba" como referente para el análisis de lo que en el cuestionario solicitamos bajo denominaciones como: "justificación", "prueba", "argumentación", etc.

En este caso, el contenido específico que se pretende evaluar es el *10b).* Algoritmos y sus justificaciones, dentro del *Contenido general 10.* Operaciones con números decimales: adición y sustracción; multiplicación y división.

El ítem ha sido presentado de la siguiente manera:

En un libro de 6º curso de primaria encontramos la siguiente regla, la cual viene ilustrada con un ejemplo, pero no se justifica: *"Para multiplicar dos números decimales, los multiplicamos sin tener en cuenta las comas y en el resultado separamos con una coma, desde la derecha, tantas cifras como decimales tienen entre los factores"* Un alumno quiere saber porqué se hace de esa manera. ¿Cómo justificarías esta regla? Puedes usar un ejemplo para describir la justificación.

Una resolución para el mismo es la que mostramos a continuación:

Tomemos por ejemplo la siguiente multiplicación: 2,35 x 1,4 Utilizando el algoritmo clásico disponemos los factores como si fuesen enteros y luego

realizamos la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 235 \\ \underline{\times\ 14} \\ 940 \\ \underline{235} \\ 3290 \end{array}$$

como el primer factor tiene dos cifras decimales y el segundo una, el producto tendrá tres decimales, es decir:

2,35 x 1,4 = 3,290

Justificación 1:
Multiplicamos los números dados sin las comas porque son los numeradores de las fracciones decimales correspondientes y para multiplicar dichas fracciones decimales se multiplican los numeradores y denominadores entre si, los cuales son números naturales, la fracción resultante es decimal; por tanto su expresión decimal se obtiene dividiendo por la unidad seguida de ceros que indica el denominador.

$$2{,}35 \text{ x } 1{,}4 = \frac{235}{100} \text{ x } \frac{14}{10} = \frac{3290}{1000} = 3{,}290$$

Justificación 2:
2,35 son 235 centésimas; 1,4 son 14 décimas. Al multiplicar 235 centésimas por 14 décimas son 3290 milésimas. Pero 3290 milésimas es igual a 3 unidades y 290 milésimas, o sea en notación decimal 3,290.

En la tabla 5.14, analizamos con detalle los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.14. *Configuración de objetos y significados del ítem 9.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
"Para multiplicar dos números decimales, los multiplicamos sin tener en cuenta las comas y en el resultado separamos con una coma, desde la derecha, tantas cifras como decimales tienen entre los factores"	Procedimiento para multiplicar dos números decimales
Un alumno quiere saber porque se hace de esa manera	Elección de una justificación que mejore la comprensión del alumno
¿Cómo justificarías esta regla?	Argumento, basado en tipos de objetos matemáticos, que justifique el procedimiento
Puedes usar un ejemplo para describir la justificación	Particularización de los factores de la multiplicación, a los fines de facilitar la descripción de la justificación
CONCEPTOS	
Números decimales Expresión decimal (valor posicional de las cifras) Expresión fraccionaria Multiplicación de decimales Multiplicación de fracciones	Particularizados en el ejemplo usado para describir y justificar el procedimiento rutinario del texto: 2,35 x 1,4 = 3,290
PROCEDIMIENTOS	
T1: Convertir las expresiones decimales en fracciones decimales; multiplicar las fracciones; expresar las fracción producto en forma decimal.	Usado en la justificación 1 del algoritmo rutinario
T2: Interpretar cada número decimal como décimas,	Usado en la justificación 2 del algoritmo

centésimas, milésimas, etc., según el número de dígitos detrás de la coma decimal, obteniendo un número entero de dichas unidades decimales. Multiplicar los números naturales obtenidos; interpretar el resultado como número decimal. T3: Algoritmos de multiplicar fracciones y números naturales	rutinario Usados para multiplicar fracciones y hallar el producto de los numeradores de las fracciones
PROPIEDADES	
Propiedades aritméticas en que se basa el algoritmo de multiplicar números naturales	Usadas al aplicar las técnicas
ARGUMENTOS	
A1: El procedimiento es válido porque usa expresiones equivalentes de los números decimales y se siguen las reglas para multiplicar fracciones y números naturales. A2: El procedimiento es válido porque expresa los factores en términos de décimas, centésimas y/o milésimas y se opera con éstas (elementos naturales de la expresión decimal de un número). A3: Los procedimientos son válidos porque se reducen a algoritmos con números naturales	Usado para justificar el procedimiento T1 Usado para justificar el procedimiento T2 Usadas para justificar T3

La argumentación es el foco de la tarea y la configuración epistémica del ítem nos muestra la diversidad y multiplicidad de objetos que emergen de su resolución. Si bien, dichos objetos pueden considerarse elementales y presentes en cualquier diseño curricular, el significado que se le otorga a la justificación no es tan evidente como *contenido curricular,* y no suele estar presente en la formación efectiva del futuro profesor. Tal como señala Ball (2003), es necesario trascender la comprensión tácita.
En este caso, consideramos que es posible la aparición de los siguientes conflictos:

- Justificar en base a la bondad de la técnica (no la técnica)
- Parafrasear la regla o parte de ella
- Explicar la regla con un ejemplo
- Afirmar que el "rito" obliga a hacerlo así
- Mostrar un ejemplo

5.7.10. *Análisis del Ítem 10*

Tal como anticipáramos en la fundamentación de éste ítem, nos hemos apoyado en la investigación de O'Connor (2001) para su inclusión en el cuestionario. Recordamos que ha sido redactado del siguiente modo:

a) Como sabes el número racional 2/5 se puede representar en forma decimal: 2/5=0,4. ¿Se puede representar, en forma decimal, **cualquier** número racional dado como una fracción? Distingue los casos posibles y justifica.

b) Como sabes el número racional 0,7 se puede escribir en forma fraccionaria (0,7 = 7/10) se puede escribir en forma fraccionaria **cualquier** número expresado en forma decimal? Distingue los casos posibles y justifica la respuesta.

c) Dada la expresión fraccionaria irreducible de un número racional, ¿Que condición debe cumplir el denominador de dicha fracción para que represente a un número decimal?

El propósito esencial fue evaluar el *Contenido5:* Distinción entre número decimal y expresión decimal de un número. No obstante, tal como se ha planteado el ítem, requiere del estudiante una sólida comprensión del concepto de número racional y de sus formas de representación (decimal y fraccionaria) y de las relaciones entre ellas.

En tal sentido, en cada sub-ítem se evalúan contenidos específicos. Los tres sub-ítems evalúan el *Contenido 5a):* Expresiones decimales finitas (como resultado de divisiones enteras con resto 0) y el *Contenido 13*: Justificación de propiedades y procedimientos. Los sub-ítems 10a) y 10b), además, evalúan el *Contenido 5c*: Expresiones decimales periódicas puras y mixtas. (Casos especiales: períodos 0 y 9). Mientras que, el sub-ítem 10b), también evalúa el *Contenido 5d):* Expresiones decimales no periódicas (números irracionales).

La siguiente es una resolución para los mencionados ítems:

a) Si el número es racional siempre se puede encontrar una expresión decimal de él, basta con dividir numerador por denominador y se obtendrá una expresión decimal finita, o periódica pura o periódica mixta.

b) Si la forma decimal en que está expresado el número es finita, periódica pura o periódica mixta entonces se puede encontrar una fracción generatriz del número. Si la expresión decimal es de otro tipo corresponderá a un número irracional y por lo tanto no se podrá expresar como fracción.

c) La descomposición en factores primos del denominador debe tener solo los factores 2 o 5 o de algunas de sus potencias.

En la tabla 5.15, analizamos con detalle los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.15. *Configuración de objetos y significados del ítem 10.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
¿Se puede representar, en forma decimal, cualquier número racional dado como una fracción? Distingue los casos posibles y	Concepto de número racional (cualquiera) Expresión decimal de un número racional Expresión fraccionaria de un número racional

justifica. ¿Se puede escribir en forma fraccionaria cualquier número expresado en forma decimal? Distingue los casos posibles y justifica la respuesta. Dada la expresión fraccionaria irreducible de un número racional, ¿Que condición debe cumplir el denominador de dicha fracción para que represente a un número decimal?	Conversión de forma fraccionaria a decimal Concepto de número real (cualquiera) Expresión aproximada decimal de un número real Expresión fraccionaria de un número racional Conversión de forma decimal a fraccionaria Teorema de caracterización de los números decimales a partir de su expresión fraccionaria
CONCEPTOS	
Número racional Número real Expresión decimal de un número real Expresión fraccionaria de un número racional Fracción generatriz de un racional	Usados en su formulación general. Los ejemplos de racionales dados se dan para ayudar a comprender las cuestiones.
PROCEDIMIENTOS	
Conversión de forma fraccionaria a decimal: división del numerador entre el denominador Conversión de forma decimal a fraccionaria: cálculo de la fracción generatriz	Se usa en el apartado a) Se usa en el apartado b)
PROPIEDADES	
P1: Cualquier número racional puede ser expresado en forma decimal	Respuesta al apartado a)
P2: La expresión decimal finita o periódica de un número es expresable mediante una fracción.	Condición necesaria y suficiente para garantizar la escritura fraccionaria en el apartado b)
P3: La descomposición en factores primos del denominador debe tener solo los factores 2 o 5 o de algunas de sus potencias.	Respuesta al apartado c)
ARGUMENTOS	
A1: Si un número es racional, al dividir numerador por denominador se obtiene una expresión decimal finita o periódica.	Justifica P1
A2: Si la expresión decimal de un número es finita, proviene de una fracción decimal. Si es periódica, se puede hallar la fracción generatriz que la representa.	Justifica P2
A3: Si el denominador tiene sólo los factores 2, 5 o ambos, podemos obtener una potencia de 10 en el denominador multiplicando numerador y denominador de dicha fracción por una potencia conveniente de 2 y/ o de 5. El teorema recíproco se prueba por reducción al absurdo.	Justifica P3

En la presentación del ítem, hemos anticipado que el objetivo era evaluar el *conocimiento especializado del contenido:* Número y expresión decimal de un número. La resolución de este ítem requiere de un análisis matemático profundo de los contenidos involucrados, en el que se ponen en juego particularizaciones, generalizaciones, delimitaciones de validez, argumentaciones, contraejemplos. Este proceso, debiera formar parte del bagaje matemático de un futuro profesor, a los fines de poder incidir en el análisis, selección y/o restructuración de una tarea para los niños.

De hecho, la configuración muestra la complejidad epistémica de este ítem, tanto en objetos (conjuntos numéricos, propiedades, representaciones, conversiones, argumentos), como en la multiplicidad de significados, tal como hemos mencionado. Por tanto, de la resolución de los futuros profesores, se esperan encontrar los siguientes conflictos:

- Solo se pueden representar en forma decimal las fracciones que tienen numerador menor que el denominador.
- Sólo las expresiones decimales finitas pueden ser expresadas como fracción.
- Todos los números expresados en forma decimal se pueden escribir como fracción.
- Sólo las expresiones decimales finitas pueden ser expresadas como fracción.
- Los números enteros no pueden ser representados ni como decimal, ni como fracción.
- Una fracción es decimal si el denominador es 10 ó una potencia de 10.
- Para que una fracción sea decimal, el denominador debe ser mayor que el numerador.

5.7.11. Análisis del Ítem 11

Con este ítem se evalúan dos tipos de conocimientos que aquí se presentan estrechamente vinculados: *conocimiento especializado del contenido y conocimiento del contenido y estudiantes.* El propósito del **ítem 11** es, precisamente, evaluar la distinción entre *número decimal y expresión decimal de un número.* Cuestión que pone en juego además, de manera explícita, la precisión dado el contexto y el tipo de datos que se proporcionan en la situación.

Específicamente se evalúa el *Contenido 5*: Distinción entre número decimal y expresión decimal de un número, y en particular el *Contenido 5c*: Expresiones decimales periódicas, puras y mixtas. También, el *Contenido 11*: Aproximación decimal de números racionales. Redondeo y el *Contenido 13*: Justificación de propiedades y procedimientos.

El significado global de este ítem se halla centrado en objetos conceptuales (Expresión decimal de un número, número decimal y número racional), y de manera secundaria, en objetos procedimentales (operaciones, redondeo).

El ítem viene redactado del siguiente modo:

Un maestro propone a sus estudiantes el siguiente problema: La madre de Lucía quiere

hacerse un vestido. Para hacerlo compra un tercio de metro de tela y la mitad de un tercio de metro de tela. Si el metro de dicha tela cuesta 10 euros, ¿Cuánto le costó la tela a la madre de Lucía? Isa y José los resolvieron así: *Isa:* $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5$ *; 0,5 x 10 = 5; la tela costó 5 euros.* *José:* $\frac{1}{3}=0{,}33$*; 0,33:2 = 0,16; 0,33 + 0,16 = 0,49; 0,49 x 10 = 4,9; la tela costó 4,9 euros.* Explica porqué Isa y José obtienen resultados diferentes.

La siguiente es una resolución y justificación del problema planteado:

Isa obtiene un resultado exacto porque utilizo para resolver el problema el *número* $\frac{1}{3}$. Mientras que José utilizó una *aproximación decimal del número* $\frac{1}{3}$, esto es 0,33 la cual ha sido redondeada a las centésimas.

En la tabla 5.16 analizamos con detalle los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.16. *Configuración de objetos y significados del ítem 11.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
… compra un tercio de metro de tela y la mitad de un tercio de metro de tela. Si el metro de dicha tela cuesta 10 euros, ¿Cuánto le costó la tela a la madre de Lucía?	Concepto de fracción en el contexto de medida Operaciones con fracción (mitad, suma) Magnitudes longitud y coste (unitario y total)
Isa: $\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5$ *;* *0,5 x 10 = 5; la tela costó 5 euros*	Procedimiento exacto de cálculo del coste
José: $\frac{1}{3}=0{,}33$*; 0,33:2 = 0,16; 0,33 + 0,16 = 0,49; 0,49 x 10 = 4,9; la tela costó 4,9 euros.*	Procedimiento aproximado de cálculo del coste
Explica porqué Isa y José obtienen resultados diferentes	Solicitud de argumentos que permitan valorar: comprensión conceptual y comprensión de la posibilidad de ambas soluciones de parte de los

	niños.
CONCEPTOS	
Números decimales; expresiones decimal y fraccionaria Fracción; número racional División y suma de fracción Magnitud, cantidades, unidades de medida y medidas Aproximación decimal de 1/3 Error de medida	Particularizados en los números y datos que intervienen en el enunciado Usado en el procedimiento de José Usado en la explicación de la diferencia de resultados
PROCEDIMIENTOS	
División y suma de fracciones División y suma de números decimales Multiplicación de racionales (decimales) por el natural 10.	Usados en el cálculo del coste total
PROPIEDADES	
La diferencia de resultados se debe a que José hace los cálculos usando una aproximación del racional 1/3 por el decimal 0,33, mientras que Isa opera con el racional exacto	Solución de la tarea
ARGUMENTOS	
La explicación es correcta porque al aproximar 1/3 por 0,33 se comete un error de redondeo	Justificación de la solución.

Sabemos que tanto la precisión como la aproximación son temas de uso frecuente en la vida cotidiana, además reclamados curricularmente, como ya lo anticipamos. No obstante, estos conceptos resultan conflictivos aun cuando son usados en contextos conocidos y con datos familiares. El problema radica en que, generalmente, no se toma en cuenta la complejidad epistémica de los objetos involucrados. La diferencia conceptual entre un número y una aproximación cualquiera de él, se tratan como identidades. Como señala Nowlin (2007), los profesores no saben cuándo y cómo deben usarse las aproximaciones, más aún muchas veces no se percibe que se está tratando con aproximaciones. En tal sentido, es posible que en la resolución de este ítem se presenten al menos los siguientes conflictos:

- No considerar que, el uso de $\frac{1}{3} = 0.33$ es la causa de la diferencia en los resultados obtenidos.
- Afirmar que resolver el problema por caminos o vías diferentes produce resultados diferentes (dependencia del proceso e independencia de cómo son utilizados los datos del problema)

6.7.12. Análisis del Ítem 12

Como ya hemos fundamentado, parte de este ítem ha sido seleccionado de una investigación realizada por Zasquis y Sirotic (2004). En esta instancia, evaluamos la distinción entre *número racional y número irracional.* Retomamos la conceptualización de los distintos tipos de números, como así también el tema de la representación, dado que lo consideramos importante para aportar significado al número decimal. La concepción de número irracional *amplia* el significado de los números racionales, aportando a la comprensión de nuevas estructuras, especialmente en lo referente a expresiones decimales y aproximaciones decimales de estos números. Por tanto: el sub-ítem 12 a) evalúa el *Contenido 5d).* Expresiones decimales no periódicas (números irracionales). El sub-ítem 12b) evalúa el *Contenido 11.* Aproximación decimal de números racionales. Redondeo. Mientras que, con el sub-ítem 12c) se evalúa el *Contenido 2.* Valor posicional de las cifras; parte entera, parte decimal de una expresión decimal, y el *Contenido 8.* Ordenación de números decimales (evalúan el 12c)).

Este ítem, en su totalidad, evalúa el *Contenido 13.* Justificación de propiedades y procedimientos.

a) El número: 0,12122122212…. ¿es racional o irracional? Justifica la respuesta.

b) Consideremos el número $\frac{53}{83}$. Al hacer la división la calculadora muestra 0.63855421687.

¿Es $\frac{53}{83}$ un número racional o irracional? Justifica la respuesta.

c) Una expresión decimal aproximada de π es 3,141592. Escribe una expresión decimal aproximada de π cuyo error sea menor que 1 milésima. Justifica la respuesta.

A continuación presentamos una solución para cada sub-ítem que compone el ítem general, la cual podemos interpretar como las prácticas operativas y discursivas que un sujeto experto realizaría para resolver la tarea requerida.

a) En el número 0.12122122212…., si bien se observa cierto patrón de repetición en sus dígitos (la incorporación sucesiva de un 2 entre dos 1), no es el tipo de patrón que corresponde a la periodicidad de un número racional. Por lo tanto el número es irracional.

b) Como los dígitos que permite visualizar la calculadora son limitados, no se puede determinar el tipo de número que es por "la forma en que esta expresada la parte decimal". Basta con mirar la forma fraccionaria para garantizar que se trata de un número racional

c) Si tomamos 3,141 la diferencia con π es 0,000592……; este número es menor que 0,0006, o sea, menor que 1/1000. Por lo tanto 3,141 es una expresión decimal aproximada de π.

En la tabla 5.17, analizamos con detalle los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.17. *Configuración de objetos y significados del ítem 12.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
a) El número: 0,12122122212…. ¿es racional o irracional? Justifica la respuesta. b) Consideremos el número $\frac{53}{83}$. Al hacer la división la calculadora muestra 0.63855421687. ¿Es $\frac{53}{83}$ un número racional o irracional? Justifica la respuesta. c) Una expresión decimal aproximada de π es 3,141592. Escribe una expresión decimal aproximada de π cuyo error sea menor que 1 milésima. Justifica la respuesta.	Conceptos de número racional e irracional Requiere el enunciado de tres proposiciones y sus justificaciones Aproximación decimal de un racional Interpretación de los dígitos de la expresión decimal, exhibidos en la calculadora. Redondeo, y control del error en una aproximación decimal para π.
CONCEPTOS	
Número racional Número irracional Expresiones periódicas y no periódicas de racionales e irracionales. Ordenación de decimales. Error de redondeo en una aproximación decimal.	Particularizado en el racional 53/83 Particularizados mediante una expresión decimal no periódica (0,12122122212….) y en π
PROCEDIMIENTOS	
Reconocimiento de un patrón en la secuencia de una expresión decimal no periódica. Aplicación de la regla que define número racional Cálculo de la diferencia entre dos números decimales, redondeo y comparación de números	Se usan en justificación de las soluciones
PROPIEDADES	
P1: El número: 0,12122122212…. , es irracional P2: El número $\frac{53}{83}$ es racional P3: 3,141, una aproximación que cumple con la condición pedida.	Respuestas a las cuestiones
ARGUMENTOS	
A1: Porque en el patrón de repetición de los dígitos decimales no hay periodicidad A2: Porque viene expresado mediante una fracción A3: Porque la diferencia con 3,141592 (una aproximación más exacta) es 0,000592, menor que una milésima.	Justificación deductiva de las proposiciones basadas en las reglas que definen los números racionales (irracionales), y las aproximaciones decimales.

Evidentemente poner en juego ciertos números irracionales en situaciones problemas de la escolaridad primaria, en principio, no genera dificultad dado que en los cálculos se utilizan aproximaciones. El problema reside en que en la mayoría de los casos, dichas aproximaciones se convierten, en el futuro, en identidades numéricas erróneas. Un caso particular, y de aparición temprana es el número π. Si bien, no se puede evitar su uso, ni pretender que sea conceptualizado como número irracional, consideramos que el futuro profesor debe tener el conocimiento necesario que le permita incorporar y controlar de manera progresiva su significado (Konic, 2005). Se trata de un *conocimiento amplio* y *especializado* que le permitirá abordar tareas de enseñanza con idoneidad y evitar futuros obstáculos didácticos en la concepción de estos números como irracionales.

Los objetos y significados que se desprenden de la configuración epistémica de éste ítem, ponen en evidencia que, una "mirada superficial" de la expresión decimal o la aproximación decimal de un número no resulta suficiente para determinar el carácter del número. Los distintos tipos de objetos y significados atribuidos, revelan la necesidad de manejo de propiedades y caracterizaciones que van más allá de la mera observación de una "forma". De otro modo, se puede esperar la aparición de conflictos como los siguientes:

- El número 0,12122122212…. es racional porque hay repeticiones en la parte decimal.
- 0,12122122212…. es irracional porque tiene infinitas cifras decimales.
- $\frac{53}{83}$ es racional porque su expresión decimal es finita. (Resultado de la calculadora)
- $\frac{53}{83}$ es irracional por que la parte decimal no es periódica.
- No se justifica que la aproximación dada para π, cumple con la condición solicitada.
- La justificación dada para la cota es incorrecta.

5.7.13. Análisis del Ítem 13

Con este ítem, nos hemos propuesto examinar la capacidad de los estudiantes de otorgar significado contextual a un algoritmo, como es el caso de la multiplicación y división de números decimales. Usualmente se plantea una operación abstracta, se aplica un algoritmo que la resuelva, pero resulta poco frecuente solicitar la elaboración de una situación que requiera de dicho algoritmo.

Teniendo presente estas cuestiones y las ya especificadas en la justificación de la introducción del ítem, es que elaboramos el siguiente:

a)	Enuncia un problema de la vida cotidiana, en un contexto de uso de porcentajes, que se resuelva con la siguiente operación de multiplicación de dos números decimales: 2,255 x 1,7.
b)	Enuncia un problema de la vida cotidiana que se resuelva con la siguiente operación de división de dos números decimales: 5,76: 1,8

Una resolución para este ítem es la que proponemos seguidamente, la cual podemos interpretar como las prácticas operativas y discursivas que un sujeto experto realizaría para resolver la tarea requerida:

a)	Un recipiente con aceite pesa 2kg y 255 gs. Para promocionar este producto se lo incrementa en un 70%, ¿Cuánto pesa el producto nuevo?
b)	Se tiene un rollo de hilo de 5,76 m y se cortan trozos de 1 m y 80 cm. ¿Cuántos trozos de hilo se han obtenido y cuanto hilo ha sobrado?

El ítem ha sido elaborado para evaluar, de manera específica, el *Contenido 10 a).* Operaciones con números decimales: significado de las operaciones, como así también

el *Contenido 5b).* Expresiones decimales finitas (como medio de expresión de medidas complejas).

En la tabla 5.18 analizamos con detalle los objetos centrales y significados puestos en juego en el enunciado y solución de este ítem.

Tabla 5.18. *Configuración de objetos y significados del ítem 13.*

Tipos de objetos	Significados
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS	
Enuncia un problema de la vida cotidiana, en un contexto de uso de porcentajes, que se resuelva con la siguiente operación de multiplicación de dos números decimales: 2,255 x 1,7. Enuncia un problema de la vida cotidiana que se resuelva con la siguiente operación de división de dos números decimales: 5,76: 1,8	Problema de la vida cotidiana (magnitudes, cantidades y medidas) Concepto de porcentaje Números decimales Multiplicando y multiplicador Dividendo y divisor
CONCEPTOS	
Número decimal Multiplicando, multiplicador Porcentaje Dividendo, divisor Magnitudes, cantidades y medidas	Particularizados en los números decimales dados, y en las magnitudes seleccionadas (peso para la multiplicación; longitud para la división)
PROCEDIMIENTOS	

- Elegir para el multiplicando un contexto de medida de uso de decimales (peso), con unidades enteras y fraccionarias (2kg, 255gs) - Interpretar el multiplicador como una acción de incremento porcentual de la cantidad - Elegir para dividendo y divisor un contexto de medida de uso de decimales (longitud), con unidades entera y fraccionarias (5,76m y, 1m 80 cm, respectivamente)	Se usa para enunciar los problemas requeridos
PROPIEDADES	
P1: (enunciado para la multiplicación) P2: (enunciado para la división)	Enunciados requeridos
ARGUMENTOS	
A1: Porque los valores numéricos de las medidas corresponden a los decimales dados, se tiene en cuenta la condición porcentual y la operación requerida es la multiplicación de dichos números. A2: Porque los valores numéricos de las medidas corresponden a los decimales dados y la operación requerida es la división de dichos números.	Justificación de los enunciados

Chick (2003), en su investigación con futuros profesores, ya señala las dificultades que tienen para relacionar las fracciones y los porcentajes. Por su parte, Lachance y Confrey (2002), sostienen que para dar sentido a la notación decimal, es necesario que los estudiantes conozcan otros conceptos previos, como por ejemplo el de razón. Pero además, se requiere fluidez en el manejo de las relaciones entre representaciones y usos de porcentajes, decimales y fracciones.

Dado que, nuestro ítem contempla este tipo de objetos y los significados que se le atribuyen en el contexto requieren de esa fluidez en las relaciones, es que podemos describir algunos conflictos esperados en la resolución del ítem:

- Considerar que la condición porcentaje carece de sentido o tiene poco sentido en la situación.
- No tomar en cuenta la condición porcentaje en la redacción del problema.
- El problema se resuelve con otra operación diferente a la dada.
- Se utilizan unidades de medidas o cantidades inadecuadas para los objetos tratados.

Cabe destacar que si bien cada ítem ha sido elaborado y/o seleccionado para evaluar un objetivo/contenido central, tal como hemos descrito para cada ítem, en determinadas circunstancias también aportan a la evaluación de otros contenidos de manera secundaria o complementaria. En la Tabla 5.19, se muestra la vinculación entre contenidos evaluados e ítems que los evalúan.

5.8. SÍNTESIS DE LA RELACIÓN ENTRE CONTENIDOS E ITEMS

En este capítulo hemos analizado con detalle el proceso de construcción del cuestionario de evaluación, elaborado tomando como base un significado de referencia local. Dicho marco, como ya anticipamos, ha sido extraído de un significado de referencia global institucional, constituido por antecedentes de investigaciones vinculadas a la problemática de investigación, y estudios exploratorios que forman parte de esta investigación (estos desarrollos han sido descritos en los capítulos 1, 3 y 4).

La construcción del instrumento de evaluación nos ha llevado a organizar un banco de ítems (un total de 28 considerados los sub-ítems). Algunos de ellos tomados de investigaciones previas, otros extraídos de textos escolares, elaboraciones propias y reformulaciones.

Interesa resaltar en este punto dos aspectos que consideramos esenciales: el contenido del cuestionario y el proceso de construcción y validación del mismo.

Hemos construido un cuestionario que amplía notablemente el contenido evaluado, respecto a otros instrumentos utilizados en investigaciones previas, en cuanto a números decimales. El cuestionario se dirige a evaluar conocimientos del contenido para la enseñanza. Particularmente, conocimiento del contenido números decimales, y conocimiento del contenido y estudiantes. Como consecuencia, el contenido de nuestra variable de análisis amplía el clásico "contenido curricular" (conceptos y procedimientos), hacia lo que denominamos "contenido onto-semiótico". Este contenido toma en cuenta: conceptos/definiciones, procedimientos, propiedades, argumentos, elementos lingüísticos y los propios problemas.

Esta concepción, no solo tiene carácter extensivo. Encontramos su fortaleza, además, en el hecho que el modo en que emergen e interactúan estos contenidos, durante el desarrollo de una práctica (institucional/personal), dado que permiten interpretar y operativizar el contenido de manera exhaustiva, aportando un significado parcial al mismo. En la sección 5.7 se presenta un análisis a priori (onto-semiótico) de los ítems, lo que contribuye a visualizar el contenido efectivamente evaluado.

En cuanto a la validez del cuestionario, podemos afirmar que, tal y como se puede observar en la tabla 5.19, los ítems que lo componen cubren todos los contenidos seleccionados previamente y, como describimos en el estudio a-priori se evalúan, además, contenidos secundarios.

Tabla 5.19. ***Cuestionario CDM decimales. Contenidos incluidos en los ítems***

	ITEMS																											
CONTENIDO	1	2		3		4			5				6			7	8		9	10			11	12			13	
		a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*d*	*a*	*b*	*c*		*a*	*b*		*A*	*b*	*c*		*a*	*b*	*c*	*a*	*B*
1. Distintas representaciones del número racional. Distinción entre número y representación de un número racional)		x	x																									
2. Valor posicional de las cifras; parte entera, parte decimal de una expresión decimal.				x	x	x	x	x																		x		
3. Concepto/definición de número decimal.	x								x	x	x	x																
4. Relación del número decimal con los restantes tipos de números (naturales, racionales (no decimales), reales).		x	x										x	x	x													
5. Distinción entre número decimal y expresión decimal de un número:																												
a. Expresiones decimales finitas (como resultado de divisiones enteras con resto 0)									x				x							x	x	x						
b. Expresiones decimales finitas (como medio de expresión de medidas complejas)																											x	X
c. Expresiones decimales periódicas, puras y mixtas. Casos especiales: Período 0 y 9.										x	x			x						x	x		x					
d. Expresiones decimales no periódicas. (números irracionales)															x						x			x				
6. Caracterización de los números decimales a partir de la descomposición del denominador de fracciones representantes en factores primos.																												
7. Fracción generatriz de expresiones decimales. (finitas o periódicas)									x	x	x	x																
8. Ordenación de números decimales						x	x	x								x	x	x								x		
9. Densidad de los decimales en el conjunto de los racionales																x	x	x										
10. Operaciones con números decimales: adición y sustracción; multiplicación y división:																												
a. Significado de operaciones con números decimales																		x									x	x
b. Algoritmos y sus justificaciones																			x									
11. Aproximación decimal de números racionales. Redondeo																							x		x			
12. Aproximación decimal de números irracionales															x											x		
13. Justificación de propiedades y procedimientos				x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x				x	x	x	x	x	x	x	x		

5.9. RESULTADOS GLOBALES DE LA APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO. ESTUDIO DE LA FIABILIDAD

Finalizada la elaboración del cuestionario, según el proceso descrito en los apartados precedentes, se inició la toma de datos para el estudio de evaluación. Uno de los objetivos generales planteados en esta investigación es, precisamente, evaluar significados personales que, sobre los números decimales, poseen futuros profesores para la enseñanza primaria.

En este apartado realizamos un estudio cuantitativo basado en los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario a la muestra. Comenzamos con la descripción de la muestra, luego se presenta el análisis de la puntuación total (estadísticos descriptivos y gráficos) y concluimos con el análisis de fiabilidad del cuestionario.

5.9.1. Descripción de la muestra y codificación de datos

La muestra estuvo compuesta por 118 alumnos, estudiantes para profesor de enseñanza primaria de la Universidad de Granada. Estos estudiantes se hallaban cursando el segundo año de su carrera, habiendo estudiado el tema de los números decimales en el curso precedente. El cuestionario fue aplicado en una de sus clases habituales en el marco de la asignatura "Currículo de matemáticas en la educación primaria", con dos horas de duración. Recogidos los datos se procedió a la codificación y registro en una planilla Excel para su posterior tratamiento estadístico con el programa SPSS. Se codificó con valor: 0, las respuestas incorrectas; valor 1: las respuestas parcialmente correctas y valor: 2 las respuestas correctas.

5.9.2. Análisis de la puntuación total

Estudiar la puntuación de cada ítem es importante. Para estudiar este aspecto, se puntuó con 2 cada respuesta correcta (y con 1, cada respuesta parcialmente correcta), sumando todas estas puntuaciones, con lo que cada alumno obtuvo una puntuación total que podría variar entre 0 y 28.

Se analiza en primer lugar la puntuación total en la escala (suma de todos los ítems, codificados como 0,1 y 2). Se incluyen los estadísticos descriptivos (Tabla 5.20) y gráficos: gráfico de la caja (Figura 5.4) e histograma (Figura 5.5).

Tabla 5.20. *Estadísticos descriptivos*

	Estadístico	Error típ.

Media		20,49	,737
Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	19,03	
	Límite superior	21,95	
Mediana		19,00	
Varianza		64,138	
Desv. típ.		8,009	
Mínimo		6	
Máximo		44	
Rango		38	
Amplitud intercuartil		11	
Asimetría		,529	,223
Curtosis		-,245	,442

Vemos que la media fue de 20 sobre un total de 28. Dado que consideramos tanto las respuestas correctas como las parcialmente correctas, esto significa que el número de ítems que, al menos, pueden ser abordados y resueltos parcialmente por los estudiantes es alto.

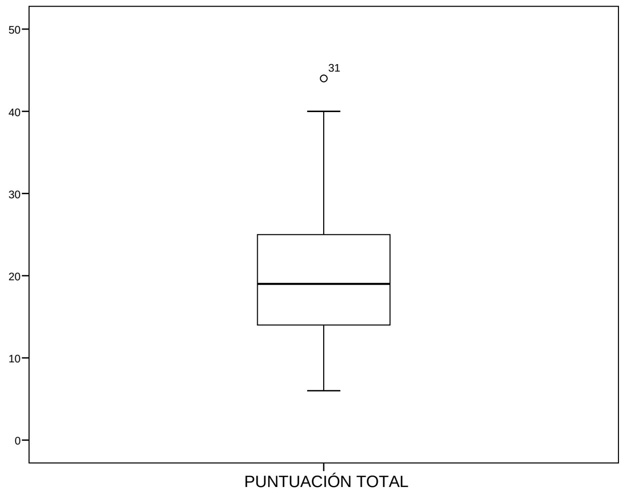


Figura 5.4. *Puntuación total*

En el gráfico de la caja de la figura 5.4 y del histograma de frecuencias de la figura 5.5 se puede observar que la distribución de frecuencias de la puntuación total es asimétrica, presentando una mayor dispersión en el tercer y cuarto cuartíl. El recorrido intercuartílico (diferencia entre el segundo y tercer cuartíl es de 11 puntos.

