EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS DE FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL

Margherita Gonzato

Tesis doctoral

Director: Juan D. Godino

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

2013

RESUMEN

El desarrollo de la visualización espacial de los alumnos de escuela primaria juega un papel central en el aprendizaje de la geometría del espacio; sin embargo se han descrito y analizado diversas dificultades relacionadas con el tema por diferentes investigadores en el campo de la didáctica de las matemáticas. También se ha revelado que los profesores de escuela primaria con frecuencia consideran la visualización espacial simplemente como actividad recreativa y carecen de los conocimientos necesarios para fomentar su desarrollo en los alumnos, tanto sobre el propio contenido matemático que involucra, como sobre su enseñanza.

En esta investigación abordamos el problema de la evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación primaria sobre la enseñanza de la visualización de objetos tridimensionales representados en el plano, mediante la construcción de un cuestionario que permite evaluar aspectos relevantes de dichos conocimientos.

La aplicación del marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática ha permitido sintetizar los resultados de investigaciones sobre los significados epistémicos, cognitivos e instruccionales atribuidos a la visualización espacial en educación matemática, analizar la complejidad de los objetos y procesos intervinientes, y argumentar la pertinencia del estudio de determinados conocimientos para la enseñanza del tema. Dicho análisis ha llevado al planteamiento de una visión ontosemiótica de la visualización espacial, que fundamenta el diseño del cuestionario y el análisis de los resultados.

El cuestionario final elaborado, tras el análisis de libros de textos escolares, la realización de pruebas piloto, y el uso de juicio de expertos, ha sido aplicado a una muestra de 241 estudiantes de magisterio de la especialidad de educación primaria. Dicha aplicación ha permitido desvelar dificultades procedimentales y errores conceptuales de los futuros profesores de la muestra, relativos a determinados procesos visuales relacionados con aspectos de interpretación y producción de representaciones planas de objetos tridimensionales; estos resultados en gran medida concuerdan con investigaciones previas. Las dificultades se manifiestan en particular en las justificaciones dadas a las soluciones de las tareas y en la deficiente identificación por los estudiantes de los conocimientos involucrados en la resolución de las mismas, dos facetas del conocimiento especializado del contenido que consideramos necesarias para una enseñanza idónea del tema en la escuela primaria.

El instrumento construido y los conocimientos aportados pueden servir para orientar el diseño y evaluación de acciones formativas de futuros profesores de educación primaria sobre el contenido específico investigado.

ASSESSMENT OF PROSPECTIVE PRIMARY EDUCATION TEACHERS' KNOWLEDGE FOR TEACHING SPATIAL VISUALIZATION

ABSTRACT

The development of children special visualization capabilities is essential for their learning of space geometry; however, various difficulties related to this subject have been described and analyzed by mathematics education researchers. It has also been suggested that primary school teachers often consider spatial visualization simply as a recreational activity and lack enough knowledge -either of mathematical content itself or teaching knowledge- to promote the students' learning

In this research we address the problem of evaluating the didactic-mathematic knowledge of prospective elementary school teachers for teaching the visualization of three-dimensional objects represented in the plane. With this aim we build a questionnaire directed to evaluate relevant aspects of such knowledge.

The application of the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction served to synthesize previous research on the epistemic, cognitive and instructional aspects of spatial visualization. It also allowed as to analyze the complexity of the objects and processes involved in spatial visualization, and to show the relevance of specific knowledge for teaching the subject. This analysis led us to elaborate an onto-semiotic conceptualization of spatial visualization, which underpins the questionnaire built and the analysis of results.

The building of the questionnaire was based on the analysis of school textbooks, pilot testing and expert judgment. The application of the questionnaire to a sample of 241 primary education student teachers revealed the student teachers' procedural difficulties and misconceptions relative to visual processes involved in interpreting and producing plane representations of three dimensional objects; these results are largely consistent with previous research. These difficulties mainly arose in the justifications given to the solutions of tasks and in the identification of the knowledge involved in the resolution, two facets of specialized content knowledge needed for a suitable teaching of the subject at primary school.

The questionnaire constructed and the description of teachers' difficulties can guide the design and evaluation of training activities for educating the prospective primary teachers in spatial visualization.

ÍNDICE

Página

INTRODUCCIÓN GENERAL

En la actualidad diferentes situaciones de la vida cuotidiana y contextos de trabajo requieren habilidades relacionadas con la visualización espacial para trasmitir, codificar o manipular determinada información, en particular información gráfica (Gonzato y Godino, 2010). Esto justifica que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la visualización espacial sean objeto de atención por parte de la investigación en didáctica de la matemática (Battista, 2007; Bishop, 1980; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Rivera, 2011) y que algunos aspectos del tema aparecen en las directrices curriculares de educación primaria (NCTM, 2000; MEC, 2006).

Sin embargo, en la enseñanza de la geometría espacial, la visualización no recibe mucha atención, especialmente en los libros de texto de educación primaria, donde se presentan sólo aspectos limitados y parciales del tema, frecuentemente relacionados con actividades recreativas al final de la sección.

Para una posible incorporación real en la enseñanza de aspectos relacionados con la visualización espacial, especialmente en el contexto de la geometría espacial, es necesario primero introducir y resaltar su importancia en los programas de formación de maestros. Diferentes autores (Gutiérrez, 1998; Parzysz, 2006; Guillén, 2010) señalan la importancia de trabajar diferentes aspectos de la geometría espacial con profesores en formación, especialmente tareas de interpretación y producción de diferentes tipos de representaciones planas de los sólidos, y sus diferentes justificaciones. Ello hará posible que tengan el conocimiento necesario para animar a sus estudiantes a explorar por medio de la visualización espacial las ideas geométricas. Un profesor de escuela primaria, además de tener buena visualización espacial, debería tener el conocimiento para desarrollarla en sus alumnos, animándoles a explorar las ideas geométricas por medio de la visualización. Este conocimiento incluye la capacidad de dibujar e interpretar de forma clara y correcta diferentes tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales.

El tema de la evaluación de los conocimientos de los profesores es largamente tratado en el campo de la didáctica de la matemática (Shulman 1986; 1987; Ball, 2000; Ball, Lubenski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Shilling, 2008). Sin embargo, las pocas investigaciones que se han interesado en evaluar los conocimientos de los profesores sobre la visualización de objetos tridimensionales representados en el plano (Battista, Wheatley y Talsma, 1982; Malara, 1998; Fernández, 2011) se han interesado únicamente en desarrollar y evaluar conocimientos relativos a la resolución de determinadas tareas de visualización de objetos tridimensionales (conocimiento común del contenido matemático).

No obstante, la implementación de programas formativos de los profesores requiere conocer con detalle el punto de partida sobre los conocimientos de los estudiantes sobre el tema. De aquí nuestro interés sobre la evaluación de los conocimientos que los futuros maestros tienen sobre algunos aspectos de la visualización espacial y su enseñanza, lo que constituye la problemática central de esta tesis doctoral.

Estamos interesados en ampliar las investigaciones previas sobre evaluación, incluyendo el estudio de otros componentes del conocimiento, en particular algunos aspectos relevantes del conocimiento especializado del contenido: conocimientos relativos a la argumentación de tareas visuales, al reconocimiento de conocimientos puestos en juego en dichas tareas, y a la elaboración de posibles variaciones para su uso en la escuela. Con dicho propósito hemos procedido a elaborar un cuestionario para evaluar determinados conocimientos de los profesores en formación inicial sobre el tema, y aplicado a una muestra de 241 futuros maestros de Educación Primaria de la Universidad de Granada.

La construcción del instrumento de evaluación ha sido fundamentada por una serie de estudios preliminares, que se desarrollan en los tres primeros capítulos de la Tesis. En el Capitulo 1 se describen las investigaciones previas que han sido realizadas sobre los diferentes aspectos relacionados con la visualización espacial, con el objetivo de fundamentar adecuadamente la investigación. Este estudio documental tiene una triple finalidad:

- Identificar y organizar los elementos de significado relacionados con la visualización espacial en geometría (teniendo en cuenta tres facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje: la faceta epistémica, la faceta cognitiva, y la faceta instruccional)
- Sintetizar las investigaciones realizadas sobre formación de profesores en el campo de la visualización espacial.
- Recopilar y clasificar, en relación con los diferentes aspectos del tema, los ítems usados en investigaciones anteriores que sean potencialmente útiles para nuestro

trabajo.

Se observa que en el análisis de las investigaciones previas relacionadas con el tema, no hemos encontrado un cuestionario comprensivo que evaluase adecuadamente los conocimientos de los profesores de educación primaria sobre visualización de objetos tridimensionales.

En el Capítulo 2 se resume el marco teórico del "enfoque ontosemiótico" (EOS) que Godino y colaboradores vienen desarrollando para la Didáctica de las Matemáticas (Godino y Batanero, 1994; 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012), describiendo las herramientas principales que nos permiten interpretar y organizar la información recogida en el primer capítulo y elaborar una caracterización de la visualización espacial. Esta visión ontosemiótica del tema nos permitirá plantear el problema de investigación y servirá de base para describir los conocimientos que tienen los estudiantes al resolver las tareas propuestas. También describimos en este capítulo los objetivos y la metodología empleada en las diferentes fases que componen nuestro estudio.

El Capítulo 3 se centra en el estudio curricular y de libros de textos, realizado para enmarcar la investigación en el contexto educativo en el que los futuros maestros desarrollarán potencialmente su labor docente, así como para mostrar la pertinencia y relevancia práctica del problema de investigación. Se describen las orientaciones curriculares nacionales, de la Comunidad Autónoma de Andalucía y otras orientaciones curriculares, destacando la presencia de elementos relacionados con la visualización espacial en geometría, tanto en los objetivos como en las orientaciones metodológicas. También se describen las tareas sobre visualización de objetos tridimensionales presentes en los libros de texto de educación primaria analizados y se propone una clasificación de las mismas.

Los estudios preliminares descritos en éstos primeros capítulos nos permiten fundamentar la necesitad de la construcción de un nuevo cuestionario de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores sobre la visualización espacial de objetos tridimensionales.

En el Capítulo 4 se describe el proceso de elaboración del cuestionario, mediante su aplicación a un grupo piloto de maestros en formación inicial, así como las modificaciones realizadas sobre el mismo, para obtener el cuestionario final. Apoyándonos en el modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor descrito en Godino (2009), que tiene en cuenta las diferentes facetas implicadas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos, hemos decidido evaluar aspectos específicos del *conocimiento común y ampliado del contenido y del conocimiento especializado.*

El cuestionario final consta de 5 ítems de respuesta abierta (de papel y lápiz), que cubren los siguientes aspectos procedimentales del tema (conocimientos común y ampliado):

1. Coordinar e integrar vistas de objetos:
   - Identificar o dibujar algunas vistas de un objeto a partir del dibujo del objeto en perspectiva (ítem 1)
   - Dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales (ítem 2)
2. Plegar y desplegar desarrollos planos de objetos tridimensionales (ítem 3)
3. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional (ítem 4)
4. Generar cuerpos de revolución por medio de la rotación de una figura plana (ítem 5)

Por lo que se refiere a la evaluación del conocimiento especializado, hemos decidido evaluar tres diferentes aspectos: las justificaciones dadas a las respuestas de los ítems, la identificación de los conocimientos puestos en juego en las diferentes tareas, y los tipos de variaciones propuestas a las tareas para su uso en la escuela.

En el Capítulo 5 presentamos los resultados de un estudio detallado de las respuestas del cuestionario de 241 alumnos del segundo curso de la especialidad Educación Primaria de la Universidad de Granada del año académico 2010-2011. Tales resultados reflejan los conocimientos de los estudiantes después de que en el primer curso han estudiado el tema de geometría plana y espacial.

El análisis cuantitativo de los conocimientos de los tipos común y ampliado nos permite comparar la dificultad relativa de los ítems y el efecto del género sobre los resultados. El estudio cualitativo detallado de las respuestas nos permite describir las tendencias en los diferentes conocimientos y en particular nos permite describir las dificultades principales que manifestaron los estudiantes en los diferentes ítems, describir las diferentes tipologías de justificaciones dadas a sus respuestas, los elementos de conocimientos identificados en cada ítem y los cambios sugeridos en las variaciones de las tareas propuestas.

Finalmente, en el Capítulo 6 presentamos las conclusiones sobre los objetivos e hipótesis formuladas, una síntesis de las aportaciones realizadas en nuestra investigación, así como las limitaciones del estudio y cuestiones abiertas.

Somos conscientes de que nuestro trabajo aporta una información limitada a las preguntas planteadas y en este sentido abre nuevas líneas de investigación (en particular las que contemplan la integración del uso de software informático) para otros educadores que se interesen por la enseñanza de la geometría espacial. Pensamos, sin embargo, que el estado de la cuestión y bibliografía, el cuestionario elaborado, así como los resultados expuestos, proporcionan una información útil tanto para otros investigadores, como para los formadores de profesores de educación primaria.

CAPITULO 1:
INVESTIGACIONES PREVIAS Y TAREAS EMPLEADAS

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo describimos las investigaciones que se han realizado sobre los diferentes aspectos relacionados con la visualización espacial, con el objetivo de fundamentar adecuadamente nuestro trabajo. Éste estudio documental tiene las siguientes finalidades:

- Identificar y organizar los elementos de significado relacionados con la visualización espacial en geometría.
- Sintetizar las investigaciones realizadas sobre formación de profesores en el campo de la visualización espacial,
- Recopilar y clasificar, en relación con los diferentes aspectos del tema, los ítems usados en investigaciones anteriores que sean potencialmente útiles para nuestro trabajo.

Por lo que se refiere al primer aspecto, analizamos el tema de la visualización de objetos tridimensionales (VOT) en las investigaciones, teniendo en cuenta tres facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje: la faceta epistémica, la faceta cognitiva, y la faceta instruccional (capítulo 2).

En la faceta epistémica describimos los estudios centrados en la explicitación y el análisis de conocimientos institucionales sobre el tema. En primer lugar se consideran las investigaciones que estudian el significado de "espacio" y de "objetos geométricos tridimensionales" y que analizan sus diferentes materializaciones posibles. En seguida se aborda la problemática del lenguaje utilizado en la descripción de determinadas situaciones espaciales y la posible ambigüedad de los términos implicados. A continuación se describen las investigaciones que analizan los procedimientos involucrados en la interpretación y producción de representaciones planas de objetos tridimensionales. Por último se detallan diferentes tipos de justificaciones plausibles para argumentar proposiciones que involucran la VOT.

Por lo que se refiere a la faceta cognitiva, analizamos las investigaciones enfocadas al estudio de los significados personales atribuidos a la VOT por los estudiantes. Primeramente resumimos la vasta bibliografía sobre las definiciones de procesos y descripción de habilidades espaciales. A continuación describimos las diferentes etapas y niveles en la compresión de aspectos relacionados con la visualización de objetos tridimensionales (representados en el plano) y que han sido destacados por diferentes autores, distinguiendo entre trabajos centrados en la descripción de las etapas en la elaboración de dibujos y representaciones planas de los trabajos centrados en las descripción de etapas en la interpretación de una representación plana. Por último describimos las dificultades y errores encontradas por algunos investigadores en alumnos enfrentados a determinadas tareas de visualización espacial.

En la faceta instruccional describimos algunas investigaciones sobre experiencias o propuestas instruccionales, que pretenden promover el desarrollo de habilidades relacionadas con la visualización espacial.

Seguidamente describiremos algunas investigaciones con profesores que tratan aspectos centrales de nuestra problemática, identificando los aspectos principales en los cuales manifestaron dificultades.

Observamos que la mayoría de las investigaciones realizadas sobre el tema se centran en el estudio de las dificultades y la descripción de procesos de instrucción en la escuela primaria y secundaria relacionados con aspectos específicos de la visualización espacial.

Aunque hemos encontrado muy pocas investigaciones relacionadas con nuestro tema específico de investigación, esto es, la evaluación de conocimiento didácticos matemáticos de los profesores sobre visualización de objetos tridimensionales, mostraremos que todavía es un estudio necesario.

Por lo que se refiere a la tercera finalidad de nuestro estudio, nos centramos en la clasificación de las tareas empleadas en las investigaciones, prestando particular atención a los estímulos iniciales dados, al procedimiento principal involucrado y al tipo de respuesta exigida. Esto nos ha permitido posteriormente construir un primer banco de ítems relativos a las tareas empleadas en las investigaciones.

En consecuencia, este primer estudio bibliográfico será básico para la construcción de un significado de referencia sobre el tema (ver sección 2 del capitulo 2), que nos permita tener una visión amplia de los aspectos que han sido investigados anteriormente, argumentar la importancia de este tema en la formación de los futuros profesores de educación primaria y seleccionar aspectos relevantes para evaluar sus conocimientos sobre el tema. Además, este primer estudio, nos permite concluir sobre la falta de estudios globales relativos a los conocimientos de los (futuros) profesores sobre visualización de objetos tridimensionales y al mismo tiempo, fundamenta la construcción de nuestro cuestionario (capítulo 4), que incluye ítems tomados de diversas investigaciones previas.

2. INVESTIGACIONES PREVIAS

2.1. INVESTIGACIONES SOBRE ASPECTOS EPISTÉMICOS

En esta sección estudiamos las referencias bibliográficas más relevantes sobre la visualización de objetos tridimensionales fijando la atención en los significados institucionales atribuidos a dicho contenido. Tales significados son interpretados en el marco del EOS (ver sección 2 del capítulo 2) en términos de los elementos lingüísticos y representacionales usados, así como los elementos conceptuales y procedimentales puestos en juego en la solución de los problemas.

La representación bidimensional de la realidad tridimensional es un tema largamente tratado y debatido en la historia del arte y en la historia de la ciencia (Bagni y D'Amore, 1994).

El primer acercamiento, informal e intuitivo, del hombre a la geometría comenzó probablemente con la abstracción de las formas de los objetos que le rodeaban, como lo muestra la presencia de los primeros pictogramas trazados por el hombre primitivo. Aunque ya los filósofos griegos empezaron a considerar los objetos geométricos como entes ideales, que pueden ser manipulados mentalmente, a lo largo de la época medieval, se adoptó una concepción empírica de la geometría. En esta época las representaciones de lo real eran hechas por los artistas, que elaboraban representaciones intuitivas del espacio. Sólo a partir del Renacimiento, tanto los artistas como los matemáticos, empezaron a alejarse del empirismo. Las técnicas elaboradas para la representación de la realidad fueron formalizadas, y luego aplicadas para representar conceptos geométricos. Estos conceptos fueron naturalmente asociados a sus representaciones.

Diferentes investigaciones didácticas en el campo de la geometría ponen de manifiesto la importancia de considerar este doble estatus de los objetos geométricos: de un lado el objeto geométrico abstracto (el concepto geométrico) y del otro su representación externa.

El objeto geométrico puede ser representado en el espacio, con modelos y artefactos o en el plano, con diferentes técnicas de dibujo. Dichas técnicas de dibujo tienen determinadas reglas y permiten representar algunas propiedades del objeto. Conocer las diferentes representaciones planas con las cuales se pueden representar un objeto puede ser útil en el momento de resolver una determinada tarea, para interpretar y comunicar correctamente información gráfica. Otros elementos importantes al trabajar con objetos tridimensionales son las diferentes transformaciones que pueden ocurrir al objeto y que se definen por medio de determinados procedimientos como rotar, simetrizar, desplazar, cortar, plegar, desplegar,…

En los siguientes apartados analizamos la naturaleza de los objetos geométricos (sección 2.1.1), describimos brevemente los diferentes tipos de proyecciones y otras representaciones planas de objetos tridimensionales, sus reglas y las propiedades que preservan (sección 2.1.2), el lenguaje utilizado en la descripción de determinadas situaciones espaciales (2.1.3), los principales procedimientos requeridos en la resolución de algunas tareas de visualización espacial (2.1.4), así como los tipos de justificaciones necesarios para argumentar las soluciones (2.1.5).

2.1.1. Naturaleza de los conceptos geométricos: el espacio y los objetos geométricos tridimensionales

Atendiendo a la evolución del concepto de espacio, vemos aparecer a lo largo de toda la historia, hasta llegar al siglo pasado, una fundamentación ligada a una visión física de la ciencia. El espacio se entiende como espacio físico y el espacio matemático no es otra cosa que la imagen abstracta de ese espacio físico, simplemente la idealización de él; sus entes (puntos, rectas, etc.), son abstracciones provocadas por la consideración de figuras materiales. Éste es el espacio euclídeo: los axiomas de Euclides (salvo el de las paralelas) son propiedades obtenidas de la experimentación con las figuras. Así que en los *Elementos* de Euclides (escrito hacía el año 300 a.c., y también conocido como *Elementos de la geometría*) se presenta como un estudio sobre las propiedades del espacio físico real y sus relaciones, antes que ser una obra abstracta y formal. Por tanto, la geometría griega no es del todo abstracta, el geómetra no sólo trata con conceptos o definiciones, también se ocupa de la existencia y construcción de los objetos de los que tratan estos conceptos o definiciones.

A nivel de educación primaria el estudio de la geometría se basa en dicha concepción del espacio, o sea el estudio del espacio real relacionado con su modelización como espacio euclídeo. La geometría aparece entonces como estudio del espacio físico y en consecuencia los objetos que involucra (líneas, planos puntos) están tomados directamente de la experiencia sensorial. Parzysz (1991) observa que esta característica, "que implica un proceso de naturaleza dialéctica entre la realidad física y el modelo teórico", también se encuentra en las relaciones entre geometría e imagen gráfica, siendo ésta ultima un instrumento de mostración y de demonstración. De manera particular, el estudio de los sólidos, se coloca en esta dialéctica. El término "solido" tiene en su misma definición dicha "naturaleza dialéctica". Euclides (en "Elementos", libro XI) da la siguiente definición de sólido: *"Un sólido es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad".*

Destacamos que en los textos de geometría espacial elementales generalmente no se define el concepto general de sólido. Por ejemplo, en los libros de textos de educación primaria (generalmente en el primer ciclo), para introducir el concepto de "cuerpo geométrico" se dan representaciones gráficas de determinados sólidos (pirámides, prismas, conos, cilindro y esfera) acompañadas de la afirmación "estas figuras son cuerpos geométricos". De otra parte, en los libros de segundo y tercer ciclo, se presentan definiciones de "poliedros" como "cuerpos geométricos que tienen todas sus caras planas" (para más detalles ver capítulo 3). También en textos de geometría avanzada raramente se define el concepto de sólido ("Un sólido es una región cualquiera acotada del espacio bordeada por superficies" en Kern y Bland, 1948, p. 18). Sin embargo, se presentan definiciones del concepto de poliedro.

En el diccionario de la Real Academia Española (2001) la palabra "sólido" en el contexto geométrico es asociada a la palabra "cuerpo" (siempre en el contexto geométrico), definido como "Objeto material en que pueden apreciarse las tres dimensiones principales, longitud, anchura y altura". Mientras que el término "cuerpo" referido al contexto cuotidiano, es definido como "Aquello que tiene extensión limitada, perceptible por los sentidos". En dichas definiciones aparecen dos diferentes aspectos de los términos "sólido/cuerpos geométricos". Una relacionada con el sólido como objeto real que ocupa un espacio en el espacio físico; la otra relacionada con el sólido como objeto abstracto, compuesto por entidades (planos, segmentos, puntos,…) no existentes en el espacio físico.

Para aclarar y operativizar estos diferentes aspectos de los sólidos y sus relaciones, Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) diferencian tres diferentes perspectivas con las cuales estudiar las “formas”: en la primera perspectiva consideran las formas como objetos que se sitúan en el mundo real; en la segunda las consideran en su doble naturaleza, sea con el papel de realidad con respecto a una teoría, sea como modelos para una teoría geométrica; en la tercera perspectiva consideran las formas como representaciones visuales de entidades matemáticas. Los autores observan que las diferentes perspectivas con las cuales se pueden estudiar el espacio y las formas y las interacciones entre lo concreto y lo abstracto hacen que el pensamiento visual sea muy interesante pero también muy complicado. “En la escuela primaria”, afirma Gorgorió (1998), “el hecho que los conceptos geométricos están asociados, hasta un cierto punto, con objetos físicos o dibujos hace que la relación entre geometría y visualización sea más complicada de lo que parece” (p. 209).

Diferentes autores que estudian la naturaleza de los objetos geométricos (Duval, 1999; Fischbein, 1993, 1998; Laborde, 1996; Mesquita, 1992; Parzysz, 1988, 1991) afirman la importancia de distinguir entre el concepto, la forma y su representación.

En relación al objeto geométrico, Fischbein (1993, p. 148) define el “concepto figural”, como “un constructo mental caracterizado por las propiedades de los conceptos (generalidad, esencialidad, abstracción, idealidad), y que al mismo tiempo preserva las propiedades figurales (forma, distancia, posición)”. La componente figural del objeto permite realizar mentalmente transformaciones que tienen un significado práctico (por ejemplo trasladar, cortar, superponer), mientras que la componente conceptual controla dichas operaciones a nivel del rigor y de la lógica. En los modelos y dibujos de los objetos geométricos, son las propiedades figurales lo que se pretenden representar. Fischbein (1993) afirma que el dibujo no es la figura geométrica, sino una personificación material grafica o concreta; mientras que la imagen mental de una figura geométrica es, generalmente, la representación (mental) de la materialización de su modelo. Intentamos resumir las ideas expuestas en el siguiente esquema (Figura 1.1).

La flecha entrecortada (Figura 1.1) significa que, aunque en la representación material no se puedan representar las propiedades conceptuales del objeto, estas tienen que ser respetadas al momento de manipular o interpretar la representación a nivel abstracto. Fischbein describe, como ejemplo de actividad en la cual se requiere una particular cooperación entre lo figural y lo conceptual, la reconstrucción mental de determinados desarrollos de un cubo.

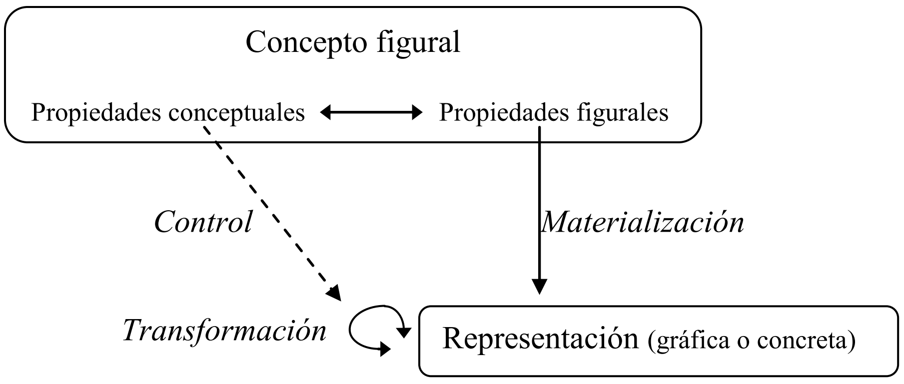


Figura 1.1: Esquema que representa la definición de concepto-figural y su representación.

Este autor observa que en el desarrollo de la Figura 1.2 las componentes figural y conceptual están bien integradas y en consecuencia se puede manipular el desarrollo como concepto figural con sus elementos, reconociendo fácilmente que el dibujo representa un desarrollo de un cubo. Este mismo desarrollo es considerado como "prototípico" por Mesquita (1992), que corresponde a una imagen estereotipada del cubo: cuatros caras laterales y dos bases, cuya selección se impone perceptivamente.

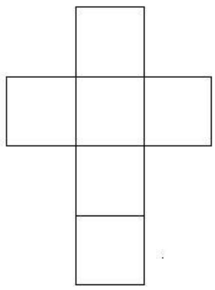


Figura 1.2: Desarrollo de un cubo, considerado por Mesquita (1992) como desarrollo "prototípico".

De otra parte Fischbein (1993) observa que en el caso del dibujo de la Figura 1.3 es más difícil reconocer que es un desarrollo de un cubo, puesto que para reconstruir el sólido, no se requiere únicamente "ver" las figuras, sino también modificar sus posiciones, imaginar sus posiciones resultantes, imaginar el efecto de las transformaciones en las figuras adyacentes.

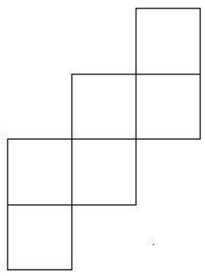


Figura 1.3: Desarrollo de un cubo, considerado por Fischbein (1993) de difícil reconocimiento.

El autor observa que estas transformaciones mentales de objetos tridimensionales no son únicamente de naturaleza figural: es por el hecho que trabajamos con caras de un cubo que las aristas son de igual tamaño, que las caras son cuadrados, que los ángulos son rectos, etc. "Esto", afirma el autor, "es un conocimiento *tácito* que es implicado en las operaciones mentales. Sin este tácito control conceptual, toda la operación no tendría significado" (p. 159).

Análogamente Laborde (1996) define dos dominios relativos a las propiedades espaciales de la representación:

- el *dominio de funcionamiento*: conjunto de las propiedades geométricas representadas por ciertas propiedades espaciales del dibujo;
- el *dominio de interpretación:* todas las propiedades espaciales del dibujo que no pueden ser interpretadas como propiedades del objeto.

La autora considera la *figura geométrica* como la relación entre un objeto geométrico y sus posibles representaciones (el análogo del concepto figural de Fischbein).

Presmeg (2008), estudiando la clasificación e interpretación de los signos, interpreta la sinécdoque como estructura que usa parte de un signo para representar un caso general y el caso general para representar una parte. Ilustra dicha estructura con el caso del triangulo, en el cual se diferencia entre el triángulo general, la figura del triángulo y el dibujo de un triángulo (Figura 1.4).

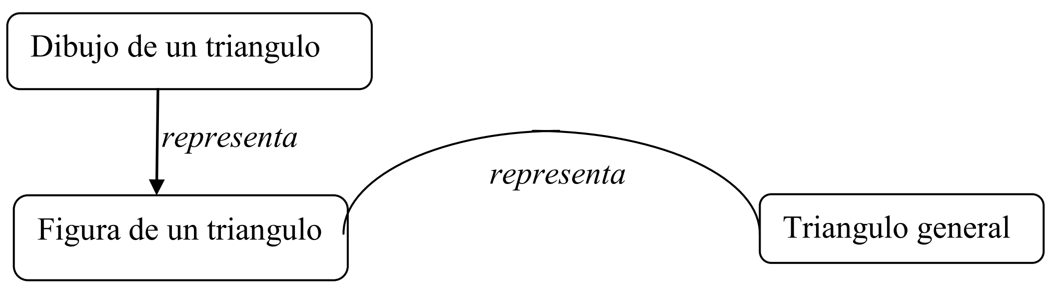


Figura 1.4: Ejemplo de la estructura de la sinécdoque aplicada al caso del triángulo (Presmeg, 2008)

Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) destacan que el término figura es ambiguo, pues puede referirse bien a un objeto geométrico (conceptual, ideal) bien a una de sus representaciones gráficas (material). Los autores representan dos procesos, en el primero las figuras son herramientas para resolver problemas o para construir una teoría geométrica, en el segundo las figuras son consideradas como representaciones de entidades matemáticas:

Diagrama o Dibujo → Figura → Teoría geométrica

Teoría geométrica → Figura (modelo)→ Diagrama o Dibujo

Los autores observan que el aprendizaje de la geometría en la escuela primaria sigue la estructura del primer modelo.

Mesquita (1992) hace observar que la representación externa de cualquier concepto geométrico hace aparecer una ambigüedad fundamental, traducida por lo que llama el "doble estatuto de los objetos geométricos". La representación externa "aunque se apoya en objetos generales y abstractos, tiene que ser expresada por una específica configuración, que pone en juego objetos concretos y peculiares. Esta concretización exige que se pase a un registro figurativo, donde cada concepto es traducido por objetos peculiares" (pp. 19-20).

De forma análoga Duval (1999) discierne el objeto geométrico de su representación semiótica y describe los diferentes registros semióticos con los cuales se puede representar un objeto o un procedimiento.

Duval (1999, pp. 4-5), en lugar de diferenciar las representaciones por su aspecto mental o externo, distingue los siguientes dos tipos de representaciones cognitivas:

- representaciones semióticas: representaciones cognitivas que son producidas de forma intencional por un sistema semiótico (mental o externo):
    - analógicas: representaciones que proporcionan visualización (gráficos, diagramas, dibujos,…)
    - no analógicas: representaciones discursivas (sentencias verbales, fórmulas, …)

- representaciones físicas/orgánicas: representaciones cognitivas que son producidas de forma casual o automática por un dispositivo físico (fotografías, reflexiones) o por un sistema orgánico (sueños, memoria visual de imágenes).

Mientras que el contenido de las representaciones semiótica denota el objeto representado, el contenido de las representaciones físicas/orgánicas es el resultado de una acción física del objeto representado en algún sistema orgánico o en algún dispositivo físico (Duval et al., 1999, pp 32-46).

Para el caso particular de la actividad geométrica, Duval (2006, pp 147-148) distingue dos tipos de registros semióticos principales:

- Registro de la visualización: representaciones gráficas bidimensionales (perspectivas,…) o tridimensionales, gráficas, diagramas;
- Registro del discurso: uso de la formulación para enunciar propiedades o el problema.

Duval (1999, p. 8) distingue dos tipos de transformaciones de representaciones dentro de cada proceso matemático. Por un lado están aquellas transformaciones que se realizan dentro del mismo registro de representación y, por otro lado, están aquellas que tienden a cambiar de registro de manera que la representación de un objeto se traslada a una representación diferente del mismo objeto.

Al primer tipo de transformación le llama "procesamiento" y un ejemplo de ella podría ser la realización de acciones de plegar-desplegar un dado, desarrollo plano de una figura, o el reconocimiento de la equivalencia de dos desarrollos planos diferentes (manteniéndose en el registro de la visualización se opera con juegos de reorganizaciones visuales). El segundo, denominado "conversión" ocurre por ejemplo, cuando a partir de la definición formal de "desarrollo plano del cubo" (registro del discurso) se da una de sus representaciones gráficas bidimensionales (registro de la visualización).

En lo que sigue llamaremos "objetos tridimensionales/sólidos" tanto a los objetos tridimensionales físicos como a las entidades geométricas ideales correspondientes. Cuando sea necesario se explicitará su naturaleza, llamando "objetos geométricos" a las entidades geométricas ideales y "objetos materiales" a los objetos tridimensionales físicos, aunque frecuentemente el contexto en las cuales se sitúan ya permitirá reconocer su naturaleza.

Siguiendo la notación de Parzysz (1988), llamaremos “representaciones (materiales)” a los “modelos” tridimensionales o “dibujos” bidimensionales de los “objetos tridimensionales”.

Se observa que en el caso que el objeto sea real, presente en el mundo físico, su representación material será una modelización, que pretende representar únicamente el objeto en cuestión. Si el objeto es una entidad geométrica, un concepto figural, se utilizará un determinado sistema semiótico para dar una peculiar representación de un objeto peculiar perteneciente a una variedad de figuras. En otras palabras, si se representan objetos materiales, la representación se refiere únicamente al objeto en cuestión, mientras que si se trabaja con objetos geométricos ideales, la representación se refiere a una variedad de figuras. Reconocer el estatuto del objeto que se representa es importante en el momento de operar sobre el objeto y hacer deducciones.

En la sección 2 del capítulo 2 se interpretarán estos objetos en términos de objetos ostensivos y no-ostensivos y sus posibles representaciones en términos de procesos de idealización y materialización, lo que permitirá aclarar sus estatutos y funciones.

En tareas de visualización espacial de objetos tridimensionales frecuentemente se trabaja (mentalmente o físicamente) con sus representaciones (materiales o mentales). Para manipular correctamente dichas representaciones del objeto es necesario controlar las propiedades del objeto que se preservan en la representación y las que no se mantienen. También se tiene que acordar que se trabaja con objetos que tienen determinadas propiedades conceptuales que permiten determinados procedimientos y transformaciones de la representación y prohíben a otras.

Diferentes autores (Bartolini Bussi, 1996; Cuisinier y cols, 2007; Parzysz, 1988, 1991) evidencian que en la enseñanza es necesario hacer explícitas las reglas para dibujar las figuras tridimensionales, como por ejemplo las propiedades de la geometría proyectiva. Gutiérrez (1998, p. 217) subraya que los profesores de primaria deben ser conscientes de cuándo sus alumnos tienen dificultad para dibujar representaciones planas y reaccionar de forma de que estas dificultades no causen un bloqueo hacia la geometría espacial.

Parzysz (1991) se pregunta si es todavía importante perder tiempo con los dibujos, pues los ordenadores pueden hacerlos más rápidamente y con precisión. Observa que también los dibujos hechos con los ordenadores pertenecen a una perspectiva, sea central o paralela. Y tampoco se puede utilizar un ordenador aleatoriamente: los dibujos en la pantalla tienen que ser decodificados en una manera correcta y precisa, lo que requiere un conocimiento de las reglas y de las ambigüedades básicas de las representaciones. El autor observa que dichas reglas y ambigüedades pueden ser enseñadas más eficientemente con la práctica de dibujo a mano, en lugar de simplemente mirando a una pantalla.

En el siguiente apartado definimos los principales sistemas de representación que permiten representar un objeto tridimensional en el plano.

2.1.2. Representaciones planas de objetos tridimensionales

Un objeto geométrico abstracto (de dimensión tres) tiene una multitud de posibles representaciones materiales (planas o tridimensionales), que ilustran algunas propiedades del objeto. Parzysz (1991) observa que la relación entre geometría e imagen gráfica implica un proceso de naturaleza dialéctica entre realidad física y modelo teórico: "El dibujo de un objeto 3D puede sólo evocar el objeto" (p. 576).

Estas representaciones pueden ser aproximativas (croquis) o bien ser el producto de precisas técnicas de construcción o de dibujo. La representación espacial (física) de un objeto geométrico abstracto implica necesariamente una pérdida de información (Parzysz, 1988).

En el caso de representación tridimensional del objeto (modelo), se pierde la información relativa a la dimensión de los elementos que componen el objeto, así como su carácter abstracto-ideal. Por ejemplo, si se utiliza un modelo en cartón de un cubo (vacío), se representa únicamente la superficie externa del objeto, las caras construidas son de dimensión 3, así como las aristas y los vértices,… De hecho, una representación tridimensional de un cuerpo, confiere "espesor" a todos los elementos que componen el cuerpo (caras, aristas, vértices), para que puedan ser visibles. Se pierde entonces el carácter ideal del objeto geométrico. En el caso de representación plana del objeto (dibujo), además de perder información sobre las dimensiones (en este caso perdemos también el carácter 3D del objeto), se pierden algunas de las propiedades del objeto.

Por lo que se refiere a los objetos tridimensionales, Parzysz (1988) identifica dos diferentes niveles de representación:

- Representaciones cercanas: modelos tridimensionales. Las representaciones se "parecen" al objeto geométrico abstracto, tienen la misma dimensión, excepto por el pasaje de lo abstracto a lo concreto.
- Representaciones lejanas: dibujos. La "dimensión de la representación" es

estrictamente inferior a la del objeto geométrico abstracto.

El autor observa que para sustituir a la perdida de información que se tiene al pasar desde el objeto abstracto a una de sus representaciones (sobre todo por el caso de representaciones lejanas) es necesario tener una leyenda que acompañe a la representación: “el dibujo, el modelo no puede sustituirse a la figura” (figura interpretada como objeto geométrico ideal).

Diferentes autores afirman la importancia de desarrollar tanto la formalización de las técnicas de representación de objetos tridimensionales como la descripción de situaciones reales a través de dibujos y la interpretación de los dibujos que ilustran situaciones reales, para “ir de la realidad a los dibujos y volver atrás” (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996).

En términos de Treffers (1987) podemos distinguir dos procedimientos en el uso del dibujo técnico, uno que se refiere a la matematización vertical (relacionado con la formalización de las técnicas de representación de objetos tridimensionales) y el otro a la matematización horizontal (relacionado con la interpretación y representación del mundo físico por medio de dibujos). La matematización vertical se refiere al procesamiento matemático, dentro del sistema matemático, en nuestro caso referido al estudio de las propiedades de un determinado sistema de representación. La matematización horizontal es la fase en la cual interviene la matematización empírica, la observación, la experimentación, y que conlleva una “traducción directa de los problemas del mundo real al lenguaje del “mundo de los símbolos” (Kindt, 1993, p. 76), una sistematización, una simbolización y una esquematización/modelización. Se trata del reconocimiento de esencias matemáticas, de la esquematización o visualización, del descubrimiento de relaciones, etc. Análogamente Verillon y Rabardel (1993) afirman que “El dibujo técnico es, para su utilizador, un instrumento semiótico, es decir un instrumento que le permite producir representaciones gráficas relacionadas con una realidad técnica, y al mismo tiempo le permite utilizar las representaciones producidas por otros para resolver sus propias tareas técnicas, le permite pensar y aprender la realidad técnica” (p.150).

En el campo de la visualización parece importante distinguir diferentes tipos de representaciones de objetos tridimensionales. Sack y Vazquez (2008), trabajando con software informáticos, distinguen cinco tipos de representaciones de objetos tridimensionales: modelos tridimensionales, modelos gráficos bidimensionales convencionales que se asemejan al objeto tridimensional, representaciones semióticas o abstractas que se parecen poco al objeto tridimensional, representaciones verbales y simulaciones dinámicas de objetos tridimensionales por ordenador.

De forma similar y restringiéndonos a las representaciones planas de objetos tridimensionales, distinguimos dos grupos de representaciones planas: las perspectivas axonométrica, caballera y con puntos de fuga, de una parte, y el sistema diédrico (las vistas), las vistas codificadas, el desarrollo plano y las secciones de otra parte.

Si las primeras nos dan una percepción global del objeto (aun distorsionando algunas de sus propiedades físicas), las segundas necesitan una reorganización de la información para poder visualizar el objeto en su totalidad. Esta reorganización de la información depende de la representación del objeto que tenemos. Por ejemplo, en el caso de la representación de un objeto en el sistema diédrico (las vistas), para reconstruir el objeto global se necesita coordinar e integrar las vistas del objeto.

Para organizar y limitar nuestro estudio distinguimos y describimos únicamente los siguientes tipos de representaciones:

- Representaciones planas que nos dan una percepción global del objeto (aunque deformando algunas de sus características físicas): proyección ortogonal axonométrica, proyección oblicua y perspectiva a uno o más puntos de fuga.
- Representaciones planas que necesitan una reorganización de la información para poder visualizar el objeto (o los objetos) en su globalidad: el sistema diédrico, los desarrollos, las secciones (únicamente de los cuerpos de revolución y en relación al relativo eje de rotación).

2.1.2.1. Representaciones planas que nos dan una percepción global del objeto

Todos los sistemas de representación, tienen como objetivo representar sobre una superficie bidimensional los objetos tridimensionales. Con este objetivo, se han ideado a lo largo de la historia diferentes sistemas de representación. Estos sistemas permiten también, dada la representación bidimensional del objeto, obtener la posición en el espacio de cada uno de sus elementos.

En todos los sistemas de representación, la proyección de los objetos sobre el *plano de proyección*, se realiza mediante los *rayos proyectantes*, estos son líneas imaginarias, que pasando por los vértices o puntos del objeto, proporcionan en su intersección con el plano de proyección, la proyección de dicho vértice o punto. La figura resultante en el plano de proyección es una peculiar perspectiva[1] del objeto. Observamos que en estos sistemas de proyección, cada punto del plano es la imagen de más puntos del espacio, pero a cada punto del espacio corresponde un único punto en el plano. El número de planos de proyección utilizados, la situación relativa de estos respecto al objeto, así como la dirección de los rayos proyectantes, son las características que diferencian a los distintos sistemas de representación.

Las dos proyecciones gráficas principales son la *proyección cilíndrica o paralela* y la *proyección cónica o central*. En la *proyección cilíndrica* el origen de los rayos proyectantes es un punto en el infinito, lo que se denomina punto impropio, y todos los rayos son paralelos entre sí, mientras que en la *proyección cónica* el origen de los rayos es un punto propio, lo que da lugar a diferentes tipos de perspectivas con puntos de fuga.

Remitimos a Rüegg y Burmeister (2010) para los conocimientos básicos de geometría descriptiva, los métodos y las técnicas de representaciones de las diferentes proyecciones.

En este apartado resumimos únicamente algunas de sus propiedades principales (también destacadas, en experiencias de enseñanza, por Cuisinier y cols, 2007).

Por lo que se refiere a la proyección paralela, se pueden justificar las siguientes propiedades de la geometría euclídea del espacio:

- Conservación de la incidencia y del alineamiento
- Conservación del paralelismo
- Conservación de las razones de longitud sobre una recta o dos rectas paralelas (se mantiene la proporcionalidad)
- La imagen de un rectángulo es un paralelogramo
- La imagen de una figura puesta en un plano paralelo al plano de proyección es isométrica a la figura
- La imagen de una figura situada en un plano paralelo a los rayos proyectantes se reduce a un segmento.

Parzysz (1991) observa que muchos dibujos técnicos pertenecen a la proyección paralela, por ejemplo todos los tipos de axonometrías (construcciones de edificios), planos o vistas (ingenieros mecánicos). Distingue dos funciones de estos dibujos:

[1] En el caso particular de proyección paralela la imagen resultante en el plano de proyección se llama también axonometría.

- La transmisión de la información: decodificar representaciones para construir un objeto representado en el plano o representar el objeto (con dibujos o plano) para estudiar las características del objeto.
- La asistencia en la conceptualización: permitir crear y modificar la forma del objeto en el dibujo, lo que permite resolver las preguntas sobre el objeto, trabajando con su representación.

Además Parzysz (1991) afirma que la proyección paralela es la más adecuada para representar figuras geométricas, con respecto a las concepciones de los estudiantes de secundaria (para muchos alumnos es importante que las representaciones conserven el paralelismo o la igualdad de las longitudes), y que es una herramienta eficiente para resolver problemas ya que permite hacer un dibujo realmente técnico. De otra parte el autor destaca un problema: esta proyección no está relacionada con un determinado punto de vista real puesto que los ojos tendrían que ser puestos en el infinito.

En la *proyección cónica* el origen de los rayos es un punto propio, y da lugar a diferentes tipos de perspectivas con puntos de fuga. Según el número de los puntos de fuga se obtienen diferentes perspectivas.

Enunciamos las siguientes propiedades principales de la proyección cónica:

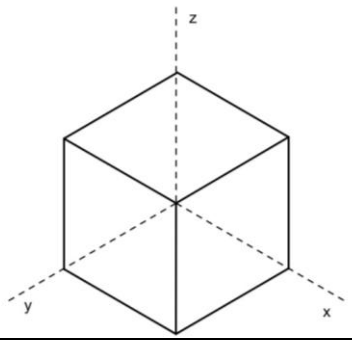
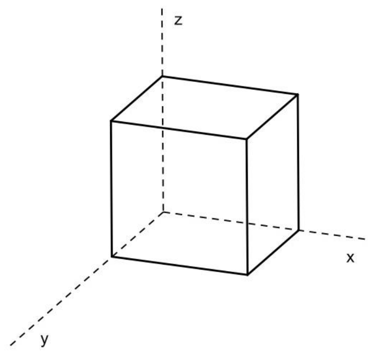
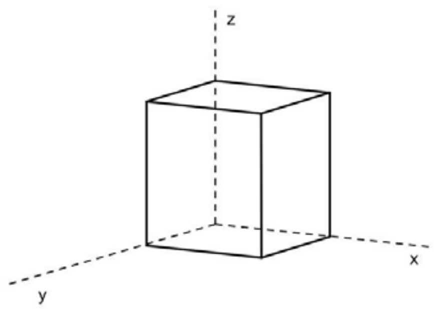
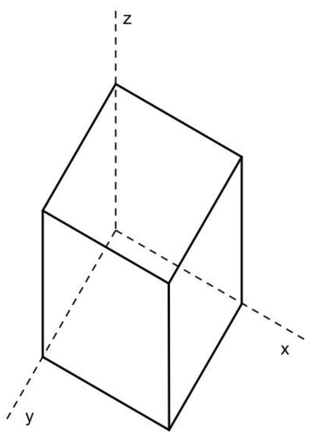
- Conservación del alineamiento.
- La imagen de una figura situada en un plano (que no pasa por C) paralelo al plano de proyección es homotética a la figura.
- La imagen de dos rectas paralelas entre ellas (que no pasan por C) y no paralelas al plano de proyección son dos rectas que convergen en un punto llamado punto de fuga.

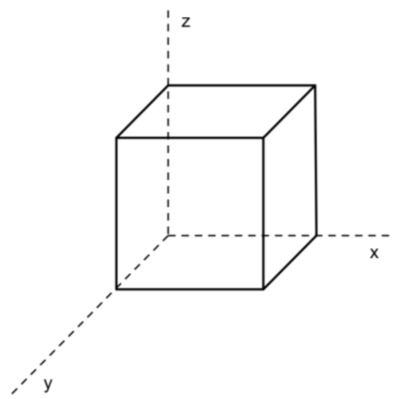
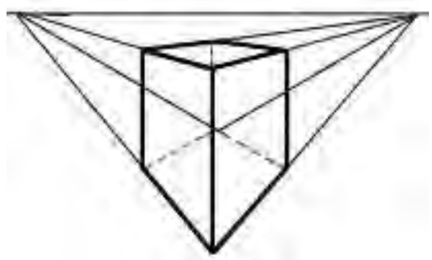
Observamos que en las definiciones formales de las diferentes proyecciones se ponen en juego un conjunto de entidades geométricas interelacionadas: figuras, planos, rectas, puntos,…

Verillon y Rabardel (1993) hacen observar que el tratamiento de las relaciones entre dichas entidades constituye una de las características esenciales del espacio proyectivo.

Resumimos las principales proyecciones con las respectivas perspectivas (omitiendo el sistema diédrico) en la Tabla 1.1, dando como ejemplo el dibujo de un cubo en las diferentes perspectivas.

Tabla 1.1: *Representaciones planas de objetos tridimensionales (que dan una percepción global del objeto) por proyecciones del objeto en el plano*.

Proyección	*Tipo*	*Perspectiva/Axonometría*	*Ejemplo*
Cilíndrica o paralela: origen de los rayos proyectantes al infinito, rayos paralelos.	**Ortogonal:** los rayos proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.	**Isométrica:** tres ángulos iguales (120º), coef. de reducción iguales.	
		Dimétrica: dos ángulos iguales, dos coeficientes distintos.	
		Trimétrica: tres ángulos diferentes y coeficientes distintos.	
	Oblicua: los rayos proyectantes son oblicuos con respecto al plano de proyección.	**Militar:** ejes x e y forman ángulo recto	

		Caballera: ejes x e z forman un ángulo recto	
Cónica o central: origen de los rayos proyectante en un punto.		**Perspectiva con 1/2/… puntos de fuga**	

En el apartado 3 del capítulo 3 sintetizaremos los tipos de representaciones planas más utilizadas para representar los sólidos en los libros de textos de educación primaria, y discutiremos su pertinencia.

Además, el conocimiento de las propiedades fundamentales de dichas representaciones nos permitirá describir tipos de errores relacionados con la interpretación y elaboración de las diferentes representaciones planas de objetos tridimensionales de los estudiantes (capítulo 5). Errores que pueden comprometer la correcta visualización de la figura representada por parte de un lector externo.

2.1.2.2. Representaciones planas que necesitan una reorganización de la información para poder visualizar el objeto (o los objetos) en su globalidad

En este apartado presentamos algunos tipos de representaciones planas que necesitan una reorganización de la información espacial para la reconstrucción del objeto tridimensional. Esta reorganización está establecida por la definición misma de la representación y necesita de algunos procedimientos como la rotación de parte del objeto alrededor de determinados ejes (en el caso de desarrollos o de determinadas secciones de cuerpos de revoluciones) o la coordinación e integración de las vistas del objeto (en el caso de representación en el sistema diédrico). Dichos procedimientos se describen con mayor detalle en la sección 2.1.4.

El *sistema diédrico*, denominado también de doble proyección o sistema de Monge, (nombre del científico francés que lo desarrolló en el siglo XVIII), utiliza el tipo de proyección ortogonal sobre dos planos de proyección perpendiculares entre sí: un plano horizontal (PH) y un plano vertical (PV). Su intersección se denomina línea de tierra. Posteriormente se introdujo un tercer plano de proyección, perpendicular a los dos planos PH y PV, denominado plano de perfil (PP). Los tres planos de proyección forman por lo tanto un triedro trirectángulo. La proyección de un objeto en el espacio sobre el PH se denomina proyección horizontal o planta, la proyección sobre el PV es la proyección vertical o alzado, y la proyección sobre el PP es el perfil (ver Figura 1.5). Los planos PH y PP se hacen girar respectivamente sobre los ejes x, z, respectivamente, hasta hacerlos coincidir con el PV (ver Figura 1.6). En el sistema europeo las proyecciones se organizan como se muestran en la Figura 1.6.

Ilustramos con un ejemplo la representación de un objeto con el sistema diédrico.

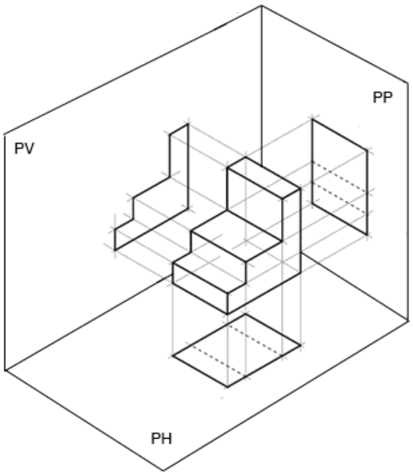


Figura 1.5: Proyecciones ortogonales de un objeto sobre tres planos de proyección perpendiculares entre sí: un plano horizontal (PH), un plano vertical (PV) y un plano de perfil (PP).

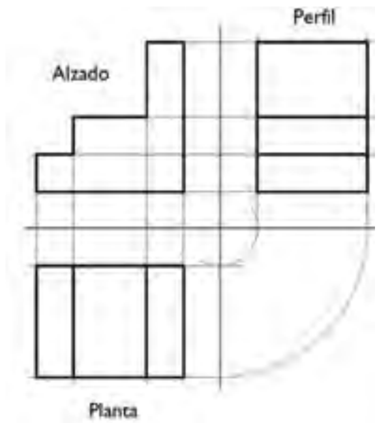


Figura 1.6: Representación del objeto de la Figura 1.5 en el sistema diédrico: el alzado corresponde a su proyección en el PV, el perfil a la proyección en el PP y la planta a la proyección en el PH.

Observamos que lo que llamamos “vista desde frente” en lenguaje común, como herramienta más o menos informal, puede ser formalizada como proyección ortogonal paralela vertical, la vista desde arriba como proyección vertical ortogonal horizontal o planta, mientras que la vista de lado puede ser formalizada como el perfil. Dichas asunciones ocultan la hipótesis (físicamente imposible) de que el hipotético observador se sitúa en el infinito (de esta forma los rayos son paralelos).

Otro modo de representar determinados objetos tridimensionales en el plano es dibujando su desarrollo plano.

Intuitivamente una superficie es desarrollable si puede fabricarse a partir de un plano euclídeo mediante "doblado", lo cual se manifiesta en que se pueden construir modelos apropiados a partir de una hoja de papel o cartulina plana. El desarrollo de la superficie sería la figura plana (conexa) que se obtiene al desdoblarla totalmente en el plano.

Formalmente, dada una superficie desarrollable existe una isometría entre la superficie y el plano euclídeo. Una condición necesaria y suficiente para que una superficie sea desarrollable es que la curvatura gaussiana[2] de dicha superficie sea idénticamente nula (Stoker, 1961). Por ejemplo, los objetos que tienen superficies planas (por ejemplo los poliedros) o curvas simples (por ejemplo el cilindro y el cono) son desarrollables, mientras que los objetos con superficies alabeadas (por ejemplo el conoide) y con doble curvatura (por ejemplo la esfera y el toro) pueden desarrollarse solo aproximadamente, dividiendo la superficie en secciones y poniendo en lugar de cada sección una superficie plana o una superficie de una sola curva.

Mariotti y Fischbein (1997, p.236) proponen la siguiente definición de desarrollo, por el caso particular de los poliedros:

"En geometría un desarrollo plano de un poliedro es un conjunto de polígonos representados en el plano y unidos por uno y un solo lado, de tal manera que:

- Cada cara del poliedro corresponde con un único polígono del desarrollo;
- Es posible emparejar los lados de los polígonos del desarrollo de tal manera que cada par de lados corresponde a una y sólo una arista del poliedro."

En el desarrollo plano de un sólido se preserva la forma y el tamaño de las caras y de las aristas así como las relaciones métricas dos a dos (o sea dichas propiedades son invariantes por la transformación "desarrollar"). Pero, a diferencia de las perspectivas axonométricas, caballera y con puntos de fuga, no se mantienen el aspecto global del objeto, y algunas relaciones topológicas y métricas tridimensionales no son respetadas. Una importante característica de dicha representación es que varios puntos en el plano pueden ser imágenes de un único punto del espacio. Entonces, cuando se realiza un desarrollo plano de un poliedro, hay algunos elementos (aristas, vértices) que aparecen desdoblados: a un elemento del poliedro pueden corresponder más de un elemento en el

[2] La curvatura gaussiana de una superficie es un número real $K(P_0)$ que mide la curvatura intrínseca en cada punto regular P_0 de una superficie. Esta curvatura puede calcularse a partir de los determinantes de la primera y segunda formas fundamentales de la superficie.

desarrollo plano. En otras palabras, a una misma arista del poliedro puede corresponder dos segmentos en el desarrollo plano.

En lenguaje matemático podemos considerar dichos pares de segmentos pertenecientes a distintas clases de equivalencia. La relación de equivalencia sería: dos segmentos del desarrollo son equivalentes si son la imagen de una misma arista del sólido. En esta definición se consideran los segmentos abiertos (sin los extremos) para no tener problemas en los vértices. En la práctica, una forma de ilustrar que un determinado desarrollo puede formar un cubo, es la identificación de los pares de segmentos que se unen al plegar el desarrollo. Se observa que dado el desarrollo de un sólido, hay una sola manera de hacer coincidir los segmentos equivalentes para cerrar el desarrollo y construir el sólido.

Las operaciones físicas relacionadas con dicha representación son las acciones de cortar, plegar, desplegar y unir. Algunas operaciones se pueden definir a nivel topológico, como veremos en la sección 2.1.4. Observamos que para obtener un cualquier desarrollo plano de un poliedro P de v(P) vértices se tiene que efectuar v(P) - 1 cortes sobre su modelo en cartón. Los cortes corresponden a las clases de equivalencia antes descritas. Ilustramos con un ejemplo dichas características en un desarrollo plano del cubo (Figura 1.7).

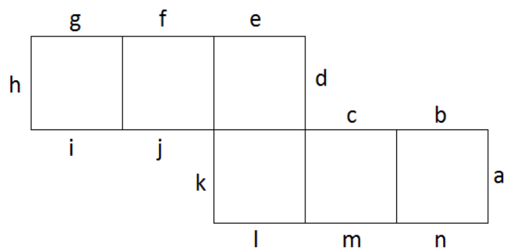


Figura 1.7: Ejemplo de desarrollo plano de un cubo, cada letra representa uno de los lados externos de los polígonos que componen el hexaminó.

Las letras representan los respectivos segmentos (abiertos) del sólido. Entonces tenemos una relación de equivalencia (simbolizada con ~) entre los siguientes elementos: a~f; b~e; c~d; g~n; h~m; i~l; j~k. Para formar el sólido se tienen que unir dichos elementos equivalentes. Estos pares de elementos corresponden a una determinada arista del cubo, la que ha sido cortada para formar el desarrollo. Como los pares son siete, siete serán los cortes necesarios para "abrir" el sólido y desarrollar el cubo. Lo que corresponde exactamente al número de los vértices del cubo -1.

En su estudio Mesquita (1992) analiza el desarrollo plano de un cubo, identificando once configuraciones posibles de desarrollo plano (que matemáticamente corresponden a las 11 clases de RTM- equivalencia[3]), cada una perteneciente a una de cuatros categorías, según la disposición de las caras. Además la autora identifica desarrollos prototipicos, que considera correspondientes a una visión "estereotipada" del cubo, por su regularidad y su simetría, que son asociados con más facilidad al cubo que los demás, puesto que requieren menos "operaciones mentales" para asociarlas con el cubo. Ilustramos brevemente las cuatro categorías de posibles configuraciones de desarrollos planos del cubo.

Configuración tipo 1-4-1 (Figura 1.8):

En esta configuración Mesquita identifica los desarrollos en cruz o en T como configuraciones prototípicas (que se encuentran a menudo en los libros de textos de primaria). Esta categoría incluye a seis configuraciones posibles, que pueden ser obtenidas a partir de las configuraciones prototípicas, por deslizamiento de las caras aisladas.

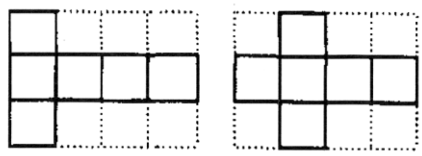


Figura 1.8: Desarrollos de un cubo en T y en cruz, pertenecientes a la configuración 1-4-1: los segmentos entrecortados significan que las caras que aparecen aisladas pueden ocupar cualquiera de las posiciones en horizontal, lo que genera configuraciones diferentes del mismo tipo.

Configuración tipo 2-3-1:

Esta categoría incluye a tres configuraciones posibles, que pueden ser obtenidas a partir de la ilustrada (Figura 1.9), por deslizamiento de la cara aislada.

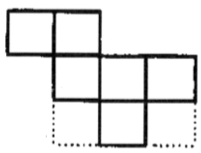


Figura 1.9: Desarrollo de un cubo perteneciente a la configuración 2-3-1.

Configuración tipo 2-2-2:

[3] Un desarrollo es RTM equivalente a otro desarrollo si se puede pasar de uno al otro con rotaciones, translaciones y reflexiones en el plano

Esta categoría solo incluye la siguiente configuración (Figura 1.10)

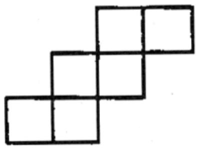


Figura 1.10: Único desarrollo de cubo perteneciente a la configuración 2-2-2.

Configuración tipo 3-3:

Esta categoría solo incluye la siguiente configuración (Figura 1.11)

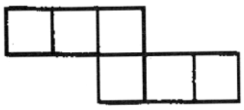


Figura 1.11: Único desarrollo de cubo perteneciente a la configuración 3-3.

Estos códigos, relacionados con los diferentes tipos de desarrollos del cubo, serán utilizados a lo largo del trabajo. Describimos con más detalle los procedimientos "plegar/desplegar" asociados a los desarrollos planos en la sección 2.1.4.

Para el caso de los sólidos de revolución, consideramos otro tipo de representación plana directamente asociado a la definición del objeto como sólido de revolución.

"Un sólido de revolución es un objeto obtenido al rotar una región del plano alrededor de una recta ubicada en el mismo, la cual puede o no intersecar la región. Dicha recta se denomina eje de revolución".

Entonces, una forma para representar gráficamente un determinado cuerpo de revolución es dar la superficie plana (que es una determinada sección del sólido) y el respectivo eje (situado en el mismo plano), alrededor del cual la superficie, girando, engendra el objeto. Este tipo de representación (ejemplo en la Figura 1.12) permite definir de forma precisa cualquier sólido de revolución aunque un prerrequisito importante para interpretarla correctamente es conocer la definición misma de sólido de revolución.

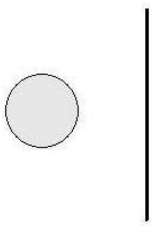


Figura 1.12: Representación de un toro como sólido de revolución: el círculo, girando alrededor del eje genera un toro

Aunque esta representación pueda parecer de difícil lectura con respecto a las anteriores, observamos que para interpretar correctamente cualquier representación plana y reconstruir el objeto tridimensional correspondiente es necesario conocer los convenios, las reglas y las propiedades propias de cada sistema de representación.

- Ilustramos algunas importantes propiedades de los sólidos de revolución, que permiten caracterizarlos:Las figuras planas que rotando generan los sólidos de revolución son secciones longitudinales, o mitad de las secciones longitudinales, del respectivo sólido
- Cada punto P de la superficie plana describe, durante la rotación, una circunferencia en el plano que pasa por P y perpendicular al eje de rotación; entonces:
    - Las secciones transversales (obtenidas por la intersección de planos perpendiculares al eje de revolución) del sólido de revolución son discos de radio variables.
    - La superficie del sólido de revolución está formada por la rotación del borde de la figura plana excepto los puntos que pertenecen al eje de revolución.

En lenguaje matemático formal se puede definir el sólido en la siguiente manera. Sean a y $b>a$ dos parámetros reales, y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua no negativa, cuyo grafo determina la curva de la superficie de revolución. Salvo rotaciones en el espacio tridimensional, el eje se puede considerar coincidente con el eje cartesiano z para poder expresar el sólido de rotación S como sigue:

$$S = \{ (x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a \leq z \leq b \ \ y \ \ 0 \leq \sqrt{(x^2 + y^2)} \leq f(z) \}$$

En esta definición, fijando $z=z_0$ se observa que los puntos (x, y, z_0) en S pertenecen al disco cerrado de centro (x, y, z_0) y de rayo $f(z_0)$. Siendo $\{(z, t) \in \in \mathbb{R}^2 \mid t = f(z)\}$ el grafo que determina la curva de la superficie de revolución, observamos que dichos disco cerrados forman las secciones transversales del sólido de revolución.

Concluimos el apartado mostrando diferentes representaciones planas con las cuales podemos representar un cono circular recto en el plano (Figuras 1.13, 1.14, 1.15, 1.16).

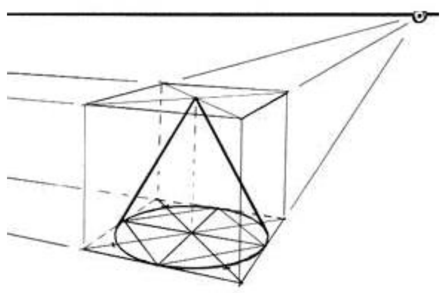


Figura 1.13: Representación de un cono en perspectiva con dos puntos de fuga.

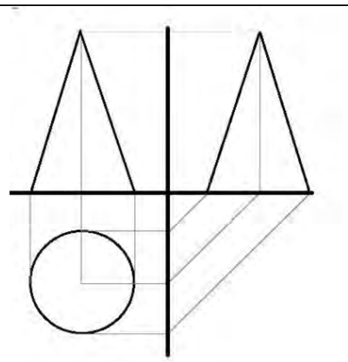


Figura 1.14: Representación de un cono en sistema diédrico.

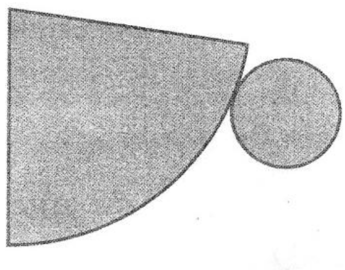


Figura 1.15: Representación de un desarrollo de un cono.

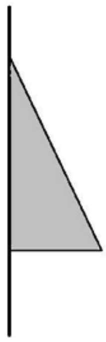


Figura 1.16: Representación de la sección longitudinal de un cono y el eje alrededor del cual, girando, forma el cono.

Observamos que existen otras representaciones planas de cuerpos geométricos, por ejemplo otros diferentes tipos de proyecciones, las secciones de un cuerpo, las vistas codificadas, la representación por plantas. Una buena capacidad de visualización del objeto geométrico (como figura ideal) a partir de dichas representaciones y una buena capacidad de representar un cuerpo con diferentes técnicas permiten reconocer y estudiar determinadas propiedades del objeto. Parzysz (1991, p. 590) afirma que “la elección, por parte del estudiante de una buena proyección, relacionada con las consignas y el tipo de problema, puede ser un importante elemento en la resolución”.

Además, reconocer que existen una multitud de representaciones posibles de un objeto tridimensional puede ayudar a aceptar su carácter abstracto. El objeto geométrico, como concepto figural, está relacionado con cada representación pero al mismo tiempo las trasciende a todas. En este contexto, Bishop (1983, p. 180) afirma que en la enseñanza de la geometría es imposible dibujar un diagrama general y que entonces "es necesario presentar diferentes ejemplos diagramáticos de un concepto geométricos si el profesor no quiere limitarse a un diagrama específico".

2.1.3. La orientación de un objeto tridimensional y la terminología

En el campo de la representación plana de objetos tridimensionales se utilizan términos que pueden tener un significado técnico o cotidiano, dependiendo del contexto y del uso que se hace de ellos.

Aclaramos los diferentes significados que se pueden atribuir a los términos "vista" y "perspectiva", que serán utilizados con frecuencia en nuestro trabajo.

En el Diccionario de la Real Academia Española (2001) se presentan 22 definiciones diferentes del término "vista", en el Diccionario de la RAE Esencial (Real Academia Española, 2006) se encuentran 11 y en el Diccionario del Estudiante de la RAE (Real Academia Española, 2005) 10 definiciones. Describimos las más pertinentes para nuestro trabajo:

1. Sentido corporal con que se perciben los objetos mediante la acción de la luz
2. Visión, acción y efecto de ver
3. Apariencia o disposición de las cosas en orden al sentido del ver
4. Campo de considerable extensión que se descubre desde un punto, y en especial cuando presenta variedad y agrado
5. Visión o aparición
6. Cuadro, estampa que representa un lugar o un monumento, etc., tomado del natural
7. *Persp.* V. altura, punto de vista
8. Panorama que se ofrece al espectador desde un punto
9. Representación visual de lo que se ve desde un punto
10. Parte de una cosa que no se oculta a la vista

Observamos que el término "vista" puede entonces asumir el significado de un sentido corporal, de una acción (el ver), del efecto del ver (la visión), que puede ser una representación visual o un panorama (o un campo de considerable extensión) de lo que se ve desde un punto.

Observamos que en estas definiciones no se contempla el significado de vista como término gráfico (vista ortogonal, vista longitudinal, vista en corte,..).

Sin embargo, en el contexto de educación primaria el término técnico de "proyección ortogonal" es frecuentemente sustituido por el término "vista", o, dicho de otro modo, las representaciones materiales de las vistas de un hipotético observador se presentan con proyecciones ortogonales. Tales representaciones funcionan como iconos de las vistas reales del objeto por parte de un hipotético observador, cuya dirección de mirada es perpendicular al plano visual de la observación (condición no real).

De otra parte, si consideramos las definiciones 4, 8 y 9, observamos que el término "vista" puede involucrar la idea de un campo visual bastante grande. Ésta característica está también presente en algunas definiciones propuestas por los diccionarios para el término "perspectiva", de las cuales describimos las más pertinentes con respecto a nuestro trabajo.

1. Sistema de representación que intenta reproducir en una superficie plana la profundidad del espacio y la imagen tridimensional con que aparecen las formas a la vista
2. Obra o representación ejecutada con este sistema (descrito en la definición 1)
3. Panorama que desde un punto determinado se presenta a la vista del espectador, especialmente cuando está lejano
4. Distancia espacial o temporal necesaria para apreciar algo en su justa medida
5. Distancia que permite observar o analizar algo
6. Apariencia o representación engañosa y falaz de las cosas.

El término puede entonces significar una representación plana según un determinado sistema de representación gráfica (o el mismo sistema de representación), un panorama que se representa a la vista de un espectador o la distancia que permite observar algo. Observamos que la definición 6 describe una característica del sistema de proyección utilizado para representar un objeto en perspectiva, que, cualquiera que sea, no permite ilustrar exactamente lo que percibe el ojo humano.

Podemos constatar que algunas de las definiciones propuestas por el término "perspectiva" tienen fuertes analogías con determinadas definiciones propuestas por el término "vista", mientras otras se diferencian fuertemente. Según el contexto en el cual se utilizan, estos términos asumen diferentes definiciones. A continuación damos algunos ejemplos:

- Contexto "técnico-gráfico":
    - "Las vistas de un objeto", se asocian a las proyecciones ortogonales del objeto sobre determinados planos (por ejemplo con el sistema diédrico).
    - "El objeto es representado en perspectiva", perspectiva entendida como sistema de representación (ver definiciones 1 y 2 y eventualmente 6 de perspectiva).
- Contexto cuotidiano:

- “Ver un objeto desde una determinada perspectiva (o eventualmente vista)”: perspectiva entendida como lugar espacial que permite tener una determinada visual sobre el objeto, punto de vista, y que se sitúa a una cierta distancia del objeto (definición 3 y 4 de perspectiva y definición 7 de vista).
- “La vista que se tiene desde un cierto lugar”: panorama que desde un punto determinado se presenta a la vista del espectador, especialmente cuando está lejano (definición 8 de vista)

- Contexto artístico:
  - “Vista de un lugar o un monumento: vista entendida como cuadro o estampa del lugar tomado del natural (definición de vista)

En este trabajo nos apoyaremos en dichos contextos para caracterizar determinados usos y significados atributos a los términos por los estudiantes y en los textos escolares.

Al trabajar con objetos tridimensionales frecuentemente se necesita describir su orientación con respecto a otros objetos o al espacio, su orientación con relación a su estructura o su orientación con relación al movimiento. Describimos en términos matemáticos y lingüísticos cómo se puede especificar la orientación de un objeto.

Besuden (1990) muestra que algunos objetos, por su forma y estructura pueden tener dos posibles orientaciones. Da ejemplos de objetos cuotidianos, como los tornillos o los dados, que pueden tener distintas orientaciones, y generalizan al espacio tridimensional. En la Figura 1.17 mostramos dos dados que tienen dos diferentes orientaciones y que entonces, sea como se giren, nunca se pondrán en la misma posición.

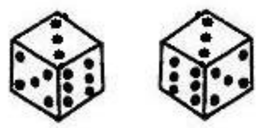


Figura 1.17: Dos dados con dos diferentes orientaciones.

Lo mismo se puede decir de otros objetos, como dos tornillos con diferentes orientaciones o las construcciones que se muestran en la Figura 1.18.

Figura 1.18: Pares de objetos con diferentes orientaciones (según Besuden, 1990, p 473).

En matemáticas, una orientación de un espacio vectorial real es la elección de cuáles son bases orientadas positivamente y cuales negativamente[4]. En el espacio euclídeo tridimensional, las dos posibles orientaciones de las bases se llaman respectivamente orientación derecha y orientación izquierda (ver Figura 1.19).

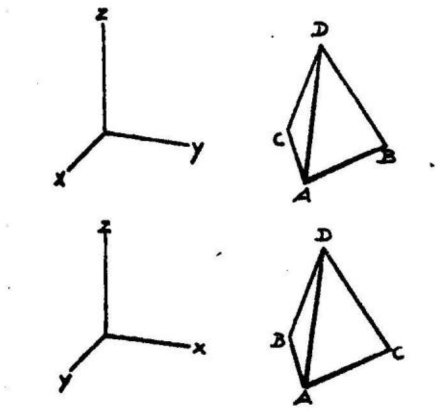


Figura 1.19: Las dos posibles diferentes orientaciones del espacio vectorial real y de un tetraedro (según Besuden, 1990, p. 473).

Observamos que para planear interesantes actividades de visualización de objetos tridimensionales, por ejemplo el reconocimiento de un objeto tras una rotación, es importante conocer la posibilidad de cambiar la orientación del objeto, generando objeto diferente, aunque muy similar.

Para describir verbalmente la orientación, la estructura (la posición relativa de sus partes) de un objeto tridimensional, su posición en el espacio con relación a otros

[4] Formalmente, consideramos $\mathbb{R}^3$ el espacio vectorial real tridimensional, y dos bases ordenadas b_1 y b_2. Por un resultado estándar de álgebra lineal existe una única transformación lineal A: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que transforma b_1 en b_2. Se dice que las bases b_1 y b_2 tienen la misma orientación si A tiene el determinante positivo, mientras que si A tiene el determinante negativo se dice que las dos bases tienen orientaciones opuestas. La propiedad de tener la misma orientación define una relación de equivalencia en el conjunto de todas las bases ordenada de $\mathbb{R}^3$ (precisamente esta relación define dos clases de equivalencia). Una orientación de $\mathbb{R}^3$ es la asignación de +1 a una clase de equivalencia y -1 a la otra.

objetos o personas se necesita conocer un lenguaje verbal, que comprende esencialmente los siguientes términos principales: arriba/abajo, adelante/atrás, derecha/izquierda, cerca/lejos, dentro/fuera, encima/debajo, allí, aquí, allá, acá, ahí, entre, centro (en el), cerca-lejos, próximo-lejano. Observamos que cotidianamente se usa este lenguaje para indicar la posición relativa de una persona o un objeto con respecto a otra persona u objeto, o para especificar las direcciones en el espacio con respecto al propio cuerpo o al cuerpo de un observador externo.

Verjat (1994) identifica cuatros elementos que intervienen en la orientación de un objeto: el sujeto, el objeto que se tiene que orientar (el blanco), el objeto con respecto al cual se puede orientar directamente el blanco (la referencia), y el entorno (contexto). El autor hace constatar que el sujeto puede ser él mismo el blanco o la referencia, y que entonces la orientación de un objeto implica el uso de un determinado sistema de referencia. Observamos que, si se quiere utilizar como blanco un objeto, se tiene que verificar que pueda realmente definir un determinado sistema de referencia que permita orientar el blanco.

Un estudio muy interesante que trata dichas problemáticas es presentado por Lurçat (1979, 1980). En particular, en estos trabajos se establece una distinción entre objetos que, por su estructura o su función, poseen una parte anterior y una posterior (y por tanto derecha/izquierda) y los que no las poseen. Bartolini Bussi (2007) describe estos objetos como objetos que, por algunas de sus características - dirección del movimiento (por ejemplo el coche) o presencia de órganos perceptivos (por ejemplo animales, personas, muñecos) o caras particularmente visibles (armario, casa, espejo, cuadro) o adaptación al cuerpo humano (por ejemplo la silla) - tienen partes que, en el lenguaje común, son intrínsecamente descritas como adelante-detrás.

Por ejemplo, la distinción entre delante/detrás de una persona se define por el hecho de que el cuerpo está orientado, es decir, tiene una parte considerada como delante por su forma y funciones y otra como detrás. La orientación del objeto es, por tanto, una condición necesaria para poder usar un objeto como referencia para identificar la combinación delante/detrás. La distinción de izquierda/derecha, asume que el objeto de referencia tenga un plano de simetría, como el cuerpo humano que se caracteriza por su lateralidad. La distinción cerca/lejos es una relación que involucra al menos a tres cuerpos, uno de los cuales sirve de referencia para establecerse y comparar las distancias de los otros. Es, por tanto, una noción de tipo métrico que se necesita para evaluar las distancias entre objetos y ponerle un orden, aunque no estén alineados en el plano o en el espacio. Implica entonces la capacidad de reconocer la conservación de las longitudes al variar la orientación de la referencia o de los objetos.

En ausencia de un determinado blanco, las relaciones con las cuales se estructura generalmente el espacio están relacionadas con las propiedades de nuestro cuerpo, que le dan un significado preciso.

En la sección 3 del capítulo 3 aportaremos algunos ejemplos de tareas de libros de textos de primaria en las cuales se pide describir posiciones relativas de objetos que no tienen, por su estructura o su uso, una determinada y clara orientación. Un conocimiento más profundo del uso de términos de vocabulario espacial relacionados con la orientación de un objeto podría evitar los conflictos de referencias que pueden aparecer según que el objeto sea visto como tal en el espacio, o bien considerado a partir de su estructura posiblemente ambigua.

2.1.4. Procedimientos involucrados en la interpretación/producción de representaciones planas

La visualización de objetos tridimensionales a partir de la interpretación de sus representaciones planas está relacionada con diferentes procedimientos, algunos se pueden definir formalmente, otros se pueden sólo describir aproximadamente.

Decidimos no incluir en nuestro trabajo el estudio de los procedimientos relativos al reconocimiento de determinadas propiedades de sólidos (representados en el plano) con el objetivo de clasificarlos (aunque requiere visualización espacial), puesto que dicha temática ha sido largamente explorada por Guillén (Guillén 1991, 1997, 2001, 2004, 2005) de manera particular con profesores (Guillén, 2000).

Duval (1998, pp. 38-39) afirma que la geometría involucra tres tipos de procedimientos cognitivos que tienen específicas funciones epistemológicas:

1. El proceso de visualización que se refiere a la representación del espacio para ilustrar una afirmación, para la exploración heurística de una situación compleja o para una verificación subjetiva.
2. El proceso de construcción con herramientas: la construcción de configuraciones puede representar un modelo en el cual las acciones sobre la representación y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos representados.
3. El razonamiento en relación con procesos discursivos para la ampliación del conocimiento, para demostrar, para explicar.

Centrándose en el primer procedimiento, observa que la identificación visual de los elementos que componen una figura (puntos, segmentos, ...) depende de las leyes de organización perceptiva, y todos estos elementos pueden ser usados para representar objetos reales u objetos matemáticos. Por otra parte indica que si se quiere representar un objeto matemático, la figura tiene que respetar las siguientes dos condiciones específicas:

- Condición visual: la figura tiene que ser una configuración, o sea un conjunto de diferentes elementos constituyentes de la figura que tienen relaciones entre ellos
- Condición discursiva: la figura tiene que ser anclada en una sentencia que fije algunas propiedades representadas por los elementos (hipótesis). Ésta "ancla discursiva" introduce la matemática en la configuración.

A partir de estas condiciones define dos diferentes procedimientos de interpretación de una figura:

1. La interpretación perceptiva (la figura puede representar diferentes objetos)
2. La interpretación discursiva: la asociación de los elementos representados con la sentencia determina el objeto representado (se requiere un movimiento interno entre una configuración bidimensional y sus elementos constituyentes que emergen como un todo, lo que implica un cambio de dimensión en la organización perceptiva de lo que se ve).

En nuestro trabajo nos interesa desglosar de forma más operativa dichos procesos de interpretación. En particular queremos estudiar los procedimientos que permiten la asociación de determinadas representaciones planas de un objeto con las sentencias que describen sus propiedades específicas (analíticas) a fin de lograr la visualización del objeto tridimensional que la representación y la sentencia pretenden describir.

Primeramente aclaramos qué significa interpretar una representación gráfica de un objeto tridimensional de forma muy general, y qué significa dibujar una representación del objeto. En segundo lugar describimos con más detalle los procedimientos de interpretación de determinadas representaciones planas y los procedimientos que permiten la construcción (mental) del objeto a partir de dicha interpretación que el sujeto tiene que realizar.

Para Baldy, Chatillon y Cadopi (1993) *leer un dibujo* plano incluye la identificación de los elementos que lo componen y la organización de esta información. Cuando el sujeto lee un dibujo se representa algunas de las propiedades y el significado que atribuye al dibujo puede ayudar o dificultar la lectura. En la lectura de un dibujo en perspectiva se utiliza la relación de significación que une el dibujo y el objeto y que atribuye al dibujo el estado de substituto simbólico. Entonces, el dibujo del objeto es al mismo tiempo un objeto gráfico autónomo y un substituto simbólico del objeto. Los autores observan que esta dualidad autoriza más niveles de lectura: "el sujeto puede leer el dibujo como un dibujo en sí mismo sin ponerlo en relación con el objeto que representa, el sujeto puede hacer la inferencia de manera más o menos completa y llegar a una representación del objeto cuyas propiedades pueden variar y autorizan solo determinadas operaciones mentales, o el sujeto puede reconocer globalmente el objeto dibujado pero no conseguir utilizar esta representación para ejecutar una tarea de dibujo o de fabricación".

De forma análoga Berthelot y Salin (1994) afirman que la resolución de un problema por modelización implica el establecimiento de una cierta relación entre dos mundos: el mundo sensible y un modelo, sistema simbólico dotado de reglas internas que permiten construir, a partir de objetos iniciales y de relaciones iniciales, nuevos objetos y nuevas relaciones válidas. Un cierto número de relaciones (iniciales) en el modelo son significantes de relaciones del espacio sensible y le permiten representar el problema en el espacio por un problema en el modelo. A partir de estas relaciones, y del sistema de reglas internas al modelo, la solución es construida en el modelo. En seguida, la interpretación en el espacio sensible de la solución construida en el modelo, permite la validación pragmática. Estos autores llaman analógica la modelización de un espacio por medio de esquemas, croquis, dibujos, planos, mapas,…

A cada sistema de representación descrito en la sección 2.1.2 está asociado un determinado procedimiento de proyección, que el sujeto tiene que conocer en e momento de representar un determinado objeto. Mesquita (1992) llama a estos procedimientos de "construcción algorítmica", definiéndolos como procedimientos de construcción basados en una serie de determinadas reglas. Hace observar que estos procedimientos, análogamente a los conceptos figurales definidos por Fishbein, tienen un doble estatuto: la construcción aparece, por una parte, como la conceptualización de un procedimiento, y de otra parte como la concretización de esta misma construcción, utilizando en este caso objetos geométricos peculiares y bien definidos. "Los aspectos conceptuales, relacionados con la generalidad del procedimiento, parecen perturbados por el "ruido" relacionado con los aspectos producidos por la concretización" (Mesquita, 1992, p. 20).

Por lo se refiere a los aspectos técnicos de construcción relacionados con dichos procedimientos de construcción algorítmicos remitimos a los textos clásicos de geometría descriptiva (Monge, 1999; Rodríguez, 1992) por lo que se refiere al estudio de las diferentes proyecciones y, a los textos clásicos de geometría elemental y artículos de matemática avanzada (Harris y Stöcker, 1998; Malkevitch, 2001; Shephard, 1975) para el caso de los desarrollos y los cuerpos de revolución.

Analizamos ahora algunos procedimientos peculiares relacionados con la "construcción" (mental) de objetos tridimensionales a partir de la interpretación de determinadas representaciones planas (que necesitan una reorganización de la información para poder visualizar el objeto en su globalidad). De manera particular aclaramos qué significa coordinar e integrar las vistas de un objeto tridimensional para construir el objeto a partir de sus vistas representadas en el sistema diédrico, describimos qué significa plegar/desplegar un desarrollo y describimos el procedimiento de generar un sólido de rotación a partir de la rotación de una figura plana alrededor de un eje.

2.1.4.1. Coordinar e integrar las vistas de un objeto

En diferentes actividades de interpretación y elaboración de una representación plana de un sólido se necesita coordinar e integrar vistas parciales del objeto. Battista y Clements (1996, p. 284-286) estudian dichos procedimientos. De forma general la coordinación de las vistas ortogonales requiere que dos o más vistas se consideren conjuntamente de forma que se observen las interrelaciones entre ellas, que se especifique exactamente cómo encajan entre sí.

Por lo que se refiere a la integración de las vistas de un objeto tridimensional se puede definir como el procedimiento de construcción de un único modelo coherente del objeto que posee determinadas vistas. Se observa que la integración de las vistas requiere que las vistas sean anteriormente coordinadas.

Una actividad que requiere principalmente y esencialmente estos dos procedimientos es la construcción (o el dibujo en perspectiva) de un objeto que tenga determinadas vistas ortogonales. Describimos estos procedimientos con un ejemplo.

Dadas las siguientes vistas ortogonales de un objeto (ver Figura 1.20), se pregunta por reconstruirlo (o eventualmente dibujarlo):

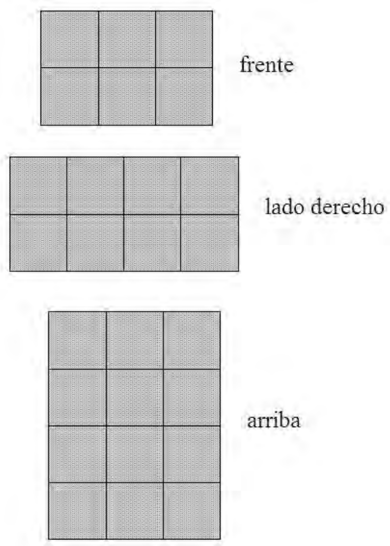


Figura 1.20: Tres vistas ortogonales de un objeto.

Para reconstruir el sólido se tiene que establecer una relación de ortogonalidad entre las vistas que se colocan en planos ortogonales adyacentes. Por ejemplo, se pueden establecer las siguientes relaciones (ver Figura 1.21):

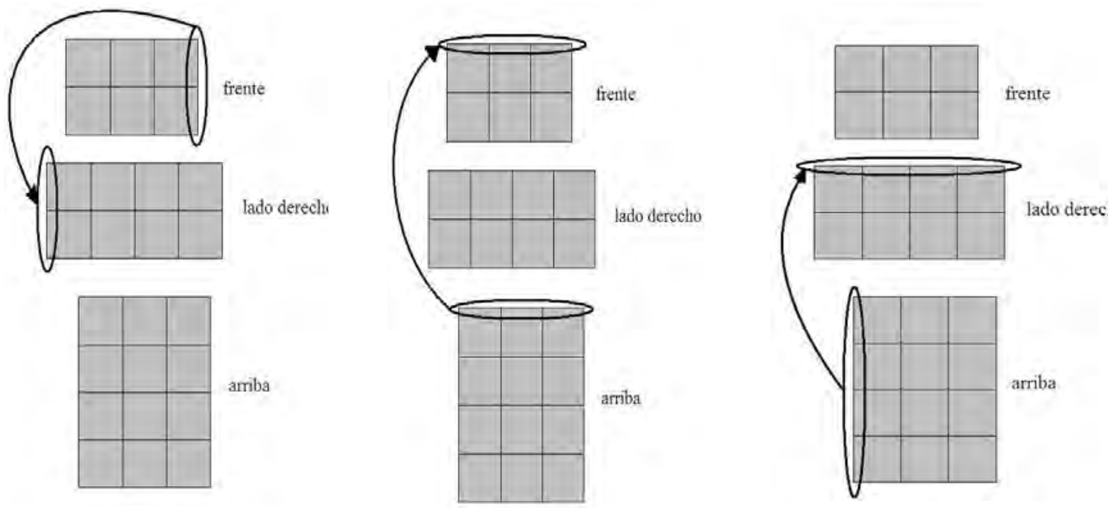


Figura 1.21. La coordinación de las vistas ortogonales de un objeto: establecimiento de posibles relaciones de adyacencia en las vistas ortogonales de un objeto.

Una vez coordinadas las vistas es necesario integrarlas en un único objeto, procedimiento que se puede ilustrar con el siguiente esquema (Figura 1.22):

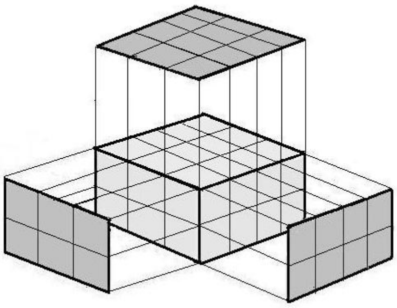


Figura 1.22: Coordinación de las tres vistas ortogonales de un objeto en tres planos ortogonales, para le reconstrucción de un posible objeto.

Observamos que el objeto representado por dichas vistas no es único, puesto que es posible quitar determinados cubos del objeto manteniendo las mismas vistas.

El procedimiento de coordinación de las vistas descrito para este ejemplo puede ser analizado diferentemente en el caso de actividades inversas, o sea el pasaje desde un modelo tridimensional del objeto (o con dibujos que dan una percepción global del objeto) a la representación o el reconocimiento de una o más vistas ortogonales (ver ejemplo 1, sección 3.2.1)

En este caso el sujeto tiene que identificar, reconocer y/o representar las imágenes parciales ("perspectivas") del objeto que tendría un hipotético observador desde determinados puntos ("puntos de vistas"). Este procedimiento puede ser formalizado proyectando ortogonalmente el objeto sobre determinados planos, suponiendo que:

- la dirección de mirada del hipotético observador es perpendicular al plano visual de la observación
- los rayos visuales del observador (la dirección de mirada) son paralelos
- los rayos visuales corresponden a los rayos de proyección.

Una lectura de dichos procedimientos en términos de conceptos figurales permite diferenciar entre una coordinación e integración de las vistas de tipo perceptivo o desde una coordinación e integración de las vistas de tipo formal. En el primer caso, las propiedades enunciadas anteriormente no son explicitadas, y el procedimiento se apoya en una validación perceptiva (relacionada con la acción de *ver* el objeto desde diferentes posiciones). En el segundo caso se supone la explicitación de la relación del procedimiento de "construcción del objeto" con las definiciones y propiedades de las distintas proyecciones en los planos correspondientes. En la sección 3 del capítulo 2 dicha dualidad será interpretada en términos de sinergia entre lo visual y lo analítico.

2.1.4.2. Plegar y desplegar el desarrollo plano de un sólido

Mesquita (1992, p. 27) identifica tres interesantes procedimientos que se pueden requerir al trabajar con desarrollos de un sólido: la producción y el reconocimiento de un desarrollo plano, la identificación de los criterios de reconocimiento de un desarrollo plano y el reconocimiento de las relaciones entre los elementos del desarrollo plano y del poliedro.

Físicamente, para representar o reconocer el desarrollo de un sólido es necesario ejecutar (físicamente o simulándolos mentalmente) los siguientes procedimientos: construir o representar la superficie del sólido en tres dimensiones, cortar el sólido a lo largo de determinadas aristas y desplegar la superficie sobre un plano. De otra parte para componer un sólido a partir de su desarrollo plano es necesario plegar el desarrollo y pegar los segmentos que corresponden a la misma arista del sólido.

A nivel topológico cortar y pegar espacios topológicos es una operación común y útil para crear nuevos espacios. Esta operación tiene una fuerte analogía con la acción de cortar realmente un modelo del poliedro en cartón. Una vez cortado el cubo se tiene que desplegar para obtener el desarrollo plano.

Las acciones de plegar (y desplegar) el desarrollo se pueden también definir como rotaciones de 90 grados (representada por los cuadrados en el desarrollo plano) alrededor de los segmentos, que coinciden con ejes imaginarios x e y. El sentido de las rotaciones varía según los desarrollos considerados.

Por ejemplo, Mesquita (1992) observa que para el caso del desarrollo prototípico en T de tipo 1-4-1, las acciones de plegar y desplegar son particularmente sencillas: rotaciones de 90º alrededor de un eje imaginario vertical, siempre en el mismo sentido, para las cuatros caras horizontales, y dos rotaciones, de sentidos diferentes, alrededor de un eje x.

Por lo que se refiere al reconocimiento de criterios de reconocimiento de un desarrollo plano Mesquita (1992) observa que las diferentes configuraciones de un desarrollo plano están asociadas a algunas condiciones necesarias que permiten establecer si una configuración de seis caras iguales puede recomponerse en un cubo.

La autora observa que los criterios que permiten reconocer la imposibilidad de formar un cubo a partir de determinadas configuraciones de cuadrados pueden ser diferentes, por ejemplo:

- imposibilidad de construir un ángulo triedro a partir de cuatros caras coplanares que concurren en un vértice (Figura 1.23): el aspecto perceptivo es inmediato y suficiente para reconocer esta imposibilidad, aunque su justificación formal exige otros tratamientos;

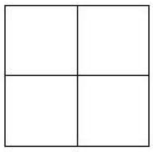


Figura 1.23: Configuración de cuatro cuadrados coplanares que no permite formar un cubo.

- superposición de una cara al plegar el desarrollo; aunque a veces dicha identificación no es inmediata y necesita una reorganización de las informaciones perceptivas. Por ejemplo, al intentar plegar la Figura 1.24 las caras a y b se superponen.

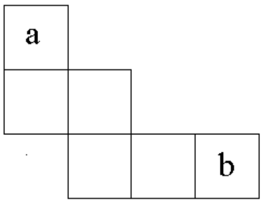


Figura 1.24: Configuración de cuadrados que no permite construir un cubo.

Por lo que se refiere al reconocimiento de las relaciones entre los elementos del desarrollo plano y del poliedro, Mesquita (1992) identifica los siguientes tipos de relaciones:

- la *relación de correspondencia*, entre un elemento del cubo y el elemento (o los elementos) correspondiente(s) en su desarrollo plano,
- la *relación de duplicación*, que refiere a la identificación de los elementos que aparecen duplicados en el desarrollo plano (este problema se pone por los vértices y por las aristas, conjuntos de medida nula en R^2 y R^3).
- el paso de las relaciones del cubo al desarrollo plano, o sea la identificación de las relaciones del cubo por medio de la representación externa del desarrollo plano: paralelismo de las caras, la contigüidad de las caras,… (por ejemplo, en el caso del cubo, se pueden reconocer los cuadrados del desarrollo que corresponden a caras paralelas en el cubo)

Observamos que tanto la explicitación de la *relación de correspondencia* como la de la *relación de duplicación* de los elementos del desarrollo permiten justificar formalmente el hecho que un determinado desarrollo puede formar un cubo.

Damos dos ejemplos de la explicitación de la *relación de correspondencia* de los elementos de un cubo y del respectivo desarrollo: el primero (Figura 1.25) se refiere a la correspondencia de los segmentos y el segundo (Figura 1.26) corresponde a la correspondencia de los vértices del cubo.

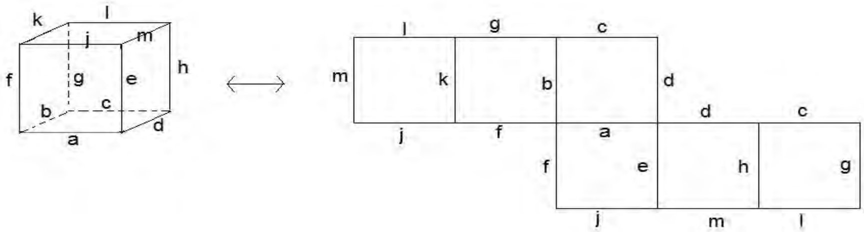


Figura 1.25: Cubo y respectivo desarrollo, relación de correspondencia de los segmentos.

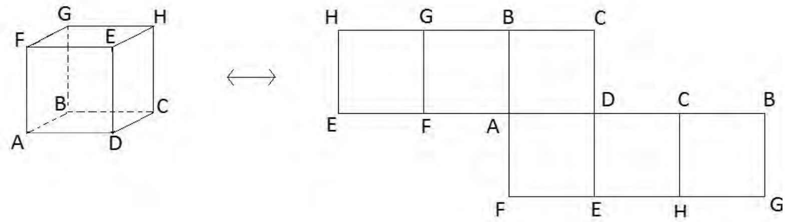


Figura 1.26: Cubo y respectivo desarrollo, relación de correspondencia de los vértices.

Ahora, si consideramos únicamente los desarrollos con las relativas asignaciones de letras (sin la correspondencia con los elementos del cubo) obtenemos la explicitación de la *relación de duplicación*, que refiere a la identificación de las aristas y de los vértices que aparecen duplicados en el desarrollo plano (identificados con la misma letra en las Figuras 1.27 y 1.28):

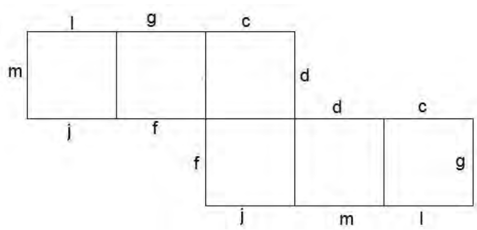


Figura 1.27: Desarrollo de un cubo, relación de duplicación de las aristas

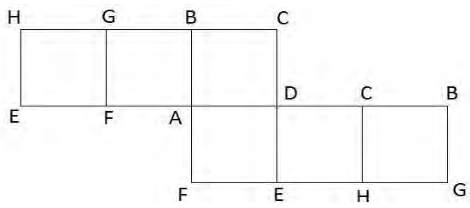


Figura 1.28: Desarrollo de un cubo, relación de duplicación de los vértices.

Esta identificación es suficiente para justificar la construcción del solido a partir de un desarrollo plano.

Mariotti (1997) y Mariotti y Fischbein (1997) observan que en la idea de desarrollo interactúan dos componentes, la componente figural que es relacionada con la operación concreta de plegar y desplegar, y la componentes conceptual, que define las propiedades que tienen que mantener con respecto al objeto y que caracterizan la noción geométrica del desarrollo (invariantes). Dicha dualidad será interpretada en la sección 3 del capítulo 2 en términos de la sinergia entre "visual y analítico".

Es interesante observar que en topología la acción de pegar es definida con una relación de equivalencia que define un determinado espacio cociente. Como ya fue observado en el apartado anterior, en el caso del desarrollo de un poliedro, para definir una relación de equivalencia entre los segmentos que forman las aristas del sólido, se tienen que omitir los extremos, para no crear problemas en los vértices (que pertenecerían a dos clases de equivalencia distintas). Observamos que para ser más precisos sería necesario también definir un sentido de los segmentos que coinciden, pues por cada par de segmentos habría dos opciones distintas para pegarlos. Este detalle puede ser omitido si consideramos que un determinado desarrollo tiene un único modo de cerrarse formando el sólido determinado.

2.1.4.3. Rotar una figura plana alrededor de un eje (engendrar cuerpos de revolución)

Este procedimiento involucra la rotación en el espacio de un objeto bidimensional alrededor de un eje (eje de rotación). Por definición de rotación cada punto del objeto bidimensional que gira permanece a una distancia constante del eje de rotación (cuyos puntos permanecen fijos). Siendo la rotación una isometría, las propiedades métricas del objeto bidimensional que gira se conservan.

El procedimiento de "engendrar" el cuerpo a partir de una superficie plana y un eje requiere que el sujeto interprete que el sólido tiene que ser formado por todos los puntos que pertenecen a la figura plana a lo largo de su rotación completa alrededor del eje. La rotación de la figura plana no es vista como transformación geométrica que permite cambiar la posición de una figura plana desde una posición fija X hasta otra posición fija Y, sino tiene que ser interpretada como un movimiento continuo en el tiempo en el cual el espacio que ocupa la figura a lo largo del tiempo permite la generación de un sólido.

Por ejemplo, el toro es generado por la rotación de un círculo alrededor de un eje externo al círculo, como muestra la Figura 1.29.

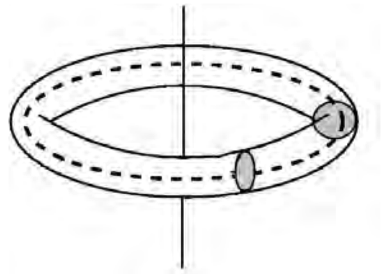


Figura 1.29: Toro generado por la rotación de un círculo alrededor de un eje externo al círculo.

Así cada punto de la figura plana describe una circunferencia alrededor del eje y sobre un plano perpendicular al mismo. Emergen las siguientes propiedades del sólido de rotación:

- Las figuras planas que rotando generan los sólidos de revolución son mitad de las secciones longitudinales del respectivo solido que contienen el eje de rotación
- Las secciones transversales (obtenidas por la intersección de planos perpendiculares al eje de revolución) del sólido de revolución son discos o coronas circulares de rayo variable.

También por este procedimiento podemos diferenciar aspectos visuales de aspectos analíticos. Por ejemplo, si se aproxima la figura bidimensional con un objeto de cartulina y se considera el efecto óptico que obtenemos de la rotación rápida del objeto alrededor de un eje, se puede percibir visualmente la estructura del cuerpo de revolución generado. De otra parte, atendiendo a la definición analítica de “solido de revolución”, aunque la rotación no es explícitamente representada, se puede observar que el conjunto de los puntos en S (x, y, z_0) (con z_0 fijo), pertenecen al disco cerrado de centro (x, y, z_0) y de rayo $f\ (z_0\ )$ generado por la rotación del punto (x, y) del grafo de la función generatriz dada.

2.1.5. Tipos de justificaciones en geometría espacial

De Guzmán (1996) observa que en la comunidad de matemáticos se emplea la visualización constantemente, pero su uso es frecuentemente mal visto: “Se suele hablar con sorna y desprecio de demostraciones "waving hands", haciendo gestos con las manos, por más que, son muchas las ocasiones en que un gesto con las manos puede abrir la mente a la comprensión” (p.19).

Observando la gran diversidad de términos y significados asociados a la acción de demostrar (en matemáticas), Harel y Sowder (1998, 2007) proponen la noción general de "esquema de prueba", definido como el proceso empleado por una persona para suprimir dudas (a sí misma o a otra persona) sobre la verdad de una conjetura. Así concebidos, los "esquemas de pruebas" están presentes a lo largo de todo el currículo, frecuentemente asociados a términos como: explicar, justificar, demostrar,…

Varios investigadores han intentado diferenciar las formas de justificar una proposición, atendiendo a los tipos de práctica argumentativa utilizados, al rigor exigido, a los criterios externos de autoridad en los cuales se basan,…

Una característica común de las categorizaciones propuestas por los autores es la diferenciación entre las pruebas de tipo formal, principalmente analíticas, y otros tipos de prácticas argumentativas no analíticas (argumentaciones deductivas informales, argumentaciones no deductivas,…). Dicha distinción induce a plantear el problema de la progresión de las prácticas argumentativas a lo largo de la enseñanza, para que los alumnos adquieran un correcto significado de lo que significa justificar, se convenzan de su importancia y lleguen a dominar las diferentes prácticas. De otra parte, se distinguen dos diferentes motivaciones principales que pueden llevar a justificar una determinada proposición:

- la necesidad de convencer (a sí mismos u a otros) sobre la verdad o falsedad de la proposición
- la necesidad de establecer si la proposición es válida en un sistemas de reglas y principios aceptados por una comunidad de personas

Mientras que una proposición que no aparece como evidente genera un sentido de incertidumbre y lleva de forma natural a la necesidad de una argumentación, en el caso de que la verdad de una proposición aparezca intuitivamente evidente, ya no necesita ser argumentada con el propósito de convencer, pero puede necesitar ser demostrada en un determinado sistema teórico establecido (Mariotti, 1998).

Battista y Clements (1995) observan que tanto la teoría de Piaget (Piaget, 1928) como la de van Hiele (ver sección 2.2.2) sugieren que los estudiantes deben pasar a través de los niveles inferiores de pensamiento geométrico antes de poder alcanzar los niveles más altos. En particular, en la teoría de Van Hiele (Van Hiele, 2002), se distinguen dos principales niveles de aprendizaje de las formas geométricas: un nivel inferior relativo a la identificación de las formas por medio de la vista ("Es un cuadrado porque veo que lo es"), y un nivel superior relativo a la identificación de las formas por sus propiedades ("Es un triángulo isósceles porque dos de sus tres lados son iguales"). Según esta teoría, la "prueba" adquiere el significado de verificación, deducción informal o deducción formal, dependiendo del nivel en la cual se sitúa. Debido a que los estudiantes no pueden saltar los niveles, enfrentarse antes de tiempo con la prueba formal puede conducir a los estudiantes a una mera memorización de la prueba y a la confusión sobre su propósito. Por ello, según Battista y Clements (1995, p.53) se debería evitar la demostración formal durante gran parte del trabajo con los estudiantes, centrándose en ayudarlos a construir "unos cimientos empíricos y visuales para los niveles más altos del pensamiento geométrico". De esta forma se puede conseguir que aprecien la necesidad de una prueba formal y sólo entonces, serán capaces de utilizarla significativamente como un mecanismo para justificar ideas.