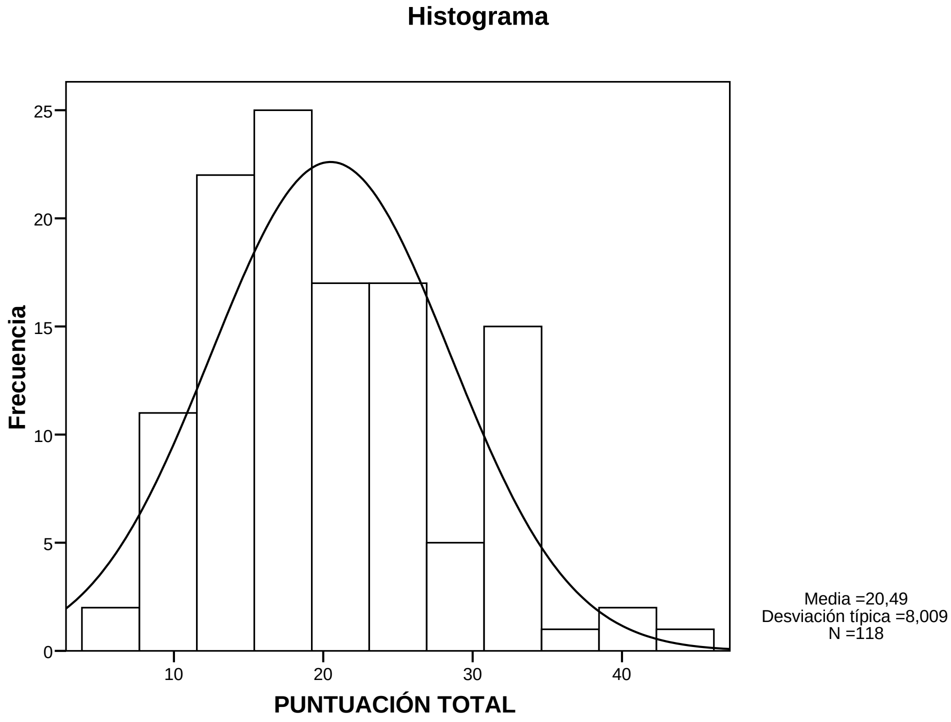


Figura 5.5. *Puntuación total*

5.9.3. Análisis de la fiabilidad del cuestionario

Un segundo punto ha sido el estudio de las características de fiabilidad del cuestionario. Según Thorndike (1989), el proceso de medida se propone ligar ciertos conceptos abstractos a indicadores empíricos. En nuestro caso, relacionar el significado personal que los alumnos de la muestra asignan a los números decimales con sus respuestas a los ítems del cuestionario. El análisis de datos se hace sobre las respuestas, ya que son observables. El interés teórico, sin embargo, es el concepto subyacente (conocimiento del contenido y conocimiento del contenido y estudiantes) que no son observables de manera directa, pero que tratamos de inferir a partir de los significados personales puestos en juego en las respuestas a los ítems.

Cuando la relación entre los indicadores empíricos (respuestas) y los conceptos subyacentes es fuerte, el análisis de los indicadores nos permite hacer inferencias útiles sobre los conceptos teóricos y evaluar nuestras hipótesis previas sobre los mismos.

Para permitir este proceso, un indicador ha de ser fiable. Llamamos fiabilidad a la extensión por la cual un experimento, test u otro procedimiento de medida produce los mismos resultados en ensayos repetidos.

Entre los diversos métodos de estimar la fiabilidad de una escala, hemos tomado, en primer lugar, el método de *consistencia interna.* Su cálculo se basa en el análisis relativo de la varianza de la puntuación total del cuestionario y de las varianzas de los ítems particulares, y el coeficiente que lo mide es el alfa de Cronbach.

Hemos obtenido un valor $\alpha = 0.768$ para el coeficiente de Cronbach (Tabla 5.21), por lo que consideramos que este valor es suficientemente elevado para nuestro propósito, dado que la prueba no es homogénea, sino que hemos tratado de reflejar en ella una variedad de elementos de significado.

En la tabla 5.21 se puede analizar el comportamiento de cada uno de los ítems. Con la correlación ítem – total podemos analizar la discriminación del ítem. Observamos que todos los ítems presentan correlaciones positivas, contribuyendo todos a la puntuación total de la escala. Los ítems con peores correlaciones son los ítems 4b y 5a. Vemos, que si se eliminaran dichos ítems, la fiabilidad de la escala aumentaría.

Tabla 5.21. *Estadísticos total-elemento*

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
i1	13,70	18,301	,164	,769
i2a	13,47	17,942	,377	,758
i2b	13,57	18,113	,247	,764
i3a	13,82	18,458	,119	,772
i3b	13,82	17,470	,358	,757
i4a	13,37	18,768	,195	,766
i4b	13,40	18,942	,084	,770
i4c	13,51	18,115	,258	,763
i5a	13,54	18,727	,088	,772
i5b	14,11	17,689	,404	,756
i5c	14,20	18,496	,223	,765
i5d	13,98	17,231	,452	,752
i6a	13,40	18,702	,184	,766
i6b	14,07	17,705	,366	,757
i6c	14,04	17,409	,434	,753
i7	13,93	17,986	,240	,765
i8a	13,66	17,301	,426	,753
i8b	13,55	17,855	,329	,759
i9	14,30	19,064	,127	,768
i10a	13,75	17,745	,294	,761
i10b	13,91	16,753	,552	,745
i10c	14,23	18,605	,225	,765
i11	13,55	17,974	,295	,761
i12a	13,86	17,698	,303	,761

i12b	13,93	18,249	,177	,768
i12c	13,75	17,625	,324	,759
i13a	14,25	18,494	,307	,762
i13b	13,85	17,413	,373	,756

Análisis de ítems

En este apartado analizamos los índices de dificultad de cada uno de los ítems. Entendemos por índice de dificultad de un ítem según Muñiz (1994), al índice que surge de la proporción de sujetos que aciertan en la resolución, con respecto a aquellos que han intentado resolverlo. Si A es el número de sujetos que aciertan el ítem, y N el número de sujetos que han intentado resolverlo, entonces podemos decir que el índice de dificultad (ID) se obtiene así: ID= $\frac{A}{N}$.

A continuación analizamos los resultados obtenidos en la Tabla 5.23. El índice de dificultad osciló entre 0,02 y 0,94. Podemos observar, que el sub-ítem que ofreció menor dificultad ha sido el 4a) (supresión de ceros en un número decimal para obtener un número mayor o menor). Es más, se observa que el ítem 4 (en conjunto), es el que menos dificultades ha presentado. Otros ítems que han resultado menos problemáticos han sido: el sub-ítem 6a) (Determinar si 1/5 es decimal y dar una expresión decimal finita para él), el ítem 2 (señalar números racionales en la recta numérica y representarlos usando gráficos rectangulares). El ítem 8 (problema del concurso de salto de longitud), el ítem 11 (problema de contexto cotidiano, con relación entre número racional y aproximación decimal de un número).

Del mismo modo, el ítem que mayor dificultad presentó fue el ítem 9, con índice 0,02 (Justificar el algoritmo de la multiplicación). Le siguen los ítems 13a) (Enunciar un problema de la vida cotidiana, en un contexto de porcentaje y que se resuelva con una multiplicación); 10c) (Dar la condición que debe cumplir el denominador de una fracción irreducible para que represente un número decimal); 5b), 5c) y 5d) (Decidir si son decimales números racionales expresados en forma decimal); 6b) y 6c) (Determinar si los números 1/3 y π son números decimales); 12b) (determinar si 53/83 es racional o irracional, cuando se da, como información adicional ,una aproximación decimal finita para ese número).

En cuanto a las desviaciones típicas, la mayoría se agrupa en torno a 0,50. Lo que supone que no existen diferencias demasiado notables en la dificultad encontrada por los estudiantes con respecto a la media.

Tabla 5.23. *Índices de dificultad y desviación típica de los ítems*

	Media	Desviación típica
i1	,62	,488
i2a	,85	,361
i2b	,75	,437
i3a	,50	,502
i3b	,50	,502
i4a	,94	,237
i4b	,92	,280
i4c	,81	,424
i5a	,77	,422
i5b	,20	,404
i5c	,12	,325
i5d	,33	,472
i6a	,92	,280
i6b	,25	,432
i6c	,27	,446
i7	,39	,490
i8a	,65	,478
i8b	,76	,427
i9	,02	,130
i10a	,57	,497
i10b	,41	,493
i10c	,08	,280
i11	,76	,427
i12a	,46	,500
i12b	,38	,488
i12c	,57	,497
i13a	,07	,252
i13b	,47	,501

Se presentan también la distribución de estos índices observándose un rango de dificultades desde 0,02 hasta 0,94. (Figura 5.6.)

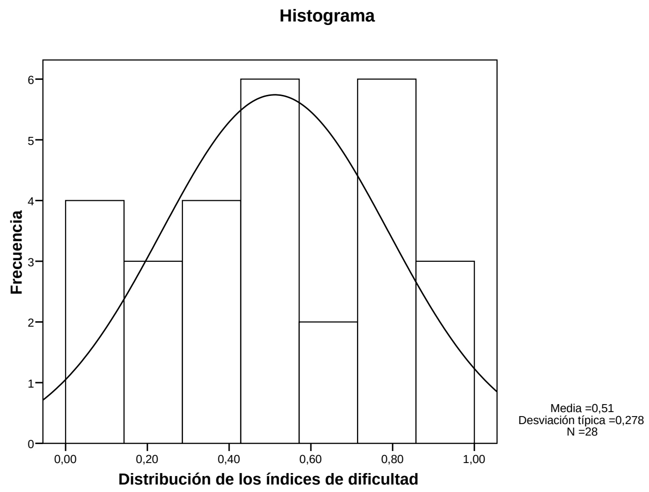


Figura 5.6. *Distribución de los índices de dificultad*

5.10. ANÁLISIS MULTIVARIANTE DE LAS VARIABLES CUANTITATIVAS

En este apartado aplicaremos técnicas de análisis multivariante a las variables cuantitativas deducidas de las respuestas de los estudiantes al cuestionario, con el objetivo de indagar posibles agrupaciones de los sujetos. Un análisis cualitativo posterior servirá para analizar si estas agrupaciones corresponden o no a tipos de configuraciones cognitivas diferenciadas, mediante el estudio detallado de las respuestas de sujetos representativos, que se eligen en función de su distancia respecto al centro del grupo asignado. Un criterio de agrupación podría ser simplemente tener en cuenta los cuartiles de la distribución de frecuencias de la puntuación total en el cuestionario y formar cuatro grupos de igual tamaño. De este modo tendríamos que el cuartil inferior agruparía a los estudiantes con una puntuación inferior a 14, el segundo cuartil entre 14 y 19 (mediana), el tercer cuartil entre 19 y 25 y el cuarto cuartil los sujetos con una puntuación superior a 25. Pero esta estrategia no aporta información sobre la estructura de cada uno de los grupos en términos de la similitud de las respuestas dadas a los distintos ítems.

Las técnicas de análisis de conglomerados (clúster) y discriminante permiten agrupar los sujetos teniendo en cuenta las respuestas dadas en los distintos ítems del cuestionario. El análisis clústeres una técnica exploratoria que ayuda a determinar la mejor clasificación teniendo en cuenta la similitud de las respuestas, y con unos criterios fijados por el investigador, mientras que el discriminante ayuda a explicar la diferencia entre los grupos formados.

5.10.1. Análisis clúster de sujetos

Con frecuencia la clasificación es el primer paso para la comprensión de un fenómeno complejo, ya que el interés está en determinar, en el conjunto dado, clases diferenciadas de los individuos (sujetos o variables) bajo estudio (Cuadras, 1991). En nuestro caso estamos interesados en indagar la posibilidad de clasificar a los sujetos del estudio en un número pequeño de tipos básicos o prototípicos, en función de las configuraciones cognitiva que se infieren respecto del conocimiento de los números decimales y en función de las respuestas al cuestionario. Con dicho fin hemos realizado un análisis clúster de sujetos, comprobándose las hipótesis para aplicación del método: unidad experimental de las variables e independencia de las respuestas a los diferentes ítems. Dicha técnica de análisis de datos, ampliamente utilizada en distintas áreas de conocimiento (Biología, Psicología, Arqueología, Sociología, etc.) tiene el propósito de identificar entidades similares a partir de las características que poseen.

Algunos de los problemas que resuelve este método son los siguientes:

- Ayuda en el tratamiento de grandes cantidades de datos que, debido a su dimensionalidad, son difíciles de estudiar, a menos que puedan clasificarse en grupos manejables con la mínima pérdida de información.
- Proporciona un método de agrupación útil y nítido, que introduce un grado de objetividad no obtenible por observación directa.
- Permite utilizar simultáneamente en la investigación varias características, para evitar evaluaciones sencillas descriptivas basadas, en una única característica diferenciadora.

El objetivo del método es obtener grupos de individuos de forma que, por un lado, los individuos pertenecientes a un mismo grupo sean semejantes entre sí, es decir, que el grupo esté cohesionado internamente y, por otro, los individuos pertenecientes a grupos diferentes tengan un comportamiento distinto con respecto a las variables analizadas, es decir, que cada grupo esté aislado externamente de los demás grupos.

Puesto que no hay una única forma de definir lo que se entiende por cohesión dentro del grupo y distancia entre los sujetos, la aplicación del método requiere, cuando ya se dispone de los casos y de las variables, seleccionar el tipo de distancia o similitud, seleccionar el criterio de agrupación o algoritmo de clasificación y finalmente determinarla estructura (elección del número de grupos)

En nuestro caso hemos utilizado la distancia euclídea al cuadrado, de modo que dos sujetos estarán a distancia cero si todas las puntuaciones coinciden en las variables analizadas. La distancia máxima en cada variable sería 4 (si un sujeto puntúa 0 y el otro 2 en dicha variable) y la distancia máxima total será cuatro veces el número total de variables consideradas. Al elegir esta distancia se amplían las diferencias entre sujetos diferentes entre sí y se disminuye cuando estos son próximos, es decir se acentúa la cohesión del grupo y la distancia entre uno y otro. Asimismo se aceptó el supuesto de que las variables se ajustan al modelo binomial, es decir que cada alumno tiene la misma probabilidad de acierto en cada ítem y las respuestas de los alumnos son ensayos independientes (Lerman, 1981).

Por otro lado, una vez elegida la distancia se puede elegir el método de aglomeración. En nuestro caso hemos usado el algoritmo de k-medias (en lugar del clúster jerárquico) (Afifi y Clark, 1996), que permite solicitar un número concreto de grupos y examinar las posibles diferencias de los mismos en cuanto a las variables. (Método de iterar y clasificar; opción de guardar el conglomerado de pertenencia y la distancia desde el centro del conglomerado). No se especificaron inicialmente centros de los grupos, para no forzar la formación de los mismos. Se probaron diferentes agrupaciones (número de grupos) con los criterios de que el número de estudiantes por grupo fuese razonable y que los grupos pudiesen interpretarse de una manera plausible. Finalmente se tomaron cuatro grupos, pues el aumentar a cinco no proporcionaba nueva información y con un menor número las diferencias entre grupos no eran tan claras.

Con estos criterios fijados, el programa SPSS nos ha formado los cuatro grupos con el número de sujetos indicado en la tabla 5.24.

Tabla 5.24. *Número de casos en cada conglomerado*

Conglomerado	1	46
	2	36
	3	7

4	29
Válidos	118

La tabla 5.25, muestra los centros de los conglomerados finales formados

Tabla 5.25.*Centros de los conglomerados finales*

Item	Conglomerado 1	2	3	4
i1	0	1	1	1
i2a	1	1	2	1
i2b	1	1	2	1
i3a	1	1	1	0
i3b	1	1	2	0
i4a	1	2	2	1
i4b	1	1	1	1
i4c	1	1	1	1
i5a	1	1	2	1
i5b	0	0	1	0
i5c	0	0	1	0
i5d	0	1	2	1
i6a	2	2	2	2
i6b	0	0	2	0
i6c	0	1	2	0
i7	0	1	1	0
i8a	1	2	1	1
i8b	1	2	2	1
i9	0	0	0	0
i10a	0	1	1	1
i10b	0	1	1	0
i10c	0	0	1	0
i11	1	2	2	1
i12a	0	1	1	1
i12b	0	1	1	0
i12c	0	1	1	1
i13a	0	0	0	0
i13b	0	1	1	1

Observamos que el grupo 1, formado por 46 sujetos predomina la puntuación 0 (16 ítems); obtienen 1 en 11 ítems y tan sólo una puntuación 2 en el ítem 6a. En el grupo 2, formado por 36 sujetos predomina las puntuación 1 (17 ítems) con el resto repartidos por igual entre 0 y 2 (6 y 5 ítems). En el grupo 3, que está formado por 7 sujetos, los centros del conglomerado final obtenido después de 10 iteraciones predominan las puntuaciones 1 (15 ítems) pero hay un número mucho mayor de puntuaciones 2 (11 ítems) y tan sólo 2 puntuaciones 0 en los ítems 9 y 13 a. En el grupo 4 es parecido al 1 pues las puntuaciones 0 y 1 son predominantes (12 y 15 ítems), con sólo un 2 en el ítem

6a, al igual que el grupo 1. No obstante, tiene mayor número de ítems con 1 (mientras el 1 tiene mayor número con 0).Además el grupo 1 tiene 1 en los ítems 3a, 3b, mientras que el grupo 4 tiene 1 en el ítem 1, 5a, 5d, 10a, 12a, 12 c y 13 b (Ver figura 5.7)

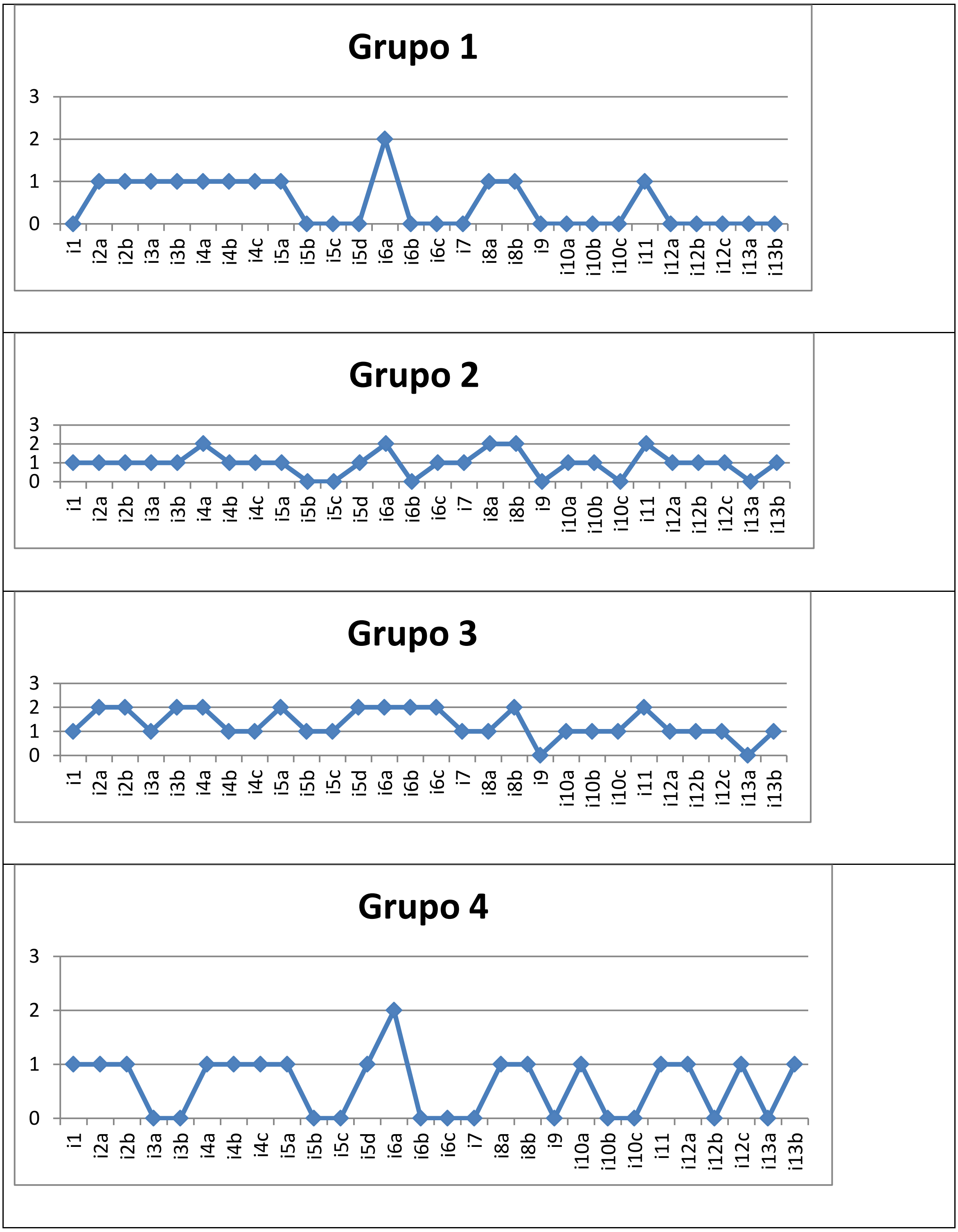


Figura 5.7. *Puntuaciones en cada ítem y grupo*

Los centros de los grupos han sido formados con los valores enteros de las variables, es decir, eligiendo los valores medianos de las variables, que solo toman valores enteros. Estos centros son casos ideales que representan al grupo. Ahora bien, los alumnos se asignan al grupo con el que muestren menor distancia, por lo cual la respuesta de cada alumno siendo semejante a este caso prototípico variará de un alumno a otro dentro del grupo, en parte de los ítems. Por ello, al calcular los valores medios de dichas variables obtendremos valores no enteros.

La realización de un análisis discriminante nos va a permitir analizar con más detalle la estructura de los grupos, en particular estudiaremos las puntuaciones medias de los grupos en las distintas variables; así mismo haremos un contraste de diferencias de medias entre los grupos. Con dicho fin hemos grabado en el fichero de datos la variable "conglomerado" al cual pertenece cada sujeto, lo cual nos permite realizar el análisis discriminante, así como estudiar la distribución de la puntuación total en cada uno de los grupos formados. La figura 5.8, incluye los gráficos de cajas de dichas distribuciones, que como observamos da una medida numérica del rendimiento de cada grupo que se ordenan en la siguiente forma (de mayor a menor rendimiento): 3, 2, 4, 1. Observamos que el grupo 3 se sitúa totalmente (los 7 alumnos) por encima de todos los alumnos de los grupos 1 y 3 y del percentil del 75% del grupo 2. El grupo 2 a su vez se sitúa por encima de la mediana del grupo 4 y del percentil del 75% del grupo 1; los grupos 1 y 4 son muy semejantes, pero de todos modos la mediana del grupo 4 es mayor que la del 1 y el 75% de los alumnos del grupo 4 se sitúan sobre dicha mediana.

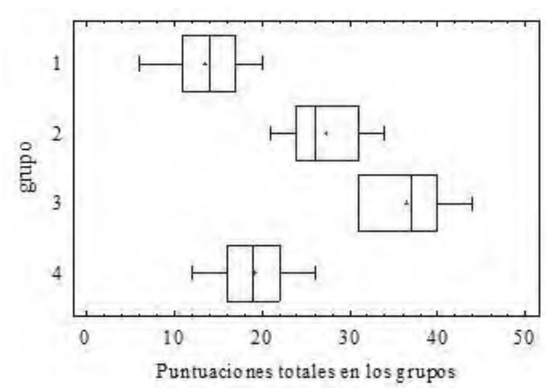


Figura 5.8. Gráficos de cajas de las puntuaciones totales en cada conglomerado

5.10.2 Análisis discriminante

Para caracterizar mejor los componentes y descriptores del conocimiento sobre decimales que contribuye a discriminar los cuatro grupos obtenidos mediante el análisis de conglomerados se realizó un análisis discriminante, utilizando como variable principal el grupo de pertenencia proporcionado por el análisis clúster.

El análisis discriminante es una técnica estadística multivariante cuya finalidad es analizar si existen diferencias significativas entre grupos de objetos respecto a un conjunto de variables medidas sobre los mismos para, en el caso de que existan, explicar en qué sentido se dan y proporcionar procedimientos de clasificación sistemática de nuevas observaciones de origen desconocido en uno de los grupos analizados (Afifi y Clark, 1996). Se puede considerar como un análisis de regresión donde la variable dependiente es categórica y tiene como categorías la etiqueta de cada uno de los grupos, y las variables independientes son numéricas y determinan a qué grupos pertenecen los objetos. Se pretende encontrar relaciones lineales entre las variables independientes que mejor discriminen en los grupos dados a los objetos. Su uso en el trabajo contribuye a reforzar el análisis clúster que, como hemos dicho es una técnica exploratoria descriptiva (por tanto implica cierta dosis de subjetividad), mientras que el discriminante nos proporciona contrastes estadísticos, que serían técnicas inferenciales confirmatorias.

Para realizar el análisis discriminante, se tomó como variable dependiente el grupo producido por el análisis clúster y como conjunto de variables independientes las puntuaciones en cada uno de los ítems del cuestionario, es decir las mismas variables utilizadas en el análisis clúster. Se incluyeron simultáneamente todas las variables en la ecuación, pues la finalidad era la discriminación del total del instrumento (no de un subconjunto de ítems). Para este análisis discriminante se calcularon la probabilidad de clasificación correcta. También se realizan análisis univariados de las variables en cada uno de los grupos, como se refleja en la Tabla 5.26. Para facilitar la interpretación hemos incluido un breve descriptor de cada ítem en la primera columna.

Puesto que se hacen 28 contrastes, para evitar el problema de comparaciones múltiples tomaremos el nivel de significación 0,05/28= 0,0017. Es decir, se consideran estadísticamente significativos sólo los valores p menores que esta cantidad. En la tabla 5.26, se marcan las variables no significativas.

Tabla 5.26. *Puntuaciones medias de los grupos y significación del anova univariante*

Descriptor del ítem:	Item	Grupo 1 N=46	Grupo 4 N=29	Grupo 2 N=36	Grupo 3 N=7	Total	P
Concepto nº decimal	i1	,43	,86	,69	1,43	,68	000
Recta decimal	i2a	,83	,86	1,31	1,71	1,03	,000
Modelo áreas	i2b	,74	,79	1,22	1,57	,95	,000
Confusión cifra y valor	i3a	1,00	,14	,92	1,14	,77	,000
Redacción ítem valor pos	i3b	,54	,28	1,39	1,71	,81	,000
Suprimir 0	i4a	1,15	1,41	1,64	2,00	1,42	,000
Intercalar 0	i4b	,87	1,17	1,36	1,00	1,10	,000
Intercalar 0 generaliz.	i4c	,77	,83	1,14	1,29	,93	,006
Decimal finito 1,345678	i5a	,80	,97	1,36	1,57	1,06	,001
Periodico puro 0,4545	i5b	,09	,24	,36	1,43	,29	,000
Decimal 4,10999	i5c	,07	,21	,11	,57	,14	,019
Decimal natural 3	i5d	,04	1,07	,69	2,00	,61	,000
Escritura decimal 1/5	i6a	1,59	1,76	1,89	2,00	1,75	,088
Escritura decimal 1/3	i6b	,17	,45	,44	2,00	,43	,000
Escritura decimal π	i6c	,22	,24	,81	1,71	,49	,000
Siguiente decimal	i7	,24	,41	,61	,71	,42	,011
Decimales intermedios	i8a	,57	,97	1,61	1,43	1,03	,000
Decimales interm. Justif.	i8b	,70	1,34	1,56	2,00	1,19	,000
Justificar algorit. Multip	i9	,00	,00	,06	,29	,03	,041
Cambio a/b a decimal	i10a	,28	,69	1,28	,71	,71	,000
Cambio decimal a fracc.	i10b	,11	,31	1,08	,57	,48	,000
Caract. Fracciones decim	i10c	,02	,10	,14	,71	,12	,000
Aproxim. Decimal 1/3	i11	,70	1,48	1,61	2,00	1,25	,000
Decimal irracional 0,121	i12a	,46	,66	1,22	1,00	,77	,001
53/83 ¿irracional?	i12b	,46	,14	,64	,71	,45	,006
Aproxim decimal de π	i12c	,48	,76	,94	1,43	,75	,002
Problema 2,255 x 1,7	i13a	,00	,07	,22	,29	,10	,046
Problema 5,76: 1,8	i13b	,24	,97	1,03	1,43	,73	,000
Puntuación total media		13,5435	19,1724	27,3333	36,4286	20,4915	

El grupo 3, está formado por los 7 estudiantes que han respondido con mayor puntuación a los distintos ítems del cuestionario, excepto en cinco de ellos; para este grupo la media de las puntuaciones totales obtenidos por los estudiantes clasificados en dicho grupo es la mayor, 36,42. Manifiestan una comprensión razonablemente buena de los números decimales.

Hay tres ítems que han resultado particularmente difíciles incluso para este grupo. Se trata de los ítems, el i5c (determinar si la expresión 4,10999 corresponde a un número decimal), puntuación media 0,57; el ítem i9 (justificación del algoritmo de multiplicar), con una puntuación media de 0,29; y el ítem i13a (invención de un problema en el que intervenga la operación de multiplicar), con una puntuación media de 0,29.

El grupo 2, formado por 36 estudiantes, tiene una puntuación total media de 27,33 habiendo cinco ítems en los cuales este grupo tiene la puntuación máxima. El grupo 1, formado por 46 estudiantes, es el que tiene una menor puntuación media, 13,54, y en todos los ítems, excepto el i3a (confusión entre cifra y valor de las cifras en un número decimal) obtienen la puntuación más baja. El grupo 4 se sitúa entre el 1 y el 2 y está formado por 29 estudiantes.

Como sujetos representativos de cada uno de los grupos hemos identificado los siguientes: Grupo 1: sujeto 116; Grupo 2: sujeto 71; Grupo 3: sujeto 86; Grupo 4: sujeto 55. La elección de estos sujetos está basada en la menor distancia de dicho sujeto al centro de su conglomerado. Esta distancia se ha determinado mediante la grabación en el fichero de datos, no solo el grupo asignado a cada sujeto sino también la distancia al centro del grupo. Una vez ordenados de menor a mayor cada sujeto según dicha distancia se ha procedido a elegir el que tiene mejor distancia.

La figura 5.9, muestra una salida del análisis discriminante ilustrativa de las posiciones relativas a de los centroides de cada grupo y de los sujetos agrupados en torno a los mismos.

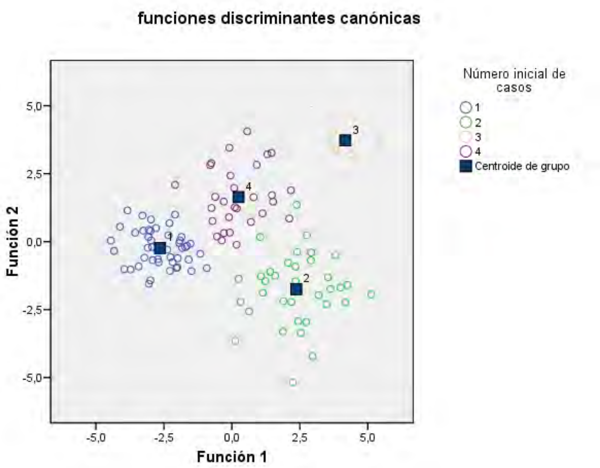


Figura 5.9. *Posición relativa de los sujetos en los conglomerados*

CAPITULO 6

TIPOS DE CONOCIMIENTOS Y CONFLICTOS

6.1. INTRODUCCION

Una vez analizados los datos correspondientes a la variable "Grado de corrección de las respuestas a los ítems" (variables tipo V1) en el capítulo 5, a partir de la cual se determinó la fiabilidad del cuestionario, se procedió al análisis de los datos correspondientes a dos tipos de variables que interesaban especialmente en este trabajo: las variables V2, "Conocimientos puestos en juego en las respuestas a los ítems" y V3, "Conflictos manifestados en las respuestas a los ítems". Con ellas complementamos la evaluación desde una perspectiva tanto cuantitativa como cualitativa. En este capítulo definimos dichas variables con sus respectivos valores y analizamos los datos obtenidos mediante la aplicación de la prueba. Los resultados son contrastados con las investigaciones previas informadas en el capítulo 1 cuando procede.

6.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS VARIABLES CUALITATIVAS

Recordamos que las variables son nombradas con el siguiente criterio: el primer dígito y la letra que le sigue indican el ítem correspondiente y los códigos V1, V2 o V3 que les sigue tienen asociado el significado que describimos a continuación:

V1: Indica el grado de corrección del ítem (que ya fue analizada en el capítulo 5).

V2: Indica el tipo de conocimiento involucrado en el ítem y el grado de explicitación del mismo.

V3: Indica el tipo de conflicto manifestado.

Por ejemplo, cuando aparece la designación 5cV2 para una variable, hacemos referencia al comportamiento del rasgo V2 en el sub-ítem c) del ítem 5.

A su vez, cada una de estas variables llevan asociadas una serie de valores que son propios de cada ítem en particular. En este apartado describimos dichos valores y analizamos simultáneamente el modo en que dichos valores se hacen presentes a través del análisis de los datos obtenidos mediante la aplicación del cuestionario.

Del estudio de las categorías de variables V1 y V2 podemos observar una amplia gama de información. Si bien dicha información se plasma básicamente en términos cuantitativos, el abanico de valores definidos a partir del significado central que moviliza cada ítem en particular abre las puertas a una indagación más profunda, complementaria y que nos aportará información en términos cualitativos. Consideramos que esta indagación sería efectiva en tanto lo hiciéramos no solo sobre las respuestas calificadas como erróneas, (valor 0), sino también sobre aquellas que en las variables tipo V1 se les asignó el valor 1, es decir, sobre respuestas incompletas o parcialmente correctas. Es así, que definimos una tercera categoría de variables V3, en la cual analizamos los conflictos puestos de manifiesto en las mencionadas respuestas.

6.2.1. Análisis del ítem 1 (Concepto de nº decimal)

Como hemos anticipado en el Capítulo 5, cuando analizamos el contenido de los ítems que componen el cuestionario observamos que el elemento de significado en que se centra dicho ítem es un concepto/definición, razón por la cual nos ha interesado medir a través de la variable 1V2 el tipo de concepción de número decimal que poseen los futuros profesores. En la tabla 6.1 se muestran las frecuencias y porcentajes para los valores allí descritos.

Tabla 6.1. *Frecuencias y porcentajes para **1V1** (grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	41	34,7
1: Parcialmente bien/o incompleto	66	55,9
2: Bien	7	5,9
En blanco	4	3,4
Total	118	100,0

En primer lugar, interesa observar el elevado número de individuos que dieron respuesta a este ítem, solo el 3,4% no expresó alguna concepción de número decimal.