En Parzysz (2006) se encuentra una interesante distinción de tipos de validaciones en geometría según el tipo de geometría al cual se refieren. La propuesta surge del análisis e integración de tres enfoques principales:

- Van Hiele (2002)
- Houdement y Kuzniak (2003), que distinguen tres paradigmas geométricos: una geometría natural, en la cual la geometría se confunde con la realidad; una geometría axiomática natural, que es un esquema de la realidad y una geometría axiomática formalista, donde el "cordón umbilical" con la realidad es cortado.
- Henry (1999), que distingue tres tipos de relación con el espacio en la enseñanza-aprendizaje de la geometría: la situación concreta, una primera modelización, que consiste en la observación de una situación real y su descripción en términos cotidianos, y una matematización, que es elaborada a partir del modelo precedente.

La propuesta de Parzysz (2006) se articula en la Tabla 2.1.

Tabla 1.2: *Tipos de geometría, objetos y validaciones, según Parzysz (2006, p.130).*

	Geometrías no axiomáticas		Geometrías axiomáticas	
Tipo de geometría	Concreta[5] (G0)	Espacio-Gráfica (G1)	Proto-Axiomática (G2)	Axiomática (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validaciones	Perceptivo-deductivas		Hipotético- deductivas	

[5] Correctamente dicho, G0 no es una geometría: los objetos materiales tienen características físicas (materia, colores,..) y se sitúan en un contexto "real", "concreto",..

Los paradigmas G0, G1, G2 y G3 se diferencian según la naturaleza de los objetos puestos en juego (físicos o teóricos) y según las formas de validación (perceptivo-deductiva o hipotético-deductiva).

El autor distingue G1 y G2 como principales paradigmas presentes en la enseñanza de la geometría en la escuela obligatoria. El primero (G1) se refiere a un tipo de geometría gráfico-espacial, que trabaja con objetos físicos (representaciones materiales de entidades teóricas: dibujos, maquetas,…) y que se apoya en validaciones perceptivo-deductivas para justificar sus afirmaciones. Dichas argumentaciones tienen rasgos del esquema/justificación empírico-perceptivo (Harel y Sowder, 2007; Marrades y Gutiérrez, 2000), por la naturaleza de los conceptos que intervienen y por la importante componente empírica de la tarea misma y la carencia de generalidad. Siguiendo a Recio y Godino (2001) consideramos estas argumentaciones como esquemas de pruebas informales "que no deben ser considerados como simplemente incorrectos, equivocados o deficientes, sino más bien como facetas del razonamiento matemático necesario para alcanzar y dominar las prácticas matemáticas argumentativas" (p.97). Creemos además que la atención por parte de los maestros sobre las características de las argumentaciones deductivo-informales es un primer paso para guiar a los alumnos desde una "geometría de la observación" hasta una "geometría de la demostración" (Parzysz, 2006, p. 129).

El segundo paradigma (G2) es un tipo de geometría proto-axiomática que involucra objetos teóricos y utiliza un razonamiento *hipotético deductivo* (basados en los axiomas de geometría euclídea y propiedades previamente aceptadas) aunque haciendo referencia al espacio "físico".

El autor subraya la importancia que tiene la articulación de los dos paradigmas en la formación de maestros. De hecho, aunque las actividades propuestas a los alumnos de escuela primaria se refieren a G1, su planificación y control por parte del maestro debe tener en cuenta G2.

Finalmente G3 se refiere a una geometría axiomática, en la cual la referencia con lo "real" es facultativa y la axiomatización es explicita: las argumentaciones hipotético-deductivas se apoyan en conceptos y propiedades emergentes del sistema de axiomas.

El autor describe las diferentes articulaciones entre los paradigmas, evidenciando los posibles "rompimientos de contrato" que se pueden producir entre uno y el otro. Por ejemplo en el paso de G1 a G2, una justificación perceptiva constituye un rompimiento de contrato. "La resolución de un problema de geometría elemental" afirma el autor, "consiste en una sucesión de ida y vuelta entre G1 y G2, centradas en la "figura". Esta juega un papel central en el proceso; de hecho, aunque constituye una ayuda preciosa en las conjeturas, puede constituir un obstáculo en la demonstración, puesto que "la evidencia de la figura" puede ser fuente de confusiones en la utilización de los datos" (Parzysz, 2006, p.128).

Mariotti (1997, p. 20) aunque concuerda que hay diferentes situaciones en las cuales "la evidencia de la figura" constituye un obstáculo en la explicación de propiedades geométricas, de otra parte, observa que el uso de "falacias figurales", causadas por ejemplos que implican una incorrecta interpretación de un dibujo, es recomendado para introducir a los estudiantes en la idea de "prueba".

Duval (1999) reflexiona sobre la introducción de los gráficos en el aprendizaje de las pruebas, y observa que las "proof graphs" (demonstraciones sin palabras) ayudan la visualización únicamente cuando han sido construida por los mismos estudiantes de acuerdo a las reglas que permiten pasar de las proposiciones a los datos visuales. La "proof graphs" de una proposición dada no quiere expresar una determinada demonstración, sino permite visualizar cómo funciona una prueba cualquiera de la proposición (Duval, 1998, 1991).

Siguiendo a Duval (1998, 1999) creemos que para demostrar una proposición la interpretación perceptiva tiene entonces que ser acompañada de una interpretación discursiva que permita la asociación de los elementos representados con la sentencia.

2.2. INVESTIGACIONES SOBRE ASPECTOS COGNITIVOS

Definir qué es la visualización espacial, la habilidad espacial o el sentido espacial, de manera general en el contexto de la matemática es un trabajo que toca una multitud de aspectos. En efecto la visualización está presente en diferentes campos, puede ocurrir en aritmética y algebra tanto como en geometría.

Guzmán (1996) afirma que "aún en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de procesos imaginativos que les acompañan en su trabajo haciéndole adquirir lo que se podría llamar una intuición de lo abstracto (…)" (p.17). El autor diferencia distintas formas de visualizar, según el grado de correspondencia, más o menos cercana, natural, simbólica, comunicable.

Con respecto a esta pluralidad de significados, Bishop (1983) afirma que “nunca se podrá tener una “verdadera” definición de habilidad espacial; tenemos que buscar definiciones y descripciones de habilidades y procesos que nos ayuden a resolver nuestro problema peculiar” (p. 181).

En nuestro caso el problema que abordamos nos limita el campo al contexto de la geometría, y más precisamente a la visualización de objetos tridimensionales.

Por lo que se refiere a la geometría Usiskin (1987) describe cuatros dimensiones:

- la visualización, el dibujo y la construcción de figuras
- el estudio de los aspectos espaciales del mundo físico
- el uso de la geometría como vehículo para representar conceptos y relaciones matemáticas no visuales
- la representación como un sistema matemático formal

Clements y Battista (1992) observan que las primeras tres dimensiones requieren el uso del razonamiento espacial, definido como “el conjunto de los procesos cognitivos por medio de los cuales se construyen y manipulan representaciones mentales de objetos espaciales, relaciones y transformaciones.” (p.420).

En el siguiente apartado resumimos el desarrollo de las definiciones de procesos y habilidades relacionadas con la visualización en la geometría del espacio propuestas por investigadores en el campo de la psicología y de didáctica de la matemática a lo largo del último siglo.

2.2.1. Definiciones de procesos y descripción de habilidades

En el campo de la psicología, McGee (1979) hace una síntesis de las investigaciones en el ámbito psicológico sobre el estudio del “factor espacio”, presente desde los años treinta. Este factor espacio fue estudiado a partir del examen de los resultados de diferentes test, que permitieron llegar a dar algunas primeras definiciones de este factor, como “manipulación mental de formas” o “habilidad de obtener y utilizar la imaginación espacial”. Este primer estudio se concluyó con la distinción de dos factores: el factor de Visualización Espacial y el factor de Orientación Espacial. El autor resume en una tabla (Tabla 1.3) las características que diferentes autores propusieron entre los años 1947 y 1957 de estos dos factores.

Tabla 1.3: *Factores de Visualización y Orientación Espacial según McGee (1979), tabla adaptada de Michael, Guilford, Fruchter y Zimmerman (1957, Tabla 1, p. 188).*

Investigadores (para más detalles y bibliografía ver McGee, 1979)	**Factor de Visualización Espacial**	**Factor de Orientación Espacial**
Guilford y Lacey	La habilidad de imaginar la rotación de objetos representados, el plegar y desplegar de desarrollos planos, el cambio de posición de objetos en el espacio, el movimiento de una maquinaria. Este factor de visualización es más fuerte en los test que presentan un estimulo pictórico, y que involucren la manipulación o la transformación en otra representación visual.	La habilidad de determinar la relación entre diferentes estímulos espaciales dados y sus respuestas, y la comprensión de la disposición de los elementos de un patrón visual.
Thurston	La habilidad de visualizar una configuración en la cual hay movimiento o desplazamiento de sus partes internas.	La habilidad de reconocer la identidad de un objeto cuando es visto desde un ángulo diferente, o la habilidad de visualizar una configuración rígida cuando es desplazada en otra posición. La habilidad de pensar sobre aquellas relaciones espaciales que involucran la orientación del cuerpo del observador como parte esencial del problema.
French	La habilidad de comprender movimientos mentales en el espacio tridimensional o la habilidad de manipular objetos mentalmente.	La habilidad de percibir los patrones espaciales con exactitud y compararlos uno con otro. La habilidad de no confundirse cuando un patrón espacial cambia de orientación.
Ekstrom, French, y Harman	La habilidad de manipular o transformar la imagen de un patrón espacial en otra configuración; requiere o bien la restructuración mental de una figura en componentes por su manipulación, o bien la rotación mental de una configuración espacial y la realización de una serie de operaciones, quizás con una estrategia analítica.	La habilidad de percibir patrones espaciales o de mantener una determinada orientación con respecto a los objetos en el espacio; requiere que una figura sea percibida como un todo.

McGee (1979) y posteriormente Tartre (1990) discriminan tareas de Visualización Espacial de tareas de Orientación Espacial, según los conocimientos y capacidades que tienen que ser puestas en juego mentalmente para resolver la tarea. Para estos autores una tarea es considerada de visualización espacial si requiere que toda la representación o una de sus partes sea movida o alterada mentalmente. La visualización espacial involucra "la habilidad de manipular, rotar, girar o invertir mentalmente un objeto presentado como estímulo visual, de dos o tres dimensiones" (McGee, 1979, p.893).

Como habilidades relacionadas con la visualización espacial, McGee propone:

- la habilidad de imaginar la rotación de un objeto, el desarrollo de un sólido, los cambios relativos de posición de un objeto en el espacio
- la habilidad de visualizar una configuración en la que hay movimiento entre sus partes
- la habilidad de comprender movimientos imaginarios en tres dimensiones, y manipular objetos en la imaginación
- la habilidad de manipular o transformar la imagen de un modelo mental a otra disposición.

Por contra, para estos autores una tarea de orientación espacial no requiere el movimiento mental de un objeto, sino el cambio o el desplazamiento de la perspectiva percibida por el observador. En su artículo Tartre (1990) usa el término "orientación espacial" para describir aquellas tareas que requieren que el sujeto reajuste mentalmente su perspectiva para que sea consistente con una representación de un objeto dado. "Una tarea de orientación espacial requiere que la persona comprenda una representación o un cambio entre dos representaciones", requiere "organizar, reconocer, dar sentido a una representación espacial, verla desde un ángulo diferente" (Tartre, 1990, p. 217). McGee afirma que la orientación espacial "involucra la compresión de la disposición de elementos con un patrón de estímulo visual, la aptitud de no confundirse cuando se cambia la orientación de una configuración espacial, y la habilidad de determinar la orientación espacial con respecto al propio cuerpo" (p. 897). Como habilidades relacionadas con la orientación espacial, McGee propone:

- determinar las relaciones entre diferentes objetos en el espacio
- reconocer la identidad de un objeto cuando es observado desde diferentes ángulos, o cuando el objeto es movido
- considerar relaciones espaciales donde la orientación del cuerpo del observador es esencial
- percibir modelos espaciales y compararlos entre sí
- no confundirse cuando se varían las orientaciones con las cuales un objeto espacial es representado
- percibir modelos espaciales o mantener la orientación con respecto a objetos en el espacio.

Observamos que en estas definiciones el concepto de representación es ambiguo. Con representación podemos entender representación plana de un objeto tridimensional, pero también un modelo tridimensional del objeto, o el mismo objeto. De hecho, cuando tenemos un objeto real tridimensional, se puede considerar que la perspectiva que nos ofrece es ella misma una peculiar representación del objeto (sería la imagen que reconstruye el cerebro tras el estímulo visual). Ahora, para cambiar mentalmente de perspectiva, se trabaja con una representación mental (representación interna) asociada al estímulo visual (representación externa). Siguiendo las ideas de Piaget e Inhelder (1971) estos dos modos de representaciones están fuertemente relacionados, puesto que a una representación externa (como un dibujo o una composición de objetos en el espacio) siempre se va a asociar una representación interna (visual imagery). Por ejemplo, en su trabajo Presmeg (2008) decide no distinguirlas.

Diezmann y Lowrie (2009), apoyándose en las definiciones de McGee y Tartre, ilustran un ejemplo de tarea de Visualización Espacial y un ejemplo de tarea de Orientación Espacial (Figura 1.30).

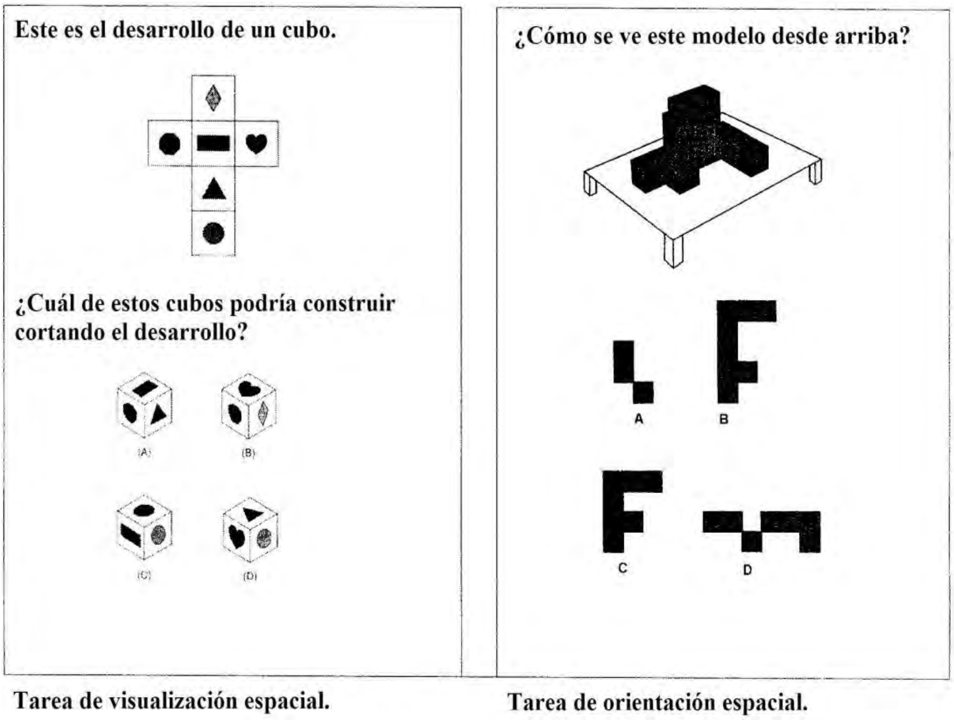


Figura 1.30. Tareas de visualización y orientación espacial según Diezmann y Lowrie (2009), p. 418.

Observamos que esta distinción es puramente teórica, y se centra en la formulación de las tareas, y no en la resolución específica del sujeto: podrían existir tareas definidas de orientación espacial que algunos alumnos resuelvan utilizando habilidades relacionadas con la visualización espacial (y viceversa).

La caracterización de estos dos factores (orientación y visualización espacial) dada por McGee fue discutida por otros autores y se abrió el debate sobre la naturaleza de la capacidad espacial y su medición.

Bishop (1983), recogiendo los estudios realizados por diversos investigadores y apoyándose en resultados de aplicación de tests - los cuales están basados en las definiciones de habilidades espaciales propuestas por McGee - afirma que dichas definiciones no son adecuadas. Observa que falta un estudio sobre los tests que puedan medir mejor las habilidades espaciales. Reflexiona también sobre la posibilidad o no de entrenar y enseñar estas habilidades y sobre el problema del vocabulario y las convenciones que involucran. Como definiciones alternativas Bishop (1983, p.184) propone las siguientes:

- *la habilidad del tratamiento visual* (VP): involucra la visualización y la traducción de las relaciones abstractas y de la información no figural en representaciones visuales; incluye la manipulación y la transformación de las representaciones y de las imágenes visuales; es una habilidad del proceso y no está necesariamente relacionada con la forma del estímulo material presentado;
- *la habilidad de interpretar la información figural* (IFI): involucra la comprensión de las representaciones visuales y del vocabulario espacial usado en el trabajo geométrico, en los gráficos y en los diagramas de todo tipo; requiere la lectura, la comprensión y la interpretación de la información visual; es una habilidad del contenido y del contexto y está relacionada con la forma del estímulo material.

Bishop (1983) observa que la definición de "habilidad de tratamiento visual tiene mucho en común con la definición de visualización espacial de McGee, con la diferencia que Bishop considera no sólo la forma del estímulo visual sino todo el proceso en su complejidad. En la definición de "habilidad de interpretar la información figural", Bishop extiende la definición de orientación espacial dada por McGee al incluir las convenciones gráficas y geométricas y sus interpretaciones.

De otra parte podemos observar que en las definiciones de Bishop están presentes los procedimientos identificados por Kosslyn (1980) y aplicables a la visualización y a las imágenes mentales:

- generar una imagen mental a partir de algunas informaciones dadas (que puede ser relacionado con la IFI);
- examinar una imagen mental para observar su posición o la presencia de partes o elementos; transformar una imagen mental a través de rotaciones, translaciones,

escalas, o descomponiéndola; utilizar una imagen mental para responder a preguntas (relacionado con la VP).

Diferentes autores en el campo de la didáctica de la matemática han utilizado y ampliado en sus estudios las definiciones de Bishop. Por ejemplo Gorgorió (1998) distingue dos diferentes aspectos de la habilidad del tratamiento visual (VP): la primera se sitúa en el contexto más amplio de las matemáticas, donde las relaciones abstractas no tienen necesariamente un origen visual, y la VP puede ser considerada como la visualización y la transformación de la información non figural en términos figurales; la segunda se refiere a la geometría y limita la habilidad VP a la habilidad de manipular y transformar mentalmente una representación o imagen visual. Además Gorgorió (1996, 1998) propone definir la "habilidad de tratamiento espacial" (en vez de habilidad de tratamiento visual) de forma general, como la habilidad necesaria para llevar a cabo las operaciones mentales requeridas para resolver una tarea espacial. Incluye la habilidad de imaginar objetos espaciales, relaciones y transformaciones, de descodificarlos visualmente, y de codificarlos en términos verbales o mixtos. Subraya el hecho que aunque el término "habilidad de tratamiento espacial" es singular, tiene una pluralidad de significados: incluye por lo menos tantas habilidades diferentes cuantas son las transformaciones espaciales que se pueden imaginar (rotación, sección, desarrollos, …), incluye la habilidad de interpretar la información espacial (descripciones gráficas y modelos de hechos y relaciones espaciales, términos verbales, especifico vocabulario utilizado en geometría) y la habilidad de comunicar información espacial (de manera figura, verbal o mixta).

El proceso de generación de imágenes visuales a partir de información no-figural también está presente en Eisenberg y Dreyfus (1989), cuando afirman que "muchos de los conceptos y procesos en las matemáticas escolares pueden estar vinculados a representaciones visuales, es decir, los modelos visuales pueden ser construidos de forma que reflejan (una gran parte de) la estructura matemática subyacente" (p.1).

Otro autor que se centró en el estudio de las habilidades visual es Del Grande (1990) que describe las siete "habilidades de percepción visual" identificadas por Hoffer (1977) y da interesantes ejemplos de tareas que las ponen en juego. Estas habilidades son: coordinación motriz de los ojos, identificación visual, conservación de la percepción, reconocimiento de posiciones en el espacio, reconocimiento de las relaciones espaciales, discriminación visual, memoria visual.

Del Grande sugiere, por cada una de las habilidades propuesta, actividades específicas que la describen. También Gutiérrez (1992), trabajando actividades de geometría espacial con alumnos de 6º de Primaria, identifica, entre las habilidades descritas por Del Grande, aquellas que se revelaron necesarias para resolver las tareas propuestas.

Describimos en la Tabla 1.4 las habilidades que tienen una relación más estrecha con el contexto de la geometría espacial (Gutiérrez, 1991), y algunos interesantes ejemplos de tareas (Gutiérrez, 1992) relacionadas con nuestros tópico.

Tabla 1.4: *Habilidades visuales de Del Grande que tienen relación estrecha con la geometría espacial, descripciones y ejemplos de actividades (Gutiérrez 1991, 1992).*

Habilidad	Descripción	Tarea
Habilidades de identificación visual	Habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto.	*Colocar cubos con figuras en las caras en un posición determinada, completar la figura de alguna cara del cubo, etc.*
Habilidad reconocimiento de posiciones en el espacio	Habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia.	*Dada una figura, colocar el propio cuerpo para verla en la misma posición, comparar dos representaciones de sólidos para ver si son congruentes o si están en la misma posición.*
Habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales	Habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio; por ejemplo que están girados, son perpendiculares, simétricos, etc.	*Dibujar representaciones planas de módulos construidos con cubos o construir módulos a partir de sus representaciones planas.*
Habilidad de discriminación visual	Habilidad que permite comparar varios objetos identificando su semejanza y diferencias visuales.	*Dado un cuerpo y varias representaciones planas suyas y otras parecidas, reconocer cuáles pertenecen al cuerpo dado.*

Las siete habilidades de Del Grande fueron utilizadas por muchos investigadores que trabajaron con tareas de visualización y orientación espacial (Arredondo, 2007; Flores, 2006; Gutiérrez, 1991, 1992, 1996c, 2006; Ramírez, 2012).

Ramírez (2012), apoyándose en New Jersey Mathematics Coalition (1996), supone que el sentido espacial implica una habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas, y considera el razonamiento espacial o pensamiento espacial como partes del sentido espacial. “Términos como razonamiento espacial o pensamiento espacial podrían ser considerados como partes del sentido espacial cuando se focaliza en argumentaciones” (Ramirez, 2012, p. 64).

Gutiérrez (1996a) resume en el esquema de la Figura 1.31 los pasos que se siguen en la resolución de una tarea usando la visualización: “El enunciado de la tarea es interpretado por los estudiantes como una representación externa que se supone genera una imagen mental. Esta primera imagen es el punto de partida de un proceso de razonamiento visual en el cual, dependiendo de la tarea y de las habilidades de los estudiantes, ellos usan partes de sus habilidades visuales para realizar diferentes procesos, y otras imagen mentales y/o representaciones externas pueden ser generadas antes que los estudiantes lleguen a dar una respuesta.” (p.10)

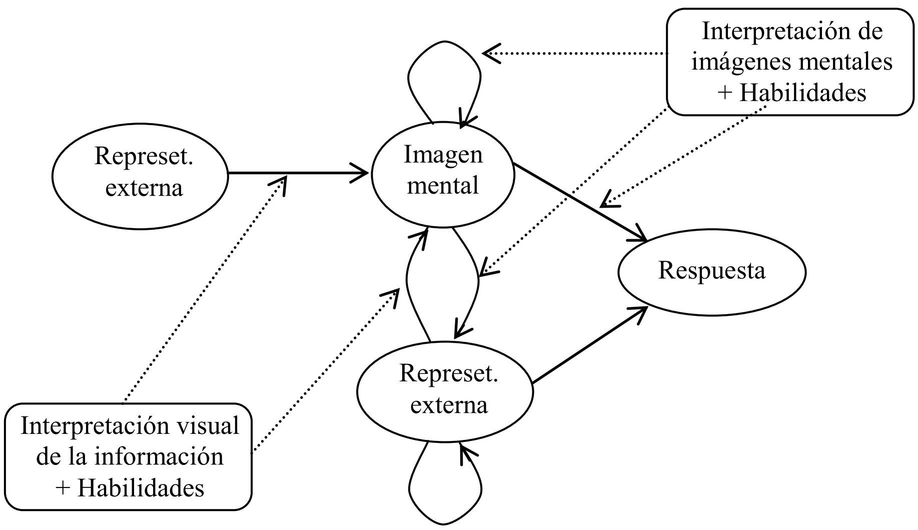


Figura 1.31. Esquema de los pasos que se siguen en la resolución de una tarea usando la visualización, según Gutiérrez (1996a, p.11).

Un elemento básico que emerge en todas las concepciones de visualización espacial son las imágenes mentales, es decir las representaciones mentales que hacemos de los objetos físicos, relaciones, conceptos.

En el contexto de las matemáticas, Presmeg (1986) describe diferentes tipos de imágenes mentales, de las cuales destacamos los siguientes tres tipos (centrales para nuestro tema):

- Imágenes concretas pictóricas: imágenes figurativas de objetos físicos.
- Imágenes cinéticas: imágenes en parte física y en parte mentales, donde tiene un papel importante el movimiento del cuerpo (pensamos a la descripción verbal de un trayecto,..)
- Imágenes dinámicas: imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus

elementos se desplazan (pensamos en el desarrollo de un cubo,..).

Presmeg considera que la visualización incluye procesos de construcción y transformación de imágenes visuales, tanto imágenes mentales como todas las inscripciones de carácter espacial las cuales pueden estar implicadas en las operaciones matemáticas (Presmeg, 2006, p. 206).

La identificación del tipo de imagen con la cual se trabaja permite identificar sus propiedades y los procesos y transformaciones que pueden ocurrir.

Siguiendo a Rivera (2011) podemos distinguir diferentes interpretaciones de la visualización: de un lado la visualización como un proceso de ida y vuelta entre la comprensión de los estudiantes y los medios de comunicación externos (Bishop, 1983; Gutiérrez, 1996a), de otro lado Presmeg (1986) y Eisenberg y Dreyfus (1989) que consideran una sola dirección de dicho proceso: Presmeg considera que el proceso de formación de imágenes tiene su punto de partida en entornos externos, mientras que para Eisenberg y Dreyfus, las representaciones externas se generan a partir de la comprensión matemática.

Finalmente, en nuestro trabajo, consideramos la visualización de objetos tridimensionales como un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial.

"El razonamiento espacial", afirma Battista (2007) "es la habilidad de "ver", examinar y reflexionar sobre objetos espaciales, imágenes, relaciones y transformaciones. El razonamiento espacial incluye generar y examinar imágenes para responder a preguntas sobre ellas, transformar y operar sobre imágenes, y mantener las imágenes al servicio de otras operaciones mentales" (p. 843).

Consideramos que visualizar un objeto tridimensional no incluye únicamente la habilidad de "ver" los objetos espaciales, sino también la habilidad de reflexionar sobre dichos objetos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y la habilidad de examinar las posibles transformaciones del objeto.

Observamos que la interpretación y la comunicación de la información espacial de manera figural, verbal o mixta, son importantes habilidades relacionadas con la visualización de objetos tridimensionales (Gorgorió, 1998).

Aunque la visualización de objetos tridimensionales puede ocurrir en ausencia de una estímulo visual (Bishop, 1983; p. 184) centraremos su estudio en presencia de una representación plana del objeto. Con respecto a este tema Guillén (2010) sugiere, como posible dirección en la investigación, el estudio de los diferentes tipos de representaciones planas de los sólidos y el uso que se hace de ellas en la enseñanza.

Siguiendo a Ben-Chaim, Lappan, y Houang (1985) consideramos que "la habilidad de "leer" una representación bidimensional de un objeto sólido forma parte de la visualización espacial" (p. 390). De hecho interpretar y producir de forma correcta una representación plana de un objeto tridimensional requiere, además de conocimientos básicos de dibujo técnico, una buena capacidad de visualización, que permita asociar la representación bidimensional al concepto geométrico correspondiente, y viceversa.

Es sobre este último aspecto que centraremos nuestro estudio de evaluación.

En el apartado 3 del capítulo 2 interpretaremos la noción cognitiva de habilidad en términos de las nociones teóricas del EOS, como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona realiza para resolver un determinado tipo de situaciones-problemas y de la configuración de objetos y procesos ligados a tales prácticas.

2.2.2. Etapas y niveles

En este apartado resumimos los principales modelos propuestos por diferentes autores sobre el desarrollo de la representación y la interpretación de representaciones de objetos tridimensionales y a los procedimientos involucrados en la interpretación/producción de representaciones planas.

Bishop (1983) observa que los modelos propuestos por los diferentes autores son difíciles de interpretar y coordinar, pues para sus formulaciones fueron utilizados estímulos y condiciones experimentales diferentes.

Describimos primeramente algunos trabajos generales centrados en describir niveles en el desarrollo de conocimientos espaciales (Piaget, Inhelder, y Szeminska, 1960) y categorías de razonamientos para la geometría de los sólidos (Guillén, 2004). En seguida nos centramos en resumir trabajos sobre la descripción de etapas y niveles en la interpretación/producción de representaciones planas de objetos tridimensionales y en algunos procedimientos específicos asociados (coordinación de las vistas y plegar/desplegar desarrollos), aspectos centrales de nuestro trabajo.

2.2.2.1. Trabajos generales

Según la teoría de Piaget (1928) el pensamiento (en general) progresa desde un estado no-reflexivo y no-sistemático, hasta un estado empírico y finalmente lógico-deductivo. El autor organiza la progresión en tres estadios en los cuales el estudiante, gracias al contacto con los demás, se vuelve gradualmente más consciente de su propio pensamiento, siendo "consciente de las definiciones de los conceptos que usa" y "adquiriendo una aptitud para la introspección de sus propios experimentos mentales" (p.243).

En particular, Piaget y sus colaboradores (Piaget y Inhelder, 1967; Piaget, Inhelder, y Szeminska, 1960) presentan un modelo de desarrollo del *conocimiento espacial,* según el cual, el niño pasa de un estadio de total egocentrismo de la percepción del espacio, hasta un estadio en el cual puede considerar más puntos de vistas, en una posición donde puede conceptualizar y operar mentalmente sobre un espacio hipotético. Afirman que las representaciones del espacio reflejan propiedades del pensamiento lógico-operacional y se construyen a través de la organización y coordinación progresiva de las acciones motoras e interiorizadas del niño.

En el primer estadio de dicho modelo, el estadio sensoriomotor (hasta los dos años de vida), el niño construye el espacio perceptual, coordina a un nivel puramente práctico y no representativo ni simbólico los tres tipos de relaciones espaciales básicas: empezando con las topológicas (relaciones de proximidad, separación, orden, cerramiento y continuidad), y terminando con las proyectiva y euclidianas. En el segundo estadio (etapa preescolar), el subperíodo preoperatorio, el niño comienza a representarse las conexiones espaciales entre los objetos de acuerdo con relaciones topológicas simples (proximidad y separación y posteriormente cerramiento y continuidad). En el tercer estadio (entre los siete y los once años), el subperíodo de las operaciones concretas, el niño empieza a tener en cuenta el espacio proyectivo, lo que supone que las relaciones izquierda-derecha y delante-detrás varían de acuerdo con la posición del observador; comprende que existen diferentes puntos de vista en relación con un objeto o grupo de objetos. En el cuarto estadio (a partir de los once años), el estadio de las operaciones formales, el niño comprende las relaciones espaciales de forma total, haciendo uso de sistemas de coordenadas convencionales; comprende también las distancias y las proporciones.

Observamos que según Piaget solo en el subperíodo de las operaciones concretas el niño comienza a entender que objetos tridimensionales pueden ser representados en dos dimensiones y según diferentes puntos de vistas. Es entonces solo a partir de los siete años que un niño podrá, por ejemplo, coordinar las vistas de un hipotético observador y hacer una primera lectura aproximativa de la representación de las vistas de un objeto. Sostienen que esa coordinación global de puntos de vista es el requisito previo básico para la construcción de las simples relaciones proyectivas. Fischbein (1987), de acuerdo con el constructivismo de Piaget, observa que la intuición del espacio es un sistema complejo de expectativas y previsiones de acciones, relacionadas al movimiento de nuestro cuerpo y sus partes.

En Clements y Battista (1992) se presentan diferentes estudios que critican el trabajo de Piaget e Inhelder, y observan que el uso de términos como topológico, euclídeo, separación, proximidad, y la aplicación de los relativos conceptos en sus estudios, no son exactos en términos matemáticos. De manera particular, la prioridad de las relaciones topológicas sobre las demás, no es suportada; al contrario parece que los niños desarrollan con el tiempo relaciones topológicas, proyectiva y euclídeas, integrándolas y sintetizándolas progresivamente. Estas ideas son originariamente intuiciones basadas en la acción: la construcción, el dibujo y la percepción.

La teoría de van Hiele (véase Battista y Clements, 1995, y Jaime y Gutiérrez, 1990 para una descripción completa) se enfrenta más concretamente al pensamiento geométrico, y desarrolla el pensamiento en diferentes niveles de sofisticación bajo la influencia del currículo escolar. Dicha teoría propone un modelo para describir el desarrollo del pensamiento geométrico de los alumnos, que se organiza en los siguientes 5 niveles.

Nivel 1 - Visual. Los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, como unidades, limitándose en describir su aspecto físico sin reconocer explícitamente las partes de que se componen ni sus propiedades matemáticas. Razonan sobre las figuras geométricas basándose en sus apariencias y en las transformaciones visuales que pueden realizan sobre las imágenes que tienen estas formas, por ejemplo reconociendo semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas. Por ejemplo, se podrían decir que una figura dada es un rectángulo porque "se ve como una puerta".

Nivel 2 - Descriptivo /analítico. Los estudiantes razonan experimentalmente, establecen las propiedades de las formas mediante la observación, la medición, el dibujo y haciendo modelos. Identifican formas no como unidades visuales sino por sus propiedades. Por ejemplo, un estudiante podría pensar en un rombo como una figura con cuatro lados iguales.

Nivel 3 – Abstracto /relacional. Los estudiantes razonan lógicamente. Pueden formar definiciones abstractas, distinguir entre las condiciones necesarias y suficientes para definir un concepto, y entender, a veces incluso presentar, argumentos lógicos. Pueden clasificar las figuras jerárquicamente mediante el análisis de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar su clasificación (por ejemplo, la identificación de un cuadrado como un rombo porque "es un rombo con algunas propiedades adicionales").

Nivel 4 - Deductivo formal. Los estudiantes razonan formalmente interpretando de forma lógica los enunciados geométricos, como los axiomas, las definiciones y los teoremas. Pueden proponer pruebas originales mediante una secuencia de afirmaciones que justifica de forma lógica una conclusión, como consecuencia de las hipótesis.

Nivel 5 - Rigor /matemático. Los estudiantes razonan formalmente sobre sistemas matemáticos y no sólo adentro de ellos. Pueden analizar las consecuencias de la manipulación de axiomas y definiciones.

En este modelo también se incluye la descripción de “fases de enseñanza” en las cuales se dan consejos sobre cómo organizar la enseñanza de la geometría para promover el pasaje de un nivel al siguiente. Observamos que aunque este modelo ha sido aplicado sobre todo en el estudio del aprendizaje de la geometría plana, describimos ahora algunos estudios que estudian sus relaciones con la geometría espacial.

Gutiérrez (1992) y Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), presentan un método para evaluar el nivel de Van Hiele del razonamiento geométrico de los estudiantes y proponen una interesante ampliación de dichos niveles a la visualización en el espacio tridimensional. De manera particular destacamos algunos detalles relacionados a la visualización de objetos y procedimientos, descritos en Gutiérrez (1992, p.36-37): en el Nivel 1 los alumnos son incapaces de visualizar sólidos, sus posiciones, o los movimientos que en realidad no pueden ver; en el Nivel 2 los alumnos pueden visualizar movimientos simples desde una posición visible a otra; en el Nivel 3, los alumnos visualizan movimientos que implican posiciones que no son visibles y razonan sobre dichos movimientos; en el Nivel 4, donde la visualización es elevada, los alumnos pueden analizar matemáticamente diversas situaciones y deducir formalmente propiedades de los sólidos.

Guillén (2004) se centra en el estudio de las etapas relativas al modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1986) aplicado a la geometría de los sólidos y estudia las componentes de la actividad matemática (describir, clasificar, definir e demonstrar) en los diferentes niveles. De manera particular caracteriza los primeros tres niveles proponiendo algunas matizaciones que surgen al considerar el modelo aplicado a la geometría de los sólidos. Observamos que la mayoría de las características de dichos niveles son relacionadas con la clasificación de los sólidos y a la demonstración de propiedades. Describimos brevemente algunas características de los niveles que pueden ser de interés para nuestro estudio, omitiendo las informaciones estrictamente relacionadas con la clasificación de los sólidos.

En el primer nivel ("Reconocimiento") el reconocimiento de las propiedades de los sólidos se hace por medio de la percepción directa de los objetos físicos, que se consideran como unitarios sin reconocer sus elementos característicos. En el segundo nivel ("Análisis") se reconoce la importancia que tiene el análisis de los objetos en la construcción o dibujo de ellos y se consideran los modelos de los sólidos como agregados de componentes que guardan unas relaciones entre ellos; se perciben los objetos formados por partes y dotados de propiedades (deducidas a partir de la experimentación) aunque no se identifican las relaciones entre ellas. Finalmente, en el tercer nivel ("Clasificación") se pueden realizar clasificaciones lógicas de los objetos considerandos propiedades o relaciones ya conocidas.

Battista (2007) observa que la dificultad de ampliar los niveles a la visualización se debe a que la visualización es una capacidad que no tiene por qué estar ligada al conocimiento de propiedades. Puede ocurrir que "algunos alumnos que no poseen grandes dotes visualizadoras compensen esa falta de habilidades desarrollando estrategias analíticas basadas en propiedades" (p. 847). Otros, sin embargo, pueden poseer una capacidad de visualización bastante elevada antes de desarrollar razonamientos sobre los sólidos basados en sus propiedades.

En cuanto a la naturaleza de los niveles, conceptualizados como períodos de desarrollo del razonamiento geométrico, el problema está en determinar si el pensamiento de los alumnos es discreto o bien continuo. Battista, (2007, p. 848) se cuestiona sobre la pertinencia de situar el pensamiento de un alumno en un único nivel, como describe la teoría inicial de van Hiele. Por ejemplo, señala las dificultades en clasificar el nivel de van Hiele en aquellos alumnos que oscilan entre distintos niveles, o bien se sitúan en diferentes niveles para conceptos diferentes. El enfoque vectorial propuesto por Gutiérrez et al. (1991), junto con las investigaciones de Lehrer, Henkins y Osana (1998) y las que han intentado reformular la teoría de van Hiele a través de la taxonomía SOLO, sostienen que los alumnos desarrollan más de un nivel a la vez y que, por tanto, los niveles son continuos por naturaleza.

2.2.2.2. Trabajos sobre la interpretación/producción de representaciones planas de objetos tridimensionales

Por lo que se refiere al desarrollo de los dibujos espontáneos de objetos tridimensionales por parte de niños, señalamos que varios educadores de arte (por ejemplo Barnhart, 1942 y Lowenfeld, 1972) han investigado sobre dicho desarrollo mediante diferentes tipos de técnicas de representación. Describen cuatros niveles, de los cuales resaltamos las siguientes características relacionada con nuestro estudio:

- Pre-esquemático: representación primitivas de características aisladas.
- Esquemático: representaciones detalladas utilizando vistas directas o laterales sin la coordinación de los puntos de vistas.
- Pre-realista: intento de representación de la profundidad desde un punto de vista común.
- Realista: representación en perspectiva.

Mitchelmore (1978), utilizando un test individual para permitir el control de la posición del punto de vista, obtiene dibujos de prismas rectangulares, cilindros, pirámides cuadradas y cubos de niños de grados 1 y 3. Organiza los resultados en una secuencia relacionada con los estadios de desarrollo del concepto del espacio en el niño descrita por Piaget y Inhelder, desde el espacio topológico hasta el proyectivo y el euclídeo (ver Figura 1.32)

- Estadio 1: esquemático plano. La figura es representada con una única cara dibujada como vista ortogonalmente o con un contorno general. El concepto del espacio es dominado por su naturaleza simple y cerrada (propiedad topológica). Parece que el niño no sea consciente que una figura parece diferente si es vista desde diferentes posiciones en el espacio, o como si no fuese importante representar dicha propiedad en el dibujo.
- Estadio 2: esquemático espacial. Se muestran varias caras, pero o las caras son dibujadas como vistas ortogonalmente o se incluyen caras ocultadas. El niño es dominado por la percepción de las relaciones locales (especialmente la perpendicularidad) y no consigue coordinarlas desde un único punto de vista. El niño empieza a representar propiedades proyectivas del espacio pero aún no ha empezado a formar un sistema de referencia.
- Estadio 3: Pre- realista. Los dibujos intentan representar la vista desde un único punto de vista y de representar la profundidad. Solo se muestran las caras visibles, y

las aristas comunes a las caras adyacentes son siempre representadas con una única línea. Se empieza a desarrollar un sistema de referencia euclídeo: las caras son deformadas desde la vista ortogonal para mostrar la profundidad, pero todavía esto es hecho de un modo no coordinado.

- Estadio 4: Realista. Las aristas paralelas en el espacio son representadas con líneas aproximativamente paralelas en el papel. Además se presentan vistas ortogonales solo de las caras que están en el plano frontal. Indica que el sujeto ha establecido un sistema de referencia euclídeo con el cual representar relaciones espaciales.

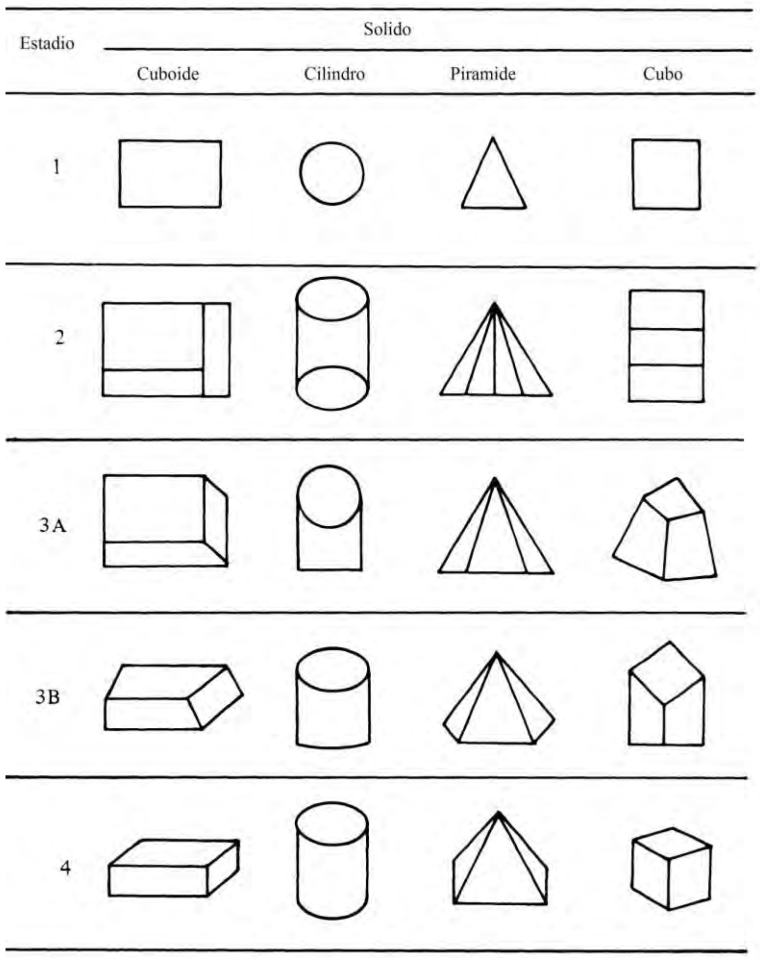


Figura 1.32: Dibujos típicos en cada estadio de desarrollo en la representación de sólidos regulares, según Mitchelmore (1978).

En el estudio de Mitchelmore (1978) se observan diferencias en la dificultad de dibujar diferentes figuras espaciales. Parece que el cilindro es más fácil de dibujar que el cubo, y el cubo es más fácil que el prisma rectangular.

Otro estudio que caracteriza niveles en la representación de objetos tridimensionales en el plano es propuesto por Colmez y Parzysz (1993). Lo autores estudian cómo alumnos de 8-17 años representan un objeto geométrico (una pirámide regular con base cuadrada, de la cual sólo las aristas están materializadas) por medio de un dibujo. Identifican dos polos, generalmente antagonistas, que influyen sobre la producción de los alumnos y cuya gestión puede ser conflictiva:

- el polo de lo sabido: intentar representar sin adaptación las propiedades del objeto que el sujeto considera importantes;
- el polo de lo visto: intentar representar el objeto tal como el sujeto imagina que puede presentarse a la vista, de manera compatible con la imagen mental que tiene del objeto.

Los autores estudian cómo los alumnos gestionan el conflicto visto/sabido. Identifican tres categorías de actitudes en las representaciones que en general evolucionan con el nivel escolar, donde lo sabido predomina:

- representaciones en las que el conflicto no está presente (tercero de primaria)
- representaciones que traducen de manera inmediata las propiedades (lo sabido) de modo más compatible con la imagen mental global (visto) (cuarto de primaria-cuarto de secundaria)
- representaciones que resultan de una estructura alrededor de la altura de la pirámide (lo sabido razonado) (a partir de cuarto de secundaria).

Observamos que dichas categorías, además de estar relacionadas con determinadas características graficas del dibujo, describen también una posible interpretación de la actitud del sujeto en la representación de determinadas propiedades del objeto.

2.2.2.3. Trabajos sobre procedimientos asociados a "plegar/desplegar desarrollos" y "coordinar e integrar vistas ortogonales"

Potari y Spiliotopoulou (2001) se interesan por describir y clasificar los dibujos que niños de 9 y 11 años hacen de desarrollos de diferentes objetos materiales (una caja de fósforos, una lata de sprite, un rollo de papel higiénico vacio) en la siguientes cinco categorías (ver Figura 1.33, para el caso del rollo de papel):

- Modelos heurísticos: Los niños tienen dificultades para representar el desarrollo del sólido de forma convencional. Por ejemplo, representan el desarrollo de una caja con un rectángulo o un cuadrilátero de dimensiones arbitrarias.
- Modelos con elementos de proyecciones: los niños representan el desarrollo del sólido abriendo una de sus caras y dibujándolo en perspectiva. También representan una o dos bases del sólido. En este caso el sólido es visto ortogonalmente, por

ejemplo el rollo de papel higiénico es obtenido proyectando ortogonalmente la parte anterior y posterior de la superficie cilíndrica, obteniendo dos rectángulos.

- Modelos geométricos incompletos: estos modelos involucran una primera visión del desarrollo por parte de los niños, aunque consideran solo algunos de sus elementos o características, por ejemplo para el caso de la caja de fósforos algunas caras son omitidas, mientras que el desarrollo del rollo de papel es dado por un paralelogramo o un cuadrado con al menos una dimensión incorrecta.
- Modelos geométricos completos: los niños consiguen dibujar un desarrollo del sólido aceptable. Saben cómo desarrollar todos sus elementos.
- Modelos físicos: los niños dibujan el desarrollo considerando las características físicas para su construcción, por ejemplo dibujan las pestañas en el desarrollo de un sólido, o una superficie curva para el desarrollo del papel higiénico.

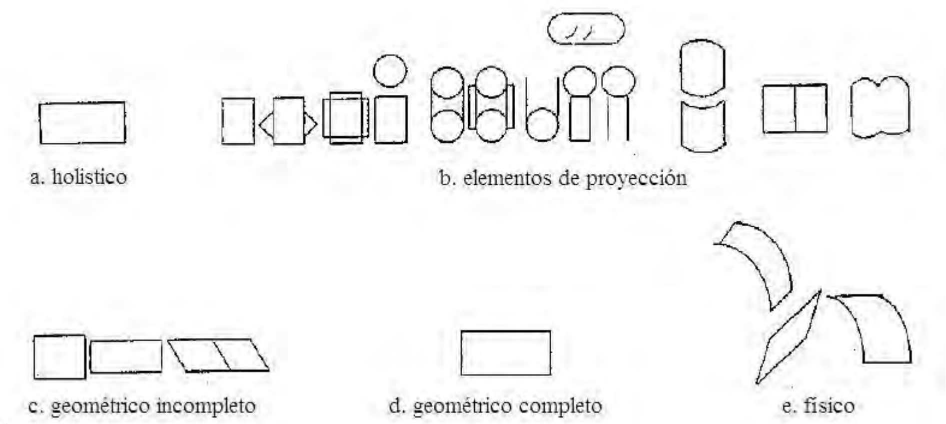


Figura 1.33: Dibujos de los niños del desarrollo de un rollo de papel, según Potari y Spiliotopoulou (2001, p. 41).

Siempre en el contexto de desarrollos de sólidos, Mariotti (1997) considera que los diferentes desarrollos corresponden a un proceso de “plegar” más o menos complejo dependiendo del número de fases (de operaciones) necesarias para conseguir reconstruir el sólido. Por ejemplo los desarrollos del cubo en T y en X son los menos complejos puesto que necesitan de sólo dos fases de operaciones: en la Figura 1.34, para el desarrollo en X, eligiendo por ejemplo la cara 1 como base, se giran la caras 2-3-4-5 y luego la cara 6. Los demás desarrollos de tipo 1-4-1 son más complejos, ya que necesitan de tres operaciones: por ejemplo en la Figura 1.34, para el segundo desarrollo, eligiendo por ejemplo la cara 1 como base, se giran las caras 2-3-4, luego la cara 5, y en fin la cara 6.

Para el desarrollo 2-2-2 (ver Figura 1.34), independientemente de la base fijada, se necesitan 5 operaciones elementares. Estas constataciones sobre la complejidad para tratar los desarrollos del cubo concuerdan con otras investigaciones (Fischbein, 1993 y Mesquita, 1992).

Figura 1.34: Desarrollos del cubo.

Siguiendo el mismo argumento, podemos observar que también el desarrollo 3-3 necesita de cinco operaciones.

Además, la autora, a partir del análisis de las respuestas (escritas y verbales) dadas por alumnos de escuela primaria, secundaria y bachillerado, define diferentes *niveles operacionales* relativos a dos tareas relacionadas al "plegar/desplegar desarrollos de sólidos":

1. Niveles operacionales relativos a una tarea sobre "desplegar desarrollos" (unfolding), en la cual los sujetos tenían que dibujar los desarrollos de un poliedro y clasificarlos atendiendo a determinados criterios (p. 111)
2. Niveles operacionales relativos a una tarea sobre "plegar desarrollos" (folding), en la cual los sujetos tenían que contestar si determinadas representaciones planas correspondían o no al desarrollo de un sólido y clasificarlas según determinados criterios (p. 132)

En ambas tareas el nivel operacional incrementa en correspondencia con:

- Un progreso en la comprensión de la *reversibilidad de la operación plegar/desplegar*: en el primer nivel, sólo se concibe una única transformación para simular mentalmente la reconstrucción del sólido; en el segundo nivel se admiten más transformaciones, así por ejemplo se observa que cada polígono del desarrollo puede ser interpretado como base, simplemente cambiando las operaciones necesarias para reconstruir el sólido (consecuencia de la correlación de diferentes operaciones reversibles que relacionan el mismo desarrollo con diferentes transformaciones y con diferentes posiciones del objeto); en el tercer nivel se coordinan las diferentes transformaciones y se concibe la posible reconstrucción del objeto como combinaciones de reconstrucciones locales, de acuerdo con la conservaciones de los invariantes.
- Un grado más alto de *flexibilidad* (armonía entre figural-conceptual, entre las propiedades del desarrollo y las reglas de las transformación): la flexibilidad

aumenta con la capacitad de pensar sobre el objeto, el desarrollo y la operación de plegar/desplegar considerando las diferentes relaciones que tienen entre sí. En un primer nivel sólo se concibe un posible desarrollo de un sólido; en el segundo nivel se consideran diferentes posibles soluciones, aunque la presencia de determinados invariantes no permite aceptar todas las transformaciones (por ejemplo solo se aceptan rotaciones de 90 grados); en el tercer nivel se relaciona el conjunto de los desarrollos y de las transformaciones con la conservación de los invariantes.

- El uso de una *estructura* más compleja: estructurar significa relacionar una específica organización del objeto con una específica organización del desarrollo de acuerdo con las reglas de la transformación plegar/desplegar. En el primer nivel sólo se reconocen los desarrollos más sencillos (por ejemplo, por el caso del cubo, el desarrollo en T y en X), sin reconocer explícitamente una determinada organización; en un segundo nivel se utiliza una explícita organización del desarrollo, que corresponde a la organización del objeto resultante, por ejemplo aceptando sólo los desarrollos del cubo de tipo 1-4-1 puesto que constan de una "superficie lateral" y "dos bases"; al tercer nivel se concibe la clase general de todas las posibles transformaciones, es posible determinar la variedad de todos los desarrollos, y en particular es posible determinar si una representación es la correcta respuesta para una determinada tarea de desarrollo.

En Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) se presentan cuatro niveles de sofisticación que caracterizan la interpretación de una representación de un objeto por *vistas ortogonales* que se concretiza en la construcción del objeto:

- Primer nivel: construcción de tres diferentes objetos en lugar de uno, basada en las tres vistas ortogonales; dibujo aislado de cuadrados para representar a un cubo; incapacidad de comprender la naturaleza tridimensional de objetos representados en dos dimensiones.
- Segundo nivel: coordinación de dos de los tres lados de la vista ortogonal en la construcción de un objeto tridimensional; ausencia de la manipulación mental de las representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales.
- Tercer nivel: descripción y construcción de un objeto tridimensional a partir de sus vistas ortogonales, incapacidad de manipular mentalmente objetos tridimensionales.
- Cuarto nivel: descripción y construcción de un objeto tridimensional a partir de sus vistas ortogonales y manipulación mental del objeto.

Estos niveles caracterizan posibles niveles en los procedimientos de coordinación e integración de las vistas descritos en la sección 2.1.3.

2.2.3. Errores y dificultades

Diferentes autores (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Laborde, 1993; Mesquita, 1992; Parzysz, 1988, 1991) afirman que las dificultades que tienen los estudiantes en geometría, enfrentados a representaciones planas de objetos tridimensionales , están frecuentemente relacionadas con el hecho de que razonan sobre los dibujos materiales cuando se espera que razonen sobre objetos geométricos teóricos. "Un peligro en la decodificación de una representación plana de un objeto tridimensional", afirma Parzysz (1988, p.82) "es que el lector puede confundir el dibujo del objeto abstracto tridimensional con un objeto bidimensional que tiene la misma representación". El autor indica que frecuentemente los estudiantes que atribuyen características a los dibujos de un objeto geométrico representado, no entienden que el dibujo no representa necesariamente toda la información del objeto representado.
Análogamente Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) afirman que la ambigüedad del término "figura" (ver sección 2.1.1) puede ser causa de dificultades de los estudiantes, puesto que no entienden que el objeto al cual se refieren sus profesores no son los dibujos (diagramas) que pueden ver en la pizarra o que realizan ellos mismos.

Para explicitar estas dificultades de los estudiantes, Parzysz (1991), en la segunda parte de su trabajo, analiza la relación entre las concepciones de los estudiantes y las representaciones de objetos geométricos tridimensionales, en particular estudia:

- Las propiedades que para los estudiantes debe tener un dibujo de un objeto 3D para constituir una representación adecuada del objeto
- La influencia de las representaciones gráficas en las concepciones geométricas.

Observa que para muchos alumnos es importante que las representaciones conserven el paralelismo o la igualdad de las longitudes. Por ejemplo, los estudiantes rechazan representaciones que pertenecen a la perspectiva central, sistema de representación que no preserva dichas propiedades.

El autor afirma que, "En el dibujo la conservación del "conocimiento" relativo al objeto representado es un elemento importante en el modo con el cual los estudiantes relacionan los sólidos geométricos con sus representaciones" (p. 582).

Fischbein (1993) observa que un gran obstáculo en el razonamiento geométrico, es la dificultad en la manipulación de los objetos geométricos (conceptos figurales): hay una tendencia a descuidar la definición bajo la presión de las restricciones figurales.

Resumimos algunos trabajos que estudian los errores, las posibles dificultades y conflictos de los alumnos enfrentados en determinadas tareas de visualización, que involucran los siguientes procedimientos principales: la coordinación e integración de las vistas, la rotación de un objeto tridimensional en el espacio, el plegar y desplegar desarrollos, la generación de cuerpos de revolución. Observamos que dichos errores están frecuentemente asociados a la interpretación y uso de representaciones planas de objetos tridimensionales y del lenguaje geométrico.

Diezmann y Lowrie (2009), analizan la resolución de la tarea "Model taks", por alumnos de 11-12 años. La tarea requiere que el sujeto identifique (entre cuatro posibilidades) la vista desde arriba de un sólido representado en perspectiva. Los autores identifican los siguientes errores y dificultades:

- Incorrecta asociación entre una parte de la figura representada en perspectiva y su parte correspondiente en la representación desde arriba.
- Dificultad de imaginar una vista escondida: dada por el hecho que en la representación en perspectiva sólo se puede ver una parte de la composición.
- Dificultad de imaginar una vista desde arriba.

Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) destacan las siguientes dificultades que tuvieron alumnos para resolver una tarea que requiere la coordinación de tres vistas ortogonales de un objeto para poder reconstruirlo (ver ejemplo 1b sección 3.2.1):

- Dificultad de comprender la naturaleza de los objetos tridimensionales representados en dos dimensiones
- Dificultad de conceptualizar los convenios necesarios al diseño e interpretación de las representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales.

Gorgorió (1998), estudiando las estrategias de estudiantes de 12 y 16 años puestas en juego al resolver una tarea de rotación de cuerpos tridimensionales, destaca los siguientes errores:

- Mala interpretación del enunciado de la tarea.
- Errores en la comunicación de la respuesta o en la explicación del proceso de resolución:

- Con el uso de códigos verbales: llaman partes de objetos tridimensionales utilizando palabras cuotidianas o que corresponden a la geometría bidimensional (por ejemplo lado en lugar que cara), utilizan expresiones ambiguas o incorrectas cuando se refieren a la posición o al movimiento del objeto (errores también destacados por Pallascio, Allaire y Mongeau, 1993)
- Con el uso de códigos gráficos (similar a Ben Chaim et al., 1989 y Hershkowitz 1990): no saben cómo dibujar una parte de un objeto que está atrás, en frente, arriba o debajo de otro que ha estado precedentemente dibujado.

- Errores geométricos, el más frecuente relacionado con el uso de representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales, errores similares encontrados en Baldy (1988).
- Confunden la rotación de 180 grados con la simetría.

La autora también observa algunas diferencias entre chicos y chicas. Las chicas resultan tener más dificultades y hacer más errores cuando interpretan el enunciado de la tarea, tanto por el lenguaje verbal que se refiere a los hechos y objetos espaciales, cuanto por el código utilizado en la representación. Las chicas hacen más errores geométricos que los chicos. Las chicas tienden a confundir la rotación de 180 del objeto con una simetría.

Otros estudios (Ben-Chaim, Lappan y Houang ,1988; Guay y McDaniel, 1977) destacan diferencias con respecto al género en las habilidades de visualización espacial, observando que los chicos tienen mejores capacidades. También Fernández (2011), trabajando con maestros en formación, destaca que los chicos parecen tener más capacidad de visualización y razonamiento geométrico que las chicas.

Cómo ya hemos anticipado, Mesquita (1992), Fischbein (1993) y Mariotti (1997) observan que los desarrollos prototípitos del cubo (los clásicos desarrollos en cruz o en T) son asociados con más facilidad al cubo que los demás, por su regularidad y su simetría.

Malara (1998) trabajando con profesores de escuela secundaria señala las siguientes dificultades que tuvieron para resolver determinadas actividades que involucran la visualización espacial (para más detalle ver sección 2.4):

- Dificultad en coordinar las visiones parciales de un objeto que tiene que ser representado en una posición diferente respecto a la dada, que proviene del hecho que, en las representaciones dadas, las imágenes muestran únicamente las partes visibles de un objeto.

- Dificultad para visualizar los objetos globalmente y fijarlos en la propia mente en la posición correcta o desde el punto de vista requerido para la representación.
- Dificultad para evocar la visión de un objeto desde uno de los cuatros puntos de vista fundamentales (norte, sur, oeste, este) a partir de las representaciones de sus vistas desde los restantes tres puntos de vistas.
- Dificultades para comprobar la exactitud de sus producciones y para conceptualizar los principios de representación.

Fernández (2011), trabajando tareas de visualización y razonamiento espacial con maestros en formación destaca que los principales conflictos detectados están asociados con la interpretación de la representación plana de los objetos tridimensionales. También detecta dificultades en el proceso de argumentar (verbalmente o gráficamente) las respuestas dadas. De manera particular señala las siguientes dificultades:

- Tarea sobre desarrollos de cubo:
    - Dificultad al imaginar la recomposición del cubo a partir de sus desarrollos
- Tarea sobre cuerpos de revolución:
    - Considerar el eje de rotación como eje de simetría
    - Girar las figuras 180º en el espacio (simetría)
    - No considerar la distancia al eje

La autora destaca que casi la mitad de los errores son errores conceptuales: los estudiantes tienen ideas muy vagas y limitadas sobre conceptos básicos como simetría, giro, cubo, ortoedro, paralelepípedo, etc. y frecuentemente el significado que atribuyen a los mismos está basado en ejemplos prototípicos. Además señala numerosos conflictos a la hora de realizar una representación plana de objetos tridimensionales, o bien de interpretarla.

Resumimos y clasificamos en la Tabla 1.5 los principales errores encontrados en las investigaciones relacionándolos con determinados procedimientos.

Tabla 1.5: *Errores de los alumnos enfrentados a determinadas tareas de visualización, detectados en investigaciones precedentes.*

Procedimiento	**Tipo de errores**
Interpretación /representación de la representación plana (perspectiva)	- Confusión del dibujo del objeto abstracto tridimensional con un objeto bidimensional que tiene la misma representación (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Laborde,1993; Mesquita, 1992; Parzysz, 1988, 1991) - Dificultad de comprender la naturaleza de los objetos tridimensionales

	representados en dos dimensiones (Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009) - Errores en el uso de representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales (Fernández, 2011; Gorgorió,1998) - Dificultad de conceptualizar los convenios necesarios al diseño e interpretación de las representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales (Pittalis, Mousoulides y Christou , 2009) - Dificultad para reconocer un objeto representado en perspectiva central (Parzysz, 1991) - Dificultad para dibujar una parte de un objeto que está atrás, en frente, arriba o debajo de otro que ha estado precedentemente dibujado (Ben Chaim et al., 1989; Gorgorió,1998; Hershkowitz 1990)
Errores en la interpretación/comunicación de términos lingüísticos	- Mala interpretación del enunciado de la tarea (Gorgorió,1998) - Uso de palabras cuotidianas o que corresponden a la geometría bidimensional (por ejemplo lado en lugar que cara) para referir a partes de objetos tridimensionales (por Clements, 2004; Fernández, 2011; Gorgorió, 1998; Pallascio, Allaire y Mongeau, 1993) - Uso de expresiones ambiguas o incorrectas cuando se refieren a la posición o al movimiento del objeto (Clements, 2004 y Gorgorió,1998)
Coordinar e integrar vistas: relación entre objeto dibujado en perspectiva y sus vistas	- Incorrecta asociación entre una parte de la figura representada en perspectiva y su parte correspondiente en la representación desde arriba (Diezmann y Lowrie, 2009) - Dificultad de imaginar una vista escondida (Diezmann y Lowrie, 2009) - Dificultad de imaginar una vista desde arriba (Diezmann y Lowrie, 2009) - Dificultad para dibujar una parte de un objeto que está atrás, en frente, arriba o debajo de otro que ha estado precedentemente dibujado (Ben Chaim et al., 1989 Gorgorió,1998; Hershkowitz 1990).
Desarrollos	- Dificultades en la identificación de los segmentos equivalentes en los desarrollos del cubo diferentes de los de forma en T y en cruz (Mesquita,1992) - Dificultad al imaginar la recomposición del cubo a partir de sus desarrollos (Fernández, 2011)
Cuerpos de revolución	- Se considera el eje de rotación como eje de simetría (Fernández, 2011) - No se considerar la distancia de la figura plana al eje (Fernández, 2011)

2.3. INVESTIGACIONES SOBRE PROPUESTAS INSTRUCCIONALES

Aunque diferentes estudios indican que las habilidades espaciales pueden ser mejoradas por medio de una formación adecuada (Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988; Bishop, 1980) el problema continúa siendo un tema de interés para la investigación.

Los trabajos que presentan propuestas instruccionales para el desarrollo de habilidades espaciales relacionadas con la visualización de objetos tridimensionales son numerosos (Antonini, Presmeg, Mariotti y Zaslavsky, 2011; Bartolini Bussi, 1996, 2007; Berthelot y Salin, 1992, 1993; Clements, 2004; Cuisinier y al., 2007; Falcade y

Strozzi, 2008; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Mariotti y Fischbein, 1997; Pallascio, Allaire, Mongeau, 1993, entre otros). En el siguiente apartado describiremos los más relevantes para nuestra temática.

2.3.1. Experiencias o propuestas de enseñanza para el desarrollo de las habilidades espaciales

Algunos autores (Bartolini Bussi, 1996; Cuisinier y al., 2007; Maschietto e Bartolini, 2005) proponen secuencias de actividades que pretenden atribuir una base científica a las reglas de elaboración de dibujos técnicos (que en general son dadas como simples convenciones, sin una justificación), lo que contribuye, según Parzysz (1991), a que la educación matemática sea más cercana a los tipos de problemas que se encuentran en la vida cotidiana profesional. De estos trabajos describiremos la propuesta de Cuisiner y cols (2007), por su interesante contextualización en la vida cuotidiana. Otros autores proponen secuencias de diferentes tipos de actividades que involucran la visualización de objetos tridimensionales. Entre estos trabajos describiremos la propuesta de Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) por su original punto de vista y la variedad de tareas involucradas. Por último describimos brevemente una propuesta instruccional relativa a un contenido específico, o sea el desarrollo de un poliedro, dada por Arpinati y Pellegrino, (1991), temática también tratada por Mariotti y Fischbein (1997), y Mariotti (1997), entre otros. Estos ejemplos sugieren interesantes trayectorias instruccionales que se pueden presentar y proponer en la formación de maestros.

La propuesta de Cuisiner y cols (2007) es una secuencia de actividades sobre las representaciones planas, perspectiva caballera y perspectiva con punto de fuga, de objetos tridimensionales que cubre diferentes niveles escolares. La propuesta es motivada por los siguientes aspectos (p. 54):

1. Los dibujos en perspectiva son un modo de expresión y de comunicación de las situaciones espaciales en los casos en los que no se tienen a disposición modelos tridimensionales.
2. Con el estudio de la teoría de las proyecciones se pueden analizar las diferentes nociones de geometría que intervienen en las representaciones.
3. Las representaciones planas son involucradas en la vida cuotidiana y en la historia del arte.

Los autores describen el aprendizaje propuesto en las siguientes etapas:

1. La realización de dibujos por parte de los niños, que le permiten ejecutar la observación y las percepciones. En esta experiencia no se pretende introducir una teoría geométrica aunque al término de la educación primaria se prevé una familiarización con un primer código de representación, el de la perspectiva caballera.
2. El estudio de las representaciones planas a través de la coordinación de tres puntos de vista (relacionados con las tres proyecciones ortogonales).
3. Introducción de los primeros elementos de las proyecciones paralelas y centrales por medio de las situaciones de las sombras. Se describe un aprendizaje simultáneo de los dos tipos de proyecciones para permitir la observación de analogías y diferencias entre los dos. Por medio de la confrontación los estudiantes aprenden a familiarizarse con las respectivas propiedades.
4. Realización de perspectivas caballeras y centrales de determinados objetos tridimensionales.

Observamos que algunas de las actividades descritas se apoyan en experiencias físicas, a partir de las cuales los alumnos derivan algunas propiedades de determinadas proyecciones, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Los alumnos reciben una escalera en miniatura que tiene los palos portantes paralelos y la siguiente consigna:

"Imagináis y dibujáis una posible sombra, sobre una superficie plana, de esta escalera:

a) Puesta al sol
b) Puesta adelante de un foco de luz

Si es necesario, realizáis concretamente la experiencia.

Mirad los siguientes dibujos (Figura 1.35). ¿Cuáles son los que pueden ser una sombra de una escalera puesta al sol? ¿Cuáles son los que pueden ser una sombra de una escalera puesta delante de un foco de luz?" (Cuisinier y cols, 2007, p.27)

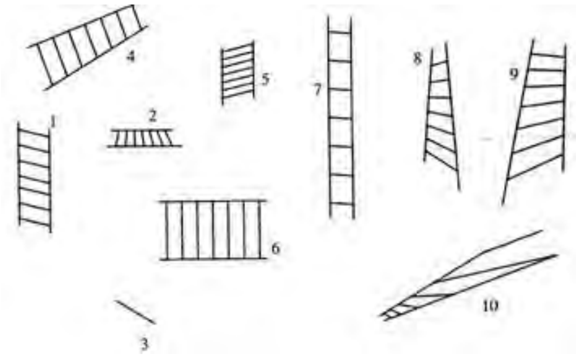


Figura 1.35: Posibles sombras de escaleras, Cuisiner y cols (2007).

Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) describen tres proyectos que promueven el desarrollo de la educación visual. Los autores afirman que la educación visual es necesaria para la interacción eficaz y correcta con las formas, la relación entre ellas, sus transformaciones, las relaciones entre las formas y otras entidades, etc. Presentan tres perspectivas desde las cuales se puede examinar la educación visual:

- La interacción con las formas reales en el espacio.
- Formas y espacio como componentes fundamentales para construir una teoría.
- Formas o representación visual como medio para comprender conceptos, procesos y fenómenos en diferentes áreas de las matemáticas y de la ciencia.

En sus estudios se centran en la primera perspectiva puesto que la consideran como la perspectiva base y prerrequisito para las otras dos, pero la más descuidada en la educación visual. En esta perspectiva incluyen la comprensión, la descripción y la interpretación del mundo visual que nos rodea, a través de la codificación y decodificación de la información visual que subyace. Los autores enfatizan el aspecto dinámico de las formas, como la posición relativa que tienen diferentes formas entre ellas, la posición de un observador relativa a las posiciones de los objetos que observa y el proceso del cambio de las formas.

Para aclarar el propósito ilustran tres ejemplos relacionados con formas y espacio. Estos ejemplos fueron elegidos por sus importantes contribuciones en la educación visual, y en particular por estos aspectos:

a) Las formas y el espacio son puntos de partida de la actividad de aprendizaje y enseñanza.
b) Los estudiantes son dirigidos hacia la matematización del entorno visual con el que interactúan.

c) Las herramientas y acciones matemáticas incluyen la identificación o el análisis de los componentes y las propiedades de las entidades visuales.

Los autores elaboran y explican algunos elementos del currículo que son relacionados con el espacio y las formas. Las actividades que proponen pueden ocurrir en diferentes niveles escolares y pueden ser separadas en dos categorías diferentes dependiendo del tipo de relación entre los objetos que son observados y el observador:

- La relación es directa, subjetiva e implica la reflexión sobre lo que el observador ve: el estudiante describe lo que ve como observador o lo que ve identificándose con un observador.
- La relación es indirecta, aunque objetiva e implica la reflexión sobre cómo el observador ve: el estudiante tiene que reflexionar sobre la situación del observador, tiene que identificarse con dos personas, una que observa y la otra que observa al observador.

Los autores llaman a la primera categoría "Qué observar" y la segunda "Cómo observar". En las actividades de "Qué observar" diferencian tareas donde el estudiante es el observador de la situación (el estudiante puede dar la vuelta a la mesa y observar la situación desde todas las partes) de tareas donde el estudiante tiene que identificarse con el observador (el estudiante tiene que imaginar la situación, puede necesitar hacer algunas transformaciones e interpretar lo que ve el observador antes de volver a la realidad para predecir resultados). Afirman que estas tareas son apropiadas para empezar el aprendizaje del espacio y las figuras en geometría.

En las actividades de "Cómo observar" los estudiantes tienen que explicar cómo ven algo, tienen que moverse desde lo que ven con sus ojos hasta lo que ven con sus "ojos mentales". Como herramientas para resolver estas tareas los autores introducen los conceptos de línea visual y de ángulo visual. La línea visual es un segmento imaginario que parte de los ojos del observador y define su "mirada" y el ángulo visual es el ángulo formado por toda posible línea visual de un observador en una situación dada. Otro método importante para resolver estas tareas es el cambio de perspectiva, donde el estudiante elije otro observador con el que identificarse. La siguiente actividad es un ejemplo de tarea de la categoría "Cómo observar".

Ejemplo: Mira la siguiente escena desde arriba de un gato y un ratón que intenta esconderse (Figura 1.36).

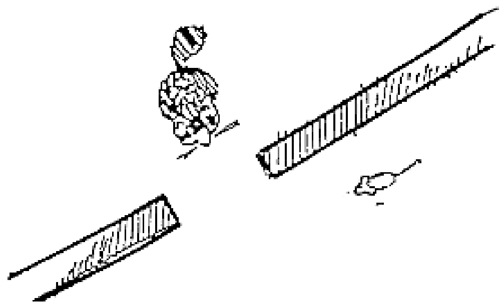


Figura 1.36: Tarea relacionada con el espacio y las formas (categoría "Cómo observar") según Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996, p. 180).

a) ¿El gato puede ver el ratón?
b) ¿Dónde es mejor que no se ponga el ratón?
c) Si el gato no puede ver el ratón, ¿desde donde lo podría ver sin pasar a la otra parte de la puerta (y sin que el ratón se mueva)?

Los diferentes ejemplos de tareas que sugieren en este estudio muestran la complejidad y la riqueza de situaciones que se pueden introducir en la educación visual.

Arpinati y Pellegrino (1991) describen una interesante secuencia de actividades de grupo sobre construcción y clasificación de los desarrollos del cubo y del paralelepípedo rectángulo, experimentada con alumnos de segundo y tercero año de escuela secundaria. La metodología seguida para identificar todos los posibles desarrollos de un cubo y del paralelepípedo rectángulo es de tipo lógico-combinatorio e involucra el uso espontáneo de nociones relacionadas con transformaciones topológicas.

Describimos brevemente los tipos de actividades propuestas a la clase (trabajo en grupos):

Fase 1: "¿Cuáles y cuántos son los desarrollos planos de un cubo"?

1. Verificar si existen otros desarrollos planos del cubo además del clásico desarrollo en "cruz" presentado en los libros de texto.
2. Dibujar todos los posibles desarrollos encontrados. Identificación de desarrollos equivalentes por isometría plana directa o inversa.
3. A partir de un procedimiento de tipo constructivo sugerido por el profesor, contestar si los desarrollos encontrados son los únicos posibles. Determinar configuraciones inamisibles.

Fase 2: "¿Cuáles y cuántos son los desarrollos planos de un paralelepípedo recto con tres "dimensiones" distintas entre ellas?"

1. Dibujar los posibles desarrollos del paralelepípedo.
2. Encontrar una forma de reagrupar dichos desarrollos. Reflexiones sobre posibles compresiones o dilataciones de los lados del paralelepípedo (o de su desarrollo) para transformarlo en cubo (o en su desarrollo), relaciones topológicas.
3. Clasificación de los desarrollos del paralelepípedo en once clases, una por cada "plantilla" (patrón) de desarrollo del cubo (uso de nociones de topología que permiten asociar determinados desarrollos del paralelepípedo a un determinado desarrollo del cubo).
4. Definiciones de criterios para ordenar los desarrollos en cada clase. Identificación de desarrollos equivalentes y su motivación.
5. Clasificación completa de los desarrollos y su conteo: 54.

Fase 3: "¿Cuáles y cuántos son los desarrollos planos de un paralelepípedo recto con solo dos "dimensiones" distintas entre sí?" Trabajo análogo al precedente y reconocimiento de los 29 desarrollos posibles.

Esta propuesta permite involucrar activamente a los alumnos en un trabajo colaborativo y promoviendo la confrontación y la argumentación de sus distintas opiniones.

2.4. INVESTIGACIONES SOBRE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO DEL PROFESOR

Diferentes autores (Bishop, 1980, 1983; Gaulin, 1985; Parzysz, 1991; Presmeg, 1986) subrayan la importancia de promover en la enseñanza de la geometría el desarrollo de la habilidad de visualizar y transformar las representaciones. Sin embargo, son pocos los trabajos que se centran en la evaluación y desarrollo de dichas habilidades en los profesores en activo y profesores en formación.

Presentamos algunos estudios (Battista, Wheatley y Talsma, 1982; Fernández, 2011 y Malara, 1998) que se interesan ena evaluar, analizar o desarrollar el conocimiento del profesor sobre dicha temática.

Malara (1998) presenta una experiencia llevada a cabo con profesores de escuela secundaria que consistía en resolver actividades que involucran la habilidad de visualizar el efecto de determinadas transformaciones sobre sólidos, o de imaginar la perspectiva de un sólido desde un determinado punto de vista. Esta propuesta cubre los siguientes aspectos:

1. La observación y descripción de los sólidos.
2. La descomposición y recomposición de los sólidos, la representación y la clasificación de sus desarrollos
3. La visualización de los sólidos desde diferentes puntos de vista y sus representaciones.
4. La sección de sólidos, también de sólidos de forma redonda, en acuerdo con determinados planos (no necesariamente verticales u horizontales)

En su trabajo la autora describe los resultados obtenidos por ocho profesores (mujeres) al resolver algunos problemas planificados para estudiantes de 11 años y que involucran la representación de objetos en papel isométrico y bajo determinadas condiciones. Los ejercicios implican la habilidad de visualizar la configuración del sólido en una nueva posición o desde otro punto de vista, así como dibujar correctamente dicha representación.

Describimos brevemente los cuatros ítems propuestos y los resultados obtenidos.

El primer ítem (a, Figura 1.37) presenta dos problemas en los cuales se pide representar el sólido en una posición diferente de la dada, de acuerdo con su "caída" hacia una determinada dirección.

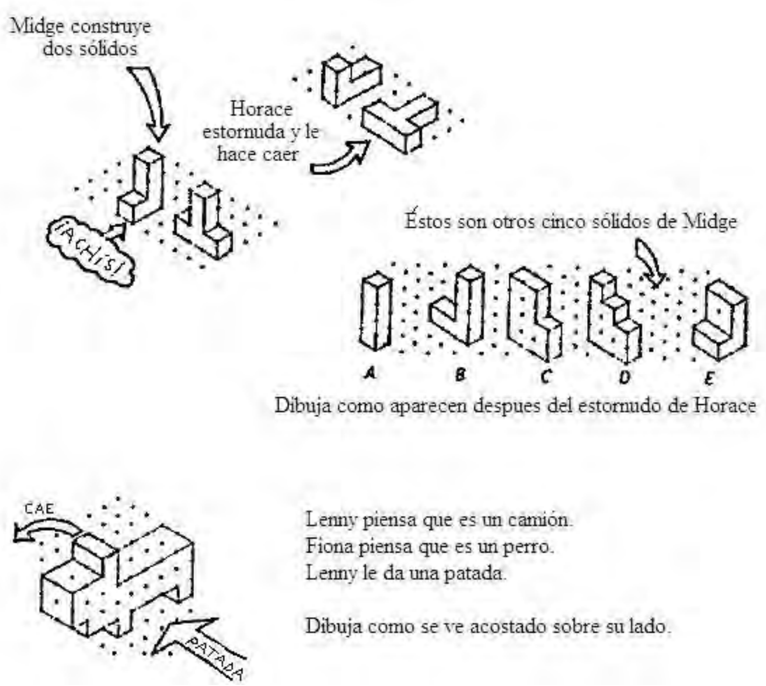


Figura 1.37: Ítem (a): representación de objetos en posiciones diferentes de la dada (según Malara, 1998, p.241)

En el segundo ítem (b, Figura 1.38) se proponen dos problemas que involucran la representación de objetos reflejados en un espejo.

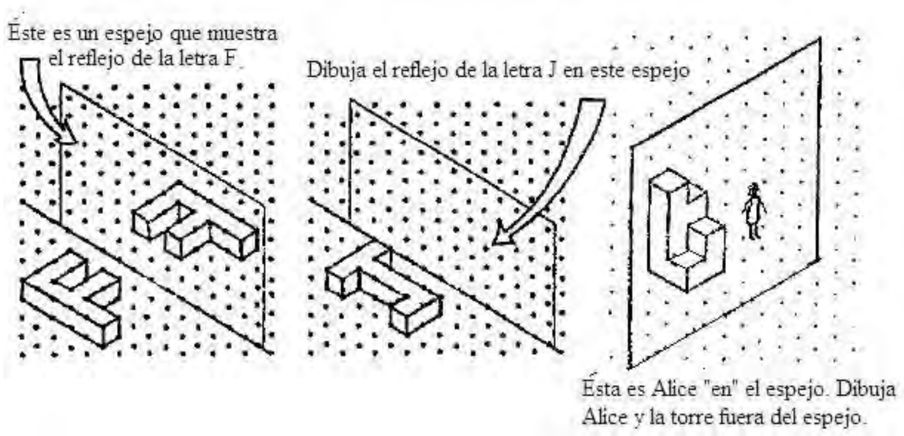


Figura 1.38: Ítem b) Representación de la imagen de objetos en un espejo vertical, (según Malara, 1998, p. 241)

El tercer ítem (c, Figura 1.39) trata problemas en los cuales se requiere completar la representación de algunos objetos en los cuales algunas partes de la superficie externa han sido omitidas.

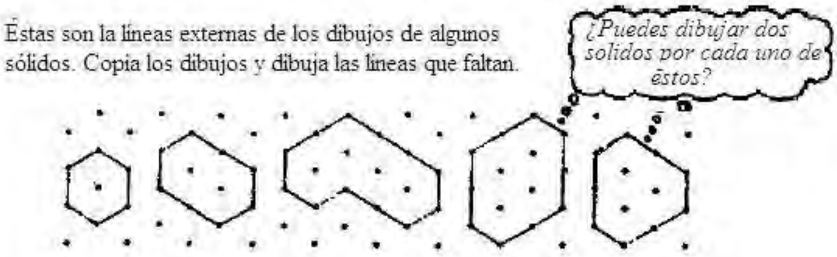


Figura 1.39: Ítem c): Identificación de objetos y completamiento de su representación (según Malara, 1998, p. 242)

En el cuarto ítem (d, Figura 1.40) se presenta un problema que requiere la representación de la vista de un objeto complejo desde determinados puntos de vistas. (Se observe que en este caso el término vista se refiere a una representación en perspectiva y no a una proyección ortogonal).

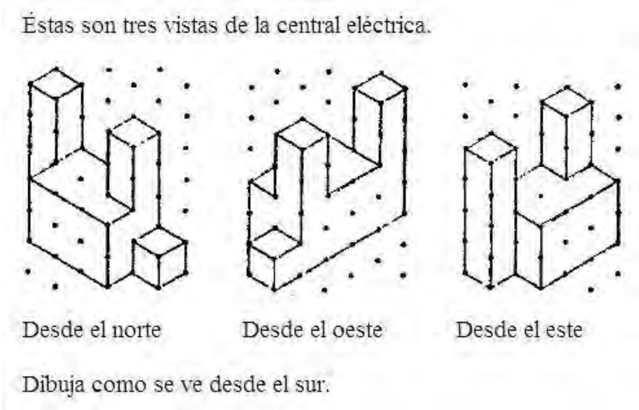


Figura 1.40: Ítem d) Reconstrucción mental de la vista de un objeto y su relativa representación, por (según Malara, 1998, p. 242)

Los coordinadores del proyecto observan que los profesores son reacios a admitir su bloqueo inicial y sus progresivos intentos.

Describimos brevemente las dificultades que tuvieron los profesores en cada ítem.

Dificultades en el ítem a).

- Dificultades con respecto a la representaciones de los objetos D y E y el objeto en forma de perro, justificadas por no estar acostumbrados al uso de papel isométrico y por las peculiares estructuras de los objetos (por ejemplo el objeto D, después la "caída", tiene puntos que representan dos diferentes puntos pertenecientes a diferentes planos y algunos segmentos paralelos aparecen en la representación en la misma línea).

Dificultades en el ítem b).

- Se observan muchas dificultades para representar el objeto en el espejo, debidas a la posición del objeto con respecto al espejo (y no por la forma del objeto). Por ejemplo se representa la figura respecto a un plano de simetría axial, cuyo eje es representado por la intersección del espejo con el plano de la base.

Dificultades en el ítem c).

- Dificultades para imaginar uno o más objetos, también en posiciones no estándares, respetando la única condición de que sus representaciones encajan en el esquema representado.

Dificultades en el ítem d).

- Se observa que ha sido el problema más difícil, por la grande dificultad para coordinar tres diferentes representaciones y resolver el problema.

De esta investigación podemos observar que también profesores de escuela secundaria tienen dificultades para resolver tareas de visualización de objetos tridimensionales representados en el plano, entre las cuales resaltamos la dificultad de interpretar y elaborar correctamente una representación plana del objeto y la dificultad de coordinar las visiones parciales de un objeto.

Refiriéndose a la formación que tienen los profesores en relación con la enseñanza de la geometría de los sólidos, Guillén (2010) afirma que "la mayoría de los profesores no se sienten preparados para dirigir experiencias de descubrimiento, para animar y explorar las ideas geométricas utilizando construcciones, el laboratorio e materiales, para trabajar ideas prácticas" (p.57).

Presmeg (1991), estudiando el papel de la visualización en la enseñanza diaria de profesores de secundaria, concluyó que:

(1) los profesores con fuertes habilidades matemáticas visuales no enseñaban únicamente habilidades visuales a sus estudiantes,

(2) los profesores con habilidades matemáticas visuales medias, enseñaban a sus estudiantes a valorar las habilidades y estrategias visuales, pero sólo como un medio para lograr el fin,

(3) los profesores con débiles habilidades visuales enseñaban a sus estudiantes a ocultar sus capacidades visuales en favor de la memorización y otras habilidades procedimentales y simbólicas.

Battista, Wheatley y Talsma (1982) estudiaron si se puede mejorar las habilidades espaciales en los maestros de escuela primaria en formación inicial con un curso de geometría. Evaluaron, al inicio y al final del semestre, la habilidad de los maestros con un test cuyos ítems únicamente se centraban en la rotación de objetos tridimensionales.

El curso de geometría que fue impartido a lo largo del semestre tenía diferentes clases con actividades espaciales. Por ejemplo, los estudiantes investigaban la simetría de los polígonos manipulando modelos, utilizaban el tangram y otras tareas de teselación del plano. Los resultados muestran que estos tipos de actividades mejoran la habilidad espacial de maestros en formación. Sin embargo, observamos que, en el test, sólo fue evaluada la capacidad de visualizar un objeto que gira en el espacio.

Fernández (2011) centra su trabajo en la evaluación de las habilidades de visualización y razonamiento espacial de futuros profesores de Educación Primaria, por medio de un cuestionario que incluye tareas de geometría plana y tridimensional. La autora determina interesantes tipos de configuraciones de objetos y procesos que ponen en juego los sujetos cuando realizan las prácticas requeridas en la solución de las tareas propuestas e identifica los principales conflictos manifestados por los sujetos.

Observamos que dichas investigaciones se interesan en desarrollar y evaluar conocimientos relativos a la resolución de determinadas tareas de visualización de objetos tridimensionales representados en el plano. Sin embargo, de acuerdo con la literatura de investigación en el campo de formación de profesores, consideramos que dicho aspecto del conocimiento es únicamente un “rasgo” del conocimiento del profesor para la enseñanza del tema. Diferentes autores (Hill, Ball, y Schilling, 2008; Shulman, 1986) destacan el carácter específico del conocimiento que un profesor tiene que tener para la enseñanza de la matemática, que no se puede limitar al conocimiento para resolver determinadas tareas (tanto de nivel elemental como de nivel avanzado), sino tiene que incluir también aspectos especializados y relacionados con la enseñanza del tema.

Un ejemplo interesante de investigación que tiene en consideración diferentes aspectos del conocimiento del profesor es el trabajo de Parzysz (2006). El autor propone un análisis de distintos aspectos de los conocimientos geométricos de los futuros profesores de escuela primaria, de manera particuar estudia las diferentes argumentaciones dadas a las tareas propuestas. Apoyándose en los paradigmas descritos en la sección 2.1.5 observa que, aunque los futuros profesores tienen buenos conocimientos de G2 (definiciones, teoremas, vocabulario, simbolismo) para enseñar en la escuela primaria, no tienen el conocimiento necesario para reconocer que una argumentación de tipo perceptivo y una demonstración rigurosa no se sitúan en el mismo plano, y que las figuras que dibujan no son sino representaciones materiales de objetos teóricos de geometría más avanzada (bachillerato).

En el capítulo 2 describiremos con más detalles el modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor sobre el cual nos apoyamos para la delimitación de las facetas implicadas en la enseñanza y aprendizaje del tema que queremos estudiar.

2.5. CONCLUSIONES DE LAS INVESTIGACIONES PREVIAS

Este primer estudio bibliográfico nos ha permitido identificar y organizar los elementos de significado relacionados con la visualización espacial en geometría, a nivel epistémico, cognitivo e instruccional. El estudio de la naturaleza de los objetos geométricos y sus diferentes representaciones planas nos ha llevado al análisis de los procedimientos involucrados en la interpretación de las diferentes representaciones planas. Éstos, junto a las habilidades definidas de "visualización espacial" por los autores, nos ha permitido considerar la habilidad de "leer" una representación bidimensional de un objeto sólido como parte de la visualización espacial, puesto que para interpretar y producir de forma correcta una representación plana de un objeto tridimensional se requiere, una buena capacidad de visualización, que permita asociar la representación bidimensional al concepto geométrico correspondiente, y viceversa.

La identificación de las diferentes etapas y niveles en la compresión de aspectos relacionados con la visualización de objetos tridimensionales y las dificultades y errores encontradas por algunos investigadores en alumnos enfrentados a determinadas tareas de visualización espacial nos permiten tener una referencia al momento del análisis de las respuestas del estudio de evaluación (capítulo 5).

Este primer análisis resalta la importancia que tiene la VOT en la enseñanza/aprendizaje de la geometría espacial, de manera especial en relación con la interpretación y producción de diferentes representaciones planas. Creemos que un profesor de escuela primaria además de tener buena visualización espacial, tenga el conocimiento para desarrollarla en sus alumnos, lo que incluye la capacidad de dibujar e interpretar de forma clara y correcta diferentes tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales. Para una posible incorporación real en la enseñanza de dichos aspectos es primero necesario introducir y dar valor al tema en la formación de maestros. De aquí nuestro propósito de evaluar los conocimientos que los futuros maestros tienen sobre algunos aspectos relevantes de la visualización espacial y su enseñanza.

En el análisis de las investigaciones previas relacionadas con el tema, no hemos encontrado un cuestionario comprensivo que evaluase adecuadamente los conocimientos de los profesores de educación primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. Los cuestionarios utilizados por la mayoría de los investigadores están elaborados con el objetivo de analizar los procedimientos y las estrategias puestas en juego en la resolución de tareas por parte de niños y adolescentes. Las pocas investigaciones con profesores se centran en aspectos aislados del tema y en evaluar principalmente las capacidades de resolución de determinadas tareas.

Sin embargo, las tareas descritas en las investigaciones nos sirven como punto de partida para elaborar un primer banco de ítems y clasificar las situaciones-problemas principales relacionadas al tema, lo que se presenta en la siguiente sección.

3. TAREAS EMPLEADAS EN LAS INVESTIGACIONES

3.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado abordamos de una manera “más operativa” el tema de la visualización en el contexto de la geometría espacial, identificando y clasificando los principales tipos de tareas sobre la visualización de objetos tridimensionales. Para lograr este objetivo analizamos las tareas presentadas en las diferentes investigaciones sobre el tema en el campo de la educación matemática y de la psicología. Como ya hemos observado anteriormente, para limitar nuestro estudio, prescindimos de las tareas que utilizan software de geometría dinámica.

3.2. CLASIFICACIÓN Y EJEMPLOS DE TAREAS

En los capítulos precedentes hemos descritos las investigaciones que estudian las estrategias, los conocimientos, las habilidades, las dificultades, puestas en juego al resolver diferentes actividades de visualización de cuerpos tridimensionales. En este apartado describimos y clasificamos las tareas presentadas en los trabajos centrados en este tópico, pertenecientes a cuestionarios evaluativos o a propuestas instruccionales. Esta sección sintetiza el trabajo Gonzato, Fernández y Godino (2011).

En la revisión de la literatura, observamos que frecuentemente los trabajos que utilizan cuestionarios sólo describen los ítems de forma general sin presentarlos en la forma original. Nos centramos en el análisis de las tareas incluidas en aquellas investigaciones relacionadas con este tema que incluyen una parte experimental o evaluativa, en las que se describen los cuestionarios o las tareas empleadas.

En el estudio de los trabajos no se encontró una clasificación general de tareas de visualización y orientación de objetos tridimensionales.

Fernández (2011, pp. 39-42) presenta un exhaustivo elenco de tipos de tareas en las que intervienen contenidos de la geometría espacial y diferentes investigaciones que abordaron dichos contenidos en el contexto de la visualización y razonamiento espacial. En particular , por lo que se refiere a la geometría del espacio, identifica 34 tipos de tareas, que se centran en los siguientes aspectos: representaciones planas de objetos tridimensionales, desarrollos planos de cuerpos espaciales, clasificación de figuras, comprensión de conceptos y propiedades, transformaciones geométricas y validez de la demostración o argumentación visual. Guillén (2010) motiva y sugiere diferentes contextos de uso de los sólidos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría, proponiendo interesantes actividades: generar representaciones tridimensionales de los sólidos, cortar, seccionar sólidos, reflexionar sobre analogías y diferencias entre sólidos, descubrir propiedades, proponer nuevas definiciones de familias de sólidos, contar de manera estructurada el número de caras, vértices, aristas y otros elementos de los poliedros, descubrir relaciones numéricas entre dichas cantidades, generalizarlas y expresarla simbólicamente; manipular sólidos, juntar, descomponer y recomponer; trabajar con diferentes representaciones planas de los sólidos (fotografías, desarrollos planos, vistas ortogonales, dibujos en perspectiva,…), explorar- reflexionar sobre fenómenos naturales presentes en la realidad, como las sombras de los sólidos, descubrir propiedades y relacionarlas con propiedades geométricas, pasar del mundo real a las matemática (proponer modelos, matematizar) y viceversa (aplicar modelos).

Siguiendo a Senechal (1990) observamos que las tareas propuestas por los investigadores tienen tres objetivos principales: "El descubrimiento de las similitudes y las diferencias entre objetos, el análisis de la forma de los componentes y el reconocimiento de las formas en diferentes representaciones". Estos objetivos definen tres tópicos: la identificación y clasificación de las figuras, el análisis de las formas y la representación y visualización de las figuras. Nuestro trabajo pretende desglosar ulteriormente este tercer aspecto.

Analizando las investigaciones anteriores observamos que las tareas sobre visualización de objetos tridimensionales presentadas tienen en cuenta tres parámetros: la acción principal requerida para resolver la tarea, el estímulo inicial presentado y el tipo de repuesta solicitada. Describimos brevemente estos tres parámetros. Destacamos cuatros grandes categorías de acciones principales involucradas en las tareas que se presentan en las investigaciones:

- Coordinar e integrar vistas de objetos (Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988; Diezmann y Lowrie, 2009; Guay y McDaniel, 1977; Gutiérrez, 1996b ; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Malara, 1998; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009;)
- Rotar un objeto en el espacio (Battista, Wheatley y Talsma, 1982; Gorgorió, 1996 y 1998)
- Plegar y desplegar desarrollos (Arpinati y Pellegrino, 1991; Cohen, 2003; Diezmann y Lowrie, 2009; Fischbein, 1993; Mariotti, 1997; Mesquita, 1992),
- Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional (Battista y Clements,1996; Bishop, 1983; Lappan, Phillips y Winter, 1984; Pallascio, Allaire y

Mongeau, 1993)

Observamos que las acciones pueden aparecer de forma explícita o implícita en el enunciado de la tarea

Otro parámetro que consideramos en la clasificación propuesta de las tareas es el estímulo inicial de la tarea. El estímulo inicial se refiere a la presencia o no, en la descripción de la tarea, de un modelo tridimensional del objeto (el objeto físico), o de una de sus representaciones. Observamos que el modelo, así como el observador, puede ser fijo o móvil. La posibilidad de movimiento del objeto (o de desplazamiento del sujeto) permite al sujeto observar el objeto desde cualquier punto de vista. En el caso que el sujeto no tenga a disposición un modelo tridimensional del objeto ni una de sus representaciones planas (sino solo un estimulo verbal), el sujeto tendrá que referirse a un modelo observado precedentemente, imaginar un posible modelo o representación del objeto a partir de los datos del problema, o bien trabajar sin una representación del objeto. La presencia de una representación plana del objeto involucra la interpretación, por parte del sujeto, de los diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos. Aunque en el estimulo inicial siempre se presenta una componente verbal, en la clasificación propuesta nos centramos en el tipo de representación del objeto.

En cuanto al parámetro "tipo de repuesta solicitada" diferenciamos entre:

- Construcción: si se requiere la construcción del objeto tridimensional, con diferentes tipos de material (papel, bloques multicubos,…)
- Dibujo: si se requiere una representación plana del objeto tridimensional.
- Identificación: si se requiere identificar la respuesta correcta entre más opciones.
- Verbal: si se requiere una respuesta verbal /numérico-simbólica (que no exija ninguna de los anteriores tipos de repuestas).

Con respecto a la clasificación propuesta por Gorgorió (1996), en la cual distingue las tareas de "construcción" y de "interpretación", observamos que, con nuestro parámetro del tipo de respuesta, queremos distinguir dos tipos distintos de tareas de "construcción": la construcción del objeto físico y el dibujo de una representación plana del objeto; mientras que llamamos de identificación las tareas definidas "de interpretación" por la autora[6].

[6] Gorgorió (1996), centrándose en actividades de rotación (tipo de acción), clasificó las tareas en dos categorías: tareas de "construcción", si la respuesta requiere la construcción del objeto o su dibujo, y tareas "de interpretación", que requieren que el estudiante reaccione ante una acción geométrica ya cumplida.

Presentamos en la Tabla 1.6 una síntesis de la clasificación de las tareas propuesta.

Tabla 1.6: *Propuesta de clasificación de las tareas de visualización de objetos tridimensionales.*

Acción principal	**Estimulo inicial**	**Tipo de respuesta**
1. Coordinar e integrar vistas de objetos 2. Rotar un objeto tridimensional 3. Plegar o desplegar desarrollos 4. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional	1. Modelo (y/o sujeto) móvil, manipulable 2. Modelo (y sujeto) fijo, no manipulable 3. Objeto representado en el plano 4. Ausencia de modelo y de representación plana	1. Construcción 2. Dibujo 3. Identificación 4. Verbal/numérica 5. Otras

Podríamos también considerar el tipo de objeto: geométricos, multicubos, cotidiano,.., el tipo de representación plana utilizado (perspectiva, por proyecciones ortogonales codificadas,…) y el tamaño del espacio: micro (objeto solo), meso (situación espacial que incluye la disposición de más objetos).

Observamos que cuando se trabaja con un modelo 3D fijo (sin posibilidad de manipularlo), con una representación plana del objeto, o en ausencia de una representación cualquiera las acciones requeridas serían "mentales", como imaginar rotar un objeto, cambiar el punto de vista,…

Además hacemos constar que una tarea puede involucrar más acciones y si la respuesta es de dibujo puede necesitar de diferentes técnicas (dibujo en perspectiva caballera, en proyección, etc.).

Describimos ahora algunos ejemplos prototípicos de actividades encontrados en la literatura, clasificándolos según los parámetros establecidos en la Tabla 1.6, y organizados en sub-apartados dependiendo de la acción principal.

3.2.1. Coordinar e integrar vistas de objetos

En la sección 2.1.4 hemos descrito los procedimientos de coordinación e integración de las vistas descritas por Battista y Clements (1996).

Como hemos descrito en la sección 2.1.2 si nos centramos en tareas que se apoyan en representaciones planas del objeto, es importante distinguir dos grupos de proyecciones de objetos tridimensionales: las perspectivas axonométrica, caballera y con puntos de fuga (que llamaremos representaciones de tipo A), de una parte, y las vistas, las vistas codificadas y el sistema diédrico (que llamaremos representaciones de tipo B), de otra parte. Si las primeras nos dan una percepción global del objeto (aun deformando algunas de sus características físicas), las segundas necesitan una reorganización de la información para poder visualizar el objeto en su totalidad. Esta reorganización de la información depende de la representación del objeto que tenemos.

Por ejemplo, en el caso de la representación de un objeto en el sistema diédrico, para reconstruir el objeto global, además de conocer el lenguaje gráfico y las propiedades del sistema de representación, se necesita coordinar las vistas de un determinado modo.

En seguida presentamos diferentes tipos de actividades que tienen como acción principal la coordinación e integración de las vistas (mientras los otros parámetros varían), los codificamos según nuestra clasificación y los clarificamos con algunos ejemplos prototípicos de tareas presentadas en las investigaciones.

<u>1. Desde un objeto tridimensional hasta una representación de tipo B</u>

Ejemplo 1 (Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988, p. 56):

En la Figura 1.41 se muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-arriba-derecha. ¿Cuál de las figuras, A, B, C, D, E, correspondería a su vista desde atrás?

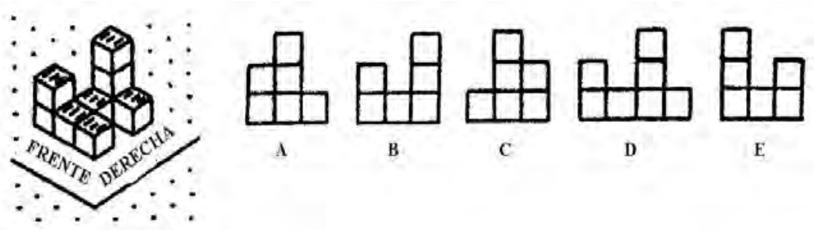


Figura 1.41: Composición de cubos en perspectiva isométrica (según Ben-Chaim, Lappan y Houang, 1988, p. 56).

Observamos que el estímulo inicial de esta tarea son las representaciones planas (proyecciones isométricas y proyecciones ortogonales) y el tipo de respuesta es de identificación.

Acción principal: coordinar e integrar vistas.

Estímulo inicial: objeto representado en el plano.

Tipo de respuesta: identificación.

Código: (1, 3, 3)

Ejemplo 2 (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996, p.178):
Se entrega el siguiente dibujo de un estudio televisivo en el cual aparece una cantante y cuatro cámaras. La cámara A estás enfrente a la cantante, la cámara B mira al cantante desde la derecha, la cámara C desde atrás y la cámara D desde la izquierda. Se entrega también un dibujo de los cuatros monitores (relativos a las cámaras) en el estudio del director (Figura 1.42). Los estudiantes tienen que jugar el papel del director y reconocer cuál monitor corresponde a cuál cámara.

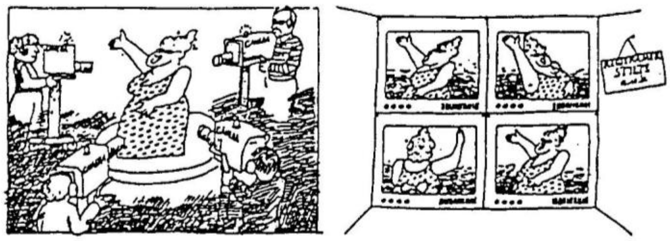


Figura 1.42: Tarea relacionada con el espacio y las formas, categoría "Cómo observar" (según Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996, p. 180).

Observamos que el estimulo inicial de esta tarea son las representaciones planas (proyecciones isométrica y proyecciones ortogonales en el 3a y dibujo aproximado en perspectiva con punto de fuga y proyecciones ortogonales en el 3b) y el tipo de respuesta es de identificación.

<u>2. Desde una o más representaciones de tipo B hasta un posible objeto tridimensional</u>

Ejemplo 3 (Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009, p. 387):
Construye una composición de cubos que tenga las vistas ilustradas en la Figura 1.43.

Vista de frente Vista de perfil Vista desde arriba

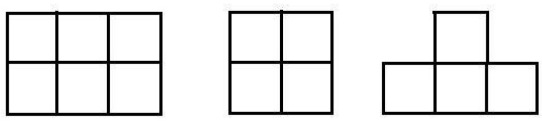


Figura 1.43: Vistas ortogonales de una composición de cubos (según Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009, p. 387).

Acción principal: coordinar e integrar vistas.
Estímulo inicial: objeto representado en el plano.
Tipo de respuesta: construcción.

Código: (1, 3, 1)

Variando el estimulo inicial (poniendo un objeto físico u otro tipo de representación plana), o bien el tipo de respuesta que se pide se pueden obtener interesantes variaciones de la tarea.

Ejemplo 4 (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996, p.178):
“Algunos objetos son puestos sobre una mesa y se entregan a los estudiantes tres fotos de dichos objetos. Cada fotografía está tomada desde una dirección diferente y el objetivo de la cámara está siempre al nivel de la mesa. Los estudiantes tienen que identificar los puntos en los cuales estaba el fotógrafo cuando tomó cada una de las fotografías.”

Acción principal: coordinar e integrar vistas.

Estímulo inicial: modelo (y/o sujeto) móvil manipulable y objeto representado en el plano.

Tipo de respuesta: identificación.

Código: (1, 1/3, 3).

<u>3. Relación entre dos representaciones de tipo B</u>

Ejemplo 5 (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996, p. 187):

“En seguida se ilustra la vista desde arriba (Figura 1.44). Es un edificio formado por cubos apilados. El número presente en cada cuadrado define la cantidad de cubos presentes. Dibuja las vistas desde dos lados.”