Los resultados presentados en la Tabla 6.2, nos permiten destacar algunas cuestiones relevantes en relación al tipo de concepción manifestada por los estudiantes indagados.

Tabla 6.2. *Frecuencias y porcentajes para* ***1V2*** *(Tipos de concepción)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
1: Concepción fraccionaria	9	7,6
2: Como expresión polinómica	53	44,9
3: Combinación de las concepciones 1 y 2	18	15,3
4: Concepción como partes de la unidad	18	15,3
5: Concepción práctica (Basada en usos/utilidades de la vida cotidiana)	8	6,8
6: Concepción sistémica (Como base de un sistema de numeración- base 10)	3	2,5
Otros	5	4,1
En blanco	4	3,4
Total	118	100

Cabe destacar que el mayor porcentaje de respuestas (44,9%) correspondió a la concepción 2, la de número decimal como expresión polinómica, más específicamente, en términos de los estudiantes, "como un número con coma", tal como lo vienen sosteniendo diversos investigadores (Socas, 2001; Ferrari, 2006). Por otra parte, si bien apenas el 7,6% utiliza una concepción solo fraccionaria, se observa que este porcentaje aumenta (15,4%) para quienes utilizan una combinación de ambas (fraccionaria y polinómica). En el mismo nivel se ubica la concepción 4 (15,4%) al considerar como número decimal solo a la parte decimal de la expresión polinómica del número.

Por último, resulta curiosa la escasa o casi nula aparición de las concepciones 5 y 6, puesto que podríamos decir aluden a cuestiones más cercanas al estudiante dentro de la categoría de "Conocimiento común" que Hill, Ball y Schilling (2008) definen en sus investigaciones. En un caso haciendo alusión a usos de la vida cotidiana (5) y en el otro a una definición que podría surgir casi naturalmente como emergente de la propia expresión lingüística: número decimal (6).

En la tabla 6.3 presentamos las frecuencias y porcentajes de respuestas para la variable 1V3 (tipos de conflictos manifestados)

Tabla 6.3. *Frecuencias y porcentajes para* ***1V3*** *(Tipos de conflictos)*

Tipo de conflicto	Frecuencia	Porcentaje
1: "Un número es decimal si su expresión consta de dos partes separadas por una coma"	60	50,8
2: "Un número es decimal si es una parte de una unidad" (0,….)	15	12,7
3: "Un número decimal es un número que está formado por dos números enteros separados por una coma"	2	1,7
4: "Un número decimal es un número que no es entero"	10	8,5

5:	Combinación de las expresiones 1 y 4	8	6,8
	Otros	12	10,2
	En Blanco	11	9,3
	Totales	118	100,00

En relación a los conflictos puestos de manifiesto por los alumnos, encontramos que la mayoría considera que un número es decimal por su forma de expresión más que por las propiedades que lo caracterizan, coherentemente con lo ya expresado por Brousseau, Brousseau y Wanfierld (2004); Socas (2001, 2004); Ferrari (2006); Ruiz (2004); Vamvakoussi y Vosniadou (2004). De manera explícita al afirmar la necesaria presencia de una coma en su expresión (72 %, conflictos 1, 2, 3 y 5). Mientras que, un porcentaje considerable (15,3%) no reconoce al número entero como un número decimal.

Conclusiones sobre el ítem 1

No parecen sorprendentes, en términos generales, los resultados cuantitativos obtenidos del análisis del ítem 1. Ya que lo que se pone de manifiesto como conflicto, es lo que las investigaciones previas vienen declarando. No obstante, del análisis de la variable 1V2, podemos observar algunas cuestiones adicionales. Si bien, la mayoría expresa solo una concepción (tipo polinómica), no deja de ser significativa la aparición de otras concepciones, tal como se muestra en la tabla 6.2. El hecho de que aparezca una diversidad de concepciones de número decimal, nos puede hacer pensar en la riqueza conceptual que ello implica, es decir en la diversidad de significados parciales asociados a la noción de número decimal. Con lo cual, si quedan establecidas las necesarias relaciones entre dichos significados, nos aproximaríamos progresivamente al significado global de la noción. No obstante, en general, los significados personales de los estudiantes manifiestan concepciones únicas. Salvo en el caso de las concepciones fraccionarias y polinómica que suelen aparecer combinadas, como puede observarse en la Tabla 6.2. Este hecho, no parece fortuito. Si consideramos la dimensión ecológica (Cap.1), observamos la existencia de propuestas curriculares de diversos investigadores como, Brousseau (1987,1988), Socas (2001), Lachance y Confrey (2002), tendientes a aportar, en el transcurso de la formación escolar, un significado "global" de número decimal. No obstante, cuando se describe el currículo escolar, (Sección 1.6.1, Cap. 1), se analiza la introducción del tema en los libros de texto escolares (Cap. 4), se observan estudios exploratorios de significados personales en estudiantes ingresantes a la universidad (Cap. 3) e investigaciones previas, podemos detectar carencias y algunas contradicciones. O bien, no se promueven esas distintas concepciones, o como en el caso de los libros de textos, aparece el número decimal en diferentes contextos, pero trabajados de manera estanca. Lo que lejos de contribuir a otorgar significado al número decimal, son fuentes generadoras de conflictos, como se observa en la Tabla 6.3. En la formación del estudiante, lo que en definitiva aparece es un *conocimiento parcial del significado de número decimal,* generalmente proveniente de un tipo de significado parcial y que, según nuestras inferencias, proviene del aprendizaje obtenido en la escolaridad elemental.

6.2.2. Análisis del ítem 2 (Recta decimal y modelo de áreas)

Recordemos que el propósito principal que se persigue con este ítem es evaluar el dominio que muestran los estudiantes respecto de la equivalencia de representaciones numéricas. Concretamente, se pide representar números racionales algunos de los cuales son dados bajo dos o tres expresiones equivalentes (fraccionaria, decimal, entera, en palabras). En un caso, apartado a), se solicita utilizar la recta numérica y en el otro, apartado b), utilizar gráficos rectangulares.

En Baturo (2000), se describen conocimientos básicos requeridos para la identificación de números. Dado que un número puede ser representado en forma gráfica, en palabras o a través de dígitos, cuando se presentan en forma de dígitos (por ejemplo, 4.7; 6.39) se debe reconocer el nombre del lugar que ocupa la "parte" decimal, a los fines de identificar las cifras como décimas y centésimas (es decir, la posición y el orden). Cuando los números decimales se presentan en forma de palabras, la parte decimal es visible, puede verse como un simple proceso de asociación entre el nombre y la posición. Sin embargo, cuando se presenta en forma gráfica, es necesaria la capacidad de unir, el conocimiento de la posición, el orden y la unidad de medida para identificar correctamente la parte decimal (por ejemplo en cuadrículas, o en la recta numérica). Esto se torna imprescindible para el efectivo reconocimiento de la fracción decimal del número y por ende del número decimal.

Análisis del sub-ítem a) (Recta decimal)

Si observamos la Tabla 6.4, vemos que casi la totalidad de los estudiantes responden a este ítem. Mas aún, del análisis podemos afirmar que el 66,1% ubica al menos 4 de los 7 números solicitados (condición que hemos considerada como mínima para considerar al ítem parcialmente bien o incompleto). No obstante, resulta también alto el número de estudiantes que resuelve mal este problema (14,4%) y demasiado bajo los que lo resuelven completamente bien (18,6%). Esto resulta preocupante si consideramos la importancia que tiene un conocimiento exhaustivo de los sistemas numéricos para su enseñanza en todos los niveles educativos (Verschaffel, Creer y Torbeyns, 2006; Socas, 2001; BOE, 2006; Cramer, Wyberg, y Leavitt, 2009).

Tabla 6.4. *Frecuencias y porcentajes para **2aV1** (grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	17	14,4
1: Parcialmente bien/o incompleto	78	66,1
2: Bien	22	18,6
En blanco	1	0,8
Total	118	100,0

Si ahora observamos el grado de precisión conceptual que muestran en la representación, encontramos en la Tabla 6.5, que un mínimo porcentaje resuelve con precisión cada representación (6,8%) y un número muy elevado de representaciones son conceptualmente erróneas o indeterminadas (68,6%). En síntesis, podemos decir que aproximadamente un 30% (6,8% y 22,9%) tienen un conocimiento "adecuado", aunque no preciso, sobre la representación de los números dados.

Tabla 6.5. *Frecuencias y porcentajes para **2aV2** (precisión conceptual de la representación)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Todas las representaciones son conceptualmente precisas	8	6,8
2: Cuando el número no es entero se fija una aproximación adecuada (o una estimación adecuada)	27	22,9
3: Hay representaciones conceptualmente erróneas (o indeterminadas)	81	68,6
Otros	1	0,8
En blanco	1	0,8
Total	118	100,0

Dado que, el número de representaciones incorrectas es considerablemente alto, nos ha interesado saber las razones que motivan estos resultados. En tal sentido, definimos para la variable 2aV3 una serie de valores y analizamos también una importante gama de combinaciones de conflictos que ponen en evidencia con mayor precisión las dificultades de los estudiantes. (Tabla 6.6.).

Tabla 6.6. *Frecuencias y porcentajes para **2aV3** (tipos de conflictos)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Indica representaciones conceptualmente incorrectas		
1A: En la representación con fracciones, la unidad se divide siempre en 10 y/o no se hace una división adecuada de la unidad.	12	10,2
1B: Se identifican: $\frac{1}{3}$ con $\frac{3}{10}$, y/o $\frac{3}{10}$ con $\frac{10}{3}$, y/o $\frac{10}{3}$ con $\frac{33}{10}$.	21	17,8
1C: No se sabe como se ha dividido la unidad	10	8,5
2: Indica que se ha omitido algún tipo de representación		
2A: Omisión de números expresados en lenguaje coloquial	3	2,5
2B: Omisión de representaciones equivalentes de un número	5	4,2
2C: Omisión de otros números	3	2,5
1A,1B	10	8,5
1A,2 A	4	3,4
1A,2B	3	2,5
1B,1C	7	
1C,2 A	4	
1C,2B	2	1,7
En blanco	23	19,5
Otras combinaciones	11	
Total	118	100,0

Podemos observar en la tabla que el 36,5% de los estudiantes (10,2%, 17,8% y 8,5%) ha realizado representaciones conceptualmente incorrectas del tipo 1A o 1B o 1C. Esto se ve incrementado si consideramos respuestas que presentan más de un conflicto. Son los casos que en la tabla figuran como representaciones conceptualmente incorrectas de más de un tipo (1A, 1B o 1B, 1C) o combinaciones de diferentes tipos, como describiremos mas adelante. De este modo la presencia del conflicto 1A, 1B y 1C se hace aún más visible como lo demuestran los cuadros siguientes en los que extraemos y sintetizamos la información.

Si consideramos los datos de aquellos estudiantes que han manifestado exclusivamente el conflicto 1A unido a la presencia de este conflicto combinado con otros, el porcentaje se eleva al 24,6% como se observa en el cuadro 1.

Cuadro 1. *Frecuencia y porcentaje del conflicto 1A*

1A (solo)	1A y otros	Frecuencia Total	Porcentaje
12	17	29	**24,6**

El hecho de no intentar realizar una partición de la unidad que le permita graficar adecuadamente un número racional, no decimal, es posible que se halle sustentada en una fuerte tendencia al uso exclusivo de la base 10. Es decir, si la base del sistema es 10, se debe dividir la unidad es 10 partes. La concepción de que cada número tenga asociado un único punto de la recta, se pierde. Y por tanto, resulta tan válido asociar el número al punto que efectivamente le corresponde en la recta, como asociarlo a una aproximación. Tal como señalan Zazquis y Khoury (1993), los futuros maestros demuestran una comprensión insuficiente sobre la estructura del sistema de numeración decimal, lo que repercute particularmente en la representación de los números racionales.

En tal sentido, es notable cómo las representaciones en forma de fracción (32,2 %) han producido confusión en un considerable número de estudiantes. Particularmente el mayor conflicto se dio al realizar identificaciones del tipo que hemos detallado para el valor 1B de esta categoría de variable. Al considerar como representantes de un mismo número a $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{10}$, o a $\frac{10}{3}$ y $\frac{33}{10}$, muestra claramente que no se hace la debida distinción entre un número y una aproximación decimal de él. (Socas, 2001).

Cuadro 2. Frecuencia y porcentaje del conflicto 1B

1B (solo)	1B y otros	Frecuencia Total	Porcentaje
21	17	38	**32,2**

Una información no menos importante se obtuvo al observar que casi el 20% de los estudiantes no dejó explicita el tipo de unidad considerada y por lo tanto la bondad de la representación depende del "ojo" e "interpretación" del observador. Con lo cual la ambigüedad se hace presente con gran fuerza. Esto se puede apreciar en el Cuadro 3.

Cuadro3. Frecuencia y porcentaje del conflicto 1C

1C (solo)	1C y otros	Frecuencia Total	Porcentaje
10	13	23	**19,5**

En otro sentido, no solo han interesado las representaciones conceptualmente incorrectas (1), sino también qué tipo de representaciones se han omitido en la recta. Es así que encontramos que un porcentaje considerable (9,3%) omite representar los números expresados en lenguaje coloquial y el 8,5 % no considera las representaciones equivalentes, de manera explícita. Estos resultados se muestran en los cuadros 4 y 5 respectivamente.

Cuadro 4. Frecuencia y porcentaje conflicto 2A

Cuadro 5. Frecuencia y porcentaje conflicto 2B

2A (solo)	2A y otros	Frecuencia Total	Porcentaje
3	8	11	**9,3**

2B (solo)	2B y otros	Frecuencia Total	Porcentaje
5	5	10	**8,5**

Análisis del sub-ítem b) (Modelo de áreas)

El hecho de solicitar otro tipo de representación, además de la recta numérica, en este caso particular la representación rectangular de los mismos números solicitados en el ítem anterior, nos permitió confirmar, ahondar y ampliar sobre el conjunto de conflictos de representación. En este caso, interesa observar qué manejo realizan sobre el fraccionamiento de la unidad, una de las concepciones asociadas a la introducción de los números decimales en la escolaridad elemental y tratada por Ruiz (2004).

La tabla 6.7 nos muestra, en términos cuantitativos, que la situación en cuanto a grado de corrección no varía de manera significativa respecto de lo obtenido para el ítem 2a). Podemos observar que se incrementa el número de estudiantes que no responden a este ítem. En tal sentido la representación requerida parece no ser del "tipo" que se utiliza con frecuencia.

Tabla 6.7. *Frecuencias y porcentajes para* ***2bV1*** *(grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	21	17,8
1: Parcialmente bien o incompleto	64	54,2
2: Bien	24	20,3
En blanco	9	7,6
Total	118	100,0

Del igual modo que lo realizado para el ítem 2a), hemos considerado evaluar la precisión conceptual de la representación tal como se observa en la definición de la categoría de variables V2. No obstante, tal lo anticipado, los valores aquí definidos se hallan centrados en dos aspectos esenciales: la unidad elegida, y en las "formas" utilizadas en la partición del "todo" a representar.

Bajo el código 1, hemos valorado si las representaciones se presentaban en distintas unidades de medida. Con el código 2 si las representaciones eran siempre estándares, es decir, un casillero de la cuadrícula dada equivale (implícita o explícitamente) a una unidad. Por último, bajo el código 3 la presencia de una combinación de los códigos 1 y 2. En todos los casos con A se ha valorado si las particiones eran estándares y con B si las particiones realizadas revelaban formas “no tradicionales”. La tabla 6.8 muestra de manera explícita la consideración de estos valores, la frecuencia y porcentajes hallados.

Tabla 6.8. *Frecuencias y porcentajes para* ***2bV2*** *(precisión conceptual de la representación)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1A: Las gráficas se representan en distintas unidades de medida y las particiones son estándares	14	11,9
1B: Las gráficas se representan en distintas unidades de medida y las particiones representan formas no tradicionales	2	1,7
1A y 1B	3	2,5
2A: Las gráficas se representan con unidades de medidas estándares (1cuadrito= 1unidad) y las particiones son estándares.	59	50,0
2B: Las gráficas se representan con unidades de medidas estándares (1 cuadrito= 1unidad) y las particiones no son “estándares”	0	0
2A y 2B	2	1,7
3A : Se dan gráficas del tipo 1 y 2 con particiones estándares	22	18,6
3B: Se dan gráficas del tipo 1 y 2 con particiones no estándares	0	0
3ª y 3B	4	3,4
Otros	4	3,4
En blanco	8	6,8
Total	118	100,0

Como era esperable, el 50% de los estudiantes indagados representó los números solicitados con unidades de medidas estándares y con particiones clásicas (Figura 6.1).

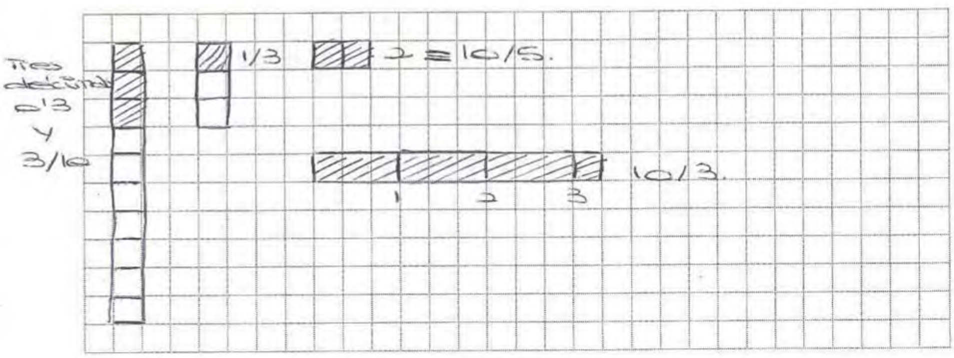


Figura 6.1. *Caso representativo del tipo de respuesta 2A*

Un 11,9 % utilizaron distintas unidades de medida, pero mantuvieron las particiones estándares (Figura 6.2).

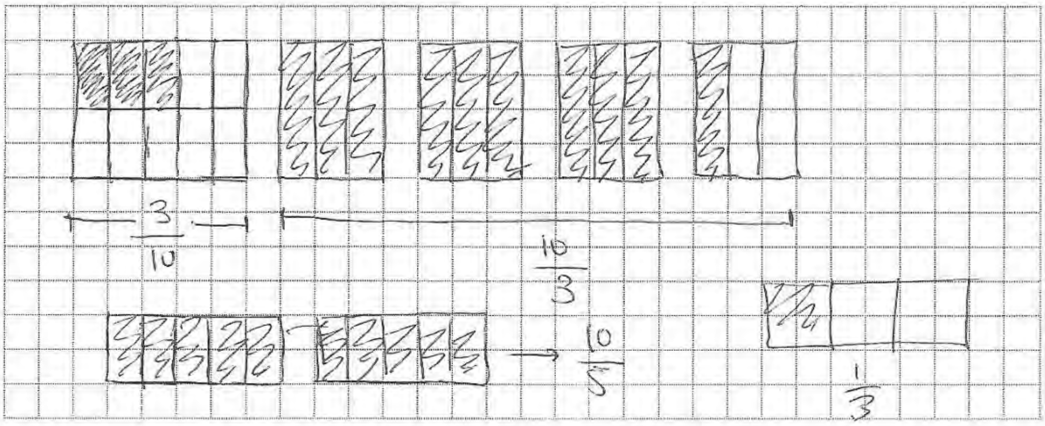


Figura 6.2.*Caso representativo del tipo de respuesta 1A*

Solo 2 estudiantes exhibieron representaciones con distintas unidades de medida y realizaron particiones “levemente diferentes”. Este número se eleva a 5 si consideramos aquellos que realizaron alguna/s representación/es de este modo (1B, 1A y 1B).

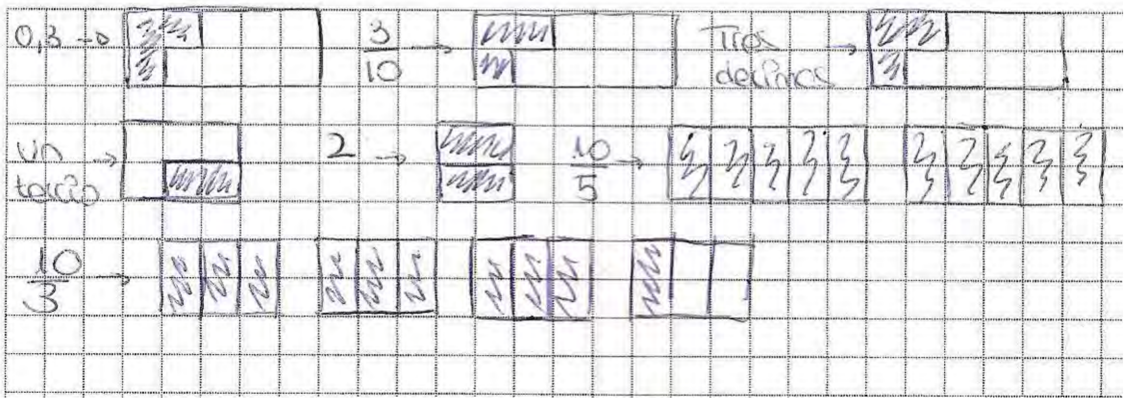


Figura 6.3. *Caso representativo del tipo de respuesta 1B*

Lo mas llamativo es que ningún estudiante logró realizar particiones no clásicas dentro de esquemas de representaciones típicas (1 casillero=1 unidad).

De todo lo analizado vemos que quienes llevan el mayor porcentaje (18,6%) son aquellos estudiantes que han combinado situaciones e hicieron representaciones del tipo 3A (1A y 2A), es decir, han utilizado en algunos casos unidades de medidas estándares y en otras distintas unidades de medida, pero las particiones las conservaron de manera estándar.

En la tabla 6.9 se describen 5 tipos de conflictos que consideramos relevantes en la situación. Es notable como cada uno de ellos, en pocos casos o en ninguno, aparece de manera exclusiva, es decir como único conflicto en el ítem. Estos conflictos aparecen de manera considerable siempre combinados con otros, como podemos observar en la Tabla 6.9.

Tabla 6.9. *Frecuencias y porcentajes para* ***2bV3*** *(tipos de conflictos)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
1: La/s gráfica/s no representa al número solicitado	1	,8
2: No se explicitan las unidades de medida usadas	8	6,8
3: No se grafican las fracciones con numerador mayor que el denominador (o se grafican mal)	0	0
4: Las o algunas graficas equivalentes no se hacen ni se mencionan.	0	0
5: Se da una misma gráfica para números distintos	0	0
1,2	11	9,3
1,2,3	13	11,0
1,2,3,4	8	6,8
1,2,3,5	3	2,5
1,2,4	5	4,2
1,2,5	2	1,7
1,3	1	,8
1,3,5	1	,8
2,3	7	5,9
2,3,4	9	7,6
2,3,4,5	1	,8
2,4	12	10,2
En blanco	31	26,3
Otros	5	4,2
Total	118	100,0

No obstante en la Sub-tabla 6.9.1., podemos observar con mayor claridad la frecuencia y porcentaje con que cada ítem aparece efectivamente.

Tabla 6.9.1. *Frecuencias y porcentajes por conflicto de la tabla 6.9.*

Código del conflicto	Frecuencia	Porcentaje
1	44	37,3
2	79	66,9
3	43	36,4
4	38	32,2
5	7	5,9

Un caso especial lo constituye el conflicto 2, dado que, en el porcentaje relevado para el mismo (66,9%), no hemos considerado a aquellos estudiantes que resolvieron el ítem bien. Es decir, aquellos que si bien lograron hacer una representación “adecuada” para

cada número solicitado no dejaron explícita la unidad de medida utilizada. Del total de estos alumnos (24), solo 2 mencionaron la unidad de medida usada.
En este análisis no pasa desapercibido el conflicto 1, puesto que un 37,3% de los futuros profesores no puede realizar una representación correcta del número solicitado, es decir, el número designado bajo la forma gráfica representa a un número distinto al que se pretende representar.
Como futuros profesores resulta importante destacar la necesidad de dominio de un Conocimiento Común del contenido. En particular, un manejo fluido de fracciones equivalentes, como un tipo de representaciones numéricas, es deseable que se haga visible en ellos. Pero no ocurre en un porcentaje considerable de estudiantes (32,2%). De igual modo, no es esperable que se den gráficas distintas para un mismo número (5), aunque ello ocurre en un porcentaje menor, no resulta despreciable dada la importancia del valor que estamos midiendo (5,9%).

Conclusiones sobre el ítem 2

Podemos observar que existen dificultades diversas para conectar los distintos tipos de representaciones, este hecho sucede también en los niños tal como los señalan en sus investigaciones Vourias y cols. (2003).
El manejo de la representación fraccionaria de un número es una de las que presenta mayores dificultades en coincidencia con Merenluoto (2004). En los futuros profesores indagados ello se ve agravado en aquellas expresiones fraccionarias en las que el numerador es mayor que el denominador. Es posible que estos alumnos posean una concepción de fraccionamiento de la unidad, posiblemente disociada del conocimiento de otras concepciones, y entonces emerja el problema mencionado debido a que "La referencia a la unidad de partida hace que quede perturbado el sentido de las fracciones mayores que la unidad" (Ruiz, 2004, p. 6).
El conflicto que se hace más visible, esto es, la falta de mención de la unidad utilizada en la representación, aparece como si fuese una cuestión obvia para el alumno. Parece darse una transferencia natural entre una concepción "abstracta" propia de la extensión natural del sistema de numeración decimal, desde el que se pasa de un modo de escrituras cómodas (representaciones abstractas) a la comprensión del fraccionamiento de la unidad, en la que se involucran otros elementos como la cantidad de una magnitud o la medida de una cantidad. Transferencia arriesgada, si es realizada sin la debida conciencia de las limitaciones que cada una posee.

Una situación notable ha sido la omisión de algunas representaciones. En algunos casos la representación de solo una de las equivalentes, y en otros la omisión de la representación verbal. En estos casos no podemos saber exactamente si se trata de omisiones por falta de conocimiento, o por manejar el supuesto implícito de la equivalencia y considerar innecesario representar las distintas "formas". Lo que sí es relevante que, en muchos casos, la representación verbal, parece no ser considerada como número. No obstante, dado que no se ha hecho una indagación posterior sobre el hecho particular solo podemos establecer estos supuestos.

En síntesis, de los significados personales manifestados por los estudiantes podemos observar que persisten dificultades vinculadas al conocimiento matemático necesario, tanto para identificar con precisión, ciertos números racionales en la recta, como así también para vincular representaciones equivalentes de las que no lo son.

Es posible, en consonancia con los señalado por Stacey et al. (2001) en su estudio, que la mayoría de los estudiantes para profesor, particularmente de primaria, no comprendan la relación entre decimales, número entero, fracciones, cero y números negativos.

6.2.3. Análisis del ítem 3 (Confusión cifra y valor posicional)

El ítem 3 ha sido seleccionado para evaluar el *contenido 2*, *Conocimiento Común* que refiere a la expresión decimal de un número racional (Valor posicional de las cifras; parte entera, parte decimal). Se trata desde el punto de vista del *Conocimiento especializado de dicho contenido,* que el futuro profesor interprete una situación/problema extraída de un libro de texto para 4º curso y con ello poder evaluar la capacidad de cuestionamiento a la precisión de las ideas matemáticas allí presentes. Por otra parte, la tarea posibilita interpretar la comprensión de los futuros profesores de cómo los estudiantes aprenden un contenido; además de ver cómo solucionar errores de los estudiantes.

El elemento de significado esencial en juego es de tipo lingüístico (Modo de redacción del problema, corrección y, como consecuencia, significado que se le puede otorgar al mismo).

Análisis del sub-ítem a) (Confusión cifra y valor posicional)

De la tabla 6.10., podemos extraer que la mayoría de los estudiantes no han podido resolver correctamente esta situación. El 44,1% no ha podido seleccionar la respuesta correcta y el 22,9% lo ha logrado de manera parcial.

Tabla 6.10. *Frecuencias y porcentajes para* ***3aV1*** *(grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	52	44,1
1: Parcialmente bien/o incompleto	27	22,9
2: Bien	32	27,1
En blanco	7	5,9
Total	118	100,0

Con la variable 3aV2, nos propusimos analizar tipos de interpretación manifestadas. Es así que en la tabla 6.11 describimos una serie de valores específicos que nos permitieron avanzar hacia nuestro objetivo.

Podemos observar que la mayoría se haya repartida de manera prácticamente equitativa entre dos polos opuestos: interpretación adecuada (37,3%) e interpretación errónea (38,1%). No obstante, no deja de ser significativa la presencia de interpretaciones contradictorias (11,9%), como el hecho de hacer interpretaciones adicionales que se señalan en el ítem (8%).

Tabla 6.11. *Frecuencias y porcentajes para* ***3aV2*** ***(****Interpretación del problema)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Interpretación adecuada	44	37,3
2: Interpretación errónea	45	38,1
3: Sobre interpretación (interpretación de cuestiones fuera de Planteo)	8	6,8
4: Interpretación contradictoria	14	11,9
En blanco	7	5,9
Total	118	100,0

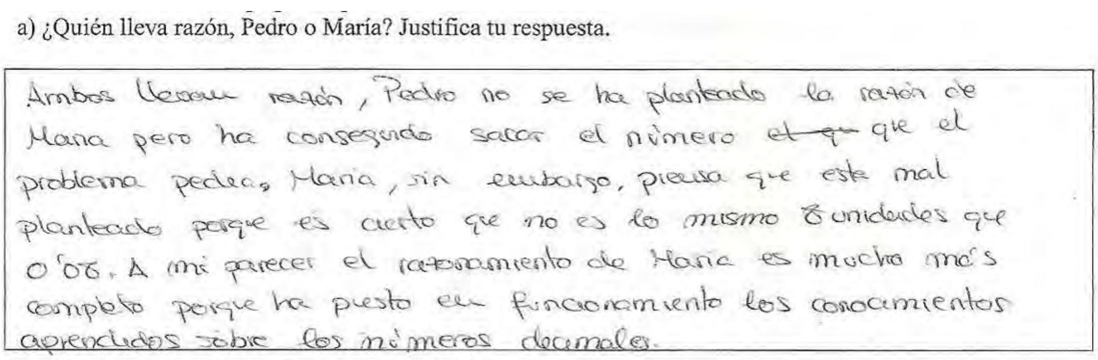
Los conflictos definidos en la Tabla 6.12., nos permitieron estudiar concretamente que tipo de inferencias se hacían producto de las interpretaciones inadecuadas.

Tal lo expresado por Baturo (2000), la comprensión del valor de un lugar requiere de un conocimiento semántico del nombre del lugar, su posición y el orden, y no de un "recitado" sintáctico utilizado frecuentemente de manera confiada. Concretamente, el conflicto 2 consistente en la no distinción entre la mitad del valor de un número y la mitad del valor de una cifra de ese número, es una clara consecuencia de lo que acabamos de expresar, en el contexto de este ítem, Por lo tanto, no es casual que resulte el conflicto que mayor aparición tiene en la evaluación (22%).

Tabla 6.12. *Frecuencias y porcentajes para **3aV3** (Tipos de conflictos)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
1: Decidir que ambos niños tienen razón	20	16,9
2: No distinguir el significado entre la mitad del valor de un número cualquiera y la mitad del valor de una cifra.	26	22,0
3: No justificar por qué María tiene razón (o justificar mal)	11	9,3
4: Decidir que el número que se pide es el que da Pedro	16	13,6
En blanco	39	33,1
Otros	6	5,0
Total	118	100,0

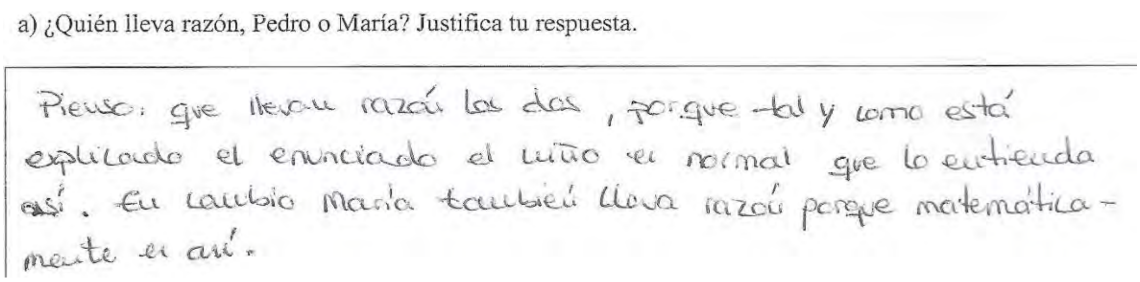
Por otra parte la decisión de que ambos niños tengan razón, supone no distinguir la diferencia conceptual que subyace a ambos argumentos. En general se toma el argumento de la niña como una explicación o con mayor profundización. A pesar de ello, no se advierte que los números obtenidos serían muy diferentes (Fig. 6.4).


a) ¿Quién lleva razón, Pedro o María? Justifica tu respuesta.

Ambos llevan razón, Pedro no se ha planteado la razón de María pero ha conseguido sacar el número ~~el q~~ que el problema pedía, María, sin embargo, piensa que está mal planteado porque es cierto que no es lo mismo 8 unidades que 0'08. A mi parecer el razonamiento de María es mucho más completo porque ha puesto en funcionamiento los conocimientos aprendidos sobre los números decimales.

Figura 6.4. *Caso representativo del tipo de conflicto 1 (variable 3aV3)*

La afirmación de que Pedro es quien tiene razón, proviene en general de una lectura que podríamos llamar de tipo "superficial" o "transparente", que no se halla centrada estrictamente en lo que el enunciado expresa, sino en supuestos que el estudiante posiblemente trae consigo desde la escolaridad temprana de manera esquemática. Se trata de un problema de significado lingüístico incorporado posiblemente de manera mecánica y que opera de manera negativa en la comprensión efectiva del ítem. (Fig. 6.5).


a) ¿Quién lleva razón, Pedro o María? Justifica tu respuesta.

Pienso: que llevan razón los dos, porque tal y como está explicado el enunciado el niño es normal que lo entienda así. En cambio María también lleva razón porque matemática-mente es así.

Figura 6.5. *Caso representativo del tipo de conflicto 1 (variable 3aV3)*

Análisis del sub-ítem b) (Redacción ítem valor posicional)

En este apartado el futuro profesor debía escribir el enunciado de manera diferente. El propósito era evitar el conflicto de interpretación manifestado entre los niños.
Según observamos en la Tabla 6.13, el porcentaje de estudiantes que logran una buena corrección del enunciado (30,5%), supera levemente el porcentaje de quienes habían resuelto correctamente la tarea en el sub-ítem a) (27,1%). Un comportamiento similar ocurrió con la resolución mal del sub-ítem a) (44,1%), porcentaje que descendió notablemente, al realizar la corrección del enunciado mal (31,4%).