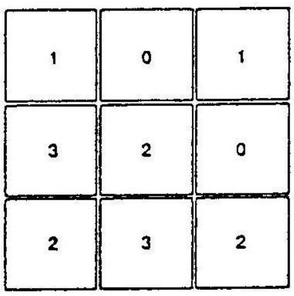


Figura 1.44: Vista codificada superior de un edificio formado por cubos (según Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996, p. 187).

Acción principal: coordinar e integrar vistas.

Estímulo inicial: objeto representado en el plano.

Tipo de respuesta: dibujo.

Código: (1, 3, 2)

Observamos que en estas actividades se aplican técnicas para representar un objeto o un espacio, y al mismo tiempo se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos.

3.2.2. Rotar un objeto en el espacio

Esta acción está relacionada con la habilidad de rotar un objeto tridimensional dado, alrededor de un eje imaginario.

Observamos que rotar un objeto es equivalente a cambiar mentalmente de perspectiva (imaginarse en otra posición con respecto al objeto). Para diferenciar las tareas descritas en el apartado anterior con tareas de rotación del objeto, definimos estas últimas como tareas donde el enunciado pide explícitamente rotar el objeto (si el objeto está presente físicamente) o tareas donde las representaciones planas del objeto antes de la rotación y después de la rotación son del mismo tipo (generalmente en perspectiva).

Gorgorió (1996, 1998), estudia las estrategias puestas en juego al resolver tareas de rotación de cuerpos tridimensionales por alumnos de escuela secundaria y presenta algunas interesantes tareas (Ejemplos 6 y 7) en las cuales la acción principal es la rotación del objeto tridimensional, el objeto es representado en el plano y el tipo de respuesta es de identificación.

1. Identificar la posición de un sólido, representado en el plano, después de una determinada rotación

Ejemplo 6 (Gorgorió, 1998, p.215):

Entre las siguientes figuras (Figura 1.45), hay tres que representan el mismo objeto en diferentes posiciones; mientras una representa un objeto que, incluso cambiando su posición, es diferente de los otros tres. ¿Cuál es, A, B, C o D?

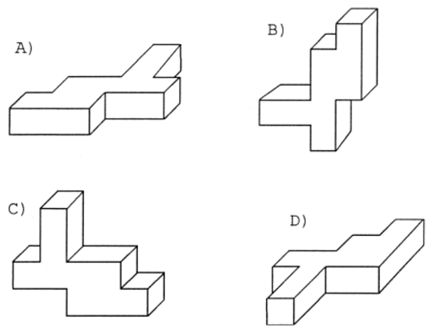


Figura 1.45: Tarea de rotación del objeto (según Gorgorió, 1998, p.215).

Acción principal: rotar un objeto tridimensional.

Estímulo inicial: objeto representado en el plano.

Tipo de respuesta: identificación.

Código: (2, 3, 3)

Ejemplo 7 (Gorgorió, 1994, p.123):

Los dados dibujados en la figura adjunta (Figura 1.46) tienen las caras colocadas de diferentes maneras. Entre las siguientes parejas de dados hay una en la que si se hace girar uno de los dos dados (éste) se coloca en la misma posición que el otro. ¿Cuál de las parejas, A, B, C o D, cumple esa condición?

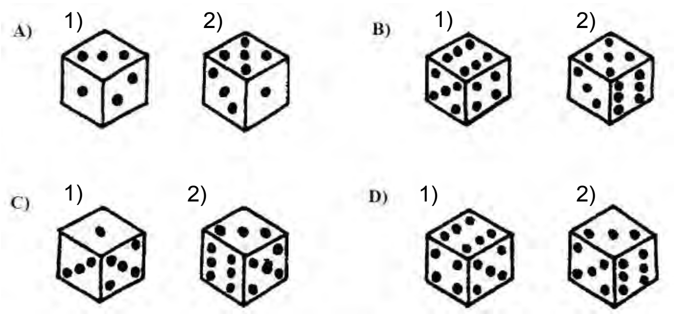


Figura 1.46: Parejas de dados (según Gorgorió, 1994, p.123).

Observamos que una forma de simplificar la tarea propuesta en el ejemplo 6 es mediante el uso de objetos materiales en lugar de sus representaciones planas, lo que supone un cambio en el estimulo inicial de la tarea.

3.2.3. Plegar y desplegar desarrollos

La acción de plegar y desplegar desarrollos puede ser realizada en diferentes tipos de tareas y el tipo de respuesta requerida puede variar el procedimiento.

Observamos que en el caso de desarrollos complicados, para reconstruir el sólido, no se requiere únicamente ver las figuras sino también modificar su posición, imaginar la transformación de las posiciones, imaginar el efecto de determinadas transformaciones sobre las figuras adyacentes.

Fischbein (1993, en los comentarios a su trabajo), Mariotti y Fischbein (1997), Mariotti (1997) y Mezquita (1992) describen interesantes tipos de actividades relativas a la acción de plegar y desplegar desarrollos.

Resumiendo las propuestas de dichos autores, presentamos algunos ejemplos prototípicos de las respectivas actividades, y los codificamos según nuestra clasificación.

1. *"Dibujar la imagen obtenida desarrollando un cuerpo geométrico" (Fischbein, 1993)*

Ejemplo 8 (Bishop, 1983, p. 187-188):

Dibuja la figura que puedes cortar en el papel, y plegar, para formar el siguiente objeto (de seis caras, Figura 1.47).

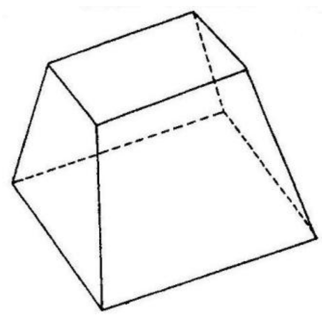


Figura 1.47: Objeto con seis caras (según Bishop, 1983, p. 187-188).

Acción principal: plegar o desplegar desarrollos

Estímulo inicial: objeto representado en el plano.

Tipo de respuesta: dibujo.

Código: (3, 3, 2).

2. *"Identificar el cuerpo geométrico obtenido a partir de un desarrollo plano" (Fishbein, 1993).*

Acción principal: plegar o desplegar desarrollos

Estímulo inicial: objeto representado en el plano.

Tipo de respuesta: identificación o verbal

Código: (3, 3, 3/4).

La respuesta a este tipo de tarea puede ser justificada con la siguiente instrucción:

3. "Indicar en el desarrollo las aristas que se hacen corresponder cuando el objeto tridimensional sea reconstruido" (Fichbein, 1993), o análogamente:

"Identificación de las relaciones entre los elementos de un desarrollo plano del cubo y del cubo" (Mesquita, 1992).

Un ejemplo que requiere implícitamente dicha acción es el siguiente:

Ejemplo 9 (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996, p.188-189):

"La mitad inferior de un cubo ha sido pintada de negro. En cada uno de los siguientes cuatros desarrollos (Figura 1.48) la cara inferior del cubo ya está pintada de negro. Los estudiantes tienen que terminar de pintar los desarrollos con la correcta coloración negra".

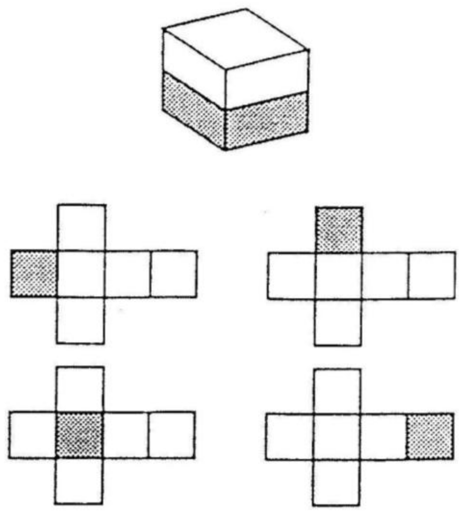


Figura 1.48. Cubo y cuatro desarrollo de un cubo (según Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996, p.188-189).

Acción principal: plegar o desplegar desarrollos

Estímulo inicial: objeto representado en el plano.

Tipo de respuesta: simbólica, identificación de relaciones (otras)

Código: (3, 3, 5).

4. "Identificar los criterios de reconocimiento de un desarrollo plano: el *reconocimiento de las condiciones necesarias para establecer si una configuración de seis caras iguales puede conducir a un cubo"*

Acción principal: plegar o desplegar desarrollos

Estímulo inicial: objeto representado en el plano.

Tipo de respuesta: verbal

Código: (3, 3, 4).

La siguiente tarea muestra una forma de operativizar la consigna.

Ejemplo 10 (Mariotti y Fischbein, 1997):

"Dada una colección de dibujos (Figura 1.49) reconocer cuáles son desarrollos correctos y corregir los desarrollos incorrectos" (tipo de respuesta: identificación).

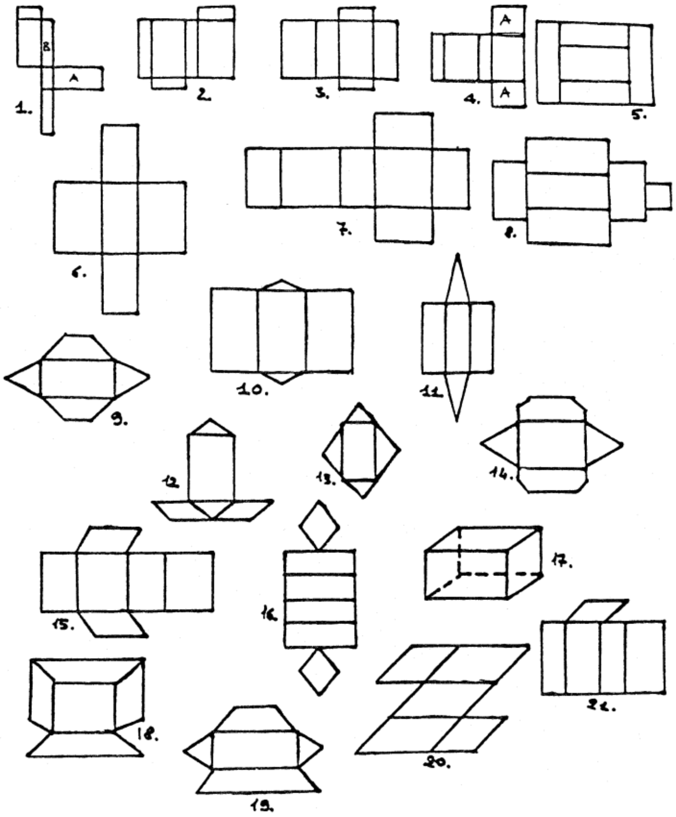


Figura 1.49: Colección de dibujos, posibles desarrollos y no desarrollos (según Mariotti y Fischbein, 1997).

3.2.4. Componer y descomponer en partes

La acción "Componer y descomponer en partes" incluye los siguientes sub-procedimientos principales:

- Dadas dos o más piezas componerlas para formar un sólido, o viceversa

- Dado el sólido (o una de sus representaciones) descomponerlo en dos o más partes (Lappan, Phillips y Winter, 1984)
- Identificar las secciones de un sólido relacionadas con determinados cortes (Veloso, 1993)
- Dado un sólido contar las unidades de volumen que lo componen (Battista y Clements, 1996; Bishop, 1983)

La acción "Componer y descomponer en partes" está presente en diferentes tipos de tareas encontradas en las investigaciones.

En Lappan, Phillips y Winter (1984) se presentan diferentes tareas que tienen como estimulo inicial una representación plana perspectiva isométrica del objeto.

1. Dadas dos o más piezas tridimensionales componerlas para formar un determinado sólido.

Acción principal: componer y descomponer en partes.

Estímulo inicial: modelo (y/o sujeto) móvil, manipulable.

Tipo de respuesta: construcción.

Código: (4, 1, 1).

Ejemplo11:

Componer las siguiente siete piezas de madera para formar un cubo (puzle tridimensional SOMA, inventado por Piet Hein y compuesto por siete policubos que, colocado correctamente forman un cubo 3x3x3, Figura 1.50).

Figura 1.50: Puzle tridimensional SOMA.

2. Dado un sólido compuesto por dos o más partes representar su estructura.

Ejemplo 12 (Gaulin, 1985, p.55-56):

"Después de una actividad exploratoria sobre el puzle SOMA, se muestran a los estudiantes cubos SOMA ya reconstruidos y se pregunta: "Supón que después de mucho trabajo has conseguido finalmente componer las siete piezas y formar un cubo. ¿Cómo puedes anotar tu solución sobre un papel para que se pueda fácilmente reconstruir el cubo en cualquier momento que se desee?"

Acción principal: componer y descomponer en partes.

Estímulo inicial: modelo (y/o sujeto) móvil, manipulable.

Tipo de respuesta: dibujo.

Código: (4, 1, 2).

3. Dada la representación de dos o más piezas tridimensionales componerlas para formar un determinado sólido, o viceversa, dada la representación del sólido descomponerlo en dos o más partes.

Ejemplo 13 (Lappan, Phillips y Winter, 1984):

"Juntando dos piezas de un puzle se pueden construir nuevos sólidos, como se muestra en el ejemplo. Cada uno de los siguientes sólidos se forma al juntar estas dos piezas. Para cada uno, muestra cómo se construye, rayando una de las piezas que lo compone" (Figura 1.51).

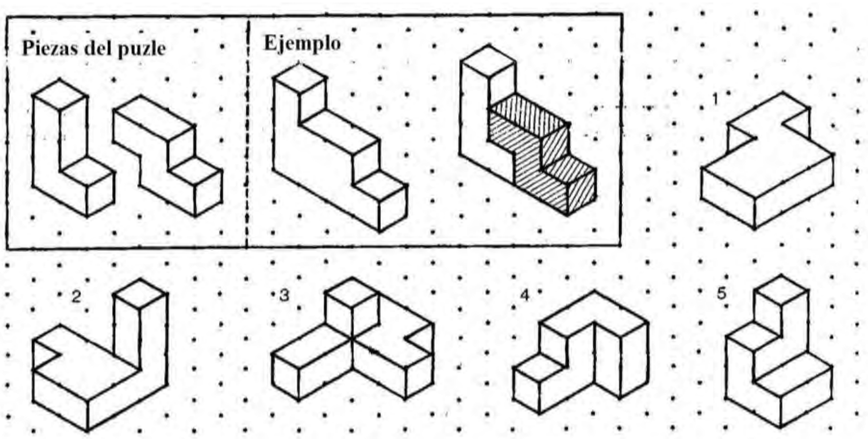


Figura 1.51: Sólidos formados por dos piezas (según Lappan, Phillips y Winter, 1984).

Acción principal: componer y descomponer en partes

Estímulo inicial: objeto representado en el plano.

Tipo de respuesta: dibujo

Código: (4, 3, 2).

4. Identificar las secciones de un sólido relacionadas con determinados cortes.

Acción principal: componer y descomponer en partes

Estímulo inicial: Ausencia de modelo y de representación plana

Tipo de respuesta: Identificación

Código: (4, 4, 3).

Ejemplo 14 (Gorgorió, 1994, anexo 7):

“Un plano corta un cubo de manera que es paralelo a una arista del cubo, pero que no es paralelo a ninguna cara del cubo y no contiene ningún vértice del cubo. ¿Cuál de las siguientes formas describe mejor la sección obtenida?

a) Cuadrado
b) Rectángulo
c) Romboide
d) Un triangulo isósceles”

5. Dado un sólido representado en el plano contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices,…)

Acción principal: componer y descomponer en partes

Estimulo inicial: objeto representado en el plano.

Tipo de respuesta: verbal

Código: (4, 3, 4).

Ejemplo 15 (Bishop, 1983, p. 187):

“En la siguiente figura (Figura 1.52) se presenta un paralelepípedo formado por cubitos. Si el exterior del paralelepípedo es pintado de rojo, ¿Cuántos cubos tienen una sola cara pintada de rojo?”

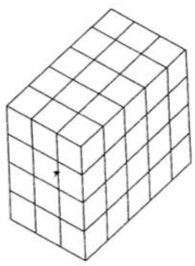


Figura 1.52: Paralelepípedo formado por cubitos (según Bishop, 1983, p. 187)

Ejemplo 16 (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996, p. 190-191):

“Un ladrón logró abrir una caja fuerte conteniente lingotes de oro. Esto es lo que vio. ¿Cuántos lingotes hay en la caja fuerte?” (Figura 1.53).

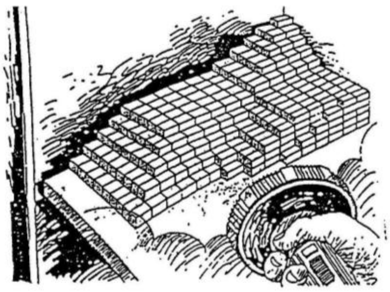


Figura 1.53. Lingotes de oro apilados (según Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996, p. 190-191).

3.3. CONCLUSIONES

La clasificación propuesta nos permite catalogar las principales tareas sobre VOT empleadas en las investigaciones y centrar la atención en las variables que las caracterizan. Los ejemplos presentados cubren las diferentes variables identificadas en la clasificación propuesta.

Esta clasificación no pretende ser exhaustiva por lo que se refiere a las tareas en el campo de la visualización espacial en general. Por ejemplo, se observe la ausencia de tareas relativas a la generación de cuerpos de revolución, muy poco tratadas en la literatura. Consideramos, sin embargo, que rotar (mentalmente) una figura plana alrededor de un eje, con el objetivo de engendrar cuerpos de revolución, es un importante procedimiento que involucra la visualización espacial.

Creemos que, en la enseñanza del tema, sea importante proponer una secuencia de actividades que proporcionen diferentes estímulos iniciales, representaciones físicas (modelos tridimensionales y objetos del entorno) y distintas representaciones planas de objetos tridimensionales, que permita a los alumnos relacionar espacio y plano de forma más compleja.

Dada la amplitud del tema, para nuestro estudio de evaluación necesitamos elegir sólo determinados aspectos de la VOT. La clasificación propuesta nos permite tener criterios para seleccionar determinadas tareas pertinentes para nuestro estudio: nos centraremos únicamente en aquellas tareas que presentan como estimulo inicial una representación plana del objeto tridimensional y que requieren una respuesta abierta, gráfica o bien verbal (excluimos o adaptamos las tareas de identificación).

Observamos que las actividades utilizadas en las investigaciones han sido principalmente propuestas a estudiantes de escuela secundaria y bachillerato. Consideramos dicho banco de ítems un material potencial para evaluar aspectos operativos del conocimiento ampliado de los futuros profesores.

CAPÍTULO 2:
MARCO TEÓRICO, PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

1. INTRODUCCIÓN

La síntesis realizada en el Capítulo 1 sobre la visualización de objetos tridimensionales en geometría nos sugiere la necesidad de aplicar herramientas teóricas para interpretar y organizar la información disponible y plantear nuestro problema de investigación.

En este capítulo presentamos primeramente el marco teórico en que basamos nuestro trabajo, conocido como "enfoque ontosemiótico" (EOS) de la cognición y la instrucción matemática, que ha sido desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Describimos sus características generales y las nociones y herramientas que utilizaremos en nuestra investigación. Su aplicación al contenido específico nos permitirá aproximarnos a una visión ontosemiótica de la visualización en educación matemática, facilitando la síntesis y organización de los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el tema.

A partir de dicha síntesis surge de forma natural la necesidad de abordar la cuestión de la evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros maestros sobre el tema. Planteamos entonces el problema de investigación resaltando su interés para la didáctica de la matemática en la línea de investigación sobre formación de profesores de matemáticas. Finalmente describimos los objetivos y la metodología empleada en las diferentes fases que componen nuestro estudio.

2. ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

2. 1. INTRODUCCIÓN

Nuestro trabajo se basa en el marco teórico del "enfoque ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007).

Un supuesto básico de este marco teórico es que las matemáticas, desde el punto de vista institucional y personal, constituyen un quehacer humano, producido como respuesta a cierta clase de situaciones problemáticas del mundo real, social o de la propia matemática. Como respuesta o solución a estos problemas externos e internos, los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc.), emergen y evolucionan progresivamente. Las acciones de las personas deben ser consideradas, por tanto, como la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas, de acuerdo con las teorías constructivistas Piagetianas. Se asume por tanto una concepción pragmatista – antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico).

Las matemáticas crean un lenguaje en el que se expresan las situaciones problemas y sus soluciones. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos. Así mismo, las relaciones entre objetos matemático y procesos de los cuales emergen (representación, argumentación, generalización, ...) forman configuraciones, relativas a los situaciones –problemas que motivan la actividad matemática. De esta manera, el EOS propone un modelo epistémico – cognitivo de análisis de la práctica matemática con grandes posibilidades descriptivas y explicativas de la misma. Se supera de este modo una concepción restrictiva de la matemática reducida a los componentes conceptuales y procedimentales.

Por lo que se refiere al componente instruccional, se modeliza la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales (Godino, Contreras y Font, 2006). Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando unos recursos materiales.

En los siguientes apartados describimos con mayor detalle algunas nociones y herramientas propuestas por el EOS que utilizaremos a los largo de nuestra investigación. Primeramente presentamos la noción de significado de referencia didáctica (sección 2.2), que nos permitirá enseguida interpretar y organizar los elementos de significados destacados en el capítulo 1. Luego describimos los objetos matemáticos emergentes de las prácticas matemáticas considerando, dos niveles. En el primer nivel (sección 2.3) tenemos aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel (sección 2.4) tenemos una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

El estudio de las interrelaciones entre estos objetos nos permite describir una guía para el reconocimiento de objetos y procesos propuesta por el EOS (sección 2.5), que nos ayudará enseguida en el análisis de las diferentes situaciones-problemas relacionados con la visualización.

Finalmente (sección 2.6) presentamos un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor basado en el "enfoque ontosemiótico" que nos permite destacar y seleccionar determinadas componentes de dicho conocimiento.

2.2. LA NOCIÓN DE SIGNIFICADO DE REFERENCIA

2.2.1. Significados personales e institucionales

En el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función, cubo,…), desde una perspectiva pragmático-antropológica. El significado de un objeto matemático se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones – problemas en las que dicho objeto interviene. Hay que resaltar que dentro de este enfoque los significados personales incluyen conocimiento, comprensión y competencia.

Los sistemas de prácticas se han categorizado teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre la faceta personal de las prácticas y de los objetos que intervienen en las mismas y la faceta institucional (compartida, social) de las mismas. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia. La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, y referenciales). La noción cognitiva de habilidad es interpretada como sistema de prácticas operativas y discursivas que un sujeto realiza para resolver un determinado tipo de situaciones-problemas y de la configuración de objetos y procesos que pone en juego en dichas prácticas.

2.2.2. Facetas de análisis de un proceso de instrucción matemática

Se propone tener en cuenta las siguientes facetas para analizar los procesos de instrucción matemática, constituyendo, así mismo, categorías para analizar y clasificar los conocimientos didácticos sobre la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos:

1. *Epistémica*: Distribución a lo largo del tiempo de enseñanza de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).

2. *Cognitiva*: Desarrollo de los significados personales (aprendizajes).

3. *Mediacional*: Distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

4. *Interaccional*: Secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados.

5. *Afectiva*: Distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

6. *Ecológica:* Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,... que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Estas facetas serán interpretadas y descritas en la sección 2.6 en términos de conocimientos didáctico-matemático del profesor.

2.3. OBJETOS MATEMÁTICOS PRIMARIOS[1]

En consonancia con el interaccionismo simbólico, se considera objeto o entidad matemática "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia", cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas. En la descripción de la actividad matemática nos referimos a muchos y diversos "objetos", los cuales se pueden agrupar según distintos criterios, formando categorías o tipos diversos. El EOS propone las siguientes categorías o tipos de entidades matemáticas, teniendo en cuenta los diversos papeles o funciones desempeñadas por estas entidades en el trabajo matemático: situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentaciones. Consideramos estos tipos como "entidades primarias".

Indicamos a continuación los objetos que se incluyen en cada categoría y las funciones específicas de cada categoría en el trabajo matemático:

(1) Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.

(2) Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios...); son las tareas que inducen la actividad matemática.

(3) Procedimientos (secuencias de acciones del sujeto ante las tareas matemáticas; operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo).

(4) Conceptos, entendidos como entidades que se definen; número, punto, recta, media, función....

(5) Propiedades o atributos de los objetos, entendidas como enunciados proposicionales que requieren una justificación.

(6) Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

Estos seis tipos de objetos, que podemos calificar de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías,

[1] Remitimos al lector a Font, Godino y Gallardo (2013) para una presentación más detallada y fundamentada de la ontología matemática que propone el EOS.

etc.

En la sección 3.2 proponemos una caracterización de los objetos primarios relacionados con la visualización.

2.4. ESPECIFICACIONES CONTEXTUALES Y PROCESOS

El modelo ontológico propuesto se complementa con la consideración de cinco facetas o dimensiones duales, que permite describir y relacionar una variedad de nociones cognitivas propuestas desde diversas teorías. Según las circunstancias contextuales y del juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) en que participan, las entidades matemáticas pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal e institucional, ostensiva y no ostensiva, ejemplar y tipo, elemental y sistémica, expresión y contenido. A continuación explicamos el uso que se da a estos términos:

- La dualidad "personal/institucional". Dependiendo de las circunstancias contextuales y del juego de lenguaje en que nos encontramos, una misma expresión puede referirse a un objeto personal o institucional. Si se trata de la manifestación de un sujeto individual, como la respuesta a una prueba de evaluación, la realización de una tarea escolar por un estudiante, hablamos de objetos personales, al ser portadores, al menos potencialmente, de rasgos idiosincrásicos de sus conocimientos. Por el contrario, si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, consideramos que se ponen en juego objetos institucionales al tener connotaciones normativas o convencionales, o sea, los objetos son usados como referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- La dualidad "unitario/sistémico". En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.
- La dualidad "ostensivo/no ostensivo". Cualquiera de los objetos tiene una faceta ostensiva, esto es perceptible, y otra no ostensiva (objetos mentales, imaginados,…). Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos,

gráficos, …). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. Un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático.

- La dualidad "ejemplar / tipo" (o extensivo-intensivo). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general. En el análisis de la actividad matemática, o de un proceso de estudio matemático particular, debemos precisar en cada circunstancia si nos referimos a un objeto ejemplar (algo que se pone en juego por sí mismo), o a dicho objeto como representante de una clase de objetos, como ejemplar de un cierto tipo, o componente de un sistema. La dualidad extensivo-intensivo se utiliza por tanto para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y cols, 2005).
- La dualidad "expresión/contenido" (o "significante / significado"). La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. Es el estudio de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos (funtivos) que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas. Además, las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro), instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y componencial o cooperativa (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos).

Tanto las dualidades como las configuraciones de objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual lleva a la tipología de procesos indicados en la Figura 2.1.

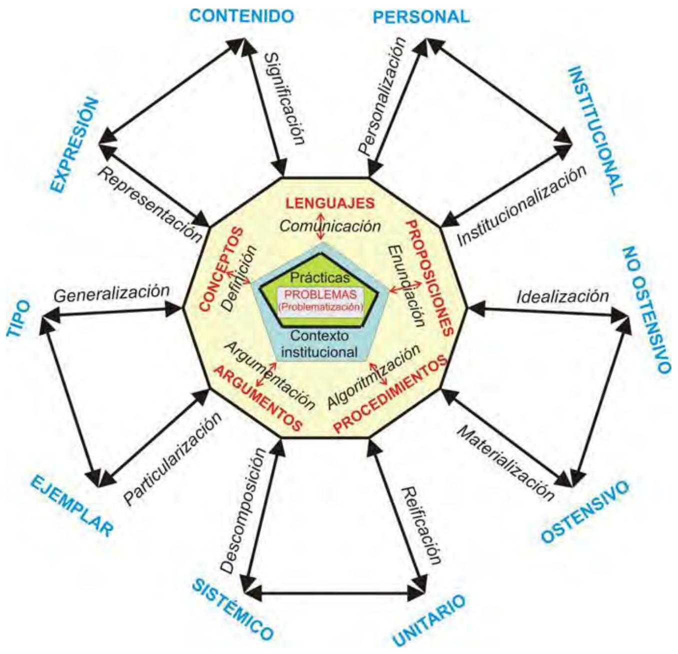


Figura 2.1: Configuración de objetos y procesos (Godino, 2009).

La emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

La consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten delimitar los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008) y de estos con los de reificación y descomposición. Se trata de una delimitación importante que permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática, y por tanto, clarificar la naturaleza del “objeto matemático” usualmente considerado como una entidad abstracta o ideal. En el siguiente apartado proponemos un guía que ayuda a reconocer los objetos y procesos asociados a las dualidades descritas presentes en una práctica matemática.

2.5. GUÍA PARA EL RECONOCIMIENTO DE OBJETOS Y PROCESOS

Para analizar las diferentes situaciones-problemas relacionados a la visualización espacial utilizaremos una herramienta teórica de análisis, la “guía para el reconocimiento de objetos y procesos” (GROP, ver Godino, Gonzato y Fernández, 2010) Esta guía ayuda a analizar los diferentes procesos epistémicos – cognitivos ilustrados en la Figura 2.2, que describimos brevemente a continuación.

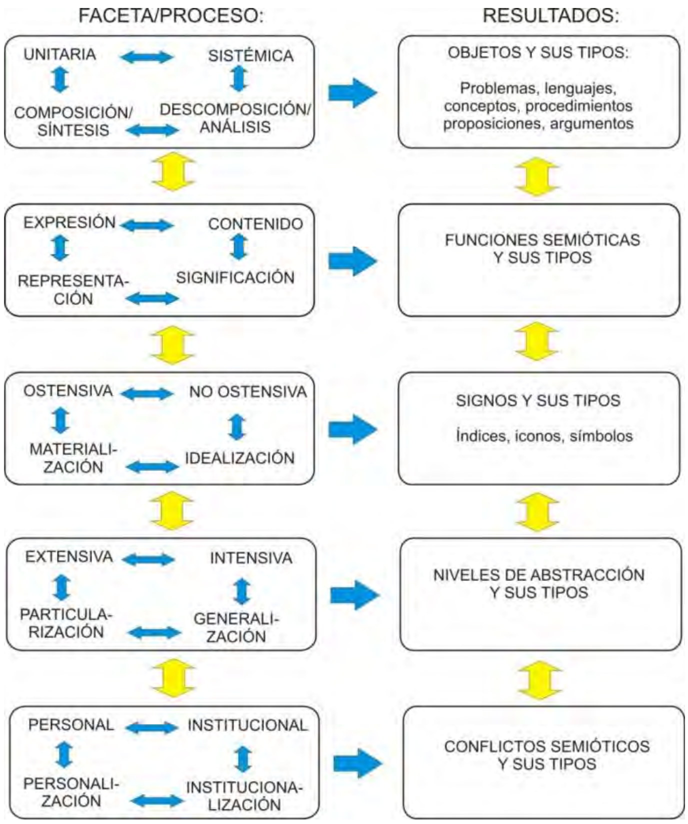


Figura 2.2: Guía para el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos (GROP).

(1) Procesos de descomposición-análisis/composición-síntesis (dualidad unitaria-sistémica). Descomposición del enunciado en unidades semióticas fijando la atención en los elementos lingüísticos claves del texto (faceta sistémica) y composición de las unidades previamente identificadas para el reconocimiento de la puesta en funcionamiento de proposiciones, procedimientos y argumentos (faceta unitaria).

(2) Procesos de representación/significación (dualidad expresión - contenido): descripción de los objetos puestos en juego (lenguaje y conceptos principales).

(3) Procesos de materialización/idealización (dualidad ostensiva - no-ostensiva): la materialización de los objetos ideales (matemáticos) con dibujos, iconos, índices, símbolos.

(4) Procesos de particularización/generalización (dualidad extensiva - intensiva): el uso de casos u objetos particulares para facilitar y permitir un razonamiento sobre el caso general; las posibles generalizaciones y variaciones de la tarea.

(5) Proceso de personalización/institucionalización (dualidad personal-institucional): forma de abordar y justificar la tarea según el marco institucional en que tiene lugar (marco de la geometría euclidiana, contexto empírico,…) y los conflictos de significados que pueden aparecer.

Este diagrama proporciona una guía para el reconocimiento sistemático de los conocimientos puestos en juego en una práctica matemática (la solución de un problema o la realización de una tarea).

En la sección 3.3.4 del capítulo 4, pondremos en función dicha guía para analizar los ítems propuestos en el cuestionario sobre VOT.

2.6. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DEL PROFESOR

El profesor de matemáticas de educación primaria debe tener un cierto nivel de competencia matemática, es decir, conocer y ser capaz de aplicar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los tipos de problemas usualmente abordables en primaria y secundaria. Pero desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje, el profesor debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando los objetos y procesos puestos en juego, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia. Se trata de identificar las variables que intervienen en los enunciados de los problemas y en las configuraciones didácticas de las cuales forman parte.

Ahora bien, un proceso de estudio matemático no queda restringido a las fases exploratorias en las que se formulan conjeturas sobre la solución de los problemas, sino que se componen de configuraciones y trayectorias didácticas donde se articulan los roles docentes y discentes, junto con los conocimientos pretendidos, los significados personales de los estudiantes y el uso de recursos específicos.

La gestión de toda esta complejidad requiere que el profesor de matemáticas desarrolle competencias instrumentales de análisis, complementadas con las competencias que le permitan realizar la síntesis necesaria para valorar los procesos de estudio implementados y tomar decisiones sobre su mejora potencial.

Diferentes investigadores en el campo de la formación y el pensamiento del profesor

(Ball, 2000; Ball, Lubenski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Shilling, 2008; Shulman 1986, 1987) describen modelos sobre el conocimiento didáctico del profesor, en los cuales se articulan diferentes categorías del conocimiento. En Godino (2009) se presenta un análisis de dichas propuestas y se describe un modelo didáctico-matemático del conocimiento del profesor basado en el "enfoque ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), que tiene en cuenta de las diferentes facetas implicadas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos (ver Figura 2.3).

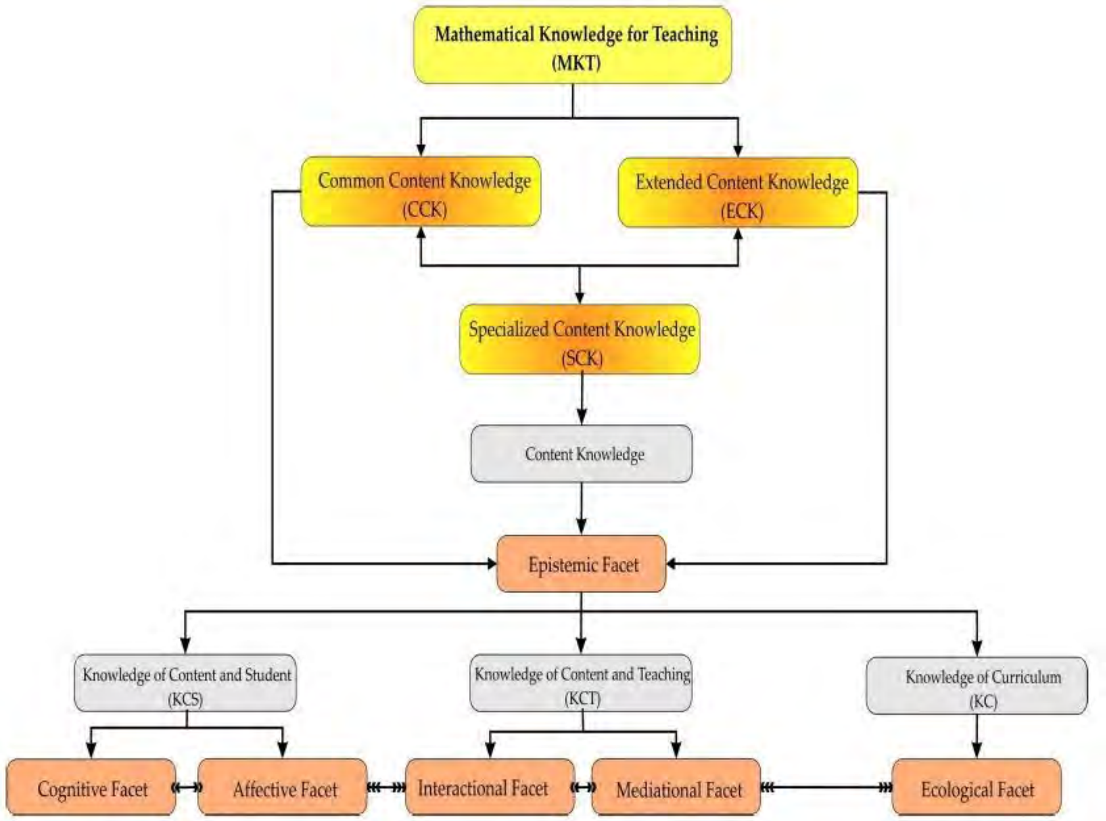


Figura 2.3: Conocimientos didáctico-matemáticos y facetas implicadas en la enseñanza y aprendizaje (figura tomada de Godino y Pino-Fan, 2013)

- El *conocimiento del contenido* se refiere a la faceta epistémica del conocimiento del profesor que incluye los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en el que se realiza el proceso de estudio. Siguiendo a Hill, Ball y Shilling (2008) se diferencian tres componentes: el *conocimiento común del contenido*, que refiere al conocimiento puesto en juego al resolver problemas matemáticos del nivel educativo en que el profesor desempeña su labor docente; el *conocimiento especializado del contenido*, que incluye la capacidad para representar con exactitud ideas matemáticas, proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes y el *conocimiento ampliado del contenido (conocimiento en el horizonte matemático,* en la terminología de Hill, Ball y Shilling) que requiere poner en relación aspectos elementales del tema con ideas matemáticas más avanzadas.

- *El conocimiento del contenido en relación a los estudiantes* se refiere a las facetas cognitivas y afectivas y requiere la reflexión sistemática sobre el aprendizaje de los estudiantes, que incluye la identificación de posibles conflictos de aprendizajes en la resolución de un cierto tipo de tareas por parte de los estudiantes, la evaluación de aprendizajes,…
- El *conocimiento del contenido en relación a la enseñanza* se relaciona con la faceta interaccional-mediacional del conocimiento del profesor, que incluye los conocimientos relativos a la interacción entre el profesor y los estudiantes, su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados, y el conocimiento de los recursos tecnológicos y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
- El *conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares* se refiere a la faceta ecológica y se concretiza con la reflexión sobre los aspectos que Shulman (1987) describe como conocimiento curricular, contextos educativos, fines, propósitos y valores de la educación.

En la sección 3 del capítulo 4 motivaremos la selección de aspectos parciales de algunos de dichos conocimientos para la construcción de un cuestionario para evaluar los respectivos conocimientos de futuros profesores de educación primaria sobre el tema específico en que hemos centrado nuestra investigación, esto es, la visualización de objetos tridimensionales.

En Godino (2009) se incluye también una pauta para la formulación de cuestiones de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos basada en el modelo propuesto, que nos ayudará a seleccionar tareas adecuadas y formular enunciados para los ítems del cuestionario relativos a determinados aspectos de los conocimientos seleccionados.

3. UNA VISIÓN ONTOSEMIÓTICA DE LA VISUALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En esta sección se sintetiza el trabajo realizado por Godino, Gonzato, Cajaraville, Fernández (2012) en el que se analiza la visualización en el marco del EOS, aplicando su contenido a tareas de visualización de objetos tridimensionales.

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo intentamos avanzar una respuesta al problema de elaborar una teoría que esclarezca la naturaleza y componentes de la visualización y su relación con otros procesos implicados en la actividad matemática, su enseñanza y aprendizaje. Un aspecto clave de la elaboración de una teoría de la visualización en educación matemática debe incluir el estudio de las relaciones de esta forma de percepción con otras modalidades de expresión ostensiva (lenguajes analíticos o secuenciales), y sobre todo, su relación con los objetos matemáticos no ostensivos (sean considerados como mentales, formales, o ideales).

En el EOS se considera que el análisis de la actividad matemática, de los objetos y procesos que intervienen en la misma, centra la atención inicial en las prácticas que realizan las personas implicadas en la solución de determinadas situaciones-problemas matemáticos. La aplicación de este planteamiento a la visualización nos lleva a distinguir entre "prácticas visuales" y "prácticas no visuales" o simbólico/analíticas. Con dicho fin fijamos la atención en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica los cuales serán considerados como visuales si ponen en juego la percepción visual. Aunque las representaciones simbólicas (lengua natural o lenguajes formales) consisten en inscripciones visibles, no consideraremos dichas inscripciones como propiamente visuales, sino como analíticas o sentenciales. Los lenguajes secuenciales (por ejemplo, lógicas simbólicas, lenguajes naturales) usan solo la relación de concatenación para representar relaciones entre objetos. Por el contrario, en los diagramas se hace uso de relaciones espaciales para representar otras relaciones. "La idea es que los lenguajes sentenciales están basados en señales acústicas que son secuenciales por naturaleza, y por ello deben tener una sintaxis compleja que lo compense para expresar ciertas relaciones - mientras que los diagramas, siendo bidimensionales, son capaces de mostrar algunas relaciones sin la intervención de una sintaxis compleja" (Shin y Lemon, 2008, p.10)

Nuestro análisis de la visualización tiene en cuenta la distinción Peirceana entre tres tipos de signos (icono, índice y símbolo). Según la relación que los signos tengan con el objeto, Peirce (1965) realiza la siguiente clasificación:

Iconos: Tienen una relación de semejanza, en tanto se parecen al objeto que representan. La relación con aquello a lo que se refieren es directa, por ejemplo: pinturas, retratos, dibujos figurativos, mapas, etc. La representación muestra la estructura u organización del objeto.

Índices: La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto) con respecto a la realidad. Por ejemplo, un rayo (es índice de tormenta), una huella (es índice de alguien que pasó por ahí), etc.

Símbolos: Representa al objeto designado en virtud de un hábito o regla que es independiente de cualquier cualidad física, o contigüidad contextual, con el objeto. Ejemplo: palabras, logotipos, escudos de armas, señales de tráfico.

Los diferentes tipos de signos pueden combinarse, en el caso particular de la fotografía, por ejemplo se trataría de un icono (en tanto hay una relación de semejanza con el objeto), pero también es índice puesto que la fotografía se ve afectada por el objeto que representa (la fotografía se produce a través de registrar diferencias lumínicas de aquello que representa).

Los diagramas son considerados en la semiótica Peircena como un tipo de iconos mediante los que se representan relaciones inteligibles entre un conjunto de objetos[2]. Una característica que distingue a los iconos es que mediante la observación directa del mismo se pueden descubrir otras verdades relativas al objeto distintas de las que son suficientes para determinar su construcción. Esta capacidad de revelar verdades no esperadas es precisamente en lo que radica la utilidad de las fórmulas algebraicas, por lo que su carácter icónico-diagramático es el que prevalece.

Por ejemplo el siguiente desarrollo de un cubo (Figura 2.4) se considera como un ícono.

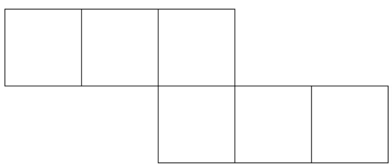


Figura 2.4: Desarrollo de un cubo

Si marcamos con una misma letra los segmentos que hay que unir para formar un

[2] Un estudio extenso del papel de los diagramas en el razonamiento matemático, y de la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se encuentra en Rivera (2011).

cubo (Figura 2.5), dichas letras serían interpretados como índices puesto que nos informan sobre la correspondencia entre segmentos que forman una misma arista del cubo.

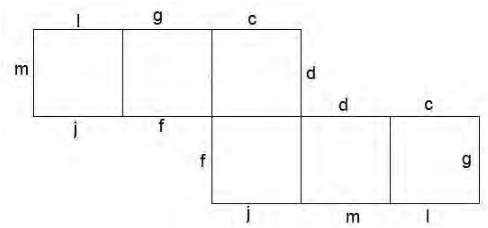


Figura 2.5: Desarrollo de un cubo con las relativas correspondencias.

Los "objetos visuales", y los procesos de visualización de donde provienen, forman configuraciones o sistemas semióticos constituidos "por los objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos (esto es, incluyendo la trama de funciones semióticas que relaciona los objetos constituyentes de la configuración)" (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy , 2011).

En primer lugar (sección 3.2) analizaremos la visualización desde el punto de vista de los objetos primarios que en ella participan (Figura 2.5) esto es, los tipos de situaciones-problemas (tareas), elementos lingüísticos y materiales, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos en los cuales se dice que hay visualización. Usualmente los objetos visuales participarán en las prácticas matemáticas junto con otros objetos no visuales (analíticos o de otro tipo). La visualización en matemáticas no se reduce a ver, sino que también conlleva interpretación, acción y relación.

En segundo lugar la visualización será analizada aplicando las dualidades o modalidades contextuales (Figura 2.8) desde las cuales se pueden considerar los tipos de objetos visuales previamente identificados (sección 3.3). En esta fase se introducen las necesarias distinciones entre objetos visuales personales (cognitivos), e institucionales (socio-epistémicos); objetos visuales particulares (extensivos) y generales (intensivos); objetos visuales ostensivos (materiales) y no-ostensivos (mentales, ideales, inmateriales); objetos visuales unitarios (usados como un todo global) y sistémicos (formados por un sistema de elementos estructurados). Finalmente, los objetos visuales son considerados como antecedentes o consecuentes de funciones semióticas (dualidad expresión y contenido).

Concluimos indicando algunas implicaciones de nuestro estudio para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (sección 3.4).

3.2. OBJETOS VISUALES PRIMARIOS

La consideración de un "objeto" como visual o no visual no es clara en la literatura. Por una parte tenemos los objetos físicos espaciales que se perciben con el sentido de la vista, que serán los primeros candidatos para ser considerados como "objetos visuales". Una foto, un dibujo o cualquier otra inscripción icónica de los objetos físicos son también claramente objetos visuales en un sentido estricto. La psicología se ha interesado por la naturaleza de las representaciones internas en la mente de las personas de los objetos físicos espaciales, como también de las ideas y conceptualizaciones. De aquí viene el uso de nociones teóricas tales como "imágenes mentales", "esquemas - imagen", “concepciones”,..., las cuales, obviamente no se pueden percibir directamente con la vista.

Desde la educación matemática nos interesa elaborar un modelo para analizar el papel del lenguaje, los artefactos y el pensamiento visual en la construcción y comunicación de los diversos tipos de objetos matemáticos, y por tanto, del aprendizaje. El EOS propone considerar como “objetos que intervienen en la práctica matemática”, no solo los medios de expresión lingüística, y en su caso los artefactos manipulativos, sino también los conceptos, las proposiciones, procedimientos y argumentos. Las propias situaciones - problemas o tareas matemáticas de cuya solución emergen los anteriores objetos son también considerados como objetos que intervienen en la práctica matemática, los cuales deben ser también visualizados (Figura 2.6).

Figura 2.6: Visualización y objetos matemáticos.

A continuación elaboramos una tipología de objetos visuales para cada una de las categorías de objetos matemáticos primarios. En particular daremos algunos ejemplos de objetos visuales que intervienen en prácticas sobre visualización de objetos tridimensionaes (VOT).

Usaremos la tarea indicada en la Figura 2.7 como ejemplo ilustrativo.

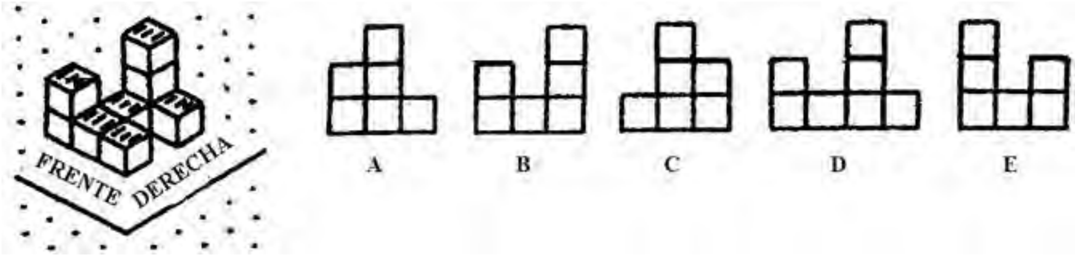


Figura 2.7: ¿Cuál de las figuras A, B, C, D, E corresponde a la vista desde atrás?

3.2.1. Lenguaje visual

Se trata de los medios de comunicación icónica, indexical y diagramática de la forma y de la posición relativa de objetos en el espacio, o que representan la estructura de sistemas conceptuales. Un primer esbozo de tipos de "lenguajes visuales" puede ser la siguiente:

- manipulativo (artefactos, objetos tridimensionales, ...)
- icónico/diagramático (fotografías, pictogramas, planos, mapas, diagramas, grafos, esquemas, croquis,...)
- deíctico/gestual (indicadores de forma, posición, orientación, …)

Las inscripciones simbólicas no las incluiremos entre los tipos de lenguajes visuales, aunque ciertamente se trata de inscripciones visibles/audibles. Los símbolos son signos inmotivados, en los que la relación entre el significante y el significado es totalmente convencional.

En las prácticas sobre VOT el tipo de lenguaje visual influye particularmente sobre el procedimiento (visual o no) necesario para ejecutar la tarea. Nos apoyamos en las investigaciones previas sobre los aspectos epistémicos relacionados a los objetos tridimensionales y sus representaciones, presentadas en las secciones 2.1.1 y 2.1.2 del capítulo 1, para detallar, clasificar y desglosar los elementos de lenguaje visual presentados anteriormente en el caso particular de práctica sobre VOT. La distinción entre representaciones cercanas (representaciones que se "parecen" al objeto geométrico abstracto, tienen la misma dimensión, excepto por el pasaje de lo abstracto a lo concreto) y representaciones lejanas (la "dimensión de la representación" es estrictamente inferior a la del objeto geométrico abstracto) ha sido introducida por

Parzysz (1988) y la aplicamos sea a objetos materiales sea a objetos geométricos.

Los objetos tridimensionales pueden ser representados con los siguientes lenguajes, incluyendo el mismo objeto material como elemento de lenguaje visual (Tabla 2.1).

Tabla 2.1: *Lenguajes visuales en las prácticas sobre VOT.*

<table>
<tr><th>Entidad</th><th>Representaciones cercanas (lenguaje manipulativo)</th><th colspan="2">Representaciones lejanas (lenguaje icónico/diagramático)</th></tr>
<tr><td>Objetos/espacios materiales, concretos: objetos/espacios cuotidianos</td><td>-Maquetas
-Modelos tridimensionales
….</td><td>-Fotografías
-Mapas
-Planos
-Croquis
….</td><td rowspan="2">-Esbozos

-Representaciones planas que nos dan una percepción global del objeto: (proyección ortogonal axonométrica, proyección oblicua y perspectiva a uno o más puntos de fuga,…)

- Representaciones planas que necesitan una reorganización de la información para poder visualizar el objeto en su globalidad (sistema diédrico, desarrollos, secciones)
….</td></tr>
<tr><td>Objetos geométricos abstractos: cubo, tetraedro,…[3]</td><td>-Modelos tridimensionales
-Artefactos</td><td></td></tr>
</table>

El lenguaje visual en tareas de VOT no se refiere únicamente a la representación de objetos tridimensionales, sino también a la descripción de acciones, argumentos, propiedades visuales (que pueden ser representadas concretamente, con acciones físicas sobre objetos materiales, o bien descritas con lenguaje icónico/diagramático).

Por ejemplo, en la tarea de la Figura 2.7 se usan representaciones lejanas para materializar una composición de cubos: se utiliza un lenguaje icónico para comunicar la vista en perspectiva del objeto y las posibles proyecciones planas del mismo. Los términos 'frente', 'derecha', y las letras A, B, C, D, E, y las argumentaciones que deben darse para justificar que la vista C es la solución a la tarea son elementos del lenguaje simbólico - natural. Pero en el contexto de la tarea se usan de manera indexical, señalando posiciones en las representaciones del objeto físico evocado (lenguaje deíctico).

[3] Dichas entidades son abstractas y no se consideran entonces partes del lenguaje visual, aunque la evocación del objeto (su nombre) permite la formación de imágenes mentales con determinadas propiedades figurales.

3.2.2. Tareas visuales

Los procesos de visualización, y sus resultados, los "objetos visuales", "imágenes" o "visualizaciones", intervienen asociados a determinadas tareas en las cuales se realizan ciertas prácticas apoyadas en otros objetos y procesos. La visualización se pone en juego en dos tipos principales de situaciones/ tareas en las cuales se comunica información (a otros, o a uno mismo), lo cual implica registro e interpretación de dicha información:

1) Comunicación de la forma, sus componentes y estructura, de objetos espaciales, o bien de objetos imaginados (pensados o ideales). La comunicación tiene lugar mediante el uso del lenguaje visual (representaciones materiales en forma de fotos, dibujos, esquemas, ...)

2) Comunicación de la posición relativa de objetos en el espacio. Se trata de "ver" y posicionar relativamente en el espacio físico a uno mismo y a los objetos del entorno (tareas de orientación). Implica el uso de lenguaje deíctico (términos como, arriba, abajo; delante, detrás, derecha, izquierda; cerca, lejos; norte, sur, este, oeste). La comunicación de la posición puede ser realizada mediante el uso de artefactos, medios materiales, como maquetas, planos, mapas, etc.

Los objetos físicos, y sus representaciones, pueden sufrir diversas transformaciones (movimientos, semejanzas, proyecciones,...), lo que da origen a una nueva clase de situaciones:

3) Reconocimiento de invariancias en las formas, o en sus representaciones, por transformaciones específicas, lo cual se apoya en la discriminación visual: comparar varios objetos, dibujos, imágenes e identificar similitudes o diferencia entre ellos.

En la sección 3 del capítulo 1 hemos presentado una tipología de las tareas presentadas en las investigaciones sobre VOT y un inventario de ejemplos prototípicos. La tarea de la Figura 2.7, incluye aspectos de los tipos anteriores.

3.2.3. Procedimientos (operaciones visuales):

La siguiente relación incluye tipos básicos de operaciones, procedimientos o técnicas que consideramos visuales:

— Proyectar cuerpos en el plano, seccionar, rotar, simetrizar, trasladar, deslizar, …

- Construir sólidos a partir de sus proyecciones planas
- Transformar representaciones visuales mediante descomposición y recomposición de figuras, ...
- Representar gráficamente relaciones, …

Dichas acciones, aunque puedan ser definidas de forma analítica, tienen una fuerte componente visual, puesto que pueden ser interpretadas concretamente por medio de transformaciones físicas. De esta manera el procedimiento puede consistir simplemente en la simulación mental de la acción física.

En presencia de una representación bidimensional del objeto tridimensional, estas secuencias de acciones permiten interpretar y representar el mundo físico por medio de dibujos, y se refieren entonces, según Treffers (1987) a procedimientos de matematización horizontal. Estos se distinguen de los procedimientos de matematización vertical, que incluyen la formalización de las técnicas matemáticas de representación de objetos tridimensionales.

Por ejemplo la tarea de la Figura 2.7 pone en juego la operación de proyección ortogonal del objeto tridimensional en distintos planos, que puede referirse a la acción física de fotografiar el objeto concreto (asumiendo determinadas hipótesis), y la coordinación de las vistas de un objeto, que puede ser materializada con el movimiento del observador (fotógrafo) en distintas posiciones espaciales.

3.2.4. Conceptos visuales

Entendemos por concepto un invariante o entidad cuyo significado es fijado por una definición o regla, existiendo una ilimitada variedad de posibles ejemplos que cumplen dicha regla. Aunque los objetos geométricos se podrían considerar como puras entidades mentales y tratar a un nivel puramente mental, no podemos olvidar sus particulares propiedades relacionada al espacio, que permiten su materialización.

En la sección 2.1.1 del capítulo 1 se han presentado diferentes trabajos de investigación que se han interesado en analizar dicha naturaleza de los conceptos geométricos. De particular interés es el “concepto figural” definido por Fischbein (1993), como una entidad mental que es controlada por un concepto (propiedades conceptuales: generalidad, esencialidad, abstracción, idealidad), pero que al mismo tiempo preserva su espacialidad (propiedades figurales: forma, distancia, posición).

Mientras que la componente figural del objeto permite realizar mentalmente transformaciones (acciones visuales) que tienen un significado práctico (por ejemplo trasladar, cortar, superponer), la componente conceptual controla dichas operaciones a nivel del rigor y de la lógica.

En el estudio del espacio y la geometría parece entonces necesario distinguir entre los conceptos figurales (triángulo, prisma cuadrangular recto, etc.), que tienen por su misma naturaleza además de propiedades conceptuales, una componente figural que permite su representación por medio de lenguaje visual, y los conceptos de representación material (dibujo, imagen, modelos tridimensionales, …) que tienen sus definiciones y reglas que definen invariantes propios y permiten representar los conceptos figurales A título de ejemplo, en la Figura 2.7 se ponen en juego los conceptos de cubo, proyección ortogonal, vista, plano de proyección, rectas proyectantes, direcciones de mirada del observador (rayo visual), sistema de referencia tridimensional, punto de vista (o foco), puntos de vista opuestos (frente es opuesto a atrás; derecha es opuesta a izquierda), …

3.2.5. Propiedades

Se trata de relaciones entre conceptos expresadas mediante proposiciones (esto es, enunciados cuya verdad o falsedad se debe establecer). Algunos tipos de proposiciones visuales, esto es, propiedades que intervienen en la solución de tareas visuales y se expresan en lenguaje visual:

- Propiedades del lenguaje visual utilizado: conservación de la forma en las proyecciones proporcionales, propiedades de las isometrías (rotaciones, traslaciones, simetrías), propiedades de las diferentes proyecciones, …

- Propiedades de los procedimientos visuales utilizados: por ejemplo la conservación de la forma y tamaño por movimientos rígidos, y otros invariantes por otras transformaciones.

- Propiedades de los conceptos visuales

En la tarea de la Figura 2.7 se ponen en juego las siguientes proposiciones:

- Propiedades del lenguaje visual: El objeto representado en perspectiva se considera orientado, es decir, posee un “frente”, “izquierda”, “arriba”, “derecha”. Propiedades relacionadas a las proyecciones paralelas: las rectas proyectantes de la proyección ortogonal son perpendiculares al plano de proyección, estableciendo así una relación entre todos los puntos del elemento proyectante con los proyectados; la imagen de una figura puesta en un plano paralelo al plano de proyección es isométrica a la figura (por ejemplo en la proyección ortogonal las caras de los cubos se representan con cuadrados); la forma, la dimensión de los objetos varía dependiendo de la inclinación del objeto referente respecto al plano de proyección (esto explica la forma del dibujo en perspectiva): las caras del cubo son cuadrados cuando se miran frontalmente, mientras que si se miran desde un ángulo diferente aparecen como figuras romboédricas.

- Propiedades de los procedimientos visuales: el procedimiento de proyectar el objeto sobre planos ortogonales se refiere a las hipotéticas vistas que puede obtener un observador situado en determinadas posiciones (asumiendo que las direcciones de la mirada del observador son paralelas entre sí y perpendiculares al plano visual de la observación). Hay una equivalencia entre las rotaciones del objeto con respecto al observador y las rotaciones del observador alrededor del objeto, o sea para visualizar una determinada vista se puede imaginar girar el observador o bien girar el objeto.

- Propiedades de los conceptos figurales: el objeto representado está formado por cubos apilados. El cubo es un poliedro de seis caras cuadradas congruentes; el concepto de vista se refiere a la proyección ortogonal sobre un determinado plano de proyección,…

3.2.6. Argumentos/justificaciones visuales

Cómo hemos descrito en el apartado 2.1.5 del Capítulo 1, existen diferentes discursos justificativos pertinentes para una proposición geométrica, según su intención, el rigor exigido, los criterios externos de autoridad en los cuales se basan,… Por lo que se refiere a las “demonstraciones sin palabras”, Balacheff sugiere de tener cuidado considerando la evidencia de representaciones no-verbales, puesto que hay casos en los cuales la relación entre representación y objeto matemático es compleja y necesita particular atención. La interpretación perceptiva tiene entonces que ser acompañada de una interpretación discursiva que permita la asociación de los elementos representados con la sentencia (Duval, 1998). De otra parte, puesto que la evidencia de una proposición es subjetiva, el nivel de su aceptación puede ser diferente para cada individuo.

Consideramos entonces que las llamadas "demostraciones sin palabras" de propiedades geométricas generales requerirá el uso conjunto de un discurso analítico que evoque las definiciones y teoremas previamente establecidos.

Como se describe en el capítulo 1, Parzysz (2006) distingue dos principales paradigmas presentes en la enseñanza de la geometría en la escuela obligatoria: el primero (G1) se refiere a un tipo de geometría gráfico-espacial, que trabaja con objetos físicos (representaciones materiales de entidades teóricas: dibujos, maquetas,…) y que se apoya en validaciones perceptivo-deductivas para justificar sus afirmaciones; el segundo (G2) es un tipo de geometría proto-axiomática que involucra objetos teóricos y utiliza un razonamiento hipotético deductivo (basados en los axiomas de geometría euclídea y propiedades previamente aceptadas) aunque haciendo referencia al espacio "físico". El autor subraya la importancia que tiene la articulación de los dos paradigmas en la formación de maestros. De hecho, aunque las actividades propuestas a los alumnos de escuela primaria se refieren a G1, su planificación y control por parte del maestro debe tener en cuenta G2.

En el caso de la Figura 2.7, teniendo en cuenta el significado atribuido a los conceptos de frente, derecha y atrás, los convenios de representación plana de objetos tridimensionales, y las propiedades de las proyecciones ortogonales (propiedades analíticas, paradigma G2) se debe aceptar que si el observador se pone detrás del edificio, a su izquierda verá un solo cubo, al centro tres cubos apilados y a su derecha dos cubos apilados (argumento visual, paradigma G1). Por tanto, la representación plana de la figura que vería desde atrás sería la C.

3.3. VISUALIZACIÓN Y ESPECIFICACIONES CONTEXTUALES

Los objetos visuales descritos en la sección 3.2 pueden ser clasificados desde distintos puntos de vista según los contextos y juegos de lenguaje en que intervienen, dando a lugar a distintas dualidades: personal/institucional, ostensivo/no ostensivo, unitario/sistémico, extensivo/intensivo, expresión/contenido (sección 2.4).

Como indicamos en la Figura 2.8, aplicamos las dualidades contextuales mencionadas a los objetos y procesos implicados en la visualización. La aplicación de estas "miradas" complementarias permite articular de manera sistemática diversos puntos de vista sobre la visualización aportados por otros marcos teóricos, como mostraremos a continuación.

Figura 2.8: Especificaciones contextuales de la visualización

Usaremos la misma tarea presentada en la Figura 2.7 como ejemplo ilustrativo.

3.3.1. Dualidad personal – institucional

La dialéctica entre cognición individual y social o cultural es interpretada en el EOS mediante la dualidad personal - institucional. Nuestro planteamiento de la visualización no entra en la discusión filosófica y psicológica del funcionamiento interno de la mente y si la información es representada y procesada de manera icónica o de otro modo (Thomas, 2010). La dualidad personal - institucional introducida en el EOS postula una forma de existencia de los objetos matemáticos que califica de personal o mental (sin entrar en detalles sobre la efectiva naturaleza de tales objetos) y otra forma de existencia que considera como institucional, a los cuales se les atribuye una naturaleza intersubjetiva/normativa (Font, Godino y Gallardo, 2013).

En las investigaciones cognitivas interesadas en el papel de la percepción, y en consecuencia en la visualización, en los distintos campos de conocimiento, y también en educación matemática, se ha introducido la noción de "image schema" (esquema-imagen)[4]: "An image schema is a recurring dynamic pattern of our perceptual interactions and motor programs that gives coherence and structure to our experience.

[4] Preferimos "traducir" 'image schema' con una palabra compuesta al considerar que refleja mejor el significado de la expresión inglesa, u otras similares usadas por otros autores como, image schemata o types of imagery.

Experience is to be understood in a very rich, broad sense as including basic perceptual, motor-program, emotional, historical, social and linguistic dimensions" (Johnson 1987: xiv, xvi).

Nuestras experiencias corporales/visuales se incrustan en nuestra mente en forma de esquemas-imagen que apoyan y condicionan los procesos de conceptualización y de razonamiento proposicional/analítico. Algunos ejemplos de esquemas- imagen son: conteniente/contenido; parte/todo; inicio/trayectoria/final; objeto. Los esquemas - imagen orientacionales como, centro - periferia, dentro - fuera, frente - detrás, arriba – abajo, son de particular interés para organizar los sistemas de objetos que se ponen en juego en las representaciones gráficas de funciones (Font, Bolite y Acevedo, 2010).

Los esquemas - imagen son estructuras cognitivas/mentales que se generan en el cerebro de los individuos como resultado de ciertas prácticas y están, por tanto, impregnados de percepción. El objeto matemático (inmaterial) también emerge de las prácticas de las personas implicadas ante cierto tipo de situaciones - problemas, pero tiene unas características formales, normativas, convencionales, socio-epistémicas, que no concuerdan con las connotaciones empiristas de los esquemas - imagen y las visualizaciones.

La concepción del conocimiento matemático según el enfoque de la cognición corporeizada (Jonhson, 1987; Lakoff y Nuñez, 2000) impregna al objeto matemático de matices empíricos a través del lenguaje metafórico que resalta las raíces empíricas del conocimiento, pero que oculta su verdadera naturaleza. Se requiere, por tanto, controlar conscientemente el uso de las metáforas visuales o corporeizadas transmitidas por los esquemas - imagen. El principal conflicto con las esquemas - imagen es que su uso metafórico puede pasar desapercibido, y el profesor y los alumnos no distinguen entre el dominio fuente (perceptual) y el diana (matemático) (Font, Bolite y Acevedo, 2010).

Por ejemplo, en la tarea ilustrada en la Figura 2.7, el término “vista” puede dar lugar a conflictos semióticos, si es interpretado en el contexto cuotidiano. De hecho, en condiciones reales, un observador que mira el objeto tridimensional desde diferentes posiciones, nunca tendrá las “vistas” dadas en el enunciado. Para ejecutar correctamente la tarea se tiene que interpretar el término “vista” en el contexto institucional en la cual se sitúa: en educación primaria el término “vista” sustituye frecuentemente el término técnico de “proyección ortogonal”, o, dicho de otro modo, las representaciones materiales de las vistas de un hipotético observador se presentan con proyecciones ortogonales.

3.3.2. Dualidad ostensivo – no ostensivo

La dualidad ostensivo - no ostensivo postula que cualquier objeto matemático (ideal, abstracto) lleva asociado, como la cara de una moneda lleva asociada su correspondiente cruz, uno o diversos objetos ostensivos. Estos pueden ser símbolos o inscripciones, o representaciones visuales más o menos ricas indicadoras de su composición y estructura.

El EOS concede un papel esencial a la "ostensión" en la práctica matemática al postular que cada objeto matemático (abstracto, ideal, general, inmaterial, no ostensivo) tiene una faceta ostensiva, esto es, mostrable públicamente, visualmente o de otro modo perceptivo. Esta ostensión puede consistir en las inscripciones simbólicas, necesarias para representar los objetos, entendidos como un todo unitario, y poder "operar" con ellos en progresivos niveles de generalidad, o bien visualizaciones icónicas o diagramáticas que muestren la estructura del objeto, entendido de manera sistémica.

Sin embargo, se reconoce que entre las facetas ostensiva y no ostensiva de los objetos matemáticos hay relaciones dialécticas delicadas. Por ejemplo, Fischbein (1998) analiza la tensión entre los aspectos formales/ conceptuales de los objetos matemáticos y los aspectos figurales en el caso de los objetos geométrico-espaciales, o sea, entre lo inmaterial/conceptual y lo material/ visual. Por una parte, el objeto matemático es inmaterial, invisible, pero depende para su "existencia" de lo material, visible. Esta es una manera de expresar la paradoja cognitiva del aprendizaje matemático que describe Duval (2006).

El EOS propone una solución a esta paradoja asumiendo los postulados pragmatista - antropológicos (Peirce, 1965; Wittgenstein, 1953) para los objetos matemáticos. Como se describe en Font, Godino, Planas y Acevedo (2010), la proyección metafórica a partir de esquemas-imagen (Lakoff y Nuñez, 2000) es un aspecto importante para explicar la emergencia de los objetos matemáticos (considerados como no ostensivos, ideales, abstractos, inmateriales y diferentes de sus representaciones ostensivas), pero que es insuficiente para describir el complejo proceso que permite su emergencia. No entraremos a explicar este complejo proceso de emergencia, nos limitaremos a resaltar que, al ser el dominio de partida de la proyección metafórica un esquema-imagen, el resultado de la proyección, aunque tenga naturaleza no ostensiva, abstracta, inmaterial, está contaminado, en muchos casos, de connotaciones visuales.

En el caso de la tarea de la Figura 2.7, se debe proyectar metafóricamente el esquema- imagen orientacional (Font, Bolite, Acevedo, 2010) para entender la tarea y, por otra parte, dicha proyección metafórica se halla fosilizada en el lenguaje técnico utilizado para formular la tarea (vista desde atrás).

Además podemos observar que la tarea muestra la representación material en la hoja de papel de un objeto real (composición de piezas cúbicas materiales) o ideal (composición de cubos como objeto ideal). Esta representación en perspectiva isométrica se refiere a la vista que un observador hipotético tendría del edificio ideal. El dibujo del edificio es entonces una materialización de un objeto ideal: la "vista" de un edificio que tendría un hipotético observador. La representación material de la vista desde atrás se representa con proyección ortogonal del objeto. Tal representación funciona como icono de la vista real del objeto por parte de un hipotético observador (mirando la parte trasera del objeto) cuya dirección de mirada es perpendicular al plano visual de la observación. Los dibujos (en proyecciones isométricas y ortogonales) pueden ser interpretados cómo materializaciones de objetos ideales (composiciones de cubos) que facilitan la realización de las "acciones matemáticas" (reconocer las vistas) que se realizan sobre ellos.

3.3.3. Unitario – sistémico

Esta dualidad está ligada a los procesos de reificación, en el sentido de constitución de objetos por parte de un sujeto individual como una totalidad, la cual interviene como tal en nuevas actividades y procesos, y al proceso inverso de descomposición de una entidad sistémica en sus elementos constituyentes.

La Figura 2.7, donde se presenta la perspectiva isométrica de un supuesto cuerpo espacial, permite ilustrar el juego dialéctico entre las facetas unitaria - sistémica de un objeto, en este caso, visual. El cuerpo espacial (aquí imaginado) y el dibujo en perspectiva presentado ostensivamente, intervienen como una globalidad, como un todo unitario que puede ser contemplado desde diferentes puntos de vistas. La solución de la tarea y su justificación, la vista C es la correcta porque es la única que puede corresponder a la vista desde atrás, requiere considerar el cuerpo, y su perspectiva global como un sistema formado por piezas dispuestas de una forma particular. Descomponer y recomponer un cuerpo o una figura geométrica en sus partes constituyentes, coordinar e integrar sus vistas son operaciones características de la visualización.

3.3.4. Extensivo – intensivo

Un objeto se dice que es extensivo si interviene en una práctica matemática como un ejemplar particular, mientras que se dice que es intensivo si interviene como un tipo, clase o generalidad. Estos atributos de los objetos matemáticos, emergentes de los procesos duales de particularización y generalización, son relativos al juego de lenguaje en que participan, y no entidades absolutas.

Fischbein y Nachlieli (1998) resaltan la tensión entre los ejemplos prototípicos, las metáforas, los paradigmas y analogías y los objetos generales a los cuales refieren. Tales concreciones y materializaciones son esenciales en los procesos de invención y comunicación matemática, pero, sin embargo, es necesario controlar su uso mediante las definiciones y reglas previamente asumidas.

En la tarea de la Figura 2.7 el objeto representado en perspectiva tiene un carácter extensivo, puesto que parece referirse a un determinado objeto con una determinada orientación. El conjunto de las diferentes plausibles “vistas desde atrás”, representa un subconjunto del conjunto “vistas” del objeto dado u otro objeto formado por cubos apilados.

3.3.5. Dualidad expresión – contenido

La noción de representación es introducida en el EOS mediante la dualidad expresión - contenido, como un tipo particular de relación entre los objetos primarios introducidos en el modelo; usualmente el antecedente de tales relaciones serán entidades lingüísticas, pero también pueden ser otros tipos de entidades. La expresión puede ser una imagen, un dibujo, un diagrama, ..., que representa (metafórica o icónicamente) un objeto físico, una figura geométrica, una estructura conceptual. Se trata de comprender una realidad compleja en términos de otra que la representa y con la que se opera.

Los distintos elementos que componen la representación visual de la Figura 2.7 funcionan como expresión (significante) de diversas funciones semióticas cuyos contenidos (significados) son objetos geométricos no ostensivos, como son los diversos conceptos y propiedades indicados en la sección 3.2, usualmente definidos y enunciados de manera analítica.

La dualidad expresión - contenido da cuenta del uso metafórico de objetos visuales (configuraciones) para comprender una realidad abstracta, no ostensiva, en términos de otra realidad ostensiva, visual.

3.4. SINERGIA ENTRE LO VISUAL Y LO ANALÍTICO

El fin último de los esfuerzos de investigación en didáctica de las matemáticas es la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para ello es necesario adoptar una perspectiva global que tenga en cuenta la diversidad de factores que condicionan tales procesos. Aunque fijemos nuestra atención en un aspecto específico, por ejemplo, el papel de la visualización en el estudio de las matemáticas, será necesario tener en cuenta cómo interacciona la visualización con otros lenguajes y formas de pensamiento, su dependencia de factores culturales, recursos tecnológicos, etc. De particular importancia será la posición que se adopte sobre el papel que desempeña la visualización en la propia actividad de producción y comunicación matemática, su papel en la formación de conceptos, procedimientos y modos de justificación de las proposiciones matemáticas.

Como síntesis de este apartado podemos decir que la configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática estará formada usualmente por dos componentes, uno visual y otro analítico, los cuales se apoyan sinérgicamente en la solución de la tarea correspondiente (Figura 2.9).

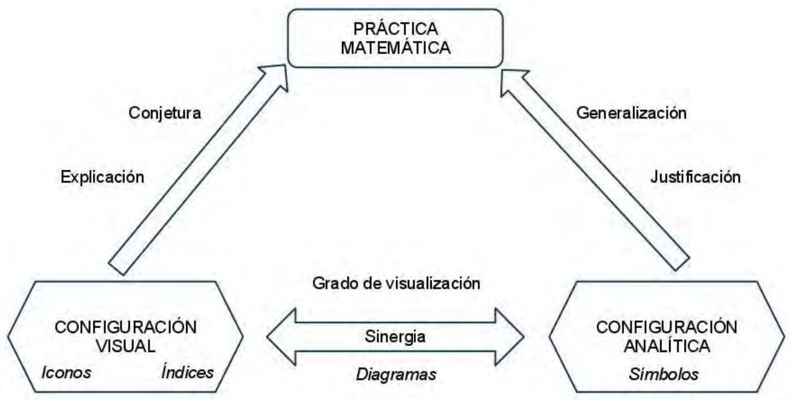


Figura 2.9: Sinergia entre configuraciones visuales y analíticas.

El componente visual puede desempeñar un papel clave en la comprensión de la naturaleza de la tarea y en el momento de formulación de conjeturas, mientras que el componente analítico lo será en el momento de generalización y justificación de las soluciones. El grado de visualización puesto en juego en la solución de una tarea dependerá del carácter visual o no de la tarea y también de los estilos cognitivos particulares del sujeto que la resuelve, como han puesto de manifiesto diversas investigaciones (Krutestkii, 1976; Pitta-Pantazi y Christou, 2009; Presmeg, 1986).

En el siguiente apartado analizamos una tarea matemática que pone en juego procesos de visualización. El analisis de la solución propuesta muestra la trama de objetos visuales y no visuales que se ponen en juego, y las relaciones que se establecen entre los mismos, o sea, el sistema semiótico que forman. En sístesis se trata de desvelar los conocimientos que se ponen en juego en la resolución y la sinergia que se establece entre los objetos visuales y analíticos. Dicho apartado se basa en Godino, Fernández, Gonzato y Wilhelmi (2013).

3.4.1. Análisis de la sinergia visual-analítico en una tarea visual

Enunciado:

Escribe cuáles de estas figuras representan desarrollos de un cubo (Figura 2.10).

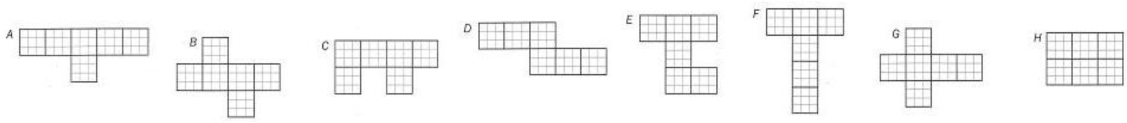


Figura 2.10: Potenciales desarrollos de un cubo.

Solución:

Los hexaminós B, D, F y G corresponden a un cubo, de hecho si hacemos corresponder (pegamos) los lados marcados con los mismos símbolos obtenemos un cubo (Figura 2.11).

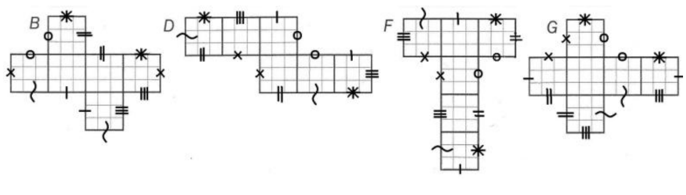


Figura 2.11: Desarrollos de un cubo con correspondencias.

Los restantes hexaminós no representan desarrollos de un cubo. Los hexaminós A, C y E no corresponden a un cubo por superposición de una cara al plegar los desarrollos: señalamos en la Figura 2.12 las caras que se superposarían, con las letras a y b.

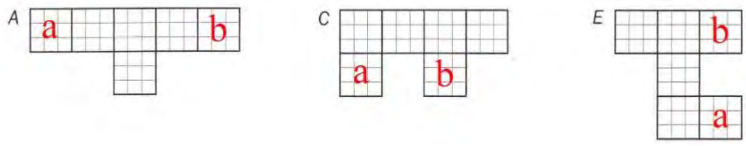


Figura 2.12: Hexaminós que no representan desarrollos de un cubo.

En el H hay dos vértices de orden 4, o sea, en los cuales concurren cuatro caras; y es imposible construir un ángulo triedro a partir de cuatros caras complanares.

Análisis ontosemiótico de la solución

Esta tarea matemática es de tipo visual de acuerdo con la caracterización presentada en la sección 3.2, ya que el reconocimiento de los desarrollos de un cubo puede ser interpretado concretamente por medio de la transformación física de "plegar" (el procedimiento puede consistir simplemente en la simulación mental de la acción física). Sin embargo en la justificación de la respuesta emergen diferentes elementos analíticos que permiten argumentar su validez.

Para "ver" la solución de la tarea justificada en las Figuras 2.11 y 2.12 es necesario realizar diversas operaciones visuales e interpretaciones semióticas que pueden no ser percibidas de manera inmediata por los alumnos. Dichas operaciones de carácter "visual" se apoyan en elementos analíticos que definen los objetos involucrados.

Fischbein (1993) observa que estas transformaciones mentales de objetos tridimensionales no son únicamente de naturaleza visual (figural en la terminología del autor): es por el hecho que trabajamos con caras de un cubo que las aristas son de igual tamaño, que las caras son cuadrados, que los ángulos son rectos, etc. "Esto es un conocimiento tácito que es implicado en las operaciones mentales. Sin este tácito control conceptual, toda la operación no tendría significado" (p. 159).

El enunciado de la tarea se compone de elementos lingüísticos (palabras) y elementos visuales, que interactúan entre ellos. El término "figuras" se refiere a los dibujos de la Figura 2.10: objetos ostensivos (y entonces visuales) que tienen que ser puestos en relación con el objeto no-ostensivo "cubo".

Estas representaciones atribuyen determinadas características físicas al "cubo" (por ejemplo el tamaño) y tienen que ser interpretadas como plausibles representaciones de desarrollos planos de la superficie de un cubo. El uso del verbo "representar" en lugar de "ser", atribuye un carácter ideal al desarrollo. Los dibujos no son desarrollos (potenciales), sino únicamente posibles representaciones (planas) del objeto analítico "desarrollo de un cubo".

Para resolver la tarea el alumno tiene que conocer el significado intuitivo de desarrollo plano de un poliedro y reconocer que la superficie del cubo es desarrollable. Intuitivamente una superficie es desarrollable si puede fabricarse a partir de un plano euclídeo mediante "doblado", lo cual se manifiesta "visualmente" en que se pueden construir modelos apropiados a partir de una hoja de papel o cartulina plana. El desarrollo de la superficie sería la figura plana que se obtiene al desdoblarla totalmente en el plano. Esta definición intuitiva y visual tiene que ser aplicada al caso particular de la superficie de un cubo.

El proceso de "desdoblar" la superficie del cubo en el plano puede ser representado visualmente (Figura 2.13) y/o interpretado de forma analítica.

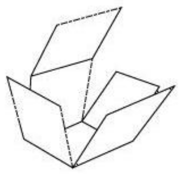


Figura 2.13: Posible forma de desplegar un cubo en el plano.

Siendo el cubo un poliedro de seis caras cuadradas congruentes, su desarrollo plano resulta un conjunto de seis cuadrados[5] unidos por uno y un solo lado, de tal manera que:

- Cada cara del cubo corresponde con un único cuadrado del desarrollo

y

- Es posible emparejar todos los lados de los cuadrados que pertenecen al borde del desarrollo de tal manera que cada par corresponde a una y sólo una arista del cubo.

Basándonos en esta última condición (analítica) se argumenta (de forma visual, figura 2.11) que los hexaminós B, D, F y G sí representan desarrollos de un cubo, marcando con un mismo símbolo los lados equivalentes, o sea los pares de lados externos de los cuadrados del desarrollo que se juntan para formar una arista en el cubo.

En la Figura 2.12 se argumenta de forma visual que los hexaminos A, C y E no corresponden a un cubo por superposición de una cara al plegar los desarrollos (el desarrollo no se puede "cerrar"). De hecho la superposición de una cara contradice la condición analítica de que cada cara del cubo corresponde con un único cuadrado del desarrollo.

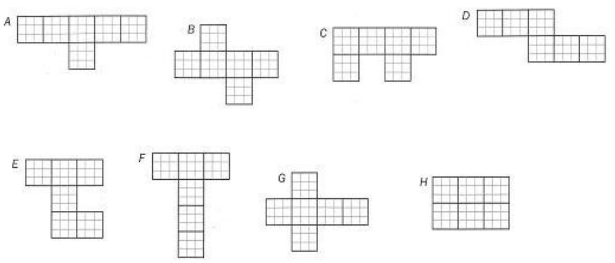
[5] Número y formas de las caras del cubo son propiedades invariantes con respecto a la operación "desarrollar".

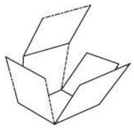
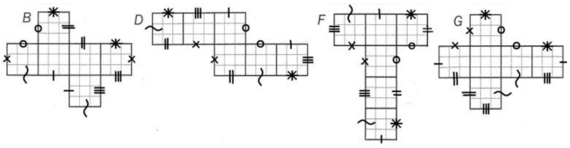
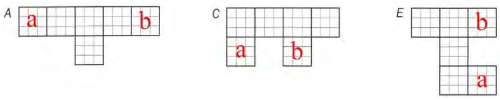
Por lo que se refiere al hexaminó H se observa que no representa un desarrollo. Esta afirmación bastante intuitiva (y visual), puede ser justificada afirmando la imposibilidad de construir un ángulo triedro a partir de cuatros caras cuadradas complanares unidas por un vértice común (bastante fácil de visualizar).

Con este ejemplo se muestran las relaciones de cooperación entre objetos visuales y no visuales en la actividad matemática realizada para resolver un problema de tipo visual. De manera particular podemos observar que la explicación visual de la solución a la tarea es apoyada con una justificación donde emergen elementos analíticos relacionados a las propiedades conceptuales del desarrollo del cubo. En particular, podemos observar que la explicación visual de la solución de la tarea es apoyada en elementos analíticos relacionados con las propiedades conceptuales del desarrollo del cubo.

Resumimos en la Tabla 2.1, las funciones semióticas implicadas en la justificación visual de la tarea.

Tabla 2.1: *Funciones semióticas implicadas en la justificación visual.*

Expresión visual	**Contenido analítico**
"Cubo" como imagen mental (objeto no ostensivo) de carácter figural que se representa el sujeto mentalmente para ejecutar la tarea	Concepto de "cubo" (Definición 1): poliedro de seis caras cuadradas congruentes.
Figura 1.10:  Son objetos obsentivos que se refieren a potenciales desarrollos de un cubo. El reconocimiento de los desarrollos de un cubo puede ser interpretado visualmente por medio de la transformación física de "*plegar/desplegar*". El procedimiento puede consistir simplemente en la simulación mental de la acción física (procedimiento no-ostensivo), ser ejecutado físicamente (cortando y pegando (procedimiento ostensivo) o ilustrado por medio de lenguaje visual, como se muestra en la Figura 1.13:	Concepto de "desarrollo de un cubo" (Definición 2): *Conjunto de seis cuadrados unidos por uno y un solo lado, de tal manera que*: - *Cada cara del cubo corresponde con un único cuadrado del desarrollo* (Propiedad 1) y - Es posible *emparejar (relación de equivalencia)* todos los lados de los cuadrados que pertenecen al borde del desarrollo de tal manera que cada par corresponde a una y sólo una arista del cubo (Propiedad 2)

 En particular modo en la tarea se tiene que verificar si los hexáminos dados se *cierran al plegarse* formando un cubo *sin que las caras se superpongan.*	
Los hexaminós B, D, F y G corresponden a un cubo, de hecho si *plegamos* los desarrollos a lo largo de los lados *y unimos* (físicamente o mentalmente) los lados marcados con los mismos símbolos obtenemos un cubo, Figura 1.11:  No hay solapamiento de caras y los desarrollos se cierran.	Los hexaminós B, D, F y G representan desarrollos de un cubo puesto que respectan la definición 2. En particular, en la Figura 2.11 se ilustra visualmente la Propiedad 2 (analítica).
Los hexaminós A, C y E no corresponden a un cubo por superposición de una cara al *plegar* los desarrollos: señalamos en la Figura 2.12 las caras que se *superposarían*, con las letras a y b, Figura 1.12:  Además al plegarlos, los hexaminos no se cierran (dejando descubierta una cara del cubo).	Los hexaminós A, C y E no representan desarrollos de un cubo puesto que no respectan la Propiedad 2. En particular la Figura 2.12 se ilustra visualmente que una misma cara del cubo corresponde a dos cuadrados del desarrollo (marcados con a y b).
El hexaminó H no es un desarrollo de un cubo puesto que el procedimiento de plegar el desarrollo a lo largo de todas las aristas resulta imposible de ejecutar.	El hexaminó H no es un desarrollo de un cubo, puesto se contradice la Propiedad 2.

En Mariotti (1997) se presenta un interesante análisis de algunas soluciones relacionadas a una tarea de "desplegar desarrollos" dadas por alumnos de primaria, secundaria y bachillerato. Se describen las soluciones en las cuales hay autonomía del aspecto figural ("visual"), las en las cuales hay autonomía del aspecto conceptual ("analítico"), y las soluciones donde hay una buena interacción del aspecto figural y conceptual (sinergia entre componente visual y analítico). En particular se observa que la autonomía del aspecto figural causa frecuentemente representaciones de desarrollos en las cuales el proceso (visual) de "desplegar" transforma drásticamente el objeto, deformando determinadas partes (algunos de los invariantes no se respetan, Figura 2.14).

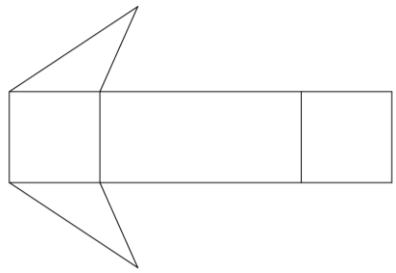


Figura 2.14: Efecto de deformación en la representación de un desarrollo de un prisma triangular, Mariotti, 1997, p.67.

En algunos de estos casos la figura puede ser aceptada como cualitativamente correcta, aunque hay invariantes no respetados. De otra parte, cuando hay autonomía del aspecto conceptual, se observan desarrollos en los cuales se respetan sólo algunos de los invariantes (propiedades analíticas), por ejemplo el número de las caras, olvidando comprobar la efectiva posibilidad de cerrar el desarrollo (Figura 2.15).

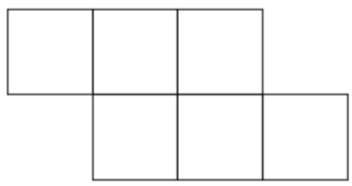


Figura 2.15: Representación del desarrollo de un cubo, en el cual se respeta el invariante "número de caras", olvidando el aspecto figural (cuatro caras no pueden concurrir en un vértice), Mariotti, 1997, p.78-79.

Este tipo de análisis será aplicado a los ítems del cuestionario y a las soluciones propuestas por los estudiantes.

4. PROBLEMA ESPECÍFICO DE INVESTIGACIÓN

El marco teórico del EOS y su manera de interpretar la visualización en educación matemática descrita anteriormente nos orienta en la formulación de los objetivos de la investigación y la elección de pautas metodológicas en el campo de la formación de profesores de matemáticas.

4.1. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1.1. Introducción

En el capitulo 1 hemos descrito las investigaciones que se han realizado sobre los diferentes aspectos relacionados con la visualización espacial, con el objetivo de fundamentar adecuadamente nuestro trabajo. Algunas nociones claves relacionadas con la visualización espacial en geometría, destacados en dicho estudio, han sido interpretadas en el capitulo 2 desde un punto de vista ontosemiotico. Dicha conceptualización de la visualización espacial muestra la riqueza y la amplitud del tema y permite argumentar su importancia en la enseñanza en la escuela primaria. De otra parte nos ayuda a identificar los objetos visuales y analíticos presentes en una tarea de geometría espacial y reconocer sus relaciones. En particular nos da criterios para seleccionar un primer banco de ítems provenientes de tareas descritas en las investigaciones sobre el tema y de los libros de textos de educación primaria.

En el análisis de las investigaciones previas no se encontró un cuestionario que evaluase adecuadamente los conocimientos de los profesores de educación primaria sobre VOT. En consecuencia, se decidió centrar la investigación en la construcción de un nuevo cuestionario y su aplicación a una muestra de estudiantes para profesor de educación primaria con el fin de aportar conocimiento sobre el estado cognitivo de dichos estudiantes en relación a este contenido. En el siguiente apartado se describen el objetivo general y los específicos de la investigación.

4.1.2. Objetivo general y específicos

El objetivo general de la investigación es el siguiente.

OG: Realizar un estudio de evaluación del conocimiento didáctico-matemático de los profesores de primaria en formación sobre la Visualización de Objetos Tridimensionales (VOT)

Se trata de valorar si los estudiantes tienen conocimientos didáctico-matemáticos suficientes para abordar la enseñanza del tema e identificar posibles carencias en diferentes aspectos de dichos conocimientos.

El logro de este objetivo general requiere plantearse otros objetivos más específicos que se indican a continuación.

OE1: *Reconstruir un significado de referencia sobre la visualización espacial en geometría, analizando las investigaciones previas y organizando la información distinguiendo las facetas epistémicas, cognitivas e instruccional.*

El logro de este objetivo permitirá disponer de un marco de referencia sobre la visualización en general y su papel en la formación de profesores, así como elaborar un banco de ítems usados en investigaciones previas que sirva de base en la elaboración de instrumentos de medida de los conocimientos didáctico-matemáticos.

Dada la diversidad de aproximaciones a la visualización encontradas en la bibliografía, el equipo de investigación en cuyo seno se ha realizado este trabajo consideró necesario elaborar una posición propia sobre el tema usando herramientas del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático. Este estudio teórico, cuyos resultados se han descrito en la sección 3, responden al objetivo específico siguiente:

OE2: *Clarificar las nociones epistémicas y cognitivas implicadas en los procesos de visualización en educación matemática desde la perspectiva ontosemiótica.*

Puesto que nuestro estudio tiene lugar en un contexto educativo específico, formación de futuros maestros de primaria en la Universidad de Granada, se considera necesario realizar un estudio de los currículos españoles de matemáticas de educación primaria y libros de textos en los cuales se concretan dichos currículos. Ello aportará información para la construcción de instrumentos de medida de los conocimientos de los futuros maestros y la interpretación de los resultados de la aplicación de dichos instrumentos. En consecuencia, se formula el siguiente objetivo específico:

OE3: *Analizar el tratamiento dado a la visualización de objetos tridimensionales en las orientaciones curriculares internacional, nacional y autonómica, así como en una muestra de libros de texto de primaria.*

El logro del objetivo general requiere la elaboración de instrumentos de medida que permitan determinar el estado cognitivo de los sujetos con relación al tema investigado. Dada la amplitud de los componentes y elementos de significado del conocimiento didáctico-matemático, como se pone de manifiesto en Godino (2009), será necesario restringir la evaluación a aspectos parciales relevantes del conocimiento común, ampliado y especializado de la VOT. Se deja como cuestión abierta para futuras investigaciones la evaluación de las dimensiones cognitiva (conocimiento del contenido en relación a los estudiantes) e instruccional (conocimiento del contenido con relación a la enseñanza). En consecuencia, formulamos el siguiente objetivo específico:

OE4: *Construir un instrumento para evaluar aspectos relevantes del conocimiento común, ampliado y especializado sobre visualización de objetos tridimensionales.*

El proceso de construcción del instrumento (Cuestionario VOT) se describe en el capítulo 4. La aplicación de este cuestionario permitirá caracterizar los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores en formación y servir de base para diseñar acciones formativas de dichos estudiantes en el campo de la visualización de objetos tridimensionales.

4.2. HIPÓTESIS INICIALES

Los estudiantes del segundo curso de la especialidad de Educación Primaria tienen los conocimientos previos de geometría espacial relativos a sus formaciones básicas (educación primaria y secundaria), y los que profundizaron durante el año anterior en el estudio del bloque temático de geometría para maestros. No obstante, los procesos de visualización de objetos tridimensionales no reciben una atención suficiente y adecuada por parte de los profesores de matemáticas, por lo que se espera confirmar las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1. Los futuros maestros, después de estudiar el tema de "geometría para maestros", presentan dificultades para resolver tareas sobre visualización de objetos tridimensionales que involucran tanto conocimiento común como ampliado.

Hipótesis 2: Los futuros maestros, después de recibir formación en didáctica de las matemáticas, tienen dificultades para resolver tareas sobre visualización de objetos tridimensionales que involucran conocimiento especializado del tema. En particular las justificaciones de las respuestas se basarán en argumentaciones empírico-perceptivas en detrimento de las justificaciones lógico- deductivas.

En el capítulo 4 se realiza un análisis a priori detallado de las tareas incluidas en el cuestionario construido, usando la herramienta "Guía para el reconocimiento de objetos y procesos". Tal análisis permite formular hipótesis más específicas sobre el conocimiento común, ampliado y especializado de los futuros maestros.

Una explicación plausible de las dificultades de los estudiantes para resolver las tareas es que el estudio geométrico previamente realizado no confronta a los estudiantes con actividades donde se valoriza el aspecto visual de la geometría espacial. Como muestra indicativa podemos citar que el texto de Matemáticas para Maestros de Godino y cols (2004) incluye aspectos sobre visualización espacial, pero en la práctica el tema no es tratado en los cursos de formación impartidos en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

5. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA METODOLOGÍA

5.1. COMPONENTES Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se ha organizado en una parte teórica y una parte empírica. En la primera parte se describen las investigaciones previas y las directrices curriculares. El análisis de los objetos emergentes del estudio bibliográfico desde un punto de vista onto-semiótico permite describir el problema de investigación. La segunda parte se divide en la construcción del cuestionario VOT y un estudio de evaluación de los conocimientos de los futuros profesores.

La tesis se organiza en una serie de estudios que se relacionan entre sí como se muestra en el esquema de la Figura 2.16.

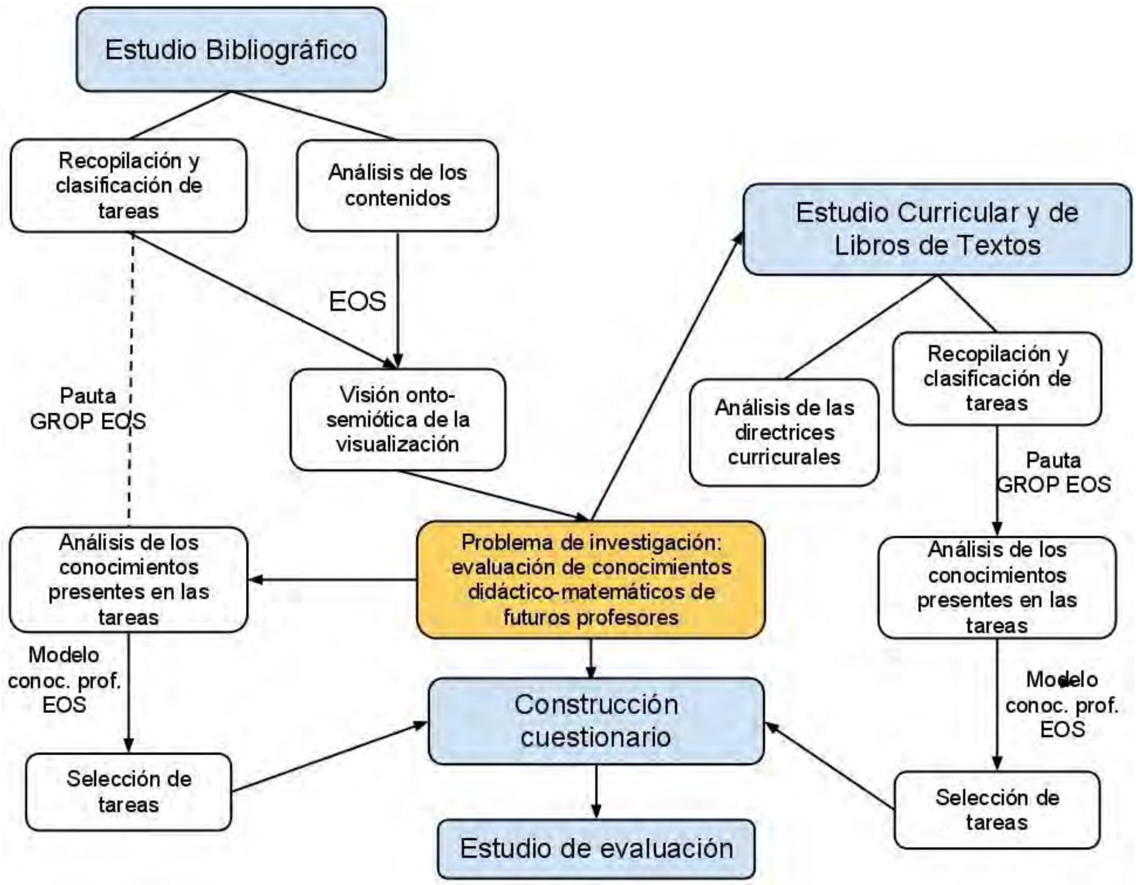


Figura 2.16: Esquema de las etapas de la investigación.

Seguidamente se describen brevemente estas etapas y sus características.

5.1.1. Estudios de tipo teórico y de síntesis

El primer bloque teórico lo compone el estudio bibliográfico, que se ha presentado en el capítulo 1 y consta de dos partes esenciales:

- La identificación y organización de la información relacionada con la visualización espacial presentes en las investigaciones, teniendo en cuenta tres facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje: la faceta epistémica, la faceta cognitiva, y la faceta instruccional
- La recopilación y clasificación, en relación con los diferentes aspectos del tema, de las tareas usadas en las investigaciones.

El marco teórico del enfoque ontosemiótico (sección 2, capítulo 2) nos permite dar una interpretación de los objetos y procesos implicados en la visualización y su relación con los objetos y procesos analíticos. Así mismo nos permite organizar de manera sistemática los resultados de las investigaciones previas construyendo un significado de referencia global sobre la visualización en educación matemática (sección 3). Ello nos ayuda a centrar y formular el problema de investigación: la evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores de educación primaria.

En el segundo bloque (capítulo 3) se describen y analizan las directrices curriculares y los libros de textos de escuela primaria, recopilando y clasificando las tareas presentes relacionadas con la visualización espacial. Esto nos permite tener un significado local de referencia de la visualización espacial en la educación primaria para el contexto educativo español en que tiene lugar la investigación.

5.1.2. Elaboración de un cuestionario y estudio de evaluación

Con el objetivo de elaborar un instrumento de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos sobre VOT se analizan las tareas de las investigaciones y de los libros de textos por medio de una pauta teórica basada en el marco teórico: la GROP (guía para el reconocimiento de objetos y procesos). La aplicación del modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor propuesto por el EOS, nos lleva a la selección de determinados aspectos del conocimiento que nos interesan evaluar y la consecuente selección de determinadas tareas. La construcción del cuestionario VOT se organiza mediante 2 estudios consecutivos, que se resumen en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3: *Estudios para la construcción del cuestionario.*

Estudio	Descripción	Muestras	Material	Análisis	Resultados
1.	Especificación de las variables objetos de medición				
1.1.	Especificación del conocimiento común y ampliado del contenido.	Tres colecciones de libros de textos de educación primaria e investigaciones en el campo de la didáctica de la matemática y de la psicología y	Tareas presente en los libros de textos de educación primaria y en las investigaciones	Análisis por medio de la GROP de las tareas.	Tabla de especificación del conocimiento común y ampliado del contenido.
1.2.	Especificación del conocimiento especializado del contenido	Investigaciones en el campo del conocimiento del profesor para la enseñanza (Ball, 2000; Ball, Lubenski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Shilling, 2008; Shulman 1986, 1987)	Pauta para la formulación de cuestiones de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos (Godino,2009).	Análisis de las diferentes facetas de conocimiento especializado.	Especificación de los aspectos de conocimiento especializado que se quieren medir.
2.	Construcción del cuestionario sobre VOT				
2.1.	Elaboración de un banco inicial de ítems y ensayo de ítems.	6 alumnos	Cuestionario piloto, 14 ítems (Anexo 4)	Análisis cualitativo de las respuestas	Cambios al banco inicial de ítem: cuestionario para el juicio de expertos
2.2.	Juicio de expertos	6 expertos	Cuestionario, material e instructivo para juicios de expertos (Anexo 6)	Puntuación en contenidos Puntuación en concordancia Ítem-contenido Análisis cualitativo de la concordancia entre jueces	Exclusión de ítems, cambios a los enunciados: cuestionario definitivo (Anexo 7)

Estudio 1. Definición de las variables objeto de medición:

Estudio 1.1. Especificación del conocimiento común y ampliado del contenido.

Estudio 1.2. Especificación del conocimiento especializado del contenido

Estudio 2. Se compone de dos subestudios:

Estudio 2.1. Elaboración del banco inicial de ítems y ensayos piloto de ítems con un grupo de alumnos.

Estudio 2.2. Juicio de expertos (investigadores en didáctica de la geometría) para validar la tabla de especificaciones de la variable y seleccionar los ítems del cuestionario definitivo. (Con ello se hace una primera justificación de la validez de contenido del cuestionario).

El tercer estudio se refiere a la aplicación del cuestionario final sobre VOT y al análisis de los resultados obtenidos.

Estudio 3. Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre visualización de objetos tridimensionales de futuros profesores de educación primaria.

5.2. ENFOQUE METODOLOGICO

El análisis y la interpretación de la bibliografía sobre el tema, y el análisis de las soluciones a los ítems de evaluación incluidos en el cuestionario (soluciones expertas de referencias), se realizan aplicando diferentes herramientas teóricas que propone el EOS. Este análisis tiene un componente fuertemente interpretativo. Las respuestas de los estudiantes al cuestionario serán evaluadas atendiendo a variables cuantitativas y cualitativas, para los diferentes tipos de conocimientos.

Las tipologías de conocimientos identificados en los estudiantes, los tipos de justificaciones y las diferentes variaciones propuestas (rasgos del conocimiento especializado del contenido) constituyen variables cualitativas.

Las repuestas de los sub-ítem del cuestionario serán también evaluadas cuantitativamente, por medio de la variable "grado de corrección/pertinencia de la respuesta". También se analizan los errores manifestados por los alumnos y el tipo de representaciones planas utilizadas.

El enfoque metodológico general de la investigación tiene entonces un doble componente cualitativo y cuantitativo, pudiéndose describir como investigación de tipo mixto (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009; Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

5.3. POBLACIÓN Y MUESTRA

La población de interés en este proyecto son los futuros profesores de educación primaria. Son alumnos con un conocimiento variado sobre matemáticas y concepciones sesgadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La población objetivo se reduce a los estudiantes de Magisterio en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. De esta población se han recogido muestras intencionales (Ghiglione y Matalon, 1989).

Los sujetos involucrados en el estudio de evaluación fueron 241 futuros profesores

(185 mujeres, 56 hombres) del segundo curso de la especialidad de Educación Primaria de la Universidad de Granada del año académico 2010-2011, pertenecientes a tres grupos/clases distintos.

5.4. VARIABLES Y TECNICAS DE ANÁLISIS

El análisis de las respuestas de los estudiantes a los ítems del cuestionario se realiza mediante la observación de las siguientes variables:

- Para los sub-ítem sobre conocimientos común y ampliado:
  - Variable cuantitativa: "Grado de corrección de la respuesta"
  - Variables cualitativas: "Tipo de error", "Tipo de representación gráfica o lenguaje" utilizados en las respuestas, "Tipo de justificación".
- Para los sub-ítems relativos al conocimiento especializado del contenido:
  - Variable cuantitativa: "Grado de corrección/pertinencia"
  - Variables cualitativas: "Tipo de justificación", "Tipo de conocimiento identificado", "Tipos de variaciones".

Las variables cualitativas toman determinados atributos relacionados con el análisis a priori de los ítems y las soluciones de los estudiantes, "El análisis cualitativo de estas fuentes de datos implica la aplicación de códigos a priori o emergentes para facilitar la interpretación del significado" (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009, p. 29). Para las variables cuantitativas se han aplicado técnicas descriptivas de análisis estadístico (tablas de frecuencias, promedios y dispersiones,…). Para las variables cualitativas se han elaborado tablas de frecuencias con objeto de describir la incidencia de los tipos de errores, de conocimientos identificados y de variaciones propuestas. Por más detalles sobre la metodología aplicada remitimos al capítulo 5.