Tabla 6.13. *Frecuencias y porcentajes para* ***3bV1*** *(grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	37	31,4
1: Parcialmente bien/o incompleto	23	19,5
2: Bien	36	30,5
En blanco	22	18,6
Total	118	100,0

Los datos mencionados parecen destacar que la presencia del sub-ítem b), impulsó a los futuros profesores a realizar una reflexión más profunda sobre la tarea. Un apoyo a esta afirmación puede verse en la Tabla 6.14, donde se observa que más del 70% realiza una modificación conceptual (total o parcial) del enunciado de la tarea.

Tabla 6.14. *Frecuencias y porcentajes para* ***3bV2*** *(****Tipos*** *de modificaciones realizadas al problema)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1A : Modificación conceptual total	57	48,3
1B : Modificación conceptual parcial	26	22,0
2: Parafraseo de la redacción	5	4,2
3: No hay necesidad de hacer modificaciones en la redacción	1	0,8
4: Introducir aclaraciones al problema original (sin modificar)	6	5,1
En blanco	22	18,6
Otros	1	0,8
Total	118	100,0

En la Tabla 6.15, se puede apreciar que los conflictos se manifiestan de diversas maneras y en proporciones más o menos equivalentes. A dichos conflictos los podemos sintetizar en dos grandes grupos: por un lado, aquellos relacionados con el valor y posición de una cifra (y las relaciones entre estos conceptos), y por otro, con las variantes que se introducen en la redacción del problema.

Tabla 6.15. *Frecuencias y porcentajes para* ***3bV3*** ***(****Tipos de conflictos)*

Tipo de conflicto	Frecuencia	Porcentaje
1: Dificultad de explicación o de relación entre unidades, decenas, centenas, etc., décimas, centésimas, milésimas, etc.	10	8,5
2: Conflicto entre posición y valor de una cifra	11	9,3
Conflictos 1 y 2	4	3,4
3: Para modificar el problema es suficiente con aclarar la relación entre el valor de las cifras que componen un número	8	6,8
4: Se introducen en el problema variables o constantes Nuevas.	12	10,2
5: La nueva redacción de las condiciones no son claras (en términos conceptuales)	11	9,3
En blanco	58	49,2
Otros	4	3,4
Total	118	100,0

Conclusiones sobre el ítem 3

Resulta bastante claro que el sub-ítem a) nos permite evaluar, en primera instancia el conocimiento que manifiestan los estudiantes sobre el *contenido expresión decimal de un número racional.* Específicamente, el manejo de los objetos que forman parte de dicha expresión (posición de una cifra, valor de la cifra según la posición, relación entre las posiciones y valores de las cifras). En tal sentido, se observa que los significados personales de los estudiantes reflejan un conocimiento adecuado de este contenido en tan solo el 27,1% de ellos. Tal como ya señalaban Zazkis y Khoury (1993), los futuros profesores demuestran insuficiente comprensión sobre la estructura del sistema de numeración y en particular sobre la representación de números racionales.

Otro aspecto que interesaba evaluar, era la capacidad de cuestionamiento a la precisión de las ideas matemáticas presentes en la descripción de la situación (c*onocimiento especializado del contenido)*. Cómo ya señalamos en el párrafo anterior el número de respuestas correctas al sub-ítem a) es muy bajo. Y si bien, el enunciado sub-ítem b), ha motivado al futuro profesor a cuestionar la respuesta dada, observamos, no obstante que un alto porcentaje considera que ambos niños llevan razón en sus argumentos. Ello nos indica que pese a los intentos de encontrar razones que justifiquen las diferencias, la ausencia de un conocimiento profundo del contenido, les impide, en la mayoría de los casos, detectar el problema y proporcionar justificaciones pertinentes.

Por último, si bien se observa un notable esfuerzo por intentar una redacción nueva que no genere conflictos en la interpretación por parte de los niños, la modificación se manifiesta con diversos conflictos. Evidentemente, como sostiene Llinares (2003), para el maestro es importante la consideración de las características de los números racionales, como así también los procesos de construcción de conocimiento de los niños. Aspectos estos que aparecen difusos.

En síntesis, más allá de los resultados numéricos, y de las imprecisiones percibidas, consideramos rescatable que este tipo de ítem, permite poner en descubierto tanto los conflictos como los conocimientos potenciales que posee un futuro profesor en relación al conocimiento especializado y el conocimiento vinculado al estudiante, en cuanto al contenido en cuestión. Razón más que suficiente para que opere como fuente de indicadores de futuras correcciones en la formación.

Coincidiendo con Steinle (2004), los docentes necesitan examinar de manera crítica los textos y las actividades que utilizan en sus clases para determinar si los estudiantes con concepciones erróneas pueden superar esos problemas. Más aún los docentes necesitan reconsiderar sus creencias implícitas que se hallan a la base del sistema de numeración decimal.

6.2.4. Análisis del ítem 4 (Suprimir e intercalar un cero)

Este ítem nos permitió realizar una indagación específica, en el sentido de poder profundizar si los conflictos vinculados al conocimiento común que se detectaron en el ítem 3, persisten o se profundizan cuando se trata con expresiones decimales de números racionales en las que interviene un número particular. Se trata de la presencia del cero en alguna de las cifras del número, y se plantea en un contexto de comparación. Nuevamente se ponen en juego aspectos del *Conocimiento especializado del contenido.*

En este caso, se trata de evaluar la comprensión de métodos de solución ante una tarea, que si bien no es de aplicación directa para un niño de la escolaridad elemental, le brinda al futuro profesor estrategias y perspectivas para la selección, variación y manejo de nuevas tareas. En este sentido, en lo que refiere al sub-ítem c), el proceso de generalización requerido puede considerarse también como un *conocimiento ampliado del contenido.*

Específicamente, la actividad de comparar dos números racionales expresados en forma decimal, requiere de un conocimiento de la comparación de la posición, combinado con un conocimiento del orden en la posición. En tal sentido, el cero juega un rol importante en el conocimiento sintáctico asociado a la conformación del número, pensamiento que muchas veces puede estar o no asociado con el conocimiento semántico necesario para el reagrupamiento, por ejemplo, de décimas en centésimas, como de centésimas a décimas (Baturo, 2000). Por otra parte cuando se trata con el cero, dada su larga, compleja y controvertida historia hace pensar que estamos en presencia de un claro ejemplo de obstáculo epistemológico tal lo señalado por D`Amore y Fandiño (2009).

Análisis del sub-ítem a) (Suprimir 0)

Al solicitarse en este ítem la posibilidad de suprimir una cifra para obtener un número mayor o menor que el dado, en particular si esa cifra es cero, se pone en juego de manera contundente el rol que juega el valor de una cifra en la constitución del número decimal según la posición que tome dicha cifra. Por otra parte, como hemos anticipado el cero ya sea, como cifra, como valor, como posición que ocupa en la representación de un número permite poner en descubierto la verdadera comprensión de estas nociones, y por ende la concepción de número decimal.

En la tabla 6.16, se observa claramente que un buen porcentaje de estudiantes, cuando se le solicita la posibilidad de suprimir un cero en un número determinado, no tiene dificultades a la hora de obtener un número mayor y otro menor (47,5%). No obstante, aparece un porcentaje similar (46,6%), que muestran algunos conflictos en relación a esta actividad.

Tabla 6.16. *Frecuencias y porcentajes para* ***4aV1*** *(grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	6	5,1
1: Parcialmente bien o incompleto	55	46,6
2: Bien	56	47,5

En blanco	1	0,8
Total	118	100,0

En estos últimos casos en los que aparecen algunos conflictos, hemos realizado una descripción de ellos en la tabla 6.17. Como era de esperar es ínfimo el porcentaje de estudiantes que han afirmado que no se podía suprimir un cero para obtener un número mayor o un número menor. Del mismo modo, solo 3 alumnos dieron evidencias de no comprender el enunciado del problema. Lo que si apareció con gran fortaleza es el problema de la argumentación.

Existe una asociación directa de resultados entre los valores 1, de la tabla 6.16, y 3 de la Tabla 6.17., dado que el grado de corrección regular (1), se ha debido en casi su totalidad al conflicto 3 (dificultades de argumentación). Tal como hemos anticipado, el señalamiento que hace Baturo (2000), parece cumplirse. Existe un reconocimiento de tipo "sintáctico" de la modificación que se produce en el número cuando se suprime un cero. Pero la justificación de porqué las relaciones dadas son válidas, esto es, el conocimiento semántico de la conformación del número se halla ausente o de manera errónea en casi el 45% de los estudiantes. Nuevamente como en el ítem 3, el uso de las décimas, centésimas, etc., y sus relaciones no se hacen presentes como medio de justificación. Parece que el apoyo a las respuestas se hallan más bien asociados a esquemas previos ligados a la comparación de números enteros.

Tabla 6.17. *Frecuencias y porcentajes para **4aV3** (Tipos de conflictos)*

Tipo de conflicto	Frecuencia	Porcentaje
1: No se puede suprimir un cero para obtener un número mayor	1	0,8
2: No se puede suprimir un cero para obtener un número menor	3	2,5
3: Ausencia de argumentación, argumentación incompleta o, argumentación errónea	53	44,9
4: Incomprensión del enunciado del ítem	3	2,5
1,2: Presencia de los conflictos 1 y 2.	1	0,8
1,4: Presencia de los conflictos 1 y 4.	1	0,8
En blanco	56	47,4
Total	118	100,0

Análisis del sub-ítem b) (Intercalar 0)

Comprender el valor del lugar significa también identificar aquellos números cuyos valores no alteran por la inserción de un cero. Por ejemplo, la inserci ón de un cero a la izquierda o un cero a la derecha en el número 3,78 (03,78 y 3,780). Este hecho requiere de una clara comprensión del orden de los lugares, para que las inserciones internas que sí alteran el valor original de la posición, sean reconocidas. (Baturo, 2000). Precisamente, en este ítem lo que se solicita es determinar, si existen, las posibilidades de intercalar un cero en el número 19,38 para obtener un número mayor y un número menor que él. En la tabla 6.18., podemos observar que solo el 18,6% puede dar la respuesta correcta. No obstante, casi el 73% avanza parcialmente en dicha respuesta.

Tabla 6.18. *Frecuencias y porcentajes para* ***4bV1*** *(grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	10	8,5
1: Parcialmente bien o incompleto	86	72,9
2: Bien	22	18,6
Total	118	100,0

A los fines de analizar el tipo de dificultades que posee la mayoría de los estudiantes (81,4%), es que evaluamos una serie de conflictos presentes en la resolución de la actividad. La descripción y comportamiento de esos conflictos se puede ver en la Tabla 6.19.

Resulta evidente que, la omisión de posibilidades que cumplen con la condición solicitada y la problemática de la argumentación, encabezan el porcentual. Si consideramos los valores 1, 3 y 5 de la Tabla, vemos que 43 estudiantes (36,5%) no exhiben todos los números que cumplen con las condiciones requeridas. Más aún, 68 estudiantes (57,7%) tienen dificultades, u omite las razones que garantizan que los números exhibidos cumplen con la condición pedida.

Si bien no resulta tan significativo, en términos cuantitativos, no se puede dejar de mencionar el hecho que estos futuros profesores poseen confusiones con el rol del cero en la constitución de un número decimal, especialmente en lo que atañe a su "parte decimal".

Tabla 7.19. *Frecuencias y porcentajes para* ***4bV3*** *(Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: Ausencia de argumentación, argumentación incompleta o errónea	37	31,4
2: Confusión con el rol del cero en la parte decimal del número	9	7,6

3: Omisión de posibilidades que permite la condición dada	12	10,2
4: Incomprensión de los términos "intercalar" y/o "suprimir"	7	5,9
5: Combinación de 1y 3	31	26,3
En blanco	22	18,6
Total	118	100,0

Análisis del sub-ítem c) (Intercalar 0, generalización)

Al solicitar un "tipo de generalización", que se acota en el tratamiento de un número decimal compuesto por unidades, decenas, centenas, décimas y centésima, se pretendió observar si los estudiantes podían demostrar transferencia de los conocimientos aplicados en las dos situaciones particulares presentadas previamente. Es decir, observar la posibilidad de adquisición de un conocimiento que les permita una mirada integral del campo de problemas insertos en este contexto, y desde una perspectiva global (Conocimiento ampliado).

Naturalmente, el número de conflictos asciende gradualmente y el porcentaje de estudiantes que puede realizar este tipo de procedimiento es considerablemente bajo, (12,7%), tal como puede apreciarse en la tabla 6.20.

Tabla 6.20. *Frecuencias y porcentajes para* ***4cV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	21	17,8
1: Parcialmente bien o incompleto	79	66,9
2: Bien	15	12,7
En blanco	3	2,5
Total	118	100,0

Por las características del ítem, hemos valorado el comportamiento del mismo tipo de conflictos que para el sub-ítem b). Y nuevamente, los conflictos que centran la atención, y aún agravados, siguen siendo la argumentación y la no consideración de todos los casos que cumplen una condición, esto ocurre en el 65% de los estudiantes. Este tipo de procedimientos, propios del hacer matemático, parecen no estar desarrollados.

Tabla 6.21. *Frecuencias y porcentajes para* ***4cV3*** *(Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: Ausencia de argumentación o argumentación incompleta	8	6,8
2: Confusión con el rol del cero en la parte decimal del número	8	6,8
3: Omisión de posibilidades que permite la condición dada	32	27,1

4: Incomprensión de los términos “intercalar” y/o “suprimir”	5	4,2
5: presencia de los conflictos 1 y 2	7	5,9
6: Presencia de los conflictos 1 y 3	37	31,4
En blanco	18	15,2
Otros	3	2,5
Total	118	100,0

Conclusiones del ítem

En términos generales, podemos concluir que el hecho de trabajar con la expresión decimal de números particulares, en los dos primeros sub-ítems, las dificultades en relación a la posición y el valor que asume una cifra según esa posición, no ha sido el eje central. A excepción de algunos casos, donde precisamente es el cero el que ha generado dificultades, especialmente en la “parte decimal” de la expresión.

Las tensiones que se mostraron con mayor evidencia, derivan básicamente de tres vertientes:

- La ausencia de argumentación a las respuestas dadas, lo que se manifiesta consistente con lo ocurrido en el ítem anterior.
- La omisión de casos que cumplen con la condición pedida. Ello a pesar de mencionar de manera explicita en la tarea “escribe todas las posibilidades”.
- El intento de generalizar se ha visto como la problemática central, solo en torno al 13% logra dar las condiciones.

En síntesis, podemos concluir que, el trabajar con casos particulares no ha favorecido especialmente el proceso de argumentación. Esto refuerza, la posición que el procedimiento realizado en la búsqueda de los números solicitados, no se halla sustentado en los conceptos de valor y posición, décimas, centésimas, etc. y sus relaciones. Se trata mas bien de un trabajo sintáctico, aferrado a conocimientos previos sobre los números enteros, a supuestos, pero carentes del sustento semántico necesario para manejar posibilidades, limitaciones y fundamentarlas.

Por otra parte, tanto los procesos de búsqueda y agotamiento de casos posibles, como la generalización no son comprendidos. No obstante, el ítem contempla tareas que requieren justificación desde una perspectiva comprensiva como la sostenida por Harel y Sowder (2007).

Po tanto el ítem pone en evidencia carencias en cuanto a *conocimiento del contenido,* especialmente en lo referente a aspectos básicos del sistema de numeración decimal. Tal como señalan Steinle, Stacey y Chambers (2006), la buena comprensión del sistema de numeración decimal es esencial para tratar con medidas y números. Por otra parte los futuros profesores demuestran incapacidad para manejar procesos vinculados a la argumentación, ello se halla en consonancia con resultados de investigación de Chick (2003). Estos hechos muestran debilidad, también respecto al *conocimiento especializado y ampliado de este contenido.*

6.2.5. Análisis del ítem 5 (reconocimiento de decimales)

Tal como lo hemos expresado en el capítulo 5, este ítem se focalizó en evaluar el concepto/ definición de número decimal. Para ello, se plantean a través de cada sub-ítem números racionales expresados en forma decimal. Cada uno de ellos, por su parte, exige de una justificación que permite evaluar cómo se trata la relación entre número y expresión decimal de un número racional.

Análisis del sub-ítem a) (Decimal finito 1,345678)

A la pregunta, ¿representa un número decimal la expresión 1,3456789?, podemos observar en la tabla 6.22., que solo el 28,8% de los alumnos pudieron afirmar que si lo era dando una justificación adecuada.

Tabla 7.22. *Frecuencias y porcentajes para* ***5aV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	21	17,8
1: Parcialmente bien o incompleto	57	48,3
2: Bien	34	28,8
En blanco	6	5,1
Total	118	100,0

A fines de observar qué criterio los llevó a tomar la decisión, analizamos los datos obtenidos para los valores de la variable 5aV2. En la Tabla 6.23 podemos apreciar que un porcentaje elevado, el 82%, decide si el número es, o no, decimal mirando la "forma" de la representación. Es decir, observando las características que tiene el "número con coma". Básicamente, observan si el número de cifras que componen "la parte decimal" del número es o no finita y si hay cifras periódicas. Además, usan el mismo criterio para avalar la decisión. En este caso, como el número cumple con la condición de finitud y no periodicidad, al estudiante le alcanza para tomar la decisión. Tal como manifiestan Stacey y Steinle (2001), las razones por las que deciden en general no son verdaderas o son insuficientes. No obstante, existe un 22% que justifica el carácter decimal del número a través de una definición, o de una técnica de conversión.

Tabla 6.23. *Frecuencias y porcentajes para **5aV2** (Tipo de decisión)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Se observa las características de la representación	82	69,5
2: Se aplica alguna concepción de número decimal (definición, caracterización o técnica de conversión)	26	22,0
3: No se explicita (ausencia de argumentación)	4	3,4
En blanco	6	5,1
Total	118	100,0

En tal sentido, a través de los conflictos analizados en la variable 5aV3 (Tabla 6.24), podemos precisar que, la mayoría de los estudiantes que responden al ítem (45,7%), argumentan que el número es decimal porque "su expresión es decimal, es decir un número con coma", sin considerar que cualquier número racional puede ser expresado en forma decimal, aún aquellos que no son números decimales.

Tabla 6.24. *Frecuencias y porcentajes para **5aV3** (Tipo de conflicto)*

Tipo de conflicto	Frecuencia	Porcentaje
1: Un número es decimal porque su expresión es decimal (con coma)	54	45,7
2: Un número decimal es una aproximación de un número racional	4	3,4
3: Si un número es decimal, en la "parte decimal" no hay repetición de cifras	3	2,5
En blanco	40	33,9
Otros	17	14,3
Total	118	100,0

Análisis del sub-ítem b) (Periódico puro 0,4545)

Recordamos que en este ítem, se preguntó si el número 0,454545…. (45 repetido indefinidamente) es decimal, y se solicitó una justificación. Es notable, como puede observarse en la Tabla 6.25, que tan solo un 8,5% de los futuros profesores respondió de manera correcta y que el 11,9% lo hizo parcialmente bien.

Tabla 6.25. *Frecuencias y porcentajes para* ***5bV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	86	72,9
1: Parcialmente bien o incompleto	14	11,9
2: Bien	10	8,5
En blanco	8	6,8
Total	118	100,0

En la Tabla 6.26, se analizan tipos de decisión adoptadas por los estudiantes. Nuevamente, vemos que un alto y mayoritario porcentaje (59,3%) persiste en la toma de decisión observando solo las características de la representación. En este caso, la decisión mayoritaria de que el número es decimal, está basada en la forma de representación, esto es, en que la expresión del número es decimal.

Tabla 6.26. *Frecuencias y porcentajes para* ***5bV2*** *(Tipo de decisión)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Se observa las características de la representación	70	59,3
2: Se aplica alguna concepción de número decimal (definición, caracterización o técnica de conversión)	39	33,1
3: No se explicita (ausencia de argumentación)	1	0,8
En blanco	8	6,8
Total	118	100,0

Podemos profundizar esta información observando, además, la presencia de frases estereotipadas como justificantes de la decisión. Frases del tipo "un número es decimal porque es periódico", se lleva el 40,7% de las justificaciones, quedando en este caso en segundo plano la expresión "un número es decimal porque lleva coma" (13,5%).

Como contrapartida, quienes deciden que el número no es decimal, a veces lo hacen con una argumentación que resulta insuficiente en términos conceptuales. La decisión, por ejemplo, de que un número no puede ser decimal porque su expresión decimal es infinita, deja de lado la contemplación de aquellos números decimales que son casos especiales (períodos 0 o 9), y que un futuro maestro debería manejar como conocimiento especializado del contenido.

Tabla 6.27. *Frecuencias y porcentajes para* ***5bV3*** *(Tipo de conflicto)*

Tipo de conflicto	Frecuencia	Porcentaje
1: Un número es decimal porque su expresión es decimal (con coma)	16	13,5
2: Un número decimal si se puede escribir como fracción	8	6,8
3: Un número es decimal porque es periódico	48	40,7
4: La expresión decimal infinita de un número no corresponde a un número decimal	16	13,6
5: Un número decimal es menor que 1 unidad (0,….)	5	4,2
En blanco	17	14,4
Otros	8	6,8
Total	118	100,0

Análisis del sub-ítem c) (Decimal 4,10999)

En este ítem se solicitó averiguar si el número 4,10999…. (9 repetido indefinidamente), era decimal. Este caso, del mismo modo que en el ítem anterior, la "forma" en que el número se halla expresado determinó la decisión. Como consecuencia, casi la totalidad de los alumnos tuvieron dificultades en determinar que el número era decimal, (76,3%). Solo 3 alumnos pudieron decidir y argumentar la decisión.

Tabla 6.28. *Frecuencias y porcentajes para* ***5cV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	90	76,3
1: Parcialmente bien o incompleto	11	9,3
2: Bien	3	2,5
En blanco	14	11,9
Total	118	100,0

En este caso, el problema surgió por observar solo las características de periodicidad reflejada en su expresión decimal. A partir de ello, sin más análisis, el 60,2% tomó la decisión observando el tipo de dígitos que componen el número. Mientras que un 25,4% aplicó alguna concepción de número decimal como puede observarse en la Tabla 6.29.

Tabla 6.29. *Frecuencias y porcentajes para* ***5cV2*** *(Tipo de decisión)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Se observa las características de la representación	71	60,2
2: Se aplica alguna concepción de número decimal (definición, caracterización o técnica de conversión)	30	25,4
3: No se explicita (ausencia de argumentación)	2	1,7
En blanco	14	11,9
Otros	1	0,8
Total	118	100,0

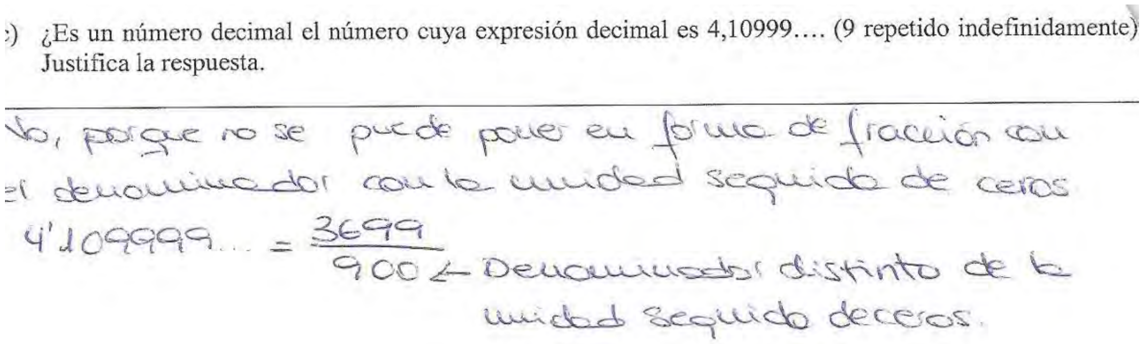
Del hecho que la estrategia mayoritaria se centrara en observar las características de la representación del número, los conflictos que se pusieron de manifiesto, con distintos y repartidos grados de presencia, estuvieron relacionados con expresiones tales como: "el número era decimal porque su expresión era decimal", por ser "un número periódico", o simplemente "porque el número dado puede ser escrito en forma de fracción" (sin importar de que tipo). En la Tabla 6.30 se puede observar la frecuencia y el porcentaje con que estos conflictos aparecieron.

Tabla 6.30. *Frecuencias y porcentajes para* ***5cV3*** *(Tipo de conflicto)*

Tipo de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: Un número es decimal porque su expresión es decimal (con coma)	27	22,9
2: Un número decimal si se puede escribir como fracción	9	7,6
3: Un número es decimal porque es periódico	36	31,3
4: La expresión decimal infinita de un número no corresponde a un número decimal	19	16,1
En blanco	17	13,6
Otros	10	8,5
Total	118	100,0

Cabe destacar además que, en este ítem, varios estudiantes recurrieron a una técnica para transformar el número dado, y de ese modo poder determinar fehacientemente si dicho número era o no decimal. Intentaron realizar la conversión a una fracción; no obstante, la falta de "visión global" sobre este número, les impidió en muchos casos llegar a la obtención de la fracción decimal. (Solo por el hecho de no simplificar la fracción obtenida luego de aplicar la técnica de conversión). Ello demuestra una falta de manejo conceptual del número, que le impide anticipar su carácter y poder ejercer algún tipo de control sobre lo que su argumentación debería dejar reflejada.

El caso mostrado en la figura 6.6, permite visualizar la situación descrita.


:) ¿Es un número decimal el número cuya expresión decimal es 4,10999.... (9 repetido indefinidamente)
Justifica la respuesta.

No, porque no se puede poner en forma de fracción con el denominador con la unidad seguido de ceros

$4'109999... = \frac{3699}{900}$ ← Denominador distinto de la unidad seguido deceros.

Figura 6.6. *Caso de afirmación incorrecta, luego de aplicar una técnica de conversión.*

Análisis del sub-ítem d) (Decimal natural 3)

Dentro del ítem 5, ha llamado particularmente la atención lo ocurrido con este sub-ítem. Ante la pregunta si el número 3 es decimal, el 65,3% respondió que no. Y tan solo el 28% respondió correctamente dando una justificación adecuada.

Tabla 6.31. *Frecuencias y porcentajes para* ***5dV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	78	65,3
1: Parcialmente bien o incompleto	6	5,1
2: Bien	33	28,0
En blanco	1	1,7
Total	118	100,0

Observamos que la atención se polarizó esencialmente en dos aspectos: la característica de la representación y la aplicación de alguna concepción de número decimal. Esto se puede observar en la Tabla 6.32.

Tabla 6.32. *Frecuencias y porcentajes para* ***5dV2*** *(Tipo de decisión)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
1: Se observa las características de la representación	54	45,8
2: Se aplica alguna concepción de número decimal (definición, caracterización o técnica de conversión)	60	50,8
3: No se explicita (ausencia de argumentación)	3	2,5
En blanco	1	0,8
Total	118	100,0

Más aún, a la hora de indagar específicamente sobre el tipo de conflicto manifestado por los estudiantes, observamos que la mayoría utilizo una argumentación de tipo conceptual. La expresión, "los números enteros no son decimales" se presento en casi la totalidad de los casos que respondieron al ítem. En grado ínfimo, aparecieron otros dos conflictos como puede verse en la Tabla 6.33. Es posible que esta resulte otra de las "herencias" que nos deja el conocimiento previo de los números naturales y la concepción de número decimal que prevalece en la mayoría de los estudiantes. La concepción de número decimal como "un número con coma", adopta la suficiente fortaleza, para no atribuir el carácter decimal a un número natural, dado que este "no lleva coma". Esta es una de las dificultades poco encontradas en la literatura y que aparece con fuerza en la práctica.

Tabla 6.33. *Frecuencias y porcentajes para* ***5dV3*** *(Tipo de conflicto)*

Tipo de conflicto	Frecuencia	Porcentaje
1: Los números enteros no son decimales (como si entero fuese lo contrario de decimal).	71	60,1
2: Un número natural es decimal porque se puede convertir en fracción.	7	5,9
3: Un número no se puede representar mediante una fracción	3	2,5
En blanco	34	28,8
Otros	3	2,5
Total	118	100,0

Conclusiones del ítem

La configuración epistémica realizada para este ítem y que exhibimos en el Cap.5, delataba la necesidad de usar definiciones, propiedades, técnicas y/o argumentos para garantizar la afirmación dada para cada sub-ítem. Precisamente ese era nuestro objetivo central, evaluar el carácter decimal de cuatro números racionales, expresados en forma decimal. Coherentemente con lo ocurrido en el ítem 1, la definición mas utilizada fue la caracterización como expresión polinómica. Precisamente la expresión decimal de cada número permitía la aplicación directa de esa concepción. No obstante, como habíamos anticipado, observar solo el comportamiento de las cifras de un número, generalmente no es suficiente para determinar su estatus. Evidentemente, la concepción polinómica que prevalecía en el ítem 1, al aplicarse a este ítem puso en descubierto las limitaciones de la misma. Esto se corrobora cuando se afirma que ciertos números son decimales porque tienen coma, o porque pueden ser convertidos en fracción. O, en su defecto, dejan de serlo por ser periódicos, o por ser números enteros. Este conjunto de afirmaciones incompletas y/o falsas provienen de "mirar" la forma de escritura sin tener en cuenta las propiedades que caracterizan a cada tipo de número. Esto ya ha sido señalado por investigadores como Socas (2001); Sirvent(2002); Michaelidou, Gagatsis y Pitta-Pantazi (2004) entre otros.

La selección de los números que componen el ítem, junto a nuestro estudio a-priori permitió una evaluación fehaciente de la concepción mayoritaria de número decimal, manifestada en el ítem 1, a través de su aplicación. Por otra parte, permitió la confirmación del tipo de conflictos ya anticipados, y otros que son consecuentes con los resultados obtenidos en el ítem 2.

6.2.6. Análisis del ítem 6 (escritura decimal)

Este ítem, en términos generales, está centrado en la evaluar si el estudiante hace distinciones entre el concepto de número y sus distintas formas de expresión, en especial si logra distinguir un número decimal de la expresión decimal de un número.

Análisis del sub-ítem a) (Escritura decimal 1/5)

Si recordamos que en este ítem se preguntaba si la expresión $\frac{1}{5}$ representa un número decimal, la mayoría ha respondido de manera correcta y ha podido exhibir su escritura decimal (83,1%). Con lo cual el ítem prácticamente no ha ofrecido dificultades.

Tabla 6.34. *Frecuencias y porcentajes para **6aV1** (Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	5	4,2
1: Parcialmente bien o incompleto	10	8,5
2: Bien	98	83,1
En blanco	5	4,2
Total	118	100,0

Lo que si llama la atención es que, no obstante estos resultados, un porcentaje considerable (58,5%) no explica las razones de porqué el número es decimal y se limita a exhibir la expresión decimal que representa al número. Otros, el 23,7%, determinan que el número es decimal a partir de una definición o una caracterización, y menor es el porcentaje de alumnos que toma la decisión analizando su expresión decimal (13,6%).

Tabla 6.35. *Frecuencias y porcentajes para* ***6aV2*** *(Criterio usado para la decisión)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: El número es o no es decimal analizando su representación decimal (expresión con coma)	16	13,6
2: El número es o no es decimal analizado por una concepción definición/ caracterización	28	23,7
3: No se explicita (ausencia de argumentación	69	58,5
En blanco	5	4,2
Total	118	100,0

Por lo que podemos concluir sobre este ítem, que los conflictos son prácticamente irrelevantes según se observa en la Tabla 6.36.

Tabla 6.36. *Frecuencias y porcentajes para* ***6aV3*** *(Tipo de conflicto)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
1: No se da la expresión decimal	2	1,7
2: No se dice si el número es decimal	6	5,1
En blanco (sin conflictos)	103	87,2
Otros	7	5,9
Total	118	100,0

Análisis del sub-ítem b) (Escritura decimal 1/3)

Cuando se les pregunta si $\frac{1}{3}$ representa un número decimal, la situación cambia drásticamente y el 69,5% resuelve mal el ítem y solo el 18,6% responde correctamente (Tabla 6.37).

Tabla 6.37. *Frecuencias y porcentajes para* ***6bV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	82	69,5
1: Parcialmente bien o incompleto	7	5,9
2: Bien	22	18,6
En blanco	7	5,9
Total	118	100,0

La ausencia de argumentación, persiste en altos porcentajes, al igual que en el ítem a) y sigue siendo importante el porcentaje de quienes analizan la situación a partir de una concepción o caracterización.

Tabla 6.38. *Frecuencias y porcentajes para* ***6bV2*** *(Criterio usado para la decisión)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: El número es o no es decimal analizando su representación decimal (expresión con coma)	11	9,3
2: El número es o no es decimal analizado por una concepción definición/ caracterización	42	35,6
3: No se explicita (ausencia de argumentación	58	49,1
En blanco	7	5,9
Total	118	100,0

Cuando profundizamos en las razones que llevaron a la mayoría de los estudiantes a determinar que el número dado era decimal, pudimos observar que el mayor grupo (29,7%) decide que es decimal porque su expresión es finita, mostrando que $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$

Este curioso hecho, ya había sido observado en la primera prueba tomada a alumnos que iniciaban la carrera (Konic, Godino, Castro y Rivas, 2007). En otros casos se da una aproximación decimal como equivalente al número dado (11,9%), también como respuesta se da una expresión decimal infinita, en contra de lo pedido (11%); o se afirma que 1/3 es un número decimal, aunque reconozcan que no tiene una expresión decimal finita que lo represente (9,3%).

Tabla 7.39. *Frecuencias y porcentajes para* ***6bV3*** *(Tipo de conflicto)*

Tipo de conflicto	Frecuencia	Porcentaje
1: La expresión decimal finita de 1/3 es $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$	35	29,7
2: 1/3 no tiene expresión decimal finita, pero es un número decimal	11	9,3
3: $\frac{1}{3} = 0,3$ o $\frac{1}{3} = 0,333$, etc.	14	11,9
4: Se da una expresión decimal infinita	13	11,0
5: Se omite decir si el número es decimal o no	10	8,5
En blanco	29	24,6
Otros	6	5,0
Total	118	100,0

Análisis del sub-ítem c) (Escritura decimal de π)

En cuanto al análisis del número π, solo el 22% pudo dar una respuesta correcta. No obstante, el 66,9% responde que el número es decimal e incluso dan una aproximación decimal, con dos o tres cifras decimales como representantes de este número (Tabla 6.40).

Tabla 6.40. *Frecuencias y porcentajes para* ***6cV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	79	66,9
1: Parcialmente bien o incompleto	6	5,1
2: Bien	26	22,0
En blanco	7	5,9
Total	118	100,0

A pesar del uso frecuente que se hace de este número, desde edades muy tempranas, su estatus como número parece no evolucionar a lo largo de toda la formación recibida durante el período escolar obligatorio y aún en la formación superior (Konic, 2007). Una muestra clara de esto es que, tal como se observa en la Tabla 6.41, el 59,3% de los futuros profesores no dan razones que justifiquen el carácter decimal o no decimal del número π, ni que la expresión decimal que exhiben es una aproximación decimal de dicho número.

Tabla 6.41. *Frecuencias y porcentajes para* ***6cV2*** *(Criterio usado para la decisión)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: El número es o no es decimal analizando su representación decimal (expresión con coma)	20	16,9
2: El número es o no es decimal analizado por una concepción definición/ caracterización	21	17,8
3: No se explicita (ausencia de argumentación	70	59,3
En blanco	7	5,9
Total	118	100,0

Lo dicho anteriormente se corrobora al analizar el tipo de conflictos que se ponen de manifiesto al analizar las respuestas. Que π es un número decimal y/o que puede ser expresado con un número decimal finito son los resultados que más se ponen evidencia, tal como se muestra en la Tabla 6.42. En varios casos (12,7%), se omite determinar el carácter del número.

Tabla 6.42. *Frecuencias y porcentajes para* ***6cV3*** *(Tipo de conflicto)*

Tipo de conflicto	Frecuencia	Porcentaje
1: π es decimal porque se puede expresar como $\pi = 3.14$, o $\pi = 3.1415$, etc.	31	26,3
2: π tiene una expresión decimal periódica	3	2,5
3: π es un número decimal (o se da una expresión para π)	32	27,1
4: Se omite decir si el número es o no decimal	15	12,7
En blanco	33	28,00
Otros	4	3,4
Total	118	100,0

Conclusiones del ítem

En este ítem hemos focalizado nuestra atención en explorar las relaciones que establecen, los estudiantes para profesor, entre número decimal, expresión decimal y aproximación decimal de un número. Consideramos que dicha distinción resulta esencial para evitar conceptualizaciones y usos erróneos en los diversos contextos en que la expresión decimal de un número, en particular en su forma polinómica, es ampliamente utilizada.

Una de las consecuencias importantes de los resultados obtenidos, con respecto a 1/3 y π, del mismo modos que ocurrió en el estudio exploratorio realizado en el Capitulo 3, es que las definiciones de número racional e irracional no se encuentran disponibles en su bagaje de conocimientos, cuestión que confirman Zazquis y Sirotic (2004) en sus investigaciones también con futuros profesores.

Como manifiesta Sirvent (2002), para los alumnos las expresiones decimales parecen ser todas del mismo tipo, sin conciencia significativa de la entidad numérica que representan o dejan de representar.

6.2.7. Análisis del ítem 7 (Decimal siguiente)

Tras el análisis de una situación hipotética, en la que se dan algunas respuestas de niños, a las preguntas, *¿Existe un número natural que siga inmediatamente a 23,5? ¿Cuál, o cuales serían?* y, *¿Existe un número decimal que siga inmediatamente a 32,13? ¿Cuál,* *o cuales serían?*, encontramos que, el 51,7% responde de manera totalmente incorrecta, el 35,6% lo hace con algún tipo de error u omisión y solo 4 alumnos logran dar una respuesta adecuada y fundamentada al ítem (Tabla 6.43).

Tabla 6.43. *Frecuencias y porcentajes para* ***7V1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	61	51,7
1: Parcialmente bien o incompleto	42	35,6
2: Bien	4	3,4
En blanco	11	9,3
Total	118	100,0

Al momento de analizar en que ámbito numérico se le atribuyó validez a la propiedad, encontramos con que el mayor porcentaje de estudiantes (33,9%) transfirió esta propiedad a los números decimales; un porcentaje considerable (21,2%) no dio referencias explicitas acerca del ámbito de validez, y en igualdad porcentual (11,9%) se ubicaron quienes afirmaron tanto que la propiedad sucesor es válida para los números naturales, como quienes manifestaron que no es válida para los números decimales. Esto puede verse claramente en al Tabla 6.44.

Tabla 6.44. *Frecuencias y porcentajes para* ***7V2*** *(Ámbito de validez de la propiedad)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: La propiedad sucesor es válida para los números naturales	14	11,9
2: La propiedad sucesor no es válida para los decimales (excepto para los números enteros)	14	11,9
3: No se explicita el ámbito de validez de la propiedad	25	21,2
4: Los números decimales tienen sucesor	40	33,9
5: Existen infinitos/muchos sucesores de un número decimal	7	5,9
En blanco	11	9,3
Otros	7	5,9
Total	118	100,0

En cuanto al estudio de los conflictos que dieron lugar a tantas respuestas erróneas, pudimos corroborar dos conflictos esenciales; el conflicto más importante y con mayor presencia ha sido el considerar que "el sucesor de un número decimal es un número decimal" (40,7%), siguiéndole la concepción que "no existe un número natural que siga a un decimal" en un 29,7% de los estudiantes.

Tabla 6.45. *Frecuencias y porcentajes para* ***7V3*** *(Tipo de conflicto)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
1: El sucesor de un número decimal es un número decimal	48	40,7
2: No existe un número natural que le siga a un número decimal	35	29,7
En blanco	15	12,7
Otros	20	16,9
Total	118	100,0

Cabe destacar que, el hecho de que un número decimal tenga sucesor aparece bajo diversas facetas. Tres fueron las razones más observadas a la hora de encontrar el siguiente de un número decimal:

✓ "Agregando un cero a la parte decimal de un número se obtiene el siguiente"

La figura 6.7, muestra un caso representativo de esta variante del conflicto1.

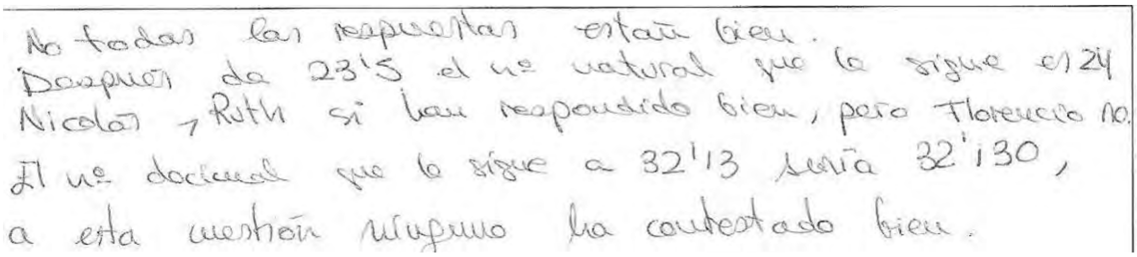

No todas las respuestas están bien.
Despues de 23'5 el nº natural que le sigue es 24
Nicolas y Ruth sí han respondido bien, pero Florencio no.
El nº decimal que le sigue a 32'13 sería 32'130,
a esta cuestión ninguno ha contestado bien.

Figura 6.7. *Caso particular representativo del tipo de conflicto 1 (variable 7V3)*

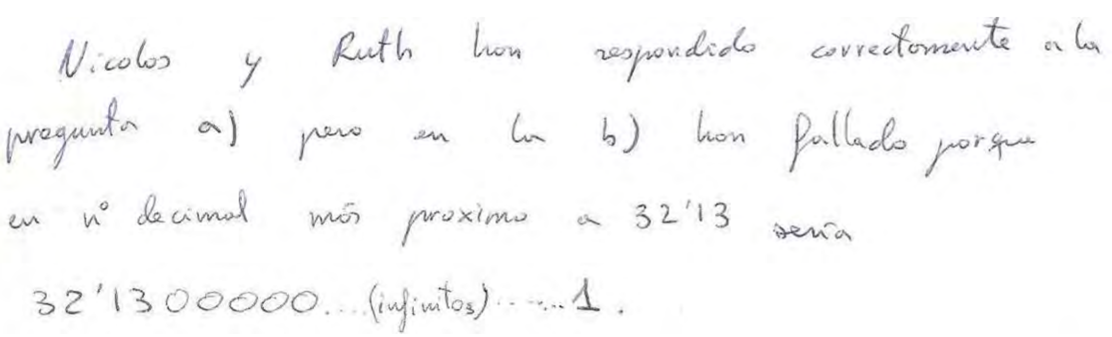
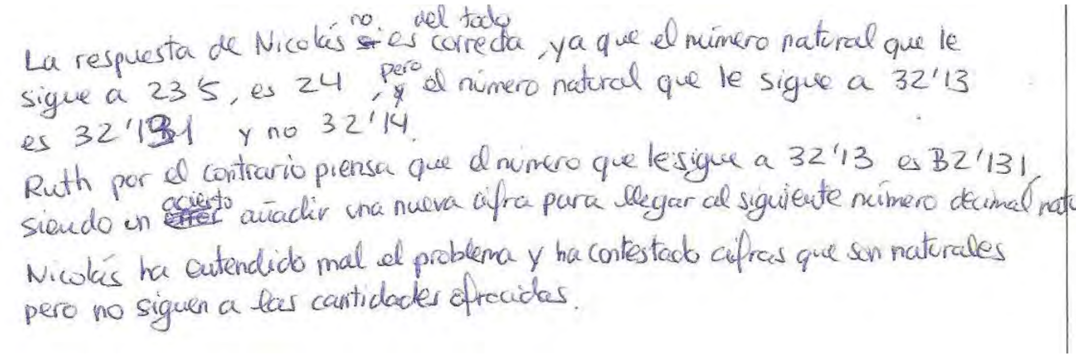

Nicolas y Ruth han respondido correctamente a la
pregunta a) pero en la b) han fallado porque
en nº decimal más proximo a 32'13 sería
32'1300000...(infinitos)......1.

Figura 6.8. *Otro caso representativo del tipo de conflicto 1 (variable 7V3)*

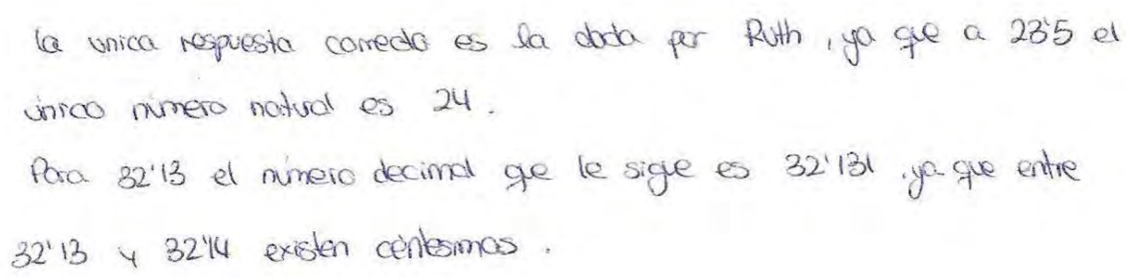
Otra de las razones argumentadas, se encontró expresada del siguiente modo:

✓ “El siguiente de un número decimal depende de la cantidad de cifras decimales que tenga el número”



La respuesta de Nicolás ~~si~~ no es del todo correcta, ya que el número natural que le sigue a 23'5, es 24, pero ~~y~~ el número natural que le sigue a 32'13 es 32'131 y no 32'14.
Ruth por el contrario piensa que el número que le sigue a 32'13 es 32'131 siendo un ~~error~~ acierto añadir una nueva cifra para llegar al siguiente número decimal/natural.
Nicolás ha entendido mal el problema y ha contestado cifras que son naturales pero no siguen a las cantidades ofrecidas.

Figura 6.9. *Caso representativo del tipo de conflicto 1 (variable 7V3)*

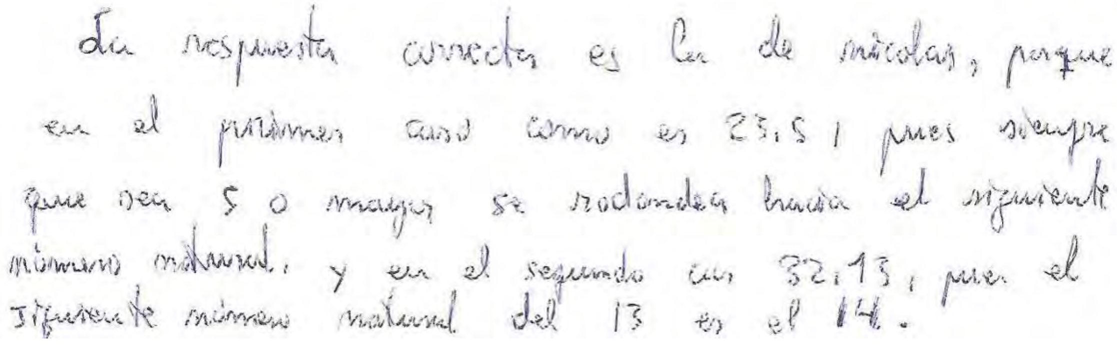


la unica respuesta correcta es la dada por Ruth, ya que a 23'5 el unico numero natual es 24.
Para 32'13 el numero decimal que le sige es 32'131, ya que entre 32'13 y 32'14 existen centesimas.

Figura 6.10. *Otro caso representativo del tipo de conflicto 1 (variable 7V3)*

La tercera razón encontrada para encontrar el siguiente de un número decimal, se dio del siguiente modo:

✓ “El siguiente de un número decimal, es el siguiente de la parte decimal mirada como número entero”



La respuesta correcta es la de nicolas, porque en el primer caso como es 23,5 pues siempre que sea 5 o mayor se redondea hacia el siguiente numero natural. y en el segundo caso 32,13, pues el siguiente numero natural del 13 es el 14.

Figura 6.11. *Otro caso representativo del tipo de conflicto 1 (variable 7V3)*

Conclusiones del ítem

Como lo ponen de manifiesto diversidad de investigaciones, si bien el conocimiento de los números naturales se encuentra en el camino hacia la compresión de los números racionales, generalmente este conocimiento es utilizado para interpretar información nueva sobre los números racionales (Moskal y Magone,2000; Resnick y otros, 1989); pero también es cierto que, dicho conocimiento, particularmente el de las propiedades, dan lugar a importantes significados erróneos en los nuevos campos numéricos (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004). En tal sentido, la propiedad sucesor no queda excluida de este hecho, tal como se ha podido observar, con profundidad, en el ítem que acabamos de analizar. Ruiz (2004), muestra a los números naturales como un obstáculo epistemológico para el conocimiento, en particular, de la propiedad topológica de la densidad de los números decimales.

La introducción de este ítem obedeció, a realizar un primer acercamiento al concepto de densidad, a través de la evaluación del ámbito de validez de la propiedad sucesor. No obstante, la constitución del ítem, ofrece la posibilidad de aportar alguna información sobre el conocimiento que los futuros profesores tienen sobre las posibles respuestas de los estudiantes.

Podemos observar, que más del 40% de los estudiantes piensa que un número decimal tiene sucesor (con las variantes exhibidas en las Figs. 6.7 a 6.11). Siguiendo a ello, la concepción de que no existe un número natural que le siga inmediatamente a un número decimal (29,7%). Esto demuestra que el *conocimiento del contenido* en cuestión se presenta ciertamente con serias dificultades.

En relación al *conocimiento del contenido y estudiantes,* no se observan indicadores que pongan de manifiesto un pensamiento focalizado en el estudiante. Las afirmaciones solo se remiten a la corrección o incorrección de las respuestas dadas, pero con una justificación que se describe solo desde la resolución propia del futuro profesor. No se observan rasgos que evidencien pensamiento general o específico sobre los niños, tampoco se manifiesta conocimiento sobre concepciones erróneas generales o específicas de los niños, características que según la categorización establecida por Chick, Baker, Pham y Cheng, (2006), indicarían presencia de este tipo de contenido.

6.2.8. Análisis del ítem 8

Como hemos dicho en el Cap. 5, la aplicación de este ítem evalúa de manera indirecta el modo en que el infinito se halla presente en los estudiantes y por ende cuáles son las bases que sustentan el concepto de densidad. De hecho, el concepto de infinito, en todas sus variantes, en particular el concepto de infinito actual está íntimamente ligado a esta propiedad.

Análisis del sub-ítem a) (Decimales intermedios)

A la pregunta, ¿cuáles pueden ser las marcas de salto de una joven que ganó un concurso, si su triunfo se ubicó entre 4,12m y 4,16m?, la Tabla 6.46 nos muestra una situación que refleja un alto porcentaje de incorrecciones (31,4%), mas allá que el 38,1 % de los estudiantes hayan respondido correctamente y 27,1% lo haya hecho al menos de forma parcial.

Tabla 6.46. *Frecuencias y porcentajes para **8aV1** (Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	37	31,4
1: Parcialmente bien o incompleto	32	27,1
2: Bien	45	38,1
En blanco	4	3,4
Total	118	100,0

La propiedad en cuestión, esto es, la densidad de D en Q, no es aplicada por el mayor porcentaje de los estudiantes (34,7%). Solo el 23,7% logra aplicarla de manera correcta. No obstante, nos interesó evaluar algunos casos especiales como la aplicación de la propiedad de manera parcial o implícita (en este último caso, por falta de justificación). Los valores y porcentajes pueden verse en detalle en la Tabla 6.47.

Tabla 6.47. *Frecuencias y porcentajes para **8aV2** (Conceptualización de la propiedad)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Se aplica la propiedad de manera explícita	28	23,7
2: La aplicación de la propiedad es implícita	22	18,6
3: No se aplica o no se toma en cuenta la propiedad	41	34,7
4: Se aplica la propiedad de manera parcial (como si la infinitud fuera parcial)	23	19,5
En blanco	4	3,4

Total	118	100,0

Ahora bien, a los fines de profundizar sobre el tipo de conflicto que pone en riesgo la conceptualización de la propiedad, hemos observado algunas características específicas que dan cuenta del problema. Básicamente, los conflictos se centran en torno a dos cuestiones. O se exhibe un conjunto finito de valores, además, con dos cifras decimales; o se vislumbra un intento de proporcionar un conjunto “infinito” que no se corresponde con el conjunto correspondiente. Se trata de la construcción de subconjuntos infinitos (condicionados por las cifras decimales consideradas).Tal como sostienen, Moreno, Hernández y Socas, (2004), la densidad parece ser reconocida solo en procesos finitos. En la tabla 6.48, se pueden observar la frecuencia con que aparecen estos casos y a continuación exhibimos dos tipos de respuesta, a los fines de ejemplificar esta situación.

Tabla 6.48. *Frecuencias y porcentajes para **8aV3** (Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: Se exhibe un conjunto finito de valores (con un número finito de cifras decimales, la mayoría 2 cifras)	38	32,2
2: Se intenta mostrar un conjunto infinito de valores (limitaciones)	20	16,9
En blanco	49	41,5
Otros	11	9,3
Total	118	100,0

A continuación, mostramos una serie de casos que representan los tipos de conflictos descritos en la variable 8aV3. La presencia del conflicto 1 se ha manifestado de dos maneras, las cuales hemos reflejado en las Figuras 6.12 y 6.13.

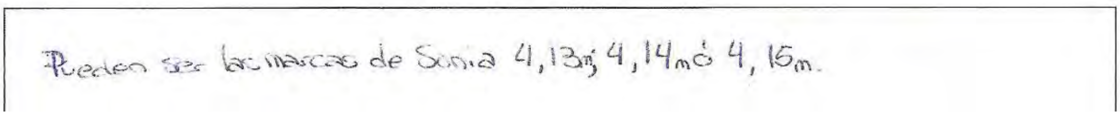

Pueden ser las marcas de Sonia 4,13m; 4,14m ó 4,15m.

Figura 6.12. C*aso representativo del tipo de conflicto 1 (variable 8aV3)*

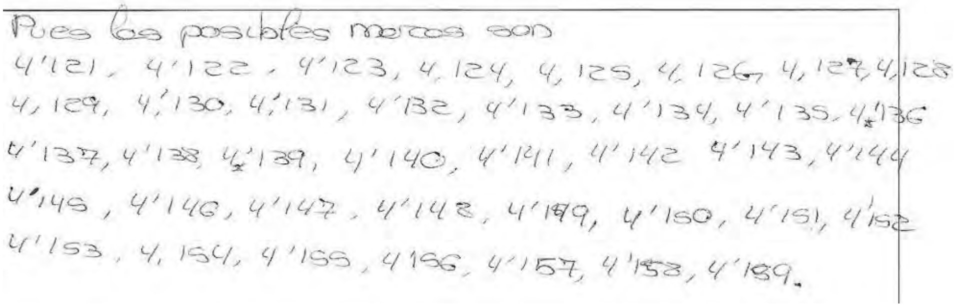

Pues los posibles marcas son
4'121, 4'122, 4'123, 4,124, 4,125, 4,126, 4,127, 4,128
4,129, 4,130, 4,131, 4'132, 4'133, 4'134, 4'135, 4,136
4'137, 4'138, 4,139, 4'140, 4'141, 4'142 4'143, 4'144
4'145, 4'146, 4'147, 4'148, 4'149, 4'150, 4'151, 4'152
4'153, 4,154, 4'155, 4'156, 4'157, 4'158, 4'159.

Figura 6.13. *Otro caso representativo del tipo de conflicto 1 (variable 8aV3)*

En referencia al segundo tipo de conflicto (2), las figuras 6.14 y 6.15, dan muestra de dichos casos.

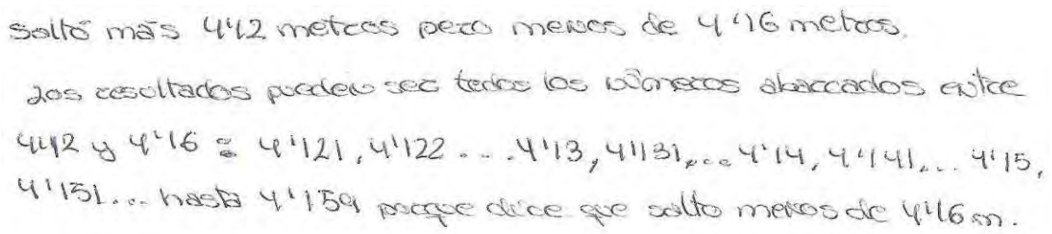

saltó más 4'12 metros pero menos de 4'16 metros.
Los resultados pueden ser todos los números abarcados entre
4'12 y 4'16 = 4'121, 4'122 ... 4'13, 4'131,... 4'14, 4'141,... 4'15,
4'151... hasta 4'159 porque dice que saltó menos de 4'16 m.

Figura 6.14. *Caso representativo del tipo de conflicto 2 (variable 8aV3)*

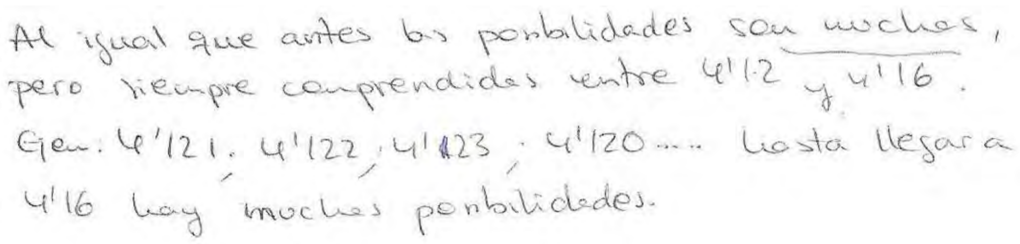

Al igual que antes las posibilidades son muchas,
pero siempre comprendidas entre 4'12 y 4'16.
Ejem: 4'121, 4'122, 4'123, 4'120.... hasta llegar a
4'16 hay muchas posibilidades.

Figura 6.15. *Otro caso representativo del tipo de conflicto 2 (variable 8aV3)*

Análisis del sub-ítem b) (Decimales intermedios, justificación)

Dado que era previsible la aparición del tipo de conflictos manifestados en el apartado a), con éste sub-ítem se pretendió poner en juego la capacidad de profundizar, de manera indirecta, en lo realizado en dicho ítem. Es decir, al solicitar que los estudiantes evalúen las respuestas dadas por tres alumnos, se pretendió que se vieran "tentados" a revisar las propias. Es así que, el porcentaje de respuestas incorrectas, para este sub-ítem, disminuyó considerablemente (Tabla 6.49).

Tabla 6.49. *Frecuencias y porcentajes para* ***8bV1*** *(Grado de corrección)*

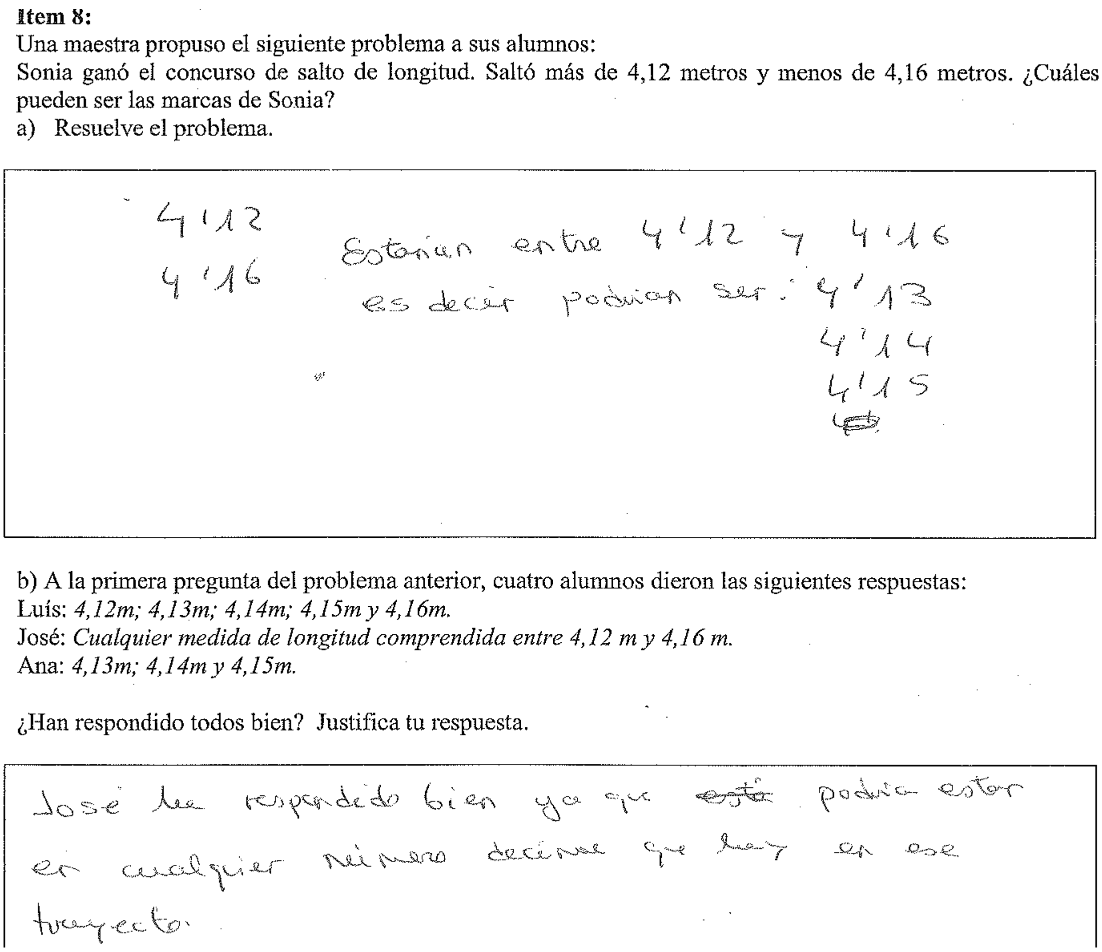
Valores		Frecuencia	Porcentaje
0: Mal		23	19,5
1: Parcialmente bien o incompleto		39	33,1
2: Bien		51	43,2
En blanco		5	4,2
Total		118	100,0

No obstante, la frecuencia con que aparecieron los valores definidos para la variable 8bV2, fueron en general similares, excepto para el caso del valor 3, en que disminuyó de manera considerable el número de personas que no tomaron en cuenta la propiedad (28%), tal como se exhibe en la Tabla 6.50.

Tabla 6.50. *Frecuencias y porcentajes para* ***8bV2*** *(Conceptualización de la propiedad)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Se aplica la propiedad de manera explícita	25	21,2
2: La aplicación de la propiedad es implícita	30	25,4
3: No se aplica o no se toma en cuenta la propiedad	33	28,0
4: Se aplica la propiedad de manera parcial (como si la infinitud fuera parcial)	25	21,2
En blanco	5	4,2
Total	118	100,0

Por otra parte vemos que, si bien el número de respuestas correctas ha incrementado, respecto del ítem a), eso no parece traducirse en una posible “revisión” y corrección de la respuesta dada antes. Tal como se muestra en el siguiente caso, Figura 6.17.



Item 8:
Una maestra propuso el siguiente problema a sus alumnos:
Sonia ganó el concurso de salto de longitud. Saltó más de 4,12 metros y menos de 4,16 metros. ¿Cuáles pueden ser las marcas de Sonia?
a) Resuelve el problema.

4'12
4'16
Estarían entre 4'12 y 4'16
es decir podrían ser: 4'13
4'14
4'15

b) A la primera pregunta del problema anterior, cuatro alumnos dieron las siguientes respuestas:
Luís: *4,12m; 4,13m; 4,14m; 4,15m y 4,16m.*
José: *Cualquier medida de longitud comprendida entre 4,12 m y 4,16 m.*
Ana: *4,13m; 4,14m y 4,15m.*

¿Han respondido todos bien? Justifica tu respuesta.

José ha respondido bien ya que ~~está~~ podría estar en cualquier número decimal que hay en ese trayecto.

Figura 6.17. *Caso de respuestas contradictorias entre ambos ítems.*

Los conflictos que se observan a través del los valores definidos para la variable 8bV3, (Tabla 6.51), son una muestra clara de la prevalencia de la concepción discreta, traída de los números naturales. Por otra parte, cuando se observan indicadores de un conocimiento del infinito, en estos casos, es claro que se trata del infinito potencial como se observa en el caso del valor 2.

Tabla 6.51. Frecuencias y porcentajes para **8bV3** (Tipos de conflictos)

Valores	Frecuencia	Porcentaje
1: Considerar correcto solo un número finito de valores	7	5,9
2: Existe un conjunto infinito de valores ("pero limitado")	6	5,0
3: Cualquier medida de longitud entre 4,12 m y 4,16 es equivalente al conjunto {4,13m, 4,14m ,4,15m}	20	16,9
4: Las tres respuestas de los niños, son equivalentes o posibles.	9	7,6
En blanco	56	47,5
Otros	20	16,9
Total	118	100,0

Conclusiones del ítem

Tal lo señalado por Vamvakoussi y Vosniadou (2004), para desarrollar el concepto de densidad, se debe entender que el concepto de número racional unifica los conceptos de número decimal, racional y entero; esto requiere comprensión de las diferentes representaciones y las relaciones entre ellas, así como las interrelaciones entre subconjuntos del conjunto de los números racionales. Mas aún, el concepto de densidad esta íntimamente relacionado con el concepto de infinito; que como sabemos, en particular la concepción de infinito actual, es muy difícil de comprender (Tirosh, 1991; Tall, 2001; Malara, 2001; Merenluoto y Lehtinen, 2002).

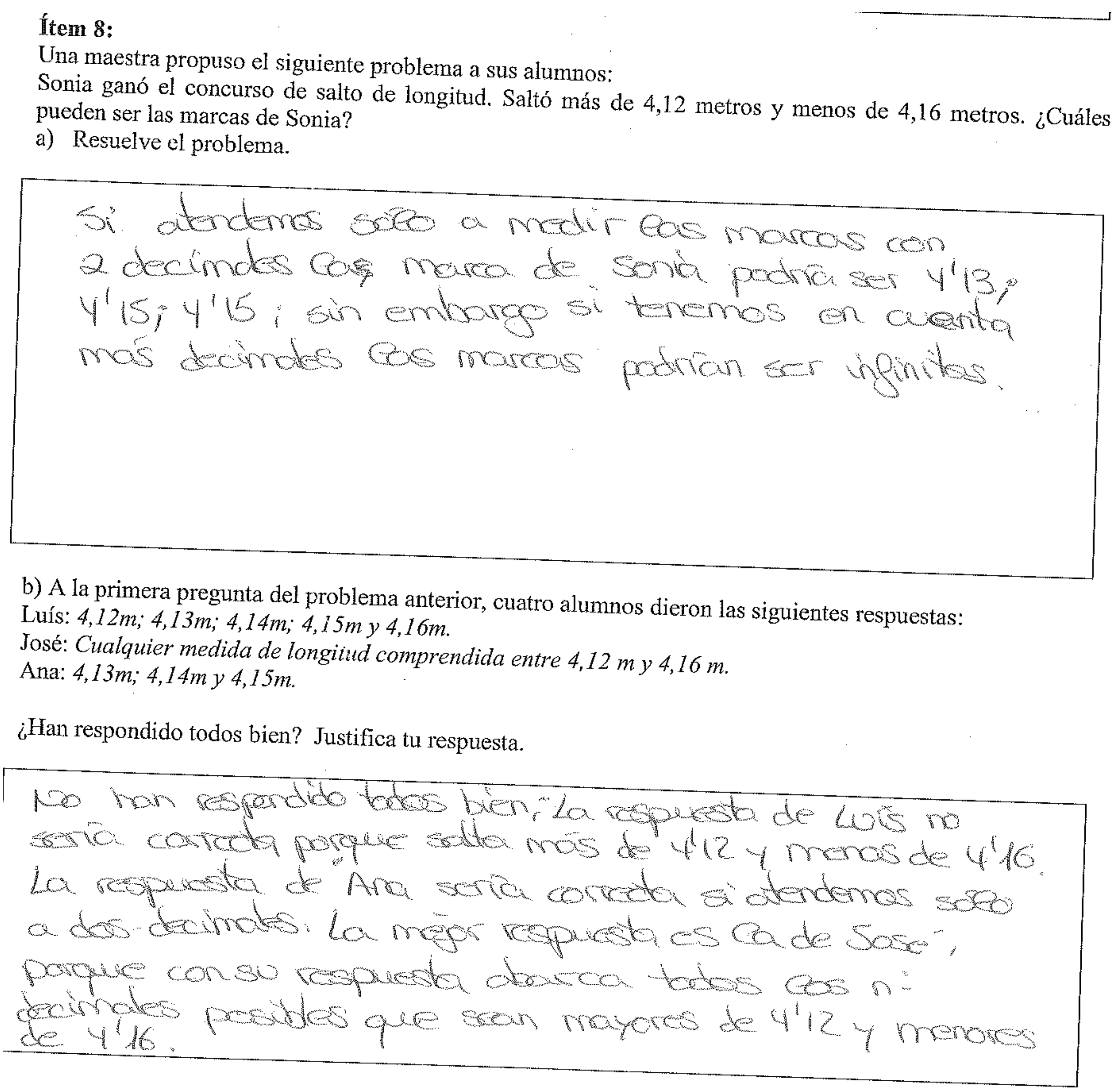
Más aún, del hecho de conocer el infinito potencial no alcanza para asegurar que se comprende la densidad, por más que en el discurso, se afirme que entre dos números racionales hay infinitos.