CAPÍTULO 3:

ESTUDIO CURRICULAR Y DE LIBROS DE TEXTO

1. INTRODUCCIÓN

Una vez analizadas las investigaciones sobre el tema objeto de nuestra investigación (capítulo 1) y descrito el significado institucional de referencia (capítulo 2), hemos de delimitar el mismo para tener un significado local del tema que nos sirva para la construcción de los instrumentos de evaluación y en la interpretación de las respuestas de los estudiantes.

Como hemos indicado anteriormente, el objetivo principal de esta investigación es evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores de educación primaria sobre aspectos de la visualización de objetos tridimensionales. Consideramos que el conocimiento común del contenido que se prevé enseñar forma parte de los conocimientos didáctico-matemáticos que debe tener un profesor de educación primaria, e incluye el conocimiento para resolver de forma óptima los problemas matemáticos de nivel elemental, o sea diferentes tipos de tareas que se propondrán a los alumnos de un cierto nivel escolar, en nuestro caso educación primaria. De otra parte, está claro que partes de los conocimientos que manifestarán los futuros profesores (sobre todo los que se refieren al conocimiento común del contenido) están relacionados con la enseñanza recibida y con el significado institucional de los conceptos que se le han enseñado durante su escolaridad. Como hemos indicado al describir nuestro marco teórico, el significado de un concepto matemático varía según la institución considerada y los instrumentos semióticos disponibles en la misma. Trataremos entonces de caracterizar el significado que, de la visualización de objetos tridimensionales se presentan en las orientaciones curriculares y en los libros de texto destinados a la enseñanza primaria, lo que formará el *significado institucional local* para nuestro trabajo.

Con este propósito hemos llevado a cabo un análisis curricular, que incluye un estudio del currículo tanto en España y en la Comunidad Autónoma de Andalucía, como a nivel internacional, así como un análisis de libros de texto. Este último nos servirá para determinar cuáles de los elementos de significado de referencia descritos en el capítulo 2 son tratados en los libros de texto y la forma en la cual se presentan. Además nos permite destacar algunos nuevos aspectos del tema que han sido poco investigado en la literatura.

Así mismo, este análisis nos permitirá caracterizar la faceta institucional de los conocimientos sobre el tema relativa a la educación primaria. De hecho dentro del marco teórico del EOS se considera que "los documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, ponen en juego objetos institucionales al tener connotaciones normativas o convencionales, o sea, los objetos son usados como referencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje" (Godino, 2002, p. 246). La distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos será fundamental en el momento del análisis de las respuestas de los estudiantes a las cuestiones que le planteamos.

2. DESCRIPCIÓN DE LOS SIGNIFICADOS PLANIFICADOS PARA LA VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES EN LOS DISEÑOS CURRICULARES

2.1. INTRODUCCIÓN

La reforma de los programas de matemáticas de los años sesenta y setenta así como el reconocimiento más reciente de la importancia de las habilidades espaciales en diferentes ámbitos profesionales (dada especialmente por el empleo de las nuevas tecnologías) ha dado, en muchos países, la oportunidad para deshacerse de esa “geometría tradicional pseudo-axiomática” (Freudenthal, 1984) en todos los niveles de la geometría e incrementar el énfasis puesto en la visualización. Un aspecto relevante de este cambio es la introducción de la geometría espacial en todos los niveles de educación primaria. Si anteriormente la enseñanza de la geometría espacial solo empezaba después de que los estudiantes habían adquirido los conocimientos (en su mayoría axiomáticos) relativos a la geometría plana, y solo se centraba en aspectos aislados del tema (como el cálculo de áreas y volúmenes), actualmente en las directrices curriculares de educación primaria se presentan elementos de geometría espacial en cada nivel educativo y se incluyen aspectos relacionados con la visualización espacial. Freudenthal (1973), refiriéndose al antiguo currículo, observa que “No era inusual que los estudiantes que trabajaban de forma satisfactoria en la geometría plana, fallaban en la espacial. Su imaginación espacial había ido pereciendo por la demasiada ejercitación únicamente con la geometría plana” (p. 409). El cambio curricular concretiza sus propuestas de innovación curricular apoyadas por la concepción de que la enseñanza de la geometría comience por el espacio, “el espacio con sus sólidos es más concreto que el plano con sus figuras (…); el espacio es más intuitivo y facilita más las actividades creativas” (p.413).

El análisis de los currículos actuales nos permitirá acotar el tema y tener una referencia de los aspectos de la visualización espacial que se proponen tratar en los diferentes ciclos de la escuela primaria y su secuenciación, tanto a nivel regional, nacional e internacional.

Godino y Batanero (1994) observan que, en la construcción del currículo, se seleccionan algunos saberes a enseñar y se transforma inevitablemente el significado de los objetos matemáticos implicados. “Además, al proponer ciertos patrones de uso, ciertas connotaciones y notaciones para los constructos matemáticos, excluyendo otros posibles, se está condicionando el entorno de significación de los mismos que se ofrece al alumno” (p. 347).

Los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales

(VOT) en geometría espacial presentados en las diferentes orientaciones curriculares se compararán en seguida con los contenidos y las tareas sobre VOT presentadas en una muestra de libros de texto de educación primaria.

2.2. ORIENTACIONES CURRICULARES INTERNACIONALES

En los Principios y Estándares para la Matemática Escolar del "National Council of Teacher of Mathematics" (NCTM, 2000) se presenta una propuesta de los aspectos que deben ser valorados en la enseñanza de las matemáticas en la escuela. En ellos se indica la comprensión, el conocimiento y las habilidades que los estudiantes deben adquirir a partir de la escuela infantil hasta el grado 12 (17 años). Los Estándares se dividen entre Contenidos (números y operaciones, álgebra, geometría, medidas, y análisis de datos y probabilidad) que describen explícitamente el contenido que los estudiantes tienen que aprender, y Procesos (resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones, y representación) que ponen de relieve la forma de adquirir y usar el conocimiento del contenido.

Por lo que se refiere al contenido Geometría, se propone valorar los siguientes aspectos:

- Analizar las características y las propiedades de las figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre las relaciones geométricas;
- Especificar las ubicaciones y describir las relaciones espaciales usando la geometría analítica y otros sistemas de representación;
- Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas;
- Utilizar la visualización, el razonamiento espacial y modelos geométricos para resolver problemas.

Observamos que éste último aspecto está estrictamente relacionado con el contenido que nos interesa estudiar. Describiremos entonces brevemente sus características principales y cómo se propone desarrollarlo en los diferentes niveles educativos.

"A partir de los primeros años de escolaridad, los alumnos deben desarrollar habilidades de visualización a través de experiencias prácticas con objetos geométricos y mediante el uso de la tecnología que les permite girar y deformar objetos de dos y tres dimensiones. Más tarde, deben analizar y dibujar representaciones en perspectiva, contar sus componentes, y describir características que no se pueden ver, pero que pueden ser inferidas. Los estudiantes necesitan aprender a cambiar de posición, orientación y tamaño de los objetos, físicamente y mentalmente, de forma sistemática a medida que desarrollan su comprensión de la congruencia, semejanza y de las transformaciones."

De manera particular se subraya la importancia del pasaje desde las figuras tridimensionales a sus representaciones, y viceversa, trabajando con diferentes representaciones planas: desarrollos planos de los sólidos, vistas laterales y desde arriba, secciones.

Con respecto a la representación por vistas se sugiere, en los grados 3-5 (8-10 años), la siguiente actividad: "Construir un objeto a partir de únicamente de su vista lateral y su vista frontal" y "determinar si es posible construir más de una estructura que satisface estas dos condiciones".

En la Tabla 3.1 resumimos los aspectos relacionados al sub-contenido de geometría, "Utilizar la visualización, el razonamiento espacial y modelos geométricos para resolver problemas" desde la educación infantil (5 años) hasta el grado 8 de primaria (13 años).

Tabla 3.1: *Aspectos relacionados al sub-contenido de geometría "Utilizar la visualización, el razonamiento espacial y modelos geométricos para resolver problemas" en los distintos ciclos, según el NCTM (2000).*

Último grado de infantil – 2º grado de primaria (5- 7 años)	**3 – 5 grado de primaria (8-10 años)**	**6- 8 grado de primaria (11- 13 años)**

- Crear imágenes mentales de figuras geométricas utilizando la memoria espacial y la visualización espacial - Reconocer y representar figuras desde diferentes perspectivas - Relacionar ideas de geometría con ideas de numero y medida - Reconocer figuras y estructuras geométricas en el entorno y especificar su localización	- Construir y dibujar objetos geométricos - Crear y describir imágenes mentales de objetos, modelos y recorridos - Identificar y construir objetos tridimensional a partir de una representación bidimensional del objeto - Utilizar modelos geométricos para resolver problemas en otras áreas de las matemáticas, como números y medida - Reconocer ideas geométricas y aplicarlas a otras disciplinas y otros problemas que se presentan en la clase o en la vida cuotidiana	- Dibujar objetos geométricos con determinadas propiedades, tales como la longitud de los lados o la medida de los ángulos - Utilizar representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales para visualizar y resolver problemas como los que involucran área y volumen - Utilizar herramientas visuales para representar y resolver problemas - Utilizar modelos geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas - Reconocer y aplicar ideas y relaciones geométricas en otras áreas, tales como el arte, la ciencia y la vida cotidiana.

Además, se especifican de forma más detallada los temas a tratar y se dan ejemplos de actividades relacionadas con este sub-contenido para cada ciclo. Por ejemplo, para el primer ciclo (5-7 años) se sugiere trabajar primeramente con representaciones concretas de las figuras, relaciones y transformaciones; y luego trabajar con sus representaciones mentales. Para desarrollar el sentido espacial en los niños, se indican actividades en las cuales se pida *imaginar, predecir, experimentar y comprobar* ("ver con el ojo de la mente") los resultados de determinadas transformaciones (rotaciones, cortes,…) sobre una figura.

En el segundo ciclo (8-10 años) los estudiantes tienen que ser estimulados a razonar sobre las propiedades de las figuras bi- y tridimensional utilizando relaciones espaciales. Se observa que la visualización está presente en diferentes situaciones que involucran figuras tridimensionales. "Representando las figuras tridimensionales en dos dimensiones y construyendo modelos tridimensionales a partir de las representaciones bidimensionales, los estudiantes aprenden sobre las características de las figuras.” Con respecto a este tema se sugiere el siguiente ejemplo de actividad:

“Determinar si la figura bidimensional de la Figura 3.1 es un desarrollo que puede ser plegado en un cubo”.

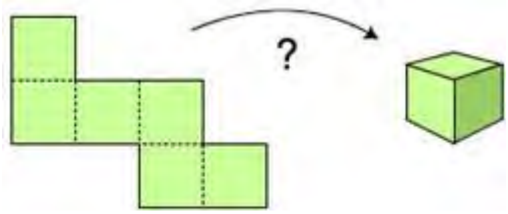


Figura 3.1: Una tarea que pone en relación una figura bidimensional con una tridimensional (NCTM, 2000).

Además se afirma la importancia de experimentar diferentes representaciones planas de objetos tridimensionales, por ejemplo haciendo un dibujo a mano alzada de un cilindro o un cono o construyendo un edificio compuesto por cubos que tenga determinadas vistas (de frente, de arriba y de lado), como se muestra en el siguiente ejemplo:

“Hacer una construcción con diez cubos a partir de las tres figuras siguientes” (Figura 3.2).

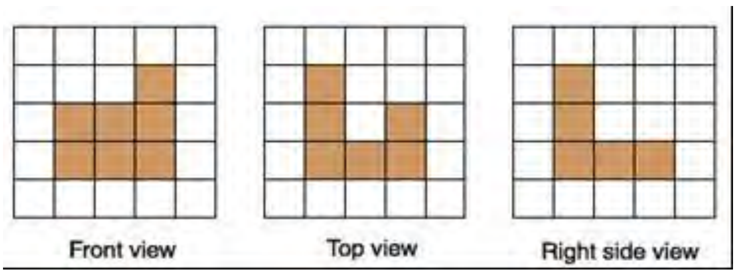


Figura 3.2: Vistas de un objeto tridimensional (NCTM, 2000, adaptadas de Battista y Clements, 1995, p. 61)

Por lo que se refiere al tercer ciclo (11-13 años) se explicita la importancia de las habilidades de visualización y razonamiento sobre relaciones espaciales relacionadas con la geometría, en particular en la interpretación de representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales y en la explicación de relaciones matemáticas por medio de demostraciones visuales. Se observa que la dificultad que tienen los estudiantes para encontrar el área de la superficie de un objeto tridimensional representado en el plano es frecuentemente asociada a la incapacidad de visualizar las caras ocultas (no visibles) del objeto representado. De aquí la importancia de trabajar con modelos tridimensionales y sus desarrollos planos para facilitar la visualización. En particular se afirma que:

"Los estudiantes también necesitan estudiar, construir, componer y descomponer objetos bi- y tridimensionales, con una variedad de medios, incluidos el dibujo en papel y lápiz, el uso de modelos geométricos y los software de geometría dinámica. La interpretación o el dibujo de diferentes vistas de las construcciones, tales como la planta y las vistas de frente y de atrás, utilizando una hoja de puntos, puede ser útil para el desarrollo de la visualización. Los estudiantes pueden construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales, dibujar objetos a partir de una descripción geométrica; y dar una descripción del objeto, incluyendo sus propiedades geométricas."

En este documento varios elementos de visualización espacial aparecen a lo largo del currículo en los diferentes niveles educativos.

Observamos que entre las diferentes formas de representar un objeto tridimensional en el plano, se da particular énfasis al dibujo a mano alzada (se señala el dibujo en perspectiva), al desarrollo plano y las vistas ortogonales. Además de los procedimientos visuales necesarios para dibujar e interpretar una representación plana se mencionan otros procedimientos que tienen connotaciones visuales, tales como:

- Imaginar, predecir, experimentar y comprobar los resultados de determinadas transformaciones (rotaciones, cortes,…) sobre una figura
- Representar relaciones y transformaciones

- Componer y descomponer en partes.

2.3. ORIENTACIONES CURRICULARES NACIONALES

En las orientaciones curriculares españolas (MEC, 2006) se afirma la importancia de la visualización espacial como parte del desarrollo del pensamiento matemático, en particular en la interpretación, comunicación y análisis de informaciones gráficas relativas a la realidad en la cual viven los niños. Se indica que:

"El desarrollo del pensamiento matemático contribuye a la competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico porque hace posible una mejor comprensión y una descripción más ajustada del entorno. En primer lugar, con el desarrollo de la visualización (concepción espacial), los niños y las niñas mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio, lo que les será de gran utilidad en el empleo de mapas, planificación de rutas, diseño de planos, elaboración de dibujos, etc. (…) Por último, la destreza en la utilización de representaciones gráficas para interpretar la información aporta una herramienta muy valiosa para conocer y analizar mejor la realidad".

Además se subraya la importancia del uso de artefactos y materiales manipulativos como herramientas para desarrollar la capacidad de visualizar relaciones geométricas.

"El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar (…) desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Todo ello se logra, estableciendo relaciones constantes con el resto de los bloques y con otros ámbitos como el mundo del arte o de la ciencia, pero también asignando un papel relevante a la parte manipulativa a través del uso de materiales y de la actividad personal realizando plegados, construcciones, etc. para llegar al concepto a través de modelos reales. A este mismo fin puede contribuir el uso de programas informáticos de geometría dinámica.”

El currículo español describe los contenidos para los diferentes ciclos divididos en cuatro bloques: 1. Números y operaciones, 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes, 3. Geometría, 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Observamos que en el bloque de Geometría el trabajo con objetos tridimensionales está presente en todos los ciclos. Resumimos los objetivos principales relacionados a la visualización espacial previstos para los diferentes ciclos en el bloque de geometría (Tabla 3.2).

Tabla 3.2: *Objetivos principales relacionados con la visualización espacial, descrito en MEC (2006).*

<table>
<tr><th>Primer ciclo</th><th>Segundo ciclo</th><th>Tercer ciclo</th></tr>
<tr><td>- Descripción de posiciones y movimientos, en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia
- Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre relaciones espaciales
- Búsqueda de elementos de regularidades en cuerpos a partir de la manipulación de objetos</td><td colspan="2">- Construcción de cuerpos geométricos a partir de un desarrollo
- Descripción y representación de construcciones geométricas y relaciones espaciales</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Descripción de la forma de cuerpos geométricos , utilizando el vocabulario geométrico básico
- Formación de cuerpos geométricos a partir de otros por composición y descomposición</td><td>Reconocimiento de simetrías en objetos</td></tr>
</table>

Otras trasformaciones sobre las figuras a las cuales se hace referencia son las traslaciones y las simetrías en el segundo ciclo, las ampliaciones y reducciones en el tercer ciclo, aunque no se especifica si se aplican a objetos tridimensionales.

En los criterios de evaluación que se presentan en el currículo, destacamos los siguientes aspectos relacionados con la visualización espacial:

- Describir la situación de un objeto del espacio próximo, y de un desplazamiento en relación a sí mismo, utilizando los conceptos de izquierda-derecha, delante-detrás, arriba-abajo, cerca-lejos y próximo-lejano. Este criterio pretende evaluar las capacidades de orientación y representación espacial, teniendo en cuenta tanto el lenguaje utilizado en la descripción como la representación en el plano de objetos y situaciones.

- Obtener información puntual y describir una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de una pista), tomando como referencia objetos familiares y utilizar las nociones básicas de movimientos geométricos, para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana y para valorar expresiones artísticas.
- Reconocer y describir formas y cuerpos geométricos del espacio (…). Este criterio pretende valorar si conocen las propiedades básicas de cuerpos y figuras planas.
- Interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares.

Por lo que se refiere a las orientaciones metodológicas relacionadas al bloque de geometría destacamos los siguientes puntos:

- Debe darse especial importancia al dibujo y construcción de cuerpos geométricos, a la parte manipulativa del bloque mediante el uso de materiales como geoplanos, mecanos, plegados, construcciones, materiales para componer y descomponer polígonos y poliedros, tramas de puntos, etc., (…) puesto que con ello se desarrolla la capacidad de visualizar y describir relaciones geométricas.
- Los errores que cometen los alumnos en la resolución de problemas geométricos van, en general, asociados a una representación inadecuada de la figura con la que trabajan y, por ello, se debe insistir en que utilicen diferentes representaciones de la misma figura o la coloquen en la posición que más le favorezca en función del objetivo buscado.

Estas últimas observaciones revelan la importancia de la interpretación y elaboración de diferentes tipos de representaciones planas en la enseñanza de la geometría espacial, trabajo que permite el desarrollo de la visualización.

2.4. ORIENTACIONES CURRICULARES EN LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE ANDALUCÍA

Las orientaciones de la Comunidad Autónoma de Andalucía de la Orden 10/8/2007 (Consejería de Educación, Junta Andalucía) sobre el área de matemáticas propone distinguir seis núcleos temáticos: 1. Resolución de problemas, 2. Uso de los recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, 3. Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas, 4. Desarrollo del sentido numérico. Medida de magnitudes. 5. Las formas y figuras y sus propiedades, 6. Tratamiento de la información, azar y probabilidad.

Los primeros tres núcleos temáticos se definen como trasversales: en el 1 y 2 aparecen algunos elementos que, aunque muy generales, pueden tener cierta importancia en situaciones que involucran visualización espacial. Citamos algunos.

- Resolución de problemas: se orienta hacia "la reflexión, el análisis, la concienciación y la actitud crítica ante la realidad que nos rodea en la vida cuotidiana", fomenta " la interpretación y análisis de resultados en el contexto en el que se ha planteado y la habilidad para comunicar con eficacia los procesos y resultados seguidos", se requiere "la traducción del lenguaje verbal al matemático", se introducirán nuevos conceptos fundamentándolos a través de "situaciones que manifiestan su interés práctico y funcional".
- Uso de los recursos TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: se prevé profundizar en "el conocimiento, manejo y aprovechamiento didáctico de alguna aplicación básica de Geometría Didáctica".

El núcleo temático "Las formas y figuras y sus propiedades" incluye aspectos relevantes relacionados con nuestro tema. Por ejemplo, se hace mención a su relevancia y sentido educativo, indicando que:

- La geometría se centra sobre todo en la clasificación, descripción y análisis de relaciones y propiedades de las figuras en el plano y en el espacio.
- El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para conectar a niños y niñas con su entorno y para construir, dibujar, hacer modelos, medir o clasificar de acuerdo con criterios previamente elegidos.

En las "Sugerencias acerca de líneas metodológicas y utilización de recursos" se indica además:

- La resolución de problemas, a través de planteamientos que requieran la construcción de modelos o situaciones susceptibles de ser representadas a través de figuras o formas geométricas.
- La observación y manipulación de formas y relaciones en el plano y en el espacio presentes en la vida cotidiana (juegos, hogar, colegio, etc.) y en nuestro patrimonio cultural, artístico y natural servirán para desarrollar las capacidades geométricas, siguiendo el modelo de Van Hiele para el reconocimiento de formas, propiedades y relaciones geométricas, invirtiendo el proceso que parte de las definiciones y fórmulas para determinar otras características o elementos.
- Educar a través del entorno.
- El reconocimiento, representación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos se debe abordar a través de la observación y de la manipulación física o virtual.
- El estudio de las formas más complejas debe abordarse a través del proceso de descomposición de figuras elementales
- El cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas debe iniciarse por medio de descomposiciones, desarrollos, etc.

Observamos que aunque las orientaciones curriculares andaluzas no mencionan explícitamente la importancia de la visualización espacial en el contexto de la geometría, sugieren actividades que requieren la interpretación y el estudio de representaciones planas y tridimensionales de figuras geométricas, que involucran visualización.

2.5. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS CURRICULAR

Observamos que las orientaciones curriculares regionales y nacionales incluyen aspectos específicos de la visualización espacial en los contenidos relacionado con la geometría, pero frecuentemente se expresan de forma muy general sin especificar con claridad su importancia en el contexto. Creemos que sería importante reforzar los contenidos relacionados con la visualización espacial en geometría en el currículo español en la línea sugerida por los Principios y Estándares (NCTM, 2000), no tanto por seguir las tendencias de otros países, sino para adaptar la enseñanza a las necesidades de la sociedad de la información y preparar a los ciudadanos para los retos a que deberán enfrentarse en su trabajo futuro (Gonzato y Godino, 2010). De hecho, la importancia del desarrollo de la visualización espacial (en particular en relación con la interpretación de representaciones de objetos tridimensionales) en la vida cuotidiana es evidenciada en todos los currículos, puesto que permite una mejor comprensión, conocimiento, descripción y análisis del mundo físico que nos rodea.

Las orientaciones curriculares analizadas proponen tratar diferentes aspectos relacionados con la visualización de objetos tridimensionales. Los contenidos son frecuentemente asociados a tipos o ejemplos de situaciones-problemas que involucran un determinado lenguaje visual y acciones específicas.

Organizamos los principales contenidos curriculares relacionados con la visualización espacial propuestos en los Estándares para la Matemática Escolar del “National Council of Teacher of Mathematics” (NCTM, 2000), en el Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006) y la Orden 10/8/2007 (Consejería de Educación, Junta Andalucía), distinguiendo tres componentes: las tareas visuales, el lenguaje visual y las acciones visuales implicadas, descritas en el apartado 3 del capítulo 2.

Tareas visuales (tipos y ejemplos)

1) Comunicación/interpretación de la forma, sus componentes y estructura, de objetos espaciales, o bien de objetos imaginados (pensados o ideales):

- Identificar y construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales

    Ejemplo: Construir un edificio compuesto por cubos que tenga determinadas vistas (de frente, de arriba y de lado)

- Interpretar representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales

    Ejemplos: Determinar si una determinada figura bidimensional es un desarrollo plano que puede ser plegado para formar un determinado objeto tridimensional; Describir características de un objeto tridimensional representado en el plano, que no se puede ver, pero que pueden ser inferidas

- Dibujar figuras tridimensionales en el plano

    Ejemplos: Dibujar un cilindro o un cono a mano alzada; Dibujar objetos a partir de una descripción geométrica

2) Comunicación de la posición relativa de objetos en el espacio.

- Cambiar de posición y orientación de los objetos

    Ejemplo: Describir posiciones, en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia

Lenguaje visual:

- Deíctico: delante-detrás, arriba-abajo, derecha-izquierda, dentro-fuera
- Icónico/diagramático: representaciones bidimensionales del objeto tridimensional: desarrollos planos de los sólidos, vistas laterales y desde arriba, secciones, plegados; hoja

de puntos, trama de puntos

- Manipulativo: representaciones concretas de las figuras, modelos tridimensionales, construcciones, modelos geométricos, geoplanos, mecanos, plegados, construcciones, materiales
- Software de geometría dinámica

Acciones visuales:

- Imaginar, predecir, experimentar y comprobar los resultados de determinadas transformaciones sobre una figura:
  - rotaciones
  - cortes, secciones
  - proyecciones
  - composiciones y descomposiciones
  - traslaciones

  …
- Describir y representar construcciones geométricas y relaciones espaciales

Se observa que, refiriéndonos a la clasificación general de la tareas de visualización de objetos tridimensionales propuesta en el capítulo 1, las mayorías de tareas identificadas en los planes curriculares analizados se pueden asociar a las acciones principal "coordinar e integrar vistas de objetos" y "componer y descomponer" (tabla 1.2.). El lenguaje visual propuesto en las orientaciones curriculares se refiere, en un primer momento, al material manipulativo y a las expresiones de lenguaje deíctico, para luego pasar a representaciones planas de los objetos tridimensionales y un lenguaje geométrico. Las acciones visuales involucradas en los objetivos propuestos se refieren a trasformaciones del objeto. Observamos que en los currículos no se hace referencia al estudio sistemático de las proyecciones para representar e interpretar correctamente los dibujos en perspectiva de los objetos tridimensionales y sus propiedades.

Concluimos destacando que un estudio sistemático de los currículos nacionales e internacionales por parte de los futuros profesores desvelaría el importante papel que tiene la VOT como componente importante de la geometría espacial y podría incentivar su integración y desarrollo en todos los ciclos de la escuela primaria. Sin embargo, para una incorporación real de dichos aspectos de la VOT en la enseñanza, creemos que las sugerencias dadas por los diseños curriculares tendrían que estar acompañadas por una formación académica adecuada, que tenga en cuenta los diferentes tipos de objetos y procesos, visuales y analíticos, presentes en VOT y que permita a los futuros profesores desarrollar un conocimiento especializado sobre el tema. Con referencia al significado epistémico de la VOT descrito en el capítulo 2, al trabajar la VOT en formación de maestros, hay que prestar particular atención a la dualidad ostensiva- no ostensiva de los objetos matemáticos, para no confundir el objeto matemático son sus representaciones ostensivas, sean visuales o de otro tipo. "Es necesario tener en cuenta la naturaleza no ostensiva, inmaterial, de los objetos matemáticos y las relaciones dialécticas complejas que se establecen entre estos objetos y sus representaciones materiales. Al mismo tiempo se tiene que saber que no hay objeto matemático sin sus diversas representaciones, porque tal objeto no es otra cosa que las reglas de uso de dichas representaciones" (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández , 2012, p. 20).

3. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

3.1. INTRODUCCION

Para tener información más detallada sobre la forma en la cual se propone el estudio de la visualización de los objetos tridimensionales en la escuela primaria, analizaremos una muestra de libros de texto de varias editoriales usadas en España. Usualmente el libro de texto es un recurso al que los profesores otorgan gran importancia (Guillén, González y García, 2009); además ofrece una concepción legitimada del saber a enseñar e institucionaliza una forma de progresión del conocimiento de los estudiantes (Chevallard, 1991). Refiriéndose a la enseñanza de las ciencias en general, Campanario (2001) afirma que "para muchos profesores la elección de un libro de texto supone su decisión curricular más importante, por lo que no es raro que este instrumento ejerza un efecto poderoso sobre sus enfoques docentes y sobre las estrategias de aprendizaje de los alumnos".

Además, el libro de texto es el material donde las distintas editoriales intentan reflejar el currículo coherentemente con las investigaciones didácticas: "El saber didáctico que progresivamente va produciéndose en la investigación en educación matemática queda reflejado en diversas fuentes dispersas y heterogéneas (revistas, monografías de investigación, etc.), pero de manera más accesible a los profesores se refleja en los libros de texto escolares. Los libros de texto escolares constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores y, en cierta medida, los resultados de la investigación" (Godino, Font y Wilhelmi, 2006, p. 132).

Creemos entonces que un análisis de una muestra amplia y representativa de los libros nos pueda proporcionar información bastante completa sobre los conocimientos que los profesores intentarán trasmitir a los alumnos.

El análisis de los contenidos y tareas presentes en los libros de texto de educación primaria nos permitirá obtener información sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría espacial y su forma de relacionarse con aspectos de visualización.

Describiremos, en primer lugar, los objetivos de este análisis, y la metodología seguida para llevarlo a cabo y a continuación los resultados encontrados, relativos a la forma en que se tienen en cuenta en los libros de texto algunos tipos de elementos de significado que hemos descrito en nuestro marco teórico. Todo ello será utilizado en la construcción del cuestionario de evaluación, cuyo contenido con respecto al conocimiento común del contenido estará basado en el significado institucional local que se contempla sobre la visualización de objetos tridimensionales en la enseñanza primaria.

3.2. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Para llevar a cabo el análisis hemos tomado 26 libros de texto de educación primaria, que incluyen entre sus temas contenidos relativos a la geometría espacial. Vamos a analizar los textos de las editoriales de más amplia difusión en la Comunidad Autónoma de Andalucía en los cuales han desarrollado el currículum de la Educación Primaria (EP). En concreto nos centramos en los textos de 1º a 6º de las últimas ediciones de las editoriales SM, Santillana y Anaya. Además analizamos algunos libros de texto de estas editoriales de las ediciones anteriores.

En este informe centramos la atención en los contenidos y las tareas de geometría espacial, prestando particular atención a las que involucran determinados aspectos de la visualización espacial. Con el análisis se pretende determinar la incidencia de determinados tipos de tareas y representaciones planas en los diferentes libros de texto, por año, editorial y curso.

Aunque en el currículo que se propone en Andalucía aparecen aspectos relacionados con la visualización espacial en todos los ciclos, se observa que en los libros de texto la presencia de elementos que tratan el tema incrementa a lo largo de los ciclos. Hemos decidido seleccionar un tamaño de la muestra de libros dependiendo del nivel educativo al cual se dirigen: para el primer ciclo hemos seleccionado 3 libros por cada año, parar el segundo ciclo hemos seleccionado 4 libros por cada año, y para el tercer ciclo hemos seleccionado 6 libros por cada año. Teniendo un total de 26 libros de texto a analizar. Los libros han sido publicados entre 1998 y 2009 y corresponden a 3 editoriales diferentes. Dichos libros estaban presentes en la biblioteca de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, y disponibles a los profesores en formación. Los libros analizados se presentan en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3: *Libros de texto incluidos en el análisis.*

Código	**Título**	**Autores**	**Editorial**	**Edición**
1SM07	Matemáticas. 1º Primaria. Proyecto Trampolín.	B. Fernández, E. Santaolalla, A. Monzó, B. Ferrandíz	SM	2007
2SM07	Matemáticas. 2º Primaria. Proyecto Trampolín.	B. Fernández, E. Santaolalla, A. Monzó, B. Ferrandíz	SM	2007
3SM08	Matemáticas. 3 Primaria. Proyecto Tirolina.	E. Santaolalla, V. Aranzubía, M. Peña	SM	2008
4SM08	Matemáticas. 4 Primaria. Proyecto Tirolina.	E. Santaolalla, V. Aranzubía, M. Peña	SM	2008
5SM06	Matemáticas. 5 Primaria. Proyecto Planeta amigo	V. Aranzubía, E. Santaolalla, M. Gómez, E. Pérez	SM	2006
6SM06	Matemáticas. 6 Primaria. Proyecto Planeta amigo	V. Aranzubía, E. Santaolalla, J. Roldán, E. Pérez	SM	2006
5SM09	Matemáticas. 5 Primaria. Proyecto Timonel	X. Peña, E. Santaoalla, V. Aranzubía, B. Sanz	SM	2009
6SM09	Matemáticas. 6 Primaria. Proyecto Timonel	X. Peña, E. Santaoalla, V. Aranzubía, B. Sanz	SM	2009
5SM02	Matemáticas. 5 Primaria. Proyecto Mundo para todos	R. Gómez , R.Valbuena	SM	2002
6SM02	Matemáticas. 6 Primaria. Proyecto Mundo para todos	R. Gómez , R.Valbuena	SM	2002
1SA06	Matemáticas. 1 Primaria. Proyecto un paso más	M.Garín, M. Rodríguez	Santillana	2006
2SA06	Matemáticas. 2 Primaria. Proyecto un paso más	P. García, M Garín	Santillana	2006
3SA06	Matemáticas. 3 Primaria. Proyecto un paso más	J. A. Almodóvar, F. García M.Garín, R. Gómez, M. Rodríguez y J. L. Uriondo	Santillana	2006
4SA06	Matemáticas. 4 Primaria. Proyecto un paso más	J. A. Almodóvar, F. García, M.Garín, R. Gómez, M. Rodríguez y J. L.Uriondo	Santillana	2006

5SA06	Matemáticas. 5 Primaria. Proyecto un paso más	J.A. Almodóvar, F. García, J. Hernández, M. R. Moreno, M. Rodríguez, E. Serrano	Santillana	2006
6SA06	Matemáticas. 6 Primaria. Proyecto un paso más	J.A. Almodóvar, F. García, J. Hernández, M. R. Moreno, M. Rodríguez, E. Serrano	Santillana	2006
1AN07	Matemáticas. 1 Primaria. Salta a la vista.	L. Ferrero, M.C. Jiménez, M.G. Martín	Anaya	2007
2AN07	Matemáticas. 2 Primaria. Salta a la vista.	L. Ferrero, M.C. Jiménez, M.G. Martín	Anaya	2007
3AN08	Matemáticas. 3 Primaria. Abre la puerta	L. Ferrero, I. Gaztelu, P. Martín, L. Martínez	Anaya	2008
4AN08	Matemáticas. 4 Primaria. Abre la puerta	L. Ferrero, I. Gaztelu, P. Martín, L. Martínez	Anaya	2008
5AN06	Matemáticas. 5 Primaria. Deja Huella.	L. Ferrero, I. Gaztelu, P. Martín, L. Martínez	Anaya	2006
6AN06	Matemáticas. 6 Primaria. Deja Huella	L. Ferrero, I. Gaztelu, P. Martín, L. Martínez	Anaya	2006
3AN99	Matemáticas Andalucía. 3 Primaria. Serie Sol y Luna	L. Ferrero, I. Gaztelu, P. Martín, L. Martínez	Anaya	1999
4AN99	Matemáticas Andalucía. 4 Primaria. Serie Sol y Luna	L. Ferrero, I. Gaztelu, P. Martín, L. Martínez	Anaya	1999
5AN99	Matemáticas Andalucía. 5 Primaria. Serie Sol y Luna	L. Ferrero, I. Gaztelu, P. Martín, L. Martínez	Anaya	1998
6AN99	Matemáticas Andalucía. 6 Primaria. Serie Sol y Luna	L. Ferrero, I. Gaztelu, P. Martín, L. Martínez	Anaya	1999

Para simplificar la lectura de los siguientes apartados, citamos los libros de texto indicando el respectivo código (Tabla 3.3).

En los apartados que siguen vamos a describir los resultados de los siguientes dos estudios principales:

1. Descripción de los contenidos y tareas sobre VOT
2. Análisis de los tipos de representaciones utilizadas

Estudio 1. Sintetizamos los elementos de contenidos principales relacionados con la VOT presentados al principio de cada libro de texto, clasificándolos según las categorías propuesta por el EOS: conceptos, propiedades, procedimientos, lenguaje/representación. Además resumimos el desarrollo de los aspectos teóricos de la geometría espacial en los libros. Tomando la clasificación de las tareas propuestas en el capítulo 1 y los elementos de significado de referencia de la visualización de objetos tridimensionales, descrito en el capítulo 2, intentamos caracterizar con más detalle las tareas que aparecen con más frecuencia en los libros de texto.

Estudio 2. Describimos los diferentes tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales en los libros de texto, y su incidencia en las diferentes editoriales, diferenciando entre representaciones que mantienen el aspecto global del objeto de representaciones que necesitan una reorganización de la información para visualizar el objeto (ver capítulo 1).

3.3. DESCRIPCIÓN DE LOS CONTENIDOS Y TAREAS SOBRE VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES

3.3.1 Índices de los contenidos

En cada libro de texto, además del índice general se presenta un índice de los contenidos de los diferentes capítulos del libro. La recopilación de los índices de los contenidos del conjunto de libros nos da un primer enfoque sobre cuáles elementos relacionados con la VOT se pretenden desarrollar en los libros de texto de educación primaria. Frecuentemente dichos elementos se sitúan bajo los siguientes contenidos principales: Geometría, Orientación/Situación espacial, Lógica, Cuerpos /Formas geométricas y Visión espacial/imaginación espacial.

Tabla 3.4: *Contenidos presentes en los índices de los libros de texto*

Conceptos	Cuerpos geométricos	Cuerpos redondos : Cilindro, cono, esfera
		Cuerpos de revolución: Cilindro, cono, esfera

		Poliedros: Prismas, Pirámides, Poliedros regulares
	Volumen	
Propiedades	Propiedades geométricas	
	De los cuerpos geométricos:	Elementos: caras y vértices
		La superficie planas y curvas
Procedimientos	Orientación	Posicionarse en el espacio
		Orientarse en el espacio
	Reconocimiento y clasificación	Reconocer formas
		Reconocer cuerpos geométricos en objetos
		Clasificar cuerpos geométricos
		Clasificar prismas
		Clasificar pirámides
	Identificar composiciones de los cuerpos geométricos	
	Girar figuras	
	Identificar cuerpos geométricos vistos desde diferentes lugares	
	Elección de un poliedro a partir de su desarrollo	
	Elección del desarrollo de una pirámide	
Lenguaje/Representaciones	Encima, debajo, delante, detrás, a un lado, cerca, lejos, izquierda, derecha, arriba, abajo,…	
	Dibujos	
	Mapas, planos y croquis	
	Modelado de cuerpos geométricos	
	Las huellas de los cuerpos geométricos	
	Vistas	
	Desarrollo plano de cuerpos geométricos	

En la tabla incluida en el Anexo 1 indicamos la presencia de cada elemento del contenido en los diferentes libros de texto considerados. Observamos que en dos libros de texto del quinto año (5SA06, 5AN06) no se presentan contenidos relacionados con la geometría espacial, un hueco de contenido no justificado por los currículos.

En general, la gran mayoría de los contenidos descritos en los libros de texto se refieren a conceptos geométricos, mencionados por familias. Observamos que el cilindro, el cono y la esfera son principalmente llamados "cuerpos redondos". El adjetivo "redondo", tiene una fuerte componente visual que se refiere a una característica de la superficie del sólido. Los cuerpos de revolución serían entonces un sub-conjunto de los cuerpos redondos. En únicamente tres libros de texto de sexto año (6SM02, 6AN99 y 6AN06) se utiliza el término "cuerpos de revolución".

En las propiedades y procedimientos descritos en los contenidos destacamos las siguientes, en las cuales aparecen interesantes aspectos visuales: propiedades visuales que describen las formas de los cuerpos geométricos (por ejemplo las superficies planas y curvas) y la identificación de un cuerpo geométrico a partir de determinadas representaciones planas (desarrollos, vistas). Sin embargo, son pocos los libros de texto que mencionan dichos elementos en los contenidos. Destacamos que la editorial SM presenta, desde el cuarto año hasta el sexto (ediciones del 2006 y 2008), dichos procedimientos como elementos de contenido, lo que hace suponer una posible presencia en estos libros de un enfoque hacia la visualización.

Por lo que se refiere al lenguaje y representaciones visuales, observamos que la editorial SM indica la representación por "vistas" y los "desarrollos planos de cuerpos geométricos" como elementos curriculares previsto en el tercer ciclo, mientras la editorial Santillana sólo hace referencia a la representación por "vistas" en el segundo ciclo. Por lo que se refiere a la editorial Anaya indicamos la presencia de un lenguaje visual relacionado con el contexto real: mapas, planos, croquis, modelado de cuerpos geométricos, huellas de los cuerpos geométricos, en el segundo y tercer ciclo.

En las tres editoriales se indican como elementos curriculares del primer año los elementos de lenguaje deíctico, que sirven para describir posiciones y orientaciones: encima, debajo, delante, detrás, a un lado, cerca, lejos, alrededor, izquierda, derecha, arriba, abajo.

De este primer análisis podemos destacar que, aunque en los índices de los contenidos aparezcan elementos de geometría espacial, estos se refieren principalmente a elementos conceptuales relacionados con la clasificación de los sólidos en diferentes familias.

Únicamente la editorial SM explicita procedimientos que involucran la interpretación y elaboración de representaciones planas de los sólidos en los índices de los contenidos.

3.3.2. Contenidos de geometría espacial los libros de texto

En esta sección resumimos los aspectos teóricos presentados en los libros de texto analizados, centrándonos únicamente en el análisis de aquellos recuadros en los cuales se presentan definiciones de conceptos o propiedades, y que en general preceden una serie de tareas sobre dichos aspectos. Dichos recuadros teóricos además de tener un título que se refiere a los objetos que definen ("los cuerpos geométricos", "los prismas",...) frecuentemente se designan con "Observa" (editorial Santillana), "Aprende a aprender" (Editorial SM), "Aprende" y "Ten en cuenta" (editorial Anaya).

En los recuadros teóricos se presentan casi únicamente descripciones y definiciones de los distintos sólidos. En lo que sigue describimos con mayor detalle la forma con la cual se presentan los sólidos en los distintos ciclos.

En el primer año se definen determinados objetos tridimensionales (cilindro, cono, esfera, prisma, cubo y pirámide), dando para cada ejemplar dibujos en perspectiva (principalmente en perspectiva caballera), y/o el dibujo de un objeto de uso cuotidiano que tiene la misma forma. Los alumnos aprenden a asociar a determinadas formas sus respectivos nombres, sin enunciar verbalmente definiciones ni propiedades. Este primer acercamiento a los objetos tridimensionales tiene entonces una fuerte componente visual. Llamamos a dicha forma de definir los sólidos "definición ostensiva" (ejemplo en Figura 3.3).

Figura 3.3: Ejemplo de definición ostensiva de los sólidos (1SM 07, p.163)

En el segundo año además de "definir ostensivamente" el concepto de "prisma", "pirámide" y "cuerpos redondo" (dando algunas representaciones de objetos de cada familia, ver Figura 3.4) se enuncian algunas propiedades y definiciones. Por ejemplo, se indica que: "las caras de las pirámides son triángulos" (2SM07, p. 165). Debajo de las representaciones de la esfera, el cilindro y el cono se afirma que "se llaman cuerpos redondos" (2SA06, p.112), o bien "estas figuras se llaman cuerpos redondos porque tienen partes redondeadas" (2SM07, p.177). El atributo "redondeado" tiene una fuerte componente visual y siguen siendo también en el segundo ciclo la característica principal que define dicha familia.

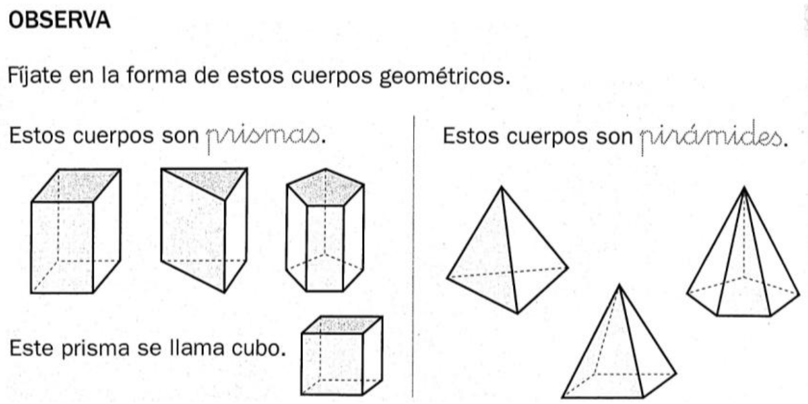


Figura 3.4: Ejemplo de "definición ostensiva" de los prismas y pirámides (2SA06, p.94).

A partir del tercer año, además de representar gráficamente ejemplares de "prismas" y "pirámides", se dan algunas propiedades de manera verbal. Por ejemplo, se indica que los prismas "tienen bases iguales y varias caras laterales que son polígonos" (3SM08, p.202). En el cuarto año se introduce la definición de poliedro y se enuncian las propiedades que permiten diferenciar los varios tipos de primas y pirámides. Además se proporcionan unas primeras definiciones de cilindro, cono y esfera, haciendo referencia a la forma y el número de las bases y a sus superficies laterales curvas. Dichos elementos se indican en las respectivas representaciones. Observamos que, en estos primeros ciclos, los recuadros que definen los objetos geométricos tridimensionales, se apoyan principalmente en representaciones en perspectiva.

En el tercer ciclo, en los recuadros teóricos, se definen verbalmente qué son los poliedros, los poliedros regulares, los prismas, las pirámides, el cilindro, el cono, la esfera. Además se dan diferentes dibujos en perspectivas y desarrollos planos que apoyan las definiciones e ilustran determinadas propiedades de los sólidos (por ejemplo el número, la forma y la posición de las caras, ver Figura 3.5).

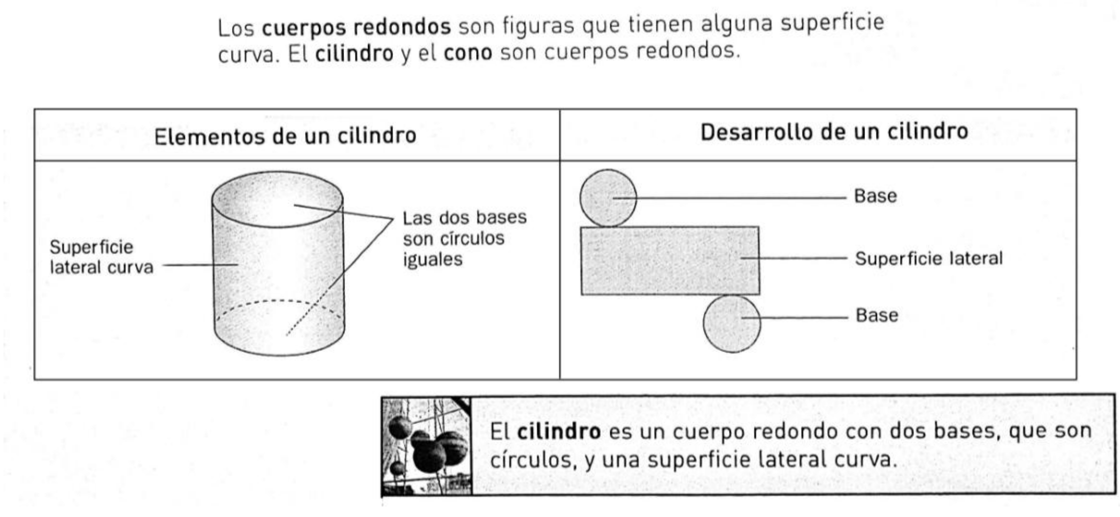


Figura 3.5: Definición de cilindro como cuerpo redondo (5SM06, p. 214).

En general podemos confirmar la presencia de interesantes aspectos visuales ya destacados en los índices de los contenidos de los libros de texto, sobre todo por lo que se refiere al tercer ciclo. En particular señalamos la presencia de diferentes tipos de representaciones planas de los sólidos: la perspectiva (caballera e isométrica), las vistas ortogonales, los desarrollos planos. En algunos libros de texto del tercer ciclo (ver sección 3.4.1) el cilindro, el cono y la esfera vienen introducidos gráficamente como cuerpos de revolución, o sea obtenibles con la rotación de una figura plana alrededor de un eje.

En el siguiente apartado nos interesa identificar los diferentes tipos de tareas de geometría espacial presentadas en los libros de texto, en particular distingüendo y caracterizando los tipos de tareas sobre VOT descritas en el capítulo 1.

3.3.3. Descripción de tareas sobre VOT presentes en los libros de texto de educación primaria

En los libros de texto analizados el espacio dedicado a las tareas es visiblemente mayor que el destinado a los cuadros teóricos. Las páginas dedicadas a las tareas se designan con los siguientes títulos "Actividades", "Problemas", "Práctica", "Comprende", "Descubro lo que sé", "Para practicar", "Para aplicar", "Aplico lo aprendido", "Repaso lo que he aprendido", "Avanzo", "Resumo", "Refuerzo", y agrupan actividades de varios tipos, aunque no siempre sus diferentes denominaciones las diferencian. Observamos que algunas interesantes tareas sobre VOT se encuentran en recuadros aislados de la unidad, al final de la unidad o al margen de una página, bajo títulos como "Pon a prueba tus competencias", "Aplica la lógica", "Para pensar más", "Aprende a pensar", "Taller de geometría", "Aprende a pensar: imagino el espacio/desarrollo mi ingenio", "Y doy un paso más", "Piensa y juega". Estas tareas, aunque incluyen importantes contenidos de la VOT se presentan como actividades recreativas, y probablemente consideradas como facultativas por la mayoría de los enseñantes.

Decidimos diferenciar dos familias principales de tareas:

- Tareas de reconocimiento, descripción y clasificación de los sólidos (Tipos A y B): las tareas de tipo A requieren relacionar un conjunto de propiedades analíticas con el nombre del respectivo sólido, las tareas de tipo B requieren relacionar una representación de un sólido que mantiene su aspecto global (perspectivas, fotos,..) con su nombre o con un conjunto de propiedades analíticas. Para resolver estas tareas es necesario conocer las terminologías de los sólidos (A1-A2, B1-B5) y/o conocer sus propiedades analíticas (A1-A2 y B6-B8). Aunque estas actividades también ponen en juego conocimientos sobre VOT, las diferenciamos de las siguientes por su componente analítica.

- Tareas sobre VOT: se refieren a las principales tareas clasificadas en Gonzato, Fernández y Godino (2011) y descritas en el apartado 2.3 del capítulo 1, a las cuales se añaden las tareas relacionadas a la generación de cuerpos de revolución a partir de la rotación de una figura plana (tareas no contempladas en las investigaciones analizadas). Dichas tareas se apoyan en acciones visuales y/o involucran representaciones planas que requieren una reorganización de la información gráfica para visualizar el cuerpo que representan.

Hemos decidido aportar el siguiente cambio a la clasificación dada en el Capítulo 1: consideramos las tareas de “Conteo de caras, aristas, vértices de un sólido representado en perspectiva” y de “Conteo de cubos en composiciones de cubos” como tareas de tipo B en lugar de pertenecientes a la familia de las tareas de “composición y descomposición en partes”. Este cambio surge de la constatación de la diferencia entre las tareas “puzles” donde se realizan movimientos en las piezas que componen un sólido, y tareas donde se tiene que “contar” determinados elementos de un sólido. Dichas últimas describen propiedades específicas de sólidos y frecuentemente se utilizan en los libros como ejercicios para diferenciar los sólidos y clasificarlos.

En los siguientes apartados caracterizamos de manera más detallada estas dos familias de tareas describiendo las principales tipologías de tareas presentadas en los libros de texto, y dando algunos ejemplos.

3.3.3.1. Tareas de reconocimiento, descripción y clasificación de los sólidos

A. Reconocimiento, descripción y clasificación de los sólidos, en ausencia de una representación plana del objeto (Figura 3.6).

A.1. Identificar/Explicitar las propiedades de un objeto geométrico nombrado.

A.2. A partir de determinadas propiedades analíticas de un objeto geométrico, nombrarlo.

Escribe el nombre del cuerpo al que se refiere cada descripción.

8
- Una pirámide con 9 vértices.
- Una pirámide con 10 aristas.

9
- Un prisma con 8 vértices.
- Un prisma con 9 aristas.

10
- Un cuerpo con 6 caras.
- Un cuerpo con 6 caras laterales.

11
- Un cuerpo con 6 vértices.
- Un cuerpo con 12 aristas.

Figura 3.6: Ejemplo de tarea de tipo A.2 (6SA06, p.187).

B. Reconocimiento, descripción y clasificación de los sólidos, que involucra la interpretación/elaboración de una representación en perspectiva del objeto (Figura 3.7).

B.1. *Reconocer* entre diferentes *objetos cuotidianos* (representados por dibujos, fotos,..) los que tienen una determinada forma (de cilindro, de cono,…) /relacionar el nombre a la forma.

B.2. *Reconocer* entre diferentes *objetos geométricos* (representados en perspectiva) los que tienen una determinada forma (de cilindro, de cono,…).

B.3. Escribir el *nombre* de la forma que tiene un *objeto cotidiano* determinado.

B.4. Escribir el *nombre* de un *objeto geométrico* representado en perspectiva.

B.5. *Dibujar* un objeto tridimensional a partir de su *nombre*.

B.6. Identificar/ Explicitar las *propiedades* de un objeto geométrico representado en *perspectiva* (y no nombrado).

B.6.1. Identificación de caras, aristas, vértices de un sólido.

B.6.2. Identificar la forma de las caras de un sólido representado en perspectiva.

B.6.3. Conteo de caras, aristas, vértices de un sólido representado en perspectiva.

B.6.4. Conteo de cubos en composiciones de cubos.

B.6.5. Otras propiedades.

B.7. A partir de determinadas *propiedades analíticas* de un objeto geométrico, identificar su *representación* (en perspectiva).

B.8. A partir de determinadas *propiedades analíticas* de un objeto geométrico, *dibujarlo.*

Indica cuáles de las siguientes figuras son poliedros y cuáles cuerpos redondos. ¿Hay algún poliedro regular?

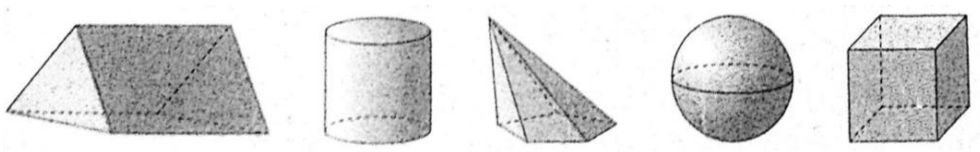


Figura 3.7: Ejemplo de tareas de tipo B.2 (5SM06, p.217).

3.3.3.2. Tareas sobre VOT

1. Tareas de orientación espacial estática (sin movimiento, sin trayectos), de explicitación de las posiciones de los objetos con respecto a un determinado sistema de referencia (observador, objeto orientado,…), Figura 3.8.

1.1. Explicitación por medio del dibujo de la posición de un *objeto con respecto a otro* (encima del plato, debajo de la mesa). Se supone que los objetos están orientados (en la Figura 3.9 se presenta una tarea ambigua, puesto que se basa en un objeto no orientado)

1.2. Explicitación por medio de la identificación o el dibujo de la posición de un *objeto/animal/persona con respecto a un animal/persona* (delante, detrás de la gallina, entre un niño y otro, mano izquierda y derecha, mirar hacia la derecha, hacia la izquierda).

1.3. Explicitación verbal de la posición del mismo estudiante con respecto a otro en la realidad.

1.4. Explicitación por medio del dibujo de la posición de un objeto "con respecto a otro" colocado en una *tabla*: se supone que la tabla defina una determinada orientación (con respecto al observador): debajo, encima, a un lado.

Figura 3.8: Ejemplo de tarea de tipo 1.2 (1AN07, p.41)

Figura 3.9: Ejemplo de tarea ambigua de tipo 1.1 que pretende orientar objetos con respecto a una puerta, objeto que no tiene una orientación definida (1SA06, p.34)

2. Coordinación e integración de las vistas (Figura 3.10):

   2.1. *Identificación de la vista* que un determinado observador tiene de un objeto tridimensional (representado en perspectiva).

   2.2. A partir de una o más vistas *identificar un posible solido*.

   2.3. A partir de la representación de un sólido en perspectiva, *dibujar una de sus vistas*.

Figura 3.10: Ejemplo de tarea 2.1 (4AN08 , p 198).

3. Composición y descomposición en partes (Figura 3.11):

3.1. Composiciones y descomposiciones de un sólido en partes/secciones.

3.2. Agregar cubos a composiciones de cubos y dibujar la nueva composición de cubos.

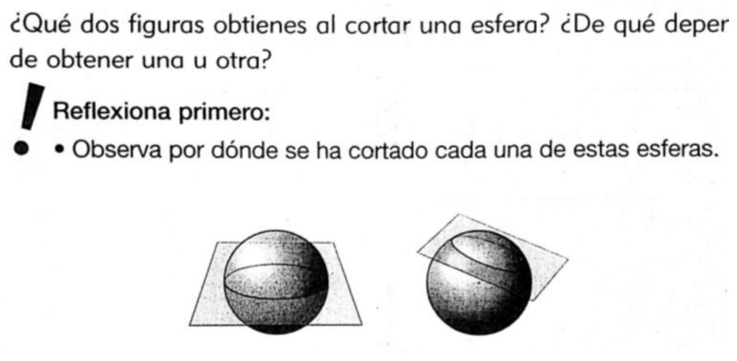


Figura 3.11: Ejemplo de tarea de tipo 3.1 (6SM, p.202).

4. Plegar y desplegar desarrollos (Figura 3.12):

4.1. Dado el dibujo de un desarrollo, *nombrar el sólido* al cual se corresponde.

4.2. *Relacionar* un sólido nombrado al desarrollo correspondiente, eligiendo entre diferentes posibilidades.

4.3. *Dibujar* un desarrollo de un sólido nombrado.

4.4. *Dibujar* un desarrollo de un sólido dibujado en perspectiva.

4.5. *Describir propiedades* del desarrollo plano con respecto al sólido que puede formar (números de caras laterales, forma de las bases…).

Asocia cada cuerpo con su desarrollo.

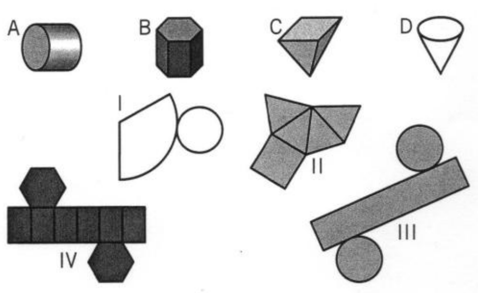


Figura 3.12: Ejemplo de tarea de tipo 4.2 (6AN06, p.189)

5. Generar cuerpos de revolución a partir de la rotación de una figura plana (Figura 3.13).

5.1. *Indicar verbalmente el cuerpo de revolución* que genera una figura plana que gira alrededor de un eje (representados gráficamente).

5.2. A partir de un sólido de revolución *reconocer la figura plana* que lo genera y el eje sobre el cual debe girar.

5.3. *Relacionar* una figura plana que gira con el cuerpo tridimensional que genera eligiendo entre diferentes posibilidades.

5.4. *Identificar la posición del eje* sobre el cual debe girar una figura plana para generar un determinado cuerpo geométrico.

Señala en la figura los ejes sobre los que debe girar para obtener los cuerpos de revolución A (señala el eje en rojo) y B (señala el eje en azul).

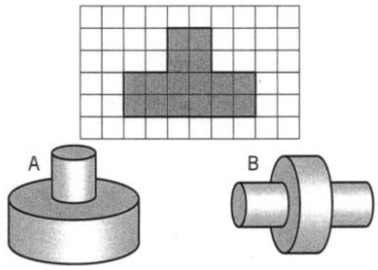


Figura 3.13: Ejemplo de tarea de tipo 5.4 (6AN06, p.189).

Observamos que en las tareas sobre VOT propuestas no se pide una justificación de la respuesta dada.

Para tener información sobre la incidencia de los diferentes tipos de tareas en los libros de texto analizados decidimos llevar a cabo un recuento en el cual consideramos como "unidad" el procedimiento principal que describe la tarea; por ejemplo en el caso de una tarea de orientación espacial estática, contamos separadamente cada objeto/persona que tiene que ser orientado para resolver la tarea.

En el Anexo 2 resumimos las frecuencias y porcentaje de los diferentes tipos de tareas en los libros de texto de educación primaria.

En la siguiente tabla presentamos los porcentajes de los diferentes tipos de tareas presentes en el conjunto de libros de texto analizados en cada año.

Tabla 3.5: *Porcentaje de los diferentes tipos de tareas presentes en los diferentes años de los libros de texto de primaria analizados.*

	Porcentajes para cada tipo de tarea						
curso	**A**	**B**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	31,36	65,25	3,39	0	0	0
2	1,52	79,55	14,39	4,55	0	0	0
3	6,35	79,37	0	11,38	0,53	2,38	0
4	7,46	70,36	0	13,91	1,41	6,85	0
5	18,45	59,93	0	5,10	2,28	13,01	1,23
6	12,24	66,57	0	3,16	2,34	11,28	4,40

En general se observa la evidente preponderancia de las tareas de tipo B en todos los años (entre el 60 y el 80% de las tareas), excepto en el primer año. En el conjunto de tareas analizadas en los libros de texto, se evidencia una escasez de tareas de tipo 3 (Composición y descomposición en partes) y de tipo 5 (Generar cuerpos de revolución a partir de la rotación de una figura plana).

Centrándonos únicamente en las tareas sobre VOT, observamos que hay un incremento de su variedad a lo largo de los ciclos, como se muestra en la gráfica de la Figura 3.14.

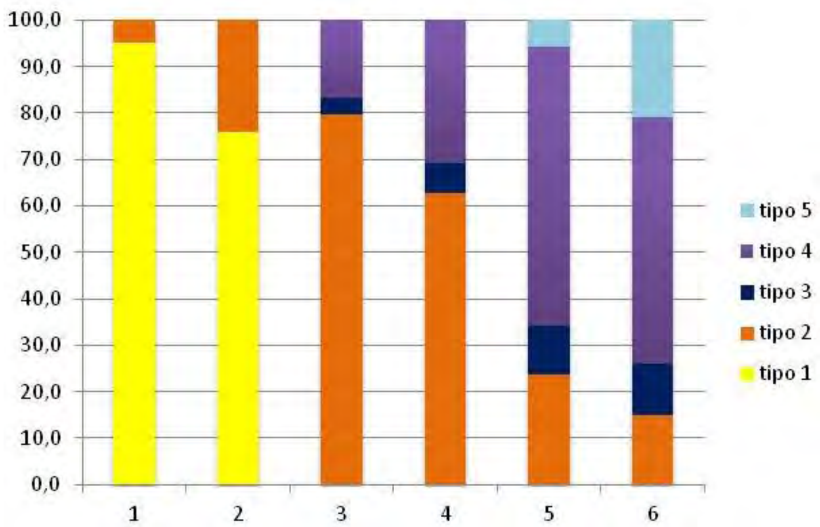


Figura 3.14: Porcentaje de los tipos de tareas sobre VOT en los diferentes años.

Las tareas de tipo 1 (Orientación estática) solo aparecen en el primer ciclo, acompañados de tareas de tipo 2 (Coordinación e integración de las vistas). En el segundo ciclo dominan las tareas de tipo 2 (Coordinación e integración de las vistas), mientras las de tipo 3 (Composición y descomposición en partes) y 4 (Plegar y desplegar desarrollos) aparecen en menor cuantidad. Finalmente, en el tercer ciclo, se presentan tareas de tipo 2-5, de las cuales emergen las de tipo 4 (Plegar y desplegar desarrollos).

La siguiente gráfica (Figura 3.15) resume las frecuencias de las tareas sobre VOT (de tipos 1-5) en los diferentes libros de texto, ordenados por año y en orden cronológico.

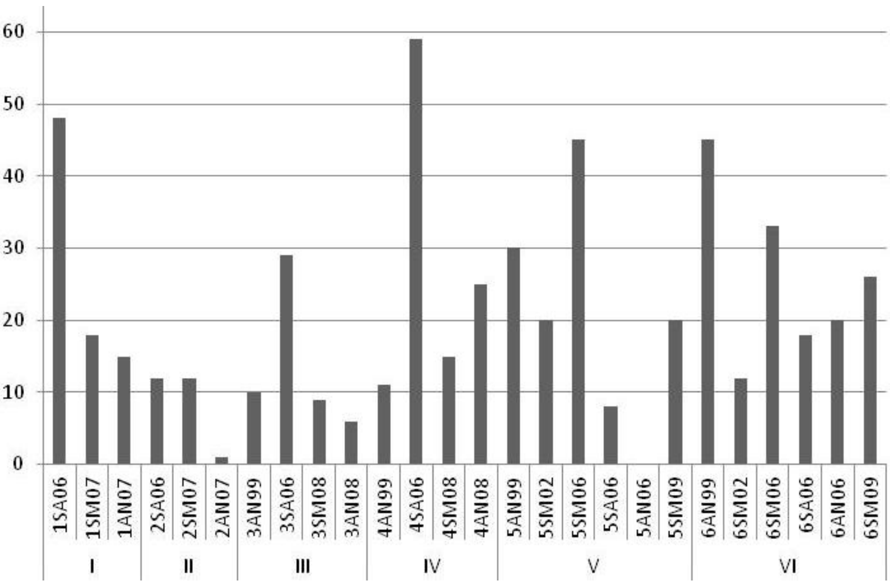


Figura 3.15: Frecuencias de tareas sobre VOT en los diferentes libros de texto

Señalamos que, por lo que se refiere a tareas sobre VOT, los libros de texto que trabajan mayormente las VOT en las tareas propuestas, por cantidad y variedad de los tipos, son los siguientes: para los dos primeros ciclos señalamos los libros de la editorial Santillana de la edición del 2006 (1SA06, 2SA06, 3SA06, 4SA06), para el quinto año indicamos el libro de texto 5SM06 de la editorial SM, mientras parar el sexto año resaltamos el libro 6AN99, de la editorial Anaya (para más detalles ver tabla 1 del Anexo 2).

3.4. ANÁLISIS DE LOS TIPOS DE REPRESENTACIONES UTILIZADAS

3.4.1. Introducción

Las representaciones de los objetos tridimensionales en los libros de texto permiten introducir a los alumnos en los conceptos geométricos correspondientes. En el primer ciclo prevale el aspecto visual de la representación, se pretende que el alumno reconozca un objeto en su globalidad y asocie la representación al nombre. En los ciclos siguientes los atributos descritos en las definiciones de los conceptos geométricos y en las proposiciones vienen indicados en las representaciones gráficas. En los dos primeros ciclos se dan principalmente representaciones en perspectivas (caballera e isométrica) y dibujos de objetos cotidianos, mientras que en el tercer ciclo se presentan también desarrollos de los sólidos, vistas ortogonales y secciones.

3.4.2. Las representaciones planas en los cuadros teóricos de los libros de texto

En este apartado sintetizamos los recuadros teóricos de los libros de texto en los cuales se describen gráficamente o verbalmente las siguientes representaciones planas: los desarrollos planos, las vistas ortogonales, y las secciones en rotación que permiten obtener los cuerpos de revolución. Observamos que dichos cuadros teóricos son escasos y se presentan únicamente en el segundo y tercer ciclo, o bien al principio de una sección, o bien al margen de la página bajo títulos como “ten en cuenta”, “observa”, “aprende”.

3.4.2.1. Desarrollos

En los libros de texto del tercer ciclo se utiliza frecuentemente la representación de los desarrollos de los sólidos para acompañar sus definiciones. Sin embargo este tipo de representación plana se usa solo en pocos libros de texto.

Por lo que se refiere a los libros de la editorial SM analizados, destacamos que sólo en el libro del quinto año 5SM09 se describe gráficamente cómo se construyen el cilindro y el cono a partir de sus desarrollos (Figura 3.16).

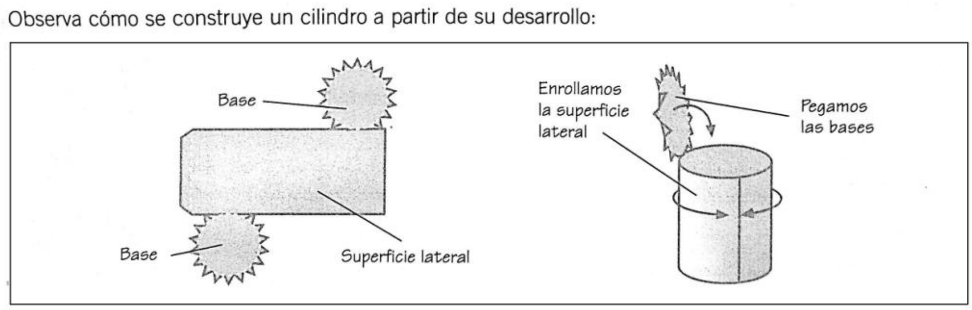


Figura 3.16: Como se construye el cilindro plegando un desarrollo (5SM09, p183).

Esta figura representa de forma gráfica el procedimiento físico de plegar y pegar el desarrollo para formar el sólido. Observamos que los desarrollos tienen “lengüetas”, que permiten la construcción física del sólido. Esta componente relacionada al objeto material, “es un elemento importante desde el punto de vista concreto, pero no tienen significado si el problema del desarrollo es considerado en el contexto geométrico” (Mariotti, 1997, p. 212).

Además, en los libros 5SM06 y 6SM09 se presenta una interesante afirmación sobre la imposibilidad de desarrollar la esfera en el plano. En el libro 5SM06 dicha proposición se apoya únicamente en un dibujo que representa el intento de desarrollar la cáscara de una naranja en un plano (Figura 3.17), mientras que en el libro 6SM09, dicho cuadro teórico viene mejorado añadiendo la siguiente afirmación “Aunque consigas pelar una naranja en una sola pieza, no podrás formar con la cáscara una figura plana”. En dicha frase se presentan implícitamente dos conocimientos relativos al desarrollo plano de una figura tridimensional: la conexión del desarrollo (“una sola pieza”) y la existencia de una isometría entre la superficie del objeto y el plano euclídeo (“formar una figura plana”).

Figura 3.17: La esfera no tiene un desarrollo plano (5SM06, p. 199).

Destacamos que en los dos ejemplos de desarrollos presentados por el libro del quinto año 5AN99 de la editorial Anaya, se conserva la referencia a objetos cotidianos a costa de omitir el aspecto relativo a la conexión del desarrollo (Figuras 3.18 y 3.19).

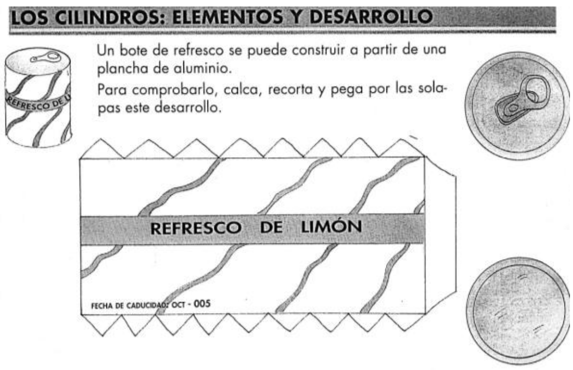


Figura 3.18: Desarrollo del cilindro (5AN99, p. 159)

Figura 3.19: Desarrollo de un cono (5AN99, p. 160)

Indicamos que en el libro del sexto año 6AN06 solo se presenta el siguiente recuadro (Figura 3.20) donde se muestra gráficamente cómo se pliega un "recortable" dado para formar un dodecaedro regular.

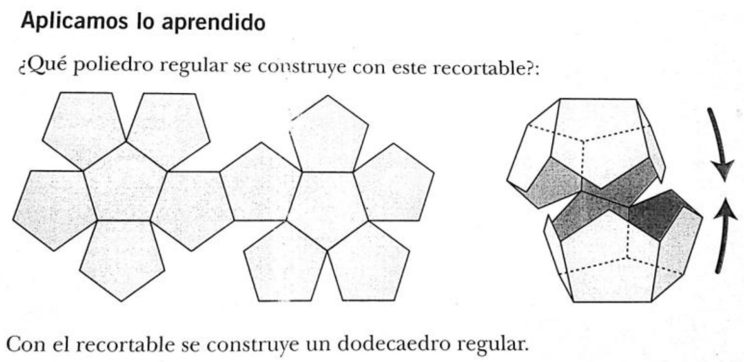


Figura 3.20: Recortable de un dodecaedro regular (6AN06, p. 180).

Destacamos que en el libro del cuarto año 4AN08 se presenta un interesante cuadro teórico relativo a la definición de desarrollo plano de un poliedro, acompañado de dos ejemplos en los cuales se ilustra la acción de desplegar en el plano la superficie de dos sólidos para formar los desarrollos (Figura 3.21).

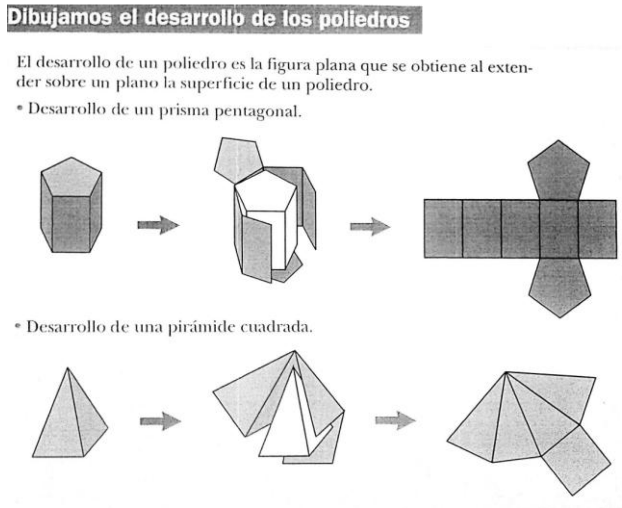


Figura 3.21: El desarrollo de los poliedros (4AN08, p.180).

Siempre en este libro se afirma que la superficie de la esfera no se puede extender, aunque la imagen que acompaña esta frase no ilustra claramente dicha propiedad (Figura 3.22)

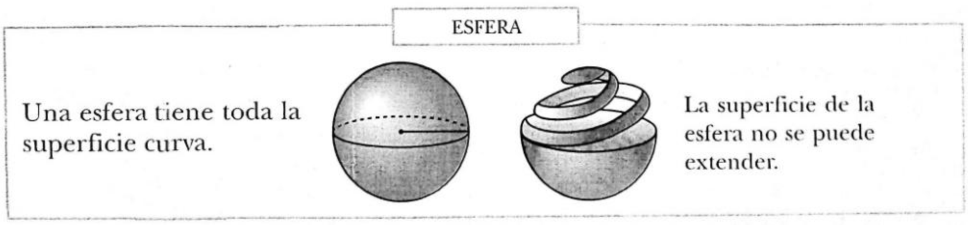


Figura 3.22: La superficie de la esfera no se puede extender (4AN08, p.182).

Por lo que se refiere a la editorial Santillana, solo en un libro (4SA06) se hace referencia a los desarrollos, afirmando, en un pequeño recuadro, que los recortes dados en una tarea de construcción de sólidos, se llaman desarrollos (Figura 3.23).

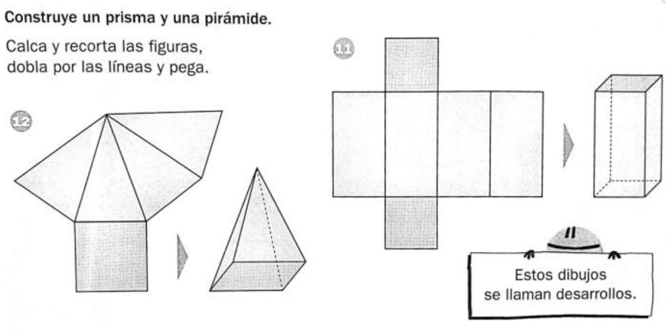


Figura 3.23: Desarrollos de un prisma e una pirámide (4SA06, p.187).

Destacamos que los pocos libros que presentan recuadros teóricos sobre los desarrollos planos de objetos tridimensionales, dan descripciones pobres e incompletas, representan únicamente desarrollos prototípicos (ver capítulo 1) sin considerar la pluralidad de desarrollos de un sólido.

3.4.2.2. Vistas ortogonales

Las vistas, como proyecciones ortogonales, vienen descritas solo en pocos libros de texto de segundo y tercer ciclo. En la mayoría se hace referencia al concepto de vista entendida como perspectiva que tiene un observador desde un punto, describiendo algunas de sus propiedades (Figuras 3.24 y 3.25) o dando ejemplos de las diferentes vistas de determinados sólidos geométricos (Figuras 3.26, 3.27). Sólo en un libro de texto (6AN99) se introduce el sistema diédrico, representando los alzados laterales y la planta de un objeto (Figura 3.28).

Por ejemplo, en las siguientes figuras se explicita la propiedad de que, excepto para el caso de la esfera, cambiando la posición del observador cambian las vistas del objeto.

Figura 3.24: Vistas (3AN08, p.163).

Figura 3.25: Vistas (4AN08, p.190).

En los libros 3SA06 y 4SA06 del segundo ciclo de la editorial Santillana, así como en el libro 5SM06 del quinto año de la editorial SM, se dan las vistas desde arriba y de frente de determinados sólidos, en algunos casos ilustrando un hipotético observador (mariposa, niños) que mira hacia el objeto (Figuras 3.26, 3.27)

Figura 3.26: Vistas desde arriba (3SA06, p.192).

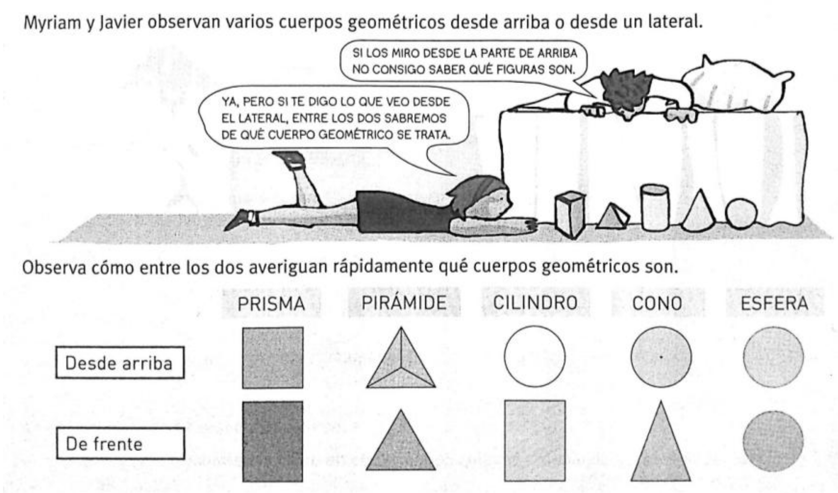


Figura 3.27: Vistas desde arriba y de frente (5SM06, p.221)

Destacamos que en el libro de texto 6AN99 se describe aproximadamente la perspectiva caballera, como forma de representar objetos tridimensionales logrando la "sensación de profundidad". Además se representan las proyecciones ortogonales de un objeto tridimensional, nombrándolas "alzados laterales" y "planta" lo que supone una referencia al sistema diédrico. También se afirma que dichas vistas del objeto permiten representar las verdaderas medidas de la figura, una importante propiedad del sistema diédrico.

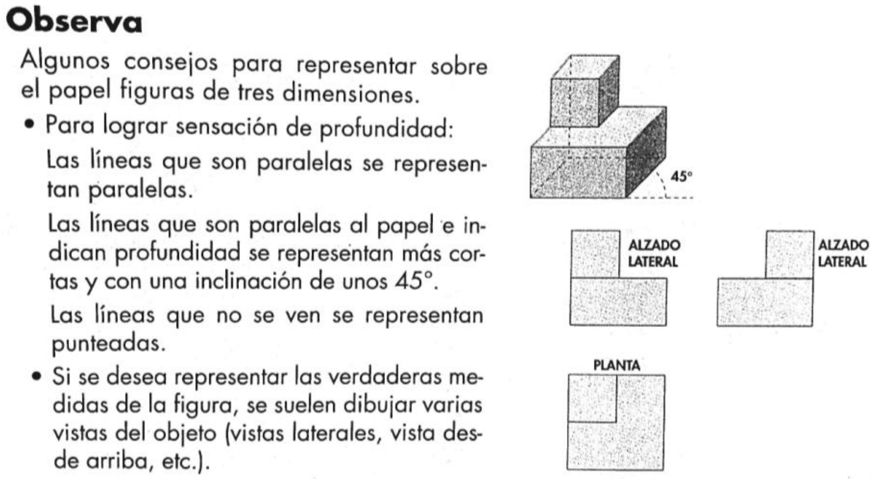


Figura 3.28: Dibujo en perspectiva y vistas ortogonales (6AN99, p.173).

3.4.2.3. Secciones en rotación que permiten obtener cuerpos de revolución

Subrayamos un interesante acercamiento al cilindro, cono y esfera, relacionado al concepto de cuerpo de revolución y propuesto en algunos libros de texto analizados (5SM02, 5SM06, 5AN99, 6AN99, 6AN06, 6SA06). Describimos brevemente los distintos acercamientos y representaciones propuestas por las diferentes editoriales.

En dos libros del quinto año de la editorial SM (5SM02, 5SM06) se dan las siguientes afirmaciones, acompañada de una figura que la ilustra (Figuras 3.29, 3.30, 3.31)

La puerta del hotel, cuando gira, dibuja
un cuerpo geométrico con forma de cilindro.
Decimos que la puerta al girar genera un cilindro.

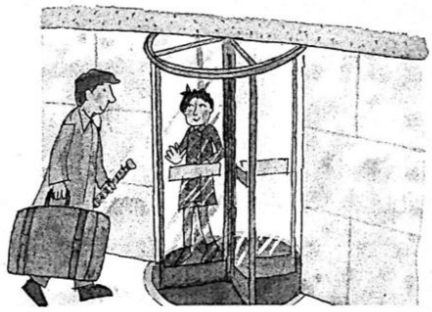


Figura 3.29: Ejemplo de cilindro como cuerpo de revolución (5SM02, p. 183).

En el parque hay una atracción que, al girar,
dibuja un cuerpo geométrico con forma de cono.
Decimos que los niños al girar generan un cono.

Figura 3.30: Ejemplo de cono como cuerpo de revolución (5SM02, p. 184).

Al girar su gran piruleta, Mónica dibuja
un cuerpo geométrico con forma de esfera.
Decimos que la piruleta al girar genera una esfera.

Figura 3.31: Ejemplo de esfera como cuerpo de revolución (5SM02, p. 185).

Observamos que en este último caso, es la rotación física de la barra (materialización del eje de rotación) que permite engendrar la piruleta. Sin embargo, en la siguiente edición (5SM06), viene modificado este aspecto quitando la barra, y afirmando que "Una moneda, al girar, dibuja un cuerpo geométrico, con forma de esfera. La moneda al girar genera una esfera" (Figura 3.32)

Figura 3.32: Ejemplo de esfera como cuerpo de revolución (5SM06, p.215).

Observamos que dicho acercamiento a los sólidos de revolución no se presenta en la siguiente edición de libros del tercer ciclo de la editorial SM (SM09).

La aproximación visual a los cuerpos de revolución presentadas en estos libros de texto es relacionada al mundo real y se refiere a experiencias cotidianas, lo que supone una fácil comprensión de los ejemplos dados por partes de los alumnos. Sin embargo, no se hace referencia a una posible generalización de dichos casos al contexto geométrico, lo que supondría la introducción del concepto de rotación de una figura plana, eje de rotación y de la especificación de su posición con respecto a la figura plana.

De otra parte, en los libros de texto del tercer ciclo 5AN99, 6AN99 y 6AN06 de la editorial Anaya se presenta un acercamiento a los cuerpos de revolución en el cual se hace referencia a dichos elementos analíticos. En el quinto año se ilustra gráficamente la rotación de una figura plana alrededor de un eje. Es interesante observar que el ejemplo introductorio (Figura 3.33) no se refiere a las figuras clásicas de cilindro, cono o esferas, lo que supone una mayor generalidad del concepto que se pretende introducir.

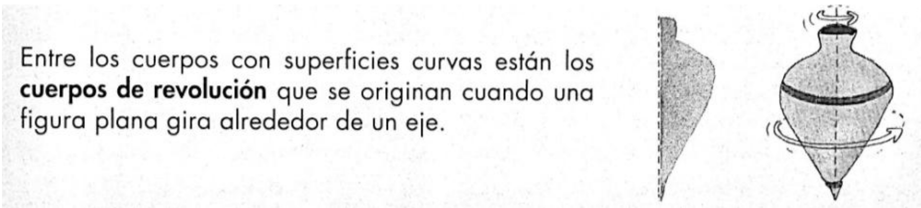


Figura 3.33: Definición de cuerpo de revolución (5AN99, p.158)

Este aspecto de generalidad se observa también en los ejemplos de cuerpos de revolución que se aportan (Figura 3.34), en los cuales se incluye el toro, que se refiere al caso de una figura que gira alrededor de un eje exterior a ella.

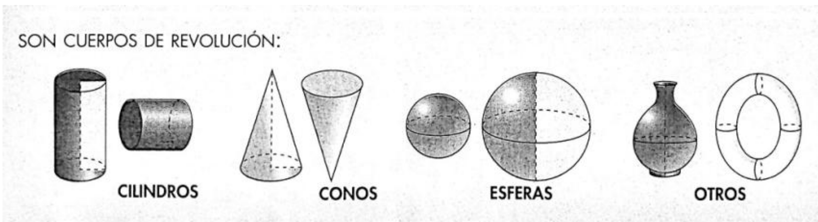


Figura 3.34: Ejemplos de cuerpos de revolución (5AN99, p.158).

En el sexto año se propone un interesante enfoque en el cual se coordinan aspectos visuales (relacionados con la experiencia física) con aspectos analíticos. Primeramente se introducen los cuerpos de revolución con el auxilio de una figura que ilustra la rotación de trozos de cartón alrededor de un eje (Figura 3.35, también en este caso la rotación es producida por el giro físico de una barra).

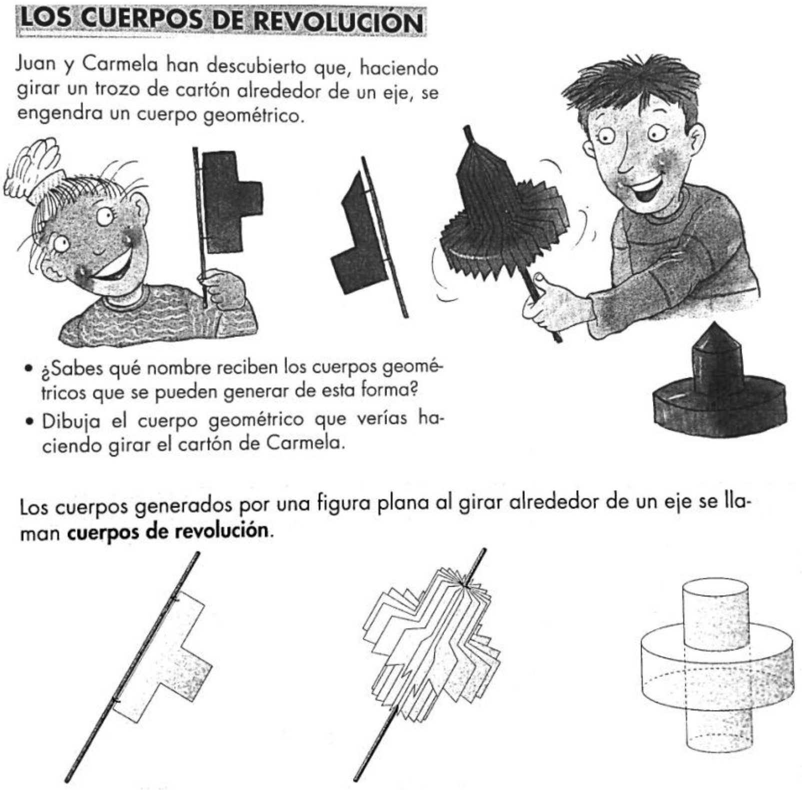


Figura 3.35: Introducción de los cuerpos de revolución (6AN99, p.170).

Seguidamente se introducen el cilindro, el cono y la esfera como cuerpos de revolución, primeramente con la imagen de una experiencia física similar a la anterior (Figuras 3.36 y 3.37) y luego con una definición verbal que acompaña una representación gráfica de la generación de los objetos geométricos (Figuras 3.38 y 3.39).

Figura 3.36: Introducción de cilindros y cono como cuerpos de revolución (6AN99, p. 171).

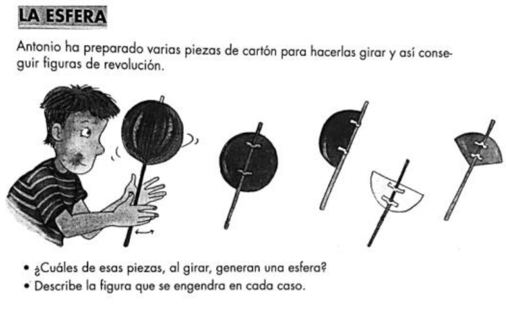


Figura 3.37: Introducción de la esfera como cuerpo de revolución (6AN99, p172).

En la imagen se ilustra la posición del eje de giro, la superficie lateral y las bases, acompañada por una definición verbal de la rotación de un triangulo rectángulo alrededor de un cateto genera un cono, la rotación de un rectángulo alrededor de un lado genera un cilindro. Es interesante observar que para el caso de la esfera además de la representación de su generación por medio de la rotación de un semicírculo, se dan ejemplos de otros cuerpos de revolución "dentro de la esfera", o sea obtenidos por la rotación de determinados sectores circulares (Figura 3.40).

Figura 3.38: Cono como cuerpo de revolución (6AN99, p. 171)

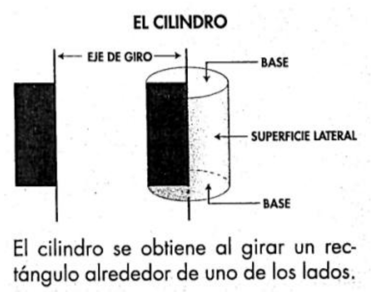


Figura 3.39: Cilindro como cuerpo de revolución (6AN99, p. 171)

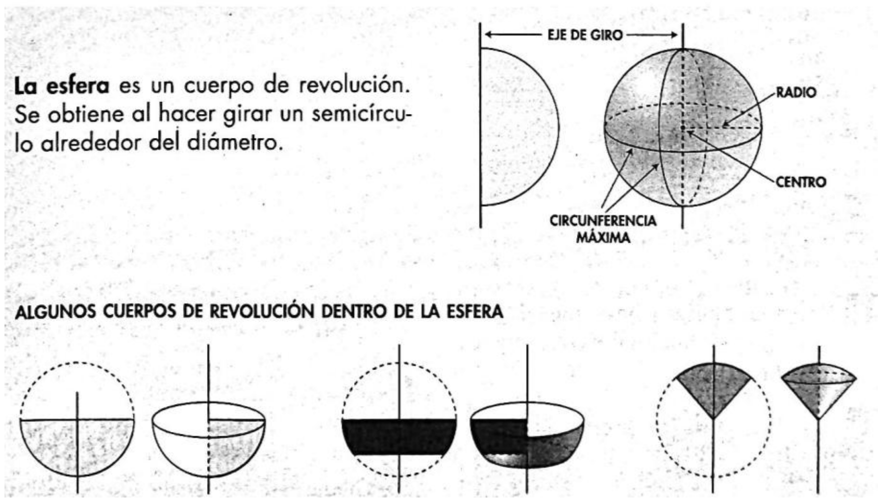


Figura 3.40: Esfera como cuerpo de revolución (6AN99, p. 172).

Por lo que se refiere al libro del sexto año 6AN06, la definición de cuerpo de revolución como "cuerpos geométricos engendrados por una superficie plana que gira alrededor de un eje" es acompañada por imágenes que ilustran figuras plana pegadas a barra que giran (Figura 3.41).

Figura 3.41: Cuerpos de revolución (6AN06, p. 177 y 182).

A lado de una página, también se presenta el cilindro como cuerpo de revolución (Figura 3.42).

Figura 3.42: Cilindro como cuerpo de revolución (6AN06, p. 183).

Por lo que se refiere a la editorial SA, en el libro del sexto año 6SA06, se introducen el cilindro, cono y esfera como cuerpos de revolución que se generan haciendo girar un rectángulo, un triángulo y un semicírculo alrededor de un eje (Figura 3.42). En la ilustración que acompaña la definición, las figuras planas que giran se colocan en el interior del cuerpo que generan y la flecha que indica la rotación de la figura plana es puesta alrededor del eje de rotación, lo que puede hacer creer erróneamente que sea el eje el que gire.

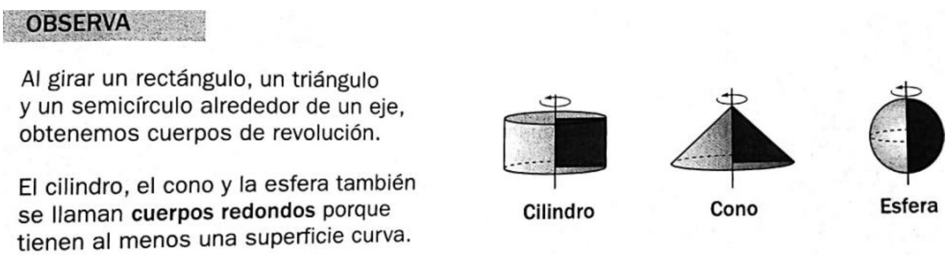


Figura 3.42: Cuerpos de revolución (6SA06, p.189).

3.4.3. Incidencia de los diferentes tipos de representaciones planas en la muestra de libros de texto

En este apartado estudiamos la incidencia de los diferentes tipos de representaciones planas utilizadas en los libros de texto de las diferentes editoriales. Incluimos en el estudio todas las representaciones planas de objetos tridimensionales presentes en cada libro, tanto en los apartados teóricos como en las tareas descritas anteriormente. Si en una tarea se representan más sólidos, cada representación se considera como elemento individual. De esta forma podemos examinar el tipo y la cantidad de representaciones planas que vienen mostradas a los niños a lo largo de un libro de texto. Creemos que dicha información gráfica que se presenta a los niños a lo largo de la escolaridad pueda influir de forma significativa en su forma de visualizar los objetos tridimensionales.

Para este estudio hemos decidido distinguir dos familias principales de sólidos, poliedros (p) y cuerpos de revolución (r), y dos tipos de representación planas, las representaciones que mantienen el aspecto global del objeto (Representación G) de las representaciones que necesitan una reorganización de la información para visualizar el objeto (Representación R): Las vistas ortogonales (R1), los desarrollos (R2), y las secciones en rotación (R3) (ver capítulo 1, sección 2.1.2).

En la tabla 1 presentada en el Anexo 3 se dan las frecuencias de los tipos de representaciones planas presentes en cada libro de texto. Observamos que en las ediciones del 2006 de distintas editoriales se presenta un número elevado de representaciones planas de cuerpos tridimensionales, que incluyen representaciones de los tipos G y R. En los primeros ciclos destacamos los libros de la Editorial Santillana, edición 2006 (1SA06, 2SA06, 3SA06, 4SA06), para el quinto año señalamos el libro 5SM06 de la editorial SM, mientras que para el sexto año indicamos el libro 6AN06 de la editorial AN.

En las siguientes gráficas (Figuras 3.43 y 3.44) presentamos los porcentajes relativos a las representaciones G y R de los cuerpos de revolución y de los poliedros. Como era previsible hay una predominancia de las representaciones de tipo G en todos los años y para ambas las familias de sólidos consideradas. Observamos que para el caso de los cuerpos de revolución hay un incremento lineal de representaciones de tipo R a lo largo del segundo y tercer ciclo.

Figura 3.43: Porcentajes de los tipos de representación (G y R) de los cuerpos de revolución

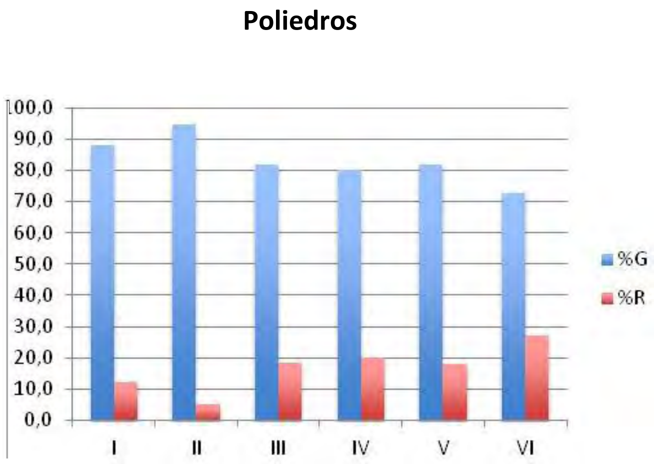


Figura 3.44: Porcentajes de los tipos de representación (G y R) de los poliedros

Por lo que se refiere al tipo de representación R, observamos que los cuerpos de revolución se representan exclusivamente con desarrollos en el tercer año, con desarrollos y vistas en el cuarto año, con los tres tipos de representación en el quinto y con secciones de rotación y vistas ortogonales en el sexto. Los poliedros se representan mayormente con desarrollos hasta el tercer año. En el cuarto año aparecen desarrollos y vistas ortogonales casi en la misma cantidad, mientras que en el tercer ciclo prevalen las vistas ortogonales.

Resumimos en las siguientes gráficas (Figura 3.45 y 3.46) los porcentajes de los tipos de representación R1, R2 y R3 para las dos familias de sólidos consideradas.

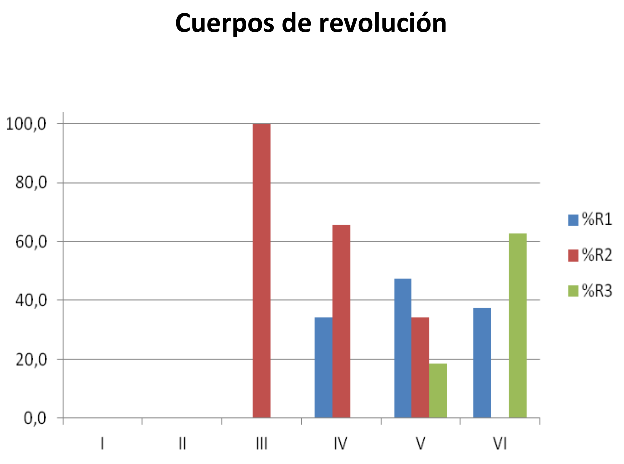


Figura 3.45: Porcentajes de los tipos de representación R (R1, R2, R3) de los cuerpos de revolución

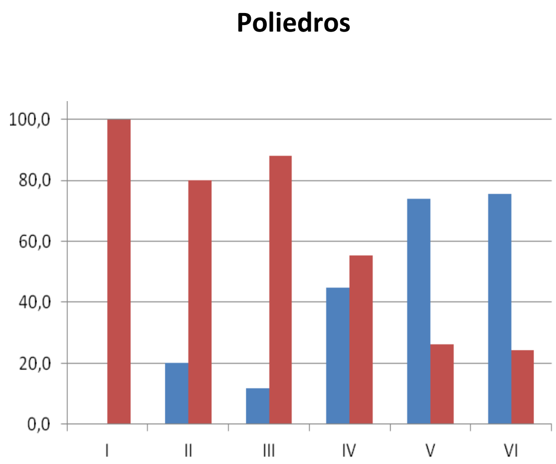


Figura 3.46: Porcentajes de los tipos de representación R (R1, R2, R3) de los poliedros

3.5. CONCLUSIONES DEL ANALISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO

En este apartado describimos algunas conclusiones derivadas de los resultados obtenidos del análisis de los libros de texto. Enfatizamos que este estudio se ha realizado con los libros de texto mencionados y no pretende extenderse más allá los resultados obtenidos.

Observamos que en los libros de texto de matemáticas de escuela primaria los sólidos están representados principalmente con representaciones que mantienen el aspecto global del objeto, generalmente en perspectiva caballera o isométrica. Parzysz (1988, 1991) observa que dichos dibujos tienen el lado positivo de reconocer a primera vista el objeto en cuestión, pero al mismo tiempo tienen un lado negativo: los niños, acostumbrados a enfrentarse a una figura en una misma posición, no saben el por qué está dibujada así y no idean otra representación. Afirma también que hay una ambigüedad del estatus de las representaciones gráficas en la geometría del espacio, “ahora dibujos, después esbozos, en una manera anárquica e implícita” (Parysz, 1991, p. 578).

En algunas de las tareas presentadas en diferentes libros de segundo y tercer ciclo se emplean otras representaciones planas de los sólidos, tales como las vistas ortogonales, los desarrollos planos y las secciones en rotación. Sin embrago, en la gran mayoría de libros de texto no se describen dichas representaciones, o solo se hace referencias a propiedades aisladas, principalmente de tipo visual. Siguiendo a Parzysz (1988), creemos en la necesidad de trabajar sobre los principios de los diferentes tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales espaciales, para que los alumnos puedan dominarlas y "no quedarse esclavos de dibujos estereotipados, que han perdido una gran parte de su poder operacional" (p. 90). Dicho estudio tendría que apoyarse y manifestar la sinergia existente entre los aspectos visuales de las representaciones y los aspectos analíticos, relacionados con las propiedades de las técnicas de dibujo utilizadas y con las propiedades analíticas de los objetos matemáticos que representan. Concordamos con Guillén, González y García (2009, p. 254), que destacan la poca atención que se da en los libros de texto a la comparación de diferentes representaciones planas de un sólido con objeto de remarcar propiedades que se mantienen y/o se rompen en cada una de ellas.

Con respecto al significado institucional de referencia descrito en el Capítulo 2, consideramos que el papel de la ostensión en la construcción y comunicación en el ámbito de la geometría espacial no viene suficientemente valorizado en los libros de texto: las relaciones dialécticas que se establecen entre los objetos matemáticos y sus representaciones materiales son muy elementales. Por ejemplo, no se ponen de manifiesto las potencialidades que tienen las diferentes representaciones planas para el estudio de determinadas propiedades del objeto, y que podrían favorecer la capacidad de elección de una representación adecuada para resolver ciertos problemas.

Si se analizan los libros de texto singularmente, se observa que las tareas sobre VOT presentadas sólo cubren aspectos parciales del tema, frecuentemente por medio de actividades recreativas, reflejando el escaso interés atribuido al tema. Sin embargo, la recopilación y la clasificación de todas las tareas sobre VOT presentadas en el conjunto de los libros de texto, puede ayudar a tener una perspectiva más amplia de la forma con la cual se puede abordar los diferentes aspectos del tema en la enseñanza.

4. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO CURRICULAR

El análisis conjunto de los currículos internacionales, nacionales y de la comunidad autónoma, nos ha permitido destacar algunas interesantes sugerencias sobre la forma y los medios para desarrollar determinadas facetas de la VOT en la enseñanza de la geometría espacial, en particular en la interpretación, comunicación y análisis de informaciones gráficas. Hemos destacado algunos interesantes ejemplos de tareas visuales, lenguajes y acciones visuales que cubren aspectos centrales del tema.

Sin embargo, los libros de texto analizados, aunque en su globalidad incluyen algunos aspectos del tema, estos vienen desarrollados solo en pocas actividades de geometría espacial, las más destacadas colocadas en espacios dedicados a actividades recreativas o complementarias y sin aparente relación con el restante contenido.

Con respecto al lenguaje utilizado, observamos que aunque en los currículos se destaca la importancia del trabajo manipulativo, sobre todo en los primeros ciclos, en los libros de texto analizados son muy pocas las actividades que requieren el uso de representaciones concretas de las figuras como modelos tridimensionales, construcciones, modelos geométricos, geoplanos, mecanos, plegados, construcciones. Sin embrago, en muchos libros de texto, para valorizar el contexto real, se insertan representaciones planas de objetos concretos y experiencias físicas, sobre todo en los recuadros teórico, sin hacer una clara distinción entre el objeto material y el geométrico. Muy escasas son las tareas de construcción y de dibujo en perspectiva. Los diferentes tipos de representaciones planas descritas en los currículos (desarrollos planos de los sólidos, vistas laterales y desde arriba, secciones, plegados) son utilizadas con tareas repetitivas, en las cuales el proceso visual pierde fuerza.

Con respecto a las acciones visuales sugeridas en las directrices curriculares (imaginar, predecir, experimentar y comprobar los resultados de rotaciones, cortes, secciones, proyecciones, composiciones y descomposiciones), destacamos que se presentan escasas tareas de composiciones, descomposiciones y de cortes de objetos tridimensionales, y solo dos tareas de rotaciones en el conjunto de libros de texto analizados.

En general, aunque en el conjunto de libros de texto analizados aparecen aislados aspectos sobre la VOT, creemos que no se insertan de forma armónica y homogénea en los apartados de geometría espacial. En particular no se dan definiciones adecuadas y no se aprovecha de la potencialidad dada para estudio de las diferentes representaciones planas, tanto a nivel de propiedades y funciones que desempeñan, como por lo que se refiere a las técnicas de dibujos.

Sin embargo, indicamos que, para los dos primeros ciclos, los libros de la editorial Santillana de la edición 2006, parecen los que más promueven el desarrollo de le VOT sugerido en los currículos, tanto en la variedad de tareas como de representaciones planas utilizadas.

Concluimos destacando que la colección de las tareas sobre VOT presentadas en el conjunto de libros de texto analizados constituye un interesante material para el estudio del conocimiento común de los futuros profesores sobre el tema. Además la recopilación de los diferentes acercamientos a las representaciones planas dadas en los libros nos puede guiar en la interpretación de determinadas respuestas gráficas de los futuros profesores.

CAPITULO 4:
CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO SOBRE VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES

1. INTRODUCCIÓN

Los estudios preliminares descritos en los primeros capítulos permiten fundamentar la necesitad de la construcción de un nuevo cuestionario de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores sobre la visualización espacial de objetos tridimensionales, objetivo principal de este capítulo.

El significado institucional de referencia sobre la visualización espacial descrito en el capítulo 2, permite argumentar la importancia del tema en la enseñanza en la escuela primaria y nos ayuda a identificar los objetos visuales y analíticos presentes en tareas de geometría espacial. En particular, nos da criterios para seleccionar un primer banco de ítems provenientes de tareas descritas en las investigaciones sobre el tema y de los libros de textos de educación primaria. Sin embargo, como paso previo, es necesario clarificar y hacer operativa la noción de conocimiento didáctico-matemático, resultando de este modo una aportación teórica para el campo de investigación sobre formación de profesores (Wood, 2008).