Tal como indicábamos en los fundamentos de la incorporación de éste ítem, la situación ha sido extraída de un libro de texto con el propósito de evaluar también aspectos vinculados a la tarea. Esto es, observar si el futuro profesor manifiesta algún tipo de valoración que de cuenta la pertinencia de la tarea, para algún objetivo que consideren oportuno.

Con respecto al *conocimiento del contenido,* en particular como *conocimiento ampliado* dadas las características de la propiedad puesta en juego, las respuestas en su mayoría no se hallan vinculadas a las propiedades de los números. Tampoco, se observa en términos generales, que estén en estrecha relación con el contexto. Es decir, los estudiantes para profesor, en muchos casos, se abstraen del contexto a la hora de dar las respuestas, dado que las mismas se hallan desvinculadas de la magnitud puesta en juego. Los elementos de los conjuntos exhibidos, como hemos observado en los casos mostrados en la resolución del ítem a), en general remiten a números. No obstante, ello no da cuenta de un efectivo *conocimiento del contenido,* dadas las limitaciones que hemos observado para considerar el carácter denso del conjunto numérico solución de la tarea.

Cuando en el sub-ítem b), se introducen posibles respuestas de los niños, dichas respuestas, en muchos casos, contradicen las dadas para el ítem a). Se reconocen algunos conflictos en los niños, que previamente no habían sido reconocidos en sus propias respuestas (aunque no regresan a modificar la propia). También se aceptan, en muchos casos, dos tipos de respuestas de los niños como equivalentes. Esto refuerza, las limitaciones mencionadas sobre el *conocimiento del contenido*, a la vez que pone en descubierto desconocimiento del tipo de errores que pueden manifestar los niños.

Solo en muy pocos casos podemos encontrar evidencias de una visión integral que da cuenta de: un adecuado *conocimiento ampliado de la densidad,* aspectos de la tarea que ofrecen cierta complejidad (*Conocimiento especializado del contenido*), y de la identificación de algún conflicto que da lugar a la respuesta de los niños (*Conocimiento del contenido y estudiantes*). En la Figura 6.18 se observa un caso representativo.



Ítem 8:
Una maestra propuso el siguiente problema a sus alumnos:
Sonia ganó el concurso de salto de longitud. Saltó más de 4,12 metros y menos de 4,16 metros. ¿Cuáles pueden ser las marcas de Sonia?
a) Resuelve el problema.

Si atendemos sólo a medir las marcas con 2 decimales la marca de Sonia podría ser 4'13, 4'15; 4'15; sin embargo si tenemos en cuenta más decimales las marcas podrían ser infinitas.

b) A la primera pregunta del problema anterior, cuatro alumnos dieron las siguientes respuestas:
Luís: *4,12m; 4,13m; 4,14m; 4,15m y 4,16m.*
José: *Cualquier medida de longitud comprendida entre 4,12 m y 4,16 m.*
Ana: *4,13m; 4,14m y 4,15m.*

¿Han respondido todos bien? Justifica tu respuesta.

No han respondido todos bien; La respuesta de Luis no sería correcta porque saltó más de 4'12 y menos de 4'16. La respuesta de Ana sería correcta si atendemos sólo a dos decimales. La mejor respuesta es la de José, porque con su respuesta abarca todos los nº decimales posibles que sean mayores de 4'12 y menores de 4'16.

Figura 6.18. *Caso representativo de una solución correcta al ítem 8*

Steinle (2004), señala que los docentes en general piden el redondeo con dos decimales, y esto puede reforzar la idea que los decimales tienen una forma discreta y en consecuencia entre dos números dados (43,52 y 43,53) no existe otro. Algo similar ocurre con los libros de textos, como la situación que contempla nuestro ítem, situación que se puede ver profundizada por el contexto seleccionado. Esta, es otra de las cuestiones por la que se sugiere reforzar el trabajo con el valor posicional de los dígitos. El uso de la recta numérica es especialmente recomendado puesto que, es un modelo representacional que es potencialmente fuerte para discutir la densidad de los decimales (Steinle, 2004; Ruiz, 2004).

6.2.9. Análisis del ítem 9 (Justificar algoritmo de multiplicar)

Si bien en prácticamente todos los ítems que componen el instrumento se requiere que el estudiante dé razones o argumente sobre los distintos elementos de significados puestos en juego, (situaciones, propiedades, conceptos/definiciones, procedimientos, lenguaje según corresponda), tal como hemos señalado en el capítulo 6, el objetivo central de este ítem consiste en evaluar el "tipo de argumentación" que los estudiantes desarrollan para justificar el proceso que lleva implícito el algoritmo de la multiplicación de dos números decimales.

Al observar la Tabla 6.52, podemos ver que solo 2 estudiantes de la muestra han podido dar una justificación adecuada para el algoritmo; no obstante, nos ha interesado observar que tipo de argumentación han dado el 73,7% de los estudiantes quienes han intentado dar una justificación aunque sea errónea.

Tabla 6.52. *Frecuencias y porcentajes para **9V1** (Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	87	73,7
2: Bien	2	1,7
En blanco	29	24,6
Total	118	100,0

En la tabla 6.53, describimos tipos generales de prueba que incorporan Harel y Sowder (2007) en su taxonomía de los esquemas de prueba. Según la taxonomía de esquemas de prueba propuesta por dichos autores, se presentan tres clases: esquemas de prueba por convicción externa, esquemas de prueba empíricos y esquemas de prueba deductivos.

Vemos en la Tabla 6.53 que la mayoría (54,2%), realiza una justificación por *convicción externa*, el 16,9% lo hace de manera *empírica*, mientras que solo el 1,7% plantea una justificación de tipo *deductiva.*

Tabla 6.53. *Frecuencias y porcentajes para* ***9V2*** *(Tipo de justificación)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Por convicción externa	64	54,2
2: Empírica	20	16,9
3: Deductiva	2	1,7
En blanco	29	24,6
Total	118	100,0

Analizar, en la variable 9V3, el tipo de conflictos que específicamente ponen de manifiesto los estudiantes, nos permitió visualizar las limitaciones con que las distintas clases de prueba se ponen en evidencia.

En la Tabla 6.54, describimos una gama de conflictos los cuales se encuentran representados, en términos porcentuales, de manera más o menos similar. Los conflictos identificados con los valores 1, 2, 3 y 5 responderían al esquema de la clase "por convicción externa", mientras que los valores 4 y 6, asumen una tendencia de tipo "empírica".

Tabla 6.54. *Frecuencias y porcentajes para* ***9V3*** *(Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: Se justifica en base a la bondad de la técnica (No la técnica)	10	8,5
2: Se parafrasea la regla o parte de ella	14	11,8
3: Se basa en una percepción de cómo debería ser el resultado o porqué debe hacerse así	12	10,2
4: Se explica la regla con un ejemplo	24	20,3
5: El "rito" obliga a hacerlo así	10	8,5
6: Se muestra un ejemplo	10	8,5
En blanco	31	26,3
Otros	7	5,9
Total	118	100,0

A continuación exhibimos algunos ejemplos de valores mencionados en la tabla precedente, a los fines de ilustrar los tipos de conflictos.

El significado personal que otorgan los estudiantes a la justificación, en los casos de las figuras (6.18-6.20), es una muestra de que existe una *convicción externa*. Esta es la que conduce a justificar el proceso, como “algo que se debe hacerse de ese modo”. La autoridad (presuponemos enseñanza o libro de texto), o el rito, prevalece por encima de cualquier tipo de argumentación. Argumentación que debería estar basada en elementos de significado adecuados, y de un discurso que relacione dichos elementos de manera coherente.

El siguiente caso (figura 6.18), nos muestra cómo el estudiante ofrece un discurso dirigido al niño. No obstante, ese discurso no justifica la regla, sólo tiende a explicar los términos de la regla.

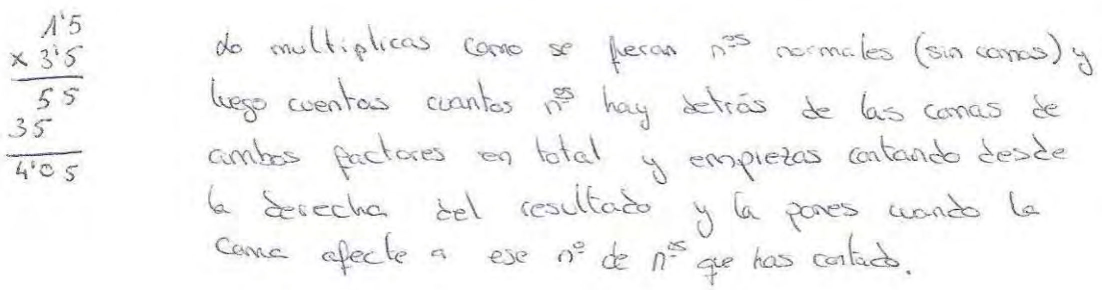


Figura 6.18. *Caso representativo del tipo de conflicto 2 (variable 9V3)*

La figura 6.19, muestra la explicación de un estudiante que pone énfasis en como proceder para que el resultado sea del modo que debe ser.

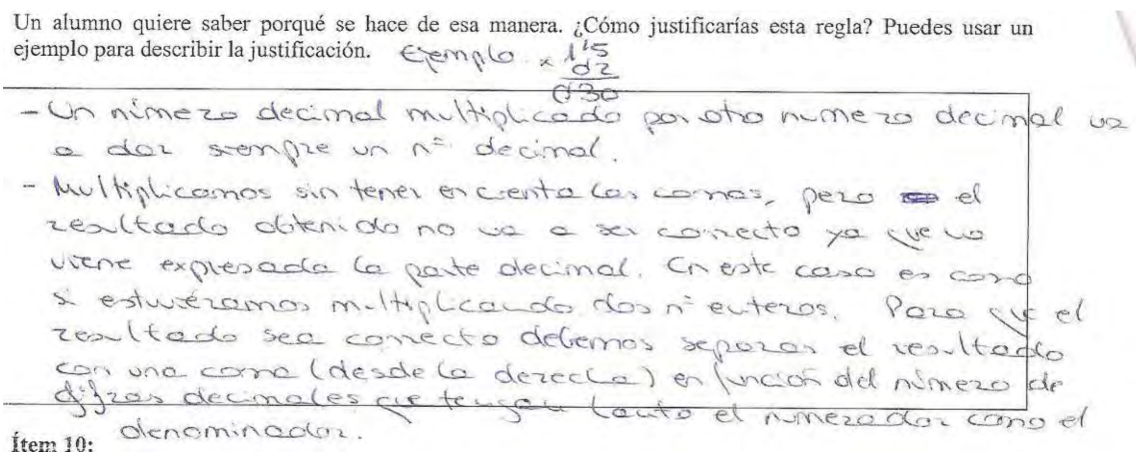


Figura 6.19. *Caso representativo del tipo de conflicto 3 (variable 9V3)*

El estudiante que representa el caso de la figura 6.20, hace un claro señalamiento de tipo ritual. Existe una obligación que exige realizar el proceso mencionado.

~~Le diría que si nosotros multiplicamos dos números decimales lo haríamos así:~~

No sé como se lo podría explicar, le diría que es un método o regla que debemos llevar a cabo.

Figura 6.20. *Caso representativo del tipo de conflicto 5 (variable 9V3)*

Uno de los tipos de esquemas de prueba empíricas, está basada en evidencias desde ejemplos, es decir, se trata de esquemas de prueba de tipo inductivos. Las siguientes figuras, 6.21 y 6.22, dan muestra de ello.

En el siguiente caso, el significado personal de prueba que pone de manifiesto es el de la explicación de la regla a través de un ejemplo (figura 6.21).

```
   3,2      → Cada factor tiene un decimal,
 × 4,5        por lo tanto entre los dos
 ------       factores hay 2 decimales,
   160     * Multiplicamos   pues corremos la coma desde
  128        sin tener en    la derecha 2 cifras.
 ------      cuenta las
  14,40      comas
    └──→ Contamos el número de decimales de cada factor.
```

Figura 6.21. *Caso representativo del tipo de conflicto 4 (variable 9V3)*

En el siguiente caso, figura 6.22, el estudiante representa la tipología de quienes dan un ejemplo como medio suficiente para la argumentación.

```
    2'25
 × 1'50
 -------
  11250
  2'25
 -------
 3'3750
```

Figura 6.22. *Caso representativo del tipo de conflicto 6 (variable 9V3)*

Conclusiones del ítem

La literatura muestra que los niños no comprenden cómo se obtiene el producto de dos números decimales, razón más que suficiente para que un futuro profesor esté provisto de los elementos necesarios para trabajar sobre esta dificultad. No obstante, resulta evidente que no existe una "cultura" de la justificación; en particular, de la justificación de un algoritmo elemental como es la multiplicación, o cualquiera de las operaciones básicas.

Hemos evaluado el concepto de prueba desde la perspectiva comprensiva que plantean Harel y Sowder (2007), y desde una concepción basada en el contexto de enseñanza y aprendizaje elemental. De este modo a través de un taxonomía lo suficientemente explícita, nos permite vislumbrar qué aspectos de la argumentación se hallan presentes en los estudiantes y como se ponen de manifiesto. Elementos estos que nos permiten dar indicadores sobre la base del tipo de conocimiento existente en el estudiante. De otro modo, la evaluación directa de una argumentación de tipo deductivo, no hubiese aportado ningún indicador dada la ausencia casi total de este tipo de prueba.

La posibilidad de plantear al niño una mejor manera de construir un pensamiento matemático, no se halla en los significados personales del futuro profesor. Los indicios que hacen alusión a los niños, no se vinculan al pensamiento de éstos. Como hemos podido apreciar la alusión a ellos, en los casos que se encuentran evidencias, tiene que ver solo con un discurso dirigido al niño. Esto indica la ausencia de un *conocimiento del contenido y estudiantes.* Tampoco se evidencian aspectos del *conocimiento especializado* de este contenido particular (justificación del algoritmo de la multiplicación).

Consideramos que este tópico debe formar parte del conocimiento especializado del contenido de un futuro profesor. En nuestro estudio, la diversidad de conflictos que hemos observado en la tabla 6.54, lo ponen de manifiesto. Tal como sostienen Mcleod y Huinker (2007), el docente necesita conocer algoritmos, pero necesita un conocimiento especializado para enseñarlos, una comprensión de cómo se trabajan los algoritmos estándares, conocimiento sobre algoritmos alternativos y familiarizarse con múltiples representaciones de la multiplicación.

En síntesis, queda totalmente en evidencia, tal como señala Ball (2003), que realizar la multiplicación de dos números decimales, no resulta suficiente para justificar y explicar el algoritmo a los niños.

6.2.10. Análisis del ítem 10 (cambio de representación)

Análisis del sub-ítem a) (Cambio a/b a decimal)

La tabla 6.55, muestra el grado de corrección con que los estudiantes respondieron al interrogante: ¿Se puede representar, en forma decimal, cualquier número racional dado como fracción? En ella observamos que, solo el 14,4% ha respondido de manera correcta; un porcentaje considerable no ha resuelto el ítem (16,1%), mientras que la frecuencia más significativa se observa en aquellos que han resuelto el ítem de manera parcial (42,4%).

Tabla 6.55. *Frecuencias y porcentajes para* ***10aV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	32	27,1
1: Parcialmente bien o incompleto	50	42,4
2: Bien	17	14,4
En blanco	19	16,1
Total	118	100,0

En aquellos casos que han resuelto el ítem de manera parcial o incorrecta, antes de analizar que conflictos se pusieron de manifiesto, observamos el tipo de relación que prevaleció entre los conceptos: número y expresión, en las respuestas dadas los futuros profesores. Estos valores los describimos en la Tabla 6.56., a través de la variable 10aV2.

Tabla 6.56. Frecuencias y porcentajes para **10aV2.**
(Tipo de relación entre conceptos (número/expresión- expresión/expresión))

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: La expresión decimal de un número racional puede ser finita o Infinita	37	31,4
2: Número decimal es equivalente a expresión decimal de un número racional	18	15,2
3: Todo número racional es expresable mediante fracción	10	8,5
4: Cualquier número fraccionario puede ser expresado en forma Decimal	9	7,6
5: No todos los números pueden ser expresados en forma decimal	16	13,6
6: No todos los números pueden ser expresados mediante fracción	4	3,4
7: Todos los números son expresables mediante fracción	1	0,8
En blanco	19	16,1
Otros	4	3,4
Total	118	100,0

En cuanto a los conflictos, hemos podido encontrar de diversos tipos. Los que encabezaron los mayores porcentajes fueron, en primer lugar, aquellos que no consideraron todos los casos posibles en su análisis. Esto resulta de alguna manera coherente con la problemática observada en el ítem anterior. Cuando se trata de una justificación o argumentación matemática, en general se aplica un criterio empírico. El hecho de plantear un caso que cumpla con la condición resulta "suficiente" para garantizar dicha condición, es un tipo de esquema de prueba inductiva en la taxonomía de Harel y Sowder (2007). El segundo lugar, lo ocupan las argumentaciones incompletas, imprecisas o erróneas, lo que resulta un problema íntimamente relacionado con el que acabamos de describir; así como directamente la ausencia de argumentación, pese a ser pedida de manera muy explícita.

Tabla 6.57. *Frecuencias y porcentajes para* ***10aV3*** *(Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: Solo se pueden representar las fracciones que tienen numerador menor que el denominador	6	5,0
2: Argumentación incompleta, imprecisa o errónea	20	16,9
3: Ausencia de argumentación	14	11,9
4: Sólo las expresiones decimales finitas pueden ser expresadas como fracción	5	4,2
5: No se consideran los casos o falta considerar algunos	22	18,6
6: Los números enteros no pueden ser representados como decimal o como fracción	8	6,8
7: No se responde a lo pedido	5	4,2
En blanco	36	30,5
Otros	2	1,6
Total	118	100,0

Tal como sostiene Socas (2001), "los alumnos tienden a identificar al número racional como el cociente de dos números enteros". Esta puede ser una razón por la cual si el número racional está expresado de otro modo que no sea como fracción, entonces no es reconocido como tal. Precisamente, en nuestro estudio el 16% de los estudiantes afirmaron que, el número es racional solo si la expresión decimal es finita, o que los números enteros no pueden ser representados como fracción, o que solo los números cuyo numerador es menor que el denominador pueden ser representados.

Análisis del sub-ítem b) (Cambio decimal a fracción)

En este sub-ítem el interrogante se plantea de manera inversa, es decir, dado cualquier número expresado en forma decimal, ¿se puede escribir en forma fraccionaria?. En términos generales, se puede observar en la Tabla 6.58, que éste sub-ítem ha presentado mayor dificultad que el anterior. Solo 9 alumnos han podido responder de manera correcta; mientras que el 28% no ha dado respuesta alguna.

Tabla 6.58. *Frecuencias y porcentajes para* ***10bV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	37	31,4
1: Parcialmente bien o incompleto	39	33,1
2: Bien	9	7,6
En blanco	33	28,0
Total	118	100,0

Los tipos de relación que prevalecen en este caso, están vinculadas a la relación número/expresión. Tal como se observa en la Tabla 6.59 corresponden a las afirmaciones: "No todos los números pueden ser expresados mediante fracción", o "todos los números son expresables mediante fracción", o "número decimal y expresión decimal de un número racional son equivalentes", entre otras.

Tabla 6.59. *Frecuencias y porcentajes para* ***10bV2***
(Tipo de relación entre conceptos (número/expresión- Expresión/expresión))

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: La expresión decimal de un número racional puede ser finita o Infinita	2	1,6
2: Número decimal es equivalente a expresión decimal de un número racional	12	10,1
3: Todo número racional es expresable mediante fracción	6	5,1
4: Cualquier número fraccionario puede ser expresado en forma Decimal	5	4,2
5: No todos los números pueden ser expresados en forma decimal	9	7,6
6: No todos los números pueden ser expresados mediante fracción	27	22,9
7: Todos los números son expresables mediante fracción	17	14,4
En blanco	34	28,8
Otros	6	5,1
Total	118	100,0

Del mismo modo que lo ocurrido para el ítem anterior, las mayores dificultades se hallan centradas en la falta de argumentación a las respuestas dadas, además de respuestas incompletas en el sentido de no considerar todos los casos posibles en el análisis de la situación. La tabla 6.60 refleja lo expuesto.

Tabla 6.60. *Frecuencias y porcentajes para **10bV3** (Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: Solo se pueden representar las fracciones que tienen numerador menor que el denominador	4	3,4
2: Argumentación incompleta, imprecisa o errónea	6	5,1
3: Todos los números expresados en forma decimal se pueden escribir como fracción	17	14,4
4: Ausencia de argumentación	15	12,7
5: Sólo las expresiones decimales finitas pueden ser expresadas como fracción	5	4,2
6: No se consideran los casos o falta considerar algunos	23	19,5
7: No se responde a lo pedido	4	3,4
En blanco	42	35,6
Otros	2	1,6
Total	118	100,0

Cabe destacar, que si bien el concepto de número decimal que han recibido en el proceso instruccional, es el que definimos al comienzo de nuestro análisis, una de las dificultades mas importantes se halla entorno a esa concepción. El conflicto 3, "todos los números expresados en forma decimal se pueden escribir como fracción", se halla presente con bastante fuerza (14,4%).

Análisis del sub-ítem c) (Caracterizar fracciones decimales)

Cuando se solicita a un estudiante que verifique si la expresión fraccionaria de un número racional es un número decimal, en general, es frecuente que recurran al análisis del denominador para determinar la respuesta. En este ítem, el planteo se hace también desde la implicación lógica recíproca. ¿Qué condición debe cumplir el denominador de una fracción irreducible para que represente un número decimal?

Los porcentajes obtenidos para la variable grado de corrección (10cV1), resultaron ciertamente sorprendentes. Tal como podemos observar en la Tabla 6.61 el 60 % de los estudiantes respondieron de manera incorrecta, más del 30% no pudo dar una respuesta y sólo el 3,4% lo hizo correctamente.

Tabla 6.61. *Frecuencias y porcentajes para **10cV1** (Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje

0: Mal	71	60,2
1: Parcialmente bien o incompleto	6	5,1
2: Bien	4	3,4
En blanco	37	31,4
Total	118	100,0

Si bien el tipo de conflicto que se puso de manifiesto con mayor fuerza ha sido el afirmar que el denominador debía ser mayor que el numerador (tipo 2), como podemos observar en la Tabla 6.62 se manifestaron seis tipos de conflictos. No resulta extraño que hayan considerado la necesidad de que el denominador sea mayor que el numerador, dado que esta respuesta era también un conflicto para la concepción de número decimal en el Ítem1 (en la variable 1V3, el valor 2: "Un número es decimal si es una parte de una unidad" (0,….).

Tabla 6.62. *Frecuencias y porcentajes para* ***10cV3*** *(Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: Una fracción es decimal si el denominador es 10 o una potencia de 10.	5	4,2
2: El denominador debe ser mayor que el numerador	26	22,0
3: El denominador debe ser mayor que cero	6	5,1
4: El denominador debe ser un número primo	5	4,2
5: Que la fracción sea irreducible	5	4,2
6: Que el denominador sea mayor que 1	3	2,5
En blanco	41	34,7
Otros	27	22,8
Total	118	100,0

Conclusiones del ítem

En el Capítulo 5, cuando fundamentamos la introducción de éste ítem, reconocíamos que las relaciones entre las distintas representaciones de un número aportan al desarrollo de su significado y apoyan a la caracterización de propiedades algebraicas.

Este ítem al poner en juego la conceptualización, la precisión de la representación de las nociones matemáticas y la relación entre conceptos permiten evaluar en el futuro profesor un conocimiento especializado de la relación entre *número y expresión decimal de un número.*

Para el ítem en su conjunto, podemos observar que realizar un análisis de posibilidades, conjetura de validez y justificación de las afirmaciones conseguidas ha resultado una tarea claramente compleja. Este tipo de relaciones, esenciales para el desarrollo del conocimiento especializado pretendido, es difícil de adquirir, como ya lo demostraron diversas investigaciones (Carpenter, 1993; Moskal y Magone, 2000). O´Connor (2001), en un trabajo realizado con tareas del tipo de los sub-ítems a) y b), ha advertido sobre el tipo de conocimientos que un profesor debe disponer para afrontar una enseñanza que logre los propósitos que hemos planteado. la necesidad de comprender las relaciones en torno al contenido matemático del tópico en discusión, sus formulaciones lingüísticas, las limitaciones y potencialidades de las estructuras de la actividad, la necesaria discusión, y el pensamiento y la comprensión que resulta de ello. El manejo de este conjunto de variables no se logra solo con “conocer” el contenido involucrado. Requiere de un conocimiento que contemple esas características.

Precisamente la complejidad epistémica que muestra este ítem, en nuestro caso, se pone en evidencia, en primer lugar, a través de la configuración epistémica y de la variables 10aV2 y 10bV2, las que nos dan cuenta de la variedad de afirmaciones que pueden darse al considerar las relaciones número/expresión y expresión/expresión. En segundo lugar, por el tipo de conflictos que pueden manifestarse, y de hecho se han manifestado en los significados personales de los futuros profesores.

Concretamente, existen serias carencias básicamente en la conexión de conceptos. La distinción entre número y expresión, la equivalencia de representaciones, y fundamentalmente en el manejo del proceso de justificación. Específicamente en la determinación de ámbitos de validez, en la búsqueda de contraejemplos y en procesos de generalización. Un aspecto notable, es la concepción de una caracterización como un procedimiento unidireccional. Esto puede apreciarse con claridad en el sub-ítem c). La caracterización de número decimal a partir de una fracción irreducible, solo es reconocida como proceso. Ante el pedido de las condiciones que debe cumplir el denominador de una fracción irreducible para ser decimal, la mayoría de los estudiantes no puede dar las características que, sin embargo, usa para decidir si el número es decimal.

Lachance y Confrey (2002), atribuyen este tipo de problemas a una forma curricular que enfatiza rutas directas y aisladas para la comprensión matemática. Sostienen, que por no desarrollar ideas matemática amplias como base, y conectar muchas constructos, los estudiantes no pueden apreciar las matemáticas como sistema.

6.2.11. Análisis del ítem 11 (Aproximación decimal de 1/3)

Se destaca que el 48,3% de los estudiantes han podido realizar con éxito este ítem. No obstante, no deja de ser significativo que entre quienes no lo han resuelto y quienes lo han resuelto de manera parcial representen, en conjunto, el 43,3% de la muestra estudiada (Tabla 6.60).

Tabla 6.60. *Frecuencias y porcentajes para* ***11V1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	18	15,3
1: Parcialmente bien o incompleto	33	28,0
2: Bien	57	48,3
En blanco	10	8,5
Total	118	100,0

Resaltamos que, en número casi similar, aparecen tres tipos de conflictos (Tabla 6.61). En el primero de ellos, el hecho de que se decida que la aproximación decimal de un número racional produce una respuesta más exacta, presupone en estos estudiantes que el concepto de precisión que manejan, no dependen del hecho de haber realizado aproximaciones decimales durante el proceso y que precisamente esa es la causa de que el resultado sea "diferente", pero no más preciso. Por el contrario conlleva la imprecisión de la aproximación utilizada. Parece que lo que se mira es el resultado y en consecuencia un número decimal (4,9) "es mas preciso" que un número entero (5). La exactitud, en este caso, tal como señala Nowlin (2000), es una cuestión que se fundamenta desde una concepción previa, que nada tiene que ver con el resultado mas adecuado al problema, producto de la aplicación de conceptos específicos durante el proceso realizado.

El siguiente caso presentado en la Figura 6.23 nos muestra este tipo de razonamiento.

Isa:

$\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6}$; $\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5$; *0,5 x 10 = 5; la tela costó 5 euros.*

José:

$\frac{1}{3}=0{,}33$; *0,33:2 = 0,16; 0,33 + 0,16 = 0,49; 0,49 x 10 = 4,9; la tela costó 4,9 euros.*

Explica porqué Isa y José obtienen resultados diferentes.

Por que Isa ha resuelto el problema con operaciones de fracciones, mientras que José lo ha hecho con números decimales, por eso hay que tener en cuenta que a la hora de hacer cálculos, los números decimales son más exactos.

Figura 6.23. *Caso representativo del tipo de conflicto 1 (variable 11V3)*

Tabla 6.61. *Frecuencias y porcentajes para* ***11V3*** *(Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: La aproximación decimal de un número racional permite una expresión más exacta de ese número	14	11,8
2: No se pone en evidencia que considerar $\frac{1}{3}=0.33$ es causa del error producido.	15	12,7
3: Resolver el problema por caminos o vías diferentes produce diferentes resultados	12	10,1
En blanco	67	56,8
Otros	10	8,5
Total	118	100,0

Una cuestión aún más curiosa es pensar que, si se resuelve un problema por vías diferentes, necesariamente, el resultado será diferente. Nuevamente se observa una desvinculación entre los procesos conceptuales, operacionales y argumentativos involucrados en la situación-problema.

Conclusiones del ítem

El tipo de conflictos señalados dan cuenta que la raíz del problema de la precisión, en este caso particular, y en muchos casos en general, reside en no controlar conceptualmente el tipo de número con el que se está operando y las limitaciones que conlleva su uso “de un modo o de otro”. Precisamente cuando se trata de un problema contextualizado (ya sea de la vida real o intramatemático), “los conceptos son más importantes que las reglas implícitas que pudieran existir” (Nowlin 2004, p.359).

Las limitaciones se hacen presentes fundamentalmente en la vida cotidiana y en especial en la enseñanza obligatoria. Esto da origen, a la hora de operar, a conflictos conceptuales del tipo que hemos visto a partir de la evaluación del presente ítem. El considerar, por ejemplo, que “se obtiene mejor resultado si se da una aproximación de un número que si se utiliza el propio número”, es más que una evidencia de lo que estamos informando.

Una comprensión efectiva de las dos formas de resolución del problema se puede corroborar en el 48% de lo futuros profesores. Esto demuestra capacidad para examinar y comprender formas diferentes de resolver el problema. Característica esta esencial del *conocimiento especializado de un contenido.* Pero también podemos observar que existe una comprensión de la razón por la cual los niños hacen uso de este tipo de conocimientos. Esto expresa presencia del *conocimiento del contenido y estudiantes.* Ambos tipos de conocimiento, en esta tarea, se ven estrechamente ligados.

Isa:

$\frac{1}{3}:2=\frac{1}{6};\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5$; *0,5 x 10 = 5; la tela costó 5 euros.*

José:

$\frac{1}{3}=0{,}33$; *0,33:2 = 0,16; 0,33 + 0,16 = 0,49; 0,49 x 10 = 4,9; la tela costó 4,9 euros.*

Explica porqué Isa y José obtienen resultados diferentes.

Porque para resolver el problema Isa utiliza fracciones, así le sale exacto. José al utilizar decimales, escribe sólo las décimas y centésimas de el decimal periódico, al no ser exacto/finito no coge todas las cifras, por lo que el resultado obtenido tampoco es exacto.

Figura 6.24. *Caso representativo de presencia de Conocimiento especializado del contenido y del contenido y estudiantes.*

6.2.12. Análisis del ítem12 (expresión decimal de irracionales)

Tal como hemos fundamentado en el Cap. 5, la selección de este ítem retoma el problema de la relación entre el concepto de número y sus representaciones. Analizaremos cada sub-ítem en particular. Coincidimos con múltiples investigaciones en que un conocimiento rico en representaciones contribuye a una mejor comprensión conceptual.

Análisis del sub-ítem a) (Decimal irracional 0,121)

La pregunta que se realiza en este ítem refiere a la siguiente cuestión: ¿Es racional o irracional, el número: 0,121221222122221………?. . Donde se solicita, de manera explícita, que se justifique la respuesta dada.
Como podemos observar en la Tabla 6.62., solo el 31% da una respuesta y justificación correcta al ítem. Un porcentaje considerable no lo resuelve (casi el 24%), mientras que prácticamente 45% o lo resuelve de manera parcial o lo hace mal.

Tabla 6.62. *Frecuencias y porcentajes para **12aV1** (Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	36	30,5
1: Parcialmente bien o incompleto	17	14,4
2: Bien	37	31,4
En blanco	28	23,7
Total	118	100,0

Si nos remitimos a indagar sobre qué tipo de concepción están poniendo en juego en la decisión, nos encontramos con que el 50% de la población lo hace observando las características de la representación decimal. Solo el 14,4% lo hace apelando a alguna caracterización conceptual. Los valores analizados y los porcentajes que estamos mencionando pueden verse en la Tabla 6.63.

Tabla 6.63. *Frecuencias y porcentajes para **12aV2** (Concepción de número irracional)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Reconocimiento por las características de la expresión decimal	59	50,0
2: Reconocimiento por alguna caracterización del concepto	17	14,4
3: No se dan argumentos	13	11,0
En blanco	28	23,7
Otros	1	0,8
Total	118	100,0

Ahora bien, cuando profundizamos acerca del tipo de conflictos que ponen de manifiesto los estudiantes, nos encontramos con que la mayoría se centra en dos tipos de conflictos, quienes afirman que el número es irracional porque "hay repeticiones" en la parte decimal, o porque el número tiene “infinitas cifras periódicas”. Estas afirmaciones resultan consecuentes con algunos de los resultados obtenidos por Zasquis y Sirotic (2004). En la tabla 6.64, se pueden ver las frecuencias y porcentajes con que los conflictos se hacen presentes.

Tabla 6.64. *Frecuencias y porcentajes para* ***12aV3*** *(Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: El número es racional porque hay repeticiones en la parte decimal	13	11,0
2: Es irracional porque tiene infinitas cifras decimales	12	10,2
3: Es irracional porque tiene infinitas cifras periódicas	3	2,5
4: No se argumenta	8	6,8
5: Existe una fracción que representa al número	2	1,7
En blanco	65	55,1
Otros	15	12,7
Total	118	100,0

Análisis del sub-ítem b) (53/83 ¿irracional?)

La elección de este sub-ítem apunta, específicamente, a la importancia que tiene una representación sobre otra, a la hora de decidir a qué campo numérico pertenece un determinado número. En una circunstancia, puede que un tipo de representación “transparente” la tipología, mientras que otro la “opaque”, como en este caso. Recordemos que el ítem se evaluó a través del interrogante: ¿Es $\frac{53}{83}$ un número racional o irracional?, donde previamente se puso en consideración el número $\frac{53}{83}$ seguido de un comentario sobre lo que muestra una calculadora al hacer la división.

En la tabla 6.65 podemos observar el grado de corrección en las respuestas a éste ítem. Solamente el 6,8% de los futuros profesores ha respondido bien a este ítem y también un alto porcentaje no lo ha resuelto.