Organizamos el capítulo en cuatro secciones. Después de describir el objetivo del instrumento (sección 2), detallamos el proceso de construcción del cuestionario piloto (sección 3). En dicha sección indicamos los aspectos específicos de los componentes de los conocimientos didácticos que queremos evaluar, relativos al modelo descrito por Godino (2009) y presentamos las preguntas que pretenden evaluarlos. El análisis de los ítems seleccionados nos lleva a la elaboración de una primera tabla de los contenidos asociados a cada tarea.

Esta primera versión del cuestionario fue probada con 6 estudiantes de primer curso de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada, con buenas calificaciones en matemáticas (sección 4). El análisis de las respuestas de estos alumnos

nos ha permitido hacer una selección y cambios de las tareas y elaborar un segundo cuestionario que fue evaluado por un grupo de expertos (sección 5). Las observaciones y sugerencias de los expertos nos ha llevado a la versión definitiva del cuestionario, cuyos ítems han sido nuevamente analizados, en términos de las funciones semióticas analítico-visuales puestas en juego en los mismos (sección 6).

Parte del proceso de construcción del cuestionario piloto es sintetizada en el artículo Gonzato, Godino y Neto (2011), publicado en la revista *Educación Matemática*.

2. OBJETIVOS DEL INSTRUMENTO

El objetivo del cuestionario es la evaluación de algunos aspectos relevantes de los conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores de educación primaria sobre el tema de la visualización de objetos tridimensionales (Cuestionario VOT). Se pretende evaluar no solo las capacidades para resolver las tareas sino también conocimientos relacionados con la enseñanza.

El objetivo principal fue construir un instrumento con el que pudiéramos recoger datos sobre el conocimiento común y ampliado del contenido, y algunos aspectos relevantes del conocimiento especializado del contenido.

De este objetivo principal se deducen otros. El primero de ellos consiste en estimar la proporción de alumnos que resuelve correctamente las tareas relativas con los diferentes conocimientos. Asimismo, deseamos identificar los principales errores de los estudiantes y las dificultades que presenta cada tarea. En la resolución de una actividad sobre VOT juegan un papel central las "habilidades visuales" de los alumnos. Para poder estudiar y evaluar los significados personales (Godino, Batanero y Font, 2007) de los alumnos necesitamos interpretar la noción cognitiva de habilidad en términos de las nociones teóricas del EOS, esto es en términos del sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona realiza para resolver un determinado tipo de situaciones-problemas y la configuración de objetos y procesos implicados. Con este tipo de análisis, aplicado a las respuestas dadas por los estudiantes, deseamos asimismo caracterizar los tipos de conocimientos, argumentaciones y variaciones de tareas que son capaces de elaborar. Queremos además identificar errores relacionados con un cierto tipo de uso del lenguaje, argumentaciones donde prevalen determinados procesos visuales, determinadas propiedades centrales para la resolución de una tarea, así como estudiar el papel que juegan los aspectos analíticos y visuales involucrados en las tareas.

Con estos resultados queremos contribuir a aportar información sobre los conocimientos matemáticos y didácticos sobre el tema de futuros maestros, como base para una posible planificación de acciones formativas en el campo de la visualización de objetos tridimensionales.

3. CONSTRUCCIÓN DE LA VERSIÓN PILOTO DEL CUESTIONARIO

3.1. INTRODUCCIÓN

El significado de referencia y la clasificación de las tareas elaboradas en los primeros capítulos nos permite seleccionar seis categorías de tareas sobre VOT según la acción principal requerida para su resolución (sección 3.2). Para caracterizar, distinguir y seleccionar las componentes del conocimiento que queremos medir (sección 3.3), nos hemos basados en el modelo del "conocimiento didáctico-matemático" propuesto por Godino (2009), que articula y desarrolla otros modelos sobre los conocimientos del profesor de matemáticas (PCK, Shulman, 1986; MKT, Hill et al., 2008).

Las categorías de tareas de visualización que hemos seleccionado, junto con los aspectos de los conocimientos didácticos que queremos medir, nos permiten tener criterios para hacer una selección de tareas de libros de textos, tareas de las investigaciones y tareas de carácter más especializado y elaborar un primer banco de ítems para el cuestionario piloto (sección 3.4). El análisis por medio de la GROP ("Guía para el reconocimiento de objetos y procesos", presentada en el capítulo 2) de los ítems del cuestionario piloto nos lleva a la elaboración de una primera tabla de los contenidos asociados a cada sub-ítem.

3.2. SELECCIÓN DE TIPOS DE TAREAS. CONTENIDOS PRINCIPALES

A partir de la clasificación de las tareas utilizadas en las investigaciones (propuesta en el capítulo 1, sección 3.2) y presentadas en los libros de textos (ver capítulo 3, sección 3.3.3), y teniendo en cuenta los aspectos centrales del significado de referencia que queremos evaluar, hemos decidido seleccionar las siguientes cinco categorías de tareas, clasificadas según la acción principal puesta en juego para resolverlas:

1. Coordinar e integrar vistas de objetos
2. Rotar un objeto en el espacio
3. Plegar y desplegar desarrollos

4. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional
5. Generar cuerpos de revolución

En el análisis de diferentes colecciones de libros de textos (capítulo 3) se destaca que algunos aspectos evidenciados en las investigaciones están poco tratados, y algunos únicamente presentados en actividades recreativas al final de la lección. De manera particular observamos que la rotación de objetos tridimensionales sólo aparece en dos tareas de todo el conjunto de los libros analizados. Por otra parte, encontramos un tema poco tratado en las investigaciones, que es el relacionado con la generación de cuerpos de revolución. Decidimos entonces incluir también este tema como contenido relacionado con la VOT.

Observamos que en el currículo español de matemáticas (MEC, 2006), el trabajo con objetos tridimensionales está presente en todos los ciclos de educación primaria. Relacionamos a continuación las tareas principales destacadas en las investigaciones con algunos de los objetivos descritos en el currículo español:

- coordinar e integrar vistas de objetos: “descripción de posiciones en relación a diferentes puntos de referencia”, “describir y representar construcciones geométricas y relaciones espaciales”;
- plegar y desplegar desarrollos: “construir cuerpos geométricos a partir de desarrollos”;
- componer y descomponer en partes un objeto tridimensional: “formar cuerpos geométricos a partir de otros por composición y descomposición”.

Observamos que entre los objetivos no se menciona explícitamente la rotación de objetos en el espacio, ni la generación de cuerpos de revolución. Por otra parte, en el apartado relativo a la “contribución del área al desarrollo de las competencias básicas” se afirma que “con el desarrollo de la visualización, los niños y las niñas mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio”, lo que incluye la capacidad de rotar figuras planas y tridimensionales en el espacio.

En el cuestionario hemos elegido presentar únicamente tareas de papel y lápiz por dos motivos. Uno de carácter práctico, como es facilitar la aplicación del cuestionario a muestras relativamente grandes de estudiantes, y el otro de carácter didáctico, pues se considera que la capacidad de lectura y de elaboración de diferentes tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales representados en el plano, es un aspecto importante de la visualización espacial, sobre todo en el contexto de la enseñanza.

Con referencia a la tabla de clasificación de tareas expuesta en el capítulo 1 (apartado 3.2) observamos que el estímulo inicial de estas tareas es siempre una representación plana del objeto (el segundo parámetro de la tarea es fijo). Para diferenciar con mayor detalle las tareas se propone distinguir los siguientes tipos de representaciones planas presentes en el enunciado y en la respuesta pedida (si es de dibujo):

- Las perspectivas caballera, isométrica y con puntos de fuga (proyecciones que dan una percepción global del objeto)
- Las "vistas", el sistema diédrico, la proyección ortogonal codificada (proyecciones que necesitan de una reorganización de la información para poder visualizar el objeto en su totalidad)
- Los desarrollos planos
- Las secciones (de cuerpos de revolución y los relativos ejes de rotación)

Tabla 4.1: *Clasificación de tareas de VOT para el cuestionario piloto.*

Acción principal	**Estimulo inicial: Dibujo**	**Tipo de respuesta**
1. Coordinar e integrar vistas de objetos 2. Rotar un objeto tridimensional 3. Plegar y desplegar desarrollos 4. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional 5. Generar cuerpos de revolución	1. Las perspectivas caballera, isométrica y con puntos de fuga 2. Las "vistas", el sistema diédrico, la proyección ortogonal codificada 3. Los desarrollos planos 4. Las secciones	1. Dibujo: 1.1 Las perspectivas caballera, isométrica y con puntos de fuga 1.2. Las "vistas", el sistema diédrico, la proyección ortogonal codificada 1.3. Los desarrollos planos 1.4. Las secciones 2. Identificación 3. Verbal/numérica

Remitimos a los capítulos 1 y 3 para la descripción de los procedimientos principales, de las representaciones planas involucradas y para los ejemplos de tareas propuestos en las investigaciones y en los libros de textos de educación primaria.

3.3. SELECCIÓN DE ASPECTOS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

Las reflexiones y recomendaciones de Shulman (1986) y las investigaciones de Ball, Lubienski y Mewborn (2001), Hill, Ball y Schilling (2008), suponen avances en la caracterización de los componentes del conocimiento que un profesor debería tener para desarrollar eficazmente su práctica docente y facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, como señala Godino (2009), los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza, elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, es de interés profundizar en la trama de conocimientos que el profesor requiere para enseñar matemáticas, centrándose en temas específicos.

Basándonos en el modelo didáctico-matemático del conocimiento del profesor basado en el "enfoque ontosemiótico" (ver capítulo 2, sección2.6), decidimos centrarnos en el análisis de los conocimientos relacionados con la faceta epistémica del tema y evaluar aspectos específicos del conocimiento del contenido común, ampliado y especializado.

En los siguientes apartados describimos con más detalle los aspectos de dichos conocimientos didáctico-matemáticos, sobre visualización de objetos tridimensionales representados en el plano, que queremos evaluar.

3.3.1. Conocimiento común sobre VOT

Consideramos que las orientaciones curriculares y los libros de textos de educación primaria, analizados en el capítulo 3, constituyen una interesante fuente de dicho conocimiento. De hecho suponemos que un maestro de primaria debe poder resolver de manera óptima tareas de nivel elemental, para tener una posible solución de referencia al momento de discutir y corregir las tareas resueltas por los alumnos. Hemos visto que los contenidos sobre VOT, sugeridos por las orientaciones curriculares y presentes en el conjunto de los libros de textos, describen interesantes aspectos de dichos conocimientos, sobre todo relacionados con la resolución de determinadas tareas. Un aspecto común de las actividades propuestas es la interpretación de diferentes tipos de representaciones planas con el objetivo de identificar y describir los objetos tridimensionales representados y sus posiciones en el espacio. De manera particular dominan las tareas en las cuales se pide identificar la vista que un determinado observador tiene de un objeto tridimensional, componer y descomponer un sólido en partes, determinar si una determinada figura bidimensional es un desarrollo plano; relacionar una figura plana que gira con el cuerpo tridimensional que genera. Consideramos dichos aspectos de la VOT como significativas componentes del conocimiento común. Aunque aparezcan también (escasas) tareas en las cuales se pide dibujar determinadas representaciones planas, estas tienen mayormente el papel de esbozos en lugar de producto de rigurosas técnicas de dibujos. De manera particular no viene enfatizada la necesidad de que los alumnos conozcan las propiedades que definen las representaciones utilizadas. Sin embargo, creemos que dichos conocimientos sean fundamentales para la enseñanza, ya que un profesor deba poder comunicar con claridad informaciones gráficas, eligiendo, entres las diferentes representaciones, la más adecuada para afrontar ciertos problemas (conocimiento ampliado). Además, la resolución de una tarea de nivel elemental es el punto de partida para analizar los conocimientos puestos en juego, las posibles dificultades que puede implicar, los diferentes procedimientos que se pueden utilizar en la resolución, son aspectos relevantes de un conocimiento especializado del contenido para la enseñanza.

3.3.2. Conocimiento ampliado sobre VOT

El conocimiento ampliado del contenido incluye la identificación de posibles conexiones con otros temas más avanzados del currículo correspondiente. Es el conocimiento que permite poner en relación el conocimiento común del contenido con los conocimientos matemáticos más avanzados, que el alumno encontrará en los años siguientes de su escolarización. Esta definición se basa en la asunción que hay una continuidad entre lo que el niño hace al acercarse a la matemática y lo que un matemático hace en su disciplina.

Como hemos anticipado en el apartado anterior, consideramos que un conocimiento ampliado sobre la VOT deba incluir la capacidad de seleccionar y producir representaciones planas adecuadas. Esto supone el dominio de las diferentes técnicas de dibujo y el conocimiento de las potencialidades que tienen las diferentes representaciones planas, para el estudio de determinadas propiedades del objeto, y para la resolución de ciertos problemas. Los futuros profesores deben saber porqué un objeto está dibujado de un cierto modo e idear otras diferentes representaciones.

De manera particular, consideramos que los siguientes aspectos forman parte del conocimiento ampliado sobre VOT: saber producir diferentes desarrollos planos de un mismo sólido, y para determinados sólidos (cubo, tetraedro,…) determinar la variedad de todos los desarrollos, en particular determinar si una representación es la correcta respuesta para una determinada tarea de desarrollo; trabajar con sólidos de revolución con huecos, generados por figuras planas que giran alrededor de ejes externos a ellas; poder construir diferentes sólidos a partir de tres vistas ortogonales (concebir que tres proyecciones ortogonales no siempre definen de forma univoca un sólido); representar diferentes composiciones de sólidos, variando las posiciones de las partes, dibujar particiones y secciones de sólidos.

Estos conocimientos aumentan la generalidad de los objetos, considerando las posibles distintas representaciones, transformaciones, posiciones y propiedades de los sólidos.

3.3.3. Conocimiento especializado sobre VOT

Dada la amplitud de aspectos que se deben incluir en el conocimiento especializado del contenido, como se describe en Godino (2009) aplicando el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, en nuestro caso hemos seleccionado tres de dichos aspectos: los tipos de justificaciones que son capaces de elaborar los estudiantes de magisterio para las tareas, las variaciones que proponen para las mismas con vistas a su uso en la escuela y la reflexión epistémica que son capaces de realizar sobre los conocimientos que se ponen en juego en la resolución.

3.3.3.1 Justificación

Observamos que en las tareas sobre VOT propuestas en los libros de texto analizados no se pide una justificación de la respuesta dada. De otra parte, en las diferentes orientaciones curriculares analizadas se pone en énfasis la importancia que tiene la argumentación de las soluciones propuestas. Por ejemplo, en NCTM (2000) se afirma que "En ciertas situaciones, será apropiado que los alumnos describan su forma de pensar de manera informal, utilizando un lenguaje común y esbozos; en la escuela secundaria, deberán también aprender a comunicar de manera más formal, utilizando la terminología matemática convencional". Observamos que frecuentemente en las tareas de visualización espacial este conocimiento no es fácil de expresar. La respuesta "es así porque lo veo" puede a veces parecer la única justificación posible. Esta respuesta no es adecuada en el contexto de la enseñanza, por ejemplo, cuando un niño no "ve" lo que el profesor dice que se "ve". Es entonces importante que un profesor pueda explicar con palabras, dibujos o gestos, una solución que "se ve" (y lo mismo pueda pretender por parte de sus alumnos).

Observando la gran diversidad de términos y significados asociados a la acción de demostrar (en matemáticas), Harel y Sowder (1998 y 2007) proponen la noción general de "esquema de prueba", definido como el proceso empleado por una persona para suprimir dudas (a sí misma o a otra persona) sobre la verdad de una conjetura. Así concebidos, los "esquemas de prueba" están presentes a lo largo de todo el currículo, frecuentemente asociados a términos como: explicar, justificar, demostrar,…

Además de poder explicar y argumentar las soluciones a sus alumnos de forma discursiva, con el objetivo de convencerles de su validez (y pretender lo mismo de ellos), consideramos necesario que los maestros puedan formular una prueba de referencia (esquema de prueba institucional) que justifique la validez de la proposición y guíe su forma de argumentar en los diferentes niveles educativos.

Asimismo, consideramos que el uso consciente de los diferentes tipos de esquemas de pruebas por parte del maestro, así como la capacidad de articularlos de forma progresiva, es de gran importancia desde los primeros niveles educativos.

En términos de Parzysz (2006, ver capítulo 1), aunque las actividades propuestas a los alumnos de escuela primaria se refieren al paradigma G1, su planificación y control por parte del maestro debe tener en cuenta G2, o sea un conocimiento más especializado del contenido matemático. De manera particular es necesario que el profesor acompañe la interpretación perceptiva de una representación, con una interpretación discursiva, que permita explicitar la relación delicada presente entre representación y objeto matemático.

3.3.2. Identificación de conocimientos

En la mayoría de libros de textos de educación primaria no se describen los procedimientos visuales involucrados en tareas sobre VOT, ni se describen adecuadamente las representaciones planas utilizadas (tanto en los apartados teóricos como en las actividades). Sin embargo, consideramos que un profesor de escuela primaria debería tener un cierto grado de competencia para hacer explícitos los conocimientos matemáticos requeridos para la realización de las tareas sobre VOT.

Estos conocimientos pueden ser procedimentales, conceptuales, lingüísticos y argumentativos. Una respuesta exhaustiva comprendería también la descripción o la definición de dichos conocimientos. En el capítulo 2 (sección 3) se han presentados los objetos principales que participan en prácticas visuales. Esta identificación de conocimientos es importante a la hora de diseñar, implementar y evaluar procesos de estudio sobre VOT.

Por ejemplo, "¿Por qué este alumno no supo resolver la tarea?, ¿Cuál es el conocimiento que no supo utilizar?" Son preguntas que un profesor puede contestar si conoce los elementos principales puestos en juego en la resolución, si conoce sus definiciones y sus reglas.

3.3.3. Variaciones de tareas

Otro aspecto de la enseñanza que hace operativa la identificación de los conocimientos, es la planificación de variaciones de las tareas, por ejemplo la simplificación, o la generalización de las mismas. Si se sabe cuáles son los conocimientos principales puestos en juego en la resolución se puede fácilmente variar uno a más aspectos de ellos para generar una nueva tarea relacionada de manera constructiva con la primera.

Consideramos que para variar una tarea sobre VOT es importante estudiar el papel que juega el lenguaje, tanto gráfico como simbólico. El tratamiento o conversión de registro de lenguaje, por ejemplo desde un lenguaje cuotidiano a un lenguaje formal, o bien desde un lenguaje simbólico a un lenguaje gráfico, así como la omisión de informaciones gráficas, puede implicar interesantes variaciones en los procedimientos visuales.

Observamos que, la elaboración de una tarea, además de un conocimiento especializado sobre VOT, involucra algunos conocimientos relacionados con la enseñanza, el aprendizaje y el currículo. Por ejemplo, para describir una buena variación el sujeto tiene que conocer las posibles dificultades y conflictos relacionados con la tarea, así como los contenidos tratados en el currículo en determinados niveles educativos.

3.4. SELECCIÓN Y ANALISIS DE LOS ÍTEMS

Ahora que hemos descritos los aspectos principales de los conocimientos didácticos-matemáticos que queremos evaluar, nos interesa especificar la manera con la cual pretendemos evaluarlos. Esto nos permite seleccionar y elaborar tareas adecuadas para cada tipo de conocimiento, y estructurarlas en diferentes ítems y sub-ítems, para formar un primer cuestionario piloto. Las tareas serán después resueltas y analizadas por medio de la GROP, lo que pondrá de manifiesto la riqueza de objetos y procesos que ponen en juego.

3.4.1. Selección y clasificación de los ítems

Para evaluar el conocimiento común sobre VOT hemos seleccionado tareas de libros de texto de primaria. Los libros de textos utilizados fueron las colecciones Anaya, SM y Santillana analizados en el capítulo 3.

Después de cada tarea de libros de texto hemos decidido formular tres preguntas relativas al conocimiento especializado sobre VOT. Primeramente se pide una justificación de la resolución de la tarea elemental, de manera que el sujeto explicite y argumente el proceso que le ha llevado a la solución propuesta. A continuación, se pregunta que el sujeto identifique los conocimientos matemáticos principales que ha utilizado en la resolución. Por último, se pide que el sujeto elabore una variación de la tarea, para que resulte más fácil/más difícil de resolver para un niño de primaria. Se espera que el sujeto identifique diferentes tipos de cambios: en el lenguaje verbal, de las propiedades de los objetos representados, del tipo de representación, en el procedimiento sugerido, en el material y el entorno,…

Para evaluar aspectos del conocimiento ampliado sobre VOT, se propone resolver una tarea relacionada a la primera pero de un nivel más alto, que involucra un conocimiento más avanzado del contenido. Estas tareas provienen de investigaciones y fueron en su mayoría propuestas a alumnos de escuela secundaria. La evaluación del conocimiento que los futuros profesores manifiestan en la resolución de dichas tareas nos informa sobre aspectos operativos del conocimiento ampliado del contenido, sobre su capacidad de utilizar conocimientos más avanzados para resolver tareas relacionadas con el contenido específico.

Concretamente, las categorías de tareas sobre VOT y los tipos de conocimientos didáctico-matemáticos son tenidos en cuenta en la construcción del cuestionario piloto (presentado en el Anexo 4) de la manera que explicamos a continuación.

Decidimos elaborar 14 ítems de respuesta abierta (de papel y lápiz), que cubren los siguientes aspectos del tema:

- Coordinar e integrar vistas de objetos: ítems 1, 2, 3 y 4
- Rotar un objeto en el espacio: ítems 5 y 6.
- Plegar y desplegar desarrollos: ítems 7 y 8.
- Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional: ítems 9, 10, 11 y 12.
- Generar cuerpos de revolución: ítems 13 y 14.

Cada ítem se divide entonces en los siguientes sub-ítems, según el aspecto del conocimiento que se quiere evaluar:

- Los sub-ítems a) pretenden evaluar aspectos del conocimiento común del contenido, y se refieren a tareas de libros de textos de educación primaria.
- Los sub-ítems b) y b') ponen en juego aspectos del conocimiento especializado del contenido: en el sub-ítem b) se pide una justificación de la solución propuesta a la tarea a) y se pregunta sobre los conocimientos puestos en juego en la resolución de dicha tarea; en el sub-ítem b') se pide una variación de la tarea.
- Los sub-ítems c), c') involucran un conocimiento más avanzado del contenido específico (conocimiento ampliado del contenido), y son tareas provenientes de las investigaciones analizadas.

Con respecto a la clasificación propuesta anteriormente (tabla 4.1) resumimos en la tabla 4.2 los parámetros de los sub-ítems a, c y c' presentados en el cuestionario piloto.

Tabla 4.2: *Clasificación de los ítems del cuestionario según la acción principal, el estímulo inicial y el tipo de respuesta (descritos en la tabla 4.1).*

Ítem	**Sub-item**	**Acción**					**Estimulo inicial**				**Tipo de respuesta**					
											1.				**2**	**3**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**		
1	a	X					X	X							X	
	c	X						X							X	
	c'	X						X				X				
2	a	X					X	X				X				
	c	X					X	X							X	
	c'	X					X	X				X				
3	a	X						X			X					
	c	X						X			X					
	c'	X						X								X
4	a	X						X				X				X
	c	X						X							X	

5	a		X				X								X	
	c		X				X								X	
6	a		X				X								X	
	c		X				X								X	
7	a			X					X						X	
	c			X					X						X	
8	a			X					X						X	
	c			X					X				X			
9	a				X		X				X					
	c				X		X				X					
10	a				X		X								X	
	c				X		X				X					
	c’				X		X				X					
11	a				X		X									X
	c				X		X									X
12	a				X		X									X
	c				X		X									X
13	a					X	X			X					X	
	c					X				X	X					
14	a					X	X			X				X		
	c					X	X								X	
	c’					X	X							X	X	

Analizando esta tabla observamos que, en los sub-ítems a, c y c’ de un mismo ítem, varía como máximo un parámetro, lo que manifiesta una estructura análoga en los diferentes sub-ítems. En algunos casos es el cambio del parámetro en los sub-ítems c) y c’) (con respecto al sub-ítem a) que permite evaluar un conocimiento más avanzado del contenido específico: por ejemplo en el ítem 8, variando el tipo de respuesta solicitada (en el 8a es de identificación, mientras que en 8c es de dibujo), se evalúa un conocimiento más avanzado, relativo a la representación de diferentes desarrollos de un sólido.

3.4.2. Proveniencia de los ítems de los apartados a y c

Como hemos descrito anteriormente, las partes a de cada ítem del cuestionario provienen de libros de textos de primaria, mientras que las partes c y c’ provienen en su mayoría de las investigaciones analizadas, con excepción de los sub-ítem 13 c, 14 c y 14 c’ que fueron de elaboración propia, no encontrando en la literatura ítems adecuado para evaluar el contenido específico.

Los libros de textos de primarias utilizados fueron los descritos en el capítulo 3. En las siguientes tablas (tablas 4.3 y 4.4) detallamos la proveniencia de cada sub-ítem a, c y c'.

Tabla 4.3: *Proveniencia sub-ítems a, tareas de libros de texto.*

Sub-ítem	Código libro	Pag.	Editorial			Curso					
			AN	SA	SM	1	2	3	4	5	6
1a	3AN08	172	X					X			
2a	6AN06	187	X								X
3a	6AN99	173	X								X
4a	4SA06	191		X					X		
5a	4AN08	172	X						X		
6a	6AN06	176	X								X
7a	5SA06	197		X						X	
8a	5SM09	184			X					X	
9a	4AN99	186	X						X		
10a	5SM02	185			X					X	
11a	2SA06	113		X			X				
12a	3SA06	187		X				X			
13a	6AN99	175	X								X
14a	6AN06	189	X								X

Observamos que las tareas seleccionadas para incluir en el cuestionario provienen de las tres editoriales y cubren los años de segundo a sexto. En los libros de textos del primer año no se encontró ninguna tarea adecuada para evaluar los contenidos seleccionados.

En el sub-ítem 3a, proveniente del libro de texto de 6° curso de primaria de Anaya (6AN99), se tuvo que modificar una de las vistas para que existiera una solución posible.

Tabla 4.4: *Proveniencia sub-ítems c y c', tareas de investigaciones o de elaboración propia.*

Sub-item	Proveniencia
1c, 1c'	A.P.M.E.P (1983), p. 111.
2c, 2c'	Ben-Chaim, Lappan y Houang (1988), p. 56
3c, 3c'	Pittalis, Mousoulides y Christou (2009), p. 387
4c	Ben-Chaim, Lappan y Houang (1985), p. 3
5c	Gorgorió (1994), p.123
6c	A.P.M.E.P (1983), p. 13-14.
7c	Fernandez (2011), p. 170
8c	Bishop (1983) , p. 188
9c	Lappan, Phillips y Winter (1984), p. 621

10c, 10c’	Lappan, Phillips y Winter (1984) p. 622
11c	Gorgorió (1994), anexo 7
12c	Bishop (1983), p. 187
13c	Elaboración propia
14c, 14c’	Elaboración propia

3.4.3. Solución y análisis de los ítems

En este apartado vamos a presentar el análisis detallado que aplicamos a las tareas seleccionadas para el cuestionario piloto. Para este análisis aplicamos una herramienta teórica, la “Guía para el reconocimiento de objetos y procesos” (GROP), presentada en el capítulo 1. Esta guía ayuda a analizar diferentes procesos epistémicos - cognitivos, de los cuales vamos a describir los siguientes: procesos de representación/significación, procesos de composición/síntesis, procesos de materialización/idealización, procesos de particularización/generalización.

Se decidió hacer este análisis tanto para las tareas del apartado a) como las del apartado c), (aunque en el cuestionario no se preguntan sobre los conocimientos puesto en juego en la pregunta c), con el objetivo de especificar y analizar los contenidos propios de cada ítem.

En seguida presentamos las soluciones y el análisis de un ítem del cuestionario piloto (ítem 13, relacionado con la generación de cuerpos de revolución mediante rotación de una figura plana).

Enunciado 13a.

Haz corresponder cada figura plana con el cuerpo de revolución que engendra al girar sobre el eje señalado (figura 4.1).

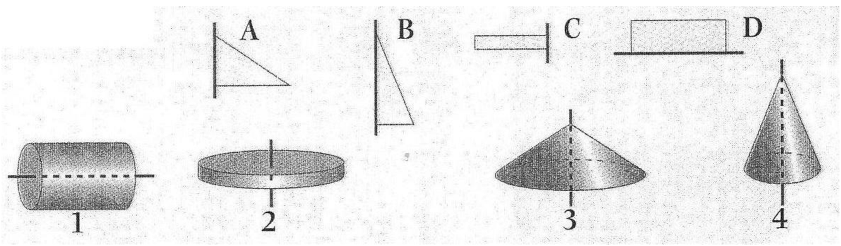


Figura 4.1: Figura planas y cuerpos de revolución sub-ítem 13a

Solución 13a.

A-3; B-4; C-2; D-1

Enunciado 13b. Justifica la respuesta e identifica los conocimientos que se ponen en juego en la solución de la tarea **13a.**

Solución 13b.

A-3 y B-4. El triangulo rectángulo A/B, rotando sobre el eje señalado engendra el cono 3/4. La base del triángulo (el lado perpendicular al eje de rotación) girando, genera la base circular del cono y mide como su radio, la hipotenusa del triángulo genera la superficie lateral del cono y mide como su apotema. El lado del triángulo perteneciente al eje de rotación se queda fijo y representa la altura del cono.

C-2 y D-1. El rectángulo C/D, rotando sobre el eje señalado engendra el cilindro 2/1. Los lados del rectángulo perpendiculares al eje de rotación, rotando, generan las dos bases circulares del cilindro y miden como su radio. El lado paralelo al eje de rotación genera la superficie lateral del cilindro y mide como su altura. El lado perteneciente al eje de rotación se queda fijo y representa la altura del cilindro.

Observamos que los sólidos de revolución dibujados parecen vacios, pero las figuras planas, rotando, engendran cuerpos rellenos.

Conocimientos principales:
Triángulo rectángulo, rectángulo, eje de rotación, rotación, rotación de figura plana en el espacio, sólido de revolución, cono, cilindro, radio, círculo, medidas, proporciones.

Los conocimientos puestos en juego se organizan por medio de la GROP en el siguiente análisis.

Proceso de descomposición (descomposición del enunciado en unidades semióticas):
"figura plana", "cuerpo de revolución", "engendrar", "girar", "eje".

Procesos de representación/significación

En la figura se presentan dos filas de dibujos. En la fila de arriba se representan cuatro figuras planas cada una con un segmento más obscuro (el eje) que prolonga un lado de la figura. Al lado de cada dibujo de figura plana aparece una letra que funciona como índice de la figura.

En la fila de abajo se representan cuatro sólidos en perspectiva cada uno con un segmento que lo traviesa (el eje), cuya parte interior al sólido es representada con línea entrecortada. Debajo de cada dibujo de un sólido aparece un número que funciona como índice del sólido representado arriba. El lector tiene que interpretar cada par letra/número correspondiente a un determinado par figura plana/sólido como una posible solución.

En las tareas de generación de sólidos de revolución se pone en juego el concepto de rotación de una figura plana en el espacio. La rotación en el espacio es un movimiento rígido que tiene como puntos fijos una recta llamada eje de rotación. Éste movimiento mueve todos los puntos de las figuras planas dadas alrededor del eje.

Un sólido de revolución es un sólido obtenido al rotar una región del plano alrededor de una recta ubicada en el mismo, las cuales pueden o no intersecarse. Dicha recta se denomina eje de revolución. En esta tarea:

- Los triángulos rectángulos y los rectángulos presentados en la primera línea de la imagen son las regiones planas que se tienen que rotar para engendrar el sólido.
- Las rectas tangentes a los bordes de las figuras planas ilustradas en la primera línea de la figura son los ejes de revolución alrededor de los cuales se tiene que rotar las figuras planas para generar los respectivos sólidos de revolución.
- Los conos y cilindros ilustrados en la segunda fila de la figura son sólidos de revolución que se pueden obtener por la rotación de las figuras planas ilustradas en la primera línea.

Además, en los casos expuestos en la tarea los ejes de revolución son tangentes a parte de la frontera de las regiones.

Procesos de composición/síntesis.

Procedimientos y propiedades.

En la consigna de la tarea se pide de hacer corresponder “cada figura plana con el cuerpo de revolución que engendra al girar sobre el eje señalado”. El procedimiento de “engendrar” el cuerpo requiere que el sujeto o bien conozca la definición de sólido de revolución, o bien interprete que el sólido tiene que ser formado por todos los puntos que pertenecen a la figura plana a lo largo de su rotación completa alrededor del eje.

La rotación tiene entonces que ser interpretada como un movimiento continuo en el tiempo. Este proceso mental no sólo requiere la creación de la imagen final sino de una sucesión de imágenes en movimiento.

En esta tarea se ponen en juego las siguientes propiedades:

- Propiedades de la rotación: la rotación es una isometría, cualquier punto de la figura que gira permanece a una distancia constante del eje de rotación.
- Propiedades del sólido de rotación: Las figuras planas que rotando generan los sólidos de revolución son mitad de las secciones longitudinales del respectivo sólido que contienen el eje de rotación.
- Las secciones transversales (obtenidas por la intersección de planos perpendiculares al eje de revolución) del sólido de revolución son discos de radio variables.
- Relaciones entre la figura plana y el respectivo sólido: la superficie del sólido de revolución está formada por la rotación del borde de la figura plana excepto los puntos que pertenecen al eje de revolución.

Procesos de materialización/idealización.

La generación del sólido es un proceso de difícil materialización puesto que requiere generar un objeto de tres dimensiones a partir de la rotación de una figura bidimensional.

Dicho proceso confiere a la rotación un carácter generativo. La rotación de la figura plana no es vista como transformación geométrica que permite cambiar la posición de una figura plana desde una posición fija A hasta otra posición fija B, sino tiene que ser interpretada como un movimiento continuo en el tiempo en el cual el espacio que ocupa la figura a lo largo del tiempo permite la generación de un sólido.

La descripción de la tarea se apoya en elementos ostensivos gráficos (fijos) acompañados de una descripción verbal, que incluye el término “cuerpo de revolución”.

La información gráfica presente en el enunciado puede evocar otras situaciones que utilizan ejes, como por ejemplo simetrías axiales.

Procesos de particularización/generalización.

La tarea se puede variar cambiando las condiciones puestas en el enunciado, relacionadas con las propiedades de los giros en el espacio, con respecto a un eje y a las figuras dadas. Por ejemplo:

- Proponer rotaciones de una misma figura alrededor de ejes diferentes, tanto pertenecientes a la figura, como externos a ella. Esta generalización muestra que una misma figura puede generar una infinidad de diferentes sólidos de revolución, que pueden ser con o sin agujeros , dependiendo de si el eje interseca la figura o no.

- Poner otras figuras planas, menos habituales, por ejemplo con partes curvas o compuestas por diferentes figuras planas conocidas.

Además, en el proceso de generar el sólido de revolución está involucrada la idea de integral para el cálculo de su volumen. Hacemos coincidir el eje de revolución de la región del plano con el eje z y llamamos a f(z) la función que define el borde de la región plana excepto los puntos que pertenecen al eje.

El volumen V del sólido de revolución se puede obtener idealmente "cortando" los discos de espesor dz a lo largo del eje z (Teorema de Fubini): El disco de la cota z tiene volumen igual al aérea del circulo de radio f(z) multiplicado por el espesor dz. Sumando cada volumen del disco con dz infinitésimo (o sea integrando) se tiene:

$$V = \int_a^b \pi f(z)^2 dz$$

Enunciado 13b. Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea **13a** para que resulte más difícil de resolver para un niño de primaria.

Solución 13b.

- Poner cuerpos de revolución menos conocidos (composiciones de sólidos, casquetes esféricos,..)
- Variar la posición del eje, por ejemplo haciéndolo coincidir con los diferentes lados de la figura plana
- Alejar el eje de rotación de la figura plana, para obtener huecos en el cuerpo de revolución.
- Preguntar por dibujar el cuerpo de revolución correspondiente a una determinada figura plana.
- Preguntar por dibujar la figura plana y el eje sobre el cual debe rotar para engendrar un determinado cuerpo de revolución.

Enunciado 13c.

Dibuja, de forma aproximada, qué cuerpos obtendremos al hacer girar las siguientes figuras planas respecto de los ejes que se indican.

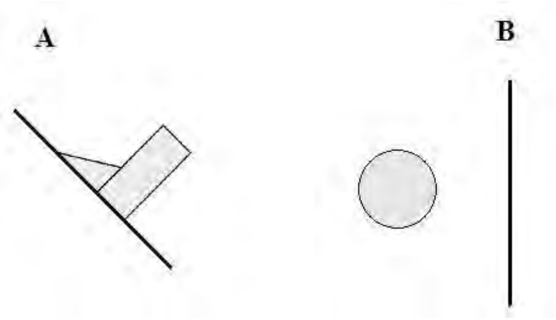


Figura 4.2: Figuras planas y ejes de rotación, sub-ítem 13c.

Solución 13c.

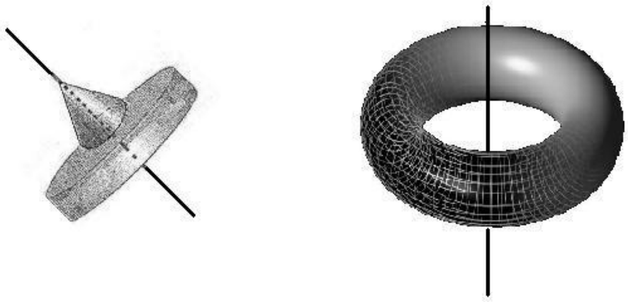


Figura 4.3: Sólidos de revoluciones, soluciones al sub-ítem 13c.

Análisis mediante la GROP del ítem 13c

Proceso de descomposición (descomposición del enunciado en unidades semióticas): Cuerpos, hacer girar figuras planas, ejes.

Procesos de representación/significación

En la figura se presentan dos dibujos de figuras planas con un segmento más obscuro (el eje). Encima de cada dibujo de figura plana aparece una letra que funciona como índice de la figura. El lector tiene que interpretar cada figura como un ejercicio independiente que sigue el mismo enunciado.

Como en la parte a) se pone en juego el concepto de rotación de figura plana en el espacio relacionado al concepto de sólido de revolución.

En la figura de la parte A de la tarea el eje es tangente a parte de la frontera de la región, en la figura de la parte B el eje es externo a la región.

Los sólidos de revolución involucrados en esta tarea son el cono, el cilindro y el toro. El cono se obtiene por rotación de un triángulo rectángulo alrededor de un eje pasante por uno de sus catetos. El cilindro se obtiene por rotación de un rectángulo alrededor de un eje tangente a uno de sus lados o interno al rectángulo y paralelo a uno de sus lados.

El toro se obtiene por una circunferencia que gira alrededor de una recta coplanaria. Generalmente se asume que la recta sea exterior a la circunferencia. Topológicamente, se define como el producto cartesiano de dos circunferencias: $S^1 \times S^1$(y con la topología producto). Puesto que en esta tarea se presenta un círculo (o disco, o sea el conjunto de los puntos que se encuentran contenidos dentro de la circunferencia) su rotación alrededor del eje señalado engendra un toro sólido (y no un toro como superficie). Topológicamente definido como producto cartesiano de un disco y una circunferencia: $D^2 \times S^1$.

Procesos de composición/síntesis.

En esta tarea se ponen en juego los siguientes procedimientos y propiedades:

- El procedimiento de “engendrar” un cuerpo de revolución visualizando la rotación de una figura plana alrededor de un eje
- Propiedades de la rotación
- Propiedades de los sólidos de rotación: el primer sólido de rotación que se genera es una composición de dos sólidos de rotación (un cilindro y un cono) que se generan haciendo girar dos regiones planas sobre un eje común.
- Relaciones entre la figura plana y el respectivo sólido: el triangulo rectángulo que compone la región plana dibujada en el enunciado, rotando sobre el eje señalado, engendra un cono. El rectángulo que compone la región plana dibujada en el enunciado, rotando sobre el eje señalado, engendra un cilindro. Además, puesto que el cateto menor del triangulo rectángulo se sitúa en una de las dos base mayores del rectángulo, entonces la base del cono se sitúa en la base superior del cilindro. Además, con respecto al cono que compone el sólido de rotación podemos afirmar las siguientes propiedades: El radio de la base del cono mide como la base del triángulo (el lado perpendicular al eje de rotación), la altura del cono mide como la altura del triángulo (el lado perteneciente al eje de rotación), la apotema del cono mide como la hipotenusa del triángulo. Con respecto al cilindro podemos afirmar: la base del rectángulo (el lado perpendicular al eje de rotación) mide como el radio de la base del cilindro, la

altura del rectángulo (el lado perteneciente al eje de rotación) mide como la altura del cilindro.

Procesos de materialización/idealización.

Esta tarea requiere dibujar (objetos ostensivos) los cuerpos resultantes. La representación gráfica puede llegar a ser complicada si no se tiene una cierta destreza al dibujar. Además en la parte B de la tarea se pide de dibujar un sólido de revolución generado por una figura plana que gira alrededor de un eje externo a ella.

Observamos que en topología un toro sólido es un objeto tridimensional obtenido mediante el producto cartesiano de un disco y una circunferencia: $D^2 \times S^1$. De forma intuitiva se puede interpretar este producto cartesiano como la rotación del disco D2 a lo largo de una órbita circular (S1), lo que equivale a la definición de cuerpo de revolución.

Procesos de particularización/generalización.

Una forma de generalizar una propiedad emergente de la parte A es afirmar que la composición de un número finito de sólidos de rotación generados por regiones planas que giran sobre un eje de rotación común es un sólido de rotación formado por la rotación de las composiciones de dichas regiones planas.

Además, con respecto a la parte B de la tarea se podría razonar sobre los posibles sólidos de rotación que se pueden generar haciendo girar un círculo alrededor de diferentes ejes (variando la distancia entre eje y círculo). Observamos que si la distancia entre el eje y el centro del círculo disminuye (y llega a ser menor que su radio) el toro se convierte en un anillo toroide husillo hasta degenerar en una esfera.

3.4.4. Tabla de especificaciones de los contenidos

A partir del análisis de los ítems a y c, y sus soluciones hemos identificado, para cada categoría de tareas, los principales elementos del contenido involucrados en su resolución.

3.3.5.1. Coordinar e integrar vistas de objetos: tareas 1-4.

Estas tareas se relacionan con el procedimiento físico de cambiar puntos de vista delante de uno o más objetos tridimensionales. En las situaciones propuestas se trabaja únicamente con representaciones planas, lo que requiere que el sujeto visualice los movimientos de un hipotético observador sin apoyarse en elementos materiales.

Distinguimos las siguientes situaciones-problemas principales, relacionadas con situaciones que involucran el movimiento (mental) del sujeto, del objeto o sus partes:

- Dibujar algunas vistas, vistas codificadas o proyecciones ortogonales en el sistema diédrico, de un objeto (o de una composición de objetos) a partir del dibujo del objeto en perspectiva (caballera, isométrica o con punto de fuga)

- Dibujar el objeto en perspectiva a partir de la representación del objeto por vistas, vistas codificadas, o proyecciones ortogonales en el sistema diédrico.

- Poner en relación (sin dibujar) dos tipos de representaciones planas de un objeto, reconociendo una determinada representación del objeto a partir de otra.

- A partir de las vistas de un sólido, identificar su nombre.

Un contenido importante de estas tareas es el tipo de representación del objeto dado en la consigna de la tarea. Distinguimos entre perspectiva caballera, isométrica, con punto de fuga, las vistas, el sistema diédrico y la perspectiva ortogonal codificada. Observamos que las representaciones planas, además de ser instrumentos de dibujo técnico (procedimientos), pueden ser definidas como conceptos abstractos (por ejemplo las vistas). El uso correcto de las representaciones planas incluye el conocimiento de sus principales propiedades.

En estas actividades emergen diferentes conceptos: perspectiva/vista, punto de vista, dirección de mirada, lateralidad del sujeto, posición relativa de los objetos con respecto al observador, sólidos.

Además de las propiedades relacionadas al sistema de representación plana con el cual es dibujado el objeto, emerge la siguiente propiedad: la no-unicidad de un objeto representado por tres vistas. O sea, tres vistas (proyecciones ortogonales) no definen siempre un único objeto.

Resumimos en la siguiente tabla (tabla 4.5) los contenidos principales presentes en las tareas 1-4 de los conocimientos común y ampliado sobre coordinación e integración de las vistas.

Tabla 4.5: *Contenidos principales en las tareas sobre coordinación e integración de las vistas.*

Contenidos tareas 1-4 (sub-ítems a, c, c')	**1**			**2**			**3**			**4**	
	a	**c**	**c'**	**a**	**c**	**c'**	**a**	**c**	**c'**	**a**	**c**
1. Distintas representaciones de objetos tridimensionales:											
1.1. Perspectivas caballera, isométrica o con puntos de fuga	X			X	X	X	X	X	X		
1.2. "Vistas", proyecciones ortogonales	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1.3. Proyección ortogonal codificada											X
2. Posiciones relativa de los objetos con respecto a un observador	X	X	X		X	X					
3. Cambio entre diferentes tipos de representación planas: perspectiva- vistas ortogonales			X	X		X	X	X		X	
4. Relación entre diferentes tipos de representación planas: perspectiva- vistas ortogonales	X	X			X				X		X
5. Caracterización del concepto de vista, como representación visual de lo que se ve desde un punto	X	X	X		X	X				X	X
6. Caracterización del concepto de vista, como proyección ortogonal				X			X	X			
7. Integración de las vistas de un objeto para formar el objeto tridimensional							X	X			
8. No-unicidad de un objeto representado por tres vistas									X		
9. Dibujo			X	X		X	X	X		X	

3.3.5.2. Rotar un objeto tridimensional: tareas 5 y 6.

En estas tareas se pretende evaluar la habilidad de rotar mentalmente un objeto tridimensional en el espacio, alrededor de uno o más ejes (composición de rotaciones).

Observamos que rotar un objeto puede ser considerado como procedimiento equivalente al procedimiento de cambiar mentalmente de perspectiva (imaginarse en otra posición con respecto al objeto).

Decidimos trabajar únicamente con tareas donde el tipo de representación plana del objeto no cambia (y en general se trabaja únicamente con representaciones de objetos en perspectiva isométrica o caballera) e incluir únicamente tareas de identificación (tipo de respuesta) ya que el aspecto de dibujo está incluido en contenidos de otros tipos de tareas.

Consideramos que dos objetos representados en el plano son "equivalentes", si girando en el espacio uno de los dos objetos obtenemos dos perspectivas idénticas. Observamos que, en muchos casos, las tareas de rotación de objetos en el espacio se construyen con objetos que tienen igual estructura pero orientaciones diferentes.

En los libros de texto analizados son muy escasas las tareas relativas a este tema.

Resumimos en la siguiente tabla (tabla 4.6) los contenidos principales relativos a los ítems 5 y 6 de los conocimientos común y ampliado sobre rotación de objetos tridimensionales.

Tabla 4.6: *Contenidos principales en las tareas sobre rotación de objetos tridimensionales*

Contenidos tareas 5 y 6 (sub-ítems a, c, c')	**5**		**6**	
	a	**c**	**a**	**c**
1. Representaciones en perspectivas caballera, isométrica o con puntos de fuga	X	X	X	X
2. Reconocimiento de la ley que regla una sucesión generada por la rotación de un objeto	X			
3. Identificación de dos objetos "equivalentes" representados en el plano	X	X	X	X
4. Eje, sentido y amplitud de una determinada rotación ilustrada		X		
5. Objetos con orientaciones diferentes: dados y composiciones de cubos		X		X
6. Parte visible, parte oculta	X	X		

3.3.5.3. Plegar y desplegar desarrollos: tareas 7 y 8.

En las tareas relativas a los desarrollos de objetos tridimensionales, al igual que las tareas de la primera categoría, los tipos de representaciones planas de los objetos juegan un papel central. En las actividades presentadas en el cuestionario se trabaja con objetos representados en perspectiva y con dibujos de desarrollos planos.

En las tareas seleccionadas se ponen en juego los siguientes procedimientos principales:

- Identificar los desarrollos posibles de un determinado sólido (plegar)
- Identificar las representaciones que no pueden ser desarrollos de un determinado sólido (que llamamos "desarrollos imposibles")
- Dibujar la imagen obtenida desarrollando un cuerpo geométrico (desplegar)
- Indicar en el desarrollo las aristas que se hacen corresponder cuando el objeto tridimensional sea reconstruido.

Además, en las consignas y en la justificación de las tareas, se utiliza un determinado lenguaje verbal: nomenclatura de los sólidos, nomenclatura de las componentes de los sólidos (vértices, aristas, caras), elementos gráficos (letras, símbolos) que designan la equivalencia entre aristas o vértices de un desarrollo

Como conceptos principales emergentes de estas tareas destacamos los siguientes: pluralidad de desarrollos de un sólido, cubo, pirámide, cono, pirámide truncada, superficie de un sólido, relación de equivalencia entre aristas o vértices de un desarrollo.

Resumimos en la siguiente tabla (tabla 4.7) los contenidos principales relativos a los ítems 7 y 8 de los conocimientos común y ampliado sobre los desarrollos planos.

Tabla 4.7: *Contenidos principales en las tareas sobre los desarrollos planos.*

Contenidos tareas 7 y 8 (sub-ítems a, c, c')	**7**		**8**	
	a	**c**	**A**	**c**
1. Distintas representaciones de objetos tridimensionales:				
1.1. Perspectivas caballera, isométrica o con puntos de fuga				X
1.2. Desarrollos planos	X	X	X	X
2. Pluralidad de desarrollos planos de un solido	X			X
3. "Desarrollos imposibles"	X		X	
4. Relación de equivalencia entre aristas o vértices de un desarrollo		X		
5. Cambio/Relación entre diferentes tipos de representación planas				
5.1. Plegar un desarrollo	X	X	X	
5.2. Desplegar el desarrollo				X
6. Dibujo				X

3.3.5.4. Composición y descomposición en partes: tareas 9-12.

El procedimiento de construir composiciones de sólidos, agregar o quitar partes, es una operación que tiene fundamento en la construcción con materiales. En estas tareas, trabajando con representaciones bidimensionales, se pide que el sujeto visualice tales acciones y las represente mediante dibujo.

En las tareas de composición y descomposición en partes emergen los siguientes procedimientos:

- Dadas dos o más piezas componerlas para formar un sólido, o viceversa,
- Dado el sólido (o una de sus representaciones) descomponerlo en dos o más partes
- Dado un sólido contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices,…)

En estas tareas se requiere implícitamente de interpretar y representar dibujos en perspectiva y se pone en juego el concepto de objeto visible/objeto oculto. En las representaciones de las composiciones de cubos hay algunas partes que aparecen visibles y otras que no. El lector tiene que observar que algunos cubos que aparecen visibles (algunas caras) pueden ocultar a otros.

Resumimos en la tabla 4.8 los contenidos principales relativos a dicho ítems.

Tabla 4.8: *Contenidos principales en las tareas sobre composición y descomposición en partes.*

Contenidos tareas 9-12 (sub-ítems a, c, c')	**9**		**10**			**11**		**12**	
	a	**c**	**a**	**c**	**c'**	**a**	**c**	**a**	**c**
1. Representaciones en perspectivas caballera, isométrica o	X	X	X	X	X	X	X	X	X

con puntos de fuga									
2. Composición de dos o más piezas para formar un sólido					X				
3. Descomposición de un sólido en dos o más partes	X	X	X	X					
4. Conteo de elementos que componen un sólido (unidades de volumen, caras, aristas, vértices,…)	X					X	X	X	X
5. Parte visible y parte oculta		X		X	X	X	X		X
6. Dibujo	X	X		X	X				

3.3.5.5. Generación de cuerpos de revolución: tareas 13 y 14.

El procedimiento de “engendrar” un cuerpo de revolución a partir de la rotación de una figura plana, es de difícil materialización, puesto que requeriría interpretar la rotación como un movimiento continuo en el tiempo en el cual el espacio que ocupa la figura a lo largo del tiempo permite la generación de un sólido.

Hemos visto que en algunos libros de textos, se propone materializar dicho procedimiento mediante la rotación de una figura de papel pegada a una barra que gira. La velocidad del movimiento puede crear la ilusión óptica de tridimensionalidad. En el capítulo 3 hemos discutido la pertinencia de dicha materialización y las posibles consecuencias que tiene en la generalización del proceso a sólidos de revolución con huecos.

Distinguimos las siguientes tres situaciones-problemas principales:

- Relacionar figura plana que gira con el cuerpo tridimensional que genera eligiendo entre diferentes posibilidades
- Dada una figura plana y el eje sobre el cual debe girar, reconocer el sólido de revolución que genera; y viceversa:
- A partir de un sólido de revolución reconocer la figura plana que lo genera y el eje sobre el cual debe girar.

Resumimos en la tabla 4.9 los contenidos principales relativos a dicho ítems.

Tabla 4.9: *Contenidos principales en las tareas sobre generación de cuerpos de revolución.*

Contenidos tareas 13 y 14 (sub-ítems a, c, c’)	**13**		**14**		
	a	**c**	**a**	**c**	**c’**
1. Distintas representaciones de objetos tridimensionales:					
1.1. Perspectivas caballera, isométrica o con puntos de fuga	X	X	X	X	X
1.2. Secciones y ejes de rotación	X	X	X		X
2. Reconocimiento de cuerpos revolución entre diferentes sólidos				X	
3. Cambio entre diferentes tipos de representación planas: dibujo en perspectiva-figura plana (sección) y eje de revolución	X	X	X		X
4. Cuerpos de revolución sin huecos	X	X	X	X	
5. Cuerpos de revolución con huecos		X		X	

6. Cambio de posición del eje de rotación: generación de dos sólidos diferentes			X		X
7. Dibujo		X			X

En Anexo 5 presentamos una tabla resumen de los contenidos cubiertos por el conjunto de sub-ítems a y c.

4. PRUEBA PILOTO DEL CUESTIONARIO SOBRE VOOT

4.1. SUJETOS

El cuestionario piloto fue experimentado con 6 estudiantes del primer curso de la especialidad de Educación Primaria de la Universidad de Granada del año académico 2009-2010 de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada. Los alumnos fueros seleccionados entre los mejores, según sus calificaciones en matemáticas en los exámenes precedentes.

4.2. MATERIAL Y PROCEDIMIENTO

El cuestionario fue dividido en dos partes, la primera desde el ítem 1 hasta el 6, que comprende el tema de coordinación e integración de las vistas y de la rotación del objeto, la segunda que incluye los restantes ítems y trata el tema de los desarrollos, la descomposición y composición de partes y los cuerpos de revolución.

Aplicamos la primera parte del cuestionario en una sesión de 2 horas, y la segunda en otra sesión de 2 horas.

El cuestionario fue administrado en forma individual. Los estudiantes pudieron quedarse hasta terminar el cuestionario de manera completa. Dimos instrucciones claras sobre cómo resolverlo y pedimos que las justificaciones de cada ítem, fuese lo más detallada posible. Explicamos también a los estudiantes el objetivo de la recogida de datos, solicitando su colaboración.

Además fueran rellenadas tablas de notas de los tiempos parciales de resolución de las tareas, las observaciones de los estudiantes, sus preguntas y sus dudas.

4.3. RESULTADOS DEL ESTUDIO PILOTO Y CAMBIOS

Pasados los cuestionarios los resultados fueron analizados de forma cualitativa. El objetivo de esta evaluación era valorar, especialmente, la comprensión de los enunciados de los ítems y estimar el tiempo necesario para su resolución. También se solicitó a los estudiantes que participaron en la prueba piloto que indicaran posibles dificultades de comprensión. Para los ítems relativos a los conocimientos común y ampliado, fueron descritos los errores principales involucrados en las respuestas y en las justificaciones.

Por lo que se refiere a los conocimientos manifestados por los alumnos (segunda parte del sub-ítem b) se analizaron primeramente de forma detallada, organizando las informaciones contenidas en las respuestas de manera sistemática. Los conocimientos identificados por los sujetos en cada pregunta fueron puestos en relación con los conocimientos relevados en el análisis previo de las tareas, mientras que fueron destacados los conocimientos nuevos que emergieron de las respuestas de los estudiantes.

Por lo que se refiere a las variaciones de las tareas pedidas en los sub-ítems b' se distinguieron entre relevantes y no-relevantes (o incorrectas). Las variaciones relevantes se clasificaron según el cambio principal sugerido por los alumnos: en el lenguaje verbal, en el lenguaje simbólico, de las propiedades de los objetos representados, de la cantidad de los objetos representados, del tipo de representación, en el procedimiento sugerido, en el material y el entorno.

Una primera observación general que destacamos es la mala interpretación del sub-ítem b: diferentes estudiantes no separaron la respuesta relativa a los conocimientos puestos en juego de la respuesta relativa a la justificación, frecuentemente dieron una justificación sin explicitar y describir los conocimientos. Se decidió entonces, en la elaboración del cuestionario por los expertos, de separar en dos sub-ítems diferentes las dos preguntas presentes en el sub-item b (la justificación y los conocimientos).

Diferentes alumnos preguntaron cerca del tipo de justificación necesaria, y se les indicó que justificaran sus respuestas de la forma más precisa y formal que pudieran. Se decide incluir esta explicación oral también a la hora de pasar el cuestionario final.

Algunos alumnos afirmaron la dificultad de encontrar los conocimientos puestos en juego, sobre todo por en el caso de tareas que consideraban fáciles (por ejemplo la primera). “Cuanto es más fácil de resolver una tarea, tanto más difícil es justificarla y encontrar los conocimientos puestos en juego” (constatación de una alumna).

Las justificaciones dadas fueron de diferentes tipos (la mayoría informales perceptivas), y tenían más bien un carácter “explicativo”. Pocas fueron las argumentaciones realizadas utilizando alguna noción matemática, propiedad, o técnica adecuada.

De forma general se puede destacar que, los estudiantes han empleado más de 20 minutos para resolver determinados ítems: el ítem 1, el 6, el 12 y el 14, puesto que los sub-ítems relativos al conocimiento ampliado del contenido (1c, 1c', 6c, 12c, 14c') han necesitado mucho tiempo (más de 10 minutos cada uno) para ser comprendidos y resueltos. De otra parte, el tiempo necesitado para resolver los demás ítems ha sido bastante equilibrado, cerca de 15 minutos cada uno. Se consideró entonces necesario estudiar con detalle las causas de dicha demora en la resolución de los sub-ítems indicados, y discutir la pertinencia de incluirlos en el cuestionario final.

Describimos ahora separadamente los resultados obtenidos en las diferentes categorías de tareas, y los relativos cambios aportados al cuestionario.

4.3.1. Resultados de las tareas sobre coordinación e integración de vistas

Los ítems 2 y 3 fueron resueltos de forma satisfactoria por los estudiantes, que comprendieron los enunciados y dieron respuestas pertinentes. Sin embrago, en los sub-ítems 3c y c' se observaron algunos errores y dificultades relacionadas con el procedimiento de integrar las tres vistas ortogonales. Consideramos interesante estudiar en una muestra más amplia y heterogénea de estudiantes dichos aspectos del conocimiento sobre VOT.

Como hemos anticipado, los alumnos han necesitado mucho tiempo para resolver los sub-ítems 1c y 1c', debido probablemente a los diversos casos a tratar (se proponen 9 sub-problemas). El análisis de las respuestas reporta además muchas soluciones incorrectas, en las respuestas 1c, y errores en la comprensión de la pregunta 1c'. Un alumno, en lugar de dibujar las vistas desde arriba de las vistas laterales falsas, intenta corregir las vistas laterales falsas atribuyéndole un punto de vista posible.

Dado el buen nivel matemático de los estudiantes de la muestra piloto, consideramos entonces dichos sub-ítems no pertinentes para nuestro estudio, por su alto grado de dificultad, tanto relacionado a la comprensión del enunciado como a su resolución. Este ítem lo eliminamos del cuestionario definitivo.

En el sub-ítem 4a, relacionado con el conocimiento común del contenido, hemos observado diferentes errores. Algunos de estos se refieren a la incorrecta identificación de los sólidos correspondientes a las vistas dadas, otros se refieren a la incorrecta interpretación del término "vista de frente", que en algunos casos viene considerada como "panorámica" y dibujada en perspectiva (en lugar que en proyección ortogonal). Además, algunos alumnos atribuyen un nombre incorrecto o incompleto a los sólidos que dibujan. De hecho, para resolver correctamente dicha tarea, es necesario un buen conocimiento de la nomenclatura de los sólidos, que permita denotarlos con precisión. Aunque consideramos dicho conocimiento un importante aspecto del conocimiento común relativo a la geometría espacial, no queremos que su carencia influya sobre el éxito de las respuestas a las tareas sobre VOT de los sub-ítems a y c, que quiere evaluar la coordinación e integración de las vistas. Puesto que este contenido ya está cubierto en otros ítems, decidimos suprimir este sub-ítem.

Resumimos en la siguiente tabla (tabla 4.10) los conocimientos relevantes que fueron identificados por los alumnos en la respuesta a la segunda parte del ítem 1b. Presentamos los términos utilizados por los estudiantes.

Tabla 4.10: *Conocimientos relevantes identificados por los alumnos en la respuesta a la segunda parte del ítem 1b.*

Conceptos	**Procedimientos**	**Propiedades**
- Diferentes puntos/tipos de vista, el espacio desde arriba, situarse frente a todas las vistas e imaginárselas - Perspectivas del objeto que ha sido representado - Posición, posición en las que se encuentra el observador - Disposiciones de los objetos - Líneas paralelas y perpendiculares - Formas geométricas, cuerpos geométricos, polígonos regulares - Delante, detrás, derecha, izquierda, abajo, arriba, frente	- Representar las vistas en dos dimensiones sobre el papel - Tomar un objeto de referencia para poder facilitar la perspectiva que corresponde a cada imagen - Visualización de una figura en distintas perspectivas	- Propiedades de la perspectiva - Propiedades de los polígonos regulares - Formas de las distintas figuras geométricas tridimensionales, conocimientos de su nombre, tipo de caras, números,…

Observamos que, a la hora de argumentar las respuestas, los estudiantes utilizan determinados conocimientos no explicitados. En particular, emergen los siguientes conceptos: Lugar de los objetos, posición desde las cuales se han tomado las fotos, posición (derecha. Izquierda) con respecto a un objeto, alzado, vista de perfil, la planta, tres ejes, ángulo, perspectiva caballera, paralelas, vértices, extremo, lado, prismas, pirámides. También se hace referencia a los siguientes procedimientos: visualizar las diferentes perspectivas, comparar la foto con las perspectivas, girar el papel, giro mental (es decir, situarse en una posición, e ir girando alrededor del objeto para ver cómo cambia hasta llegar a otra posición), dibujar las diferentes visiones, perspectivas de la figura, hacer coincidir las vistas con los ejes , coincidir, completar las figuras, imaginar la figura geométrica vista desde arriba, mirar hacia donde indica la flecha.

Destacamos que los términos “vistas”, “perspectivas”, “punto de vista”, son utilizados en diferentes contextos y con varios significados (ver capítulo 1, sección 2.1.3). Por ejemplo, entre las respuestas de los alumnos, se encuentran las siguientes afirmaciones: “Visualizar los puntos de vistas”, “Visualización de una figura en distintas perspectivas”, “Comparar la foto con las perspectivas”, “Características de las caras desde las distintas perspectivas”, “propiedades básicas de la perspectiva caballera”, “Se pone en juego la idea que las vistas en perspectivas varían en función de la posición en la que nos encontramos. Por ejemplo, el cuadrado perteneciente al alzado, una vez situado en la figura en perspectiva caballera tiene una visión panorámica diferente de la inicial”, “primero se sitúan los ejes de la perspectiva que vamos a utilizar, en este caso, la perspectiva caballera, cuyos ejes forman 90º eje x e y y 45º eje y con el eje z”, “las formas las he dibujados a partir de la perspectiva que obtengo de imaginarme dos ejes que me dan el ángulo para que el resto de las formas se adapten”.

Destacamos que en la primera hoja del cuestionario se presentaba el nombre del cuestionario (“cuestionario de visualización y orientación de objetos tridimensionales”), y posiblemente algunos estudiantes se apoyaron en los términos “visualización”, “orientación”, “tridimensionales” para identificar los conocimientos. Consideramos necesario quitar el título del cuestionario, para no influir en las respuestas de los alumnos

Las variaciones propuestas por los estudiantes a estas preguntas fueron pertinentes y se centraron en los siguientes cambios:

- Eliminar las flechas para que el niño la identifique solo;
- Cambiar la forma del jarrón (una forma no simétrica)
- Poner más objetos
- Poner más vistas
- En lugar del dibujo en perspectiva poner la vista desde arriba.

4.3.2. Resultados de las tareas sobre rotación de objetos tridimensionales

Los sub-ítems 5a, 5c, y 6a fueron resueltos de forma correcta por los estudiantes. Sin embargo, tanto la identificación de conocimientos como las justificaciones del ítem 6a fueron muy pobres, y no permitieron movilizar conocimientos especializados sobre el contenido específico. Esto puede ser atribuido al nivel muy básico de la tarea, o bien al aspecto empírico que la caracteriza. Decidimos quitar este sub-ítem del cuestionario.

De otra parte, las justificaciones dadas al sub-ítem 5c, fueron pertinentes, y presentaron tanto elementos gráficos como verbales, apoyados en conocimientos conceptuales, tales como eje de rotación, sentido y amplitud de rotación.

El ítem 6c resultó bastante difícil de solucionar, y los alumnos necesitaron más de 10 minutos para resolverlo. Sin embrago, decidimos por el momento no quitar este sub-ítem, por la riqueza de contenidos que involucra (en particular se trabaja con objetos similares, pero con estructuras y/o orientaciones diferentes), y hacerlo evaluar por los expertos.

4.3.3. Resultados de las tareas sobre desarrollos

En las soluciones propuestas por los estudiantes de los ítems relativos a este contenido, intervinieron diferentes justificaciones pertinentes y englobaron interesantes conocimientos. En particular observamos que estas tareas permitieron manifestar diferentes tipologías de objetos y procesos, analíticos y visuales. Resumimos en la siguiente tabla (tabla 4.11) los conocimientos principales, utilizando los términos presentados por los alumnos:

Tabla 4.11: *Conocimientos relevantes identificados por los alumnos en la respuesta a las tareas sobre desarrollos.*

Objetos/procesos visuales	**Objetos/procesos analíticos**
- Recomponer mentalmente - Como se puede descomponer el cubo - Cierre del objeto - Construir mentalmente la forma del cubo - Doblar las caras del cubo - Se van uniendo aristas - Si cerramos se completaría el cubo y quedaría cerrado - Unir mentalmente las aristas de las caras que no están unidas a ninguna para intentar formar la estructura de un cubo. - Unir cuadrado con cuadrado hasta formar el cubo - Aplastar el cubo	- Cubo - Qué es un cubo, sus características - Las propiedades de un cono - Aristas y caras - Conocer el numero de caras, aristas y vértice del cubo - El desarrollo del cubo es formado por 6 cuadrados/ seis caras

También se hace referencia a la relación de equivalencia, explicitando las siguientes propiedades (analíticas y visuales):

- Cada uno de los cuadrados es una cara del cubo

- Cuando corto un vértice, al desarrollarlo habrían tres cortes
- Sé que cuando se corta un vértice se cortan tres caras

Sin embargo, decidimos eliminar del cuestionario el sub-ítem 7c, puesto que entretanto ha sido aplicado y luego detalladamente analizado en Fernández (2011).

En el sub-ítem 8b') se ha decidido cambiar el tipo de variación, pidiendo la elaboración de una tarea más difícil (en lugar de más fácil), por el nivel ya muy elemental de la tarea a).

4.3.4. Resultados de las tareas sobre composición y descomposición

Por lo que se refiere a esta tipología de tareas hemos aportados diferentes cambios:

- En el sub-ítem 9a, hemos decidido no exigir que las partes sean iguales, sino que sólo sean ocho. Esto por ampliar las posibilidades de cortes y centrar la atención en la forma de seccionar (en dos planos perpendiculares) en lugar que en la precisión de la ubicación de los cortes.
- El sub-ítem 10a ha sido eliminado del cuestionario, por su limitada potencialidad de análisis: aunque los estudiantes resolvieron de forma correcta la tarea, los estudiantes la justificaron de forma muy vaga y manifestaron escasos conocimientos puestos en juego
- El enunciado del sub-ítem 10c ha sido modificado, puesto que dos alumnos no entendieron que las piezas que forman los sólidos son las mismas que las que se presentan en el enunciado. Se incluyó entonces esta hipótesis, afirmando que "Cada uno de los siguientes sólidos se forma al juntar estas dos piezas".
- El ítem 12 fue quitado, puesto que su parte a) resultó de pocos posibilidades de análisis, sobre todo con respecto a las variaciones sugeridas, que resultaron muy banales, y su parte c) necesitó un tiempo demasiado largo (15 minutos) para ser resuelta (no siempre con éxito).

Entre los conocimientos que fueron encontrados por los estudiantes en estas tareas (bien de forma explícita, o incluidos en las justificaciones dadas) encontramos los siguientes: figuras geométricas 3D y características, esfera, forma y características, radio de la circunferencia, mitad de una circunferencia, corte, partición, división, sección , porción, truncamientos, trozos, partes, fracciones, posición de los cortes, cortes perpendiculares, dimensión, arriba, abajo, ocupación del espacio, proporción, tamaño, mitad/doble, dividir, seccionar, cortar, encajar.

Observamos, que aunque el aspecto relacionado a la representación plana del objeto sea central en algunas tareas, los alumnos no reconocen el "dibujo" y las técnicas de dibujo como tipos de conocimientos.

4.3.5. Resultados de las tareas sobre generación de cuerpos de revolución

Las tareas presentadas resultaron pertinentes para el estudio de los diferentes tipos de conocimiento. En particular , en las respuestas de algunos alumnos se puede suponer la presencia de concepciones erróneas relativas a los cuerpos de revolución, por ejemplo el hecho que las figuras bidimensionales que los forman son "la mitad" de los cuerpos de revolución. Dichas concepciones aparecen también en las justificaciones y en las variaciones propuestas. Nos interesa estudiar esta problemática en una muestra más amplia de alumnos.

Sin embrago, se decidió elaborar una variante del ítem 13c, puesto que muchos alumnos manifestaron dificultades para representar el toro, aunque dijesen que lo podían visualizar. Se elaboró entonces una variante, en la cual se pide el procedimiento inverso, o sea, dadas determinados objetos tridimensionales (entre los cuales un toro) dibujar las figuras planas y los ejes de revolución que los generan.

Con esta primera información, y de la revisión realizada al instrumento, procedimos a la adecuación del cuestionario, para una nueva versión del instrumento, que fue propuesta al juicio de expertos.

5. REVISIÓN DEL INSTRUMENTO MEDIANTE JUICIO DE EXPERTOS

En la elaboración progresiva de un cuestionario es necesario valorar las especificaciones de contenidos y los ítems elaborados y/o seleccionados, que a nuestro juicio cubrían los objetivos propuestos. Así mismo, en el proceso de metodológico de mejora progresiva en la construcción de instrumentos de medición en el campo de las ciencias sociales se recomienda una fase de valoración mediante juicio de expertos en el campo correspondiente. Con dicha finalidad implementamos esa fase en el proceso de construcción del Cuestionario VOT, el cual describimos en esta sección.

5.1. SUJETOS

En la valoración mediante juicio de expertos se requirió que una muestra de formadores de profesores de matemáticas evaluasen los ítems respecto a una serie de criterios (Millman y Greene,1989; Thorndike,1989).

Participaron un total de seis expertos, todos ellos vinculados a la investigación en Didáctica de las Matemáticas, con dilatada experiencia como formadores de profesores y conocimiento sobre geometría y su didáctica.

5.2. MATERIAL Y PROCEDIMIENTO

Los cambios aportados al cuestionario piloto descritos anteriormente han permitido elaborar un cuestionario para ser sometido al juicio de expertos; dicha versión se presenta en el Anexo 6. Se pretendió, fundamentalmente, establecer consenso de opiniones de los expertos sobre la relevancia entre los ítems presentados y los contenidos que pretendían evaluar. Con este propósito se seleccionó, para cada ítem, un contenido principal, que permitiera caracterizarlo.

Esta versión del cuestionario consta de 8 tareas centrales, que pretenden evaluar conocimientos relativos a cinco contenidos principales: coordinar e integrar vistas de objetos, rotar un objeto en el espacio, plegar y desplegar desarrollos, componer y descomponer en partes y generar cuerpos de revolución.

En la siguiente tabla (tabla 4.12) presentamos nuestra asignación de los ítems a la lista de contenidos.

Tabla 4.12*: Asignación de los ítems a los contenidos principales.*

Contenidos principales	**Ítems**
1. Coordinar e integrar vistas de objetos:	
1.1. Dibujar o identificar algunas vistas de un objeto a partir del dibujo del objeto en perspectiva	1
1.2. Dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales en el sistema diédrico	2
2. Rotar un objeto en el espacio	3
3. Plegar y desplegar desarrollos	4
4. Componer y descomponer en partes:	
4.1. Componer y descomponer	5
4.2. Contar las partes	6
5. Generar cuerpos de revolución:	
5.1. Poner en relación: figura plana y eje de rotación <-> cuerpo de revolución	7
5.2. Engendrar diferentes cuerpos rotando la misma figura sobre ejes diferentes	8

En algunos de los sub-ítem se presentan enunciados alternativos (que nombramos como “item-bis”), que pretenden evaluar el mismo contenido (por ejemplo, el sub-ítem “1a_bis” es una variación del ítem 1a y evalúa el conocimiento común del contenido).

Se solicitó a los expertos que evaluaran :

- El grado en que el contenido propuesto fuese relevante para la visualización y orientación de objetos tridimensionales representados en el plano.
- El grado en que cada sub-ítem *a* y *c* fuese adecuado para evaluar la comprensión del contenido específico propuesto, con relación al tipo de conocimiento que pretendía evaluar.
- Sugerir mejoras en la redacción del ítem, así como cualquier sugerencia que consideraran relevante.

Hemos decidido usar una escala de valoración de 1 a 5, teniendo en cuenta las recomendaciones de Osterlind (1989), quien opina que hay que pedir algo más que el acuerdo/ desacuerdo a los jueces, sugiriendo las categorías anteriores.

Además, si había enunciados alternativos de sub-ítems (nombrados “ítem_bis”) se pedía ordenar los enunciados propuestos, según consideraran cuál es el más adecuado.

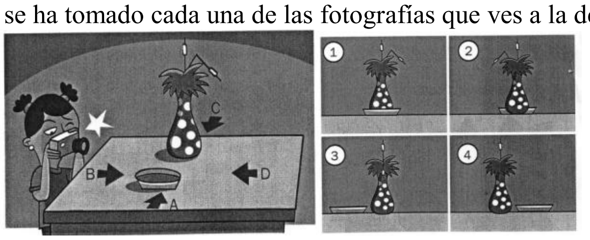
Al finalizar el cuestionario se solicitaba evaluar el grado en que los enunciados de los sub-ítems a’ (justificación de la tarea), b (identificación de conocimientos) y b’ (variación de la tarea) fueran adecuados para evaluar aspectos relativos del conocimiento especializado del contenido.

Se envió a los expertos una carta de presentación explicando el objetivo de la investigación y solicitando su colaboración. Se incluían también algunas aclaraciones específicas sobre lo requerido. En la tabla 4.13, puede verse un ejemplo de lo solicitado.

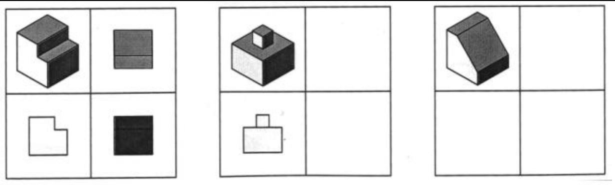
Tabla 4.13*: Ejemplo de valoración de un ítem solicitada a los expertos.*

Ítem 1.

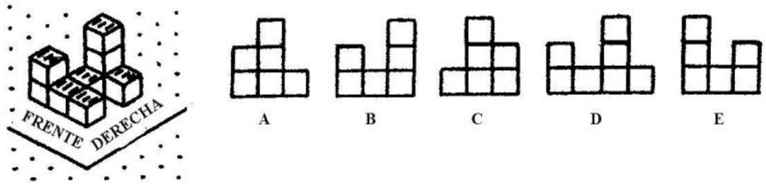
1a) ¿Desde qué posición se ha tomado cada una de las fotografías que ves a la derecha?



1a’) Justifica la respuesta
1b) Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea **1a).**
1b’) Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea **1a)** para que resulte más difícil de resolver para un niño de primaria.
1a_bis) Completa las figuras que faltan en los cuadrados vacios.



1a'_bis) Justifica la respuesta
1b_bis) Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea **1a_bis)**
1b'_bis) Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea **1a_bis)** para que resulte más fácil de resolver para un niño de primaria.
1c) La siguiente figura muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha.



¿Cuál de las figuras, A, B, C, D, E, correspondería a su vista desde atrás? Justifica la respuesta.
1c') Dibuja la vista del edificio desde el lado izquierdo.

VALORACIÓN DE LA PERTINENCIA DEL ITEM 1:

	1: nada	2	3	4	5: mucho
El contenido "Coordinar e integrar vistas de objetos" (dibujar o identificar algunas vistas de un objeto a partir del dibujo del objeto en perspectiva) es relevante.					
Los sub-ítems 1a es adecuado para evaluar este contenido como conocimiento común del contenido.					
El sub-ítem 1a_bis es adecuado para evaluar este contenido como conocimiento común del contenido.					
Los sub-ítems 1c, 1c' son adecuados para evaluar este contenido como conocimiento en el horizonte matemático.					
Sugerencias sobre la redacción de los ítems:					

5.3 SELECCIÓN DE ÍTEMS A PARTIR DEL JUICIO DE EXPERTOS

Las valoraciones de los expertos fueron analizadas con respecto a la relevancia de las unidades de contenidos principales previamente definidas, y su grado de acuerdo sobre si cada uno de los ítems cubría el contenido para el cual había sido diseñado. Los comentarios cualitativos de los expertos han permitido además mejorar la redacción de algunos ítems, o argumentar su supresión.

En la tabla 4.14 se presentan las frecuencias y la media de las puntuaciones asignadas por los expertos a cada uno de los contenidos de la tabla de especificaciones del cuestionario.

Tabla 4.14*: Frecuencias y media de las puntuaciones asignadas por los expertos a los contenidos.*

Contenido		Frecuencia de la puntuación					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**media**
1	1.1	-	-	-	-	6	5
	1.2.	-	-	1	-	5	4.7
2		-	-	-	-	6	5
3		-	-	1	-	5	4.7
4	4.1	-	-	-	1	5	4.8
	4.2	-	-	1	-	5	4.7
5	5.1	-	-	-	-	6	5
	5.2	-	-	1	-	5	4.7

Los resultados reflejan un acuerdo general sobre la importancia de dichos contenidos para la evaluación de conocimientos sobre la VOT. Señalamos que un experto evaluó solo mediamente cuatro contenidos (1.2, 3, 4.2 y 5.2), aunque a partir de sus comentarios parece que dicha valoración ha sido relacionada con las tareas presentadas más bien que con el contenido general.

En la tabla 4.15 se presentan los resultados del grado de acuerdo que los expertos han juzgado entre cada uno de los ítems y su contenido principal para evaluar los conocimientos comunes (c.c.) y ampliados (c.a.).

Tabla 4.15: *Frecuencia y media de la puntuación asignada a la relación ítem/contenido y frecuencia de sub-ítems más adecuados (cuando procede).*

Ítems	Sub-ítems	Contenido	Frecuencia de la puntuación						Frec. sub-ítem más adecuado
			1	**2**	**3**	**4**	**5**	**media**	
1	a	1, c.c.	-	-	-	2	4	4,7	3
	a-bis	1, c.c.	-	-	-	2	4	4,7	3
	c y c'	1, c.a.	-	-	1	1	4	4,5	-
2	a	1, c.c.	-	-	-	1	5	4,8	-
	c y c'	1, c.a.	-	1	-	1	4	4,3	-
3	a	2, c.c.	-	1	-	1	4	4,3	-
	c	2, c.a.	-	1	-	-	5	4,5	4
	c-bis	2, c.a.	-	-	1	2	3	4,3	2
4	a	3, c.c.	-	-	-	-	6	5,0	5
	a-bis	3, c.c.	-	-	-	2	4	4,7	0
	c	3, c.a.	-	-	1	2	3	4,3	-
5	a	4, c.c.	-	-	1	1	4	4,5	-

	c y c’	4, c.a.	-	-	1	2	3	4,3	5
	c-bis	4, c.a.	1	-	1	-	4	4,0	0
6	a	4, c.c.	-	-	-	1	5	4,8	-
	c	4, c.a.	-	1	-	2	3	4,2	-
7	a	5, c.c.	-	-	-	-	6	5,0	-
	c	5, c.a.	-	-	-	-	6	5,0	4
	c-bis	5, c.a.	-	-	-	1	5	4,8	0
8	a	5, c.c.	-	-	-	-	6	5,0	-
	c y c’	5, c.a.	-	-	-	1	5	4,8	-

Los resultados indicaron, en general, ítems bien valorados, con puntuaciones medias superiores a 4 puntos. Para los casos en el que el mismo contenido era representado por más sub-ítems, se pudo elegir el mejor valorado. Se mejoró también la redacción o el contexto en el caso de que algún experto lo sugiriese. De otra parte, se tuvo que eliminar un contenido, debido a la excesiva extensión del cuestionario, cuya aplicación pretendemos limitarla a dos horas. Somos conscientes que esta decisión compromete la riqueza de contenido, pero permite conceder a los sujetos un mayor tiempo de dedicación a la resolución de los demás ítems.

A continuación describimos las modificaciones hechas por nosotros a partir de dichas valoraciones y de las observaciones realizadas por los expertos.

5.3.1. Coordinación e integración de vistas

Para evaluar este contenido, hemos decidido mantener dos tareas principales, una centrada en la identificación de vistas de un objeto representado en perspectiva (caracterización del concepto de vista como representación visual de lo que se ve desde un punto), otra sobre la integración de vistas ortogonales para formar un objeto (caracterización del concepto de vista como proyección ortogonal). Dichas tareas cubren aspectos centrales de los sub-contenidos 1.1 y 1.2. A partir de las observaciones de los expertos decidimos incluir los sub-ítems 1a y 1c’ por evaluar los conocimientos común y respectivamente ampliado en la primera tarea, y los sub-ítems 2a y una variación del sub-ítem 2c, para la segunda tarea. Con esta variación, se pretende centrar la actividad en la no-unicidad de un objeto representado por tres vistas, y eliminar el aspecto relacionado al dibujo, ya valorado en el sub-ítem a).

De otra parte, el sub-ítem 1a-bis ha sido eliminado, en cuanto la aplicación de los cambios propuestos por los expertos comprometía su emparejamiento con el contenido.

5.3.2. Rotación de objetos tridimensionales

Aunque las puntaciones medias de los sub-ítems relacionados a dicho contenido han sido buenas (4,3 y 4,5), un experto valoró de forma insuficiente los sub-ítems 3a y 3c (éste considerado por la mayoría de los expertos más adecuado del 3c-bis). Este experto argumentó su evaluación del sub-ítem 3a afirmando que, "Al mencionar 'serie' y decir "continua la serie", parece que alude a los test clásicos de series de figuras, y puede no apreciarse que se trata de un cubo que gira". Por lo que se refiere al sub-ítem 3c, señaló dificultad para entenderlo, sugiriendo cambios de redacción.

Como ya hemos señalado anteriormente, la excesiva extensión del cuestionario, nos obliga a eliminar un contenido del mismo.

Observamos que los ítems seleccionados para evaluar dicho contenido no incluyen aspectos de dibujo, al contrario de los ítems relacionados con los demás contenidos, aunque consideramos que la capacidad para representar objetos tridimensionales en el plano sean facetas esenciales del conocimiento sobre la VOT.

Esta constatación, junto con las observaciones de uno de los expertos, nos permite propender por la eliminación de dicho contenido del cuestionario.

5.3.3. Plegar y desplegar desarrollos

Los ítems relacionados con este contenido han sido valorados positivamente por los expertos, con puntajes de 3 a 5. El ítem 4a ha sido considerado, por todos los expertos que lo evaluaron, más adecuado que el ítem 4a-bis. Por esta razón eliminamos dicho último sub-ítem del cuestionario, y mantenemos el ítem 4a, para valorar el conocimiento común, y el sub ítem 4c para valorar el conocimiento ampliado.

5.3.4. Composición y descomposición en partes

Con respecto a este contenido decidimos seleccionar una única tarea principal para evaluar algunos de sus aspectos principales. La misma razón por la cual hemos decidido eliminar el contenido relacionado con la rotación, o sea la no contemplación del dibujo en la resolución, nos permite propender por la eliminación del ítem 6, y mantener el ítem 5. Además, siguiendo las sugerencias de uno de los expertos, decidimos modificar el enunciado del ítem 5a, haciendo referencia a la partición del cilindro. Afirma, "En el ítem 5 a la palabra "figura" pienso que quizá se debería sustituir por "cilindro", para una mejor interpretación de lo que se pide". Esperamos que este cambio ayude a los alumnos a imaginar cortar un cilindro y representar las secciones con el dibujo, distinguiendo el objeto que se pretende cortar de su representación. Para evaluar el conocimiento ampliado relacionado a la composición y descomposición en partes, los sub-ítems 5c y 5c' han sido considerados, por todos los jueces, más adecuados que el sub-ítem 5c-bis. Es por esta razón que se decide mantenerlos en el cuestionario final, eliminando el sub-ítem 5c-bis.

5.3.5. Generación de cuerpos de revolución

Como para los demás contenidos (excepto el primero) hemos decidido seleccionar una única tarea para evaluar los conocimientos sobre la generación de cuerpos de revolución. Ambos ítems relacionados con este contenido han sido valorados de forma bastante homogénea, manifestando un buen grado de acuerdo entre jueces.

Sin embargo, muchas han sido las sugerencias de cambios de redacción de los sub-ítems de la tarea 8, lo que muestra poca claridad de los enunciados presentados. Puesto que los cambios propuestos no siempre eran compatibles y considerando que los enunciados, sobre todo el enunciado del sub-ítem 8c', seguían resultando ambiguos, decidimos eliminar la tarea 8, y con ella el sub-contenido 5.2.

Por lo que se refiere al ítem 7, siguiendo la valoraciones de los expertos, hemos elegido mantener el sub-ítem 7c y descartar el sub-ítem 7c'. Además, vista la posible complejidad del sub-ítem, se decidió presentar un único objeto tridimensional, optando por el toro.

6. VERSIÓN DEFINITIVA DEL CUESTIONARIO. ANÁLISIS A PRIORI DE LOS ÍTEMS.

La versión definitiva del cuestionario sobre visualización de objetos tridimensionales (Cuestionario VOT) se presenta en el Anexo 7, y consta de 5 ítems de respuesta abierta, los cuales cubren los siguientes aspectos del tema:

1. Coordinación e integración de vistas ortogonales de objetos tridimensionales:
    1.1. Visualización de la vistas de un objeto/situación tridimensional dibujado en perspectiva (ítem 1).
    1.2. Visualización de un objeto tridimensional a partir de sus vistas ortogonales (ítem 2).
2. Formación de objetos tridimensionales a partir de desarrollos y viceversa: visualización de la acción de plegar desarrollos para formar un sólido y

visualización de la acción de desplegar un sólido para formar un desarrollo (ítem 3).

3. Formación de objetos tridimensionales a partir de otros por composición y descomposición: descomposición de un objeto tridimensional en partes tridimensionales y composición de dos objetos tridimensionales para formar otro (ítem 4).
4. Formación de objetos tridimensionales a partir de la rotación de una figura plana alrededor de un eje (cuerpos de revolución): relacionar figura plana que gira con el cuerpo tridimensional que genera, y a partir de un sólido de revolución reconocer la figura plana que lo genera y el eje sobre el cual debe girar (ítem 5).

Cada ítem del cuestionario definitivo se divide en 5 sub-ítems, según el aspecto del conocimiento que quiere evaluar, como se indica en la siguiente tabla (tabla 4.16).

Tabla 4.16: *Estructura de los ítems del cuestionario.*

Sub-ítem	**Tipo de tarea**	**Consigna**	**Conocimiento evaluado**
a	Tarea de libros de textos de educación primaria	Resuelve la tarea	Conocimiento común
a’		Justifica	Conocimiento especializado
b		Identifica los conocimientos	
b’		Propone una variación	
c, c’	Tarea proveniente de las investigaciones.	Resuelve la tarea	Conocimiento ampliado

En la siguiente tabla (tabla 4.17) resumimos los contenidos principales que cubren los sub-ítem a, c y c’, relativos a los conocimientos comunes y ampliados.

Tabla 4.17: *Contenidos principales cubiertos por los sub-ítems a, y c’ del cuestionario final.*

Contenidos principales		**1**		**2**		**3**		**4**			**5**	
		1a	**1c**	**2a**	**2c**	**3a**	**3c**	**4a**	**4c**	**4c’**	**5a**	**5c**
Interpretación de una representación plana de un objeto tridimensional	Dibujo en perspectiva	X	X				X	X	X	X	X	X
	Vistas, proyecciones ortogonales	X		X	X							
	Desarrollos					X						
	Secciones y ejes										X	

Dibujo: representación en el plano de de objetos tridimensionales	Dibujo en perspectiva			X	X			X	X	X		
	Vistas, proyecciones ortogonales		X									
	Desarrollos						X					
	Secciones y ejes							X				X
Cambio/Relación entre diferentes tipos de representación plana	Persp.- vistas ortogonales	X	X	X	X							
	Persp.- desarrollo						X					
	Persp.- secc. y eje										X	X
Integración de vistas				X	X							
Composición de obj. 3D										X		
Descomposición de obj. 3D								X	X			
Gener. cuerpos de rev. sin huecos											X	X
Gener. cuerpos de rev. con huecos												X
Posiciones relativas		X	X									
Vista, como repr. visual		X	X									
Vista, como proy. ortogonal				X	X							
No-unicidad obj 3D repr. por vistas					X							
Pluralidad de desarrollos						X	X					
Desarrollos imposibles						X						

Cada ítem del cuestionario ha sido analizado por medio de la GROP, lo que ha permitido identificar los diferentes objetos y procesos involucrados en las tareas. Este análisis, presentado en el Anexo 8, tiene una doble finalidad: por una parte, nos proporciona una solución de referencia a la hora de evaluar las respuestas de los estudiante; de otra parte nos ayuda a reconocer las diferentes relaciones entre aspectos visuales y analíticos presentes en cada tarea, permitiéndonos identificar potenciales errores y dificultades en las respuestas de los estudiantes (formulados en términos de hipótesis) relacionadas con los sub-ítems a y c. Resumimos estos aspectos en los siguientes parágrafos.

6.1. SINTESIS DEL ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE LAS TAREAS DEL CUESTIONARIO FINAL

6.1.1. Ítem 1 (VISTAS)

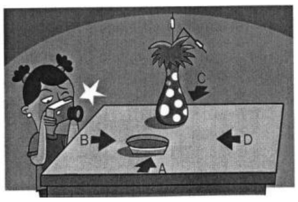
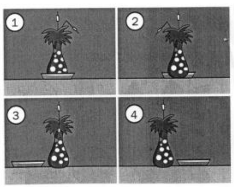
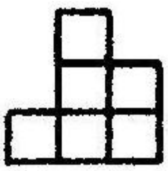
En los sub-ítems a y c, relacionados al conocimiento común y ampliado del contenido, aparecen los conceptos de vista, punto de vista, direcciones de mirada, lateralidad del sujeto, posiciones de los objetos en relación a un sujeto, que vienen explicitados mediante lenguaje visual: dibujos y términos de lenguaje deícticos.

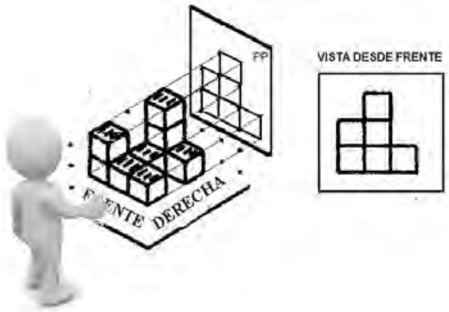
Dichas tareas se refieren al procedimiento físico de cambiar de posición con respecto a un objeto, e interpretar las diferentes vistas desde determinadas posiciones. El espacio viene estructurado en relación con las propiedades y la posición del cuerpo del observador.

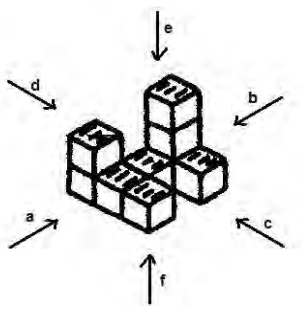
El hecho de que no se trabaja con objetos reales sino con sus representaciones planas, hace intervenir delicadas relaciones visual-analíticas, que pueden interferir con la interpretación y justificación de la tarea.

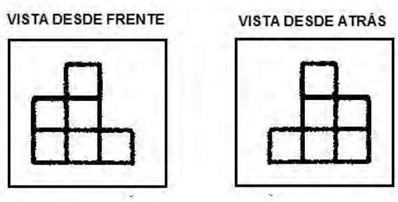
Resumimos, en el siguiente esquema, las principales funciones semióticas implicadas en los sub-ítems 1a y 1c (tabla 4.18)

Tabla 4.18: *Funciones semióticas implicadas en el ítem 1.*

Expresión visual	**Contenido analítico**
Dibujo del objeto/situación tridimensional de referencia: 	Propiedades de la técnica de dibujo utilizada: - *Proyección cónica* (perspectiva con un punto de fuga) -*Proyección cilíndrica ortogonal* (perspectiva isométrica) Estas proyecciones permiten tener una imagen global del objeto tridimensional.
 Representación gráfica de las "vistas", "fotografías": son *objetos ostensivos* que se refieren a potenciales vistas de la situación/el objeto. - "Vista", como visión, percepción visual, campo visual, de lo que un sujeto "*ve*" desde un punto. - Fotografía: imagen en perspectiva con un punto de fuga, cuya sensación de profundidad depende del objetivo y de la distancia focal.	La interpretación del concepto de "vista" y de "fotografía" como *proyección ortogonal* de un objeto, asume que las direcciones de la mirada del observador (en la cámara) son paralelas entre sí y perpendiculares al plano visual de la observación (situación no real, el observador tendría que ser colocado a una distancia infinita del objeto).
El procedimiento de identificar/dibujar determinadas vistas (vista desde frente, desde atrás, desde arriba) de un hipotético observador, puede ser facilitado mediante la simulación mental de la *acción física* de cambio de posición (procedimiento no-ostensivo) o ser ejecutado físicamente (construyendo los objetos físicos). Por ejemplo, la vista desde frente puede ser materializada con la siguiente imagen.	A cada posición del observador podemos hacer corresponder un determinado plano de proyección. Por ejemplo, en el caso del sub-ítem 1c, la vista desde frente puede ser formalizada como *proyección ortogonal paralela en el plan de perfil* (PP, ver figura).

<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>- La fotografía 1 se ha tomado desde la posición A, pues si el fotógrafo se pone en la posición A, con la dirección de mirada indicada por la flecha, vería el plato delante del jarrón; etc.
-Si me pongo atrás del edificio, a mi izquierda vería un cubo, al centro tres cubos apilados y a mi derecha dos cubos apilados.</td><td>En la proyección paralela la imagen de una figura puesta en un plano paralelo al plano de proyección es isométrica a la figura (las caras de un cubo proyectadas en planos paralelos resultan cuadrados).</td></tr>
<tr><td>En el sub-ítem a, el hipotético observador se coloca en determinadas posiciones con respecto a los objetos, que no tienen una orientación propia. Entonces los términos derecha/izquierda, adelante/detrás son definidos con referencia al cuerpo y el punto de vista del observador.
Un objeto es a la derecha o a la izquierda del observador con respecto a otro objeto.

En el enunciado de sub-ítem c, los terminos “frente” y “derecha” permiten intepretar el punto de vista “desde atrás” como punto de vista opuesto a “desde frente” (el punto de vista b es opuesto al a), y entonces colocar el hipotetico observador en la oposición opuesta a la ilustrada en la siguiente figura:



</td><td>Los términos derecha/izquierda, adelante/detrás son determinados por la proyección del esquema corporal del hombre en el objeto que ya se sitúa en un sistema de referencia tridimensional (conferido por la perspectiva isométrica).

Los términos “frente” y “derecha”, se refieren a la atribución de una determinada orientación del espacio en el cual se sitúa el objeto.
<table>
<tr><th>vista</th><th>vista desde</th><th>denominación</th></tr>
<tr><td>a</td><td>frente</td><td>vista principal o alzado</td></tr>
<tr><td>b</td><td>atrás</td><td>vista posterior</td></tr>
<tr><td>c</td><td>derecha</td><td>perfil derecho</td></tr>
<tr><td>d</td><td>izquierda</td><td>perfil izquierdo</td></tr>
<tr><td>e</td><td>arriba</td><td>vista superior o planta</td></tr>
<tr><td>f</td><td>ahajo</td><td>vista inferior</td></tr>
</table>

Las proyecciones desde puntos de vista opuestos, dan lugares a imágenes simétricas.</td></tr>
</table>

En los enunciados de estos sub-ítems, el concepto de “vista” es utilizado en términos de percepción visual, asociándolo a lo que vería un hipotético observador puesto en determinadas posiciones. Sin embargo, para representar dichas “vistas”, se utilizan proyecciones ortogonales sobre determinados planos. Estas representaciones ocultan las hipótesis (físicamente imposibles) de que el hipotético observador tendría que situarse en el infinito (de esta forma los rayos son paralelos). En el sub-ítem a), se percibe fácilmente que la proximidad del fotógrafo a la mesa es inadecuada con respecto a la fotografías dadas.

El análisis de dicho ítem nos permite hacer las siguientes hipótesis:

Hipótesis H1a: *Se supone que los estudiantes resolverán de forma óptima el sub- ítem 1a) puesto que los conocimientos involucrados en su resolución son elementales. El lenguaje verbal y gráfico (ostensivo) es familiar para los estudiantes, y el carácter de la tarea es fuertemente empírico, fácilmente conducible a experiencias de la vida cotidiana.*

Hipótesis H1c: *Se prevé que en el sub-ítem 1c puedan presentarse conflictos semióticos, entre expresión y contenido: parte de los alumnos puedan no asociar de forma espontanea el concepto de vista con el de proyección ortogonal, y entonces dar representaciones de la vista desde atrás con otras técnicas de dibujo.*

6.1.2. Ítem 2 (SISTEMA DIÉDRICO)

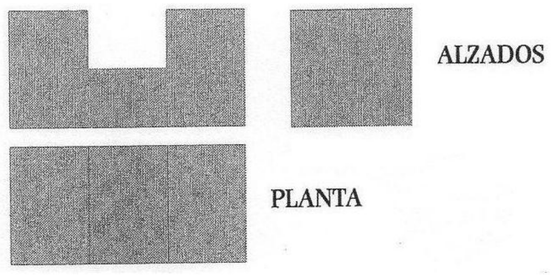
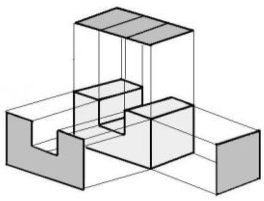
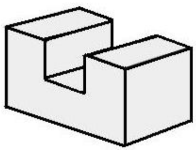
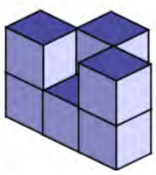
En las tareas presentadas en el ítem 2, los términos “vistas”, “alzados” y “planta” presentes en los enunciados se refieren a las proyecciones ortogonales del objeto sobre determinados planos. Para resolver y justificar las respuestas es necesario interpretar correctamente dichos términos, o bien refiriéndose a las hipotéticas vistas que tendría un observador colocado en determinadas posiciones con respecto al objeto, o bien refiriéndose a las proyecciones del objeto en los diferentes planos ortogonales.

La primera interpretación involucra objetos principalmente visuales, mientras que la segunda hace intervenir objetos analíticos, como las definiciones y propiedades de las distintas proyecciones.

El procedimiento de “coordinación e integración de las vistas” utilizado para formar (ítem a) o estudiar (ítem c) el objeto tridimensional requiere colocar mentalmente las vistas en tres planos ortogonales de manera contigua, e integrarlas para formar el objeto.

Resumimos en la tabla 4.19 las principales funciones semióticas implicadas en los sub-ítems 2a y 2c.

Tabla 4.19: *Funciones semióticas implicadas en el ítem 2.*

Expresión visual	**Contenido analítico**
Dibuja el objeto que tiene estas *vistas.* 	Los términos “vistas”, “alzados” y “planta” presentes en el enunciado se refieren a las *proyecciones ortogonales* del objeto sobre tres planos de proyección perpendiculares entre sí: el plano horizontal (PH), el plano vertical (PV) y el plano de perfil (PP). La proyección de un objeto en el espacio sobre el PH se denomina planta, la proyección sobre el PV es el alzado, y la proyección sobre el PP es el perfil. En el enunciado del ítem 2a, el término “alzados” refiere a las dos proyecciones ortogonales laterales (alzado y perfil). Propiedades de las proyecciones paralelas.
El procedimiento de coordinar e integrar las vistas puede ser simulado mentalmente (procedimiento no-ostensivo), o ilustrado por medio de lenguaje visual, como se muestra en la siguiente figura: 	El cuerpo correspondiente a las tres vistas representadas se construye (y dibuja) colocando las vistas en *tres planos ortogonales* de manera contigua, según los nombres que indican las vistas/*proyecciones ortogonales*. En la figura al lado se muestra gráficamente el procedimiento de *coordinar e integrar* las vistas
 El objeto dibujado en la respuesta tiene las vistas requeridas, puesto que si un observador se coloca *en frente o a un lado* del objeto representado *ve* los “alzados”, mientras que si lo observa *desde arriba ve* la “planta”, o sea las “vistas” representadas en el enunciado.	Dibujo del objeto, resultante de la integración de las vistas, con un determinado sistema de representación que dé una percepción global del objeto (por ejemplo en perspectiva caballera, isométrica o con punto de fuga).
La composición ilustrada en la siguiente figura tiene las mismas vistas que la composición dada en el enunciado del sub-ítem 2c. 	No unicidad del objeto representado por las tres vistas, es decir, las tres vistas no definen de forma unívoca el objeto.

Se formulan las siguientes hipótesis relacionadas con la resolución del ítem 2:

Hipótesis H2a: *Dada la difícil materialización del procedimiento de coordinar e integrar vistas ortogonales, se prevé que los alumnos tengan dificultades para resolver el sub-ítem 2a'.*

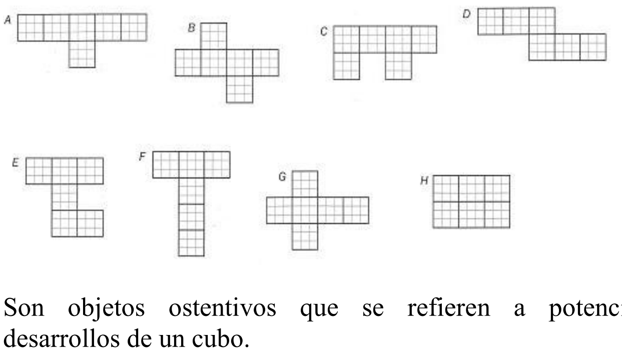
Hipótesis H2c: *Se prevé que los alumnos tengan dificultades para resolver el sub-ítem 2c, posiblemente debidas a la incorrecta concepción de que las tres vistas ortogonales de un objeto definen de forma univoca un objeto tridimensional.*

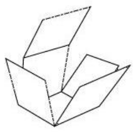
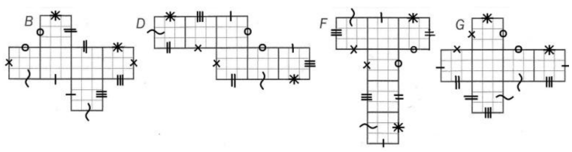
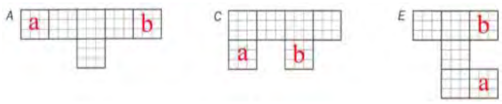
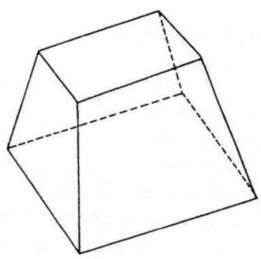
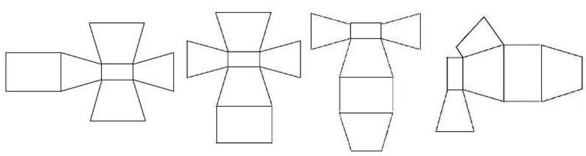
6.1.3. Ítem 3 (DESARROLLOS)

Las tareas sobre los desarrollos presentadas en el ítem 3, aunque no se apoyan en material manipulativo, pueden ser fácilmente relacionadas con la operación física de plegar y desplegar desarrollos de sólidos. Sin embrago, como ya fue observado en el análisis de una tarea sobre desarrollos, presentado en la sección 3.4.1 del capítulo 2, la operación (mental) y la justificación necesarias para resolver dichas tareas, tienen que estar apoyadas en elementos analíticos relacionados con las propiedades conceptuales de los desarrollos y sólidos involucrados.

Reportamos la información ya presentada en el análisis mencionado, en la siguiente tabla (tabla 4.20).