Tabla 6.65. *Frecuencias y porcentajes para* ***12bV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	42	35,6
1: Parcialmente bien o incompleto	37	31,4
2: Bien	8	6,8
En blanco	31	26,3
Total	118	100,0

Interesó saber qué tipo de concepción de número racional manejaban. Nos encontramos con que la mayoría de ellos, aproximadamente el 45%, resolvieron el ítem observando las características de su expresión decimal.

Tabla 6.66. *Frecuencias y porcentajes para **12bV2** (Concepción de número racional)*

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Definición (cociente entre enteros)	22	18,6
2: Características de la expresión decimal	53	44,9
3: No se argumenta	10	8,5
En blanco	31	26,3
Otros	2	1,7
Total	118	100,0

En consonancia con Zaskys y Sirotic (2004), los resultados no solo sugieren sino que, en nuestro caso, confirman que los participantes generalmente, no se basan en el tipo de representación que las autoras mencionan como "transparentes" para determinar cuando un número es racional o irracional. Es decir, la propia expresión fraccionaria del número: $\frac{53}{83}$ da cuenta de manera inmediata del tipo de número en cuestión. No obstante, vemos a través de los conflictos exhibidos en la Tabla 6.67, que los estudiantes tienden a usar una calculadora y analizar la expresión decimal obtenida. Mas aún, en este caso que se daba el resultado obtenido de una calculadora, decidieron sobre este resultado y todos los conflictos surgieron por esa mirada que de alguna manera "encubría" o, en términos de las investigadoras mencionadas, "opacaba" el verdadero estatus del número.

*Tabla 6.67. Frecuencias y porcentajes para **12bV3** (Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: $\frac{53}{83}$ es racional porque su expresión decimal es finita	31	26,3
2: $\frac{53}{83}$ es irracional por que la parte decimal no es periódica	19	16,1
3: Es irracional porque su expresión decimal es infinita	5	4,2
4: No se puede determinar, porque la calculadora muestra un número limitado de dígitos	2	1,7
En blanco	39	33,0
Otros	22	18,6
Total	118	100,0

Análisis del sub-ítem c) (Aproximación decimal de π)

En este sub-ítem se solicitó una aproximación decimal del número π, con una cota determinada. La Tabla 6.68, muestra que aproximadamente el 43% de los estudiantes o no ha resuelto el ítem o lo ha hecho mal. Un porcentaje considerable (39%), ha resuelto el ítem de manera parcial o incompleta, quienes junto a aquéllos que lo resolvieron mal, nos permitieron analizar los conflictos que les impidió llegar a la resolución correcta.

Tabla 6.68. *Frecuencias y porcentajes para* ***12cV1*** *(Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	21	17,8
1: Parcialmente bien o incompleto	46	39,0
2: Bien	21	17,8
En blanco	30	25,4
Total	118	100,0

Si bien, casi el 47% de los estudiantes responden al ítem correctamente o al menos lo hacen de manera parcial, no obstante la concepción de aproximación decimal que utilizaron no tuvo en cuenta, salvo en contados casos, el tipo de cota solicitada. En la tabla 6.69 se pueden ver los valores definidos para la variable 12cV2, y los porcentajes correspondientes.

Tabla 6.69. *Frecuencias y porcentajes para* ***12cV2***
(Concepción de aproximación decimal de un número)

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Expresión decimal con la cota solicitada	19	16,1
2: Expresión decimal con una cota cualquiera	63	53,4
En blanco	30	25,4
Otros	6	5,1
Total	118	100,0

Como decíamos anteriormente, si bien hay un número considerable de respuestas aceptables al ítem, es muy alto el porcentaje de estudiantes que no justificaron la cota dada, o que la justificación fue incorrecta. Esto puede observarse en detalle en la Tabla 6.70.

Tabla 6.70. *Frecuencias y porcentajes para* ***12cV3*** *(Tipos de conflictos)*

Tipo de conflictos	Frecuencia	Porcentaje

1: Ausencia de justificación de la cota dada	44	37,3
2: La justificación no se corresponde con la cota dada	6	5,1
3: La justificación es incorrecta	12	10,2
4: No es posible dar una aproximación	5	4,2
En blanco	51	43,2
Total	118	100,0

Conclusiones del ítem

Tal como sostienen Zaskis y Sirotic, (2004); Socas, (2001); es evidente que para un número significativo de futuros profesores, aún quienes han recibido una formación matemática considerable y específica, las definiciones de número racional e irracional no forman parte de su repertorio activo de conocimiento. Kaput (1991), ya sostenía que para poseer un conocimiento matemático abstracto, éste es mejor considerado cuando es rico en representaciones y aplicaciones. De hecho ásta parece ser una de las carencias más importantes. Los estudiantes en este estudio, prácticamente se remitieron al análisis de estos conceptos aferrados solo a observar la expresión decimal del número, dejando de lado cualquier otro tipo de representación o concepción a la que pudieran apelar, para obtener respuestas certeras y correctamente fundamentadas.

Tal como hemos comentado en el Cap.5, en la fundamentación de la elección de este ítem, el conocimiento de los números irracionales resulta importante. Especialmente desde la perspectiva de la enseñanza y sobre todo a nivel primario dado que resulta generalmente conflictivo en usos y tratamientos en cursos más avanzados. Este conocimiento, que hemos considerado como un *conocimiento de tipo ampliado del contenido,* presenta conflictos inherentes a la estructura de nuestro sistema de numeración. Particularmente en el caso del número π, si bien no se puede pretender una conceptualización de tal número como irracional en la escolaridad elemental, el profesor debe poseer el conocimiento necesario para poder controlar e incorporar progresivamente su significado (Konic, 2005).

6.2.13. Análisis del ítem 13 (enunciado de problemas)

El conocimiento de las representaciones y modelos que pueden ser usados para explicar cuestiones matemáticas nos parecen particularmente importantes a ser evaluados en estos estudiantes. Por ello es que con este ítem, tal como ha sido fundamentado en el Cap. 5, nos hemos propuesto examinar qué tipo de capacidades demuestran poseer los

estudiantes, para elaborar una situación en el contexto de la vida cotidiana que se resuelva con un algoritmo: multiplicación y/o la división de números decimales.
El conocimiento matemático para enseñar requiere de una serie de habilidades para evitar que la comprensión de los niños, en términos de conceptos matemáticos, no resulte crítica. En palabras de Ball (2000), es esencial trascender la comprensión tácita.

Análisis del sub-ítem a) (Problema 2,255 x 1,7)

Recordamos que, para este sub-ítem el requerimiento era enunciar un problema de la vida cotidiana, en un contexto de uso de porcentajes, que se resuelva con la operación: 2,255x1,7.
Tal como podemos apreciar en la Tabla 6.71, sorprendentes han sido los porcentuales obtenidos en cuanto al grado de corrección del ítem. En primer lugar, que prácticamente el 57% de los estudiantes no lo resolvieran y en segundo lugar, que el 36,4% lo hiciera mal. Con estos datos ha resultado poco significativo quienes han logrado dar una buena o parcial resolución.

Tabla 6.71. *Frecuencias y porcentajes para **13aV1** (Grado de corrección)*

Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	43	36,4
1: Parcialmente bien o incompleto	4	3,4
2: Bien	4	3,4
En blanco	67	56,8
Total	118	100,0

Ante este tipo de ítems, nos pareció importante analizar, en alguna medida, el grado de adecuación logrado entre la situación solicitada y el algoritmo planteado. Es claro, que ante los resultados obtenidos para la variable 13V1, el grado de adecuación resultaría totalmente bajo, tal como se puede ver en la descripción de valores y porcentajes de la Tabla 6.72.

Tabla 7.72. *Frecuencias y porcentajes para **13aV2***
(Grado de adecuación de la situación a las condiciones dadas)

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Adecuada	3	2,5
2: Parcialmente adecuada	8	6,8
3: Inadecuada	37	31,4
En blanco	67	56,8
Otros	3	2,5

Total	118	100,0

En este estado de la cuestión, lo más relevante fue determinar el tipo de conflictos producidos en el intento de resolver el ítem.

Nos encontramos con que dos fueron los conflictos con mayor presencia. El hecho de que consideraron que la condición porcentaje no tenía sentido con el algoritmo planteado o de manera complementaria que fuera ignorado al redactar la situación/problema. Además de otros conflictos, como se observa en la Tabla 7.73.

Tabla 6.73. *Frecuencias y porcentajes para* ***13aV3*** *(Tipos de conflictos)*

Tipo de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: La condición porcentaje carece de sentido o tiene poco sentido en la situación	14	11,9
2: Contexto adecuado y tratamiento erróneo del porcentaje	9	7,6
3: No es posible redactar un problema con los datos dados, donde intervenga porcentaje	5	4,2
4: El porcentaje no aparece en el problema	14	11,9
En blanco	71	60,2
Otros	5	4,2
Total	118	100,0

Tal como señala Chick (2003) en su investigación sobre las destrezas que los futuros profesores ponen de manifiesto cuando deben explicar la equivalencia entre dos tipos de representaciones (fraccionaria y porcentual), se observan dificultades para establecer dichas relaciones. En nuestro caso, el problema se ve aún agravado dado que se solicitó a los estudiantes que redactaran una situación adecuada a la operación y a las condiciones solicitadas, dando por supuesto que las relaciones mencionadas estaban disponibles en los alumnos.

Análisis del sub-ítem b) (Problema 5,76: 1,8)

Para este sub-ítem, el requerimiento fue enunciar un problema de la vida cotidiana, en este caso en un contexto de magnitudes, pero que se resuelva con una división: 5,76:1,8. Es notable cómo, en este caso, los porcentajes de resoluciones erróneas y en blanco descendieron notablemente respecto del ítem anterior, como puede apreciarse en la Tabla 6.74. No obstante, que el 38,1% de los estudiantes no respondieran a este ítem no deja de ser preocupante.

Tabla 6.74. *Frecuencias y porcentajes para* ***13bV1*** *(Grado de corrección)*

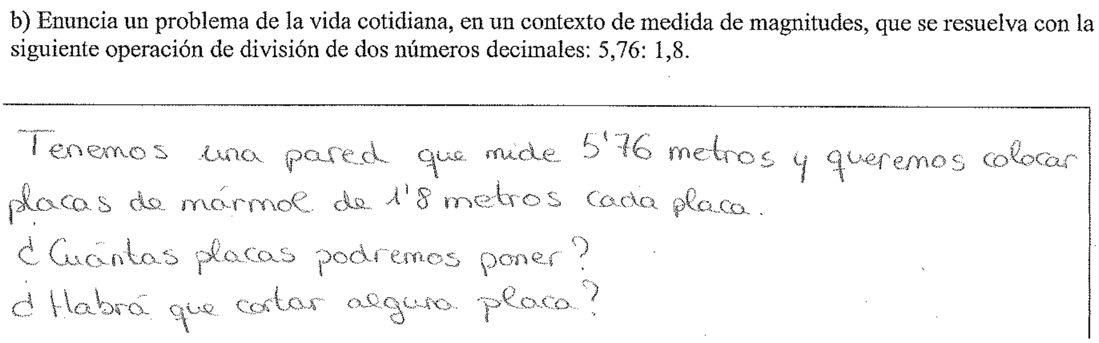
Valores	Frecuencia	Porcentaje
0: Mal	18	15,3
1: Parcialmente bien o incompleto	24	20,3
2: Bien	31	26,3
En blanco	45	38,1
Total	118	100,0

Del mismo modo, podemos ver en la Tabla 6.75, que el porcentaje de situaciones que no se adecuaron a la cuestión planteada se situó en el 14,4%, muy por debajo del obtenido para el ítem anterior.

Tabla 6.75. *Frecuencias y porcentajes para* ***13bV2***
(Grado de adecuación de la situación a las condiciones dadas)

Tipo de respuesta	Frecuencia	Porcentaje
1: Adecuada	27	22,9
2: Parcialmente adecuada	29	24,6
3: Inadecuada	17	14,4
En blanco	45	38,1
Total	118	100,0

En cuanto a los conflictos, pudimos observar que el que se presentó con mayor fuerza (18,6%), se debió a que los estudiantes utilizaban unidades de medidas inadecuadas para los objetos tratados (Se trató de un uso incorrecto de las unidades de medida). Mientras que fueron pocos los casos en que el problema dado no respondía o no se resolvía con el algoritmo pedido.


b) Enuncia un problema de la vida cotidiana, en un contexto de medida de magnitudes, que se resuelva con la siguiente operación de división de dos números decimales: 5,76: 1,8.

Tenemos una pared que mide 5'76 metros y queremos colocar placas de mármol de 1'8 metros cada placa.
¿Cuántas placas podremos poner?
¿Habrá que cortar alguna placa?

Figura 6.25. *Caso representativo del tipo de conflicto 2 (13bV3)*

Tabla 6.76. *Frecuencias y porcentajes para **13bV3** (Tipos de conflictos)*

Tipos de conflictos	Frecuencia	Porcentaje
1: El problema se resuelve con otra operación (o con otra división)	7	5,9
2: Se utilizan unidades de medidas o cantidades inadecuadas para los objetos tratados	22	18,6
3: La pregunta carece de sentido o tiene poco sentido en el contexto del problema	4	3,4
En blanco	76	64,4
Otros	9	7,6
Total	118	100,0

Conclusiones del ítem

Según Lachance y Confrey (2002), para dar sentido conceptual a la notación decimal es necesario que los estudiantes posean conocimientos previos de otros constructos matemáticos, particularmente el concepto de razón resulta importante. Generalmente se estudia la notación decimal de forma aislada, y lo importante es lograr un manejo fluido de la relaciones entre representaciones y usos, como es el caso de porcentajes, decimales y fracciones.

Resulta evidente, que en el caso del sub-ítem a) este hecho fue decisivo; en tanto que la ausencia de relación entre la expresión decimal: 1,7 y lo que este número representa en términos porcentuales, fue el determinante para que el ítem no pudiera hacerse o se resolviera mal. La relación entre fracciones y porcentajes ha sido fuente también de dificultades en el estudio llevado a cabo con futuros profesores por Chick (2003). Por otra parte, tal como lo plantean diversos investigadores el algoritmo de la multiplicación de números decimales requiere en sí mismo de una comprensión conceptual, tal como ya se ha corroborado también en el estudio del ítem 9.

En cuanto al sub-ítem b), podríamos inferir de los resultados que el dar un problema que se resuelva con una división, parece resultar más familiar para los estudiantes o que al menos generó menor dificultad. Pero cabe destacar que aquí solo se pidió que se trabajara con un tipo de magnitud, que es la más conocida por los futuros profesores, y si se produjeron dificultades, precisamente se debieron a un manejo inadecuado de una cuestión subyacente al algoritmo en si. Se debió precisamente a conflictos dentro de la magnitud, con las unidades de medida.

De todos modos, en términos generales, nos encontramos con serias dificultades en los futuros profesores para elaborar una situación que responda a los algoritmos planteados.

Kalder (2007) en su investigación también encontró dificultades en futuros profesores de escuela media para crear una historia que responda al problema de la división de dos decimales, y quienes lo hicieron, en general no lograron que la historia se adecuara la operación solicitada.

Por tanto insistimos en que para un futuro profesor de enseñanza primaria, dotar de significado a una operación en un contexto de la vida diaria es esencial. Mas allá que ello sea poco usual, razón por la cual consideramos que este tipo de *conocimiento es especializado,* dado que se trata de una tarea de enseñanza que requiere de precisión conceptual en la representación.

6.3. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE LAS VARIABLES CUALITATIVAS

Con el fin de profundizar en los significados personales de los estudiantes, como hemos anticipado en la introducción, en este capítulo se procedió al análisis de los datos correspondientes a dos tipos de variables V2 ("Conocimientos puestos en juego en las respuestas a los ítems") y V3 ("Conflictos manifestados en las respuestas a los ítems"). Del estudio de dichas variables, sobre los datos obtenidos de la aplicación de la prueba, hemos obtenido una serie de conclusiones específicas las cuales sintetizamos a continuación.

- A los fines de ubicar y contextualizar nuestro objeto de estudio, el número decimal, nos interesó en primera instancia tener una percepción de la manera en que este tipo de números es distinguido, por los futuros profesores, del resto de los conjuntos numéricos. En dicho reconocimiento se pusieron en evidencia carencias de distintos tipos. El problema esencial se centra en la identificación de un número real como parte de un conjunto específico. El conocimiento de las propiedades que caracterizan, identifican y distinguen a los números se presenta débil. Esto se manifiesta en el desarrollo de actividades con representaciones equivalentes de un número, y en particular con la expresión decimal de un número que es fuente generadora de diversos conflictos. La recta numérica es un recurso que destaca esta problemática (ítem 2), y también el reconocimiento de un determinado estatus numérico a través de la representación decimal de un número (ítem 12).

- El ítem 1, que encabezó el instrumento, estaba destinado a tener una percepción del tipo de concepción de número decimal que ponían de manifiesto los alumnos, contenido central de nuestro estudio. En tal sentido hemos podido observar que ha prevalecido en estos estudiantes una concepción de tipo polinómica. Concretamente, lo que ellos verbalizan como "números con coma", es decir una expresión reducida de dicha concepción. Los significados personales manifestados por los estudiantes permitieron rescatar también otras concepciones, aunque en número menor y generalmente solo una de ellas, a excepción de las concepciones polinómica y fraccionaria que en ocasiones aparecieron combinadas. Ello da cuenta, que la concepción de número decimal en general aparece limitada a un tipo de significado que obviamente, solo le otorga parcialidad al significado.

- Si bien la concepción que prevalece de número decimal es la polinómica, sin embargo, el significado de los elementos que se hallan a la base de dicha concepción (posición, valor, relación entre posición y valor, relación unidades, decenas,..décimas centésimas,…) es parcial dentro del repertorio de conocimientos. Por otra parte, se manifiestan conflictos ya destacados históricamente en la literatura. Evidencia de estas afirmaciones las aportan los conocimientos manifestados especialmente a través de los ítems 3, 4 y 9.

- Si nos remitimos directamente a nuestro foco de atención, identificación de los números decimales, el proceso que despliegan los estudiantes para su reconocimiento sigue siendo revelador de conflictos. Ello ocurre tanto cuando se muestra la expresión decimal de un número (ítem 5), como cuando se exhiben números reales (en cualquier otra forma de expresión) y se solicita reconocer aquellos que son decimales, considerando la posibilidad de dar una expresión decimal finita que lo identifique (ítem 6).

- Hasta el momento encontramos que la esencia de las dificultades manifestadas, provienen de la ausencia de una gama de significados parciales conectados coherentemente. Las propiedades también suman a los conflictos. Ciertamente es reconocida la discretitud de los números naturales como obstáculo epistemológico para el avance hacia nuevas propiedades numéricas. En tal sentido cuestionar la validez de la propiedad sucesor de los números naturales, en otros conjuntos numéricos, revela inmediatamente conflictos que impiden la concepción de la densidad de Q en R, y en particular de D en Q. Esto lo pudimos evaluar con los ítems 7 y 8.

- Precisamente porque las relaciones entre las distintas representaciones de un número aportan al desarrollo de su significado y apoyan a la caracterización de propiedades algebraicas, es que un ítem como el 10, lo consideramos esencial para poner en juego de manera conjunta conceptualización, precisión en la representación de las nociones matemáticas y la relación entre conceptos. Por otra parte su formulación exige enunciar proposiciones que, para ser sustentadas requieren de procesos de justificación. Ya sea la formulación de contraejemplos, uso de propiedades, conceptos y/o procedimientos.

  Los conflictos generados en la resolución de las tareas requeridas por el ítem, confirman la afirmación que hacíamos sobre parcialidad y estancamiento de significados. Los significados personales nos permitieron caracterizar la esencia de esa parcialidad no solo en términos de conceptos y procedimientos, sino también por otros elementos de significado que aportan información. Es el caso de las propiedades, los argumentos, la precisión del lenguaje requerido, y la tarea en sí misma, que por su formulación requería que el conjunto de elementos mencionados se movilicen. Concretamente, nos permitieron detectar serias carencias básicamente en la conexión de conceptos. Esto se pudo ver en la distinción entre número y expresión, la equivalencia de representaciones, y fundamentalmente en el manejo del proceso de justificación.

- Existen muchas investigaciones que hablan de las dificultades de las operaciones con números decimales, pero en general, se hallan centradas en los errores que comenten los niños al efectuar los algoritmos correspondientes.

  El propósito esencial que se persiguió con los ítems 9, 11 y 13, fue promover un tipo de reflexión en el futuro profesor, que no suele ser frecuente, pero que consideramos importante como conocimiento matemático para la enseñanza. Precisamente se trata de un tipo de conocimiento que puso en evidencia la necesidad de un conocimiento especializado del contenido, para abordar este tipo de tareas. Nuevamente el proceso de justificación es generalmente inadecuado. Los estudiantes han sido evaluados bajo la concepción de esquemas de prueba y los esquemas predominantes fueron los de "una autoridad externa" y de tipo "empíricos", en la mayoría de los casos para el ítem 9. Un esquema coherente de tipo deductivo se presentó solo en 2 casos. Es evidente que la argumentación no es comprendida como un proceso matemático. En el caso del ítem 13, los conflictos manifestados a la hora de redactar una situación que se ajustara estrictamente a la operación requerida y a los números dados, se percibieron en la relación entre expresiones como porcentaje y número decimal (multiplicación), y en el manejo de magnitudes (división). Los conflictos en el caso del ítem 11, estuvieron vinculados estrictamente con la relación entre número decimal, expresión decimal de un número, fracciones y redondeo.

Por último, cabe destacar que si bien podemos encontrar diversidad de conflictos en el *conocimiento común de los contenidos* que se han ido evaluando, ellos se han puesto de manifiesto con mayor claridad y profundidad por dos dimensiones del estudio que consideramos particularmente novedosas en el trabajo con números decimales.

Por un lado, la manifestación de conflictos no contempla solo errores, es decir, considera las discrepancias con el significado institucional de referencia. Por lo que consideramos que se trata de una percepción de la realidad que proporciona indicadores concretos que permiten la posibilidad de actuar sobre la base de lo existente. En términos de los marcos teóricos que hemos utilizado, se trata de poder actuar y ejercer control sobre los conflictos, para que la brecha entre los significados institucionales y personales se minimice lo máximo posible.

Por otra parte, esa visión que hemos descrito, se ha visto favorecida por la consideración de respuestas parcialmente correctas y la incorporación de variables cualitativas de análisis en el estudio. Considerar estos dos aspectos, no has permitido precisar el grado del conocimiento de contenido existente y a la vez el tipo de conflicto que impide una adecuación al significado institucional de referencia.

No menos importante ha resultado el análisis del *conocimiento especializado y ampliado del contenido*, puesto que con la intención de evaluar esa tipología de conocimientos, las tareas seleccionadas contemplaron significados relativos al contenido y la enseñanza que generalmente no son consideradas, de manera específica, en el diseño curricular pero que si son reclamadas, tanto por los investigadores como por la propia comunidad educativa.

CAPITULO 7

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

7.1. INTRODUCCIÓN

En esta memoria hemos presentado una investigación teórica y experimental sobre aspectos del conocimiento de los números decimales en futuros profesores de educación primaria. En el presente capítulo describiremos las conclusiones a las que hemos llegado como resultado de la investigación realizada.

En primer lugar retomaremos los objetivos planteados aportando información sobre el grado de consecución de los mismos y analizaremos las conclusiones alcanzadas sobre las hipótesis iniciales planteadas en el Capítulo 2.

Posteriormente incluimos una síntesis de las aportaciones realizadas con este trabajo al ámbito general de la didáctica de la matemática, y en particular, en el campo de la formación de profesores, todo ello concretado en un conocimiento específico: aspectos relativos a la enseñanza de los números decimales. Mencionamos también algunas limitaciones del trabajo, a los fines de tener una perspectiva contextual más clara de los aportes e identificar futuras líneas de investigación.

7.2. SOBRE LOS OBJETIVOS

En capítulo2 formulamos una serie de objetivos, de cuyo cumplimiento informamos en este apartado.

Como hemos mencionado en la introducción de esta memoria, los números decimales, constituyen un contenido que han generado diversos problemas en su aprendizaje, como ponen de manifiesto multiplicidad de investigaciones. Nuestro problema de investigación se ha centrado en la exploración del estado del conocimiento que muestran futuros profesores para la enseñanza primaria sobre los números decimales. Por ello, es que consideramos esencial, analizar la naturaleza y desarrollo de estos números y, en particular, estudiar los factores que condicionan los procesos para su enseñanza y aprendizaje. Por esta razón, nuestro primer objetivo general ha contemplado esta necesidad, planteándose del siguiente modo:

O_G1: *Elaborar un modelo didáctico de referencia local, para evaluar conocimientos sobre los números decimales.*

Para dar cumplimiento al **O_G1**, hemos formulado los siguientes objetivos específicos:

O_E1.1: *Recopilar y sintetizar los conocimientos aportados en las investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de los números decimales.*

A través de una revisión de antecedentes de investigación, hemos podido poner en evidencia, desde una perspectiva educativa, el tipo de problemas del que es objeto el número decimal.

En el Capítulo 1 hemos desarrollado de manera sintética cuestiones vinculadas a la naturaleza, origen e importancia, de estos números. Organizamos los antecedentes desde una perspectiva que considera al número decimal, como objeto epistémico, su estado en el campo de investigación didáctica, su enseñanza, y su aprendizaje.

Cabe destacar que dichos antecedentes han sido rescatados desde diversos ámbitos, tanto desde el punto de vista geográfico, como desde la posición psico-pedagógica subyacente en los investigadores. Es así, que las fuentes provienen de trabajos originados en el seno de grupos reconocidos en el ámbito de la didáctica de la matemática y con desarrollos teóricos específicos, ya sea en el contenido de nuestro interés, como en la formación de profesores. Nos referimos a grupos en: Francia (Brosseau y cls.), Australia (Stacey y cls.), Estados Unidos (The Rational Number Project; Ball y cls.), España (Godino y cls., Socas, Ruiz, Llinares), Grecia (Gagatsis y cls.), Italia (D`Amore, Ferrari, Merenluoto), Alemania (Krauss y cls.); como así también investigadores autónomos pertenecientes a distintas universidades del mundo.

A los fines de lograr mayor especificidad y mejor visualización de los antecedentes recogidos, nos planteamos un segundo objetivo específico:

O_E1.2: *Reorganizar los antecedentes de investigación en categorías y dimensiones según el marco teórico adoptado para la investigación.*

Desde el "Enfoque Ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), adoptado como herramienta teórica central en nuestra investigación, se propone para el análisis didáctico, facetas y niveles de análisis. Las facetas propuestas refieren a dimensiones de análisis. Hemos sintetizado los conocimientos didácticos para los números decimales clasificados según las dimensiones epistémica (significados institucionales), cognitiva (significados personales) e instruccional (interacciones y uso de recursos).

En la dimensión epistémica se señalaron características esenciales de los números decimales que dan cuenta de su concepción, desde distintas perspectivas, y de su importancia en la escolaridad obligatoria. En la dimensión cognitiva, se identificaron y describieron aspectos relativos al número decimal que implican dificultades en su aprendizaje, en niños y/o en futuros profesores. Dificultades relativas al concepto, a la escritura y/o representación, a las propiedades, a los procedimientos y a las operaciones. En cuanto a la dimensión instruccional, se destacaron grupos que han seguido principios psicopedagógicos particulares, tal es el caso de la "Teoría de Situaciones", encabezado por G. Brosseau desde los años 80. El grupo australiano de la Universidad de Merlbourne, cuyos principales representantes son V. Steinle y K. Stacey, cuyo objetivo central refiere a la conexión de los decimales con los números enteros y las fracciones. Las producciones se centraron en la elaboración de lecciones y juegos, planteando puntos de discusión con el propósito de diagnosticar concepciones erróneas sobre los números decimales. El Rational Number Project (NRP), programa de investigación y desarrollo sobre la enseñanza de los números racionales. Siendo Lesh (1979-2003) uno de los fundadores de este programa quien sostiene un modelo de integración y relación de conceptos. Cramer, Wyberg y Leavitt (2009), dentro de este marco, elaboraron un texto para abordar la enseñanza de las fracciones, e ideas iniciales sobre los decimales. Desde la perspectiva del Enfoque ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y en el marco del Proyecto Edumat-Maestros y bajo la dirección y edición de Godino (2004) se elaboraron dos textos: Matemática para maestros y Didáctica de la matemática para maestros. También podemos destacar otros tópicos abordados desde esta dimensión, y por ende investigadores en esas líneas. Estos han sido agrupados bajo las siguientes designaciones:

- Conocimiento profesional en relación al contenido matemático
- Propuestas de trabajo integral entre las nociones de fracciones, decimales y razón.

Por otra parte, hemos considerado que los libros de texto constituyen un recurso y referente inmediato que participa en la organización de proyectos y tareas de enseñanza. Por tanto, el grado de incidencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática puede ser importante. Por ello, es que consideramos pertinente contemplar el siguiente objetivo general:

O_G2: *Analizar trayectorias de enseñanza de los números decimales, en algunos libros de textos escolares.*

Para dar cumplimiento a este objetivo se exploró si el modo en que se introducen los números decimales en los textos escolares tiene en cuenta las problemáticas y recomendaciones detectadas por las investigaciones. Para ello se realizó un análisis, desde una visión global, de la introducción de los mencionados números en dos libros de textos. Posteriormente se hizo un análisis exhaustivo de una lección en un tercer texto.

En términos generales pudimos observar que, si bien los contenidos desarrollados en los textos se corresponden con los contenidos curriculares prescritos, los conocimientos del contenido que se espera desarrollar se presentan de manera estanca, como grupos de contenidos cerrados en sí mismos sin la necesaria articulación coherente entre conceptos, lenguaje, propiedades, argumentos de modo tal que su configuración epistémica promueva la significación parcial de aquellos elementos puestos en juego en el texto.

Con el estudio específico del tercer texto, hemos podido evidenciar que las trayectorias planteadas a lo largo de la lección, como las secciones en sí mismas adolecen de configuraciones epistémicas "idóneas" que favorezcan un desarrollo coherente de los conocimientos considerando las dificultades que las investigaciones han evidenciado.

El tratamiento de la décima y la centésima son conceptos esenciales para el trabajo adecuado con nociones como la posición que ocupa una cifra y su valor. No obstante, mediante el análisis realizado, se puede observar que tal introducción se realiza en el texto de manera formal y que las distintas tareas colocadas como actividades se movilizan en un contexto puramente matemático.

Cuando se aborda el valor de posición de cada cifra, las nociones de décima y centésima no aparecen integradas a aquella noción. La décima y la centésima se refuerzan en el texto solo a nivel coloquial, con lo cual no contribuyen a la necesaria distinción entre cifra y valor de una cifra según su posición. El tratamiento del procedimiento de ordenación, no es ajeno a los contenidos de esta lección. No obstante, el proceso se realiza siempre con dos cifras decimales, cuestión que encubre las dificultades que las investigaciones señalan para este ámbito y que luego repercutirán en la comprensión de la densidad. Este estudio fue realizado en el Capítulo 4.

Con el cumplimiento de los objetivos 1 y 2, y con los resultados obtenidos del estudio exploratorio realizado a estudiantes ingresantes a la carrera, y que se ha descrito en el Capítulo 3, hemos logrado disponer de una visión amplia y profunda sobre el conocimiento didáctico de los números decimales. Esto nos permitió disponer de un *Significado de Referencia Global*, para la consecución de los próximos objetivos cuya finalidad se centró en evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación primaria sobre los números decimales. De allí, nuestro próximo objetivo:

O_G3: *Evaluar significados personales que, sobre los números decimales, poseen futuros profesores para la enseñanza primaria.*

Para llevar a cabo el **O_G3**, esto es, estudiar los factores que condicionan el proceso de aprendizaje de los números decimales en futuros profesores de enseñanza primaria, fue necesario elaborar un instrumento adecuado para realizar las mediciones correspondientes. Por tal razón, el primer objetivo específico lo planteamos del siguiente modo:

O_G3.1: *Construir un instrumento de medición para evaluar aspectos relevantes del conocimiento común, especializado y ampliado sobre los números decimales por parte de futuros profesores de educación primaria. También se incluyeron algunos aspectos del conocimiento del contenido y los estudiantes.*

Para el diseño del cuestionario hemos tenido en cuenta el significado de referencia global ya señalado. Ello nos permitió focalizar el estudio en aspectos que consideramos relevantes para la base del tratamiento de la enseñanza de estos números. Hemos logrado un significado local de referencia, a partir del cual hemos focalizado el cuestionario principalmente en la distinción entre las representaciones decimales y fraccionarias de los números decimales, y las propiedades de los números racionales representados. En primer lugar, se especificó el contenido de la variable objeto de

medición desde una perspectiva ampliada, en el sentido que se tuvieron en cuenta una componente de tipo curricular (refiere al contenido números decimales) y otra que llamamos ontosemiótica (que tiene en cuenta los trama de objetos y procesos puestos en juego en la realización de las tareas matemáticas).En consecuencia, a partir de la elaboración de una tabla con los contenidos seleccionados para la evaluación, en el marco del significado institucional de referencia, se procedió a la construcción de la primera versión del cuestionario. Este se proyectó con 11 ítems y sub-ítems, conformándose un total de 27 ítems. Los ítems que componen la versión piloto del instrumento provienen de distintas fuentes: investigaciones, libros de textos escolares, de elaboración propia y reformulaciones. Responden, según el ítem, a aspectos y categoría/s del conocimiento del contenido números decimales. También hemos incorporado tres ítems que atienden a la categoría conocimiento del contenido y estudiantes. Para cada uno de estos ítems se ha realizado una fundamentación de su elección y/o formulación. Se aplicó el cuestionario a una muestra piloto de 12 alumnos, con el propósito esencial de valorar la comprensión de los enunciados y valorar el tiempo estimado para su ejecución. Luego se procedió a la valoración mediante juicio de expertos y con el análisis realizado sobre dichas valoraciones, se realizó la adecuación del instrumento. Se incorporan 2 ítems nuevos, se modifican algunos y se descartan 2 sub-ítems. La versión definitiva quedó constituida por 13 ítems generales, que con los sub-ítems correspondientes, hacen un total 28 ítems. Para cada ítem en particular, se realizó un análisis epistémico a-priori de los elementos de significados puestos en juego, lo que complementó el proceso de validación del cuestionario.
En síntesis, a través del proceso descrito, hemos llevado a cabo la construcción de un cuestionario que permite evaluar aspectos relevantes de conocimientos necesarios para una enseñanza idónea de los decimales en la escuela primaria.