Tabla 4.20: *Funciones semióticas implicadas en el ítem 3.*

Expresión visual	**Contenido analítico**
"Cubo" como imagen mental (objeto no ostensivo) de carácter figural que se representa el sujeto mentalmente para ejecutar la tarea	Concepto de "cubo": poliedro de seis caras cuadradas congruentes
 Son objetos ostentivos que se refieren a potenciales desarrollos de un cubo. El reconocimiento de los desarrollos de un cubo puede ser interpretado visualmente por medio de la transformación física de "*plegar/desplegar*". El procedimiento puede consistir simplemente en la	Concepto de "desarrollo de un cubo" (: *Conjunto de seis cuadrados unidos por uno y un solo lado, de tal manera que*: - *Cada cara del cubo corresponde con un único cuadrado del desarrollo* y - Es posible *emparejar (relación de equivalencia)* todos los lados de los cuadrados que pertenecen al borde del desarrollo de tal manera que cada par corresponde a una y sólo una arista del cubo

simulación mental de la acción física (procedimiento no-ostensivo), ser ejecutado físicamente (cortando y pegando (procedimiento ostensivo) o ilustrado por medio de lenguaje visual, como se muestra en la siguiente figura:  En particular, en la tarea se tiene que verificar si los hexaminós dados se *cierran al plegarse* formando un cubo *sin que las caras se superpongan.*	
Los hexaminós B, D, F y G corresponden a un cubo, de hecho si *plegamos* los desarrollos a lo largo de los lados *y unimos* (físicamente o mentalmente) los lados marcados con los mismos símbolos obtenemos un cubo,  No hay solapamiento de caras y los desarrollos se cierran.	Los hexaminós B, D, F y G representan desarrollos de un cubo puesto que respectan la definición de “desarrollo de un cubo”. En particular, en la figura al lado se ilustra visualmente la relación de equivalencia.
Los hexaminós A, C y E no corresponden a un cubo por superposición de una cara al *plegar* los desarrollos: señalamos en la siguiente figura las caras que se *superpondrían*, con las letras a y b:  Además al plegarlos, los hexaminos no se cierran (dejando descubierta una cara del cubo).	Los hexaminós A, C y E no representan desarrollos de un cubo puesto que no respetan las propiedades necesarias. En particular la figura al lado se ilustra visualmente que una misma cara del cubo corresponde a dos cuadrados del desarrollo (marcados con a y b).
El hexaminó H no es un desarrollo de un cubo puesto que el procedimiento de plegar el desarrollo a lo largo de todas las aristas resulta imposible de ejecutar.	El hexaminó H no es un desarrollo de un cubo, puesto se contradice la Propiedad 2. Tiene dos vértices en los cuales concurren cuatro caras, lo que rende imposible la obtención de ángulos diedros.
	Representación en perspectiva de una pirámide de base cuadrada truncada, cuyas caras laterales resultan entonces trapecios y las bases rectángulos.
	Posibles desarrollos planos del sólido, en los cuales se mantienen la forma, la adyacencia de las caras, sus respectivas orientaciones y el número.

Hipótesis H3a: *Apoyándonos en los resultados de investigaciones previas prevemos que la mayoría de los estudiantes resuelvan el sub-ítem 3a, apoyándose a la simulación mental del procedimiento visual de plegar físicamente un papel de cartulina. En consecuencia los estudiantes podrán:*

- reconocer fácilmente los desarrollos B, F y G, cuyas estructuras prototípicas (las cuales constan de una "superficie lateral" y "dos bases") permiten fácilmente su reconstrucción visual.

- tener dificultades en reconocer el desarrollo D, puesto que se necesita un tratamiento visual más complejo, el cual requiere la coordinación de diferentes transformaciones para reconstruir el objeto.

Hipótesis H3c: *Por su estructura regular y la fácil reconstrucción visual, prevemos la predominancia de desarrollos simétricos y prototípicos, de tipo 1-4-1.*

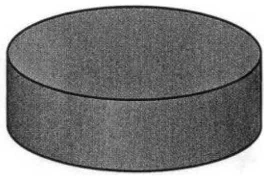
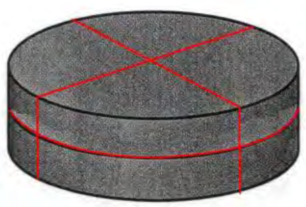
6.1.4. Ítem 4 (SECCIONES DE UN OBJETO)

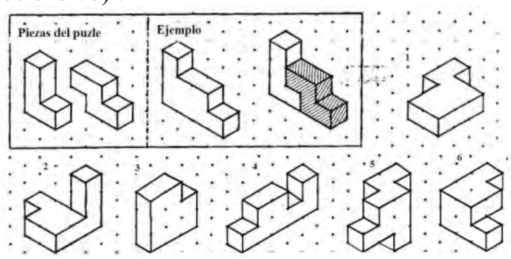
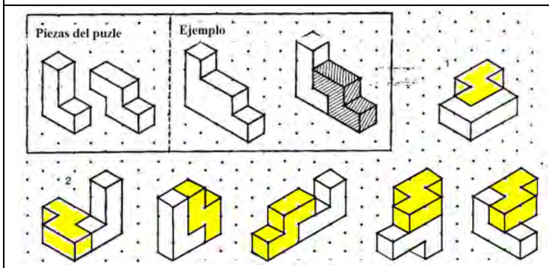
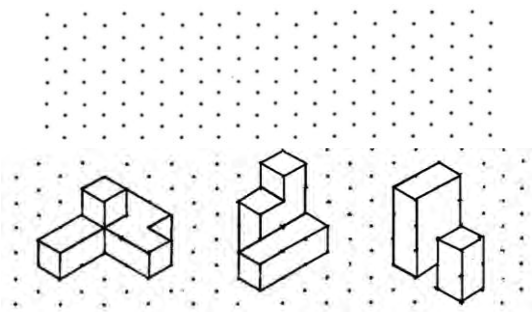
Las tareas presentadas en el ítem 4, requieren descomponer un objeto tridimensional en determinadas partes (tridimensionales) o componer un objeto con determinadas piezas (tridimensionales). El procedimiento de construir composiciones de piezas, agregar o quitar partes, es una operación que tiene fundamento en la construcción con materiales (por ejemplo en los juegos de los niños). En esta tarea se presentan objetos tridimensionales por medio de representaciones en perspectiva (objeto ostensivos), y se pide que se ilustren determinadas particiones

A partir de un problema ilustrado mediante lenguaje cotidiano y apoyado en determinadas representaciones planas de objetos tridimensionales, los alumnos tienen que simular (mentalmente) determinadas acciones (componer, descomponer, rotar piezas en el espacio,…), visualizando las posiciones, las formas y el número de los cortes y de las partes resultantes de dichos cortes. Estos objetos no ostensivos de carácter visual, tendrán que ser representados por medio del dibujo y/o descritos con lenguaje verbal, en las respuestas y justificaciones de las tareas.

Resumimos en la siguiente tabla (tabla 4.21) las principales funciones semióticas implicadas en los sub-ítems 4a, 4c y 4c'.

Tabla 4.21: *Funciones semióticas implicadas en el ítem 4.*

Expresión visual	**Contenido analítico**
En el enunciado se presenta el dibujo (objeto ostensivo) de un cilindro: 	Cilindro: cuerpo de revolución generado por la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados menores (ubicado en el eje de revolución, en este caso vertical). Las bases del cilindro son dos círculos congruentes colocados en dos planos paralelos entre sí.
Cortar en sentido cotidiano se refiere al dividir una cosa o separar sus partes con algún instrumento cortante. En este caso se supone que el instrumento cortante atraviese el cilindro de parte a parte. En este sentido la forma del *corte* podría ser una superficie cualquiera (no solo un plano). El sub-ítem 4a, puede entonces ser resuelto únicamente refiriéndose al *contexto rea*l (“material”) de cortar con un hipotético cuchillo. La idea de “corte” en el contexto material conlleva generalmente la idea de un movimiento.	Se puede definir un *corte* como la intersección de un plano con el cilindro (sección). Entonces *cortar* equivale a intersecar el sólido (cilindro) con determinados planos. Las partes del cilindro serian entonces determinadas por las partes del cilindro delimitadas por los cortes. Existen dos tipos especiales de sección; la *sección longitudinal*, cuando el plano de corte es paralelo al eje de revolución del sólido, y la *sección transversal* cuando el plano es perpendicular al eje del sólido En particular, en un cilindro recto, las secciones que se pueden obtener son: circunferencia, cuando el plano que secciona es perpendicular al eje de revolución del cilindro; elipse, cuando el plano que secciona es oblicuo al eje del cilindro; un rectángulo, cuando el plano que secciona es paralelo al eje del cilindro **;** un segmento/punto, cuando el plano que secciona es tangente al cilindro
Los 3 cortes que permiten obtener las 8 partes, se ilustran en las respuestas presumiblemente por medio del dibujo. 	Los cortes ilustrados se asocian con las intersecciones de determinados planos con el cilindro (secciones): el primer corte es perpendicular al eje de revolución del sólido (sección transversal) y pasa a una altura cualquiera del sólido (en la figura de la solución pasa a la mitad de la altura del sólido). Los otros dos cortes son ortogonales al primer cortes (en la figura de la solución los cortes son también ortogonales entre sí) y se intersecan en el eje de revolución. Se dice que dos *cortes son perpendiculares* si los planos correspondientes son ortogonales entre sí. Dos planos son perpendiculares cuando conforman cuatro ángulos diedros de 90º.
Si el conteo de las partes obtenidas se apoya en el dibujo, se necesita tener en cuenta de las partes visibles y ocultas del cilindro representado.	*Propiedades* de los cortes: - Un plano corta el espacio en dos semi-espacios que contienen el plano: cada corte efectuado redobla el número de las partes del cilindro - Para realizar 8 sub-espacios se tiene que hacer por lo menos tres cortes. El cilindro se divide así en 8 partes, 4 superiores al primer corte y 4 inferiores.

En el sub-ítem 4c se presentan materializaciones de composiciones de dos piezas (objetos ostensivo) : 	Las materializaciones de composiciones de dos piezas se dan en perspectiva isométrica (propiedades de la perspectiva isométrica descritas en el capítulo 1, apartado 2.1.2).
 En la parte izquierda del recuadro ("Piezas del puzle") se representan las dos piezas del puzle que se van a utilizar en las tareas mientras en la segunda parte del recuadro ("Ejemplo") se representa una posible forma de componer las dos piezas para formar otro cuerpo. El lector tiene que interpretar el primer recuadro como ejemplar del procedimiento que tiene que realizar con los cuerpos externos al recuadro.	Coordinar conjuntos de caras: para interpretar correctamente la representación de la composición de cubos en perspectiva isométrica el sujeto tiene que coordinar los conjuntos de caras que forman una misma pieza. Para identificar la composición de las piezas en un determinado cuerpo el sujeto tiene que colocarlas mentalmente en diferentes posiciones, rotándola y desplazándola en el espacio, hasta que ocupen exactamente el espacio definido por el cuerpo. Observamos que la rotación no varía la orientación del objeto. Este procedimiento puede ser por ensayo y error o seguir determinadas observaciones de tamaño y forma.
En esta tarea se requiere implícitamente interpretar y representar dibujos en perspectiva isométrica. Para permitir que el sujeto dibuje en perspectiva isométrica sin la necesidad de utilizar instrumentos de dibujo, se utiliza una *hoja de puntos diagonales* que se refiere a una plantilla isométrica**.** 	La red diagonal de puntos es parte de una hoja de puntos isométrica y permite representar con más facilidad un objeto en perspectiva isométrica. - La red de puntos es la representación de los vértices de una red de triángulos equiláteros que rellenan el plano Permite dibujar cuerpos tridimensionales en perspectiva isométrica, puesto que dos ángulos adyacentes de los triángulos dibujados formas un ángulo de 120º, que es la amplitud de los tres ejes ortogonales principales proyectados.

Hipótesis H4a: *Dada la fuerte componente empírica de la tarea, prevemos que algunos alumnos intentan resolverla únicamente apoyándose a cortes longitudinales, que* *materializan el procedimiento usual de cortar objetos cotidianos cilíndricos (tartas, quesos,...).*

Hipótesis H4c': *Apoyándonos en los resultados de investigaciones previas, prevemos dificultades relacionadas al dibujo en perspectiva isométrica.*

6.1.5. Ítem 5 (CUERPOS DE REVOLUCIÓN)

La generación de un sólido mediante rotación de una figura plana, es un proceso de difícil materialización puesto que requiere generar un objeto de tres dimensiones a partir de una figura bidimensional en movimiento.

Las tareas propuestas en el ítem 5, pretenden que los estudiantes visualicen dicho procedimiento de rotación, que tiene un carácter generativo: la rotación de la figura plana no es vista como transformación geométrica que permite cambiar la posición de una figura plana desde una posición fija hasta otra posición fija, sino que es interpretada como un movimiento continuo en el tiempo en el cual el espacio que ocupa la figura a lo largo del tiempo permite la generación de un sólido.

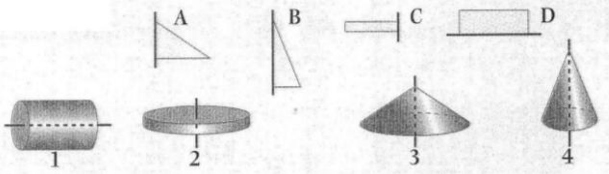
El procedimiento de generación de sólidos de revolución por medio de la rotación de una figura plana, de un lado se apoya en una sucesión de imágenes en movimiento (aspecto dinámico), de otro lado requiere la creación de una imagen global final del sólido (aspecto estático).

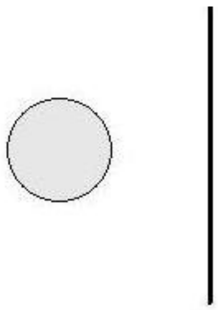
Además, para argumentar las respuestas, se necesita reflexionar sobre las relaciones entre elementos de las diferentes representaciones, relacionando los elementos de la figura plana que por rotación genera un sólido (lados, …) con los elementos de éste (superficie lateral, base,…).

Resumimos en la siguiente tabla (tabla 4.22) las principales funciones semióticas implicadas en los sub-ítems 5a y 5c.

Tabla 4.22: *Funciones semióticas implicadas en el ítem 5.*

Expresión visual	**Contenido analítico**
En el enunciado del sub-ítem 5a se dan representaciones gráficas (elementos ostensivos) de figuras planas, ejes de revolución y sólidos.	Un sólido de revolución es un sólido obtenido al rotar una región del plano alrededor de una recta ubicada en el mismo, las cuales pueden o no intersecarse. Dicha recta se denomina eje de revolución. Triángulos rectángulos y rectángulos: las

 En la figura se presentan dos filas de dibujos. En la fila de arriba se representan cuatro figuras planas cada una con un segmento más obscuro el eje que prolonga un lado de la figura (que representa el eje de rotación). Las figuras y los ejes con respecto a la figura, están dando información visual relevante para la construcción de los sólidos resultantes. Al lado de cada dibujo de figura plana aparece una letra que funciona como índice de la figura. En la fila de abajo se representan cuatro sólidos en perspectiva cada uno con segmento que lo traviesa (el eje), cuya parte interior al sólido es representada con línea entrecortada. Debajo de cada dibujo de sólido aparece un número que funciona como índice del sólido representado arriba.	figuras A y B representan triángulos rectángulos, las figuras C y D representan rectángulos Cilindros y cono: en las figuras 1 y 2 se representan cilindros rectos en perspectiva, en las 3 y 4 conos rectos en perspectiva. Ejes de revolución: en la primera fila se representan los ejes de revolución con segmentos más obscuro, estos son segmentos de las rectas directrices que definen las rotaciones de las figuras planas. Posición del eje de revolución: en los casos expuestos en la tarea los ejes de revolución son tangentes a parte de la frontera de las regiones, lo que permite prever la generación de sólidos sin huecos.
En el enunciado del sub-ítem 5c se representa la siguiente figura: 	En la figura se representa un toro, que es una superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de una recta coplanaria, mientras que un toro sólido es un objeto geométrico generado por un círculo que gira alrededor de una reta coplanaria. Generalmente se asume que la recta sea exterior a la circunferencia/circulo.
Hacer girar mentalmente una figura plana en el espacio. Naturaleza dinámica de la rotación. (Observamos que si la distancia entre el eje y el centro del circulo disminuye, y llega a ser menor de su radio, el toro se convierte en un anillo toroide husillo hasta degenerar en una esfera.)	Girar sobre un plano perpendicular al eje de rotación, cada punto de cada una de las figuras planas dadas. Propiedad de la rotación: - Un giro de una figura alrededor de un eje mantiene la distancia de la figura a dicho eje. - Los movimientos rígidos mantienen las propiedades métricas de las figuras. Los sólidos de revolución tienen simetría radial con respecto al eje de revolución, e infinitos planos de simetría.
En el sub-ítem 5a, el lector tiene que hacer corresponder cada figura plana con el cuerpo de revolución que engendra al girar sobre el eje señalado: A-3, B-4, C-2, D-1.	Una forma de argumentar la respuesta es justificando la forma y relacionando el tamaño de las partes que componen la figura plana con la forma y el tamaño de los elementos que componen el respectivo sólido. Por ejemplo, para los casos A-3 y B-4, los triángulos rectángulos, girando sobre uno de su catetos generan conos. De hecho, el lado perpendicular al eje de rotación, rotando, genera la base circular del cono; y mide como su radio. La hipotenusa del triangulo, girando, genera la superficie lateral del cono, y además mide como la apotema del cono. El

	lado perteneciente al eje de rotación se queda fijo y representa la altura del cono.
El sub-ítem 5c requiere que el sujeto dibuje (objeto ostensivo) la figura plana y el relativo eje de rotación alrededor del cual, haciendo girar la figura se engendra el cuerpo de revolución ilustrado en la figura 	El toro ilustrado es generado por la rotación de un disco alrededor de una recta coplanaria: El eje tiene que ser exterior al círculo (puesto que el toro ilustrado tiene un hueco): la distancia entre el centro del círculo y el eje tiene que ser estrictamente mayor del radio del círculo. Las secciones longitudinales del toro que contienen el eje de rotación son parejas de círculos iguales a lo que ha generado el sólido, y la distancia entre los centros de los dos círculos de la sección es igual al doble de la distancia entre el circulo que ha generado el sólido y el eje de revolución.

En el sub-ítem 5a, es posible asociar correctamente las representaciones sin conocer el significado de cuerpo de revolución, o sea fijándose únicamente en las secciones longitudinales de los sólidos que contienen el eje de rotación. Sin embargo, la justificación requiere explicitar la relación entre sección longitudinal del sólido de revolución y figura plana.

Hipótesis H5a: *Dada la familiaridad con los objetos involucrados en la tarea a) y su fácil tratamiento visual, se prevé que los estudiantes resuelvan de forma óptima el sub-ítem 5a.*

Por otra parte, la visualización de las representaciones gráficas de la primera fila (elementos ostensivos) puede dificultar la correcta interpretación del enunciado al evocar otro tipo de situaciones que utilizan esas mismas imágenes gráficas para otro tipo de transformaciones, como por ejemplo las simetrías axiales. Prevemos entonces que, algunos estudiantes, puedan justificar y analizar la tarea 5a, refiriéndose, en lugar de a la rotación de una figura plana en el espacio, a su imagen simétrica, o sea una única posición estática, generada por un giro, en el espacio, de 180 grados respecto del eje.

Hemos visto que en algunos libros de textos, se propone materializar el procedimiento de generar el sólido de revolución mediante la rotación de una figura de papel pegada a una barra que gira. Dicho procedimiento no se puede generalizar a sólidos de revolución con huecos, como lo presentado en el sub-ítem 5c.

Hipótesis H5c: *Apoyándonos en los resultados del análisis de libros de textos y el análisis de la tarea, prevemos dificultades relacionadas con el sub-ítem 5c, puesto que* *requiere visualizar una figura plana que rota alrededor de un eje externo a ella, procedimiento visual no familiar para el estudiante y que puede entrar en conflicto con concepciones incorrectas que tienen relacionadas con el concepto de cuerpo de revolución.*

7. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO EVALUADOS. VALIDEZ DE CONTENÍDO DEL CUESTIONARIO

La acepción de validez que mejor se adapta a nuestra investigación es la de validez de contenido y es una cuestión de grado, puesto que no puede reducirse a cero o uno. Para estudiar la validez de contenido el investigador debe comprobar que el instrumento constituye una muestra adecuada y representativa de los contenidos que se pretenden evaluar con él (Muñiz, 1994). Ya hemos informado sobre la validez del contenido de los ítems, a partir de: el significado de referencia global sobre la VOT elaborado, el estudio de los libros de texto, la selección de los conocimientos didáctico-matemáticos para la evaluación de aspectos específicos relacionados con la enseñanza del tema, las observaciones de la aplicación del cuestionario a un grupo piloto, y la valoración del juicio de expertos.

Asimismo, el análisis a priori de los ítems nos ha permitido mostrar los elementos de significado que involucran las diferentes tareas presentadas, en términos funciones semióticas, en las cuales resaltamos la sinergia presente entre lo visual y lo analítico.

Es respecto a este conjunto de elementos de significado que podemos asegurar una validez de contenido de la prueba. Este tipo de análisis nos permitió además de anticipar potenciales conflictos de significado.

.

CAPITULO 5:
EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS SOBRE VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES EN MAESTROS EN FORMACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo analizamos los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario sobre VOT, detallando el estudio de los diferentes tipos de conocimientos puestos en juego en las respuestas dadas por los 241 estudiantes a los diferentes sub-ítems.

El capitulo está organizado según la tipología de conocimientos que queremos evaluar o sea, el conocimiento común, el conocimiento ampliado y el conocimiento especializado sobre VOT. Para cada tipo de conocimiento analizado se presenta un análisis cuantitativo, que permite dar una evaluación global de las respuestas de los alumnos en términos de grado de corrección o de pertinencia, y un análisis cualitativo, que nos proporciona una información más descriptiva de cada respuesta (representaciones gráficas/lingüísticas, errores manifestados, justificaciones propuestas y elementos de conocimientos identificados). En cada sub-ítem relativo al conocimiento común y ampliado del contenido, se elabora una tabla reflejando la frecuencia y porcentaje de las respuestas, lo que permite destacar el grado de dificultad del sub-ítem. Se describen los errores y se relacionan con los resultados aportados en las investigaciones previas informadas en el capítulo 1 cuando procede.

Para los sub-ítems relativos al conocimiento especializado del contenido se diferencian y valoran diferentes tipologías de respuestas según el estudio de determinadas variables cualitativas: la tipología de las justificaciones descritas en cada sub-ítem se apoya principalmente en Harel y Sowder (2007) y Marrades y Gutierrez (2000) (para la caracterización de las *justificaciones empírico-perceptivas*), en Parzysz (2006) (para las validaciones *perceptivo-deductivas* e *hipotético-deductivas*) y en Recio y Godino (2001) (para las argumentaciones *deductivas-informales*, *deductivas-*

formales). Los conocimientos identificados por los alumnos se organizan según las categorías del EOS (ver capítulo 2, apartado 2.3) mientras que las variaciones propuestas se diferencian según los cambios sugeridos. Además, para los diferentes sub-ítems, se analizan los posibles conflictos relacionados con la sinergia existente entre la componente visual y analítica presente en la tarea (ver capítulo 2, apartado 3.4).

2. MÉTODO

2.1. SUJETOS

Los sujetos involucrados en el estudio fueron 241 futuros profesores (185 mujeres, 56 hombres) del segundo curso de la especialidad de Educación Primaria de la Universidad de Granada del año académico 2010-2011, pertenecientes a tres distintos grupos/clases (A, B, C). Sus conocimientos previos sobre el tema fueron los relativos a sus formaciones básicas y los que profundizaron durante el año anterior en el estudio del bloque temático de geometría para maestros. En el libro de texto utilizado en clase, dicho bloque incluye tres apartados: “1. Figuras geométricas”, “2. Transformaciones geométricas. Simetría y semejanza” y “3. Orientación espacial. Sistemas de referencia”. El apartado 2 solo se centra en la geometría plana, mientras que el 1 y 3 incluyen también tareas y conocimientos matemáticos relacionados a VOT. En particular aparecen tareas sobre desarrollos, cortes, composición y descomposición en partes (apartado 1), y coordinación e integración de las vistas (apartado 3) de objetos tridimensionales y se presenta una interesante reflexión sobre la naturaleza de los objetos geométricos, en la cual se afirma la importancia de considerar la dualidad entre el “concepto geométrico” y su materialización (“objeto perceptible”).

“Un problema didáctico crucial es que con frecuencia usamos la misma palabra para referirnos a los objetos perceptibles con determinada forma geométrica (“el triángulo es un instrumento de percusión”) y al concepto geométrico correspondiente (el triángulo isósceles) (...) Lo que se dibuja es un objeto perceptible que evoca o simboliza el objeto abstracto correspondiente. La recta, como entidad matemática, es ilimitada y carece de espesor, no así los dibujos que se hacen de ella. Del mismo modo, un triángulo no es una pieza de material de una forma especial, ni una imagen dibujada sobre el papel: es una forma controlada por su definición.” (Godino, 2004, p.192).

Sin embrago, el capítulo es generalmente tratado sólo parcialmente en clase, centrando la atención especialmente en la geometría plana y sólo en aspectos parciales de la geometría espacial, como el problema de la clasificación de los sólidos.

2.2. MATERIAL Y PROCEDIMIENTOS

El material utilizado para la recogida de los datos es el cuestionario sobre VOT presentado en el Anexo 7 y descrito en el capítulo 4, que fue aplicado a los sujetos, divididos por clases (A, B, C), en una sesión de dos horas de duración[1]. Los estudiantes trabajaron de forma individual con papel y lápiz, sin material manipulativo ni instrumentos de medidas.

Los datos fueron recogidos y codificados atendiendo a variables cuantitativas y cualitativas, definidas previamente y a lo largo del análisis.

Recogidos los datos se procedió a la codificación y registro en una planilla Excel para su posterior tratamiento estadístico con el programa Statgraphic.

2.3. VARIABLES CUANTITATIVAS Y CUALITATIVAS

Para cada sub-ítem del cuestionario se definen determinadas variables que permiten codificar la información contenida en las respuestas de los alumnos (respuestas abiertas). Para los sub-ítems sobre conocimientos común (sub-ítems a) y ampliado (sub-ítems c y c') se definen las siguientes variables cuantitativas y cualitativas (ver Anexo 9 para una presentación más detallada)

- Variable cuantitativa:
  - "Grado de corrección de la respuesta": 2 si correcta, 1 si parcialmente correcta, 0 si incorrecta.
- Variables cualitativas:
  - "Tipo de error" puesto de manifiesto en la solución (cuando procede)
  - "Tipo de representación gráfica o lenguaje" utilizados en las respuestas
  - " Tipo de justificación" presentados en las respuestas c, c' (cuando procede)

Las variables cualitativas "tipo de error", "tipo de representación gráfica o lenguaje" y "tipo de justificación", toman determinados atributos relacionados con el

[1] En una segunda sesión de otras dos horas se implementó una acción formativa con los futuros profesores en la que se discutieron las soluciones dadas a algunos ítems.

análisis a priori del ítem y las soluciones de los estudiantes, y que se presentan en el Anexo 9. Aunque los atributos de dichas variables no son directamente cuantificables, asignamos a cada uno un valor numérico (si el atributo aparece), de tal manera de poder elaborar tablas de frecuencias y describir la incidencia de los tipos de errores y representaciones.

Para cada uno de los sub-ítems relativos al conocimiento especializado del contenido (sub-ítems a', b, b') hemos identificado variables cuantitativas y cualitativas.

En el sub-ítem a', relativo a la justificación de la respuesta dada al sub-ítem a):

- Variable cuantitativa:
  - "Grado de pertinencia de la justificación" (2 si es pertinente, 1 parcialmente pertinente, 0 no pertinente)
- Variables cualitativas:
  - "Tipo de justificación" (Explicaciones generales, Argumentaciones deductivo-informales, Pruebas deductivo-formales,…)
  - "Tipo de error" manifestado en la justificación (cuando procede)

En el sub-ítem b) relativo a los tipos de conocimientos identificados:

- Variable cuantitativa:
  - "Calificación" de la respuesta en términos del número de conocimientos relevantes identificados (0 (Nulo)=no identifica ningún conocimiento pertinente, 1 (Muy Pobre)=identifica 1 conocimiento pertinente o pocos conocimiento generales, 2 (Pobre)= identifica 1 conocimiento pertinente y conocimientos generales, 3 (Suficiente)= 2 conocimientos pertinentes, 4 (Bueno)= 3 conocimientos pertinentes, 5 (Muy bueno)= 4 o más conocimientos pertinentes)) (Ver tabla 5.35 para más detalles de esta codificación)
  - "Grado de corrección de la respuesta", que reagrupa los valores de la variable "Calificación" en tres valores (0 si la calificación es 1 o 2; 1 si la calificación es 3; 2 si la calificación es 4 o 5)
- Variables cualitativas:
  - "Tipo de conocimiento identificado" (1: Conocimientos generales, 2: Conceptos, 3: Propiedades, 4: Procedimientos). Ver el Anexo 10 para más detalles de esta codificación.

- “Sub-tipo de respuestas” de las calificaciones Suficientes, Buenas y Muy Buenas (1: Conceptuales 2: Procedimentales, 3: Mixtas).

Por lo que se refiere al sub-ítem b’, relativo a la variación de la tarea, se distinguieron las siguientes variables:

- Variable cuantitativa:
  - “Grado de pertinencia” (0 si la variación no es pertinente, 1 si la variación es imprecisa, 2 si la/s variación/es es/son pertinente/s).
- Variable cualitativa:
  - “Tipos de variaciones” según los cambios propuestos al enunciado (ver Anexo 11).

Además se definen las variables:

- “Genero” (Mujer, Hombre)
- “Nota media” en la asignatura “Bases matemáticas para la educación primaria” cursada en el año anterior.
- “Grupo” (A, B, C)

Estas variables permiten estudiar una posible dependencia de los distintos de conocimientos sobre VOT con género, calificación en matemática, y grupo.

Para codificar las variables cuantitativas, hemos utilizado dos dígitos: “XN”, donde N es el número del ítem al cual se refiere y X es la letra del respectivo sub-ítem. Resumimos dichas variables en la tabla 5.1.

Tabla 5.1: *Códigos, definición y valores de las variables cuantitativas*

Tipo de conocimiento	**Sub-ítem**	**Nombre variable**	**Definición de la variable**	**Valores variable**
C. común	A	A1, A2, A3, A4,….	Grado de corrección de la respuesta	0= incorrecta, 1= parc. correcta, 2= correcta
C. especial.	A’ (just.)	AA1, AA2, AA3, …	Grado de pertinencia de la justificación	0= just. no pertinente, 1= just. parc. pertinente, 2= just. pertinente
	B (conoc.)	B1, B2, B3,…	Grado de pertinencia, relativo al num. de c. pertinentes identificados	0= 1 conocimiento, 1= 2 conocimientos, 2= 3 o más conocimientos
	B’	BB1, BB2, BB3,…	Grado de	0= variac. no pertinente

	(variac.)		pertinencia de la variación	1= variac. imprecisa 2= variac. pertinente
C. ampliado	C (C’)	C1, C2, C3,…	Grado de corrección de la respuesta	0= incorrecta, 1= parc. correcta, 2= correcta

La atribución del grado de corrección de las respuestas dadas a los sub-ítems a y c es especificada en el Anexo 9, y se relaciona principalmente al número de errores manifestados por los alumnos y al tipo de errores (especificado por las variables cualitativas).

Por lo que se refiere a las variables cualitativas, se utilizan tres dígitos: “XNy”, donde N es el numero del ítem, X es la letra del relativo sub-ítem y es el descriptor de la variable cualitativa, y se refiere a:

e= Tipo de error

p= Tipo de representación o lenguaje manifestado

o= Tipo de conocimientos identificados (1= c. generales, 2= conceptos, 3= propiedades,

4= procedimientos, relativa a los sub-ítem b)

j= Tipo de justificación manifestado (de manera particular relacionada con los sub-ítems a’ y los sub-ítems c, cuando procede)

v= Tipo de cambio/s sugerido/s en la variación (relativa a los sub-ítem b’)

Para una lectura más sencilla de los resultados, en las siguientes secciones, omitimos la referencia a los códigos y valores de las variables (presentes en los anexos), integrando la información de su análisis de forma discursiva y en tablas resumen.

3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS SOBRE CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO

3.1. ÍTEM 1 (VISTAS)

Como ya fue previsto en el análisis a priori, la resolución de dicho sub-ítem por parte de los futuros profesores no ha dado problemas. En esta tarea se pide relacionar determinadas vistas de una situación cotidiana de dos objetos sobre una mesa representados en perspectivas, con diferentes puntos de referencias marcados. El lenguaje y los conceptos matemáticos que subyacen a dicha tarea (dibujo en perspectiva de objetos tridimensionales, proyecciones ortogonales, punto de vista, dirección de mirada...) vienen representados mediantes objetos cotidianos (plato y jarrón, fotografías, fotógrafo,…) y símbolos de fácil interpretación (flechas, números y letras) para los alumnos. En términos de Parzysz (2006), la tarea es propia de G1, puesto que involucra un tipo de geometría gráfico-espacial, que trabaja con representaciones materiales (dibujos, símbolos,…) de entidades físicas y teóricas (objetos, puntos de vistas,…). Estas características atribuyen a la tarea una fuerte componente empírica, que puede facilitar su realización.

El 94% de los alumnos contestaron de forma correcta a la pregunta. Los resultados permiten afirmar que los alumnos saben cambiar mentalmente de posición frente a una situación cotidiana representada en perspectiva, interpretando correctamente las relaciones espaciales (posiciones relativas) de los objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista (asociados a la posición del fotógrafo).

El conocimiento común que tienen los alumnos para resolver dicha tarea elemental propia de G1 es satisfactorio. En la tabla 5.2 se muestran las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de corrección" de la respuesta por el sub-ítem 1a.

Tabla 5.2 *Frecuencias absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 1a* (n=241).

SUB-ÍTEM 1a	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto	226 (94)
Parcialmente correcto	0 (0)
Incorrecto	15 (6)
En blanco	0 (0)

Describimos brevemente los errores manifestados por los 15 alumnos que dieron una respuesta incorrecta al sub-ítem:

- Diez alumnos intercambiaron las vistas desde dos puntos de vista opuestos:
  - Ocho confundieron los puntos de vista B y D, lo que permite suponer una dificultad de discriminación de las posiciones derecha e izquierda de los objetos con respecto a los puntos de vistas laterales.
  - Dos alumnos confundieron el punto de vista A y C, lo que puede suponer una dificultad de discriminar las posiciones delante y detrás.

- Tres alumnos asociaron al punto de vista C dos fotos diferentes (una correcta, la 2; y una incorrecta, la 4), lo que contradice el hecho que desde una determinada vista se puede obtener una única fotografía.
- Dos alumnos cometieron diferentes errores, que supone grandes problemas de cambios de perspectivas.

Las respuestas de dichos alumnos fue calificada como incorrecta (hemos decidido no discriminar respuestas parcialmente correctas por la facilidad de la tarea).

Aunque la tarea tiene un grado de dificultad muy bajo, resulta interesante como tarea base para el posterior análisis de la justificación, los conocimientos involucrados y la planificación de variaciones que aumenten su grado de dificultad.

3.2. ÍTEM 2 (SISTEMA DIÉDRICO)

El sub-ítem 2a está relacionado con el contenido "coordinar e integrar vistas de objetos" y requiere dibujar un objeto a partir de sus proyecciones ortogonales. De manera particular el alumno tiene que interpretar correctamente la representación gráfica de las vistas en el sistema diédrico (representación que no mantiene el aspecto global del objeto), coordinarlas e integrarlas para conseguir dibujar un posible objeto correspondiente.

Observamos que el alumno tiene que dar una representación del objeto para que sea fácilmente reconocible, integrando de forma constructiva el polo de "lo que sabe", o sea el significado de las vistas (planta y alzados), con el polo de "lo que ve", o sea la representación plana del objeto (Parzysz, 1988). Los procedimientos que logran ejecutar los alumnos para resolver la tarea pueden ser diferentes (procedimientos mentales de coordinación e integración de las vistas, ensayo y error, ejecuciones geométrico-gráficas,…), involucrando aspectos propios de G1 (vistas como campos visuales,…) y/o de G2 (vistas como proyecciones ortogonales sobre determinados planos,…), que pueden, sin embargo, estar ocultos en las soluciones.

Para valorar las respuestas de los alumnos se estudia principalmente la representación del objeto dada en la solución.

En la consigna no se explicita con qué tipo de representación se dibuje el objeto, aunque la gran mayoría de alumnos intentaron hacer un dibujo que represente el aspecto global del objeto (dibujo en perspectiva). De hecho, solo un alumno presentó en su respuesta un desarrollo del objeto (correcto) lo que fue evaluado como correcto.

Se define la variable “grado de corrección” atendiendo a los siguientes criterios:

- Correcto: el objeto tiene la forma requerida con eventualmente pequeños errores de proporciones, ejemplo (figura 5.1):

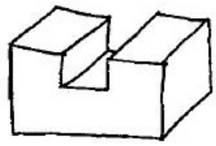


Figura 5.1: Ejemplo de respuesta correcta del sub-ítem 2a

- Parcialmente correcto: el objeto tiene la forma global correcta, pero o bien se manifiestan grandes errores de proporciones entre las partes o bien de propiedades de la proyección utilizada. Ejemplo (figura 5.2):

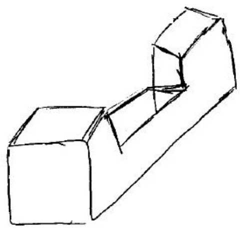


Figura 5.2: Ejemplo de respuesta parcialmente correcta del sub-ítem 2a.

- Incorrecto: si el objeto no tiene la forma global requerida. Ejemplos (figura 5.3):

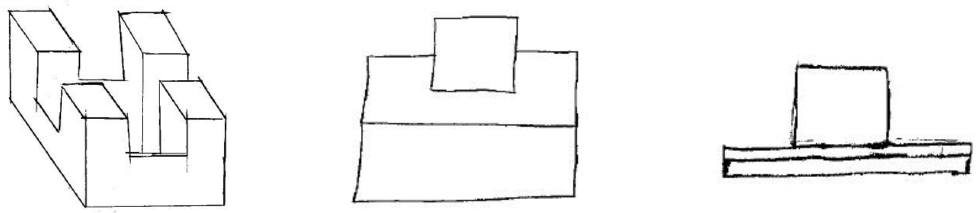


Figura 5.3: Ejemplos de tres respuestas incorrectas del sub-ítem 2a

Suponemos que la capacidad de dibujar e interpretar de forma clara y precisa diferentes tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales son importantes habilidades relacionadas con la visualización de objetos tridimensionales (Gorgorió, 1998), y conocimientos significativos para un profesor de primaria que quiera desarrollar la visualización en sus alumnos. Consideramos entonces como parcialmente correctas las respuestas que presentan un dibujo muy impreciso del objeto, que generalmente se relacionan con una correcta visualización del objeto asociada a una incapacidad de representarlo de forma adecuada.

Por lo que se refiere a las respuestas incorrectas, están asociadas a la incapacidad de coordinar e integrar las vistas dadas en un único objeto y/o a grandes dificultades para representarlo en el plano.

En la tabla 5.3 resumimos las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de corrección" de la respuesta por el sub-ítem 2a.

Tabla 5.3 *Frecuencias absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 2a* (n=241).

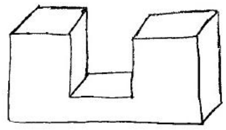
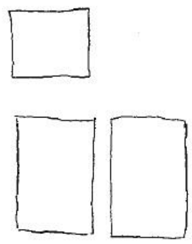
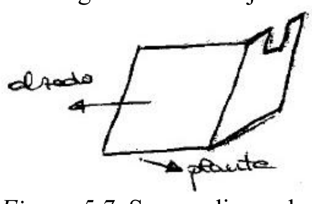
SUB-ÍTEM 2a	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto	159 (66)
Parcialmente correcto	50 (21)
Incorrecto	28 (11)
En blanco	4 (2)

Observamos que, aunque la tarea proviene de un libro de texto de educación primaria, solo el 66% de los alumnos consiguen resolverla de forma correcta, dando una buena representación plana del objeto tridimensional. Las respuestas parcialmente correctas (21%) e incorrectas (11%), se caracterizan principalmente por dificultades técnicas y conceptuales relacionadas a la representación de objetos tridimensionales en el plano.

Los errores principales que hemos identificado en las repuestas de los alumnos, son los siguientes (tabla 5.3).

Tabla 5.3 *Tipos de errores, frecuencias absolutas (porcentajes) manifestados en las respuestas al sub-ítem 2a (n=241).*

Errores	**Ejemplo**	**Frec. (%)**
Errores relativos a la técnica de dibujo utilizada para representar el objeto: no se respetan las propiedades de la proyección utilizada (por ejemplo no se respeta el paralelismo, faltan líneas en la proyección,…)	 *Figura 5.4:* No se respetan las reglas del dibujo en perspectiva caballera	67 (28)

Errores en las proporciones; la forma global del objeto es correcta pero hay grandes errores en las proporciones de las partes que componen el objeto	 *Figura 5.5*: Grandes errores en las proporciones de las partes	65 (27)
Errores de coordinación e/o integración de las tres vistas: no consiguen dibujar la forma global correcta del objeto	 *Figura 5.6*: Se representan las tres vistas por separado, sin integrarlas en un objeto  *Figura 5.7*: Se coordinan, de forma incorrecta, dos de las tres vistas	20(8)

En el contexto de formación de profesores señalamos el trabajo de Malara (1998), que también destaca dificultades de coordinación de las vistas de un objeto tridimensional de un grupo de profesores de escuela secundaria. Otros investigadores que trabajaron con alumnos de escuela primaria y secundaria reportaron errores, dificultades y conflictos relacionados con la representación plana de objetos geométricos (Colmez y Parzysz, 1993) y errores de coordinación e integración de las vistas de un objeto tridimensional (Battista y Clements, 1996; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009). En particular, según Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009, la construcción de tres objetos diferentes en lugar de uno (por ejemplo figura 5.6) manifiestan sólo el primer nivel en la interpretación de una representación de un objeto mediante *vistas ortogonales.*

Se observa que la mayoría de los estudiantes (76%) dibujaron/intentaron dibujar el objeto en perspectiva caballera, que es muy frecuentemente utilizada en el dibujo de los sólidos en los libros de textos de primaria, mientras que el 11% presentaron un dibujo en perspectiva isométrica.

Observamos que el 9% de alumnos dibujaron (o intentaron dibujar) el objeto como vacío (ver ejemplos en figura 5.9).

Figura 5.9: Ejemplos de objetos dibujados vacíos relativos a dos soluciones del ítem 2a

Una explicación plausible de dichos dibujos emerge del análisis de las justificaciones dadas a las soluciones (ver apartado 5.1.2). Dicho análisis nos permitirá también destacar algunas interesantes características sobre los procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución de la tarea.

3.3. ÍTEM 3 (DESARROLLOS)

Entre los sub-ítems relacionados con el conocimiento común del contenido, este sub-ítem resultó el más difícil de resolver. Es relativo al contenido "plegar y desplegar desarrollos", y se pide identificar los desarrollos correspondientes a un cubo: sólo el 30% de los estudiantes contestó de forma correcta a dicha pregunta.

Consideramos como parcialmente correctas las respuestas que presentan un error (o bien identificando como desarrollo un hexaminó que no lo es, o bien no identificando uno de los desarrollos correctos). Una respuesta con dos o más errores es considerada incorrecta.

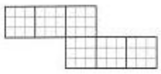
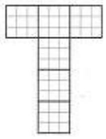
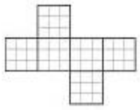
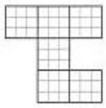
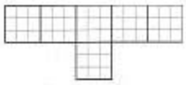
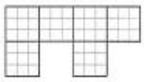
En la tabla 5.4 resumimos las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de corrección" de la respuesta por el sub-ítem 3a.

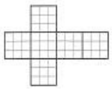
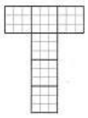
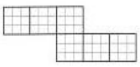
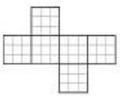
Tabla 5.4: *Frecuencia absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 3a* (n=241).

SUB-ÍTEM 3a	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto	73 (30)
Parcialmente correcto	97 (40)
Incorrecto	71 (30)
En blanco	0 (0)

Resumimos en la tabla 5.5 los errores principales manifestados por los alumnos, y su frecuencia absoluta (y porcentaje).

Tabla 5.5. *Errores principales manifestados en el del sub-ítem 3a, y su incidencia en términos de frecuencia absolutas (porcentajes), (n=241).*

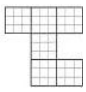
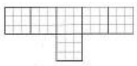
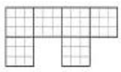
Errores		**Frec. (%)**
No identifican los siguientes desarrollos entre los posibles desarrollos de un cubo		156 (65)
		31 (13)
		28 (12)
Identifican los siguientes hexaminós como posibles desarrollos de un cubo		24 (10)
		16 (7)
		14 (6)

Mesquita (1992) observa que los desarrollos en cruz:  o en T:  son asociados con más facilidad al cubo que los demás, por su regularidad y su simetría, mientras que en los otros desarrollos las identificaciones de los segmentos equivalentes son menos evidentes. Esta última observación concuerda con los resultados obtenidos con respecto al desarrollo 3-3:  , que fue de más difícil reconocimiento (el 65% de los alumnos no lo reconocieron). Por otra parte observamos que también el hexaminó  (que llamamos 1-4-1 asimétrico) fue reconocido por los alumnos como desarrollo con bastante facilidad (sólo 12 alumnos no lo identificaron).

Mariotti (1997) también considera los desarrollos en T y en X de fácil reconocimiento, por las pocas operaciones (dos) necesarias para recomponer el cubo (ver capítulo 1, apartado 2.2.2).

Un análisis más fino de los errores nos permite diferenciar diferentes grupos de alumnos, dependiendo del tipo de errores manifestados.

Con respecto a las respuestas incorrectas (71 estudiantes, dos o más errores), distinguimos los siguientes grupos de alumnos (frecuencia de alumnos):

- Alumnos que manifiestan 2 errores (35):
    - Sólo reconocen 2 desarrollos correctos de tipo 1-4-1 (13):
        - reconocen los desarrollo en cruz y en T (7)
        - reconocen el desarrollo en cruz y el asimétrico (6)
    - No identifican el desarrollo 3-3 e identifican 1 hexaminó que no es desarrollo (19):
        - identifican el hexaminó  (9) como desarrollo de un cubo
        - identifican el hexaminó  (5) como desarrollo de un cubo
        - identifican el hexaminó o  (5) como desarrollo de un cubo
    - Otros (3)
- Alumnos que manifiestan 3 o más errores (36):
    - Sólo reconocen un desarrollo del cubo (20):
        - Solo reconocen el desarrollo 1-4-1 en X (16),
        - Sólo reconocen el desarrollo 1-4-1 asimétrico (3),
        - Solo reconoce el desarrollo 1-4-1 en T (1)
    - Reconocen uno o dos desarrollo correctos (1-4-1 en T, en cruz o asimétrico) y 2 hexáminos que no son desarrollos (9)
    - Sólo excluyen el hexaminó H (5)

- Otros (2)

Este segundo grupo de alumnos manifiesta grandes dificultades para resolver la tarea. Observamos que, excepto 7 alumnos, en las demás respuestas incorrectas no se identifica el hexaminó 3-3 como desarrollo del cubo. Las respuestas parcialmente incorrectas (97, 1 error) son caracterizadas por este último error: de hecho 94 alumnos no reconocen el hexaminó 3-3 como desarrollo del cubo, aceptando sólo los desarrollos del cubo de tipo 1-4-1. Siguiendo a Mariotti (1997) estos desarrollos se identifican con más facilidad, puesto que, visualmente constan de una “superficie lateral” y “dos bases”. Además, el 8% de estudiantes, identificando un único desarrollo posible, muestra un nivel de flexibilidad muy bajo (Mariotti, 1997), que solo le permite aceptar o visualizar una única forma de plegar/desplegar la superficie del cubo. El análisis de las justificaciones dadas a las respuestas (apartado 5.1.3) nos permitirá estudiar las relaciones que tienen las respuestas con la sinergia presente entre las componentes visual y analítica de la tarea.

3.4. ÍTEM 4 (SECCIONES DE UN OBJETO)

En el sub-ítem 4a, relativo a la “composición y descomposición en partes de un objeto tridimensional” fue resuelto de forma correcta por el 67% de alumnos, considerando correctas las respuestas que ilustran claramente, de forma gráfica y/o de forma verbal los 3 cortes necesarios para partir el cilindro en 8 partes. Un ejemplo es dado en la figura 5.10).

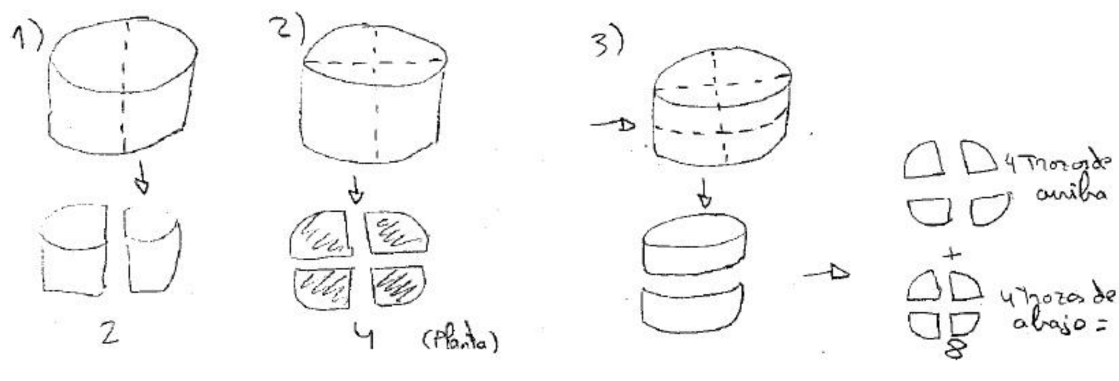


Figura 5.10: Ejemplo de una respuesta correcta del sub-ítem 4a

Consideramos respuestas parcialmente correctas las respuestas en las cuales se ilustran tres cortes, pero no se especifican de forma clara y precisa cuales son las 8 partes que resultan, tampoco en la justificación (sub-ítems 4a'), como en el siguiente ejemplo (figura 5.11)

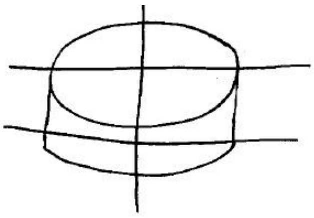


Figura 5.11: Ejemplo de una respuesta parcialmente correcta del sub-ítem 4a

Las respuestas incorrectas presentan la afirmación "no se puede partir el cilindro en 8 partes dando tres cortes" y/o presentan intentos de cortes incorrectos (en la mayoría de los casos únicamente en la cara superior), como en el siguiente ejemplo (figura 5.12)

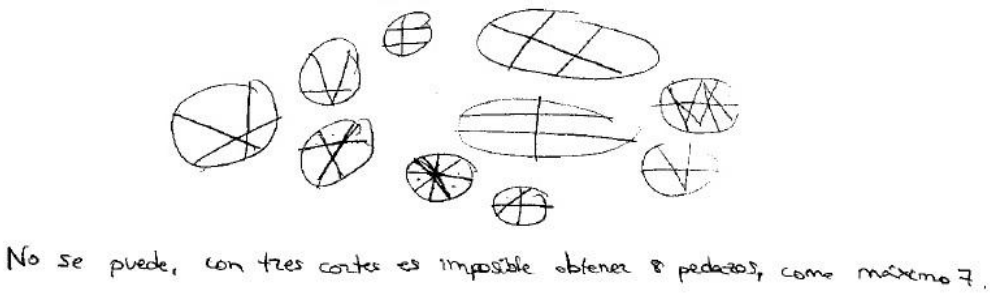


Figura 5.12: Ejemplo de una respuesta incorrecta del sub-ítem 4ª

En la tabla 5.6 resumimos las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de corrección" de la respuesta por el sub-ítem 4a.

Tabla 5.6: *Frecuencia absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 4a* (n=241).

SUB-ÍTEM 4a	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto	160 (67)
Parcialmente correcto	15 (6)
Incorrecto	56 (23)
En blanco	10 (4)

Además, se encontraron errores en la interpretación de la representación plana del objeto: el sujeto lee el dibujo como un dibujo en sí mismo sin ponerlo en relación con el objeto que representa (el alumno "corta la representación" y no el objeto que representa). Presentamos en la figura 5.13 dos ejemplos de este tipo de error:

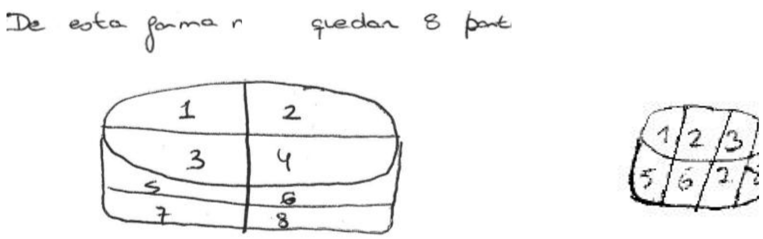


Figura 5.13: Dos ejemplos del error "corte de la representación" en la solución del sub-ítem 4a

En otros trabajos se reportan "dificultades de comprender la naturaleza de los objetos tridimensionales representados en dos dimensiones" por parte de estudiantes de escuela secundaria (Parzysz, 1991; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009).

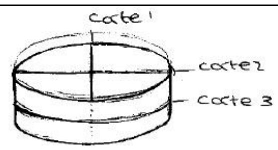
"El sujeto puede leer el dibujo como un dibujo en sí mismo sin ponerlo en relación con el objeto que representa, el sujeto puede hacer la inferencia de manera más o menos completa y llegar a una representación del objeto cuyas propiedades pueden variar y autorizan solo determinadas operaciones mentales, o el sujeto puede reconocer globalmente el objeto dibujado pero no conseguir usar esta representación para ejecutar una tarea de dibujo o de fabricación" (Baldy, Chatillon y Cadopi, 1993).

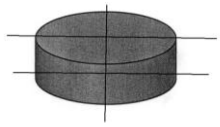
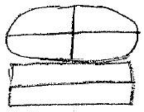
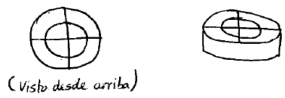
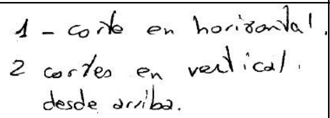
Parzysz (1991, p.) afirma que "Un peligro en la decodificación de una representación plana de un objeto tridimensional es que el lector puede confundir el dibujo del objeto abstracto tridimensional con un objeto bidimensional que tiene la misma representación".

Otros errores encontrados son la representación de cortes únicamente en la cara superior (el alumno solo corta la figura verticalmente), como ilustrado en la figura 5.12.

Con respecto a las respuestas correctas, hemos identificados las siguientes representaciones graficas/verbales, ilustradas en la tabla 5.7.

Tabla 5.7: *Tipo de representación gráfica o lenguaje manifestados en el sub-ítem 4a, frecuencia (porcentaje).*

Tipo de representación gráfica o lenguaje			**Ejemplos**	**Frec. (%)**
Gráfica (prevalencia gráfica, con algunos elementos de lenguaje	Dibujo de los cortes en la representación del enunciado y/o en otro cilindro	Con una línea curva para el corte horizontal	 *Figura 5.14*: Representación de cortes que respecta la perspectiva	111 (69)

verbal)	dibujado por el	Con todas líneas rectas continuas hasta el exterior de la figura (con justificación correcta de las partes que generan los cortes)	 *Figura 5.15*: Representación de cortes con líneas rectas	32 (20)
	Dibujo de los cortes en las proyecciones ortogonales del cilindro		 *Figura 5.16*: Representación de cortes en las proyecciones	11 (7)
	Otros dibujos		 *Figura 5.17*: Representación de cortes circulares	5 (3)
Verbal	Sólo explicación verbal (con justificación verbal correcta)		 *Figura 5.18*: Descripción verbal de los cortes	1 (1)
Total				160 (100)

Otras soluciones correctas diferentes de la propuesta, proponen cortar en 2 o 4 partes el cilindro y luego superponerlas para hacer los otros cortes o el último corte, como por ejemplo sugiere el siguiente alumno (figura 5.19).

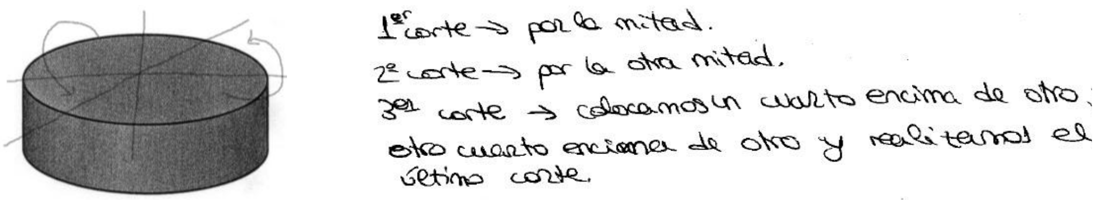


Figura 5.19: Ejemplo de solución del ítem 4a con superposición de las partes

3.5. ÍTEM 5 (CUERPOS DE REVOLUCIÓN)

El ítem 5a trata la formación de objetos tridimensionales a partir de la rotación de una figura plana alrededor de un eje (cuerpos de revolución). De manera particular se pide relacionar una figura plana (triángulos rectángulos o rectángulos) con el cuerpo tridimensional que puede generar girando alrededor de un determinado eje (conos o cilindro)

Esta tarea, tomada de un libro de texto de sexto de primaria, involucra únicamente como cuerpos de revolución cilindros y conos (de diferentes alturas y diámetros). La forma de la figura plana, el tamaño de las partes que la componen y la posición del eje de revolución, permiten asociarla a un determinado cuerpo de revolución. La presencia del eje en la representación del sólido en perspectiva facilita la asociación. De hecho, aunque no conociendo el significado de cuerpo de revolución, un alumno puede asociar correctamente las representaciones fijándose únicamente en las secciones longitudinales de los sólidos que contienen el eje de rotación. Siendo triángulos y rectángulos de diferentes proporciones, dicha correspondencia no resulta difícil.

Estas últimas observaciones permiten anticipar buenos resultados en las respuestas de los alumnos. De hecho, el 94% de los estudiantes contestaron de forma correcta.

En la siguiente tabla (tabla 5.8) resumimos las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de corrección" de la respuesta por el sub-ítem 5a.

Tabla 5.8: *Frecuencia absolutas (porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 5a* (n=241).

SUB-ÍTEM 5a	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto	227 (94)
Parcialmente correcto	0 (0)
Incorrecto	14 (6)
En blanco	0 (0)

Describimos brevemente los errores manifestados por los 14 alumnos que dieron una respuesta incorrecta al sub-ítem:

- Nueve alumnos intercambiaron figuras de la misma familia:
    - Siete confundieron los dos cilindros 1 y 2 (con los incorrectos rectángulos: asociaron el C-1 y el D-2), lo que permite suponer una dificultad de discriminación de las posiciones de los ejes en las figuras planas (uno vertical y el otro horizontal) y los respectivos cuerpos de revolución que generan girando.
    - Dos alumnos confundieron los dos conos (asociando el A-4 y el B-3) lo que puede suponer una dificultad de visualizar las diferentes proporciones entre las partes que forman los triángulos y relacionarlos correctamente con los correspondientes conos.
- Cinco alumnos intercambiaron figuras de familias diferentes:

- Cuatro asociaron a una misma figura plana mas cuerpos de revolución (repitieron una letra) lo que contradice la propiedad que una figura plana que gira alrededor de un determinado eje genera un único sólido. Dicho error puede estar asociado a una gran dificultad de visualización, puesto que asociaron cilindros a triángulos o conos a rectángulos, o bien a distracción.
- Un alumno asoció un triangulo a un cilindro y un rectángulo a un cono, lo que supone la incomprensión del enunciado, o bien gran dificultad de visualización.

Las respuestas de dichos alumnos fue calificada como incorrecta (hemos decidido no discriminar respuestas parcialmente correctas por la facilidad de la tarea).

Como ya hemos observado en el sub-ítem 1a, el bajo grado de dificultad de la tarea, nos permite considerarla como punto de partida para el posterior análisis de las justificaciones y de los conocimientos identificados.

3.6. SÍNTESIS DE CONOCIMIENTOS COMUNES DEL CONTENIDO

Para sintetizar las soluciones de los estudiantes a las tareas de libros de textos de primaria partimos de la hipótesis de que un futuro profesor pueda resolver de manera óptima dichas tareas. Consideramos entonces que la puntuación total relacionada con la variable del grado de corrección de la respuesta tenga que ser elevada: valoramos como insuficiente una puntuación total inferior a 8 (sobre 10).

Observamos que solo el 61% de los estudiantes consigue alcanzar dicha puntuación.

En la tabla 5.9 y en la Figura 5.20 presentamos la distribución de los valores relativos a la puntación total del conocimiento común, su frecuencia absoluta (y porcentaje) y la valoración cualitativa que le atribuimos.

Tabla 5.9: *Frecuencia (y porcentaje) y valoración de la puntación total relativa al conocimiento común del contenido*

Total Conoc. Común	Frec (%)	Valoración
10	44 (18)	Suficiente (61%)
9	56 (23)	
8	49 (20)	

7	28 (12)	Insuficiente (39%)
6	31 (13)	
0-5	33 (14)	

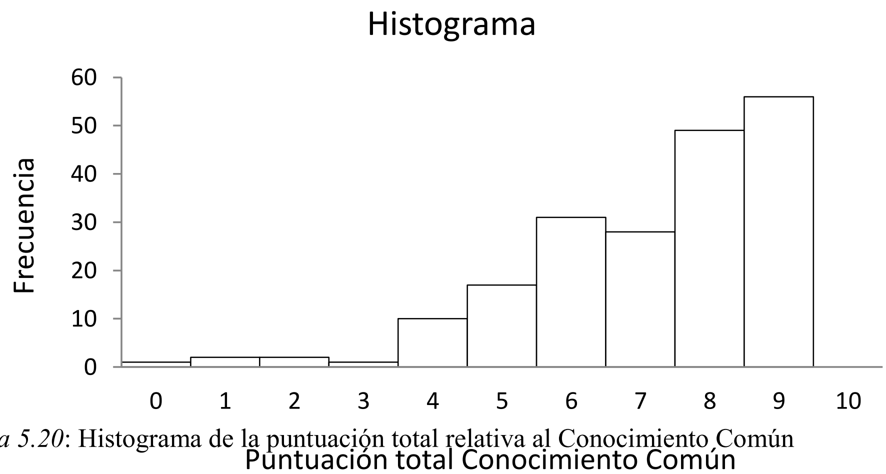


Figura 5.20: Histograma de la puntuación total relativa al Conocimiento Común

Sin embargo, el análisis de las respuestas dadas a cada sub-ítem permite destacar que, excepto la tarea 3a que tiene un grado de dificultad medio, las demás tienen un grado de dificultad bajo. En la tabla 5.10 se muestra las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable del grado de corrección de la respuesta.

Tabla 5.10. *Frecuencia absolutas (porcentajes) de las respuestas a los sub-ítems tipo a* (n=241)

Grado de corrección	Ítem				
	1a	2a	3a	4a	5a
Correcto	226 (94)	159 (66)	73 (30)	160 (67)	227 (94)
Parcialmente correcto	0 (0)	50 (21)	97 (40)	15 (6)	0 (0)
Incorrecto	15 (6)	28 (11)	71 (30)	56 (23)	14 (6)
En blanco	0 (0)	4 (2)	0 (0)	10 (4)	0(0)

La puntuación media de todo el grupo relacionada con la variable del grado de corrección de la respuesta (conocimiento común del contenido) es de 7,7 (sobre 10). Observamos que la media de los chicos (8,3) es mayor de la media de las chicas (7,5), lo que muestra una dependencia del conocimiento común sobre VOT con el género. En el gráfico de la caja también se observa una mayor variabilidad en esta variable en el

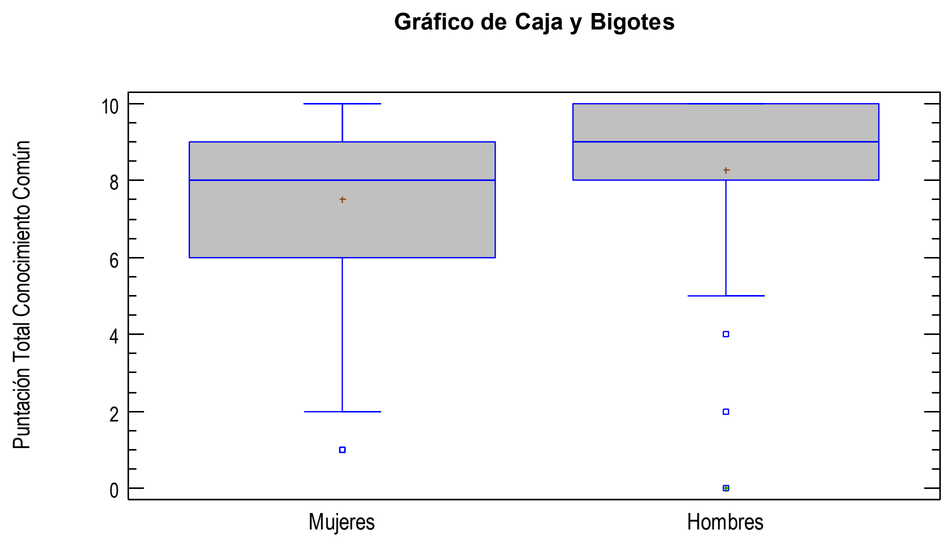


Figura 5.21: Puntuación Total Conocimiento Común Mujeres y Hombres

Realizado un contraste de diferencia de medias (comparación de dos muestras independientes) a la variable puntuación total en conocimiento común hemos obtenido un valor P = 0,0092, por lo que las diferencias entre hombres y mujeres en esta variable es estadísticamente significativa.

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS SOBRE CONOCIMIENTO AMPLIADO

4.1. ÍTEM 1 (VISTAS)

El sub-ítem 1c, relativo al conocimiento ampliado del contenido sobre la identificación de vistas de objetos tridimensionales, se supone de nivel más alto respecto al sub-ítem a, por su carácter más abstracto: el tipo de objeto representado es una composición de cubos (objeto geométrico tridimensional), la representación utilizada es la proyección isométrica. Además, a diferencia del sub-ítem a) donde solo se pide interpretar determinadas representaciones planas y ponerlas en relación, en esta tarea se requiere que el alumno dibuje una vista determinada (proyección ortogonal) del objeto, justificando su respuesta.

Para evaluar las respuestas de los estudiantes hemos decidido, en un primer momento, limitarnos al análisis de la respuesta gráfica, sin analizar la justificación.

Resumimos en la tabla 5.12 las frecuencias absolutas (y porcentaje) de los valores de la variable cuantitativa "grado de corrección" de la respuesta por el sub-ítem 1c.

Tabla 5.12: *Frecuencia absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 1c* (n=241).

SUB-ÍTEM 1c	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto	122 (51)
Parcialmente correcto	10 (4)
Incorrecto	101 (42)
En blanco	8 (3)

Observamos que el 51% de los alumnos dibujaron la vista correctamente, interpretando el término "vista" como proyección ortogonal del objeto en el plano correspondiente.

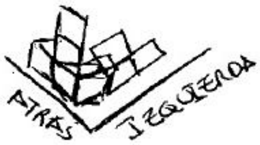
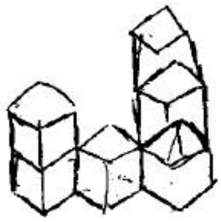
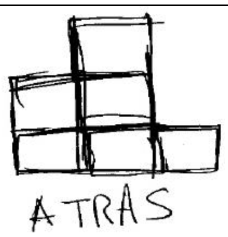
Sin embargo, el término "vista" presente en el enunciado ("dibuja la vista del edificio desde atrás") ha generado conflictos semióticos que se refieren a los diferentes significados que se le pueden atribuir (por ejemplo como "proyección ortogonal" o "campo visual", ver capítulo 1, apartado 2.1.3) y que pueden estar condicionados por la interpretación de la representación del edificio dada en la tarea (perspectiva isométrica) y de los términos "ángulo frente-derecha" presente en el enunciado, y "FRENTE" y "DERECHA" presentes en la representación gráfica. De manera particular se observa que el 14% de alumnos intentaron dibujar el edificio desde el ángulo detrás-izquierda en perspectiva isométrica, o sea desde el punto opuesto de al cual se refiere la imagen dada (que equivale a rotar el objeto 180 grados). Esto corresponde a la interpretación del término "vista desde atrás" no con referencia a los términos presentes en la representación del edificio (FRENTE y DERECHA) sino con respecto a la asunción que la representación en perspectiva del edificio corresponde a la vista desde frente. Aunque esto contradice el enunciado, en el cual se especifica que el edificio es dibujado desde el ángulo frente-derecha, consideramos las representaciones dibujadas correctamente basadas en dicha interpretación (10 alumnos, 4%) como respuestas parcialmente correctas (ver ejemplo figura 5.22).

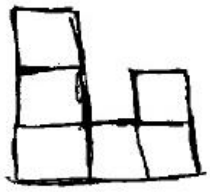
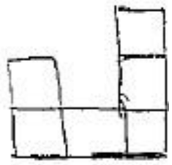
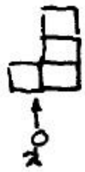
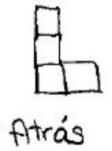
Figura 5.22: Ejemplo de respuesta parcialmente correcta basada en la incorrecta interpretación del término "vista"

Observamos que ésta interpretación de la tarea comporta un aumento de dificultad, puesto que visualizar el edificio desde el punto de vista opuesto con el cual se representa, y dibujarlo en perspectiva, requiere, además de buena capacidad visual, una buena capacitad de dibujo.

El 42% (101) de alumnos dieron respuestas incorrectas, manifestando diferentes tipos de errores, presentados en la tabla siguiente (tabla 5.13).

Tabla 5.13: *Errores manifestados en el sub-ítem 1c, frecuencia (y porcentaje).*

Error	Ejemplo	Interpretación del error	Frec.(%)
1. Dibujo incorrecto en perspectiva isométrica del objeto desde el ángulo izquierda-atrás	 *Figura 5.23*: Dibujo en persp. isométrica incorrecto  *Figura 5.24:* Dibujo en persp. isométrica incorrecto	Incorrecta interpretación del término "vista desde atrás", (conflicto semiótico)	25 (10)
2. Dibujo de la vista desde frente	 *Figura 5.25:* Vista de frente	Incorrecto cambio de perspectiva/ incorrecta interpretación de los términos presentes en el dibujo (frente y derecha)	34 (14)

3. Dibujo de la vista desde izquierda	 *Figura 5.26:* Vista desde el lado izquierdo		
4. Dibujo de la vista desde derecha	 *Figura 5.27:* Vista desde el lado derecho		
5. Dibujo incorrecto de vista desde atrás	 *Figura 5.28:* Dibujo incorrecto de la vista desde atrás	Incorrecta lectura del dibujo en perspectiva isométrica (y de los términos) considerando las dos torres alineadas (además de los errores 2 y 3)	42 (18)
6. Dibujo incorrecto de vista desde frente	 *Figura 5.29:* Dibujo incorrecto de la vista desde frente		
7. Dibujo incorrecto de vista no identificada	 *Figura 5.30:* Dibujo incorrecto de vista no identificada		
Total			101 (42)

Para interpretar los errores 5, 6 y 7 hemos analizado las justificaciones que los alumnos presentaron a sus soluciones. En estas emerge que la representación gráfica incorrecta presentada por los alumnos es probablemente debida a una incorrecta lectura del dibujo del edificio en perspectiva isométrica, o sea considerando las dos torres alineadas, lo que no es correcto ni por la vista desde atrás, ni por la vista de frente. Los siguientes ejemplos de justificaciones se refieren al error 5 (figuras 5.31 y 5.32)

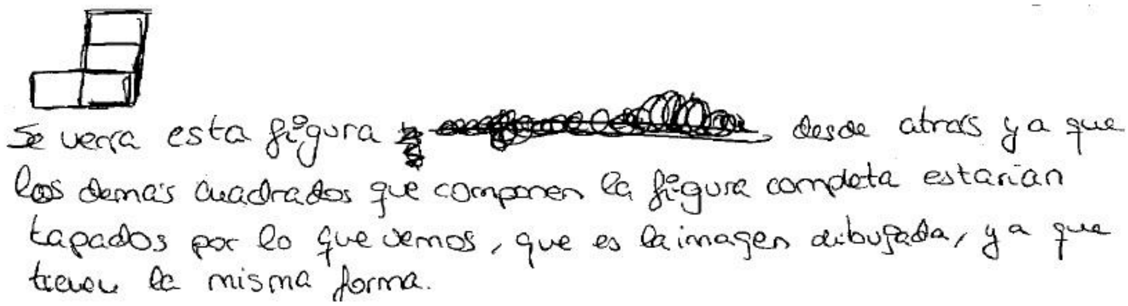


Figura 5.31: Justificación de una alumna a su respuesta incorrecta (error 5) del ítem 1c

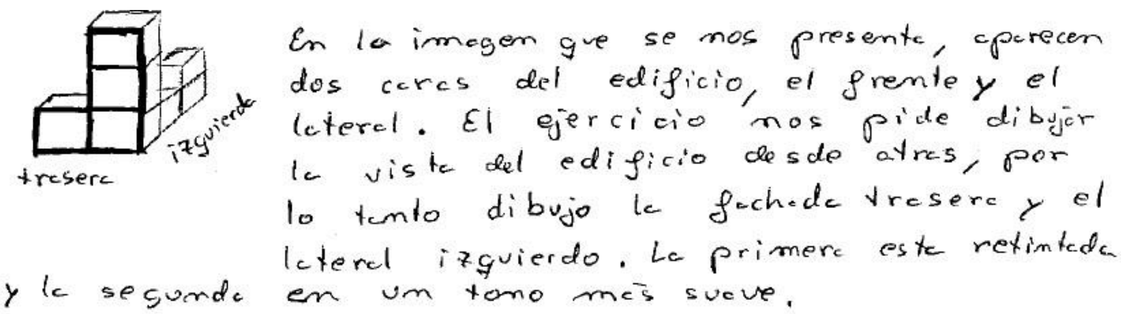


Figura 5.32: Justificación de un alumno a su respuesta incorrecta (error 5) del ítem 1c

Con respecto a los errores 6 y 7, además de errores de interpretación de la representación en perspectiva, se añaden errores de cambio de perspectiva (errores 2 y 3).

En el estudio de los resultados de éste sub-ítem hemos limitado el análisis de las justificaciones solo en los casos de respuestas gráficas ambiguas, lo que nos ha permitido interpretar algunos de los errores manifestados por los alumnos.

4.2. ÍTEM 2 (SISTEMA DIÉDRICO)

El ítem 2c, relacionado con el contenido de "Coordinación e integración de vistas ortogonales de objetos tridimensionales", requiere visualizar cambios en las tres vistas ortogonales del objeto a partir de la variación de la estructura del objeto representado en perspectiva isométrica. De manera particular se pretende que el sujeto identifique cuales cubos puede quitar en una composición de cubos representadas en perspectiva, sin que sus vistas (proyecciones ortogonales) cambien.

La identificación de las dos soluciones posibles es evaluada como respuesta correcta. Si el alumno reconoce únicamente uno de los dos posibles cubos que se pueden quitar, su respuesta será evaluada como parcialmente correcta. Consideramos incorrectas las respuestas en las cuales no se identifica ningún cubo (bien con respuesta afirmativa o con respuesta negativa) o se identifican cubos incorrectos.

Resumimos en la tabla 5.14 las frecuencias absolutas (y porcentaje) de los valores de la variable cuantitativa "grado de corrección" de la respuesta en el sub-ítem 1c.

Tabla 5.14. *Frecuencia absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 2c* (n=241).

SUB-ÍTEM 2c	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto	36 (15)
Parcialmente correcto	67 (28)
Incorrecto	118 (49)
En blanco	20 (8)

Estos resultados muestran muy pobre conocimiento avanzado relacionado con la pregunta 2c. Las respuestas incorrectas manifiestan los siguientes errores principales, tabla 5.15.

Tabla 5.15. *Tipos de errores, ejemplos, frecuencia (y porcentaje) relativo al sub-ítem 2c*

<table>
<tr><th colspan="2">Error</th><th>Ejemplos</th><th>Frec. (%)</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Negación</td><td>No se podría ni añadir ni quitar, ya que, cualquier modificación que se realizara en la figura repercutiría directamente en el alzado, en el perfil y en la planta.
Figura 5.33: Respuesta incorrecta, negación</td><td>80 (68)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Afirmación</td><td>2. Vistas consideradas por separado</td><td>Sí. En los tres tipos de vistas:
Alzado: Si le quitas los cubos traseros al alzado se vería igual.
Perfil: Podríamos quitar los cubos traseros al perfil, un trozo de la T.
Planta: Como la figura está compuesta por dos filas de cubos, una encima de la otra, si quitaramos una fila no afectaría a la vista de planta.
Figura 5.34:Respuesta incorrecta, vistas consideradas separadamente</td><td>21 (18)</td></tr>
<tr><td>3. Se quitan otro cubos o se quitan los dos cubos correctos a la vez</td><td>Se podría quitar uno de los cubos de la planta, justo el que está apoyado y no se ve.
Figura 5.35: Respuesta incorrecta, omisión de ambos cubos</td><td>10 (8)</td></tr>
<tr><td>4. Otros</td><td></td><td>7 (6)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Total</td><td>118 (100)</td></tr>
</table>

Observamos que la mayoría de los errores identificados están relacionados con la dificultad de visualizar los cambios en las tres vistas de un objeto a partir de la variación de la estructura del objeto. Esta dificultad podría estar relacionada con la incorrecta concepción de que las tres vistas ortogonales de un objeto definen de forma univoca un objeto tridimensional. Muchos alumnos afirman que cambiando parte de la estructura del objeto al menos una vista tiene que cambiar (incorrecto en general y de manera particular en el caso de la tarea propuesta).

Con respecto al tipo de representación dado en la solución, distinguimos los siguientes tipos:

- Verbal: ejemplos (figura 5.36 y 5.37)

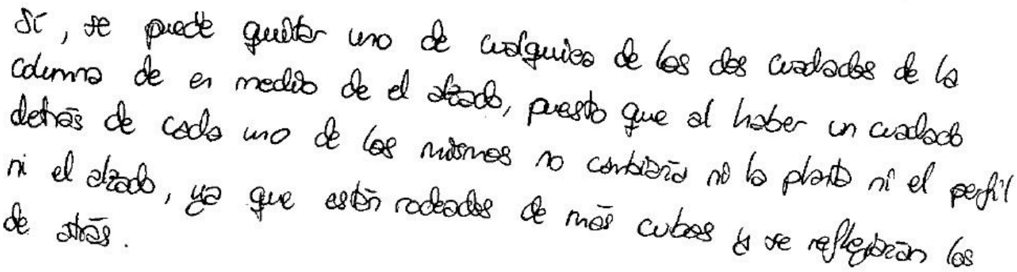


Figura 5.36: Respuesta verbal correcta dada por una alumna al ítem 2c

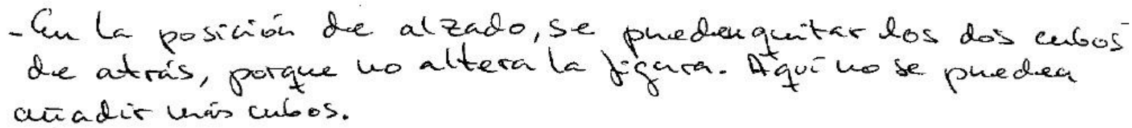


Figura 5.37: Respuesta verbal incorrecta dada por una alumna al ítem 2c

- Verbal con marcas en el dibujo presentado en el enunciado (figura 5.38)

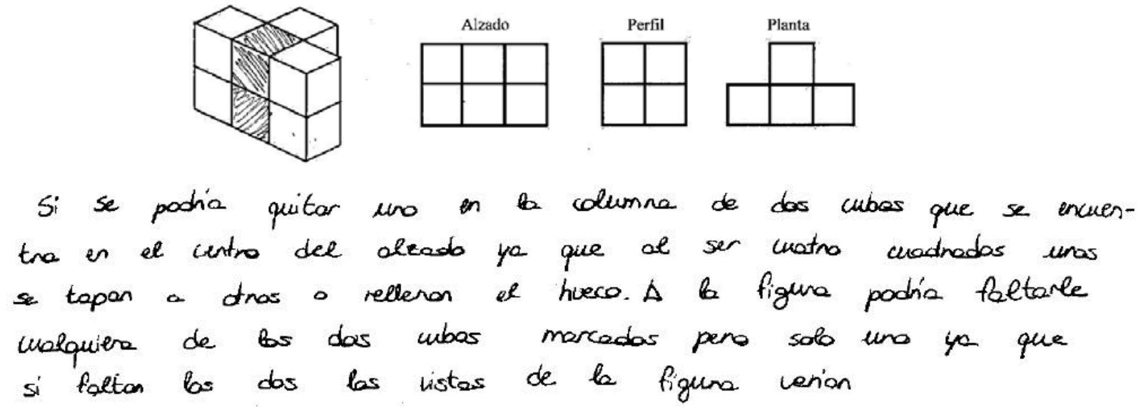


Figura 5.38: Respuesta verbal con marcas en el dibujo del enunciado correcta dada por una alumna al ítem 2c

- Gráfico y verbal (figura 5.39)

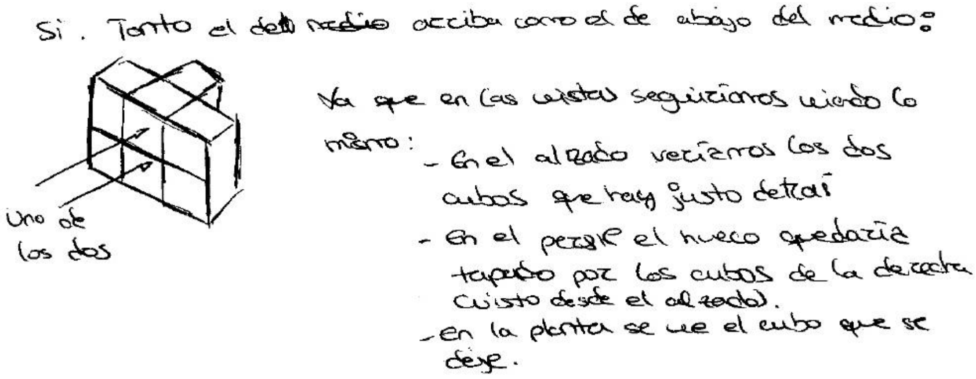


Figura 5.39: Respuesta grafico-verbal correcta dada por un alumno al ítem 2c

Resumimos en la siguiente tabla (tabla 5.16) las frecuencias relativas al tipo de representación dado y al respectivo grado de corrección de la respuesta.

Tabla 5.16: *Frecuencia absolutas relacionadas al tipo de representación dado y al grado de corrección de la respuesta del sub-ítem 2c*

Tipo de representación	Soluciones			
	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	Total
Verbal	2	7	85	94
Verbal con marcas en el dibujo presentado en el enunciado	24	42	11	77
Gráfico y verbal	10	18	22	50
Total	36	67	118	221

Las respuestas incorrectas son principalmente respuestas verbales (el 72%), mientras que en las respuestas correctas y parcialmente correctas prevalen representaciones mixtas o sea verbales apoyadas en elementos gráficos dibujados o presentados en el dibujo del enunciado (64%).

Por lo que se refiere a las justificaciones, presentadas solo por el 32% de los estudiantes, hemos identificados los siguientes tipos (tabla 5.17).

Tabla 5.17: *Tipos de justificaciones y frecuencia absolutas relativos al sub- ítem 2c*

Tipos de justificaciones		Frec.
Justificaciones de respuestas correctas	Justificación completa (especificando los cubos que	25

(o parcialmente correctas)	aparecen en la respectiva proyección)	
	Justificación parcial o aproximada	27
Justificaciones de respuestas incorrectas	Ejemplo u observación de que se pueden mantener 1 o 2 vistas, pero no todas	14
	Otras	7

En algunas soluciones emerge la concepción incorrecta de que tres vistas definen de forma univoca un objeto tridimensional. Ejemplos (Figura 5.40, 5.41)

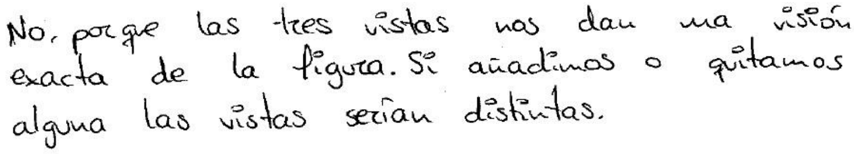

No, porque las tres vistas nos dan una visión exacta de la figura. Si añadimos o quitamos alguna las vistas serían distintas.

Figura 5.40: Concepción incorrecta de que tres vistas definen de forma univoca un objeto tridimensional

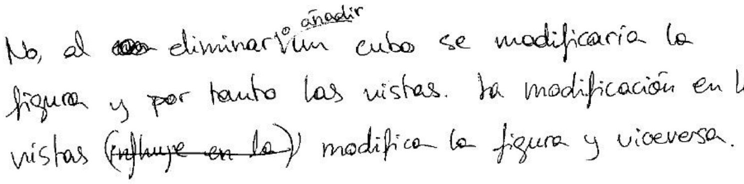

No, al eliminar o añadir un cubo se modificaría la figura y por tanto las vistas. La modificación en las vistas (~~influye en la~~) modifica la figura y viceversa.

Figura 5.41: Concepción incorrecta de que tres vistas definen de forma univoca un objeto tridimensional

4.3. ÍTEM 3 (DESARROLLOS)

En el ítem 3c se presenta una pirámide truncada recta con base rectangular dibujada en perspectiva axonométrica. Se pide al alumno que dibuje dos posibles desarrollos planos del objeto.

Esta tarea pone en juego la visualización de la acción de desplegar un sólido para formar un desarrollo plano así como la existencia de diferentes desarrollos posible de un poliedro. En el dibujo de los desarrollos es importante mantener la forma, la adyacencia de las caras, sus respectivas orientaciones y el número.

Consideramos respuestas correctas las que presentan al menos dos desarrollos planos correctos del sólido que sean diferentes entre sí (equivalencia a falta de reflexión y rotación). En estas respuestas se admiten pequeños errores de proporciones de las caras y de las aristas que se pegan. Ejemplo (figura 5.42):

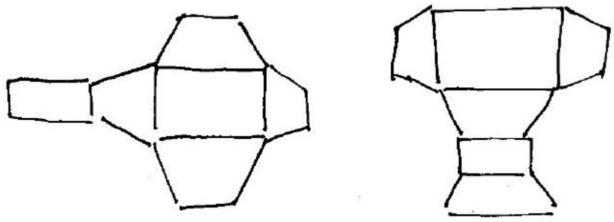


Figura 5.42: Ejemplo de respuesta correcta del sub-ítem 3c

Consideramos como respuestas parcialmente correctas las soluciones que presentan un único desarrollo correcto del sólido (y frecuentemente otro incorrecto). Ejemplo (figura 5.43):

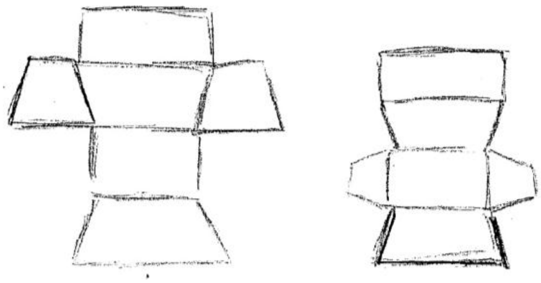


Figura 5.43: Ejemplo de respuesta parcialmente correcta del sub-ítem 3c

Serán incorrectas las respuestas que no muestran ningún desarrollo correcto del sólido.

Ejemplo (figura 5.44)

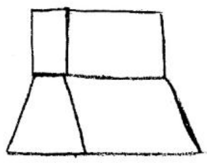


Figura 5.44: Ejemplo de respuesta incorrecta del sub-ítem 3c

Resumimos en la siguiente tabla (tabla 5.18) las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de corrección" de la respuesta por el sub-ítem 3c.

Tabla 5.18: *Frecuencia absolutas (porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 3c* (n=241).

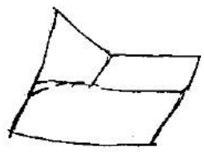
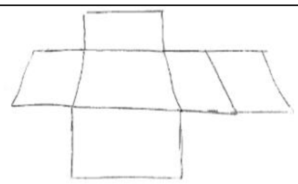
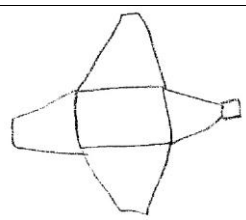
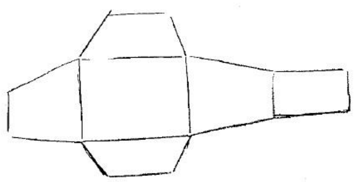
SUB-ÍTEM 3c	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto	108 (45)
Parcialmente correcto	64 (27)

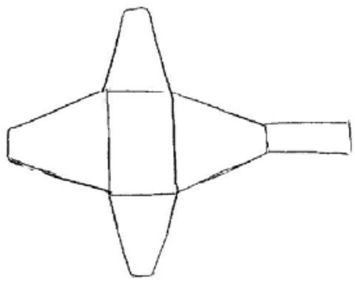
Incorrecto	59 (24)
En blanco	10 (4)

Observamos que solo la mitad de los estudiantes pueden dibujar de forma correctas dos diferentes desarrollos planos de la figura.

Se han encontrados diferentes errores en los dibujos de los desarrollos, relacionados con aspectos conceptuales del desarrollo, con la interpretación del dibujo en perspectiva y con la acción de desplegar-plegar (tabla 5.19):

Tabla 5.19: *Frecuencias absolutas de los errores manifestados en el sub-ítem 3c.*

Errores		Ejemplo	Frec
Errores relacionados con el concepto de desarrollo plano	Graves errores: se dibujan figuras no conexas, se unen los polígonos por más lados	 *Figura 5.45:* Unión de polígonos por más lados	52
	Se unen polígonos por los vértices en lugar que por aristas	 *Figura 5.46:* Unión de polígonos por los vértices	10
Incorrecta interpretación del dibujo en perspectiva/ deformación de determinadas partes en el proceso de "desplegar	No se respeta la forma de las caras	 *Figura 5.47:*Forma de las caras incorrecta	28
	No se respeta la proporción relativa de las caras	 *Figura 5.48:* Incorrecta proporción relativa de las caras	22
Errores en las acciones de desplegar-plegar (relacionar desarrollo plano	Las aristas que se corresponden se dibujan de diferentes tamaños		107

con el sólido)		*Figura 5.49:* Tamaños diferentes de las aristas que se corresponden	
	No se respeta la posición relativas de las caras: se unen dos trapecios por sus bases, incorrecta orientación de los rectángulos	 *Figura 5.50:* Incorrecta posición relativa de las caras	30

Observamos que los errores relacionados con las acciones de desplegar-plegar, corresponden a lo que Mariotti (1997) llama "autonomía del aspecto conceptual" (capítulo 2, apartado 3.4.1) y que asociamos a una preponderancia del componente analítico con respecto al componente visual presente en la tarea. En particular observamos que en dichas respuestas los desarrollos dibujados respetan algunas de las propiedades analíticas (por ejemplo la forma y el número de las caras), olvidando no obstante de comprobar la efectiva posibilidad de cerrar el desarrollo (componente visual).

Algunos errores manifestados en las formas y proporciones relativas de las caras se pueden relacionar con una incorrecta interpretación del dibujo en perspectiva o bien con la deformación de determinadas partes en el proceso (visual) de "desplegar". Este último aspecto ha sido también observado por Mariotti (1997), que destaca que el hecho que el proceso de "desplegar" induce al alumno a transformar drásticamente el objeto corresponde a una "autonomía del aspecto figural". Asociamos dichos casos a una preponderancia de la componente visual (plegar el desarrollo) con respecto a la componente analítica (algunos de los invariantes no se respetan). Por ejemplo, en la siguiente respuesta (figura 5.51) se puede observar el efecto de la deformación de partes del objeto en la representación de un desarrollo de la pirámide truncada dada en el enunciado.

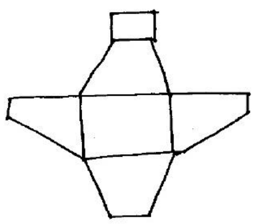


Figura 5.51: Efecto de deformación en la representación de un desarrollo

Con respecto al tipo de representación dado por los alumnos, distinguimos los siguientes desarrollos principales:

- Tipo 1: 1-4-1, lineales en T o cruz con un rectángulo en el centro: ejemplos (figura 5.52)

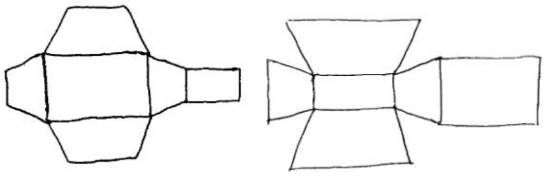


Figura 5.52: Ejemplos de desarrollos 1-4-1 lineales en cruz con rectángulo en el centro

- Tipo 2: 1-4-1, lineales en T o cruz con trapecio en el centro: ejemplos (figuras 5.53 y 5.54

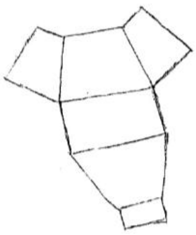


Figura 5.53: Ejemplo de desarrollo 1-4-1 en T con trapecio en el centro

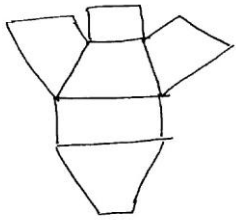


Figura 5.54: Ejemplo de desarrollo 1-4-1 en cruz con trapecio en el centro

- Tipo 3: 1-4-1, lineales diferentes de T y cruz: ejemplos (figura 5.55)

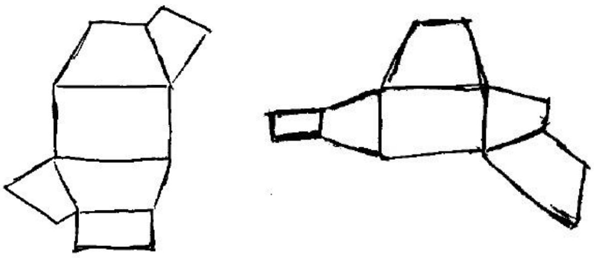


Figura 5.55: Ejemplo de desarrollos 1-4-1 lineales diferentes de T y cruz

- Tipo 4: 1-4-1 no lineales (con los polígonos de la superficie lateral contiguos), ejemplos (figura 5.56):

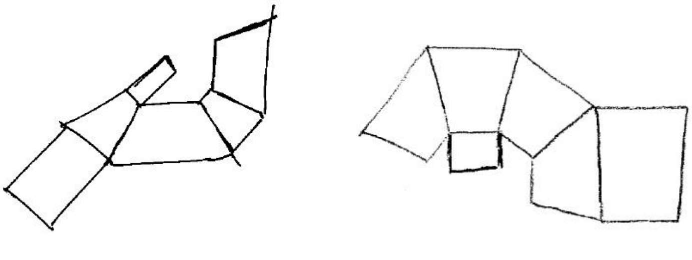


Figura 5.56: Ejemplos de desarrollos 1-4-1 no lineales

En la siguiente tabla (tabla 5.20) resumimos las frecuencias absolutas de los diferentes tipos de desarrollos (correctos o parcialmente correctos) presentados por los estudiantes.

Tabla 5.20: *Frecuencias absolutas (y porcentajes) de los diferentes tipos de desarrollos presentados en las respuestas al sub-ítem 3c*

Tipos de desarrollos	**Frec. (%)**
Una única representación de tipo 1 o dos representaciones de tipo 1	165 (83)
Una representación de tipo 1 y otra de tipo 2	12 (6)
Una representación de tipo 1 y otra de tipo 3	11 (6)
Una representación de tipo 1 y otra de tipo 4	9 (4)
Otras	2 (1)
Total	199 (100)

Observamos que la gran mayoría (83%) de representaciones correctas manifestadas por los alumnos se refieren al tipo 1, que corresponden a la apertura del desarrollo del objeto sobre una de sus bases y tienen la misma estructura de los desarrollos prototípicos del cubo en T o en cruz.

4.4.ÍTEM 4 (SECCIONES DE UN OBJETO)

Los sub-ítems 4c y 4c' están relacionados al contenido "Formación de objetos tridimensionales a partir de otros por composición y descomposición". De manera particular en la primera parte se pide descomponer objetos tridimensionales en dos determinadas piezas (tridimensionales), mientras que en la segunda parte se pide componer las dos piezas para formar otro sólido.

Para identificar las dos piezas en un determinado cuerpo el sujeto tiene que colocarlas en diferentes posiciones y orientaciones hasta que ocupen exactamente el espacio definido por el cuerpo. Este procedimiento puede ser por ensayo y error o seguir de determinadas observaciones de tamaño y forma.

Observamos que todos los cuerpos están dibujados en perspectiva isométrica en una plantilla isométrica (red diagonal de puntos), el alumno tiene que interpretar que, los dibujos presentados en su respuesta tienen que respetar dicha perspectiva.

Hemos decidido primeramente evaluar las dos preguntas por separado, y a continuación dar una evaluación global del ítem.

Por lo que se refiere a la pregunta 4c hemos decidido evaluar como correctas a las respuestas que no presentan errores, o sea que corresponden al correcto reconocimiento de las 2 piezas en los 6 cuerpos tridimensionales presentados en el enunciado (variable C4=2). Las respuestas parcialmente correctas son las que manifiestan 1 o 2 errores en las soluciones (variable C4=1). La presencia de 3 o más errores caracterizan las solucionen incorrectas (variable C4=0).

Por otra parte, consideramos que las respuestas al sub-ítem 4c' sean o bien correctas (variable CC4=2), si se presenta un objeto formado por las dos piezas respetando la perspectiva isométrica (con eventualmente pequeños errores en el dibujo en perspectiva), o bien incorrectas (variable CC4=0), si el objeto no está compuesto por las dos piezas o si la representación del objeto es muy imprecisa y no respeta la red isométrica de puntos.

En las siguientes tablas (tablas 5.21 y 5.22) resumimos las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de corrección" de las dos respuestas 4c y 4c'.

Tablas 5.21 y 5.22: *Frecuencia absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 4c y 4c'* (n=241).

Pregunta 4c	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto (2)	126 (53)
Parcialmente correcto (1)	48 (20)
Incorrecto (0)	54(22)
En blanco	13 (5)

Pregunta 4c'	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto (2)	98 (41)
Parcialmente correcto (1)	0 (0)
Incorrecto (0)	97 (40)
En blanco	46 (19)

Observamos que las respuestas incorrectas al sub-ítem 4c pueden reflejar tanto una incomprensión del enunciado del problema y de la interpretación del cuadro-ejemplo dado, así como grandes dificultades de visualizar la descomposición de los sólidos en las dos piezas dadas. De manera particular los alumnos que identifican sólo una de las dos piezas en cada sólido o que identifican piezas casuales de formas diferentes de las dadas, manifiestan dificultades en la interpretación del enunciado (11% de los estudiantes)

Otro error se refiere al no reconocimiento (manifestado con la no coloración) de partes de las piezas, y se refiere a la dificultad en coordinar los conjuntos de caras que

forman una misma pieza. El 13% de los estudiantes manifiestan dicha dificultad.
Ejemplos (figuras 5.57, 5.58):

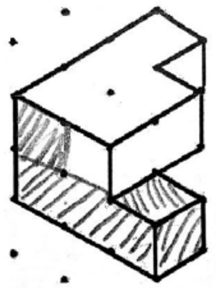
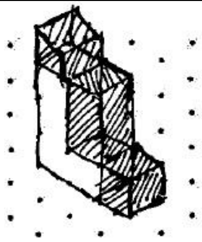
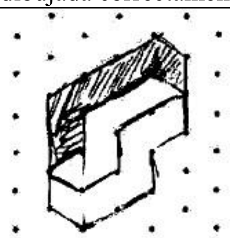


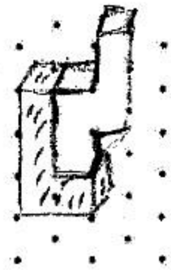
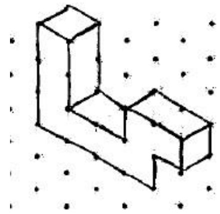
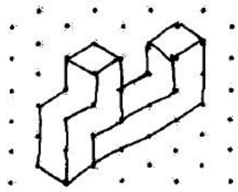
Figura 5.58: Ejemplo de error, no reconocimiento de partes de la pieza.

Los sólidos 5 y 6 son los que han resultados de más difícil reconocimiento, posiblemente por sus estructuras que se apoyan en dos planos diferentes.
También Malara (1998), trabajando con profesores de secundaria, evidenció dificultades para imaginar uno o más objetos, en posiciones no estándares, respetando la única condición de que sus representaciones encajan en un esquema representado.

Por lo que se refiere a los tipos de errores manifestados en la soluciones a la pregunta 4c', hemos identificados los siguientes (tabla 5.23).

Tabla 5.23: *Frecuencia de los errores manifestados en el sub-ítem 4c'*

Errores	Ejemplos	Frec
Solo dibuja correctamente una pieza y/o tiene problemas a componerlas	 Figura 5.59: Sólo una pieza dibujada correctamente	38
Errores en dibujar en perspectiva isométrica	 Figura 5.60: Errores en el dibujo en perspectiva	30

Dibuja en perspectiva caballera o solo una vista de la composición	 Figura 5.61: Intento de dibujo en perspectiva caballera	27
Faltan líneas en el dibujo	 Figura 5.62: Omisión de líneas en el dibujo	12
Falta o sobra un cubo a una pieza	 Figura 5.63: Sobra un cubo a una de las dos piezas	7

El siguiente ejemplo (Figura 5.64) muestra las dificultades que tienen muchos alumnos para dibujar en perspectiva isométrica (respetando la hoja de puntos), resultados que concuerdan con Malara (1998).

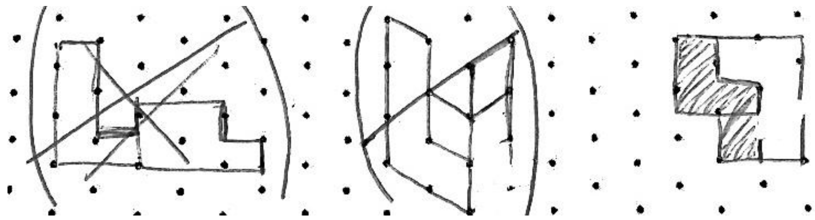
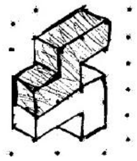
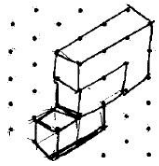
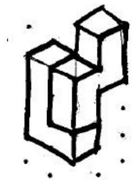


Figura 5.64: Ejemplo de alumno que manifiesta dificultades para dibujar en perspectiva isométrica.

Entre las diferentes soluciones correctas y parcialmente correctas dada al problema, hemos diferenciado si el sólido representado se puede apoyar en un único plano, o bien si consta de dos planos. Entre los primeros hemos encontrados sólidos ya representados en el apartado 4c’, pero girados.

Tabla 5.24: *Frecuencias (y porcentaje) de los tipos de representación de las composiciones manifestadas en el sub-ítem 4c’*

<table>
<tr><th colspan="2">Tipo de representación</th><th>Ejemplos</th><th>Frec (%)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1 plano</td><td></td><td>
Figura 5.64: composición de las dos piezas en un plano</td><td>73 (53)</td></tr>
<tr><td>- Corresponde a una composición del 4c a menos de rotación.</td><td>
Figura 5.65: composición equivalente a la 1 a menos de rotación</td><td>18 (13)</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 planos</td><td>
Figura 5.66: composición de las dos piezas en dos planos diferentes</td><td>47 (34)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Total</td><td>138 (100)</td></tr>
</table>

Para la evaluación global del sub-ítem 4c-c’, hemos decidido atender a los siguientes criterios:

- Correcto: c’ correcta y c parcialmente correcta o correcta (la suma de los valores de las variables C4 y CC4 es 3 o 4)
- Parcialmente correcto: c correcta y c’ incorrecta o en blanco, o viceversa (la suma de los valores de las variables C4 y CC4 es 2)
- Incorrecto: c incorrecta o parcialmente correcta y c’ incorrecta o en blanco (la suma de los valores de las variables C4 y CC4 es 0 o 1)

Resumimos entonces, en la siguiente tabla (tabla 5.25), las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa “grado de corrección” de la respuesta por el sub-ítem 4c-c’.

Tabla 5.25: *Frecuencia absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 4c-c’*(n=241).

SUB-ÍTEM 4c-c’	
Grado de corrección	**Frec. (%)**

Correcto	87 (36)
Parcialmente correcto	64 (27)
Incorrecto	82 (34)
En blanco	8 (3)

Observamos que sólo el 36% de los estudiantes saben resolver de forma correcta los ítems presentados, relativos al conocimiento ampliado sobre la composición-descomposición de objetos tridimensionales.

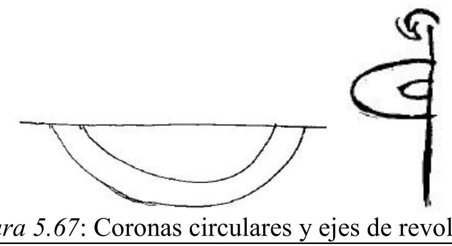
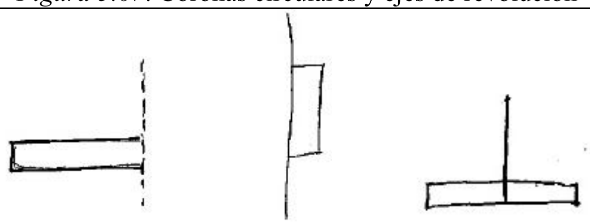
4.5. ÍTEM 5 (CUERPOS DE REVOLUCIÓN)

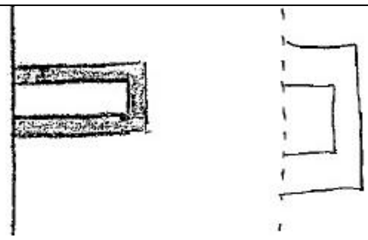
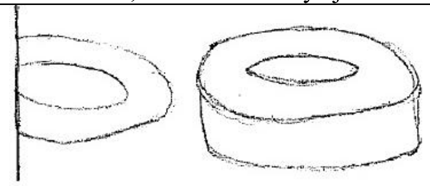
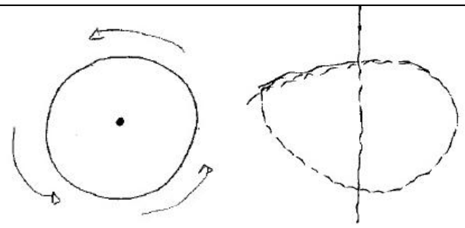
En este sub-ítem se pretende evaluar el conocimiento ampliado que tienen los estudiantes sobre los cuerpos de revolución, en particular se quiere analizar las soluciones dadas a una tarea que pide dibujar la figura plana y el respectivo eje de revolución que engendra un toro (dado en el enunciado).

Para resolver correctamente la tarea los alumnos tienen que visualizar la rotación de una figura plana (disco) alrededor de un eje exterior a ésta.

El análisis de las respuestas de los alumnos nos ha permitido identificar los siguientes tipos de representaciones incorrectas (tabla 5.26):

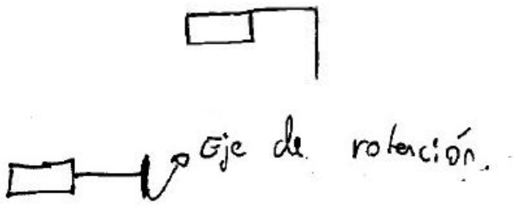
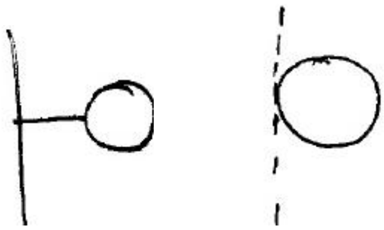
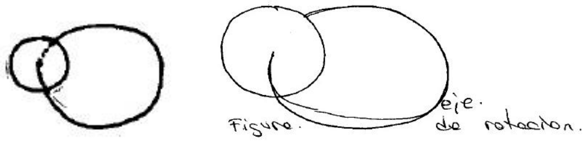
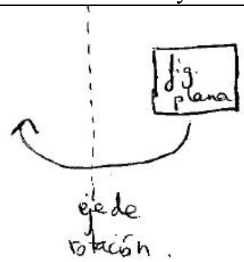
Tabla 5.26: *Frecuencia de los diferentes tipos de representaciones incorrectas dadas como soluciones al sub-ítem 5c*

Tipo de representación	Ejemplo	Frec
1. Corona circular	 *Figura 5.67*: Coronas circulares y ejes de revolución	68
2. Rectángulo	 *Figura 5.68*: Rectángulos y ejes de revolución	31

3. "Corona circular cuadrada"	 *Figura 5.69*: Coronas circulares cuadradas y ejes de revolución	20
4. Sólido (cilindro, cilindro hueco, toro, …)	 *Figura 5.70*: Cilindro, cilindro hueco y ejes de revolución	7
5. Dos representaciones diferentes, de tipo: 1-4	 *Figura 5.71*: Corona circular con eje de revolución y cilindro hueco	10
6. Trayectoria de rotación	 *Figura 5.72*: Trayectorias circulares	5
7. Contesta que no se puede engendrar con ninguna figura plana y/o que no es un sólido de revolución	No se puede obtener el cuerpo de revolución de este objeto partiendo de una figura plana ya que de cualquier forma, el aro central quedaría tapado por el exterior. No se puede hacer, ya que no es un cuerpo de revolución. *Figura 5.73*: Respuestas verbales incorrectas	5
8. Otras representaciones incorrectas	 *Figura 5.74*: Otras representaciones gráficas	19

En la tabla 5.27 presentamos los tipos de representaciones que hemos evaluados como parcialmente correctas.

Tabla 5.27: *Frecuencia de los diferentes tipos de representaciones parcialmente correctas dadas como soluciones al sub-ítem 5c*

Tipo de representación	Ejemplo	Frec
Rectángulo distante del eje pero ligado con rectas	 *Figura 5.75*: Rectángulos distantes del eje ligados con rectas	5
Círculo distante del eje y unido con recta o círculo tangente al eje	 *Figura 5.76*: Círculo distante del eje unido con recta y círculo tangente al eje	5
Círculo y trayectoria circular (sin eje)	 *Figura 5.77*: Círculos con trayectorias circulares	2
Rectángulo distante del eje	 *Figura 5.78*: Rectángulo distante del eje	5

En la figura 5.79 presentamos un ejemplo de respuesta correcta.

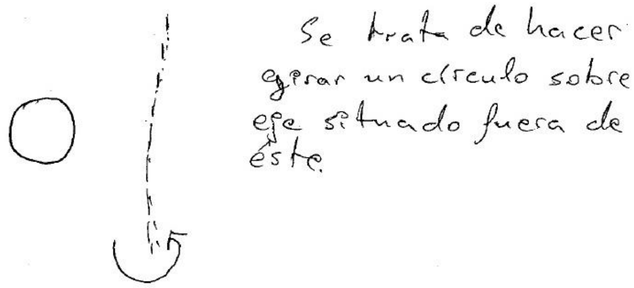


Figura 5.79: Ejemplo de respuesta correcta dada al sub-ítem 5c.

En la tabla 5.28 resumimos las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de corrección" de la respuesta por el sub-ítem 5c.

Tabla 5.28 *Frecuencia absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 5c* (n=241).

SUB-ÍTEM 5c	
Grado de corrección	**Frec. (%)**
Correcto	32 (13)
Parcialmente correcto	19 (8)
Incorrecto	160 (66)
En blanco	30 (13)

Observamos que el sub-ítem 5c ha dado muchas dificultades: el 79% de alumnos contestan de forma incorrecta o dejan la respuesta en blanco.

Las mayoría de errores identificados van asociados a una concepción incorrecta de cuerpo de revolución, como sólido generado por la rotación de una figura alrededor de un eje únicamente interior o tangente a ella.

Una posible causa de éste error puede ser las representaciones de los cuerpos de revolución en los libros de textos de primaria: se representan las figuras planas pegadas a barras que giran.

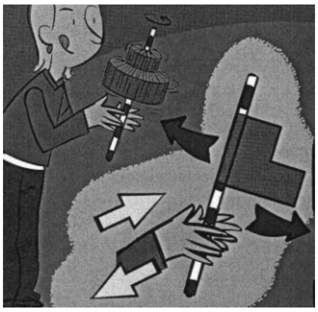


Figura 5.80: Dibujos relativos a los cuerpos de revolución presentados en libros de texto de escuela primaria

4.6. SÍNTESIS DE CONOCIMIENTO AMPLIADO DEL CONTENIDO

Por lo que se refiere a la evaluación del conocimiento ampliado del contenido, la puntuación total en la variable del grado de corrección de la respuesta c) observamos que el 55% de los alumnos tuvieron una puntuación total inferior a 5 sobre 10 (considerado insuficiente), 27% entre 5 y 6 (suficiente), 14% entre 7 y 8 (bueno) y 4% entre 9 y 10 (muy bueno).

En la tabla 5.29 y en la Figura 5.81 presentamos la distribución de los valores relativos a la puntación total del conocimiento ampliado, su frecuencia (porcentaje) y la valoración que le atribuimos.

Tabla 5.29: *Frecuencia (y porcentaje) y valoración de la puntación total relativa al conocimiento ampliado del contenido*

Total Conoc. Ampliado	Frec (%)	Valoración
10	6 (2)	Muy bueno
9	6 (2)	
8	19 (8)	Bueno
7	15 (6)	
6	22 (9)	Suficiente
5	43 (18)	
3-4	50 (21)	Pobre
1-2	60 (26)	Muy pobre
0	20 (8)	Nulo

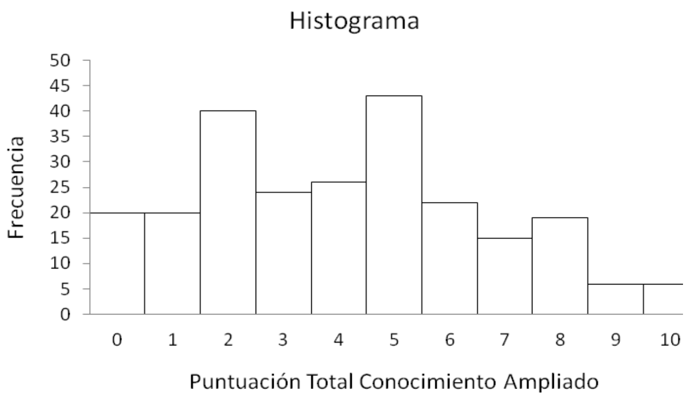


Figura 5.81: Histograma de la puntuación total relativa al Conocimiento Ampliado

En la Tabla 5.30 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a los valores de la variable del grado de corrección de la respuesta.

Tabla 5.30. *Frecuencias absolutas (y porcentajes) de las respuestas a los sub-ítems tipo c* (n=241)

Grado de corrección	Ítem				
	1c	2c	3c	4c	5c

Correcto	122 (51)	36 (15)	108 (45)	87 (36)	32 (13)
Parcialmente correcto	10 (4)	67 (28)	64 (27)	64 (27)	19 (8)
Incorrecto	101 (42)	118 (49)	59 (24)	82 (34)	160 (66)
En blanco	8 (3)	20 (8)	10 (4)	8 (3)	30 (13)

Estos resultados muestran muy pobre conocimiento avanzado relacionado con la pregunta 2c (de coordinación e integración de las vistas para formar un objeto) y 5c (generar un cuerpo de revolución con eje exterior a la figura).

La puntuación media de todo el grupo relacionada con la variable del grado de corrección de la respuesta (conocimiento ampliado del contenido) es de 4,1 (sobre 10). Observamos que la media de los chicos (5,3) es mayor de la media de las chicas (3,8), lo que muestra una posible dependencia del conocimiento ampliado sobre VOT con el

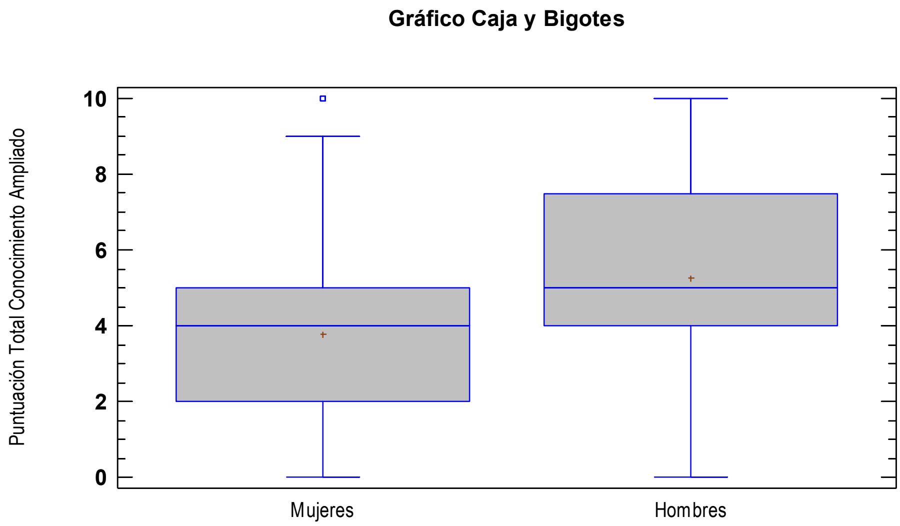


Figura 5.82: Puntuación Total Conocimiento Ampliado Mujeres y Hombres

Realizado un contraste de diferencia de medias (comparación de dos muestras independientes) a la variable puntuación total en conocimiento ampliado hemos obtenido un valor P = 0,00014, por lo que las diferencias entre hombres y mujeres en esta variable es estadísticamente significativa.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS SOBRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO

5.1. JUSTIFICACIONES DE LAS RESPUESTAS

El objetivo de esta sección es identificar los tipos de justificaciones que los maestros en formación proponen a las soluciones dadas a las tareas visuales de los sub-ítems a), relativas al conocimiento común del contenido. Las tareas presentadas tienen una fuerte componente empírica, lo que puede suponer un mayor desafío a la hora de argumentar las soluciones propuestas. La respuesta, "es así porque lo veo" puede a veces parecer la única justificación posible sin tener en cuenta "lo que se sabe", esto es, los conocimientos geométrico-espaciales puestos en juego (Parsysz, 1988). Evidentemente este tipo de respuesta no se considera adecuado en el contexto de la enseñanza donde no todos los alumnos tienen porqué "ver" la solución propuesta. Suponemos que una justificación pertinente de la solución pondría de manifiesto la dialéctica entre lo visual y lo analítico presente en la tarea (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012), o sea, articularía los conceptos y procesos visuales necesarios para hallar la solución, de forma deductiva.

En un primer momento describimos únicamente las justificaciones manifestadas por los alumnos de forma cualitativas. Analizando las respuestas de los estudiantes, podemos clasificar sus justificaciones en diferentes categorías:

0. Afirmaciones incorrectas o incompletas:
- Justificaciones basadas en concepciones erróneas
- Repetición de la información presente en el enunciado
- Afirmaciones generales sobre el aspecto mental del procedimiento

1. Explicaciones generales:
- Descripciones de propiedades/condiciones visuales generales de la tarea
- Descripciones de conceptos, propiedades o procedimientos aislados o incompletos (aspectos analíticos)

2. Argumentaciones deductivo-informales:
- Descripción del procedimiento utilizado para resolver la tarea
- Verificación de las hipótesis dadas en el enunciado

3. Pruebas deductivo-formales (incipientes)

Dichas justificaciones pueden manifestar una preponderancia de aspectos visuales, analíticos, o bien integrar las dos componentes; lo que se explicitará en los siguientes apartados.

5.1.1. Ítem 1 (Vistas)

El nivel elemental de la tarea, y la intervención de únicamente situaciones particulares (4 posiciones y fotografías), permite prever una predominancia de argumentaciones discursivas de tipo deductivo-informales (Recio y Godino, 2001), en las cuales intervienen argumentos prácticos relacionados con el contexto.

La siguiente solución a uno de los casos de la tarea es un ejemplo de justificación deductivo-informal esperada.

"3-D: desde la posición D el fotógrafo ve a su izquierda un plato y a su derecha un jarrón, lo que corresponde a la foto 3."

Esta justificación se basa en la interpretación de la información gráfica presente en la figura 1 y en la aplicación de los conceptos primitivos de derecha e izquierda con respecto a un cuerpo orientado (el fotógrafo).

Analizando las respuestas de los estudiantes que contestaron correctamente al ítem a) (que son el 94%), podemos clasificar sus justificaciones en tres categorías:

1. Explicaciones generales: descripción de conceptos, propiedades o procedimientos aislados o incompletos
2. Argumentaciones deductivo-informales:
    - De cada sub-problema
    - A algunos de los sub-problemas "ejemplares"
3. Intentos de pruebas deductivo-formales

En los siguientes sub-apartados describimos las tipologías de justificaciones a las soluciones correctas en cada categoría, y su incidencia en la muestra de estudiantes. Posteriormente describimos los principales errores encontrados en las justificaciones dadas.

Explicaciones generales: descripción de conceptos, propiedades o procedimientos aislados o incompletos

El 23% de los estudiantes intentaron explicar la solución de forma general, describiendo aproximadamente conceptos o propiedades en la cual se basa. Sus afirmaciones se refieren frecuentemente a la dependencia entre la posición del fotógrafo y la posición de los objetos, a veces repitiendo la consigna de la tarea. Ejemplo:

La posición de los objetos depende del lugar donde se posicione el fotografo: si está de frente, de espaldas al objeto, derecha, izquierda....

Figura 5.83: Explicación general dada al sub-ítem 1a' (justificación no pertinente)

Estas descripciones no justifican de forma explícita la solución dada, sino que dan únicamente explicaciones parciales de la tarea (aunque puedan contener proposiciones verdaderas).

Argumentaciones deductivo-informales de cada sub-problema

La mayoría de los estudiantes (73%) presentaron, para cada solución de los cuatro sub-problemas (par número/letra), una argumentación deductivo-informal.

Clasificamos las justificaciones dadas a la solución de cada sub-problema, en los siguientes tipos (tabla 5.31):

Tabla 5.31: *Frecuencia (y porcentaje) de los tipos de justificaciones deductivo-informales de cada sub-problema*

Tipo	Justificación	Ejemplo	Frec (%)
1	Descripción de la foto N relacionada con la posición X	• En el número 2 el plato aparece a la derecha por lo que se ha tomado desde la posición B. *Figura 5.83:* Descripción de la foto N relacionada con la posición X	16 (10)
2	Descripción de la vista desde la posición X relacionada con la foto N	Si tomamos una fotografía desde el punto A lo primero que veríamos sería el plato y detrás el jarron por lo tanto la única fotografía correcta sería la primera. *Figura 5.84:* Descripción de la vista desde la posición X relacionada con la foto N	8 (5)
3	Solución al sub-problema, descripción de la foto N	1-A → En la foto 1, el plato está delante del jarrón *Figura 5.85:* Solución al sub-problema, descripción de la foto N	4 (3)
4	Solución al sub-problema, descripción de la vista desde la posición X	4 - B, como podemos comprobar, si tomamos una fotografía desde la posición B, el ~~jarrón~~ plato quedará a la derecha del jarrón *Figura 5.86:* Solución al sub-problema, descripción de la vista desde la posición X	32 (19)
5	Solución al sub-problema,	3D → EL plato esta a la izquierda y el jarrón a la derecha	70 (42)

	descripción	*Figura 5.87:* Solución al sub-problema, descripción	
6	Descripción de la foto N	En la imagen 4, vemos el jarrón a la izquierda y el platillo a la derecha. *Figura 5.88:* Descripción de la foto N	17 (11)
7	Descripción de la vista desde la posición X	Si me sitúo en el punto D el plato queda a la izquierda del florero. *Figura 5.89:* Descripción de la vista desde la posición X	13 (7)
Otros			5 (3)
Total			*165 (100)*

En los tipos 1-5 se hace una descripción de la vista del fotógrafo o de la fotografía (en el tipo 5 sin especificar si se refiere a la foto o a la vista del fotógrafo) y una justificación de la relación entre el punto de vista y la respectiva foto. Observamos que en los tipos 1 y 2 dicha relación se argumenta de forma clara y precisa, mientras que en los tipos 3, 4 y 5 se justifica esta relación sólo con la explicitación de la solución misma (por ejemplo "1-A").

Los tipos 6-7 presentan una descripción de la vista del fotógrafo o de la fotografía pero no manifiestan la relación entre la foto y el punto de vista (posiblemente considerada obvia, como ya presente en la solución).

Observamos que la pregunta "¿Desde qué posición se ha tomado cada una de las fotografías que ves a la derecha?" sugiere a los alumnos observar primeramente las fotos (y describirlas) y luego relacionarlas con los puntos de vistas correspondientes. De hecho casi todos los alumnos, presentaron en sus soluciones el par "foto-punto de vista" (o sea "número-letra", y no "letra-número"). Sin embargo, el 31% de alumnos decidieron argumentar su solución describiendo, en lugar de la foto, la vista del observador desde un determinado punto (tipos 2, 4 y 7).

Argumentaciones deductivo-informales a algunos sub-problemas "ejemplares"

El 4% de los estudiantes presentaron únicamente la justificación a uno o dos de los sub-problemas (con argumentaciones deductivo-informales de tipo 2, 4 y 5), frecuentemente acompañada de una afirmación relativa a la repetición del método, o procedimiento a los demás casos. Son ejemplos de alumnos que interpretaron el conjunto de las respuestas de los sub-problema como una única afirmación "general", cuya justificación se basa en un caso ejemplar (rasgos del esquema empírico-inductivo) y en su supuesta generalización. Ejemplo:

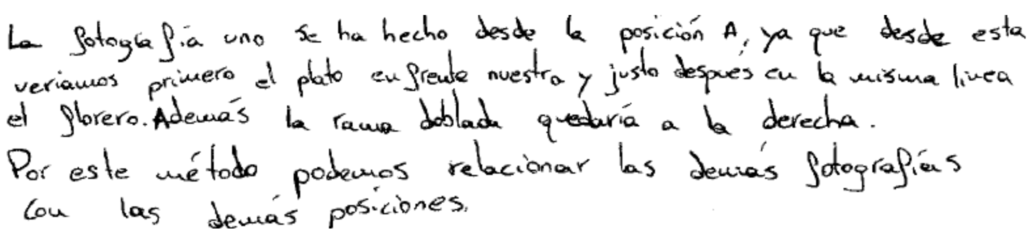

La fotografía uno se ha hecho desde la posición A, ya que desde esta veríamos primero el plato en frente nuestra y justo despues en la misma linea el florero. Además la rama doblada quedaría a la derecha.
Por este método podemos relacionar las demás fotografías con las demás posiciones.

Figura 5.90: Ejemplo de argumentación deductivo-informal a algunos sub-problemas "ejemplares"

Intentos de pruebas deductivo-formales

Una justificación al conjunto de sub-problemas tiene que involucrar un argumento que aunque expresado de forma general, sea válido para cada caso y permita así probar su veracidad.

Por ejemplo, un tipo de justificación general pertinente, podría ser la siguiente:

Si asumimos que las direcciones de la mirada (simbolizadas con las flechas en el dibujo) del observador en la cámara son paralelas entre sí y perpendiculares al plano visual de la observación (plano vertical que pasa por el lado de la mesa opuesto a la posición del fotógrafo), podemos considerar las fotografías como proyecciones ortogonales de los objetos en dicho plano. Conociendo las propiedades de las proyecciones ortogonales - la imagen de una figura puesta en un plano paralelo al plano de proyección es isométrica a la figura y conserva la forma, tamaño y posición relativa del cuerpo proyectado - se debe aceptar que los siguientes pares vista/puntos de vista son correctos: (1, A), (2, C), (3, D), (4, B).

Esta justificación de tipo deductivo-formal (formulada desde el punto de vista institucional – experto) pone en juego conocimientos de geometría descriptiva, lo que supone un conocimiento avanzado del tema.

Sólo una alumna intentó proponer este tipo de justificación, dibujando, de forma gráfica los diferentes planos de proyecciones (figura 5.91):

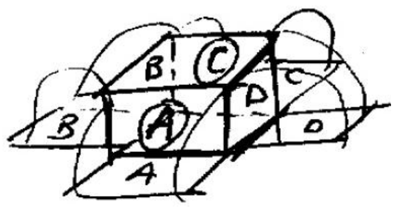


Figura 5.91: Esbozo presentado por una alumna, que ilustra los diferentes planos de proyección relativos a la tarea.

Se han observados errores/imprecisiones con respecto al uso de términos deícticos con respecto a objetos no orientados (plato y jarrón).

Afirmaciones como "a la izquierda del plato hay un jarrón" asume que el objeto de referencia (el plato) tenga una orientación bien definida (Lurçat, 1979), que en este caso significa tener un plano de simetría, que se caracteriza por su lateralidad, lo que no es exacto. En este caso, como no hay objetos orientados, las relaciones con las cuales se estructura el espacio tienen que estar relacionadas con las propiedades del cuerpo del fotógrafo, que le dan un significado preciso (Verjat, 1994).

Entre los alumnos que describieron verbalmente las posiciones relativas de los objetos, el 36% de alumnos manifestaron este tipo de error (ver figura 5.89).

5.1.2. Ítem 2 (Sistema diédrico)

La tarea presentada en el ítem 2a pone en juego conceptos de geometría descriptiva tales como alzados y planta. El término "vistas" presente en el enunciado se refiere a las proyecciones ortogonales del objeto en determinados planos. Para justificar la respuesta a la tarea es necesario interpretar correctamente dichos términos, o bien refiriéndose a las hipotéticas vistas que tendría un observador colocado en determinadas posiciones con respecto al objeto, o bien refiriéndose a las proyecciones en los diferentes planos ortogonales. La primera interpretación se asocia a una visión empírica-visual de la tarea (relacionada a la acción de ver desde diferentes posiciones), mientras que la segunda se refiere a un enfoque más bien analítico.

En ambos casos, para justificar la respuesta es necesario argumentar que el dibujo presentado como solución corresponde al objeto que tiene las vistas dibujadas.

Por ejemplo, se puede afirmar que el objeto dibujado en la respuesta tiene las vistas requeridas, puesto que si un observador se coloca *en frente o a un lado* del objeto representado *ve* los "alzados", mientras que si lo observa *desde arriba ve* la "planta", o sea las vistas representadas en el enunciado. Este tipo de justificación se basa en la verificación de la hipótesis ("Este objeto es correcto puesto que cumple las condiciones del enunciado") y tiene rasgos del esquema/justificación empírico-perceptivo (Harel y Sowder, 2007; Marrades y Gutiérrez, 2000), por la naturaleza de los conceptos que intervienen (ver el objeto de frente, de lado, o desde arriba).

En una justificación más detallada se puede describir el procedimiento que ha permitido llegar a la solución (descripción del proceso ascendente, Arzarello et al. (1998), a model…), por ejemplo, afirmando que el cuerpo correspondiente a las tres vistas representadas se construye (y dibuja) colocando las vistas en tres planos ortogonales de manera contigua (juntando las aristas correspondientes), o sea coordinando e integrando las tres vistas en determinadas posiciones, según los nombres que indican las vistas. Si dicha justificación es precisa y general (puede ser fácilmente aplicada a otras vistas de forma de generar otro objeto) entonces tiene rasgos del esquema deductivo-formal.

Por otra parte, si el procedimiento es descrito de forma aproximativa, con términos ambiguos, solo podemos hablar de intento de justificación deductivo-formal.

El nivel de los estudiantes nos permite prever una predominancia de argumentaciones de tipo deductivo-informales (Recio y Godino, 2001) basadas en la verificación empírica de las hipótesis y en las cuales emerge el concepto de vista como campo visual (y no como proyección).

Consideramos que dicha argumentación de tipo deductivo-informal es un primer paso para guiar a los alumnos desde una "geometría de la observación" hasta una "geometría de la demostración" (Parzysz, 2006, p. 129).

Analizando las respuestas de los estudiantes observamos la presencia de otro tipo de justificación, que se basa en la interpretación incorrecta de las "vistas" dadas en el enunciado como "caras" del objeto. En estos casos, aunque la solución al ítem a) pueda ser correcta (en algunos casos se asocia al dibujo del objeto vacío), la justificación nos proporciona una información suplementaria sobre el concepto (incorrecto) de "vistas" sobre el cual se basa.

Analizando las respuestas de los estudiantes que contestaron correctamente al ítem a) (209 alumnos de la muestra de 241, o sea el 87%), podemos clasificar sus justificaciones en tres categorías:

0. Afirmaciones incorrectas: justificaciones basadas en concepciones erróneas

1. Explicaciones generales: descripción de conceptos, propiedades o procedimientos aislados o incompletos

2. Argumentaciones deductivo-informales:

- Basadas en la verificación perceptiva de las hipótesis
- Basadas en la descripción del proceso de coordinación e integración de las vistas

Observamos que el 11% de los alumnos, aunque contestaron correctamente al ítem a), han dejado en blanco la respuesta relativa a la justificación.

En los siguientes sub-apartados describimos las justificaciones dadas a las soluciones en cada categoría, y su incidencia en la muestra de estudiantes.

Afirmaciones incorrectas: justificaciones basadas en concepciones erróneas

El 23% de alumnos da una justificación a la solución de la tarea interpretando las vistas del objeto dadas en el enunciado, como si fueran las caras del objeto. La mayoría consideran que la planta es la base del objeto (y así la nombran), mientras que los alzados son las caras laterales del objeto, también nombradas como paredes. Ejemplo (figura 5.92):

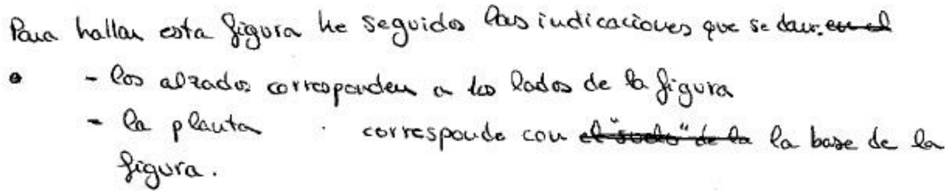

Para hallar esta figura he seguido las indicaciones que se dan: ~~en el~~
- los alzados corresponden a los lados de la figura
- la planta · corresponde con ~~el "suelo" de la~~ la base de la figura.

Figura 5.92: Justificación de la tarea interpretada de forma incorrecta

Dicha interpretación del enunciado confiere a la tarea un carácter aún más empírico, puesto que trabaja con conceptos, las caras del objeto, que se pueden materializar con más facilidad que "las vistas".

Observamos que algunos alumnos utilizan el término "lados" para referirse a "caras" del objeto y el término "altura" para referirse a las "caras laterales". Análogamente Gorgorió (1998), trabajando con alumnos de escuela secundaria, refiere el uso de palabras que corresponden a la geometría bidimensional para referir a partes de objetos tridimensionales.

Aunque estas justificaciones se refieren a soluciones correctas del ítem a), su análisis nos permite destacar errores conceptuales importantes, que habrían pasados ocultos con el sólo análisis de la solución al ítem a), y que pueden dar lugar a errores en otras tareas similares que involucran el concepto de vista.

Explicaciones generales: descripción de conceptos, propiedades o procedimientos aislados o incompletos

El 42% de los estudiantes intentó argumentar su solución describiendo conceptos, propiedades o procedimientos aislados o imprecisos que no permiten justificar de forma completa la respuesta. Identificamos las dos siguientes tipologías:

- Justificaciones que presentan una descripción correcta de los conceptos de planta y alzados dados en el enunciado, en términos de campos visuales desde determinadas posiciones, sin describir de forma precisa las relaciones que tienen con el objeto dibujado en la solución (27%). Ejemplo (figura 5.93):

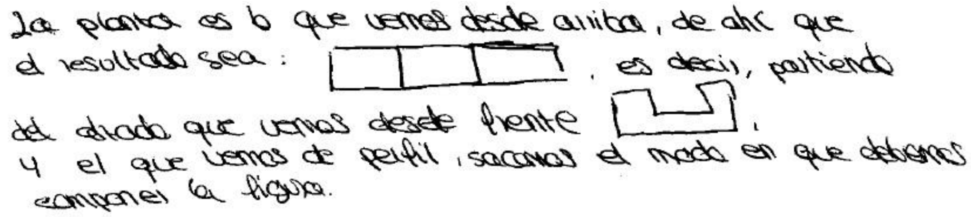

La planta es lo que vemos desde arriba, de ahí que el resultado sea: . es decir, partiendo del dibujo que vemos desde frente .
y el que vemos de perfil, sacamos el modo en que debemos componer la figura.

Figura 5.93: Justificación imprecisa dada por una alumna

- Justificaciones en las cuales se describen propiedades o procedimientos correctos pero aislados, que no permiten argumentar de forma clara y lógica la solución (15%). Ejemplo (figura 5.94):

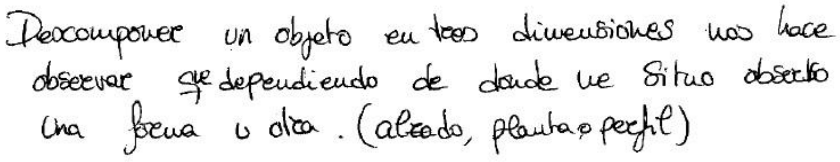

Descomponer un objeto en tres dimensiones nos hace observar que dependiendo de donde me sitúo observo una forma u otra. (alzado, planta o perfil)

Figura 5.94: Justificación incompleta dada por un alumno

Dichas justificaciones no presentan un discurso deductivo, sino únicamente afirmaciones locales, en la mayoría de los casos de tipo perceptivo.

Argumentaciones deductivo-informales basadas en la verificación perceptiva de las hipótesis

El 15% argumentan que el objeto dado en la solución tiene las vistas requeridas, apoyándose en la definición de las vistas como diferentes campos visuales que tiene un hipotético observador puesto en determinadas posiciones con respecto al objeto.

Como ya fue anticipado, dichas justificaciones se sitúan en el tipo de geometría G1descrita por Parzysz y tienen rasgos del esquema empírico-perceptivo. Ejemplo (figura 5.95):

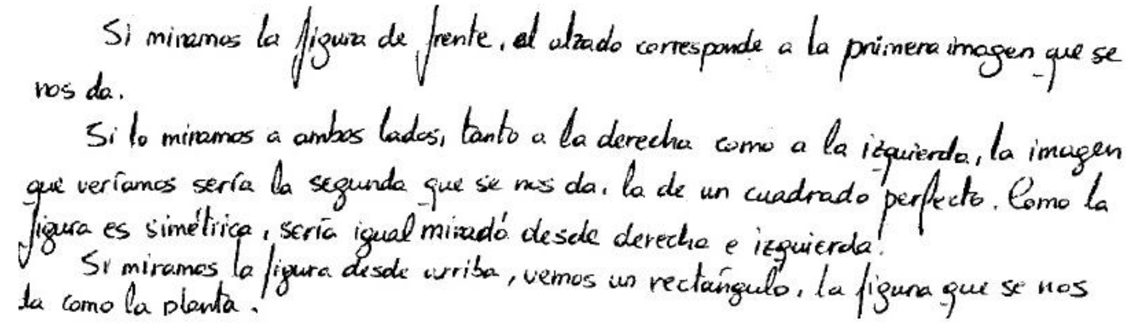

Si miramos la figura de frente, el alzado corresponde a la primera imagen que se nos da.
Si lo miramos a ambos lados, tanto a la derecha como a la izquierda, la imagen que veríamos sería la segunda que se nos da, la de un cuadrado perfecto. Como la figura es simétrica, sería igual mirado desde derecha e izquierda.
Si miramos la figura desde arriba, vemos un rectángulo, la figura que se nos da como la planta.

Figura 5.95: Justificación deductivo-informal dada por un alumno

Observamos que, aunque solo de forma implícita, dichas justificaciones llevan a movilizar los dos polos identificados por Parzysz (1988): el polo de "lo que se ve" y el de "lo que se sabe". De hecho, en la representación dada por los alumnos en la solución del ítem a) (esbozos del objeto en perspectivas caballera o isométrica) no se "ven" los alzados dados en el enunciado. La interpretación del dibujo en términos de vistas, requiere una buena interacción entre "lo que se ve", o sea el objeto dibujado en perspectiva (y en el cual, por ejemplo, el segundo alzado se "ve" con forma romboédrica), y "lo que se sabe" (o sea las propiedades del dibujo en perspectiva y de las proyecciones ortogonales[2]).

El maestro que justifica su solución de esta forma, tendría que ser consciente de dicha dialéctica, lo que formaría una importante transición hacia G2. Sin embargo, los alumnos no presentan dichos argumentos de forma explícita.

Argumentaciones deductivo-informales basadas en la descripción del proceso de coordinación e integración de las vistas

El 9% de alumnos presentaron pruebas deductivo-informales de sus soluciones, describiendo el proceso de coordinación e integración de las vistas en tres planos ortogonales de forma aproximada.

La mayoría de alumnos se apoyaron en la descripción del proceso de dibujo seguido para poder representar el objeto a partir de las tres vistas, lo que corresponde a una validación de tipo perceptivo (G1). Ejemplo (figura 5.96):

[2] De manera particular las siguientes propiedades: la forma y la dimensión de los objetos dibujados en perspectiva varían dependiendo de la inclinación del objeto referente respecto al plano de proyección; en la proyección ortogonal la imagen de una figura puesta en un plano paralelo al plano de proyección es isométrica a la figura.

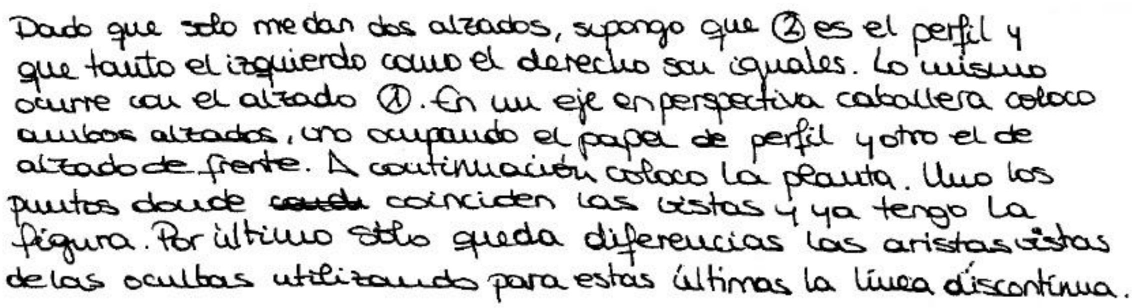

Dado que solo me dan dos alzados, supongo que ② es el perfil y
que tanto el izquierdo como el derecho son iguales. Lo mismo
ocurre con el alzado ①. En un eje en perspectiva caballera coloco
ambos alzados, uno ocupando el papel de perfil y otro el de
alzado de frente. A continuación coloco la planta. Uno los
puntos donde coinciden las vistas y ya tengo la
figura. Por último solo queda diferencias las aristas vistas
de las ocultas utilizando para estas últimas la línea discontinua.

Figura 5.96: Justificación deductivo-informal dada por una alumna

Observamos que en algunas de dichas soluciones aparecen objetos conceptuales relacionados con la geometría descriptiva (sistema diédrico, planos ortogonales,…), aunque no vienen definidos de forma rigurosa, ni explicitadas sus propiedades.

Presentamos en la tabla 5.32 las frecuencias absolutas y relativas (porcentajes) de los tipos de justificaciones dadas por los estudiantes.

Tabla 5.32. *Frecuencias de los tipos de justificaciones*

Tipo de justificaciones	Frecuencia (%)
En blanco	22 (11)
1. Interpretación incorrecta “vistas=caras”	47 (23)
2. Descripción de conceptos, propiedades o procedimientos aislados	89 (42)
3. Verificación perceptiva de las hipótesis	32 (15)
4. Descripción del proceso de coordinación e integración de las vistas	19 (9)
Total	209 (100)

Observamos que el 76% de los alumnos que dieron una respuesta correcta al ítem a), manifestaron dificultades a la hora de dar una argumentación (deductiva) a su solución (justificación dejada en blanco, de tipo 1 o 2). Las principales dificultades manifestadas se refieren a la interpretación incorrecta de los términos teóricos presentes en el enunciado (vistas, alzados y perfil) y a la incapacidad de formular un discurso deductivo a partir de determinadas hipótesis, lo que supone una falta de conocimiento especializado del contenido (Hill, Ball, y Schilling, 2008).

Por otra parte, las validaciones deductivo-informales de tipo perceptivo (tipo 3 y 4, 24%), aunque muestran escasas referencias a elementos teóricos (conceptos y teoremas de geometría euclídea), las consideramos válidas con respecto al contexto de enseñanza en el cual se sitúan (educación primaria). En términos de Parzysz (2006) se sitúan principalmente en el paradigma geométrico G1.

5.1.3. Ítem 3 (Desarrollos)

En la justificación del ítem 3, relativo a la identificación de desarrollos de un cubo entre diferentes hexaminós, se espera que los alumnos argumenten sus respuestas de la siguiente forma: de una parte justifiquen la elección dada de los hexaminós identificados como desarrollos, y por otra parte justifiquen porqué no se han seleccionados los demás hexaminós.

Las dos justificaciones tienen que explicitar de forma verbal y/o gráfica la relación que hay entre cada hexaminó (seleccionado o no) y el objeto que compone al plegarse (cubo o no). Dicha justificación se apoya en un procedimiento empírico (la acción de *plegar*), y aunque sea ejecutado por los alumnos de forma mental, su explicitación necesita el empleo de un determinado lenguaje:

- gráfico: representa la relación de correspondencia entre las partes (aristas o caras, ver capitulo 1)
- verbal: se apoya en términos de lenguaje relacionados con la acción de plegar: doblar, unir caras, cerrar, dejar huecos, hacer coincidir caras,…

Nos podemos también esperar argumentaciones de carácter general que justifiquen el conjunto de los hexaminós seleccionados, refiriéndose a propiedades generales (siempre relacionadas con la acción física de "plegar") de los desarrollos de un cubo: tener seis caras cuadradas, que al plegarse se cierran sin que las caras coincidan.

Analizando las respuestas de los estudiantes, podemos clasificar sus justificaciones en las siguientes categorías y sub-categorías:

A. Justificaciones de los hexaminós identificados como desarrollos de un cubo:

0. Afirmaciones incompletas: afirmaciones generales sobre el aspecto mental del procedimiento
1. Explicaciones generales:
   - Descripciones de propiedades/condiciones visuales de la tarea
   - Descripciones de conceptos, propiedades o procedimientos aislados o incompletos (aspectos analíticos)
2. Argumentaciones deductivo-informales: descripción del procedimiento utilizado para resolver la tarea
3. Intentos de pruebas deductivo-formales

B. Justificaciones de los hexaminós que <u>no</u> se han identificados como desarrollos de un cubo:

1. Explicaciones generales: descripciones de propiedades/condiciones visuales de la tarea

C. Justificaciones mixtas: con argumentaciones de tipo A y B.

En los siguientes sub-apartados describimos cada categoría de las justificaciones dadas por los alumnos de los hexaminós identificados como desarrollos de un cubo.

Afirmaciones incompletas: afirmaciones generales sobre el aspecto mental del procedimiento

Los alumnos que dieron este tipo de justificación a sus respuestas sólo presentaron afirmaciones generales sobre el aspecto mental del procedimiento ejecutado para resolver la tarea, frecuentemente acompañadas del reconocimiento de la no capacidad para explicarlo verbalmente o gráficamente.

Ejemplo (figura 5.97):

No sé como explicarlo, solo me he imaginado el proceso del desarrollo del cubo.

Figura 5.97: Afirmaciones generales sobre el aspecto mental

Siguiendo Mariotti (1997), consideramos que la presencia de términos como "imaginar", "ver",… en las justificaciones manifiesta la presencia de una componente visual asociada a la resolución de la tarea. Estos alumnos, aunque no consiguen argumentar sus respuestas de forma clara, explicitan que sus soluciones han sido obtenidas gracias a un proceso mental (asociado posiblemente a la visualización de la acción de plegar los desarrollos).

Explicaciones generales: descripciones de propiedades/condiciones visuales de la tarea

Algunos alumnos argumentan sus soluciones dando descripciones de propiedades/condiciones generales de tipo visual que tienen que tener los hexaminós para ser desarrollos de un cubo, o sea que al plegarlos todas las caras se cierran, y que no coinciden caras.

Ejemplo (figura 5.98):

Si seguimos el desarrollo de un cubo vemos que
está formado por 4 caras y 2 bases y los únicos
que podrían tener esta forma son esas 4 imagenes
de forma que al doblarlos como correspode obtendríamos
un cubo totalmente cerrado y sin que ninguna de las
caras quede solapada por otra.

Figura 5.98: Condiciones generales de tipo visual del desarrollo de un cubo

Aunque dichas explicaciones son correctas no aclaran de forma precisa la forma en que efectivamente los hexaminós seleccionados se cierran sin solapamiento de las caras

Explicaciones generales: descripciones de conceptos, propiedades o procedimientos aislados o incompletos (aspectos analíticos)

En dichas justificaciones se indican propiedades (analíticas) aisladas o incompletas del cubo o del desarrollo del cubo (número y forma de las caras,…), sin relacionarlas con el procedimiento de plegar/desplegar.

Ejemplo (figura 5.99):

Se corresponde con este desarrollo ya que el cubo es un poliedro
formado por 6 cuadrados. De esta manera tambien podemos
identificar el nº de caras, vértices y aristas que tiene un cubo

Figura 5.99: Propiedades analíticas del cubo/desarrollo

Argumentaciones deductivo-informales: descripción del procedimiento utilizado para resolver la tarea

Las argumentaciones deductivo-informales dadas son basadas en la descripción (verbal o gráfica) de la relación de correspondencia que hay entre los cuadrados del desarrollo y las caras del cubo. Frecuentemente dicha correspondencia se explicita refiriéndose a la organización del desarrollo con respecto a la organización de las caras del cubo, describiendo la posición de las "bases" (o una base y una tapa) y de la "superficie lateral" en el desarrollo.

Ejemplo (figura 5.100):

El 6, el 2: cuadrado es la base y los cuatro cuadrados que le siguen son los laterales
frente y trasero y el último de la derecha es la "tapa" de arriba del cubo, visto desde
arriba.

[El (desarrollo) 6: el segundo cuadrado es la base y los cuatro cuadrados que le siguen son los laterales trente y trasero y el último de la derecha es la "tapa" de arriba del cubo, visto desde arriba]

Figura 5.100: Descripción verbal de la correspondencia que hay entre los cuadrados del desarrollo y las caras del cubo

Mariotti (1997) asocia este tipo de descripción a una preponderancia del aspecto visual, relacionado a una estructura fija del cubo (sus caras colocadas en una determinada posición física).

Intentos de pruebas deductivo-formales

Algunos alumnos intentan dar argumentaciones deductivo-formales basadas en la explicitación de la relación de equivalencia que hay entre los lados del desarrollo del cubo, ejemplo (figura 5.101):

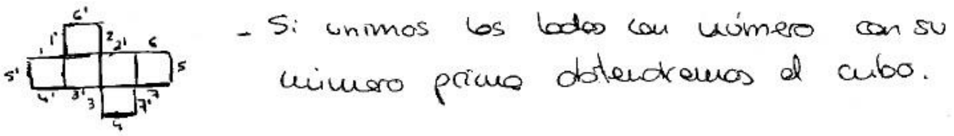


Figura 5.101: Explicitación gráfica de la relación de equivalencia que hay entre los lados del desarrollo del cubo

También en dichas justificaciones emerge la componente visual: la representación gráfica dada representa una de las condiciones analíticas que definen el cubo, o sea que es posible *emparejar* todos los lados de los cuadrados que pertenecen al borde del desarrollo de tal manera que cada par corresponde a una y sólo una arista del cubo.

Por lo que se refiere a las justificaciones de los hexaminós que <u>no</u> se han identificado como desarrollos de un cubo, hemos encontrado el siguiente tipo de justificación:

Explicaciones generales: descripciones de propiedades/condiciones visuales de la tarea

Algunos alumnos sólo explicitan propiedades/condiciones visuales que tienen los hexaminós no seleccionados al plegarse: solapamiento de caras, caras vacías,…

Ejemplo (figura 102):

En el a, de los laterales solapariamos un cuadro,
y nos dejaría una de las bases descubiertas,
En el c, solapariamos la base, pero otra
quedaría descubierta
En el e, nos faltaría un cuadro en el
lateral y una de las bases se solaparía
por otro cuadro
En el H, sería imposible formar un cubo.

Figura 5.102: Propiedades visuales que tienen al plegarse los hexaminós <u>no</u> identificados

Las justificaciones mixtas se refieren a argumentaciones de tipo A y B. O sea que incluyen una justificación relacionada a los hexaminós seleccionados como desarrollos de un cubo y también una argumentación de la no selección de los demás hexaminós. Ejemplo (figura 5.103):

A- No es porque al cerrarlo coincidirían los cuadrados 1 y 2 y
quedaría un hueco sin cerrar
C- No porque coincidirían el 3 y el 4.
E- No porque coincidirían el 5 y el 6.
H- No porque al estar tantas caras de los cuadrados pegadas unas
con otras no se podría formar.

• El B, D, F y G si son desarrollos de cubos porque todos
tienen 6 cuadrados (las 6 caras de un cubo) y al doblarlos
por las aristas que están pegadas no coincidiría ninguna
cara con otra

Figura 5.103: Argumentación mixta, A y B

En la siguiente tabla (tabla 5.33) presentamos la incidencia en la muestra de estudiantes de los diferentes tipos de justificaciones a las soluciones correctas.

Tabla 5.33: *Frecuencia (y porcentaje) de los tipos de justificaciones dadas a respuestas correctas del ítem 3a*

<table>
<tr><th colspan="3">Tipo de justificación</th><th colspan="2">Frec (%) sólo A o B (o en blanco)</th><th colspan="2">Frec (%) C= A+B (mixtas)</th></tr>
<tr><td rowspan="5">A</td><td colspan="2">0. Aspecto mental</td><td>5 (7)</td><td rowspan="5">43(59)</td><td>2 (3)</td><td rowspan="5">17 (23)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Explicaciones generales</td><td>1.1 Condiciones generales de tipo visual</td><td>9 (12)</td><td>2 (3)</td></tr>
<tr><td>1.2. Condiciones analíticas</td><td>20 (28)</td><td>10 (13)</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Argumentaciones deductivo-informales: correspondencia cuadrados desarrollo y caras del cubo</td><td>4 (5)</td><td>3 (4)</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Argumentaciones deductivo-formales: rel. equivalencia lados del desarrollo</td><td>5 (7)</td><td>0 (0)</td></tr>
</table>

B. Condiciones generales de tipo visual	10 (14)		
En blanco	3 (4)		
Total	**73 (100)**		

Observamos que la mayoría de las justificaciones dadas para los hexaminós que son desarrollos del cubo (41%) se refieren a explicaciones generales de determinadas propiedades analíticas del cubo y/o del desarrollo (número de caras, formas,…). Dichas propiedades, aunque correctas, no permiten argumentar de forma precisa la respuesta.

El 59% de los estudiantes se limitaron a justificar únicamente los hexaminós seleccionados, sin considerar pertinente argumentar la no elección de los otros desarrollos.

5.1.4. Ítem 4 (Secciones de un objeto)

Las justificaciones dadas a este sub- ítem son frecuentemente incluidas en el sub-ítem a). Consideramos entonces como justificaciones los elementos argumentativos presentes en ambas respuestas. Como ya ha sido observado en el apartado 4.4, la gran mayoría de las respuestas al sub-ítem a) son de tipo gráfico: los alumnos intentan representar los cortes en la figura dada en el enunciado o en otra representación gráfica producida por ellos.

Esperamos que en la justificación los alumnos expliquen el porqué los cortes dibujados permiten dividir el cilindro representado en ocho partes.

Una forma de argumentar la respuesta es describir cada uno de los cortes que se ha dibujado aproximadamente (se observe que los alumnos solo dibujan una parte de la intersección dada por el plano de corte con el cilindro), explicitado su posición con respecto al cilindro (principalmente cortes verticales y horizontales), y el resultado obtenido en el cilindro con cada corte, o sea el número de partes y su forma. La descripción verbal tiene que tener en cuenta la tridimensionalidad del objeto y la relativa posición de los cortes en el espacio. Observamos que aunque la localización aproximativa de los cortes aparece frecuentemente en la solución esperamos que en la justificación se describa con más precisión su ubicación con respecto a planos verticales y horizontales.

Analizando las soluciones dadas por los alumnos podemos diferenciar entre justificaciones principalmente verbales (justificaciones verbales), justificaciones que se apoyan en elementos dibujados e indexados en el sub-ítem a), y justificaciones que introducen elementos gráficos para describir cada corte, su secuenciación, las particiones del cilindro,… (justificaciones gráfico-verbales).

En las diferentes justificaciones propuestas emergen los siguientes elementos:

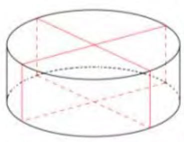
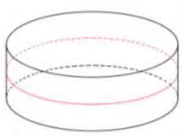
A. Descripción de la posición del (plano de) corte con respecto al cilindro (vertical/horizontal)

B. Las localizaciones relativas de las intersecciones de los cortes con parte de la superficie del cilindro (descripción aproximativa del dibujo dado en la solución: cortes perpendiculares, en cruz,…)

C. Especificación del número de partes obtenido con cada corte y sus formas

La presencia o no de dichas afirmaciones y el tipo de lenguaje utilizado, nos permite describir la justificación. En la siguiente tabla (tabla 5.34) presentamos las principales afirmaciones dadas por los alumnos con respecto a la solución prevalente (o sea la solución que presenta dos cortes verticales que se intersecan y un corte horizontal que parten el cilindro en ocho partes iguales).

Tabla 5.34: *Tipos de afirmaciones verbales presentadas por los alumnos en referencia a los cortes presentados en la solución*

Dibujo de referencia	Lenguaje	A. Descripción de la posición de los planos de corte	B. Descripción aproximativa del dibujo dado en la solución
	Pertinente	Dos cortes - Desde arriba hacia abajo - Verticales - Por dos planos que contienen el eje de revolución del cilindro	- En cruz - Por (la base/cara de) arriba - Cortes perpendiculares - Planos que se cortan
	No pertinente	- Un corte frontal/vertical y otro horizontal - A lo ancho/ a lo largo	- Mitad del cilindro por un lado
	Pertinente	- Un corte horizontal - Un corte perpendicular al eje de rev. del cilindro	- Por la mitad de la altura
	No pertinente	- Hacia/a lo ancho - Atraviesa por el lado/ a lo largo de la cara rectangular/lateral/por el grueso/trasversal	- Por la mitad/por el medio

La variable relativa a la especificación del "número y forma de las partes" describe la secuencia de los cortes y la relación entre el corte y el número de partes obtenidas. Hemos encontrado las siguientes expresiones:

- Dos partes/dos cilindros, cuatro partes, ocho partes (iguales)
- Cada corte dobla la partes
- El corte horizontal redobla las partes

Observamos que frecuentemente esta descripción es de tipo gráfico (dibujo de las partes obtenidas después del corte).

Para clasificar las justificaciones del ítem nos fijamos en los elementos descriptivos dados en las respuestas, y en la pertinencia del lenguaje utilizado.

Por lo que se refiere a las justificaciones dadas a las respuestas correctas (160 alumnos) dadas al sub-ítem 4a, observamos que 25 alumnos no las argumentan, mientras que los demás dan una argumentación deductivo-informal del procedimiento utilizado para resolver la tarea.

Argumentaciones deductivo-informales basadas en la descripción del procedimiento utilizado para resolver la tarea.

Dichas argumentaciones se refieren a la descripción, más o menos precisa, del procedimiento de partición (o de su resultado) necesario para ejecutar la tarea. Hemos distinguido los siguientes tipos:

- 36 alumnos describen sólo de forma aproximativa la localización de los cortes dada gráficamente en la solución (B) omitiendo una descripción precisa de la posición de los planos de corte y del número de las partes resultantes. Ejemplo (figura 5.104) :

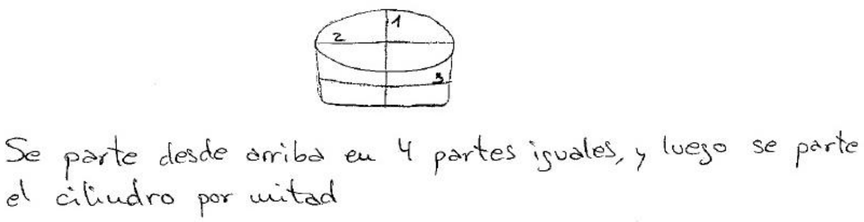


Figura 5.104: Descripción aproximativa de la localización de los cortes

- 62 alumnos describieron correctamente la localización de los cortes (B) y/o el número de las partes obtenidas (C). No describieron de forma precisa la posición de los planos de corte. Ejemplo (figura 5.105):

Figura 5.105: Descripción correcta de la localización de los cortes y descripción correcta del número de las partes obtenidas

- 37 alumnos describieron correctamente la dirección de los cortes (A) y del número de las partes obtenidas (C), frecuentemente apoyándose en elementos gráficos para describir la secuencia de los cortes y las partes resultantes. Ejemplo (figura 5.106):

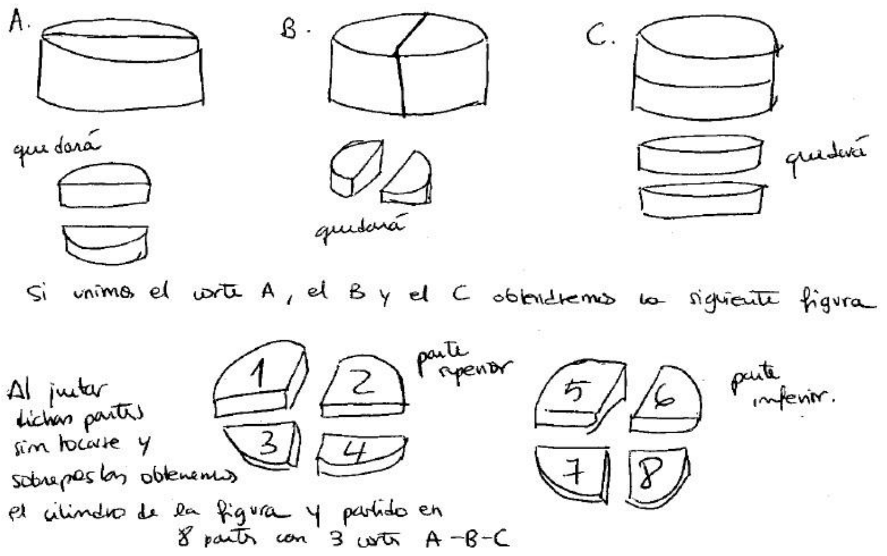


Figura 5.106: Descripción gráfica-verbal correcta de la dirección de los cortes y del número de las partes obtenidas

Por lo que se refiere a las justificaciones dadas a las respuestas incorrectas (56 alumnos) o parcialmente correctas (15 alumnos) dadas al sub-ítem 4a, observamos que emergen los siguientes tipos según las respuestas dadas.

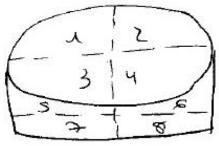
0. Justificaciones basadas en concepciones erróneas

- Argumentación, por medio de una propiedad aritmética, de la imposibilidad de cortar el cilindro en 8 partes con 3 cortes (2), ejemplo (figura 5.107):

Porque simplemente 8 no es multiplo de 3 ni éste divisor de 8.

Figura 5.107: Argumentación con propiedad aritmética infundada

- Justificaciones que no consideran la tridimensionalidad del objeto (cilindro) o la bidimensionalidad de los cortes (65 alumnos)
    - o Descripción del "corte de la representación" considerándola como figura plana (23 alumnos). Esta justificación está relacionada al error descrito en el apartado 4.4. Ejemplo (figura 5.108)



Dándo 1 corte vertical y 2 horizontales hacemo que la planta de divida en 4 y su perfil en otros 4.

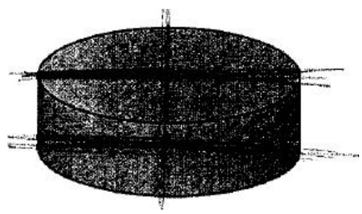
Figura 5.108: Descripción del "corte de la representación"

o Justificación asociada a únicamente los cortes de la base (circulo) (11 alumnos). Ejemplo (figura 5.109):

Porque un círculo partido solo con 3 cortes, el nº máximo de pedazos que obtenemos es 7.

Figura 5.109: Justificación asociada a únicamente los cortes de la base

o Descripción incorrecta de únicamente las direcciones de los cortes (A), que considera los cortes como rectas en lugar de planos (Paralelismo de cortes que son perpendiculares,…), sin explicitar el conteo de los cortes (31 alumnos). Ejemplo (figura 5.110):



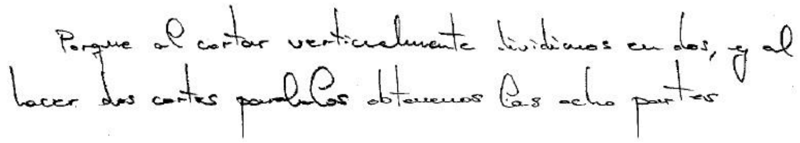

Porque al cortar verticalmente dividimos en dos, y al hacer dos cortes paralelos obtenemos las ocho partes

Figura 5.110: Justificación que considera los cortes como rectas en el plano en lugar de planos en el espacio (paralelismo de cortes que son perpendiculares)

Algunas de las justificaciones a las soluciones correctas (99 alumnos) presentan determinadas secuencias relativas a los cortes. Una primera secuencia se refiere a los cortes verticales primeros, seguidos del corte horizontal y es presentada por 57 alumnos; una segunda secuencia describe primeramente el corte horizontal, seguido de los dos cortes verticales, y es presentada por 35 alumnos; 7 alumnos dan una secuencia que intercala los cortes verticales y horizontales.

5.1.5. Ítem 5 (Cuerpos de revolución)

En la justificación del ítem 5 esperamos que los alumnos argumenten la elección de cada par figura plana y eje de revolución - cuerpo de revolución, presentada en su respuesta. Suponemos que emerjan los dos siguientes argumentos principales:

A. La rotación de un rectángulo sobre su base genera un cilindro: los lados del rectángulo perpendiculares al eje de rotación, rotando, generan las dos bases circulares del cilindro; el lado paralelo al eje de rotación genera la superficie lateral del cilindro; el lado perteneciente al eje de rotación se queda fijo y representa la altura del cilindro.

La rotación de un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos genera un cono: la base del triángulo (el lado perpendicular al eje de rotación) girando, genera la base circular del cono, la hipotenusa del triángulo genera la superficie lateral del cono. El lado del triángulo perteneciente al eje de rotación se queda fijo y representa la altura del cono.

B. El tamaño de las partes que componen la figura plana corresponde con el tamaño de los elementos que componen el respectivo sólido. Por ejemplo, por los casos A-3 y B-4 el radio de la base del cono mide como la base del triangulo (el lado perpendicular al eje de rotación), la altura del cono mide como la altura del triangulo (el lado perteneciente al eje de rotación), la apotema del cono mide como la hipotenusa del triángulo.

Como ya fue observado en el análisis del sub-ítem a) es posible asociar correctamente las representaciones sin conocer el significado de cuerpo de revolución, o sea fijándose únicamente en las secciones longitudinales de los sólidos que contienen el eje de rotación. Siendo triángulos y rectángulos de diferentes proporciones, dicha correspondencia no resulta difícil. Sin embargo, la justificación de este tipo de procedimiento tiene que involucrar la relación entre sección longitudinal del sólido de revolución y figura plana. Por ejemplo se puede afirmar que las figuras planas que rotando generan los sólidos de revolución son la mitad de las secciones longitudinales del respectivo sólido y que contienen el eje de rotación (obtenidas por la intersección de un semiplano generado por el eje de revolución y el sólido). El hecho de que dichas secciones son idénticas deriva de la misma definición de sólido de revolución, y es entonces ya supuesta por hipótesis en el enunciado.

Sin embargo, analizando las respuestas de los alumnos observamos que, en la gran mayoría, sólo replican la información ya presente en el enunciado o presentan conceptos, propiedades o procedimientos muy generales y aislados, que no permiten justificar la respuesta de forma completa.

Además se evidencian errores en la nomenclatura de los objetos tridimensionales mencionados (prisma en lugar de cuerpo de revolución, círculo o circunferencia en lugar de cilindro, esfera en lugar de cono,…), concepciones incorrectas relativas al significado de cuerpo de revolución (el cuerpo girando genera la figura plana) o fuertemente relacionadas a aspectos físico de la rotación (ilusión óptica de la rotación, necesitad de girar el eje,…).

Un análisis más detallado de las justificaciones propuestas por los alumnos nos permite destacar diferentes tipologías de soluciones.

Observamos que las 14 respuestas incorrectas dadas al sub-ítem a) no están justificadas (4 alumnos), son argumentadas con la mera repetición del enunciado (5 alumnos) o aunque tienen una justificación imprecisa permite suponer que se refiere a la solución correcta (diferente a la dada, 3 alumnos). Sólo en dos justificación se puede identificar el motivo del error de la solución a), en estos casos relativo a la falta de considerar las diferentes proporciones en la figura de la misma familia (solo diferencian entre triángulos y rectángulos).

Por lo que se refiere a las justificaciones de las soluciones correctas, identificamos las siguientes tipologías (9 alumnos han dejado la respuesta en blanco):

0. Afirmaciones incorrectas o incompletas:

- Repetición de la información dada en el enunciado

- Justificaciones basadas en concepciones erróneas

1. Explicaciones generales: descripciones de propiedades visuales generales de la tarea
2. Argumentaciones deductivo-informales:

- Descripción del procedimiento utilizado para resolver la tarea

Afirmaciones incompletas: repetición de la información dada en el enunciado

45 alumnos simplemente repiten la información presente en el enunciado para justificar sus respuestas (ejemplo en figura 5.111), y otros 11 añaden condiciones fuertemente relacionadas a aspectos físicos/visuales de la rotación: la figura plana tiene que girar rápidamente (ilusión óptica de la rotación), en una determinada dirección, repetidas veces, tiene que girar sin parar, o bien es necesario girar el eje de la figura plana para permitir su rotación, como se muestra en las figuras 5.112 y 5.113.


Si cada figura se hace girar sobre el eje señalado obtenemos esos cuerpos

Figura 5.111: Repetición de la información dada en el enunciado

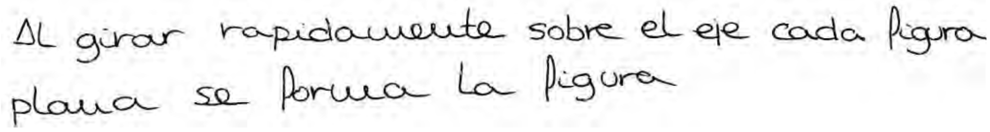

AL girar rapidamente sobre el eje cada figura plana se forma la figura

Figura 5.112: Condición visual de que la figura plana tiene que girar rápidamente

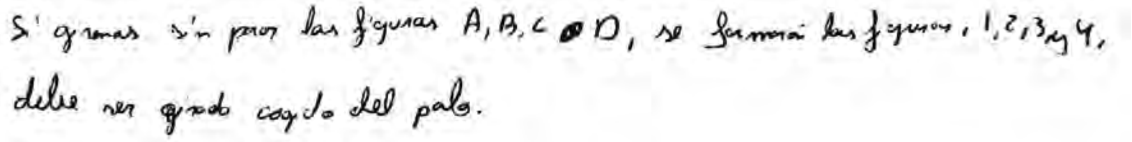

Si giramos sin parar las figuras A, B, C o D, se formarán las figuras 1, 2, 3 y 4, debe ser girado cogido del palo.

Figura 5.113: Condición visual de que la figura plana tiene que girar sin parar cogida del palo

Afirmaciones incorrectas: justificaciones basadas en concepciones erróneas

9 alumnos intentan argumentar la relación que hay entre figura plana y sólido, basándose en una concepción incorrecta de cuerpo de revolución: afirman que el cuerpo, girando, engendra la figura plana. Ejemplo (figura 5.114):

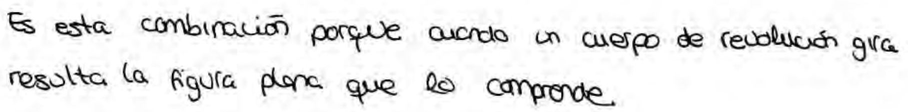

Es esta combinación porque cuando un cuerpo de revolución gira resulta la figura plana que lo comprende.

Figura 5.114: Concepción incorrecta de cuerpo de revolución: el cuerpo, girando, engendra la figura plana

Explicaciones generales: descripciones de propiedades visuales generales de la tarea

- 46 alumnos mencionan conceptos relacionados a propiedades visuales de los objetos involucrados (porque he mirado el perfil, la forma, las dimensiones, el tamaño) sin describirlos. Ejemplo (figura 5.115)

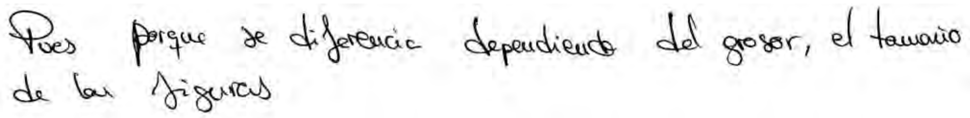

Pues porque se diferencia dependiendo del grosor, el tamaño de las figuras

Figura 5.115: Mención de conceptos aislados: grosor y tamaño.

- 54 alumnos describen propiedades potencialmente correctas pero expresadas con lenguaje impreciso, relacionado a aspectos visuales: se da una relación entre figura plana y cuerpo, afirmando que la figura plana es "la mitad/ un lado/ la parte derecha /el simétrico/…" del cuerpo de revolución. No se mencionan el concepto de "sección". Ejemplos (figura 5.116, figura 5.117)

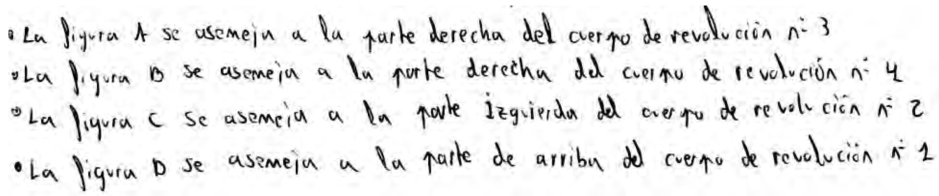

• La figura A se asemeja a la parte derecha del cuerpo de revolución nº 3
• La figura B se asemeja a la parte derecha del cuerpo de revolución nº 4
• La figura C se asemeja a la parte izquierda del cuerpo de revolución nº 2
• La figura D se asemeja a la parte de arriba del cuerpo de revolución nº 1

Figura 5.116: Descripción visual de la relación entre figura plana y cuerpo de revolución

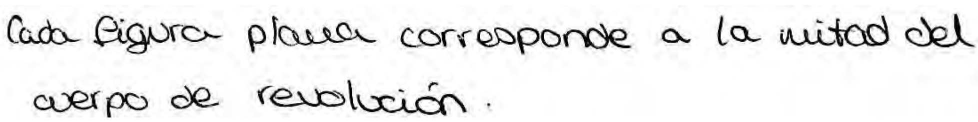
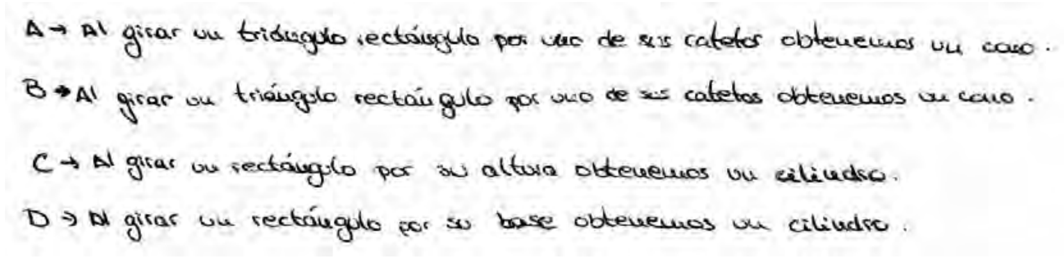

Cada figura plana corresponde a la mitad del cuerpo de revolución.

Figura 5.117: Descripción visual de la relación entre figura plana y cuerpo de revolución

Argumentaciones deductivo-informales: descripción del procedimiento utilizado para resolver la tarea

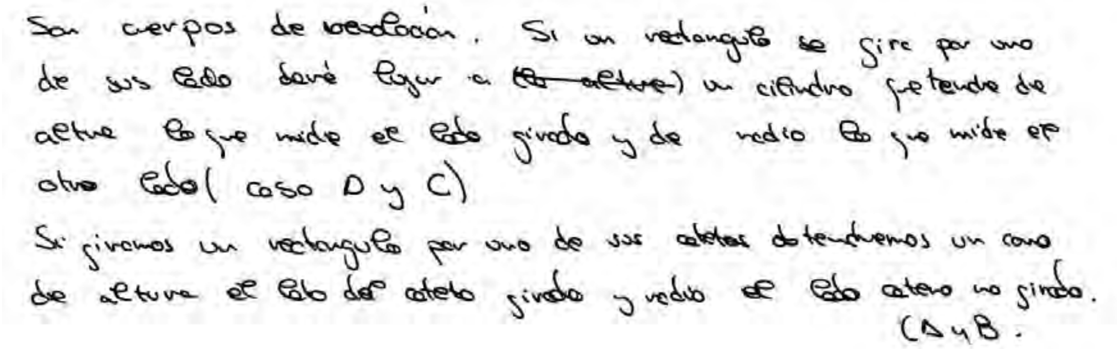
- 16 alumnos argumentan sus soluciones afirmando que la rotación de un rectángulo sobre su base genera un cilindro y la rotación de un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos genera un cono (argumento A, descrito arriba). Ejemplo (figura 5.118)



A → Al girar un triángulo rectángulo por uno de sus catetos obtenemos un cono.
B → Al girar un triángulo rectángulo por uno de sus catetos obtenemos un cono.
C → Al girar un rectángulo por su altura obtenemos un cilindro.
D → Al girar un rectángulo por su base obtenemos un cilindro.

Figura 5.118: Argumentación deductivo-informal basadas en el argumento A

- 34 alumnos dan una justificación deductivo-informal basada en los dos argumentos, A y B, descritos arriba. Entre estos estudiantes 10 sólo justifican uno o dos casos. Ejemplo (figura 5.119)



Son cuerpos de revolución. Si un rectángulo se gira por uno de sus lados dará lugar a ~~(la altura)~~ un cilindro que tendrá de altura lo que mide el lado girado y de radio lo que mide el otro lado (caso D y C)
Si giramos un rectángulo por uno de sus catetos obtendremos un cono de altura el lado del cateto girado y radio el lado catero no girado.
(A y B.

Figura 5.119: Justificación deductivo-informal basada en los dos argumentos, A y B

- Otras (3).

5.1.6. Síntesis de conocimientos sobre justificaciones

El problema que hemos abordado en este apartado es describir los tipos de justificaciones que espontáneamente elaboran los futuros maestros en la resolución de tareas elementales enunciadas de manera gráfica/visual, y que refiere a una situación espacial.

En las justificaciones dadas por los estudiantes emergen interpretaciones de las tareas en términos empíricos, asociadas a validaciones de tipo perceptivo, en las cuales hay una predominancia de la componente visual.

En la siguiente tabla (tabla 5.35) resumimos las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a las tipologías de justificaciones descritas, dadas por los alumnos a las respuestas correctas de los sub-ítems a).

Tabla 5.35: *Frecuencias absolutas (y porcentajes) de las tipologías de justificaciones dadas a las respuestas correctas.*

Tipos de justificaciones de respuestas correctas	**Sub-ítem** 1a'	2a’	3a’	4a’	5a'	Total
0. Afirmaciones incorrectas/incompletas	0 (0)	37 (23)	7 (10)	0 (0)	65 (29)	109 (13)
1. Explicaciones generales	52 (23)	67 (42)	51 (70)	0 (0)	100 (44)	270 (32)
2. Argumentaciones deductivo-informales	174 (77)	38 (24)	7 (9)	135 (84)	53 (23)	407 (48)
3. Pruebas deductivo-formales	0 (0)	0 (0)	5 (7)	0 (0)	0 (0)	5 (1)
Respuesta en blanco	0 (0)	17 (11)	3 (4)	25 (16)	9 (4)	54 (6)
Total	226 (100)	159 (100)	73 (100)	160 (100)	227 (100)	845 (100)

Considerando las justificaciones de tipo 0 (justificaciones basadas en concepciones erróneas, repetición de la información presente en el enunciado, afirmaciones generales sobre el aspecto mental del procedimiento) y de tipo 1 (descripciones de propiedades/condiciones visuales generales de la tarea, descripciones de conceptos, propiedades o procedimientos aislados o incompletos), insuficientes para argumentar las respuestas, se puede observar que solo el 49% de las justificaciones totales dadas a las respuestas correctas se pueden evaluar como pertinentes. La gran mayoría de dichas justificaciones son argumentaciones de tipo deductivo-informales.

En las argumentaciones de tipo deductivo-informales dadas por los alumnos, la sinergia entre lo visual y analítico propia de las tareas está a veces presente de forma implícita: en general para describir conceptos, propiedades y procedimientos visuales el sujeto utiliza un vocabulario cotidiano, cuyos términos de lenguaje se refieren a determinados objetos analíticos. Dicha relación entre los objetos visuales (“ver”) y objetos analíticos (“saber”), aunque no explicitada por el estudiante, le permite no obstante hacer afirmaciones correctas sobre las soluciones presentadas, y justificar sus soluciones

La carencia de pruebas deductivo-formales, con referencias a objetos independientes del contexto y con potencial de generalidad a diferentes situaciones, manifiesta que la interpretación del término “justificar” por parte de los alumnos ha sido estrictamente dependiente al nivel de las tareas (sub-ítems a). La gran mayoría de estudiantes, no relacionan de forma espontánea la justificación de dichas tareas con otros temas más avanzados del currículo correspondiente, como puede ser el dibujo técnico, propiedades de geometría analítica,…

En términos de los tipos de geometrías propuestos por Parzysz (2006), las tareas presentadas en los sub-ítems a) son propias de G1. Sin embargo, el maestro necesita desarrollar un conocimiento especializado del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008; Godino, 2009) que le sirva de base para planificar e implementar su enseñanza, en este caso conocimiento propio del tipo de geometría G2 (proto-axiomática, que involucra objetos teóricos y validaciones hipotético-deductivas).

Este conocimiento le permitirá cumplir una de las finalidades de la enseñanza de la geometría en los niveles educativos obligatorios, consistente en "hacer pasar a los alumnos desde una 'geometría de la observación' a una 'geometría de la demostración'" (Parzysz, 2006, p. 129). Este paso debe hacerse de manera progresiva y conectarse con el desarrollo de conocimientos y capacidades que permita discriminar las relaciones sinérgicas entre lo visual y analítico (Godino et al, 2012), lo que le llevará a un comportamiento más experto en la enseñanza de la geometría en la escuela.

De aquí la necesitad de promover acciones formativas que incluyan una reflexión sistemática sobre la interacción entre las concepciones empíricas de los objetos y acciones visuales (que tienen los alumnos) y sus significados teóricos. Como hemos visto, dicha interacción tiene un papel central en las argumentaciones de las soluciones de tareas sobre visualización de objetos tridimensionales representados en el plano.

5.2. TIPOS DE CONOCIMIENTOS IDENTIFICADOS

En cada uno de los sub-ítems relativos a la identificación de los conocimientos puestos en juego en la tarea a), hemos clasificados los conocimientos identificados por los alumnos en las siguientes categorías:

1 Conocimientos generales (con1)
2. Conceptos/Términos lingüísticos (con2)
3. Propiedades (con3)
4. Procedimientos (con4)
5. Argumentos (con5)

En el Anexo 10 se presentan los diferentes conocimientos para cada ítem y cada categoría.

Los conocimientos generales (con1) son contenidos o habilidades no específicos de la tarea misma, sino que pueden corresponder a todas las tareas del cuestionario. Por esta razón los consideramos aparte, notando el número de dichos conocimientos identificados por un alumno con “#con1”.

Los conocimientos pertenecientes a las demás categorías se consideran válidos, aunque puedan ser expresados con un lenguaje ordinario y a veces ambiguo (ver por ejemplo el término “perspectiva”, capítulo 1, apartado 2.1.3). La suma del número de conocimientos de las categorías 2, 3, 4 y 5 (notado con “sum”) identificados por un alumno se considera un parámetro orientativo del grado de corrección de su respuesta (calificación).

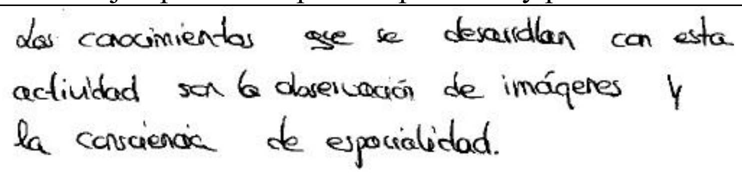
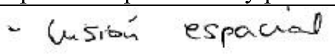
Para cada ítem hemos considerado y calificado los siguientes tipos de respuestas (tabla 5.35):

Tabla 5.35: *Calificación y grado de pertinencia de la respuesta a los sub-ítem b, según los tipos de conocimientos identificados*

Tipos	**Descripción**	**Calificación**	**Grado de pertinencia**
Tipo 0	#con1= 0 y sum=0	Nulo	
Tipo 1	#con1>0 y sum=0 o #con1=0 y sum=1	Muy pobre	0
Tipo 2	sum=1 y #con1≥1	Pobre	
Tipo 3	sum=2	Suficiente	1
Tipo 4	sum=3	Bueno	2
Tipo 5	sum≥4	Muy bueno	

Los ejemplos en la tabla 5.36 muestran algunas soluciones calificadas como muy pobres o pobres, dadas por los alumnos a diferentes sub-ítems.

Tabla 5.36: *Ejemplos de respuestas pobre/muy pobres*

Sub-ítem	Ejemplos de respuestas pobre/muy pobres
1b	 *Figura 5.120*: Ejemplo de respuesta “muy pobre” dada al sub-ítem 1b
2b	 *Figura 5.121*: Ejemplo de respuesta “muy pobre” dada al sub-ítem 2b

	-Perspectiva -Orientación espacial *Figura 5.122*: Ejemplo de respuesta "pobre" dada al sub-ítem 2b
3b	Imaginación, geometría, visualización del espacio. *Figura 5.123*: Ejemplo de respuesta "pobre" dada al sub-ítem 3b
4b	Geometría, visión espacial y matemáticas *Figura 5.124*: Ejemplo de respuesta "pobre" dada al sub-ítem 4b

Para un análisis más fino de las respuestas, dada la gran cantidad de conocimientos de tipo conceptuales identificados por los alumnos, hemos decidido dividirlos en categorías, según su papel en la tarea:

1. Elementales:
   - Básicos: se refieren a conceptos que aparecen de forma explícita en el enunciado de la tarea, en forma verbal o gráfica
   - Descriptivos: términos que describen los conceptos básicos (generalmente de forma perceptiva, relacionada al componente visual)
2. Avanzados: conceptos que no aparecen de forma explícita en el enunciado de la tarea y que se refieren a elementos epistémicos que subyacen a los elementos básicos (componente analítica)
3. Dimensionales: conceptos que se refieren a la dimensión de los objetos involucrados en la tarea
4. Sobre la representación gráfica: se refieren al dibujo y a la técnica de dibujo utilizada

También definimos los siguientes conjuntos y subconjuntos de las categorías de conocimientos identificados por los alumnos:

C= conjunto de los conocimientos conceptuales

P= conjunto de las propiedades;

R= conjunto de los procedimientos;

A partir de estas notaciones identificaremos diferentes sub-categorías de las respuestas calificadas como suficientes, buenas y muy buenas, según las tipologías de los conjuntos de conocimientos reconocidos (prevalencia conceptual, procedimental,…). Cada símbolo de un conjunto representará un elemento de dicho conjunto identificado por el alumno.

5.2.1. Ítem 1 (Vistas)

Como ya se indicó anteriormente el sub-ítem a) ha sido resuelto fácilmente por los alumnos. Esto puede suponer un mayor desafío a la hora de identificar los conocimientos puestos en juegos en la tarea, ya que su resolución no ha necesitado una particular reflexión sobre términos y nociones involucrados en la tarea. Además en el enunciado de la tarea sólo se hace referencia a representaciones de una situación física espacial sin explicitar verbalmente los conceptos que subyacen. Sin embargo, en la representación en perspectiva se representan cuatro "puntos de vista", descritos con flechas que indican la "dirección de mirada" del fotógrafo haciendo la foto en esta posición hipotética. Consideramos estos conceptos presentes de forma gráfica en el enunciado como "básicos" de la tarea.

El procedimiento principal involucrado en la tarea es la coordinación de las vistas, que requiere cambiar mentalmente de perspectiva (imaginarse en otra posición con respecto a los objetos) e interpretar la posición relativa de los objetos en el espacio en relación a la posición de la camara. Los alumnos que hacen referencia a dicho procedimiento lo describen principalmente como "reconocimiento de objetos desde distintas perspectivas".

Resumimos en la tabla 5.37 las frecuencias (y porcentajes) de los diferentes tipos de repuestas relativas a la identificación de los conocimientos puestos en juego en el sub-ítem 1a.

Tabla 5.37: *Frecuencias (y porcentaje) de los tipos de respuestas al sub-ítem 1b (n=241)*

Tipos	**Calificación**	**Frecuencia (%)**
Tipo 0	Nulo	11 (5)
Tipo 1	Muy pobre	63 (26)
Tipo 2	Pobre	41 (17)
Tipo 3	Suficiente	73 (30)
Tipo 4	Bueno	40 (17)
Tipo 5	Muy bueno	13 (5)

Observamos que casi la mitad de los alumnos (48%) contestaron a la pregunta de forma insuficiente, el 30% de forma suficiente y el 22% de forma satisfactoria. La frecuencia de cada conocimiento presente en las respuestas de los alumnos nos proporciona una información suplementaria, que resumimos en la siguiente tabla (tabla 5.38).

Tabla 5.38: *Frecuencias (y porcentajes) de los elementos de conocimiento identificados en el sub-ítem 1b*

<table>
<tr><th>Categoría de conocimiento</th><th colspan="3">Conocimiento</th><th>Frecuencia (% sobre alumnos tot.)</th><th colspan="2">% sobre conoc.tot</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Conceptos</td><td rowspan="5">1. Elementales</td><td rowspan="2">Básicos</td><td>Punto de vista</td><td>24 (10)</td><td rowspan="2">9</td><td rowspan="7">79</td></tr>
<tr><td>Dirección de mirada</td><td>4 (2)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Descriptivos</td><td>Lateralidad</td><td>73 (30)</td><td rowspan="3">56</td></tr>
<tr><td>Perspectiva /s</td><td>64 (27)</td></tr>
<tr><td>Posición de los objetos</td><td>42 (17)</td></tr>
<tr><td>2. Avanzados</td><td colspan="2">Proyecciones</td><td>13 (5)</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3. Dimensionales</td><td colspan="2">Espacio/Plano</td><td>31 (13)</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Propiedades</td><td colspan="3">Forma/posición del obj. depende de la posición del subj.</td><td>18 (7)</td><td colspan="2" rowspan="3">9</td></tr>
<tr><td colspan="3">Forma de objetos</td><td>7 (3)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Conclusión espacial</td><td>3 (1)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Procedimientos</td><td colspan="3">Reconocer objetos desde distintas perspectivas</td><td>20 (8)</td><td colspan="2" rowspan="3">12</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ponerse en diferentes posiciones</td><td>14 (6)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Relacionar dibujos con lo imaginado</td><td>6 (2)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conoc. totales mencionados por los alumnos</td><td>319</td><td colspan="2">100</td></tr>
</table>

De forma general se puede observar que la mayoría de conocimientos encontrados son de tipo conceptual (79% del total de los conocimientos identificados). Los alumnos mencionan términos claves de conceptos involucrados en la tarea, aunque no los definen. Entre estos, los términos más identificados han sido de tipo descriptivo:

- "Lateralidad (del sujeto)/Izquierda, derecha, delante, atrás", identificados por el 30% de los alumnos.

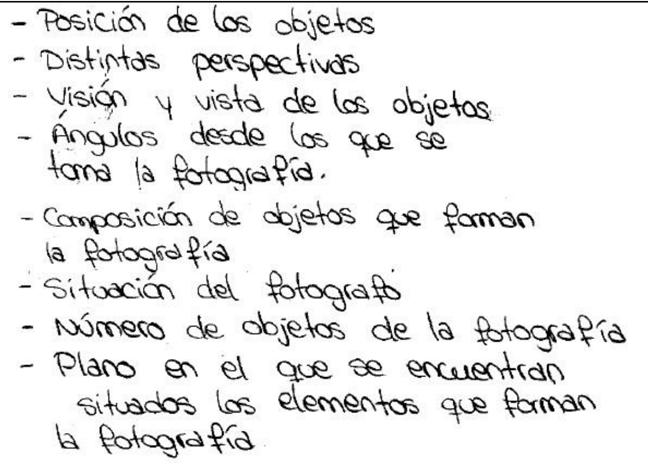
- "Diferentes perspectivas (perspectiva en sentido de campo visual)/ Perspectiva/s / Campos de visión", identificados por el 27% de los alumnos.
- "Posición de los objetos (donde están situados los objetos)/ Posición de los objetos con respectos a otros/ Superposición de los objetos", identificados por el 17 % de los alumnos.

También está presente en las respuestas de los alumnos la referencia a las dimensiones de los objetos involucrados, o sea el concepto de "espacio" relacionado a la situación física representada en perspectiva, y el concepto de "plano" que hace posiblemente referencia a las proyecciones ortogonales (fotografías) dadas en el enunciado.

En la siguiente tabla (tabla 5.39) caracterizamos con más precisión los tipos de respuestas de los alumnos que dieron respuestas suficientes, buenas y muy buenas (tipos 3, 4 y 5).

Tabla 5.39: *Frecuencias de los diferentes sub-tipos de respuestas suficientes, buenas y muy buenas al sub-ítem 1b.*

Tipos	Sub-tipo	Caract[1]	Frec	Ejemplos
Tipo 3	Concept	CC	51	La perspectiva, saber reconocer la posición izquierda, derecha delante, detrás. *Figura 5.125*: Respuesta 1b suficiente, conoc. conceptuales
	Mixto	CP	10	El conocimiento de la perspectiva es el principal que ponemos en juego en esta tarea. Dependiendo desde donde se mire podemos ver una parte u otra de la misma escena. *Figura 5.126*: Respuesta 1b suficiente, conoc. mixtos
		CR	9	
	Otros		3	
Tipo 4	Concept	CCC	17	Los conceptos de delante, detrás, al lado, izquierda, derecha. Distintas perspectivas y puntos de vista. *Figura 5.127*: Respuesta 1b buena, conoc. conceptuales
	Mixto	CCP	6	El conocimiento de la izquierda-derecha, delante-atrás, la percepción de los objetos desde diferentes perspectivas, el conocimiento de la representación en el plano de objetos tridimensionales de forma abstracta, la orientación espacial en el plano.
		CCR	9	
		CPR	2	

		CRR	4	*Figura 5.128*: Respuesta 1b buena, conoc. mixtos
	otros		2	
Tipo5	Concept	CCCC	3	 - Posición de los objetos - Distintas perspectivas - Visión y vista de los objetos - Ángulos desde los que se toma la fotografía. - Composición de objetos que forman la fotografía - Situación del fotografo - Número de objetos de la fotografía - Plano en el que se encuentran situados los elementos que forman la fotografía
	Mixto	CCPR	9	
	otros		1	*Figura 5.129*: Respuesta 1b muy buena, conoc. conceptuales

[1] CC: Se reconocen 2 entidades conceptuales; CP: Se reconocen 1 concepto y 1 propiedad; CR: Se reconocen 1 concepto y 1 procedimiento. Etc.

Observamos que, como ya hemos indicado para el conjunto de la muestra, también la mayoría (71%) de las respuestas consideradas suficientes, buenas y muy buenas presentan como conocimientos únicamente elementos conceptuales, donde prevalen los elementos descriptivos.

Consideramos que las respuestas mixtas de tipo 4 y 5 (30 alumnos) tienen una riqueza de contenido mayor, puesto que presentan conocimientos de dos o más categorías diferentes. Dichas respuestas son el 24% de las respuestas suficientes y únicamente el 12% de las respuestas totales.

5.2.2. Ítem 2 (Sistema diédrico)

En el enunciado del sub-ítem 2a aparecen de forma verbal los conceptos de “vistas”, “alzados” y “planta”, que consideramos como conocimientos básicos de la tarea. Una interpretación descriptiva (visual) de dichos términos involucraría conceptos de punto de vista, vistas desde arriba, adelante e izquierda, mientras que una interpretación analítica haría referencia a conceptos relativos a las proyecciones ortogonales sobre determinados planos.

Los procedimientos visuales principales involucrados en la tarea son la coordinación e integración de las vistas en tres planos perpendiculares (definidos en el apartado 2.1.4 del capítulo 1), que permite la reconstrucción el objeto.

Resumimos en la tabla 5.40 las frecuencias (y porcentajes) de los diferentes tipos de repuestas relativas a la identificación de los conocimientos puestos en juego en el sub-ítem 2a.

Tabla 5.40: *Frecuencias (y porcentaje) de los tipos de respuestas al sub-ítem 2b(n=241)*

Tipos	**Calificación**	**Frecuencia (%)**
Tipo 0	Nulo	23 (9)
Tipo 1	Muy pobre	45 (19)
Tipo 2	Pobre	28 (12)
Tipo 3	Suficiente	81 (33)
Tipo 4	Bueno	31 (13)
Tipo 5	Muy bueno	33 (14)

Observamos que el 40% de los alumnos contestaron a la pregunta de forma insuficiente, el 33% de forma suficiente y el 27% de forma satisfactoria (buena y muy buena). La gran mayoría de los conocimientos identificados se refieren a conceptos o términos lingüísticos, aunque los alumnos solo los nombran sin describirlos.

La frecuencia de la presencia de cada conocimiento en las respuestas de los alumnos nos proporciona una información suplementaria, que resumimos en la siguiente tabla (tabla 5.41)

Tabla 5.41: *Frecuencias (y porcentajes) de los elementos de conocimiento identificados en el sub-ítem 2b*

<table>
<tr><th>Categoría de conocimiento</th><th colspan="3">Conocimiento</th><th>Frecuencia (% sobre alumnos tot.)</th><th colspan="2">% sobre conoc. Tot</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Conceptos</td><td rowspan="5">1: Elementales</td><td>Básicos</td><td>Vistas/ Planta, Alzados</td><td>82 (34)</td><td rowspan="5">59</td><td rowspan="5">84</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Descriptivos</td><td>Polígonos (cuadrado, rectángulo, …)</td><td>33 (14)</td></tr>
<tr><td>Sólido/Volumen/Figura geométrica tridimensional</td><td>15 (6)</td></tr>
<tr><td>Perspectiva/s</td><td>99 (41)</td></tr>
<tr><td>Izquierda, derecha, arriba, abajo, delante, atrás</td><td>25 (10)</td></tr>
</table>

			Posición/posiciones, puntos de vistas	17 (7)		
	2: Avanzados	Perfil		18 (7)	5	
		Proyecciones/planos ortogonales		5 (2)		
	4: Dimensión	Espacio/tres dimensiones		42 (17)	11	
		Plano		9 (4)		
	5. Represent. gráfica	Dibujo/ Dibujo en perspectiva/perspectiva caballera		41 (17)	9	
Procedimientos	Juntar, encajarlas piezas, hacer un puzle/plasmar el objeto/ (integrar las vistas)			27 (11)	16	
	Coordinar, posicionar, organizar, orientar las vistas/ las figuras en el espacio			24 (10)		
	Representar en perspectiva			13 (5)		
	Pasar desde el plano hasta el espacio			11 (5)		
Conoc. totales mencionados por los alumnos				*461*	*100*	

También en este sub-ítem hay una predominancia de elementos conceptuales elementales (59% de todos los conocimientos), relacionados con las representaciones bidimensionales utilizadas en la tarea (vistas, polígonos, perspectiva). También destacamos el concepto de "espacio" (manifestado por el 17% de los alumnos) y del "dibujo en perspectiva", que es asociado a la representación gráfica dada en la respuesta.

No se han manifestados conocimientos relativos a las propiedades involucradas en la tarea.

Observamos que los alumnos se refieren al procedimiento de integración de las vistas utilizan frecuentemente un lenguaje ambiguo: "juntar, encajar las piezas, hacer un puzle", términos que tienen una fuerte componente empírica, relacionada con la construcción física del objeto, y posiblemente asociada a la concepción errónea, ya evidenciada en las justificaciones, de que las tres vistas sean las "caras" del objeto.

Resumimos en la siguiente tabla (tabla 5.42) las frecuencias de los diferentes sub-tipos de respuestas suficientes, buenas y muy buenas dadas al sub-ítem 2b.

Tabla 5.42: *Frecuencias de los diferentes sub-tipos de respuestas suficientes, buenas y muy buenas al sub-ítem 2b*

Tipos	**Sub-tipo**	**Caract.**	**Frec.**	**Ejemplos**

Tipo 3	Concept	CC	56	Los conceptos de las perspectivas de los objetos, planta y alzados. *Figura 5.130*: Respuesta 2b suficiente, conoc. conceptuales
	Mixto	CR	20	- Debemos conocer cual es la planta y alzado de la figura - Saber dibujar la figura en perspectiva para que tenga visibilidad en todas las vistas. *Figura 5.131*: Respuesta 2b suficiente, conoc. mixtos
	Proced	RR	5	1. translado de un cuerpo plano a uno tridimensional. 2. Percibir la perspectiva. 3. Orientación en un plano. 4. Representación en el papel de lo pensado *Figura 5.132*: Respuesta 2b suficiente, conoc. procedimentales
Tipo 4	Concept	CCC	20	- Espacialidad - Significado de planta y alzado, que son términos bastantes concretos - Saber dibujar en perspectiva - Tener consciencia del volumen *Figura 5.133*: Respuesta 2b buena, conoc. conceptuales
	Mixto	CCR	10	Observación, conocimiento de conceptos (planta - alzado), enseñar como dibujar en proyección, observar, encajar las piezas como en un puzzle, realización visual de la figura. mental *Figura 5.134*: Respuesta 2b buena, conoc. procedimentales
		RRC	1	
Tipo5	Concept	CCCC(C)	17	Se ponen en juego los conceptos: Perfil, Alzado, Planta, perspectiva, visión espacial, espacio, derecha, izquierda, frente, detrás, figura, cuadrado y rectángulo. *Figura 5.135*: Respuesta 2b muy buena, conoc. conceptuales
	Mixto	R(R)CCC	16	Ver figura 5.136

En este sub-ítem también destacamos la preponderancia de conocimientos de tipo conceptuales en las respuestas suficientes, buenas y muy buenas. El aspecto procedimental también está presente, aunque en menor grado, y es descrito de forma aproximada, como se muestra en la siguiente respuesta (figura 5.136).

En esta tarea se ponen en juego conocimientos tales como: la visualización de una serie de vistas (alzado, planta y perfil) y su diferente organización para conseguir formar una figura coherente con todas ellas. Este es el conocimiento más general que se utiliza en la resolución de esta actividad. Además, para poder resolverla necesitamos tener unos conocimientos mínimos sobre cada una de las vistas refiriéndome con esto a conocerlas, saber identificarlas, conocer desde que perspectiva podemos observarlas...
El alumno debe ser capaz de situar mentalmente todas estas vistas formando una figura coherente en sus dimensiones con respecto a las vistas proporcionadas.

Figura 5.136: Respuesta 2b muy buena, conoc. mixtos

5.2.3. Ítem 3 (Desarrollos)

El sub-ítem 3a presenta como conocimientos básicos el concepto de "cubo" y de "desarrollo", términos presentes en el enunciado de la tarea. En la resolución de la tarea emergen propiedades visuales y analíticas de dichos conceptos, así como el procedimiento de "plegar/desplegar" asociado al reconocimiento de los desarrollos. La sinergia "analítico-visual" está presente en cada uno de dichos conocimientos, como ya fue ilustrado en el apartado 4.3.1 del capítulo 2.

Resumimos en la tabla 5.43 las frecuencias (y porcentajes) de los diferentes tipos de repuestas del sub-ítem 3b, relativas a la identificación de los conocimientos puestos en juego en el sub-ítem 3a.

Tabla 5.43: *Frecuencias (porcentaje) de los tipos de respuestas al sub-ítem 3b*

Tipos	Calificación	Frecuencia (%)
Tipo 0	Nulo	17 (7)
Tipo 1	Muy pobre	68 (28)
Tipo 2	Pobre	34 (14)
Tipo 3	Suficiente	68 (28)
Tipo 4	Bueno	36 (15)
Tipo 5	Muy bueno	18 (8)

Observamos que casi la mitad de los estudiantes (49%) contestaron a la pregunta de forma insuficiente, evocando únicamente conocimientos muy generales (por ejemplo: geometría,…) o relativos al aspecto mental de la tarea (conocimiento de tipo 1: imaginación, percepción espacial,…); el 28% contestaron de forma suficiente y el 23% de forma satisfactoria.

La frecuencia de la presencia de cada conocimiento en las respuestas de los alumnos nos proporciona una información suplementaria, que resumimos en la tabla 5.44.

Tabla 5.44: *Frecuencias (y porcentajes) de los elementos de conocimiento identificados en el sub-ítem 3b*

<table>
<tr><th>Categoría de conocimiento</th><th colspan="3">Conocimiento</th><th>Frecuencia (% sobre alumnos tot.)</th><th colspan="2">% sobre conoc. Tot</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Conceptos</td><td rowspan="5">1:Elem.</td><td rowspan="2">Básicos</td><td>Desarrollo</td><td>49 (20)</td><td rowspan="2">34</td><td rowspan="7">72</td></tr>
<tr><td>Cubo</td><td>85 (35)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Descrip.</td><td>Componentes desarrollo/cubo (cuadrados, lados, caras, aristas,…)</td><td>36 (15)</td><td rowspan="3">31</td></tr>
<tr><td>Perspectiva/Vista</td><td>42 (17)</td></tr>
<tr><td>Posiciones/Orientaciones/Direcciones</td><td>46 (19)</td></tr>
<tr><td>2: Avanz.</td><td colspan="2">Superficie</td><td>5 (2)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3: Dimen.</td><td colspan="2">Espacio/tres dimensiones</td><td>22 (9)</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Propiedades</td><td colspan="3">Propiedades del cubo: el cubo tiene 6 caras,..</td><td>17 (7)</td><td colspan="2" rowspan="2">7</td></tr>
<tr><td colspan="3">Existencia de diferente desarrollos posibles</td><td>10 (4)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Procedimientos</td><td colspan="3">Reconstruir/Construir/Formar el cubo (a partir del desarrollo)</td><td>56 (23)</td><td colspan="2" rowspan="3">21</td></tr>
<tr><td colspan="3">Doblar/Plegar/Juntar los lados (del desarrollo)</td><td>11 (4)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desplegar/Desarrollar/Descomponer un cubo</td><td>17 (7)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conoc. totales mencionados por los alumnos</td><td>396</td><td colspan="2">100</td></tr>
</table>

En general, podemos observar que la mayoría de los conocimientos identificados se refieren a conceptos básicos presentes en el enunciado (cubo, desarrollos) o conceptos que utilizan para dar una descripción de su estructura espacial (componentes, orientación,…).

Analizando las respuestas observamos que el concepto de "perspectiva" es posiblemente asociado a la imagen mental de la figura del cubo a las cuales se apoyan en el momento de resolver la tarea.

Las pocas propiedades mencionadas por los alumnos describen únicamente algunas características del cubo (formas y número de caras) sin hacer referencia a sus correspondientes propiedades después de la acción de "desarrollar" (invariantes).

El 21% de los conocimientos identificados se refieren a elementos procedimentales, aunque la mayoría solo mencionan la acción general de reconstruir/construir/formar el cubo. Sólo el 11% de los estudiantes consiguen explicitar la forma con la cual asocian los desarrollos al cubo, o sea plegando/desplegando la superficie.

En la tabla 5.45 presentamos las frecuencias de los diferentes sub-tipos de respuestas suficientes, buenas y muy buenas dadas al sub-ítem 3b.

Tabla 5.45: *Frecuencias de los diferentes sub-tipos de respuestas suficientes, buenas y muy buenas al sub-ítem 3b*

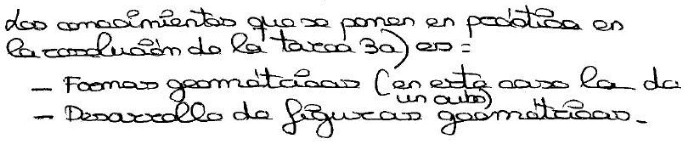
<table>
<tr><th>Tipos</th><th>Sub-tipo</th><th>Caract.</th><th>Frec.</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tipo 3</td><td>Concept</td><td>CC</td><td>37</td><td>

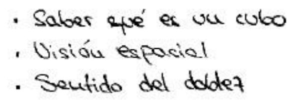
Figura 5.137: Respuesta 3b suficiente, conoc. conceptuales</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Mixto</td><td>CR</td><td>18</td><td rowspan="3">

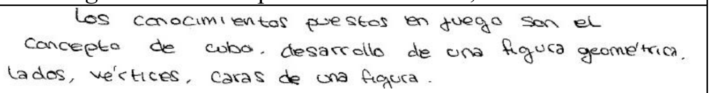
Figura 5.138: Respuesta 3b suficiente, conoc. mixtos</td></tr>
<tr><td>CP</td><td>6</td></tr>
<tr><td>PR</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Tipo 4</td><td>Concept</td><td>CCC</td><td>13</td><td>

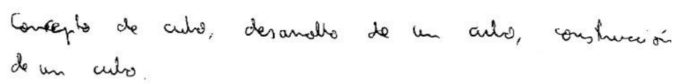
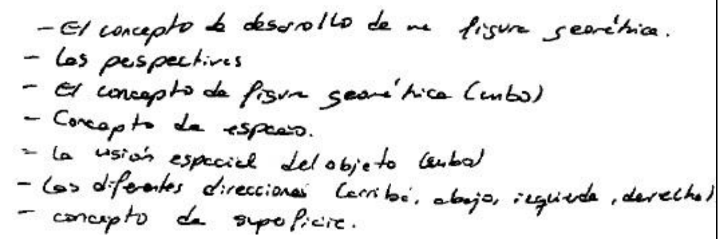
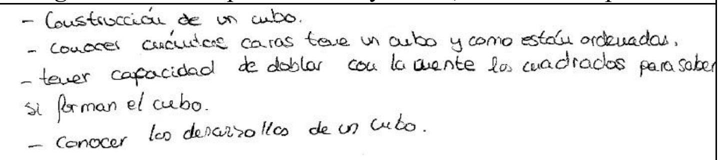
Figura 5.139: Respuesta 3b buena, conoc. conceptuales</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Mixto</td><td>CCR</td><td>13</td><td rowspan="4">

Figura 5.140: Respuesta 3b buena, conoc. mixtos</td></tr>
<tr><td>CCP</td><td>3</td></tr>
<tr><td>CRR</td><td>3</td></tr>
<tr><td>CPR</td><td>4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Tipo5</td><td>Concept</td><td>CCCC(C)</td><td>5</td><td>
- El concepto de desarrollo de una figura geométrica.
- Las perspectivas
- El concepto de figura geométrica (cubo)
- Concepto de espacio.
- La visión espacial del objeto (cubo)
- Las diferentes direcciones (arriba, abajo, izquierda, derecha)
- concepto de superficie.
Figura 5.141: Respuesta 3b muy buena, conoc. conceptuales</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mixto</td><td>CCCR(R)</td><td>7</td><td rowspan="2">
- Construcción de un cubo.
- conocer cuántas caras tiene un cubo y como están ordenadas.
- tener capacidad de doblar con la mente los cuadrados para saber si forman el cubo.
- Conocer los desarrollos de un cubo.
Figura 5.142: Respuesta 3b muy buena, conoc. mixtos</td></tr>
<tr><td>CC(C)PR</td><td>5</td></tr>
</table>

5.2.4. Ítem 4 (Secciones de un objeto)

El enunciando de la tarea 4a "¿Cómo podemos partir este cilindro en 8 partes dando solo 3 cortes?" presenta los conceptos básicos de "cilindro", que se refiere a la figura representada gráficamente, "partes", "cortes" y sus cantidades ("números de partes/cortes"), así como el procedimiento de "partir" el cilindro.