Las configuraciones epistémicas realizadas para cada ítem, nos brindan elementos para evaluar la discrepancia entre nuestro significado de referencia local institucional y los significados personales de los estudiantes luego de aplicada la evaluación. Por ello es que contemplamos el siguiente objetivo:

O_E3.2: *Prever conflictos semióticos sobre los significados institucionales de los decimales y contrastar su presencia en los significados personales de los estudiantes.*

El desarrollo de la configuración epistémica de cada ítem puso en juego, en cada caso, variedad y multiplicidad de elementos de significado. Dependiendo del modo en que se presentaron las relaciones entre ellos, se pudieron anticipar algunos conflictos potenciales. La detección de tales conflictos resultó esencial para la posterior evaluación de la discrepancia entre significados (institucional y personal). Por ello es que consideramos, como una de la variables cualitativas para el análisis de los datos del cuestionario, precisamente la que refiere a “tipos de conflictos” específicos para cada ítem en particular.

El cuestionario final elaborado, tras la realización de pruebas piloto, el uso del juicio de expertos y el análisis del tratamiento del tema en libros de escolares, ha sido aplicado a una muestra de 118 estudiantes de magisterio de la especialidad de educación primaria. La aplicación del cuestionario ha permitido desvelar las dificultades de comprensión y uso competente de los decimales por parte de los futuros profesores de la muestra, las cuales en gran medida concuerdan con resultados de investigaciones previas. No obstante, el hecho de haber incorporado en el estudio los dos tipos de variables mencionadas, nos ha permitido detectar algunas precisiones y complementos.

Con respecto a la concepción de número decimal, si bien la mayoría de los estudiantes expresa solo un tipo (expresión polinómica, concretamente “número con coma”), aparecen otras concepciones. No obstante, esas apariciones son generalmente únicas en cada sujeto y por tanto el significado personal otorgado al número decimal es parcial.

Al observar el conocimiento matemático manifestado para identificar con precisión números racionales, utilizando la recta como recurso, observamos que las dificultades aparecen con la identificación y representación de números expresados como fracción, como así también para vincular representaciones equivalentes de las que no lo son. Sucede que, los futuros profesores demuestran insuficiente comprensión sobre la estructura del sistema de numeración y en particular sobre la representación de números racionales. Esto se evidencia en la evaluación de los significados personales cuando resuelven el ítem 3.

Cuando se pone en juego el cero en una expresión decimal, uno de los tipos de errores frecuentes señalados por las investigaciones, no se encuentran mayores problemas en cuanto a los números que exhiben y que cumplan con las condiciones pedidas. Los conflictos surgen en la argumentación, ya sea por la ausencia, por la limitación que poseen en la búsqueda de posibilidades, y más aún en el intento de generalización. Ello nos permite observar que el tratamiento que realizan a los números tiene un carácter sintáctico, sustentado en conocimientos previos sobre los números enteros, pero carentes del conocimiento semántico necesario (conceptos de valor y posición, décimas, centésimas, etc. y sus relaciones) para manejar posibilidades, limitaciones y fundamentarlas.

Al evaluar el carácter decimal en cuatro números racionales, expresados en forma decimal, tal lo esperado se puso en juego la concepción polinómica que prevalecía en el ítem 1. Al aplicarse a este ítem dicha concepción nos permitió observar las limitaciones que manifiestan sobre la misma. Esto se corrobora cuando se analizan las distintas afirmaciones. Las que se manifiestan incompletas y/o falsas y provienen de "mirar" la forma de escritura sin tener en cuenta las propiedades que caracterizan a cada tipo de número.

Cuando se exploran las relaciones que establecen entre número decimal, expresión decimal y aproximación decimal de un número, se puede inferir que el significado de número racional e irracional no se encuentran disponibles en su bagaje de conocimientos. En particular, la ausencia de relación entre los conceptos de número decimal, racional y entero que permite distinguirlos entre sí y, a la vez unificar el número racional requiere de la comprensión de las diferentes representaciones y las relaciones entre ellas. Cuestión que ya hemos visto se hallan presentes, en el mejor de los casos, de manera estanca.

Por otra parte, el manejo de las propiedades de los números resulta esencial en el proceso de otorgar significación a los mismos. En este ámbito encontramos que las propiedades conocidas para los números naturales (como es el caso del sucesor de un número), da lugar a importantes significados erróneos en los nuevos campos numéricos, en particular para la propiedad topológica de la densidad de los números decimales. Un obstáculo epistemológico proveniente de conocimientos sobre los números naturales que opera sobre la mencionada propiedad, lo hemos podido observar con el desarrollo de los ítems 7 y 8. La evaluación del tratamiento del ámbito de validez de la propiedad sucesor lo evidencia.

Ante la afirmación, proveniente de diversas investigaciones, que las relaciones entre las distintas representaciones de un número aportan al desarrollo de su significado y apoyan a la caracterización de propiedades algebraicas, hemos considerado el ítem 10. La resolución de este ítem requiere de análisis de posibilidades, conjetura de validez y justificación de afirmaciones lo que ha resultado una tarea claramente compleja.

En el contexto de la representación decimal de un número, la precisión resulta un concepto relevante cualquiera sea el ámbito de aplicación. No obstante, el 48% de los estudiantes dan respuestas adecuadas en situaciones de aproximación (en la aplicación del ítem 11), se puede observar en un porcentaje considerable carencias conceptuales. El considerar, por ejemplo, que "se obtiene mejor resultado si se da una aproximación de un número que si se utiliza el propio número", es una evidencia de ello.

En cuanto al conocimiento de los números irracionales, presentan conflictos ligados a la estructura de nuestro sistema de numeración. Esto puede observarse, de manera particular, con el tratamiento del número π. Si bien no se espera una conceptualización de éste como número irracional en la escuela elemental, sí se esperan ciertos conocimientos que le permitan al futuro maestro incorporar de manera progresiva su significado.

Por último, hemos corroborado que solo el reconocimiento y la resolución correcta de un algoritmo no otorga un significado completo de las operaciones. Esto se puso de manifiesto con el estudio de los ítems 9 (justificación de un algoritmo) y 13 (redacción de una situación adecuada para una operación dada).

7.3. SOBRE LAS HIPÓTESIS

En el capítulo 2 formulamos hipótesis de cuya contrastación damos cuenta en este apartado.

H1: La aplicación de herramientas teóricas aportadas por el "Enfoque Ontosemiótico sobre el Conocimiento y la Instrucción Matemática" (EOS), permite hacer operativas las categorías del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (modelo MKT) planteadas por Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball, y Schilling, 2008).

Se trata de una expectativa de índole teórica que implica la articulación coherente de dos marcos teóricos usados en educación matemática. En el capítulo 2 hemos descrito las herramientas teóricas usadas en esta tesis, las cuales han sido básicamente el modelo MKT de conocimiento matemático para la enseñanza de Ball y cols (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball, y Schilling, 2008), donde se distinguen las categorías, conocimiento del contenido (común, ampliado y especializado), conocimiento del contenido en relación a la enseñanza y los estudiantes; conocimiento del currículo; y el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) elaborado por Godino y cols. (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2009).

El uso de ambos marcos teóricos lo hemos considerado pertinente ya que el desglose entre los tres tipos de conocimientos que propone Ball y cols. para el conocimiento del contenido matemático es útil en una primera aproximación para la caracterización de los conocimientos del profesor de matemáticas. Pero dicho modelo teórico no aporta hasta el momento una teoría del conocimiento matemático y una teoría de diseño instruccional explícitas que orienten en la elaboración de reactivos para los instrumentos de evaluación o el diseño de acciones formativas. Consideramos que el enfoque ontosemiótico complementa al modelo MKT al aportar una teoría del conocimiento matemático en su doble vertiente personal e institucional, hecha operativa mediante la noción de configuración de objetos y procesos. Así mismo, la noción de configuración didáctica y el sistema de indicadores de idoneidad didáctica da pautas explícitas para el componente instruccional, lo cual ayuda en la elaboración de reactivos para evaluar el conocimiento del contenido y la enseñanza.

En nuestra investigación hemos encontrado pertinente usar las categorías de conocimiento del contenido en su triple vertiente de conocimiento común, ampliado y especializado, formulando ítems para nuestro cuestionario relacionados con dichas categorías. Pero además el uso de la noción de configuración de objetos y procesos del EOS para realizar el análisis a priori de las tareas ha permitido profundizar en los conocimientos y competencias necesarias para resolverlas, mostrando la complejidad semiótica de las mismas y facilitando la formulación de hipótesis específicas sobre conflictos potenciales.

Sobre las cuestiones relacionadas con los conocimientos sobre decimales de los futuros profesores de educación primaria formulamos las siguientes hipótesis:

H2: Los futuros profesores manifestarán un conocimiento insuficiente para abordar con idoneidad la enseñanza de los decimales en educación primaria. De manera más específica mostrarán carencias significativas con relación a aspectos relevantes del,

H2.1. Conocimiento común del contenido

H2.2. Conocimiento ampliado

H2.3. Conocimiento especializado.

El análisis pormenorizado de resultados de las variables cualitativas, definidas para analizar las respuestas de los estudiantes (tipos de conocimientos puestos en juego y conflictos de significado) y realizado en el capítulo 6 de la memoria, ha revelado que los futuros maestros manifiestan importantes carencias cognitivas, no solo en los ítems relacionados con el conocimiento ampliado y especializado, sino incluso para responder a tareas propias de educación primaria.

En términos generales, podemos decir que:

Tal lo desarrollado en el Cap. 1, los investigadores proponen diferentes vías de acceso al conocimiento de los números decimales. No obstante, la concepción de número decimal que manifiestan los estudiantes carece de la riqueza global necesaria para afrontar decisiones a la hora de iniciar y desarrollar este tema en la escolaridad elemental. Del estudio curricular, análisis de textos y estudios exploratorios de ingresantes a la universidad, se puede observar que, o bien, no se promueven esas distintas concepciones, o como en el caso de los libros de textos, aparece el número decimal en diferentes contextos, pero trabajados de manera estanca. Esto hace que se conviertan en fuentes generadoras de conflictos, en detrimento del pretendido significado global de la noción. Cuando evaluamos el conocimiento de los números racionales, en particular la identificación de las distintas tipologías, hemos podido inferir que la mayoría de los estudiantes no comprendan la relación entre decimales, número entero, fracciones, cero y números negativos.

Para el maestro es importante la consideración de las características de los números racionales, como así también los procesos de construcción de conocimiento de los niños. No obstante, tal como se pone de manifiesto en el ítem 3, estos aspectos aparecen difusos.

La capacidad de cuestionamiento a la precisión de las ideas matemáticas presentes en la descripción de una situación, como la posibilidad de disponer de justificaciones pertinentes para explicar un algoritmo (c*onocimiento especializado del contenido y conocimiento del contenido y estudiantes)* resultan claramente conflictivos. Esto se puede evidenciar particularmente con los ítems 3, 7, 9 y 13. Pese a los intentos de encontrar razones que justifiquen diferencias entre afirmaciones realizadas por los niños, de buscar explicaciones que se conviertan en justificaciones matemáticas o de

redactar situaciones que respondan adecuadamente a expresiones abstractas, la ausencia de un conocimiento profundo del contenido, les impide, en la mayoría de los casos, detectar aspectos esenciales de la tarea y proporcionar justificaciones pertinentes.
Los futuros profesores demuestran incapacidad para manejar procesos vinculados a la argumentación, tal como se puede observar específicamente en la evaluación del ítem 4. Los procesos de búsqueda exhaustiva de casos posibles, como en algunos procesos de generalización no son comprendidos. Estos hechos muestran debilidad respecto al *conocimiento especializado y ampliado de este contenido.*

Desde el *conocimiento del contenido*, podemos afirmar que, para los alumnos las expresiones decimales (uno de los elementos claves de nuestro estudio) parecen ser todas del mismo tipo, sin conciencia significativa de la entidad numérica que representan o dejan de representar.

En la evaluación en el ámbito de las propiedades podemos encontrar, en muy pocos casos, evidencias de una visión integral que da cuenta de un adecuado *conocimiento ampliado de la densidad,* aspectos de la tarea que ofrecen cierta complejidad (*Conocimiento especializado del contenido*), y de la identificación de algún conflicto que da lugar a la respuesta de los niños (*Conocimiento del contenido y estudiantes*).

El ítem 10 al poner en juego la conceptualización, la precisión de la representación de las nociones matemáticas y la relación entre conceptos nos ha permitido evaluar en el futuro profesor un *conocimiento especializado* de la relación entre *número y expresión decimal de un número.* El estudiante debía demostrar capacidad para comprender las relaciones en torno al contenido matemático del tópico en discusión, sus formulaciones lingüísticas, las limitaciones y potencialidades de las estructuras de la actividad, la necesaria discusión, y el pensamiento y la comprensión que resulta de ello. El manejo de este conjunto de variables se mostró con serias carencias básicamente en la conexión de conceptos.

Otra cuestión que hemos considerado como un tipo de *conocimiento especializado* es el dotar de significado a una operación en un contexto de la vida cotidiana. Aunque se trata de una actividad que es poco usual, la consideramos una tarea de enseñanza ya que de manera dialéctica aporta significado a las operaciones puesto que requiere de precisión conceptual en la representación.

Conocimientos que hemos considerado como *de tipo ampliado del contenido,* se han manifestado con gran debilidad. Cuestiones como el tratamiento de situaciones que requieren de la *densidad*, como propiedad de los números racionales, y del propio concepto de *número irracional* se pueden desprender del estudio de significados personales manifestados en los ítems 7, 8 y 12 respectivamente.

7.4. SÍNTESIS DE APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Como se ha mostrado en el capítulo 1 de esta memoria de tesis las investigaciones sobre distintos aspectos de la didáctica de los decimales son numerosas, principalmente sobre la dimensión cognitiva (errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje por parte de los niños de la escuela elemental). Nuestro interés por indagar en el campo de la formación de profesores de educación primaria nos llevó a explorar y clasificar de manera sistemática las investigaciones referidas a los aspectos epistémicos (significados institucionales de los decimales) e instruccionales (experiencias de enseñanza, uso de recursos). La finalidad ha sido la elaboración de un modelo sobre conocimientos didáctico – matemáticos sobre el tema que sirva de referencia para elaborar instrumentos de evaluación y el diseño de acciones formativas para los profesores. Consideramos que la síntesis realizada de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de los decimales es una primera aportación de nuestra investigación.

Desde el punto de vista de los marcos teóricos usados en la investigación consideramos que la articulación realizada entre el modelo de "conocimiento matemático para la enseñanza" (modelo MKT, de Ball y cols.) y las "categorías de conocimiento didáctico – matemático" (modelo basado en el EOS, propuesto por Godino, 2009) es también una aportación de esta investigación. Los tipos de objetos y procesos matemáticos, componentes de las configuraciones epistémicas y cognitivas que propone el EOS, y que hemos aplicado en el análisis a priori de las tareas, aportan un desglose operativo de los tipos de conocimientos del modelo MKT.

La aplicación del análisis semiótico basado en el EOS (Godino, 2002) al análisis de la lección introductoria de los decimales en un libro de texto ha permitido revelar, entre otros, algunos conflictos de significado relacionados con la confusión del número decimal y su representación presentes en el libro de texto estudiado. Estos conflictos pueden constituir una explicación de las dificultades de aprendizaje de los decimales por parte de los niños, e incluso de los maestros en formación.

La principal aportación de nuestra investigación ha sido la construcción del cuestionario para evaluación de conocimientos (común, especializado y avanzado) sobre los decimales, puesto a punto mediante ensayos piloto de los ítems, teniendo en cuenta el modelo de referencia sobre los conocimientos didáctico – matemáticos previamente elaborado y su validación mediante el juicio de expertos. Nos situamos, de esta manera, en una perspectiva mixta de investigación en la que la descripción y explicación de fenómenos se articula con el diseño instruccional, en nuestro caso referido a la elaboración de recursos para la intervención educativa.

Finalmente destacamos como aportación la caracterización de los significados personales sobre los decimales de una muestra relativamente importante (118) de futuros profesores, cuyo desempeño ha sido descrito en términos cuantitativos y cualitativos (tipos de conocimientos manifestados, conflictos de significado), información que complementa y amplia los resultados de investigaciones previas sobre el tema. Esta información, junto con el instrumento de evaluación construido puede ser el punto de partida para el diseño, implementación y evaluación de intervenciones educativas en la campo de la formación de profesores de educación primaria.

7.5. LIMITACIONES DEL TRABAJO Y CUESTIONES ABIERTAS

En el capítulo 3 de esta memoria de tesis hemos descrito un estudio exploratorio en el que informamos de la evaluación inicial de conocimientos sobre decimales de un grupo de estudiantes de primer curso de magisterio. Se trataba de tener una primera aproximación al campo problemático de caracterizar los significados personales de los futuros profesores al iniciar sus estudios universitarios, logrados tras sus estudios primarios y secundarios. Tales significados formaban, por tanto, del trasfondo cognitivo sobre los campos numéricos que el formador debe conocer y sobre el cual debe diseñar sus acciones formativas. Tras la aplicación de la prueba piloto los estudiantes iniciaron el estudio del tema de los números racionales, dentro del cual se contemplan los números decimales, al cual el formador dedicó tres semanas (un total de 9 horas lectivas) apoyado en el texto de Cid, Godino y Batanero (2004); dicho texto es usado como consulta y profundización por parte de los estudiantes. Como prueba final de evaluación de los aprendizajes sobre decimales se aplicó la prueba piloto descrita en la sección 3.4, y donde se informa de las dificultades persistentes en la comprensión del tema, a pesar del estudio realizado.

Esta experiencia exploratoria nos permitió apreciar la relevancia del tema investigado, dados los conflictos identificados sobre aspectos del conocimiento común y ampliado (en la terminología de Ball y cols) sobre los decimales que manifestaron los estudiantes. También constatamos la necesidad de disponer de instrumentos de evaluación más sistemáticos y comprensivos que permitan caracterizar las diversas facetas del conocimiento didáctico-matemático de los profesores y constituir el punto de partida para el diseño, implementación y evaluación de acciones formativas específicas sobre el tema. Esta es la razón por la que nuestra investigación la focalizamos en la construcción del cuestionario que hemos presentado en el capítulo 5, y en el análisis de los resultados de su aplicación a una muestra más amplia de estudiantes, en este caso, del segundo curso de la carrera y tras haber estudiado aspectos de la didáctica de los números decimales.

Dado que la Didáctica de las Matemáticas debe no conformarse con describir y explicar, sino también actuar para mejorar el "estado de las cosas", en nuestro caso, mejorar la formación de profesores de matemáticas, queda abierto como problema relevante el diseño, implementación y evaluación de acciones formativas específicas que mejoren la formación inicial de los maestros en el campo específico de los números decimales y su didáctica. Los ítems del cuestionario que hemos elaborado en esta investigación pueden ser el punto de partida para tales diseños. De hecho, tras la aplicación del cuestionario a uno de los grupos a los que se aplicó, organizamos una sesión de clase de dos horas de duración en la que se discutió colectivamente con los estudiantes que habían realizado previamente la prueba de manera individual, las respuestas dadas a las ítems, a fin de confrontar y compartir significados sobre los números decimales. Esta experiencia no ha sido incluida en esta memoria de tesis por razones de tiempo y espacio, pero sin duda es una línea de trabajo sobre la que es necesario profundizar.

Análisis de libros de texto

En el capítulo 4 hemos incluido un estudio exploratorio de libros de texto de primaria al considerar que el libro es un recurso intensamente usado por los maestros y que condicionan de manera importante la enseñanza. Los maestros en formación deben desarrollar competencias de reflexión y análisis de este recurso para hacer un uso pertinente del mismo. En nuestro caso el análisis de libros de textos es una fuente de posibles tareas a incluir en los instrumentos de evaluación y desarrollo de conocimientos didáctico - matemáticos de los profesores, y de hecho algunos ítems del cuestionario tienen su origen en los libros analizados. No obstante, el problema del análisis de los libros de texto de matemáticas para primaria apenas ha sido iniciado en esta investigación, sobre todo por habernos restringido a tres libros. El análisis semiótico de la lección de introducción de los números decimales para niños de 4º grado realizado en la sección 4.3 puede dar pautas para un estudio más amplio de los distintos contenidos de decimales en los libros y aplicable a una muestra representativa.

Diseño de instrumentos de evaluación. Validez de contenido

Las limitaciones de tiempo impuestas por la aplicación de cuestionarios escritos a grupos representativos de estudiantes ha llevado a una fuerte restricción en el número de cuestiones que se pueden incluir en el cuestionario que hemos elaborado en nuestra investigación, limitando por tanto las facetas y componentes que se pueden tener en cuenta. Queda por tanto planteada la necesidad de elaborar nuevos instrumentos de evaluación, no necesariamente restringidos al formato de cuestionarios de respuesta escrita, que permitan evaluar las diversas facetas del conocimiento didáctico – matemático según el desglose operativo derivado del enfoque ontosemiótico.

REFERENCIAS

Afifi, A. y Clark, V. (1990). *Computer-aided multivariate analysis.* New York: Van Nostrand.

Almodóvar, J. A., García, F., Garín, M., Gómez, R., Rodríguez, M. y Uriondo, J. L. (2005*). Matemáticas 4, primaria.* Madrid: Santillana.

Apostol, T. (1976). *Análisis matemático.* (2ª ed.). Barcelona: Reverté.

Arezzo, M. (2000). Frazioni, numeri razionali e numeri decimali. *L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrate, 238* (4), 312-340.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D., Hill, H. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching : Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29* (3), 14-22 y 43-46.

Barbero, M. (2003). *Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas*. Madrid: UNED.

Baturo, A., y Cooper, T. (1998). Construction of multiplicative abstract schema for decimal-number numeration. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 80-87). Stellenbosch: PME.

Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theorical analysis. En J. Bana y A. Chapman (Eds.), *Proceedings of 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 95-103). Fremantle, WA: MERGA.

Benander, L. y Clement, J. (1985). *Error Patterns: Observed in basic arithmetic and algebra courses. Fund for the improvement of post secondary education*. New York: EXXON Education Foundation.

Bolon, J. (1997). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en Didactique des Mathematiques? Le cas de l´enseignement des decimaux a la charniere ècole college*. These de doctorat. París: IREM-Paris VII.

Bonotto, C. (2006). Extending student´s understanding of decimal numbers via realistic mathematical modeling and problem posing. En J. Novotná, H. Maraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 193-200). Praga: PME.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.*(N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, y V. Warfield, Trans.). Dordrect: Kluwer.

Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans l´ecolarité obligatoire*. Bordeaux: IREM de Bordeaux I.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Pat 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, *23* (1), 1-20.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 2: From rationals to decimals. *Journal of Mathematical Behavior, 26* (4), 281-300.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2008). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 3. Rationals and decimals as linear functions. *Journal of Mathematical Behavior, 27*, 153-176.

Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2009). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 4. Problem solving, composed mappings and division. *Journal of Mathematical Behavior, 28*, 79-118.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Chick, H. (2003). Pre-service teachers´explanations of two mathematical concepts. *Proceedings 2003 annual Conference of the Australian Association for Research in Education.* Auckland, NZ. Recuperado de: http://www.aare.edu.au/03pap/chi03413.pdf

Chick, Baker, Pham y Cheng (2006). Aspects of teachers´ pedagogical content knowledge for decimals. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková. (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 297-304). Praga: PME.

Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas para maestros* (pp. 11- 162). Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/

College of Education and Human Development. *The Rational Number Project* (1979-2003). University of Minnesota. Recuperado de: http://cehd.umn.edu/rationalnumberproject/)

Cramer, K, Wyberg, T. y Leavitt, S. (2009). *Rational number project. Fraction, operations and initial decimal ideas*. Recuperado el 20 de marzo de 2009, del sitio Web del Rational Number Proyect de la University of Minnesota: Recuperado de : http://cehd.umn.edu/rationalnumberproject

Cuadras, C. M. (1991). *Análisis multivariante*. Barcelona: Eudeba.

D'Amore, B. (2008). El cero, de obstáculo epistemológico a obstáculo didáctico. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores de Matemáticas, 78*, 10-37.

D'Amore, B. y Fandiño, I. (2009). *Zero. Aspetti concettualli e didattici.* Gardolo: Erickson.

Dane, F. C. (1990). *Research methods*. Pacific Grow, CA: Thompson.

Díaz Batanero, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia Bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Diezmann, C. y Lowrie, T. (2006). Primary students' knowledge and errors on number lines. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková. (Eds.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 171-178). Prague: PME.

Douady, R. y Perrin, M. J. (1990). *Nombres decimaux.* París: IREM Paris VII.

Duval, R. (1993). Régistres de répresentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Eco, U. (1995). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen, 1976.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.

Feldt, L. S. y Brennan, R. L. (1991). Reliability. En: R. L. Linn (Ed.) *Educational measurement* (Third ed.) (pp. 263-331). New York, American Council on Education and Macmillan Publ.

Ferrari, M. (2006). Explorare i mondi numerici del primo ciclo scolatico. *L'insegnamento della Matematica e delle Science Integrate*, *29*A(3), 208-225.

Ferrero, L. et al (2008). *Matemáticas 4*. Madrid: Anaya

Font, V. (2005). Reflexión en la clase de didáctica de las matemáticas sobre una "situación rica". En E. Badillo, D. Couso, G. Perafrán, y A. Adúriz-Bravo. (Eds) *Unidades didácticas en Ciencias y Matemáticas* (pp. 59-91). Magisterio: Bogotá.

Font, V., Godino, J. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematic,27* (2), 3-9.

Fortuny, J. M., Giménez, J. y Alsina, C. (1994). Integrated assessment on mathematics 12-16. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 401-412.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., y Panaoura, A. (2010). Tracing primary and secondary school students´ representational flexibility profiles in decimals. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 9* (1), 211-222.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22* (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (Director) (2004). *Matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (Director) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). Análisis onto-semiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios. *Educational Studies in Mathematics, 60* (1), 3-36.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudios de las matemáticas. *Paradigma, 27* (2), 221-252.

Godino, J. D., Font, V., Konic, P., y Wilhelmi, (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (2009), *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico* (pp. 117- 184). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de, http://thales.cica.es/granada/)

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis onto-semiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9* (Especial), 133-156.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, *77* (2), 247-265.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2008). Sviluppo di competenze di analisi didattica nella formazione degli insegnanti di matematica. En G. Arrigo (Ed.). *Atti del Convegno de didattica della matematica.* (pp. 25-39). Cantone, Suiza: Centro Didattico Cantonale.

Graeber, A. y Tirosh, D. (1988). Multiplication and division involving decimals: Preservice elementary teachers' perfomance and beliefs. *Journal of Mathematical Behavior*, *7* (3), 263-280.

Harel, G., y Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, National Council of Teachers of Mathematics, 805-842.

Hart, L., Smith, S., Swars, S. y Smith, M. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, *1*(3), 26-41.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers´mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Irwin, K. (2001). Using everyday knowledge of decimals to enhance understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32* (4), 399-420.

Kalder, R. (2007). Teaching preservice secondary teachers: How to teach elementary mathematics concepts. *Mathematics Teacher, 101*(2), 146-149.

Kaput (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Boston: Reidel.

Konic (2005). *Significados institucionales del número π: Implicaciones didácticas.* Tesis de Máster. Universidad de Río Cuarto, Argentina.

Konic, P. (2008). *Investigaciones didácticas sobre números decimales: Un estudio exploratorio con maestros en formación*. Tesis de Máster. Universidad de Granada, España.

Konic, P., y Godino, J. D. (2007). Análisis del diseño de una unidad sobre números decimales realizada por profesores en formación. Comunicación presentada en las *Jornadas sobre Enseñanza de las Matemáticas: Investigación en la Escuela. Sociedad Thales de Educación Matemática.* Granada, Diciembre 2007.

Konic, P., Godino, J. D. y Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *74*, 57-74.

Konic, P., Godino, J. D., Castro, W. y Rivas, M. (2008). Comprensión de los números decimales por estudiantes de magisterio. Comunicación presentada en el *XIII Congreso sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* SAEM THALES. Granada.

Krauss, S., Baumert, J. y Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 873-892.

Lachance, A. y Confrey, J. (2002). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *Journal of Mathematical Behaviour*, *20*, 503-526.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing y NCTM.

León, O. G. y Montero, I. (2002). *Métodos de investigación en psicología y educación.* Madrid: McGraw-Hill.

Lerman, I. C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. Paris: Dunod.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 187-220). Madrid: Pearson Educación.

López Feal, R. (1986). *Construcción de instrumentos de medida en ciencias conductuales y sociales.* Barcelona: Alamex.

Malara, N. (2001). From fractions to rational numbers in their structures: outlines for an innovative didactical strategy and the question of density. *Proceedings of the European Research in Mathematics Education II*, February 24-27. Czech Republic.

Mcleod, K. y Huinker, D. (2007). University of Wisconsin-Milwaukee mathematics focus courses: Mathematics content for elementary and middle grades teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38* (7), 949-962.

Merenluoto, K. (2004). The cognitive-motivational profiles of students dealing with decimal numbers and fractions. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings 28th Conference of the International Group for the Psycholog y of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297–304). Bergen, Norway: PME

Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: understanding the real numbers. En M. Limón y L. Mason (Eds.). *Reconsidering conceptual change: Issues in the theory and practice* (pp. 233-258). Dordrecht: Kluwer.

Messick, S. (1991). Validity. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (Third ed.) (pp. 13-104). New York: American Council on Education and Macmillan Publ.

Michaelidou, N., Gagatsis, A. y Pitta-Pantazi, D. (2004). The number line as a representation of decimal numbers: a research with sixth grade students. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305–312). Bergen, Norway: PME.

Millman, J. y Greene, J. (1989). The specification and development of test achievement and ability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (pp. 335-366). London: Macmillan.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006a). *Decreto de enseñanzas mínimas de la educación primaria*. Madrid: MEC.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006b). *Decreto de enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria.* Madrid: MEC.

Ministerio de Educación y Ciencia*, Dirección General de Formación Profesional, Instituto de Tecnologías Educativas*. Recuperado de:

http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2008/visualizador_decimales/menu.html.

Moreira, P. y David, M. (2007). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(3), 205-225.

Moreno, M., Hernández, V. y Socas, M. (2004). Respuestas del alumnado de magisterio a un cuestionario sobre números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, *VI*, 253-275.

Moseley, B. (2005). Students´early mathematical representation knowledge: the effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 37-69.

Moskal, B. y Magone, M. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational studies in Mathematics, 43*(3), 313-335.

Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los tests.* Madrid: Pirámide.

National Council of Teacher of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Thales.

Niss, M. (Ed.) (1993). *Investigations into assessment in mathematics education; an ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer A.P.

Nowlin, D. (2007). Precision: The neglected part of the measurement standard. *Mathematics Teacher, 100* (5), 356-360.

O´Connor, M.C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 143-185.

Olhsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hierbert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Peña, M., Aranzubía, V. y Santalaolla, E. (2008). *Matemáticas 4*. Madrid: Ediciones SM.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 461- 494). Rotterdan: Sense Publishers.

Putt, I. J. (1994). Preservice teachers' construction of decimal numbers. En G. Bell et al. (Compils.), *Challenges in mathematics education: Constraints on construction.* (Vol. 2, pp. 505-514).

Resnick, L., Nesher , P. Leonard, F. , Magone, F., Omanson, S. y Peled, I.(1989). Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal of Research in Mathematics Education, 20*, 8-27.

Rico, L., Castro, Enc., Castro, Enr. Fernández, F., Gil, F., Moreno, F., del Olmo, A. y Segovia, I. (1992). *Bibliografía de investigación sobre evaluación en matemáticas. Base de datos BIEM*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Roditi, E. (2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d´enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(2), 183-216.

Romberg, T. (1989). Evaluation: a coat of many colors. En D. F. Robitaille (Ed.). *Evaluation and assesment in mathematics educations*. Budapest, Hungary: ICME/6.

Ruiz, L. (2004). Construcción de los decimales en la escuela primaria. De las fracciones a la notación decimal. En C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 189-234). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Schilling, S. y Hill, H. (2007). Assesing measures of mathematical knowledge for teaching: A validity argument approach. *Measurement, 5* (2-3), 69-130.

Shield, M. y Dole, S. (2009). An analysis of middle-years school mathematics textbooks. Trabajo presentado en la *Fourth International Conference on Science and Mathematics Education.* CoSMEd 2011. Penang, Malaysia

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a frame work for the development of mathematical knoledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 499-501.

Sirvent, J. (2002). Períodos. *Epsilon, 52*, 115-138.

Snow, R.E. y Lohman, D. R. (1991). Implication of cognitive psychology for educational measurement. En R. L. Linn (Ed*.), Educational measurement* (Third ed.) (pp. 263-331). New York: American Council on Education and Macmillan Publ.

Socas, M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III*, 297-318.

Socas, M. (2002). La organización de los sistemas numéricos desde su escritura decimal. Algunas expresiones ambiguas. *Números*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *50*, 19-34.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K., y Bana, J. (2001). Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(3), 205-225.

Steinle, V. (2004). *Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers*. Unpublished doctoral thesis, University of Melbourne.

Steinle, V. y Stacey, K. (2004). Persistence of decimal misconceptions and readiness to move to expertise. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceeding. 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 225–232). Bergen, Norway: PME.

Steinle, V. Stacey, K. y Chambers, D. (2006). *Teaching and learning about decimals*. [CD]. University of Melbourne. Australia.

Suh, J., Johnston, C., Jamieson, S. y Mills, M. (2008). Promoting decimal number sense and representational fluency. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(1), 44-50.

Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.157-223). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 199-238.

Thompson, P. (1994). La influencia del uso de los materiales en la comprensión de las matemáticas. *Arithmetic Teacher, 41*(9), 556-558.

Thorndike, R. L. (1989*). Psicometría aplicada.* México: Limusa.

Vamvakoussi , X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change. *Learning and Instruction* , 14, 453–467.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* (pp. 127–174). New York: Academic Press.

Verschaffel, L.,Greer, B. y Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future,* 51-82.

Vicent, J y Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal*, *20* (1), 81-106.

Vourgias, Ch., Vourgia, S. y Elia, I. (2003). Representations and learning of mathematics definitions: application in decimal number. *3erd. Mediterranean Conference on Mathematical Education*. Greece.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *27* (1), 77 - 120.

Webb, N. (1992). Assesment of student´s knowledge of mathematics: steps toward a theory. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York, Y: MacMillan Publishing Company

Wheeler, D. (1993). Epistemological issues and challenges to assessment: What is mathematical knowledge? En M. Niss (Ed.), *Investigations into assessment in mathematics education. An ICMI Study*. Dordrecht, Kluwer A.P.

Wilian, D. (2007). Keeping learning on track: Classroom assessment and the regulation of learning. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1051-1098). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics, IAP.

Wilson, L. D. (2007). High stakes testing in mathematics. En F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1099- 1110). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics, IAP.

Zazkis, R. y Khoury, H. (1993). Place value and rational number representations: Problem solving in the familiar domain of non-decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *15*(1), 38-51.

Zazkis, R. y Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: focusing on representation. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 497–504). Bergen, Norway: PME.