Una interpretación empírica del concepto visual "corte" y de la acción visual "partir" hace referencia a la realización de cortes físicos en un objeto material, mientras que una interpretación analítica de dicho términos involucra conceptos como "planos de cortes", "secciones",…

Resumimos en la tabla 5.46 las frecuencias (y porcentajes) de los diferentes tipos de repuestas relativas a la identificación de los conocimientos puestos en juego en el sub-ítem 4a.

Tabla 5.46: *Frecuencias (porcentaje) de los tipos de respuestas al sub-ítem 4b*

Tipos	**Calificación**	**Frecuencia (%)**
Tipo 0	Nulo	55 (23)
Tipo 1	Muy pobre	66 (27)
Tipo 2	Pobre	27 (11)
Tipo 3	Suficiente	55 (23)
Tipo 4	Bueno	22 (9)
Tipo 5	Muy bueno	16 (7)

Observamos que el 61% de los alumnos contestaron a esta pregunta de forma insuficiente, la mayoría evocando únicamente conocimientos generales relativos al aspecto mental de la tarea (imaginación, percepción espacial,…). El 23% contestaron de forma suficiente y sólo el 16% de forma satisfactoria (respuestas buena y muy buena).

Resumimos en la tabla 5.47 la frecuencia de cada conocimiento presente en las respuestas de los alumnos.

Tabla 5.47: *Frecuencias (y porcentajes) de los elementos de conocimiento identificados en el sub-ítem 4b*

<table>
<tr><th>Categoría de conocimiento</th><th colspan="3">Conocimiento</th><th>Frecuencia (% sobre alumnos tot.)</th><th colspan="2">% sobre conoc.tot</th></tr>
<tr><td rowspan="12">Conceptos</td><td rowspan="6">1. Elementales</td><td rowspan="4">Básicos</td><td>Cilindro</td><td>26 (11)</td><td rowspan="4">19</td><td rowspan="12">60</td></tr>
<tr><td>Partes/Trozos</td><td>18 (7)</td></tr>
<tr><td>Cortes</td><td>9 (4)</td></tr>
<tr><td>Números</td><td>9 (4)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Descriptivos</td><td>Perspectiva</td><td>17 (7)</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>Formas/Figuras geométricas</td><td>15 (6)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. Avanzados</td><td colspan="2">Fracción /Parte de un todo</td><td>39 (16)</td><td rowspan="4">18</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rectas</td><td>8 (3)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Planos</td><td>6 (2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Horizontal/Vertical</td><td>6 (2)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3. Dimensionales</td><td colspan="2">Espacio/Tridimensional</td><td>23 (9)</td><td rowspan="2">13</td></tr>
<tr><td colspan="2">Volumen</td><td>18 (7)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Propiedades</td><td colspan="3">Proporcionalidad/Proporción</td><td>23 (9)</td><td colspan="2" rowspan="3">11</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cortar por el medio genera 2 partes/Doble/Mitad</td><td>10 (4)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Perpendicularidad</td><td>3 (1)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Procedimientos</td><td colspan="3">Partes-Todo: Partir/Dividir; División /Partición</td><td>72 (30)</td><td colspan="2" rowspan="4">29</td></tr>
<tr><td colspan="3">Suma</td><td>10 (4)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Multiplicación</td><td>8 (3)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Minimizar el número de cortes</td><td>2 (1)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conoc. totales mencionados por los alumnos</td><td>322</td><td colspan="2">100</td></tr>
</table>

La identificación de conocimientos de tipo procedimental evidencia el papel central que juega la acción de “partir” en la tarea. El término “fracción” se puede referir bien a la partición del cilindro que genera “partes de un todo”, o bien a la idea de división entre números naturales que se obtiene (con un corte tenemos dos medios de cilindro, con 2 cortes tenemos 4 cuartos de cilindro,…). Se observe que este último aspecto puede ser relacionado con las representaciones de fracciones dadas frecuentemente en la escuela primaria, como trozos de una tarta. Sin embargo, muy pocos alumnos dan un significado o una explicación al término “fracción” identificado como conocimiento presente en la tarea. A continuación presentamos dos ejemplos (figura 5.143 y 5.144):

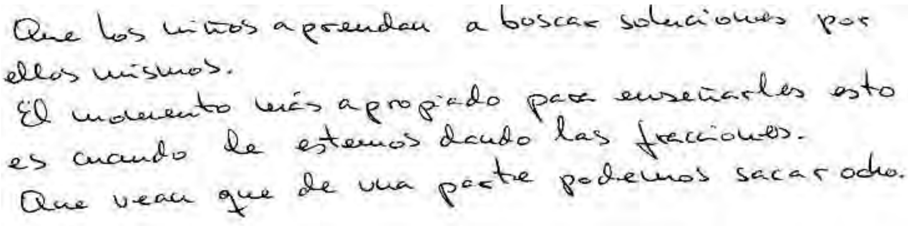

Que los niños aprendan a buscar soluciones por ellos mismos.
El momento más apropiado para enseñarles esto es cuando le estemos dando las fracciones.
Que vean que de una parte podemos sacar ocho.

Figura 5.143: Presencia del término “fracción” en una respuesta 4b

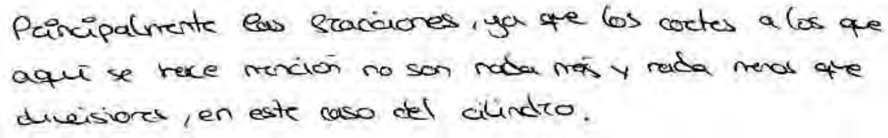

Principalmente las fracciones, ya que los cortes a los que aquí se hace mención no son nada más y nada menos que divisiones, en este caso del cilindro.

Figura 5.144: Presencia del término “fracción” interpretado como “división” en una respuesta 4b

También el término “perspectiva” puede dar lugar a múltiples interpretaciones, como ya hemos visto anteriormente. Suponemos que en esta tarea sea considerado, o bien en términos de vista espacial, que permite imaginar los cortes en tres dimensiones, o bien con referencia a la técnica de dibujo que permite interpretar la representación del cilindro y dibujar correctamente los cortes (figura 5.145)


Perspectiva, a la hora de realizar el dibujo

Figura 5.145: Presencia del término “perspectiva” como técnica de dibujo, en una respuesta 4b

Observamos que el 9% de alumnos identificaron el término “proporción”, aunque ninguno lo asocia a un determinado significado. En el contexto de la tarea, podemos suponer que sea asociada a la disposición o correspondencia debida de las partes del cilindro con el cilindro en su globalidad (y por tanto estar también relacionada con el binomio “parte/todo”).

Otro significado pertinente podría ser relativo a la equivalencia entre fracciones, o sea: 1= 2*1/2=4*1/4=8*1/8. (Igualdad de razones).

También podría estar relacionado con el concepto, en general incorrecto, de proporcionalidad (directa) entre cortes y partes, implícitamente ya presente en algunas de las justificaciones.

En la siguiente tabla (tabla 5.48) caracterizamos los tipos de respuestas de los alumnos que dieron respuestas suficientes, buenas y muy buenas (tipos 3, 4 y 5).

Tabla 5.48: *Frecuencias de los diferentes sub-tipos de respuestas suficientes, buenas y muy buenas al sub-ítem 4b*

Tipos	**Sub-tipo**	**Caract.**	**Frec.**	**Ejemplos**
Tipo 3	Concept	CC	21	Entender bien lo que es 1 cilindro, cómo se forma, cómo se puede descomponer. *Figura 5.146*: Respuesta 4b suficiente, conoc. conceptuales
	Mixto	CR	23	- Proporcionalidad. - División. *Figura 5.147*: Respuesta 4b suficiente, conoc. mixtos
		CP	4	
		PR	3	
	Proced	RR	4	Geometría, divisiones y sumas. *Figura 5.148*: Respuesta 4b suficiente, conoc. procedimentales
Tipo 4	Concept	CCC	2	Los conocimientos puestos en juego son el concepto de cilindro. Saber que son partes, fracciones ... *Figura 5.149*: Respuesta 4b buena, conoc. concept
	Mixto	CCR	11	- la proporcionalidad. - la fracción. - planos. *Figura 5.150*: Respuesta 4b buena, conoc. mixtos
		CCP	3	
		CRR	3	
		CPR	3	
Tipo5	Mixto	CCC(C) P/R	8	- Superficie de revolución. - Elementos de dicha superficie como eje de revolución. - Planos de corte: - Perpendicular (vertical) - Horizontal - Las secciones planas que son las producidas por los planos de corte. *Figura 5.151*: Respuesta 4b muy buena, conoc. mixtos
		CCC(C) PR	5	
		C(CC)R R(R)	3	

5.2.5. Ítem 5 (Cuerpos de revolución)

El sub-ítem 5a presenta en el enunciado diferentes elementos conceptuales (básicos) y procedimentales: "figura plana", "cuerpo de revolución", "eje", "engendrar", "girar", "corresponder".

Como ya se ha observado anteriormente, aunque no conociendo el significado de cuerpo de revolución, un alumno puede asociar correctamente las representaciones fijándose únicamente en las secciones longitudinales de los sólidos que contienen el eje de rotación. Destacamos entonces la importancia que tiene en esta tarea una de las propiedades del sólido de revolución: las figuras planas que rotando generan los sólidos de revolución son mitad de las secciones longitudinales del respectivo sólido que contienen el eje de rotación.

Resumimos en la tabla 5.49 las frecuencias (y porcentajes) de los diferentes tipos de repuestas del sub-ítem 4b, relativas a la identificación de los conocimientos puestos en juego en el sub-ítem 4a.

Tabla 5.49: *Frecuencias (y porcentaje) de los tipos de respuestas al sub-ítem 5b*

Tipos	**Calificación**	**Frecuencia (%)**
Tipo 0	Nulo	27 (11)
Tipo 1	Muy pobre	63 (26)
Tipo 2	Pobre	33 (14)
Tipo 3	Suficiente	61 (25)
Tipo 4	Bueno	37 (16)
Tipo 5	Muy bueno	20 (8)

Observamos que en esta tarea más de la mitad de los alumnos (51%) contestaron de forma insuficiente. El 25% contestaron de forma suficiente evocando principalmente conceptos elementares (básicos y/o descriptivos). El restante 24% contestó de forma buena o muy buena.

En la siguiente tabla (tabla 5.50) resumimos la frecuencia de cada conocimiento presente en las respuestas de los alumnos.

Tabla 5.50: *Frecuencias (y porcentajes) de los elementos de conocimiento identificados en el sub-ítem 5b*

Categoría de conocimiento	**Conocimiento**			**Frecuencia (% sobre alumnos tot.)**	**% sobre conoc.tot**	
Conceptos	**1.**	Básicos	Cuerpo de rev.	54 (22)		76

	Elementales		Figura plana	29 (12)	28	
			Eje	27 (11)		
		Descriptivos	Formas/Figuras geométricas	42 (17)	19	
			Movimiento/Velocidad	20 (8)		
			Perspectiva	12 (5)		
	2. Avanzados	Cono/Cilindro/Cuerpo geom./Volumen		43 (18)	21	
		Eje de revolución/de simetría		13 (5)		
		Lados/altura/Diámetro/Radio		13 (5)		
		Triángulos/Rectángulos/Polígonos		12 (5)		
		Generatriz/Sección		3 (1)		
	3. Dimensionales	Espacio/3Dimensiones		31 (13)	8	
Propiedades	Simetría			21 (9)	7	
	Mitad/Doble			5 (2)		
	Otras(Relación entre tamaños /Proporciones (2D y 3D)/ Posición del eje)			3 (1)		
Procedimientos	Girar/giro (de polígonos sobre un eje)			44 (18)	17	
	Hacer una correspondencia/Relacionar			15 (6)		
	Pasar desde 2D hasta 3D/Construir un cuerpo a partir de una figura plana			10 (4)		
Conoc. totales mencionados por los alumnos				*396*	*100*	

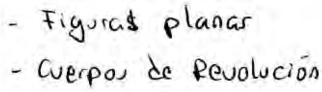
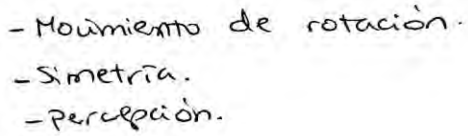
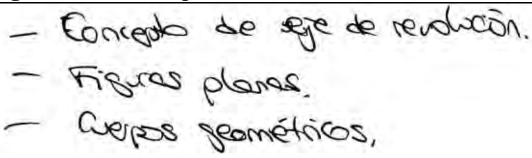
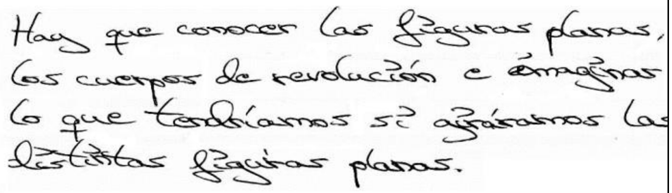
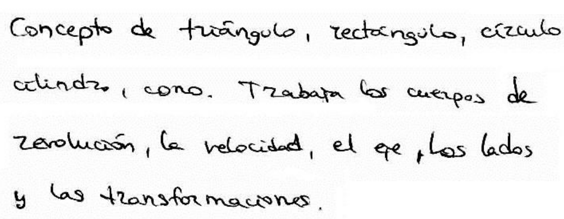
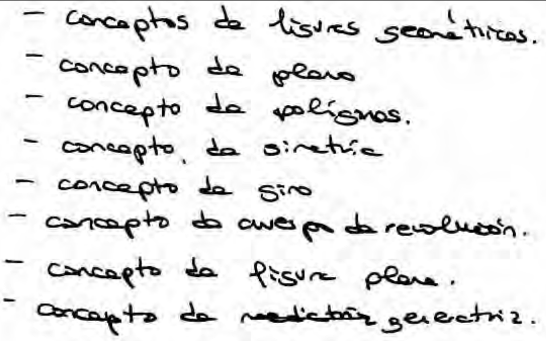
Los conocimientos más frecuentes en las respuestas de los estudiantes se refieren a los términos presentes en el enunciado y a la nomenclatura de los cuerpos de revolución representados en la figura (cilindro, cono).

La falta de descripción de los términos identificados por parte de los alumnos nos ha dado dificultades a la hora de interpretar su pertinencia y significado.

Por ejemplo, suponemos que los términos “simetría” y “mitad/doble” indicados por los estudiantes se refieren a la propiedad central de los sólidos de rotación mencionada anteriormente, aunque es probable que sean emergidos simplemente de la observación de las similitudes de las figuras presentadas en el enunciados y así interpretados de forma imprecisa (ver las justificaciones). Esto hecho se refleja también en la caracterización que dan algunos alumnos del “eje” (nombrado en el enunciado y representado en la figura) como “eje de simetría”.

En la tabla 5.51 resumimos las frecuencias de los diferentes sub-tipos de respuestas suficientes, buenas y muy buenas dadas al sub-ítem 3b.

Tabla 5.51: *Frecuencias de los diferentes sub-tipos de respuestas suficientes, buenas y muy buenas al sub-ítem 5b*

Tipos	Sub-tipo	Caract	Frec	Ejemplos
Tipo 3	Concept	CC	40	 *Figura 5.152*: Respuesta 5b suficiente, conoc. conceptuales
	Mixto	CR	15	 *Figura 5.153*: Respuesta 5b suficiente, conoc. mixtos
		CP	5	
		PR	1	
Tipo 4	Concept	CCC	14	 *Figura 5.154*: Respuesta 5b buena, conoc. conceptuales
	Mixto	CCR	12	 *Figura 5.155*: Respuesta 5b buena, conoc. mixtos
		CCP	3	
		CRR	2	
		CPR	4	
		RRP	1	
		PPR	1	
Tipo5	Concept	CCCC(CC)	5	 *Figura 5.156*: Respuesta 5b muy buena, conoc. conceptuales
	Mixto	CCC(C)P/R	6	 *Figura 5.157*: Respuesta 5b muy buena, conoc. mixtos
		CCC(C)PR	6	
		CC(C)RR(P)	3	

Observamos que en algunas de las respuestas buenas y muy buenas emergen interesantes conocimientos conceptuales avanzados, propios de la tarea, como el concepto de generatriz y de sección.

5.2.6. Síntesis de conocimientos identificados

A nivel global observamos que el grupo de alumnos ha conseguido identificar un interesante conjunto de conocimientos puestos en juegos en las tareas visuales seleccionadas. Resumimos en las siguientes tablas los conceptos (tabla 5.52), propiedades (tabla 5.53) y procedimientos (tabla 5.54) principales identificados por los alumnos en los diferentes ítems.

Tabla 5.52 *Conceptos/términos lingüísticos principales identificados por los alumnos en los diferentes sub- ítems b)*

Conceptos	**Sub ítems b**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Dirección de mirada	x				
Proyecciones/planos ortogonales	x	x			
Lateralidad/derecha, izquierda, arriba, abajo, delante, atrás	x	x			
Punto de vista	x	x			
Plano/2 dimensiones	x	x			
Posición/posiciones	x	x	x		
Espacio/3 dimensiones	x	x	x	x	x
Perspectiva/s	x	x	x	x	x
Dibujo/ dibujo en perspectiva/perspectiva caballera		x			
Vistas/ planta, alzados, perfil		x	x		
Polígonos/figuras planas (cuadrado, rectángulo, triangulo,…)		x	x		x
Sólido/volumen (cubo, cilindro, cono, cilindro)		x	x	x	x
Componentes sólidos (caras, aristas,…)			x		
Desarrollo			x		
Componentes figura plana (lados, alturas, diámetro, radio)			x		x
Partes (de un todo) /trozos/fracciones				x	
Cortes/plano de corte				x	
Números				x	
Rectas				x	
Horizontal/vertical				x	
Formas/figuras geométricas				x	x
Cuerpo de revolución					x
Eje/eje de revolución/eje de simetría					x
Movimiento/velocidad					x
Generatriz/sección					x

Tabla 5.53 *Propiedades principales identificadas por los alumnos en los diferentes sub-ítems b)*

Propiedades	**Ítems**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Forma/posición del obj. depende de la posición del subj.	x				
Propiedades del cubo: el cubo tiene 6 caras,..			x		
Existencia de diferente desarrollos posibles			x		
Proporcionalidad/proporción				x	
Cortar por el medio genera 2 partes/doble/mitad				x	
Perpendicularidad				x	
Simetría					x
Mitad/doble					x

Tabla 5.54: *Procedimientos principales identificados por los alumnos en los diferentes sub- ítems b)*

Procedimientos	**Ítems**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Reconocer objetos desde distintas perspectivas	x				
Ponerse en diferentes posiciones	x				
Relacionar dibujos con lo imaginado	x				
Juntar, encajarlas piezas, hacer un puzle/plasmar el objeto		x			
Coordinar, posicionar, organizar, orientar las vistas/ las figuras en el espacio		x			
Representar en perspectiva		x			
Pasar desde 2d hasta 3d/construir un cuerpo a partir de una figura plana		x			x
Reconstruir/construir/formar el cubo (a partir del desarrollo)			x		
Doblar/plegar/juntar los lados (del desarrollo)			x		
Desplegar/desarrollar un cubo			x		
Partir/dividir; división /partición (partes-todo)				x	
Suma/Multiplicación				x	
Minimizar el número de cortes				x	
Girar/giro (de polígonos sobre un eje)					x

Sin embargo, analizando los cuestionarios de forma singular, observamos que a nivel individual los alumnos tienen un muy pobre conocimiento especializado relacionado a la identificación de conocimientos presentes en las tareas dadas.

En la tabla 5.55 y en la figura 5.158 presentamos la distribución de los valores relativos a la puntación total de la variable "grado de pertinencia" de las respuestas sobre el reconocimientos de los conocimientos (conocimiento especializado), su frecuencia (porcentaje) y la valoración que le atribuimos.

Tabla 5.55: *Frecuencia (porcentaje) y valoración de la puntación total relativa al conocimiento especializado sobre la identificación de conocimientos*

Total Conoc. Especializado (identific. conoc.)	Frec (%)	Valoración
10	3 (1)	Muy bueno
9	9 (4)	
8	12 (5)	Bueno
7	15 (6)	
6	19 (8)	Suficiente
5	23 (10)	
3-4	59 (24)	Pobre
1-2	73 (30)	Muy pobre
0	28 (12)	Nulo

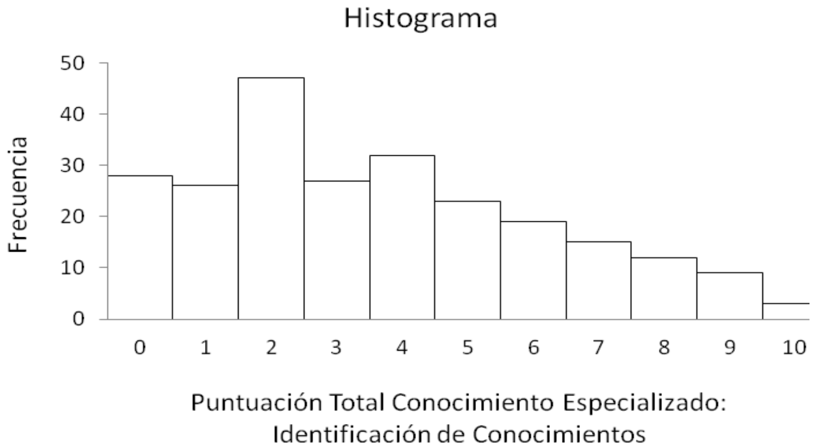


Figura 5.158: Histograma de la puntuación total relativa al Conocimiento Especializado sobre la identificación de Conocimientos

En la Tabla 5.56 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a los valores de la variable del grado de corrección de la respuesta.

Tabla 5.56: *Frecuencias absolutas (porcentajes) de las respuestas a los sub-ítems tipo b* (n=241)

Grado de pertinencia	Ítem				
	1b	2b	3b	4b	5b
Pertinente	53 (22)	64 (26)	54 (23)	38 (16)	57 (24)
Parcialmente pertinente	73 (30)	81 (34)	68 (28)	55 (23)	61 (25)
No pertinente	104 (43)	73 (30)	102 (42)	93 (38)	96 (40)
En blanco	11 (5)	23 (10)	17 (7)	55 (23)	27 (11)

Estos resultados muestran muy pobre conocimiento especializado relacionado con la identificación de conocimientos en todas las respuestas.

La puntuación media de todo el grupo relacionada con la variable del grado de corrección de la respuesta (conocimiento especializado del contenido sobre la identificación de conocimientos) es solo de 3,6 (sobre 10). Observamos que en estos sub-ítems la media de las chicas (3,7) es ligeramente mayor que la media de los chicos (3,2); esta diferencia no es estadísticamente significativa (valor P= 0,139962).

5.3. VARIACIONES PROPUESTAS PARA LAS TAREAS

Entre las variaciones de las tareas propuestas por los alumnos distinguimos tres categorías: variaciones no pertinentes, variaciones pertinentes pero imprecisas, variaciones pertinentes, según del tipo de cambio elaborado y su coherencia como respuesta al aumento/diminución del grado de dificultad pedido.

Por variaciones pertinentes describimos los tipos de cambios sugeridos por los estudiantes, según la siguiente clasificación, emergida del análisis de las respuestas (señalamos con + el aumento de la dificultad, y con el – la diminución de la dificultad):

1. Cambios en el lenguaje y artefactos visuales:
    - 1.1. Omisión de elementos gráficos (+): el elemento quitado tiene que ser visualizado (imagen mental) o tiene que ser dibujado/ nombrado
    - 1.2. Adición de elementos gráficos (-): el elemento que se añade facilita la visualización del procedimiento
    - 1.3. Adición de artefactos visuales (-): resolver la tarea con uso de material manipulativo
2. Cambios en la descripción de conceptos visuales
    - 2.1. Pasar desde un vocabulario técnico/formal a un vocabulario cuotidiano/informal/empírico (-)
    - 2.2. Pasar desde un vocabulario cuotidiano/informal/empírico a un vocabulario técnico/formal (+)
    - 2.3. Adición de términos para aclarar el significado de elementos gráficos (-)
3. Cambios en las propiedades del objeto
    - 3.1. Cambios de la forma del objeto tridimensional (+/- según el objeto)
4. Cambios en el procedimiento visual

4.1. Procedimiento inverso (+/- según el procedimiento)

4.2. Generalización del procedimiento (+)

5. Cambio en la longitud de la tarea

5.1. Diminución de los casos (-)

5.2. Aumento de los casos (+)

5.3.1. Ítem 1 (Vistas)

En el sub-ítem 1b' se pide indicar cómo cambiar el enunciado de la tarea 1a para que resulte más difícil de resolver para un niño de primaria.

Resumimos en la tabla 5.57 las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de pertinencia" de la respuesta para el sub-ítem 1b'.

Tabla 5.57: *Frecuencia absolutas (porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 1b'* (n=241).

Grado de pertinencia	Frecuencias (%)
Variación no pertinente	151 (63)
Variación imprecisa	17 (7)
Variación/es pertinentes/s	63 (26)
En blanco	10 (4)

Las variaciones no pertinentes son por la mayoría (93%) enunciados muy parecidos al original, donde únicamente hay cambios en la estructura de la pregunta y/o en los términos utilizados. Los cambios propuestos no suponen un aumento de la dificultad de la tarea y solo en pocos casos son justificados, como se muestra en los siguientes ejemplos (figuras 5.158 y 5.159)

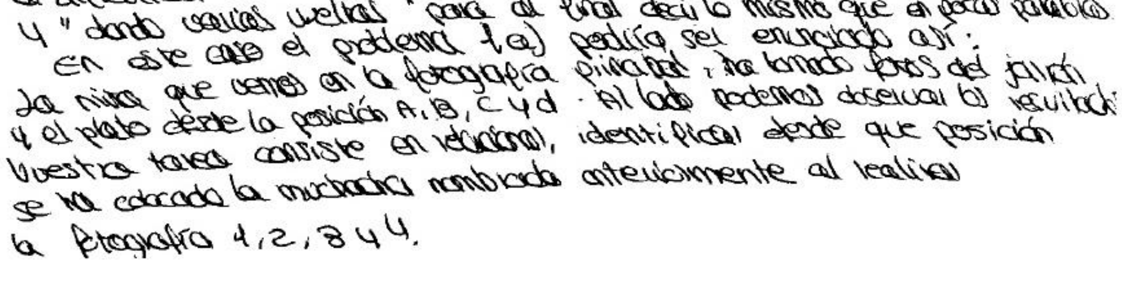

El enunciado de una tarea puede ser cambiado de manera que aumente
la dificultad de comprensión para un niño, por ejemplo, alargándola
y "dando varias vueltas" para al final decir lo mismo que en pocas palabras.
En este caso el problema 1(a) podría ser enunciado así:
La niña que vemos en la fotografía [illegible], ha tomado fotos del jarrón
y el plato desde la posición A, B, C y d. Al lado podemos observar los resultados
Vuestra tarea consiste en relacionar, identificar desde que posición
se ha colocado la muchacha nombrada anteriormente al realizar
la fotografía 1, 2, 3 y 4.

Figura 5.158: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 1a

[*"El enunciado de una tarea puede ser cambiado de manera que aumente la dificultad de comprensión para un niño, por ejemplo, alargándolo y "dando varias vueltas" para al final decir lo mismo que en pocas palabras. En este caso el problema 1ª) podría ser enunciado así: La niña que vemos en la fotografía pintada, ha tomado fotos del jarrón y el plato desde la posición A, B, C y D. Al lado podemos observar los resultados. Vuestra tarea consiste en relacionar, identificar desde que posición se ha sacada la muchacha nombrada anteriormente al realizar la fotografía 1, 2, 3 y 4.*"]

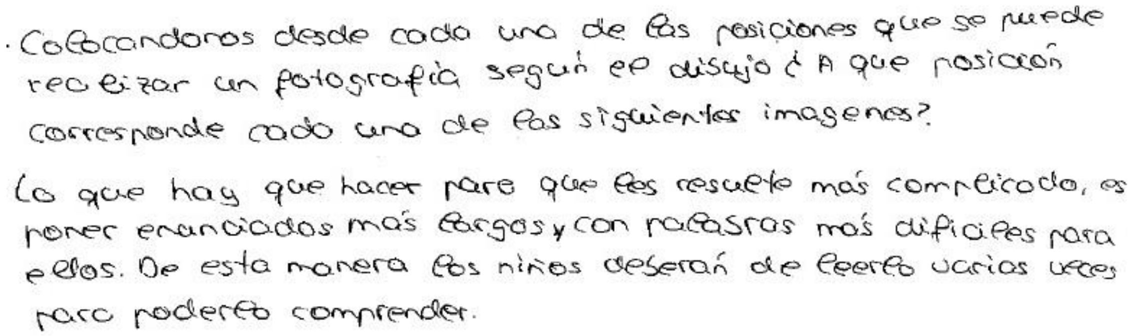

· Colocandonos desde cada una de las posiciones que se puede realizar un fotografía según el dibujo ¿A que posicion corresponde cada una de las siguientes imagenes?
Lo que hay que hacer para que les resulte más complicado, es poner enunciados más largos y con palabras más dificiles para ellos. De esta manera los niños deberán de leerlo varias veces para poderlo comprender.

Figura 5.159: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 1a

En dichos casos se puede observar que los alumnos han interpretado los términos "cambio del enunciado" únicamente por lo que se refiere a aspectos lingüísticos.

Las variaciones imprecisas son variaciones potencialmente pertinentes pero expresadas de forma poco clara o incompleta.

Por ejemplo, en la siguiente solución (figura 5.160) el alumno propone un buen cambio (la omisión de un elemento gráfico, la primera imagen), pero no consigue formular una buena pregunta que se relacione a esta nueva situación.

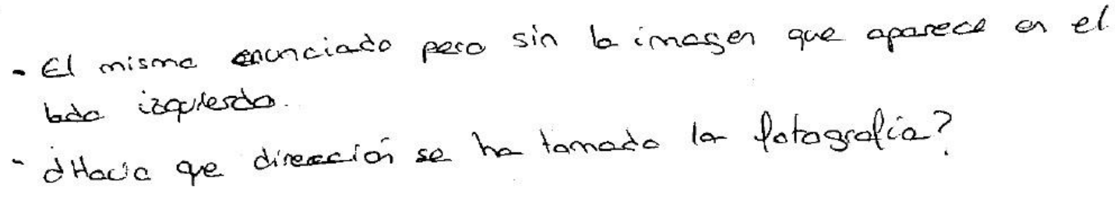

- El mismo enunciado pero sin la imagen que aparece en el lado izquierdo.
- ¿Hacia que dirección se ha tomado la fotografía?

Figura 5.160: Ejemplo de variación imprecisa de la tarea 1a

Clasificamos las variaciones pertinentes en las siguientes categorías según los cambios propuestos al enunciado (tabla 5.58). Los porcentajes se refieren al total de variaciones pertinentes dadas por los alumnos.

Tabla 5.58: *Frecuencias (y porcentajes) de los tipos de variaciones pertinentes dados*

Variación		**Descripción**	**Frec (%)**
1. Cambios en el lenguaje y artefactos visuales	Omisión de elementos gráficos	Quitar las fotografías y preguntar que el alumno dibuje, por cada punto de vista, la fotografía correspondientes	34 (38)
		Quitar los puntos de vistas, marcados con flechas y letras, en la imagen de la izquierda y preguntar de señalar por cada fotografía el punto de vista correspondiente	14 (16)
3. Cambios en las propiedades del objeto	Cambios del número y de la forma de los objetos	Agregar otro objeto con forma diferente	15 (17)
4. Cambios en el procedimiento visual	Procedimiento inverso	Quitar la imagen de la izquierda y preguntar que el alumno, a partir de las fotografías, dibuje una posible situación espacial de los objetos y los respectivos puntos de vistas	4 (5)
5. Cambio de la longitud de la tarea	Aumento de los casos	Anadir otros puntos de vistas o fotografías	22 (24)
Total de variaciones propuestas por los alumnos			89 (100)

Se observa que algunos alumnos dieron más de una variación pertinente, lo que supone un mayor grado de conocimiento específico.

En el siguiente ejemplo de solución (figura 5.161) el alumno propone dos tipos de variaciones, una relativa a la omisión de los puntos de vistas, y la otra en la cual se pide a los alumnos dibujar las fotografías relativas a los puntos de vistas.

Un enunciado sería el mismo, pero sin dar las letras de la fotografía de la izquierda.

Otro enunciado posible sería pedirles que dibujaran el resultado que obtendríamos al echar las fotos de A, B, C y D.

Figura 5.161: Ejemplo de variación pertinente de la tarea 1a

Dichas variaciones se consideran válidas y nos proporcionan información sobre como los futuros maestros realizan cambios en una tarea.

5.3.2. Ítem 2 (Sistema diédrico)

En el sub-ítem 2b' se pide indicar cómo cambiar el enunciado de la tarea 2a para que resulte más fácil de resolver para un niño de primaria.

En la tabla 5.59 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de pertinencia" de la respuesta para el sub-ítem 2b'.

Tabla 5.59: *Frecuencia absolutas (porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 2b'* (n=241).

Grado de pertinencia	**Frecuencias (%)**
Variación no pertinente	133 (55)
Variación imprecisa	33 (14)
Variación/es pertinentes/s	49 (20)
En blanco	26 (11)

También en este ítem, más de la mitad de los alumnos no proponen variaciones pertinentes a la tarea; de hecho el 31% de los alumnos proponen sólo pequeños cambios lingüísticos en el enunciado (de forma similar del ítem 1 y que no varían su dificultad), mientras que el 19% dan variaciones que cambian el significado de los conceptos principales presentes en la tarea (las vistas). Estas últimas variaciones se refieren a la incorrecta interpretación del término "vista" ya observada en el análisis de las justificaciones. Dichos alumnos sugieren, en lugar de referirse a las "vistas" del objeto, usar los términos "caras". A continuación presentamos ejemplos de estas variaciones (figuras 5.162, 5.163)

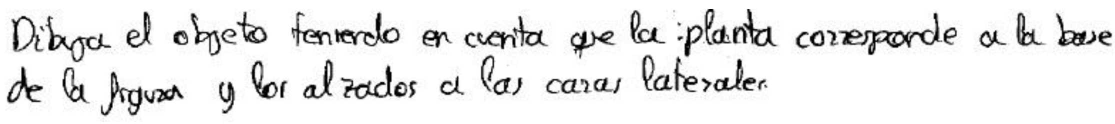

Dibuja el objeto teniendo en cuenta que la planta corresponde a la base de la figura y los alzados a las caras laterales.

Figura 5.162: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 2ª, basada en la interpretación incorrecta del término "vista"

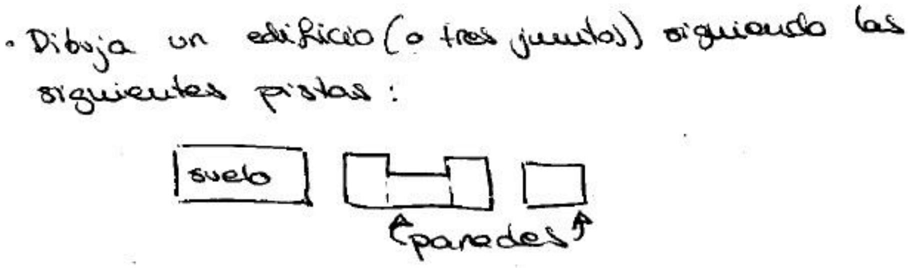


Figura 5.163: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 2ª, basada en la interpretación incorrecta del término “vista”

Aunque dichas respuestas se refieren a tareas más fáciles de resolver para un niño de primaria, no las consideramos variaciones pertinentes puesto que cambian de forma sustancial el contenido de la tarea.

Un 6% de alumnos dan variaciones muy vagas y de difícil interpretación.

Por otra parte, las variaciones pertinentes y parcialmente pertinentes manifiestan interesantes cambios a la tarea: cambios en el lenguaje que designa las vistas, cambios del objeto tridimensional considerado, y cambio en el procedimiento (siempre manteniendo como contenido principal de la tarea “las vistas de un objeto tridimensional”). Las variaciones parcialmente pertinentes, aunque manifiestan cambios interesantes, los expresan de forma ambigua o poco clara.

Clasificamos las variaciones pertinentes en las siguientes categorías (tabla 5.60) según los cambios propuestos al enunciado. Los porcentajes se refieren al total de variaciones pertinentes dadas por los alumnos.

Tabla 5.60: *Frecuencias (y porcentajes) de los tipos de variaciones pertinentes dados al sub-ítem 2a*

Variación		**Descripción**	**Frec (%)**
1. Cambios en el lenguaje y artefactos visuales	Adición de artefactos visuales	Construcción del objeto (en lugar del dibujo)	4 (8)
2. Cambios en la descripción de conceptos visuales	Desde un vocabulario técnico/formal a un vocabulario cotidiano/informal/empírico	Pasar desde un vocabulario de dibujo técnico (alzados y planta) a un vocabulario cotidiano (vista de frente o de perfil, vista desde arriba)	15 (31)
	Adición de términos para	Agregar el término	4 (8)

	aclarar el significado de elementos gráficos	"Perfil" al segundo alzado	
3. Cambios en las propiedades del objeto	Cambios de la forma del objeto tridimensional: dar un objeto más "sencillo"	Dar las vistas de un objeto más sencillo	7 (14)
4. Cambios en el procedimiento visual	Procedimiento inverso	Procedimiento inverso: a partir del objeto tridimensional (representado en perspectiva), dibujar sus vistas	18 (37)
Otras			1 (2)
Total de variaciones propuestas por los alumnos			49 (100)

La mayoría de los cambios se refieren al uso de términos cotidianos (en lugar de términos de dibujo técnico) relativos a las vistas, y a cambios en el procedimiento (a partir de una representación global del objeto tridimensional, dibujar sus vistas). Presentamos dos ejemplos de dichas variaciones propuestas (figura 5.164, 5.165):

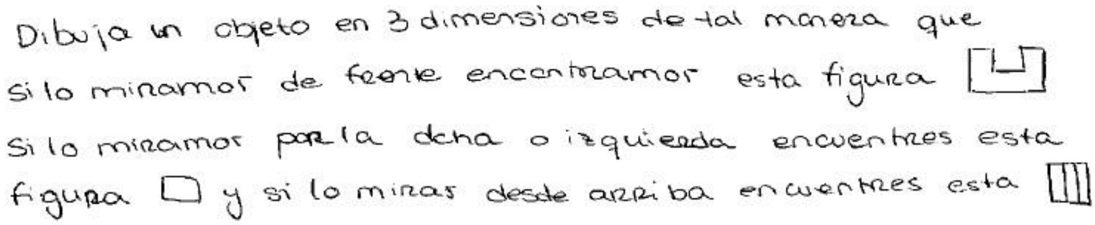


Figura 5.164: Ejemplo de variación pertinente de la tarea 2ª, cambios en la descripción de conceptos visuales

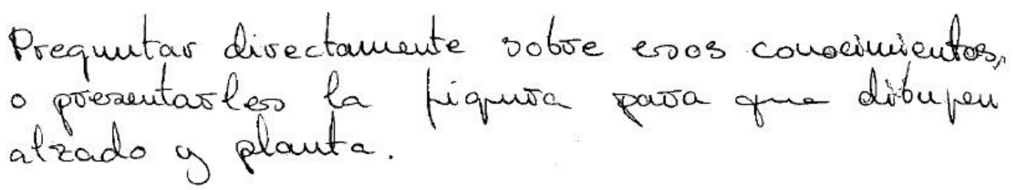


Figura 5.165: Ejemplo de variación pertinente de la tarea 2ª, cambios en el procedimiento visual

5.3.3. Ítem 3 (Desarrollos)

En el sub-ítem 3b' se pide indicar cómo cambiar el enunciado de la tarea 3a para que resulte más fácil de resolver para un niño de primaria.

En la tabla 5.61 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de pertinencia" de la respuesta al sub-ítem 3b'.

Tabla 5.61: *Frecuencias absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 3b'* (n=241).

Grado de pertinencia	Frecuencias (%)
Variación no pertinente	80 (33)
Variación imprecisa	61 (25)
Variación/es pertinentes/s	87 (36)
En blanco	13 (6)

Observamos que en este sub-ítem las variaciones pertinentes son más numerosas (36%) que en los demás ítems. La mayoría de las variaciones no pertinentes son enunciados muy parecidos al original, donde únicamente hay cambios en la estructura de la pregunta y/o cambios de lenguaje sin interés. En algunas de las soluciones no pertinentes se manifiesta la intención de disminuir el grado de dificultad de la tarea quitando el término "desarrollo" o sustituyéndolo por conceptos no apropiados, como puzle, recorte, … Ilustramos dos ejemplos de variaciones no pertinentes (figura 5.166, 5.167):

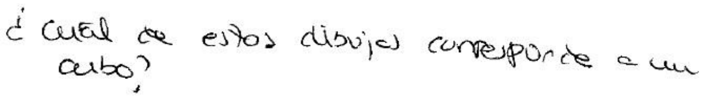

¿Cuál de estos dibujos corresponde a un cubo?

Figura 5.166: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 3a, omisión del término "desarrollo" sin pero explicarlo

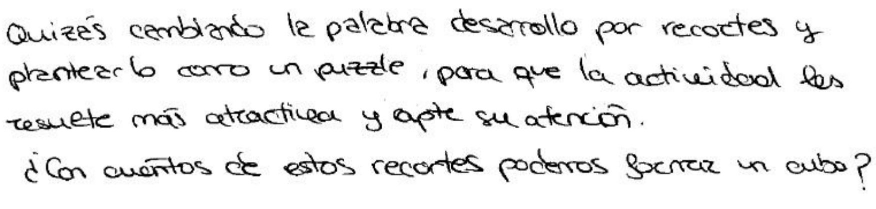

Quizás cambiando la palabra desarrollo por recortes y plantearlo como un puzzle, para que la actividad les resulte más atractiva y capte su atención.
¿Con cuántos de estos recortes podemos formar un cubo?

Figura 5.167: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 3a, sustitución del término "desarrollo" con otros términos no adecuados

Clasificamos las variaciones pertinentes en las siguientes categorías según los cambios propuestos al enunciado (tabla 5.62). Los porcentajes se refieren al total de variaciones pertinentes dadas por los alumnos.

Tabla 5.62: *Frecuencias (y porcentajes) de los tipos de variaciones pertinentes dados al sub-ítem 3a*

Variación		**Descripción**	**Frec. (%)**
1. Cambios en el lenguaje y artefactos visuales	Adición de elementos gráficos	Añadir el dibujo de un cubo en perspectiva o dar un cubo en 3D	8 (8)
	Adición de artefactos visuales	Emplear material (cartulina,…) y ejecutar la tarea físicamente (plegar y pegar)	69 (70)
2. Cambios en la descripción de conceptos visuales	Desde un vocabulario técnico/formal a un vocabulario cotidiano/informal/empír ico	No nombrar el término "desarrollo" sino explicar su concepto de forma procedimental	6 (6)
3. Cambios en las propiedades del objeto	Cambios de la forma del objeto tridimensional: dar un objeto más "sencillo"	Dar desarrollos de objeto más sencillo (tetraedro)	1 (1)
4. Cambios en el procedimiento visual	Procedimiento inverso	Procedimiento inverso (y con uso de material): cortar y desplegar un cubo en cartulina	10 (10)
5. Cambio de la longitud de la tarea	Diminución de los casos	Dar menos opciones de plausibles desarrollos	5 (5)
Total de variaciones propuestas por los alumnos			99 (100)

Muchas variaciones pertinentes sugieren más de un tipo de cambio, y en la gran mayoría aparece la introducción del uso de material manipulativo (cartulina). En las siguientes soluciones (figura 5.168, 5.169), por ejemplo, se sugiere quitar el término "desarrollo" explicándolo a nivel manipulativo (visual):

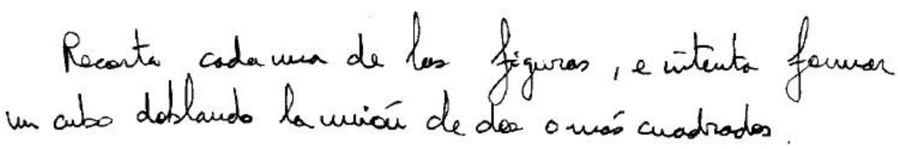


Figura 5.168: Ejemplo de variación pertinente de la tarea 3a, cambio en la descripción del concepto de "desarrollo"

Si tuviéramos cartulinas con las siguientes formas y las doblásemos y pegáramos, ¿cuáles de ellas formarían un cubo?

Figura 5.169: Ejemplo de variación pertinente de la tarea 3a, cambio en la descripción del concepto de "desarrollo", y uso de material manipulativo

Es interesante observar la presencia de variaciones que proponen a los alumnos ejecutar el procedimiento inverso (siempre apoyándose en el material manipulativo), o sea cortar un cubo y desarrollarlo en el plano de distintas maneras. Dicho cambio involucra la definición misma de desarrollo plano. Ejemplo (figura 1.170)

Mediante materiales manipulativos fabrica un cubo y observa y prueba las distintas formas en las que se puede desarrollar el plano.

Figura 5.170: Ejemplo de variación pertinente de la tarea 3a, cambio en el procedimiento visual (procedimiento inverso), con el uso de material manipulativo

5.3.4. Ítem 4 (Secciones de un objeto)

En el sub-ítem 4b' se pide indicar cómo cambiar el enunciado de la tarea 4a para que resulte más difícil de resolver para un niño de primaria.

En la tabla 5.63 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa "grado de pertinencia" de la respuesta por el sub-ítem 4b'.

Tabla 5.63: *Frecuencia absolutas (porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 4b'* (n=241).

Grado de pertinencia	Frecuencias (%)
Variación no pertinente	142 (59)
Variación imprecisa	5 (2)
Variación/es pertinentes/s	40 (17)
En blanco	54 (22)

Observamos que el 81% de alumnos no contestó o presentó una variación no pertinente. Entre estas últimas, prevalen las relativas a pequeños cambios de lenguaje en la formulación de la pregunta, que no suponen un aumento de la dificultad de da tarea, ejemplo (figura 5.171):

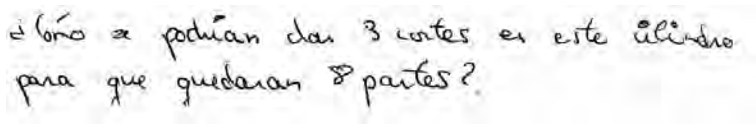

¿Cómo se podrían dar 3 cortes en este cilindro para que quedaran 8 partes?

Figura 5.171: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 4ª

Frecuentemente los alumnos proponen dar un significado material al cilindro representado y orientar la tarea a un contexto de vida cotidiana, lo que puede suponer una simplificación de la tarea. Ejemplo (figura 5.172)

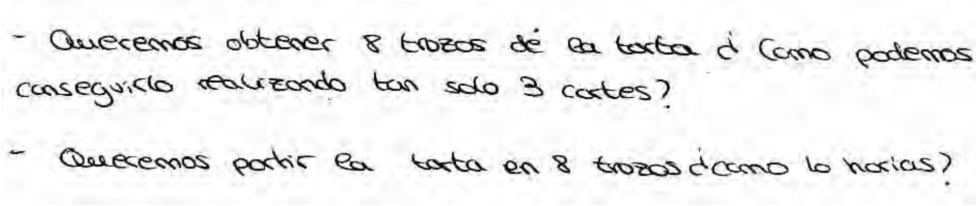

- Queremos obtener 8 trozos de la tarta ¿Cómo podemos conseguirlo realizando tan solo 3 cortes?
- Queremos partir la tarta en 8 trozos ¿cómo lo harías?

Figura 5.172: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 4a, contexto cuotidiano

Otras variaciones no pertinentes se refieren a considerar como cortes únicamente los planos perpendiculares a la base, o sea limitan la tarea a particiones del círculo (quitando una dimensión). Ejemplo (figura 5.173):

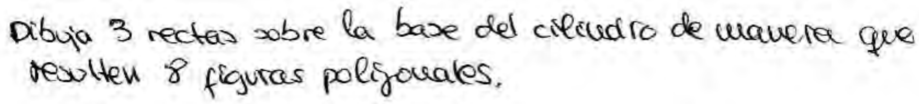

Dibuja 3 rectas sobre la base del cilindro de manera que resulten 8 figuras poligonales.

Figura 5.173: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 4ª, cortes en la base del cilindro

Clasificamos las variaciones pertinentes según los cambios propuestos por los alumnos (algunos de ellos presentan más de un cambio), y los resumimos en la siguiente tabla (tabla 5.64).

Tabla 5.64: *Frecuencias (y porcentajes) de los tipos de variaciones pertinentes dados al sub-ítem 4a*

Variación		**Descripción**	**Frec (%)**
1. Cambios en el lenguaje y artefactos visuales	Omisión de elementos gráficos	Omisión del dibujo del cilindro	6 (15)
2. Cambios en la	Desde un vocabulario	Aclaración del significado	3 (8)

descripción de conceptos visuales	cotidiano/informal/empírico a un vocabulario técnico/formal	cortar en términos de planos de corte	
3. Cambios en las propiedades del objeto	Cambios de la forma del objeto tridimensional: dar un objeto más “complicado”	Cambio del objeto tridimensional a cortar (cono, …)	11 (28)
4. Cambios en el procedimiento visual	Generalización del procedimiento	Generalización del proced. Aumento coherente de partes y cortes/ Minimizar cortes para X partes/ Maximizar partes para X cortes	21 (53)
Total de variaciones propuestas por los alumnos			40 (100)

La mayoría de variaciones pertinentes presentadas se refieren a cambios en el procedimiento, aumentando de forma proporcional cortes y partes (ejemplo en la figura 5.174), o bien dejando una de las dos variable constante y preguntando por minimizar/maximizar la otra.

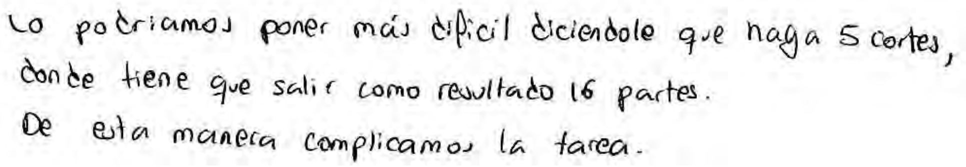


Figura 5.174: Ejemplo de variación pertinente de la tarea 4a, generalización del procedimiento

Otras variaciones pertinentes sugieren cambios en el objeto tridimensional considerado, por ejemplo el cono, u otros objetos menos regulares.

5.3.5. Ítem 5 (Cuerpos de revolución)

En el sub-ítem 5b’ se pide indicar cómo cambiar el enunciado de la tarea 5a para que resulte más difícil de resolver para un niño de primaria.

En la tabla 5.65 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable cuantitativa “grado de pertinencia” de la respuesta por el sub-ítem 5b’.

Tabla 5.65: *Frecuencia absolutas (y porcentajes) de las respuestas al sub-ítem 5b'* (n=241).

Grado de pertinencia	**Frecuencias (%)**
Variación no pertinente	127 (53)
Variación imprecisa	29 (12)
Variación/es pertinentes/s	50 (21)
En blanco	35 (14)

Observamos que el 53% de alumnos presentó una variación no pertinente. Entre estas, como para otros ítems, prevalen las relativas a pequeños cambios de lenguaje en la formulación de la pregunta, que no suponen un aumento de la dificultad de da tarea.

Además, entre las variaciones no pertinentes, destacamos aquellas que manifiestan concepciones incorrectas relacionadas con los cuerpos de revolución. 31 alumnos propusieron, en sus variaciones, de asociar la figura plana al cuerpo tridimensional, sin explicar en qué se basa dicha asociación. Además, quitar la caracterización del sólido como cuerpo de "revolución", supone una falta del reconocimiento del procedimiento principal en el cual se basa la tarea, o sea el engendrar un cuerpo de revolución a partir de la rotación de una figura plana. Ejemplo (figura 5.175):

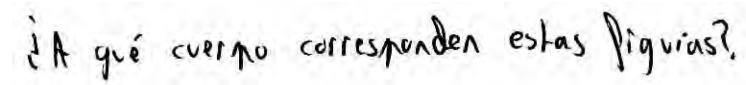

¿A qué cuerpo corresponden estas figuras?

Figura 5.172: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 5a

Presumimos que con estas variaciones los alumnos pretenden alejarse del concepto de cuerpo de revolución y centrarse únicamente en relaciones de semejanza de forma y proporciones entre figuras planas y tridimensionales. Lo que no corresponde al objetivo de la tarea original.

Otros alumnos, añadieron al enunciado original elementos superfluos, que ponen en énfasis la caracterización física que dichos alumnos asocian a la tarea. Destacamos por ejemplo la necesidad de que el eje "mueva" la figura, o que ésta gire muy rápida, como se muestra en el siguiente ejemplo (figura 5.173).

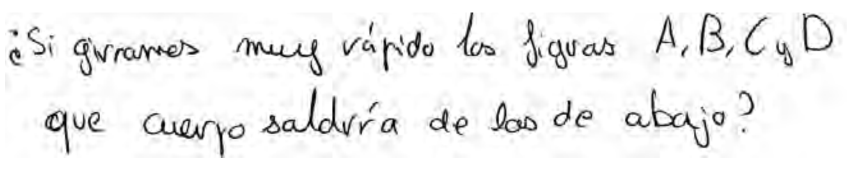

¿Si giramos muy rápido las figuras A, B, C y D
que cuerpo saldría de las de abajo?

Figura 5.173: Ejemplo de variación no pertinente de la tarea 5a

Por lo que respecta a las variaciones imprecisas, se refieren a potenciales variaciones pertinentes, pero descritas con lenguaje ambiguo.

Clasificamos las variaciones pertinentes según los cambios propuestos por los alumnos (algunos de ellos presentan más de un cambio), y los resumimos en la siguiente tabla (tabla 5.66)

Tabla 5.66: *Frecuencias (y porcentajes) de los tipos de variaciones pertinentes dados al sub-ítem 5a*

Variación		**Descripción**	**Frec (%)**
1. Cambios en el lenguaje y artefactos visuales	Omisión de elementos gráficos	Omisión del dibujo de las figuras planas: dibujar/nombrar las figuras planas que girando generan los cuerpo de revolución proporcionados.	17 (31)
		Omisión del dibujo de los sólidos: dibujar/nombrar los cuerpos de revolución correspondientes a las figuras planas proporcionadas	28 (51)
3. Cambios en las propiedades del objeto	Cambios de la forma del objeto tridimensional: dar un objeto más "complicado"	Dar otros cuerpos de revolución/figuras planas "más complicadas"	4 (7)
4. Cambios en el procedimiento visual	Generalización del procedimiento	Variar la posición del eje con respecto a las figuras planas	4 (7)
Otros			2 (1)
Total de variaciones propuestas por los alumnos			55 (100)

La mayoría de variaciones pertinentes presentadas se refieren a la omisión de elementos gráficos presentes en la tarea, o bien las figuras planas o bien los cuerpos de revolución, ejemplos (figuras 5.173, 5.174)

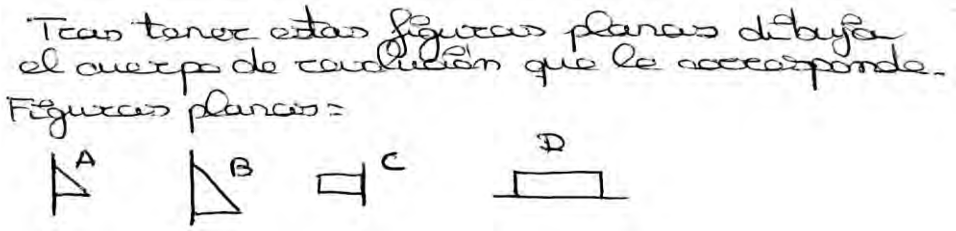

Tras tener estas figuras planas dibuja el cuerpo de revolución que le corresponde.
Figuras planas:
A B C D

Figura 5.173: Ejemplo de variación pertinente de la tarea 5a, omisión de elementos gráficos

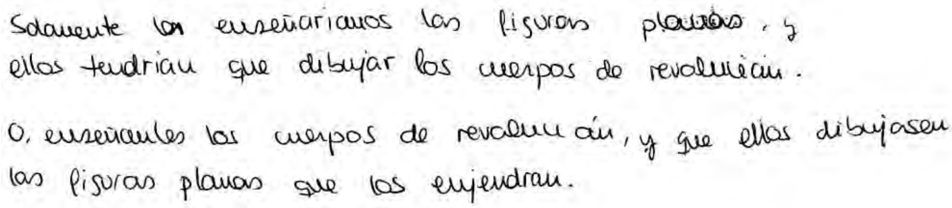

Solamente les enseñariamos las figuras planas, y ellos tendrian que dibujar los cuerpos de revolución.
O, enseñarles los cuerpos de revolución, y que ellos dibujasen las figuras planas que los engendran.

Figura 5.174: Ejemplo de variación pertinente de la tarea 5a, omisión de elementos gráficos

5.3.6. Síntesis de conocimientos sobre variaciones de las tareas

De forma similar que en el caso de la identificación de los conocimientos, también por lo que se refiere a las variaciones propuestas, podemos observar que a nivel global el grupo de alumnos han conseguido proponer un interesante conjunto de cambios relevantes.

Sin embargo observamos que a nivel individual los alumnos tienen muy pobre conocimiento especializado también relacionado a la planificación de posibles variaciones de tareas visuales.

En la tabla 5.67 y en la figura 5.175 presentamos la distribución de los valores relativos a la puntación total de la variable “grado de pertinencia” de las respuestas sobre la planificación de variaciones (conocimiento especializado), su frecuencia (porcentaje) y la valoración que le atribuimos.

Tabla 5.67: *Frecuencia (porcentaje) y valoración de la puntación total relativa al conocimiento especializado sobre la planificación de variaciones*

<table>
<tr><th>Total Conoc. Especializado (identific. conoc.)</th><th>Frec (%)</th><th>Valoración</th></tr>
<tr><td>10</td><td>3 (1)</td><td rowspan="2">Muy bueno</td></tr>
<tr><td>9</td><td>5 (2)</td></tr>
<tr><td>8</td><td>12 (5)</td><td rowspan="2">Bueno</td></tr>
<tr><td>7</td><td>9 (4)</td></tr>
</table>

6	22 (9)	Suficiente
5	17 (7)	
3-4	46(19)	Pobre
1-2	65(27)	Muy pobre
0	62 (26)	Nulo

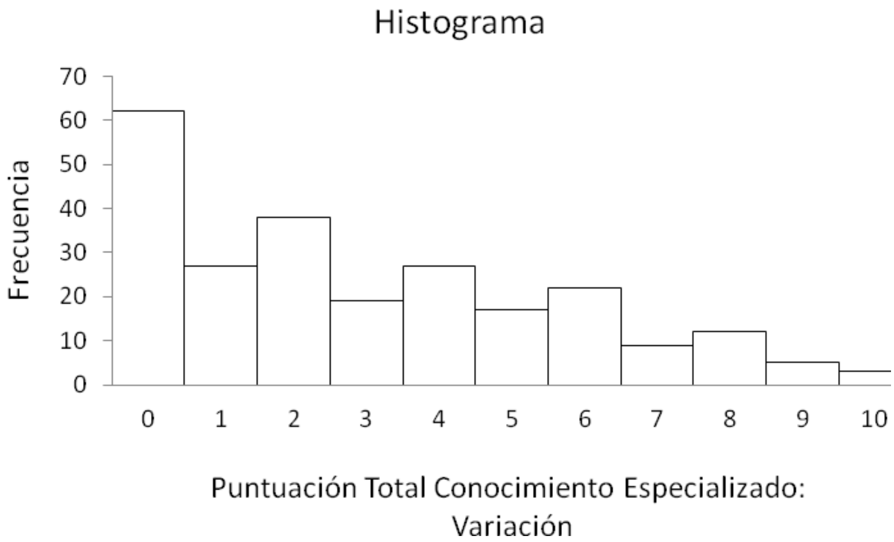


Figura 5.175: Histograma de la puntiación total relativa al Conocimiento Especializado sobre la planificación de variaciones

En la Tabla 5.56 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a los valores de la variable del grado de corrección de la respuesta.

Tabla 5.56: *Frecuencias absolutas (y porcentajes) de las respuestas a los sub-ítems tipo b'*(n=241)

Grado de pertinencia	Ítem				
	1b	2b	3b	4b	5b
Pertinente	63 (26)	49 (20)	87 (36)	40 (17)	50 (21)
Parcialmente pertinente	17 (7)	33 (14)	61 (25)	5 (2)	29 (12)
No pertinente	151 (63)	133 (55)	80 (33)	142 (59)	127 (53)
En blanco	10 (4)	26 (11)	13 (6)	54 (22)	35 (14)

La puntuación media de todo el grupo relacionada con la variable del grado de corrección de pertinencia de la respuesta es solo de 3,0 (sobre 10). Observamos que en estos sub-ítems la media de los chicos (3,3), es ligeramente mayor que la media de las chicas (2,9).

Estos resultados muestran muy pobre conocimiento especializado relacionado con la planificación de variaciones de tareas visuales.

5.4. SÍNTESIS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL CONTENIDO

Los resultados obtenidos a partir del análisis cuantitativo y cualitativo de las resoluciones que 241 estudiantes dieron a las tareas incluidas en el Cuestionario VOT, señalan que los futuros profesores muestran ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento especializado del contenido. Las justificaciones propuestas por los alumnos a tareas visuales de nivel elemental se refieren principalmente a validaciones de tipo perceptivo y argumentaciones deductivo-informales expresadas con un vocabulario cotidiano. Aunque en el contexto de la escuela primaria dichas argumentaciones se pueden considerar como pertinentes, consideramos necesario que los futuros maestros puedan formular una prueba deductivo-formal de referencia que justifique la validez de la proposición y guíe su forma de argumentar en los diferentes niveles educativos. Parzysz (2006) indica que los futuros profesores no tienen el conocimiento necesario para reconocer que una argumentación de tipo perceptivo y una demostración rigurosa no se sitúan en el mismo plano. Consideramos entonces necesaria una formación que incluya la reflexión sobre los diferentes tipos de esquemas de pruebas, y la manera de articularlos de forma progresiva, desde los primeros niveles educativos.

Consideramos conveniente preparar a los futuros profesores para realizar análisis sistemáticos de las variables didácticas que intervienen en una determinada tarea visual, que oriente la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos.

Las insuficiencias manifestadas en el conocimiento especializado relacionado con la identificación de conocimientos puestos en juego podrían obstaculizar una apropiada gestión del conocimiento matemático de sus futuros alumnos sobre la visualización. Estas carencias justifican la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para desarrollar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los futuros maestros. El análisis de las prácticas matemáticas, objetos y procesos (Godino, 2009; Font, Godino y Gallardo, 2013), puede ser una herramienta potente para la identificación y caracterización del conocimiento especializado, en tanto que proporciona pautas y criterios para analizar dichos tipos de conocimientos.

6. SÍNTESIS DE CONOCIMIENTOS

En este capítulo hemos presentado los resultados obtenidos al analizar las respuestas de 241 futuros profesores de educación primaria a un cuestionario de evaluación de conocimientos comunes, ampliados sobre visualización de objetos tridimensionales, así como algunos aspectos relevantes del conocimiento especializado del contenido (justificaciones de las respuestas a las tareas y elaboración de nuevas tareas relacionadas).

Observamos que el conocimiento común sobre visualización de objetos tridimensionales de los futuros profesores evaluados no es el esperado: el 62% de los alumnos no contesta de forma óptima a las tareas tomadas de libros de textos de primaria sobre los diferentes aspectos del tema. Solo dos tareas fueron resueltas por los alumnos de forma satisfactoria (1a y 5a); sin embargo, en las dos respectivas tareas sobre el conocimiento ampliado los alumnos manifestaron diferentes dificultades.

Se observan considerables dificultades relacionadas con el conocimiento ampliado sobre los contenidos “coordinar e integrar vistas de objetos” y “generar cuerpos de revolución”. De manera particular los estudiantes no están capacitados para la resolución de una tarea que requiere reflexionar sobre la pluralidad de objetos que pueden corresponder a tres vistas ortogonales determinadas y de una tarea que requiere generar un cuerpo de revolución en el cual el eje de rotación es externo a la figura plana que lo engendra.

Observamos que dichos contenidos específicos no están contemplados en los libros de textos de primaria. Los ejercicios relacionados con el contenido “coordinar e integrar vistas de objetos” que proponen los libros de textos piden dibujar o identificar *el* objeto correspondiente a tres vistas ortogonales, lo que excluye la reflexión sobre una posible pluralidad de objetos. En las representaciones de la generación de los cuerpos de revolución en los libros de textos se dibujan las figuras planas *pegadas* a barras que giran, lo que involucra la “idea” de que el eje, girando, “permita” la rotación de la figura plana; procedimiento que no se puede generalizar para el caso de eje externo a la figura.

Puesto que los respectivos sub-ítems (2a y 5a) relacionados con el conocimiento común de dichos contenidos han sido resueltos de forma correcta (o parcialmente correcta), sería interesante analizar si los conocimientos adquiridos por los estudiantes a lo largo de su escolaridad sobre estos temas puedan resultar conflictivos en el momento de resolver tareas que involucran conocimientos más avanzados.

De forma general el conocimiento ampliado del contenido de estos estudiantes puede ser calificado como insuficiente. Diferentes dificultades van asociadas a la interpretación de representaciones planas de objetos tridimensionales. Estas dificultades pueden obstaculizar y a veces impedir un procedimiento de tipo visual sobre el objeto. Por otra parte la incapacidad de producir de forma correcta una representación plana de un objeto tridimensional no siempre refleja una escasa habilidad de visualizar el objeto. Sin embargo, consideramos que para un futuro profesor de escuela primaria sea importante no solo visualizar el objeto sino también poder comunicar su forma con diferentes tipos de representaciones planas, para desarrollar dicha habilidad en sus alumnos.

Los resultados obtenidos sobre los conocimientos común y ampliado, señalan diferencias con respecto al género, observando que los chicos manifiestan mejores conocimientos, resultados que concuerdan con otros estudios (Ben-Chaim, Lappan y Houang ,1988; Guay y McDaniel, 1977; Fernández, 2011).

De aquí el interés y la importancia de realizar futuras investigaciones centradas en el desarrollo de la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación que incluya actividades de interpretación y elaboración de diferentes tipos de representaciones planas y la reflexión sobre sus respectivas funciones y límites

Por lo que se refiere al conocimiento especializado del contenido, observamos que a nivel individual los alumnos tienen un muy pobre conocimiento relacionado con las justificaciones de tareas elementales.

Entre las justificaciones presentadas a las tareas emergen interpretaciones de las tareas en términos empíricos, asociadas a validaciones de tipo perceptivo, en las cuales hay una predominancia de la componente visual.

Consideramos importante que un profesor tenga el conocimiento necesario para guiar las observaciones espontáneas, intuitivas y empíricas (propias o de sus alumnos) sobre una situación, hacia una justificación deductiva, confiriendo un significado teórico a los objetos y procesos (visuales) intervinientes. Por lo que se refiere a la identificación de conocimientos puestos en juego en la resolución de la tarea, y a la planificación de variaciones de las mismas, los resultados muestran que a nivel individual los alumnos tienen un conocimiento especializado muy pobre. Sin embargo, a nivel global, observamos que la muestra de estudiantes ha conseguido manifestar un considerable conjunto de conocimientos especializados pertinentes, lo que nos permite prever que, la puesta en común de los conocimientos especializados de los estudiantes, con implementación de acciones formativas específicas, podría resultar muy constructiva.

CAPITULO 6.
SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo describiremos las conclusiones a las que hemos llegado como resultado de la investigación realizada.

Para ello se recuperarán los objetivos y las hipótesis generales expuestas en el Capítulo 2. Además, se contrastarán las hipótesis específicas de cada ítem, formuladas en el Capítulo 4, con los resultados obtenidos en el análisis de respuestas de los estudiantes.

Posteriormente incluimos una síntesis de las aportaciones realizadas con este trabajo al ámbito general de la didáctica de la matemática, y en particular, al campo de la formación de profesores, todo ello concretado en un conocimiento específico: aspectos relativos a la enseñanza de la visualización espacial.

Mencionamos también algunas limitaciones del trabajo, a fin de tener una perspectiva contextual más clara de los aportes e identificar futuras líneas de investigación.

2. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS

El objetivo general de nuestra investigación era *realizar un estudio de evaluación del conocimiento didáctico-matemático de los profesores de primaria en formación sobre la Visualización de Objetos Tridimensionales (VOT).*

Está claro que toda la investigación ha estado orientada a cumplir este objetivo y pensamos que lo hemos logrado de forma razonable, pues se ha proporcionado información detallada sobre los diferentes tipos de conocimientos sobre la VOT de los futuros profesores en la muestra.

Sin entrar a discutir este objetivo, pasamos a detallar los objetivos específicos que están contenidos en el anterior.

Objetivo específico OE1: *Reconstruir un significado de referencia sobre la visualización espacial en geometría, analizando las investigaciones previas y organizando la información distinguiendo las facetas epistémica, cognitiva e instruccional*.

A través de una revisión de antecedentes de investigación, en el capítulo1, hemos identificado y organizado los elementos de significado relativos a la visualización espacial en geometría, teniendo en cuenta tres facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje: la faceta epistémica, la faceta cognitiva, y la faceta instruccional.

En la faceta epistémica hemos abordado la problemática relativa a la naturaleza de los objetos geométricos, siguiendo estudios de diferentes autores (Duval, 1999; Fischbein, 1993, 1998; Laborde, 1996; Mesquita, 1992; Parzysz, 1988, 1991) que destacan la importancia de distinguir entre el concepto, la forma y su representación. La elaboración e interpretación de representaciones de un objeto tridimensional requiere un control de las propiedades del objeto que se preservan en la representación y las que no se mantienen. Esto justifica la necesidad del estudio de los diferentes tipos de proyecciones y otras representaciones planas de objetos tridimensionales, sus reglas y las propiedades que preservan. Además hemos descrito las investigaciones que analizan los procedimientos involucrados en la interpretación y producción de representaciones planas de objetos tridimensionales, presentando algunos procedimientos peculiares relacionados con la "construcción" (mental) de objetos tridimensionales a partir de la interpretación de determinadas representaciones planas. Por último se han detallado diferentes tipos de justificaciones plausibles para argumentar proposiciones que involucran la VOT, destacando en particular la perspectiva de Parzysz (2006), que distingue diferentes tipos de validaciones en geometría según el tipo de geometría al que se refieren.

Por lo que se refiere a la faceta cognitiva, hemos analizado las investigaciones enfocadas al estudio de los significados personales atribuidos a la VOT por los estudiantes. Hemos resumido la vasta bibliografía sobre las definiciones de procesos y descripción de habilidades espaciales propuestas por investigadores en el campo de la psicología y de didáctica de la matemática a lo largo del último siglo. A continuación hemos descrito algunos trabajos generales centrados en describir etapas y niveles en el desarrollo de conocimientos espaciales (Piaget, Inhelder, y Szeminska, 1960) y categorías de razonamientos para la geometría de los sólidos (teoría de Van Hiele; Guillén, 2004). Además hemos resumido trabajos sobre la descripción de etapas y niveles en la interpretación/producción de representaciones planas de objetos tridimensionales y en algunos procedimientos específicos asociados (coordinación de las vistas y plegar/desplegar desarrollos), aspectos centrales de nuestro trabajo. También se identificaron y describieron las dificultades y errores encontrados por algunos investigadores en alumnos enfrentados a determinadas tareas de VOT.

En la faceta instruccional hemos descrito algunas investigaciones sobre experiencias o propuestas instruccionales, que pretenden promover el desarrollo de habilidades relacionadas con la visualización espacial. Seguidamente hemos presentado algunas investigaciones con profesores que tratan aspectos centrales de nuestra problemática, identificando los aspectos principales en los cuales manifestaron dificultades.

Este análisis se ha complementado con la recopilación de un primer banco de tareas descritas en las investigaciones, y su clasificación atendiendo a determinados criterios.

Con este estudio de la bibliografía de investigación, se ha resaltado la importancia que tiene la VOT en la enseñanza/aprendizaje de la geometría espacial, de manera especial en relación con la interpretación y producción de diferentes representaciones planas. Además este primer análisis nos ha permitido destacar la carencia de estudios globales relativos a los conocimientos de los (futuros) profesores sobre visualización de objetos tridimensionales y al mismo tiempo, fundamentar la construcción de nuestro cuestionario, que incluye ítems tomados de diversas investigaciones previas.

Dada la diversidad de aproximaciones a la visualización encontradas en la bibliografía, el equipo de investigación en cuyo seno se ha realizado este trabajo consideró necesario elaborar una posición propia sobre el tema usando herramientas del “enfoque ontosemiótico” del conocimiento matemático. Este estudio teórico, cuyos resultados se han descrito en el capítulo 2, responden al objetivo específico siguiente:

Objetivo específico OE2: *Clarificar las nociones epistémicas y cognitivas implicadas* *en los procesos de visualización en educación matemática desde la perspectiva ontosemiótica.*

El análisis que hemos realizado de la visualización en el capítulo 2, usando algunas herramientas del EOS, aporta una visión complementaria respecto de otras perspectivas más centradas en la descripción de los estilos cognitivos visuales/analíticos y su influencia en la resolución de problemas. Hemos tratado de caracterizar la práctica matemática en tareas que involucran visualización, sean estas realizadas por un sujeto individual (conocimiento subjetivo), o compartidas en un marco institucional (conocimiento objetivo), identificando los tipos de objetos y procesos que se ponen en juego en la realización de dicha práctica.

En particular, la aplicación de la dualidad ostensivo - no ostensivo a los distintos tipos de objetos matemáticos primarios (problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) nos ha proporcionado un punto de vista nuevo sobre el papel de la visualización en la práctica matemática. En un primer paso hemos visto necesario asumir la distinción Peircena de los tipos de signos para distinguir entre lenguajes visuales, caracterizados por la presencia de índices, iconos y diagramas, y lenguajes analíticos, los cuales se basan en el uso de símbolos. Seguidamente hemos considerado necesario distinguir entre problemas/tareas visuales de las no visuales o analíticas; las primeras se refieren a situaciones en las que intervienen objetos del mundo sensible (cuerpos físicos, relaciones espaciales y representaciones visuales); en las segundas intervienen esencialmente entidades lógicas, numéricas, analíticas. Estas distinciones se trasladan también al resto de las entidades primarias (reglas y justificaciones).

Se ha evidenciado que una tarea visual se puede abordar con medios analíticos y viceversa, una analítica se puede abordar con medios visuales. Es más, en la realización de una práctica visual intervienen de hecho objetos no visuales, y en la realización de una práctica analítica pueden intervenir objetos visuales, particularmente diagramas. Esta es una consecuencia de la aplicación de la dualidad ostensivo - no ostensivo a los distintos tipos de objetos matemáticos primarios, la cual da cuenta de la dialéctica entre lo visual y analítico. Para cualquier tipo de objeto matemático primario se ha postulado la presencia o intervención en su constitución y funcionamiento de una faceta ostensiva (pública, perceptible, simbólica o visual) y otra faceta no ostensiva (normativa, lógica, ideal, mental) las cuales interaccionan de manera sinérgica. Esto es así por la asunción del presupuesto antropológico sobre la naturaleza de los objetos matemáticos: tales objetos son entendidos como las reglas (gramaticales) de uso de los lenguajes simbólicos o visuales mediante los cuales se describen los mundos que la matemática modeliza.

Puesto que consideramos que el significado de un concepto matemático varía según la institución en la cual interviene y los instrumentos semióticos disponibles en la misma, hemos considerado necesario caracterizar el significado que, de la visualización de objetos tridimensionales se presentan en las orientaciones curriculares y en los libros de texto destinados a la enseñanza primaria. Esto formará el significado institucional local para nuestro trabajo. Por ello, consideramos pertinente contemplar el siguiente objetivo específico:

Objetivo específico OE3: *Analizar el tratamiento dado a la visualización de objetos tridimensionales en las orientaciones curriculares internacional, nacional y autonómica, así como en una muestra de libros de texto de primaria.*

Puesto que nuestro estudio tiene lugar en un contexto educativo específico, la formación de futuros maestros de primaria en la Universidad de Granada, hemos considerado necesario realizar un estudio curricular de matemáticas de educación primaria y libros de textos en los cuales se concretan dichos currículos.

Para dar cumplimiento a este objetivo se analizaron las orientaciones curriculares tanto de España y de la Comunidad Autónoma de Andalucía, como a nivel internacional, y se realizó un análisis de libros de texto.

De manera particular se resumieron los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales (VOT) en geometría espacial presentados en las diferentes orientaciones curriculares y se compararon después con los contenidos y las tareas sobre VOT presentadas en una muestra de libros de textos de educación primaria.

Las orientaciones analizadas coinciden en afirmar la importancia del desarrollo de la visualización espacial en la vida cotidiana, puesto que permite una mejor comprensión, conocimiento, descripción y análisis del mundo físico. Sin embargo, mientras el tratamiento de la VOT en las orientaciones curriculares regional y nacional es muy general y toca solo aspectos aislados del tema, sin especificar su importancia en el contexto, en los Estándares para la Matemática Escolar del "National Council of Teacher of Mathematics" (NCTM, 2000) se concede a este tópico mayor atención, describiendo varios elementos de visualización espacial a lo largo del currículo en los diferentes niveles educativos. De manera particular, en este documento se subraya la importancia del pasaje desde las figuras bi- y tridimensionales a sus representaciones, y viceversa, proponiendo trabajar con diferentes representaciones planas: desarrollos planos de los sólidos, vistas laterales y desde arriba, secciones. Además de los procedimientos visuales necesarios para dibujar e interpretar dichas representaciones planas se mencionan otros procedimientos que tienen connotaciones visuales, tales como: imaginar, predecir, experimentar y comprobar los resultados de determinadas transformaciones (rotaciones, cortes,…) sobre una figura, representar relaciones y transformaciones, componer y descomponer en partes.

El análisis conjunto de los currículos internacionales, nacionales y de la comunidad autónoma, nos ha permitido destacar algunas interesantes sugerencias sobre la forma y los medios para desarrollar determinadas facetas de la VOT en la enseñanza de la geometría espacial, en particular en la interpretación, comunicación y análisis de informaciones gráficas. Hemos destacado algunos interesantes ejemplos de tareas visuales, lenguajes y acciones visuales que cubren aspectos centrales del tema.

Por otra parte hemos señalado que muchas de las recomendaciones y problemáticas detectadas en las investigaciones y en los currículos, vienen tratadas solo marginalmente en la mayoría de libros de texto analizados; en particular se observa que los aspectos sobre VOT no se insertan de forma armónica y homogénea en los apartados de geometría espacial.

Para dicho análisis se tomaron 26 libros de texto de educación primaria, de las editoriales de más amplia difusión en la Comunidad Autónoma de Andalucía, que incluyen entre sus temas contenidos relativos a la geometría espacial y se centró la atención principalmente en dos aspectos: la descripción y clasificación de las tareas de geometría espacial, prestando particular atención a las que involucran determinados aspectos de la visualización espacial, y el análisis de los tipos de representaciones planas utilizadas.

En lo que se refiere a las tareas presentadas, se señala una preponderancia de tareas de reconocimiento, descripción y clasificación de los sólidos, en las cuales se requiere principalmente relacionar un conjunto de propiedades analíticas con el nombre del respectivo sólido. Además, las tareas sobre VOT, que se apoyan en acciones visuales y/o involucran representaciones planas que requieren una reorganización de la información gráfica para visualizar el cuerpo que representan, son frecuentemente presentadas como actividades recreativas, en el margen de alguna página, o al final de una lección, y probablemente consideradas como facultativas por la mayoría de los maestros.

Con respecto a las acciones visuales sugeridas en las directrices, destacamos que en los libros de texto analizados se presentan escasas tareas de composiciones, descomposiciones de objetos tridimensionales, y de rotaciones.

Hemos señalado que los diferentes tipos de representaciones planas descritas en los currículos (desarrollos planos de los sólidos, vistas laterales y desde arriba, secciones, plegados) son frecuentemente utilizados con tareas repetitivas, en las cuales el proceso visual pierde fuerza. En la gran mayoría de libros de texto no se describen dichas representaciones, o solo se hace referencia a propiedades aisladas, principalmente de tipo visual. En particular no se aprovecha la potencialidad dada para el estudio de las diferentes representaciones planas, tanto a nivel de propiedades y funciones que desempeñan, como por lo que se refiere a las técnicas de dibujos. Muy escasas son las tareas de construcción y de dibujo en perspectiva.

Aunque en los currículos se destaca la importancia del trabajo manipulativo, sobre todo en los primeros ciclos, en los libros de texto analizados son muy pocas las actividades que requieren el uso de representaciones tridimensionales de las figuras. Se trabaja principalmente con representaciones planas de los sólidos, generalmente representados en perspectiva caballera o isométrica.

También este análisis nos ha permitido determinar la incidencia de determinados tipos de tareas y representaciones planas en los diferentes libros de texto, por año, editorial y curso, permitiéndonos destacar los ejemplares y colecciones de libros de texto que más promueven el desarrollo de la VOT sugerido en los currículos.

Este estudio nos ha aportado información para la construcción del instrumento de evaluación de los conocimientos de los futuros maestros y la interpretación de los resultados de la aplicación de dicho instrumento.

En consecuencia, se examina el siguiente objetivo específico:

Objetivo específico OE4: *Construir un instrumento para evaluar aspectos relevantes del conocimiento común, ampliado y especializado sobre visualización de objetos tridimensionales.*

En el análisis de las investigaciones previas relativas al tema, no hemos encontrado un cuestionario comprensivo que evaluase adecuadamente los conocimientos de los profesores de educación primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. En consecuencia se decidió iniciar la construcción de un nuevo cuestionario teniendo en cuenta dos criterios en la selección de las tareas:

- Según los aspectos de los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales que nos interesa estudiar.
- Según los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que se quieren evaluar.

El proceso de construcción del cuestionario se recoge en el Capítulo 4.

Con el fin de identificar los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales, hemos analizado las tareas incluidas en las investigaciones sobre el tema en el campo de la educación matemática y de la psicología. Los contenidos principales emergentes de dicho análisis se compararon con los contenidos presentes en las tareas presentadas en los libros de texto de educación primaria y en las directrices curriculares para la educación primaria. Para el cuestionario piloto se seleccionaron cinco tipos de tareas relacionadas con diferentes aspectos de la VOT: la coordinación e integración de las vistas de objetos, la rotación de un objeto en el espacio, el plegar y desplegar desarrollos, la composición y descomposición en partes de un objeto tridimensional y la generación de sólidos de revolución.

Para seleccionar los aspectos del conocimiento que hemos querido evaluar nos hemos apoyado en el modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor basado en el "enfoque ontosemiótico" y descrito en Godino (2009), que articula y desarrolla otros modelos sobre los conocimientos del profesor de matemáticas (PCK, Shulman, 1986; MKT, Hill et al., 2008). Este modelo tiene en cuenta las diferentes facetas implicadas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos. Hemos decidido centrarnos en el análisis de los conocimientos relacionados con la faceta epistémica del tema y evaluar aspectos específicos del conocimiento del contenido común, ampliado y especializado. Cada ítem del cuestionario se ha compuesto de diferentes sub-ítems, según el aspecto del conocimiento que pretende evaluar: para evaluar el conocimiento común sobre VOT hemos seleccionado tareas de libros de texto de primaria; para evaluar aspectos del conocimiento ampliado se ha propuesto resolver una tarea relacionada con la primera pero de un nivel más alto, que involucra un conocimiento más avanzado del contenido específico. Para evaluar el conocimiento especializado se seleccionaron tres aspectos específicos, la justificación de la resolución de la tarea elemental, la identificación de los conocimientos matemáticos principales que se han utilizado en la resolución y la variación de la tarea, para que resulte más fácil/más difícil de resolver para un niño de primaria

Cada ítem del cuestionario ha sido analizado por medio de la "Guía para el reconocimiento de objetos y procesos", lo que ha permitido identificar los diferentes objetos y procesos involucrados en las tareas, y elaborar una primera tabla con los contenidos asociados a cada sub-ítem.

Esta primera versión del cuestionario fue probada con 6 estudiantes de primer curso de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada. El análisis cualitativo de las respuestas de los alumnos del grupo piloto nos ha permitido hacer una selección y cambios de las tareas y elaborar un segundo cuestionario que fue evaluado por un grupo de expertos. Las observaciones y sugerencias de los expertos nos han llevado a la versión final del cuestionario, cuyos ítems han sido nuevamente analizados, en términos de funciones semióticas analítico-visuales, permitiéndonos identificar potenciales errores y dificultades en las respuestas de los estudiantes (formulados en términos de hipótesis).

3. CONCLUSIONES SOBRE LAS HIPÓTESIS

A continuación se discuten las conclusiones obtenidas respecto las hipótesis iniciales de la investigación, formuladas en el capítulo 2, y las hipótesis emergentes del análisis del cuestionario, enunciadas en el capítulo 4.

Hipótesis 1. *Los futuros maestros, después de estudiar el tema de "geometría para* *maestros", presentan dificultades para resolver tareas sobre visualización de objetos tridimensionales que involucran tanto conocimiento común como ampliado.*

Los estudiantes del segundo curso de la especialidad de Educación Primaria tienen los conocimientos previos de geometría espacial relativos a sus formaciones básicas y los que profundizaron durante el año anterior en el estudio del bloque temático de geometría para maestros. Estos conocimientos no resultaron suficientes para resolver con éxito la mayoría de las tareas propuestas en los apartados a y c de los diferentes ítems.

En particular, el conocimiento común sobre visualización de objetos tridimensionales de los futuros profesores evaluados no es el esperado: el 40% de los alumnos no contesta de forma óptima (8 sobre 10) a las tareas tomadas de libros de textos de primaria sobre los diferentes aspectos del tema. Solo dos tareas fueron resueltas por los alumnos de forma satisfactoria (1a y 5a); sin embargo, en las dos respectivas tareas sobre el conocimiento ampliado los alumnos manifestaron diferentes dificultades.

Observamos que, aunque las tareas relacionadas al conocimiento común del contenido tienen en general un grado de dificultad bajo o muy bajo, resultan interesantes como tareas base para el posterior análisis de la justificación, los conocimientos involucrados y la planificación de variaciones que aumenten/reduzcan su grado de dificultad.

La discusión de las siguientes hipótesis, formuladas específicamente para cada uno de los sub-ítems a), nos permite confirmar la efectiva facilidad de resolver los sub-ítems 1a) y 5a) y describir las dificultades principales encontradas en cada una de las demás tareas.

Hipótesis H1a: *Se supone que los estudiantes resuelvan de forma optima el sub- ítem 1a) puesto que los conocimientos involucrados en su resolución son elementales, y el carácter de la tarea es fuertemente empírico.*

Esta hipótesis es corroborada por el porcentaje de aciertos (94%): el conocimiento común que tienen los alumnos para resolver dicha tarea elemental propia de G1 es satisfactorio. Los resultados permiten afirmar que los alumnos saben cambiar mentalmente de posición frente a una situación cotidiana representada en perspectiva, interpretando correctamente las relaciones espaciales (posiciones relativas) de los objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista.

Los diferentes objetos visuales que aparecen en el enunciado y en el proceso de resolución de la tarea, posición, punto de vista, dirección de mirada, fotografía, derecha, izquierda, delante, detrás, son familiares para los alumnos. No se presentaron conflictos entre expresión y contenido.

Hipótesis H2a: *Dada la difícil materialización del procedimiento de coordinar e integrar vistas ortogonales, se prevé que los alumnos tengan dificultades para resolver el sub-ítem 2a.*

La hipótesis ha sido confirmada con el análisis de las respuestas de los alumnos: aunque la tarea proviene de un libro de texto de educación primaria, solo el 66% de los alumnos consiguen resolverla de forma correcta, dando una buena representación plana del objeto tridimensional.

Además, en el análisis de las justificaciones dadas a dichas soluciones, emerge que el 23% de los alumnos interpretó las vistas del objeto dadas en el enunciado, como si fueran las caras del objeto, la mayoría considerando que la planta es la base del objeto (y así la nombraron), mientras que los alzados son las caras laterales del objeto, también nombradas como paredes. Ejemplo (figura 6.1):

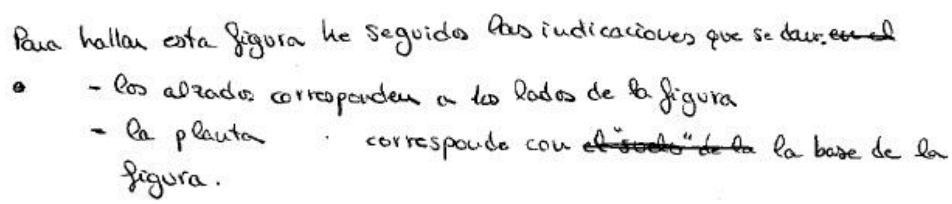

Para hallar esta figura he seguido las indicaciones que se dan: ~~en el~~
- los alzados corresponden a los lados de la figura
- la planta corresponde con ~~el "suelo" de la~~ la base de la figura.

Figura 6.1: Justificación de la tarea interpretada de forma incorrecta

Aunque estas justificaciones se refieren a soluciones correctas del ítem a), su análisis nos ha permitido destacar errores conceptuales importantes, que habrían pasado desapercibidos con el sólo análisis de la solución al ítem a), y que podrían dar lugar a errores en otras tareas similares que involucran el concepto de vista.

Dicha interpretación del enunciado confiere a la tarea un carácter aún más empírico, puesto que trabaja con conceptos, las caras del objeto, que se pueden materializar con más facilidad que "las vistas".

También se observaron errores en la terminología de elementos geométricos: algunos alumnos utilizaron el término "lados" para referirse a "caras" del objeto y el término "altura" para referirse a las "caras laterales". Análogamente, Gorgorió (1998), trabajando con alumnos de escuela secundaria, refiere el uso de palabras que corresponden a la geometría bidimensional para referirse a partes de objetos tridimensionales.

Por otra parte las respuestas parcialmente correctas (21%) e incorrectas (11%), se caracterizaron principalmente por dificultades técnicas y conceptuales relacionadas con la representación de objetos tridimensionales en el plano.

Las respuestas parcialmente correctas presentaron dibujos muy imprecisos del objeto (correcto), y generalmente se relacionan con una correcta visualización del objeto asociada a una incapacidad de representarlo de forma adecuada (ejemplo en figura 6.2).

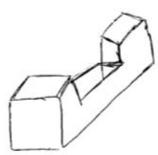


Figura 6.2: Ejemplo de respuesta parcialmente correcta del sub-ítem 2a.

En lo que se refiere a las respuestas incorrectas, se asociaron a la incapacidad de coordinar e integrar las vistas dadas en un único objeto y/o a grandes dificultades para dibujarlo (ejemplo en figura 6.3).

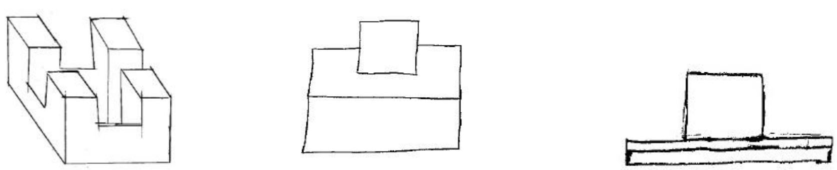


Figura 6.3: Ejemplos de tres respuestas incorrectas del sub-ítem 2a

Hipótesis H3a: *Apoyándonos en los resultados de investigaciones previas prevemos que la mayoría de los estudiantes resuelvan el sub-ítem 3a, apoyándose a la simulación* *mental del procedimiento visual de plegar físicamente un papel de cartulina, y entonces puedan:*

- reconocer fácilmente los desarrollos B, F y G, cuyas estructuras prototípica (constan de una "superficie lateral" y "dos bases") permiten fácilmente su reconstrucción visual;

- tener dificultades en reconocer el desarrollo D, puesto se necesita un tratamiento visual más complejo, que requiere la coordinación de diferentes transformaciones para reconstruir el objeto.

Entre los sub-ítems relacionados con el conocimiento común del contenido, este sub-ítem resultó el más difícil de resolver. Es relativo al contenido "plegar y desplegar desarrollos", y se pide identificar los desarrollos correspondientes a un cubo: solo el 30% de los estudiantes contestó de forma correcta a la pregunta.

La hipótesis H3a es corroborada, ya que:

- los hexaminós B, F y G han sido identificados como desarrollos por casi el 70% de los alumnos;
- el desarrollo D, 3-3, fue de más difícil reconocimiento: el 65% de los alumnos no lo reconocieron como posible desarrollo de un cubo.

Dichos resultados concuerdan con otros estudios (Fishbein, 1993; Mariotti, 1997; Mesquita, 1992).

Hipótesis H4a*: Dada la fuerte componente empírica de la tarea, prevemos que algunos alumnos intenten resolverla únicamente apoyándose en cortes longitudinales, que materializan el procedimiento usual de cortar objetos cotidianos cilíndricos (tartas, quesos,…).*

En el análisis de las respuestas al sub-ítem 4a), relativo a la "composición y descomposición en partes de un objeto tridimensional", se ha destacado que el 18% de los estudiantes indicaron intentos de cortar únicamente la cara superior del cilindro (figura 6.4), lo que confirma nuestra hipótesis.

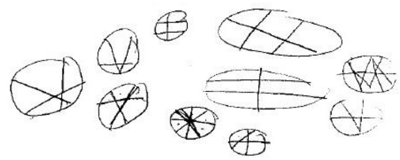


Figura 6.4: Ejemplo de una respuesta incorrecta del sub-ítem 4a, relativa a los intentos de cortar únicamente la cara superior del cilindro

Otra dificultad encontrada fue relativa a errores en la interpretación de la representación plana del objeto, que considera el dibujo como un objeto geométrico bidimensional sin ponerlo en relación con el objeto tridimensional que representa (el alumno "corta la representación" y no el objeto que representa, ejemplo en la figura 6.5).

.

Figura 6.5: Dos ejemplos del error "corte de la representación" en la solución del sub-ítem 4a.

Dichos errores pueden estar relacionadas con "dificultades de comprender la naturaleza de los objetos tridimensionales representados en dos dimensiones", dificultades ya señaladas por otros autores en estudiantes de escuela secundaria (Parzysz, 1991; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009).

Hipótesis H5a: *Dada la familiaridad con los objetos involucrados en la tarea a) y su fácil tratamiento visual, se prevé que los estudiantes resuelvan de forma óptima el sub-ítem 5a.*

La forma de la figura plana, el tamaño de las partes que la componen y la posición del eje de revolución, permiten asociarla a un determinado cuerpo de revolución con facilidad. La presencia del eje en la representación del sólido en perspectiva facilita la asociación. De hecho, aun no conociendo el significado de cuerpo de revolución, un alumno puede asociar correctamente las representaciones fijándose únicamente en las secciones longitudinales de los sólidos que contienen el eje de rotación. Siendo triángulos y rectángulos de diferentes proporciones, dicha correspondencia no resulta difícil.

Estas últimas observaciones nos han permitido anticipar los buenos resultados en las respuestas de los alumnos. De hecho, el 94% de los estudiantes contestaron de forma correcta.

En el estudio de los resultados de estos sub-ítems a) se complementa con el análisis de sus justificaciones (sub-ítem a'), que nos ha permitido en muchos casos interpretar algunos de los errores manifestados por los alumnos.

En lo que se refiere al conocimiento ampliado del contenido, se observan considerables dificultades relacionadas con el conocimiento ampliado sobre los contenidos "coordinar e integrar vistas de objetos" y "generar cuerpos de revolución". De manera particular los estudiantes no están capacitados para la resolución de una tarea que requiere reflexionar sobre la pluralidad de objetos que pueden corresponder a tres vistas ortogonales determinadas y de una tarea que requiere generar un cuerpo de revolución en el cual el eje de rotación es externo a la figura plana que lo engendra. Observamos que dichos contenidos específicos no están contemplados en los libros de texto de primaria. Los ejercicios relacionados con el contenido "coordinar e integrar vistas de objetos" que proponen los libros de texto piden dibujar o identificar *el* objeto correspondiente a tres vistas ortogonales, lo que excluye la reflexión sobre una posible pluralidad de objetos. En las representaciones de la generación de los cuerpos de revolución en los libros de texto se dibujan las figuras planas *pegadas* a barras que giran, lo que involucra la "idea" de que el eje, girando, "permita" la rotación de la figura plana; procedimiento que no se puede generalizar para el caso de eje externo a la figura.

Puesto que los respectivos sub-ítems (2a y 5a) relacionados con el conocimiento común de dichos contenidos han sido resueltos de forma correcta (o parcialmente correcta), sería interesante analizar si los conocimientos adquiridos por los estudiantes a lo largo de su escolaridad sobre estos temas puedan resultar conflictivos en el momento de resolver tareas que involucran conocimientos más avanzados.

Hipótesis H1c: *Se prevé que en el sub-ítem 1c, parte de los alumnos pueda no asociar de forma espontánea el concepto de vista con el de proyección ortogonal, y entonces dar representaciones de la vista desde atrás con otras técnicas de dibujo.*

Aunque el 51% de los alumnos dibujaron la vista correctamente, interpretando el término "vista" como proyección ortogonal del objeto en el plano correspondiente, el término "vista" presente en el enunciado ha generado en el 14% de alumnos conflictos semióticos, entre expresión y contenido. Estos se refieren a los diferentes significados que se pueden atribuir al termino "vista" y que pueden estar condicionados por la interpretación de la representación del edificio dada en la tarea y de los términos "ángulo frente-derecha" "FRENTE" y "DERECHA" presentes en el enunciado. Estos alumnos intentaron dibujar el edificio desde el ángulo detrás-izquierda en perspectiva isométrica, o sea desde el punto opuesto al cual se refiere la imagen dada (figura 6.6). Esto corresponde a la interpretación del término "vista desde atrás" no con referencia a los términos presentes en la representación del edificio (FRENTE y DERECHA) sino con respecto a la asunción que la representación en perspectiva del edificio corresponde a la vista desde frente.

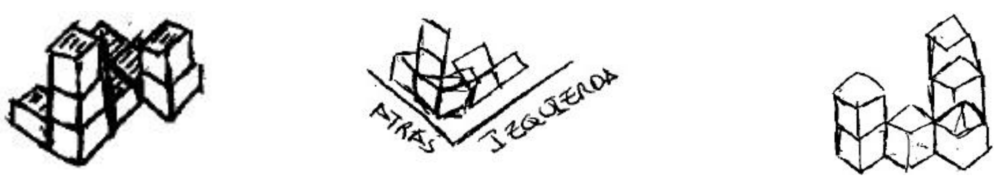
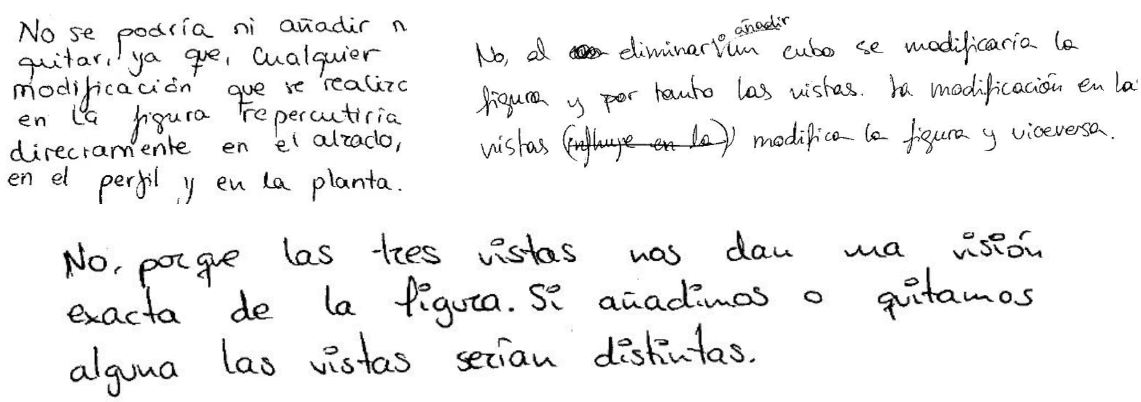


Figura 6.6: Ejemplos de respuestas basadas en la incorrecta interpretación del término "vista"

Hipótesis H2c: *Se prevé que los alumnos tengan dificultades para resolver el sub-ítem 2c, posiblemente apoyadas en la incorrecta concepción de que las tres vistas ortogonales de un objeto definen de forma unívoca un objeto tridimensional.*

Este ítem fue resuelto de forma correcta sólo por el 15% de alumnos. La mayoría de los errores identificados están relacionados con la dificultad de visualizar los cambios en las tres vistas de un objeto a partir de la variación de la estructura del objeto: muchos alumnos afirman que cambiando parte de la estructura del objeto al menos una vista tiene que cambiar (incorrecto en general y de manera particular en el caso de la tarea propuesta). Esta dificultad parece estar relacionada con la incorrecta concepción de que las tres vistas ortogonales de un objeto definen de forma univoca un objeto tridimensional, como se muestran en los ejemplos de la figura 6.7, lo que confirma nuestra hipótesis.



No se podría ni añadir n quitar, ya que, cualquier modificación que se realice en la figura repercutiría directamente en el alzado, en el perfil y en la planta.

No, al diminar/añadir un cubo se modificaría la figura y por tanto las vistas. La modificación en las vistas ~~(influye en la)~~ modifica la figura y viceversa.

No, porque las tres vistas nos dan una visión exacta de la figura. Si añadimos o quitamos alguna las vistas serían distintas.

Figura 6.7: Ejemplos de respuestas basadas en la incorrecta concepción de representación de un objeto por vistas ortogonales.

Hipótesis H4c’**:** *Apoyándonos en los resultados de investigaciones previas, prevemos dificultades relativas al dibujo en perspectiva isométrica.*

La hipótesis es corroborada, puesto que la mayoría de errores (el 72%) manifestados por los alumnos en la resolución del ítem 4c’ se debe a dificultades para dibujar en perspectiva isométrica, respetando la hoja de puntos dada (ver figura 6.8).

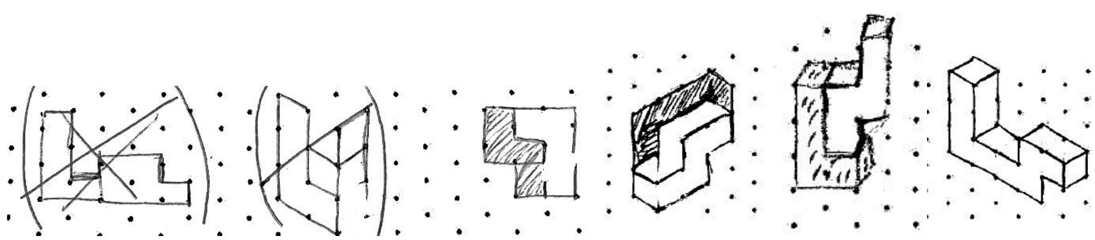


Figura 6.8: Ejemplo de alumnos que manifiestan dificultades para dibujar en perspectiva isométrica, respectando la hoja de puntos.

El considerable número de estudiantes que no contestan al ítem (19%) puede también reflejar la presencia de dicha dificultad, que bloquea el intento de dar una solución a la tarea.

Hipótesis H5c: *Apoyándonos en los resultados del análisis de libros de textos y el análisis de la tarea, prevemos dificultades relativas al sub-ítem 5c, puesto que requiere visualizar una figura plana que rota alrededor de un eje externo a ella, procedimiento visual no familiar para el estudiante y que puede chocar con concepciones incorrectas que tienen relación con el concepto de cuerpo de revolución.*

Observamos que el sub-ítem 5c ha provocado efectivamente muchas dificultades: el 79% de alumnos no contestaron de forma correcta o dejaron la respuesta en blanco.

La mayoría de errores identificados se han asociado a una concepción incorrecta de cuerpo de revolución, como sólido generado por la rotación de una figura alrededor de un eje únicamente interior o tangente a ella. De hecho, en las soluciones propuestas por los alumnos, se refleja la resistencia a representar la figura plana separada del eje de revolución (figura 6.9).

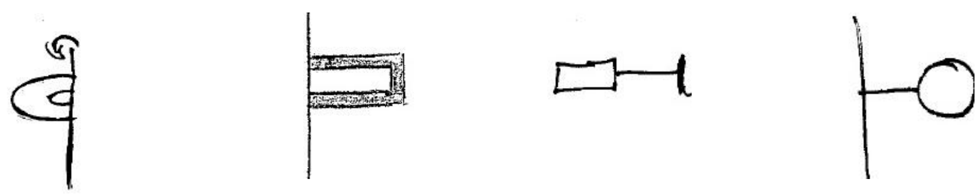


Figura 6.9: Ejemplos de representaciones dadas como soluciones al sub-ítem 5c.

De forma general, el conocimiento ampliado del contenido de estos estudiantes puede ser calificado como insuficiente. Se ha observado que la media de la puntuación total de los chicos ha sido mayor de la media de las chicas (y la diferencia es estadísticamente significativa) lo que muestra una posible dependencia del conocimiento común y ampliado sobre VOT con el género.

Diferentes dificultades encontradas van asociadas a la interpretación de representaciones planas de objetos tridimensionales. Estas dificultades pueden obstaculizar y a veces impedir un procedimiento de tipo visual sobre el objeto. De otra parte somos conscientes de que la incapacidad de producir de forma correcta una representación plana de un objeto tridimensional no siempre refleja una escasa habilidad de visualizar el objeto.

La siguiente hipótesis se centra en el análisis del conocimiento especializado del contenido.

Hipótesis 2*: Los futuros maestros, después de recibir formación en didáctica de las matemáticas, tienen dificultades para resolver tareas sobre visualización de objetos tridimensionales que involucran conocimiento especializado del tema. En particular las justificaciones de las respuestas se basarán en argumentaciones empírico-perceptivas en detrimento de las justificaciones lógico- deductivas.*

Analizando los cuestionarios de forma singular, observamos que a nivel individual los alumnos tienen un muy pobre conocimiento especializado relativo a las justificaciones de tareas elementales, a la identificación de conocimientos presentes en las tareas dadas y a la elaboración de variaciones de dichas tareas.

Por lo que se refiere a las justificaciones presentadas a las tareas, emergen interpretaciones de las tareas en términos empíricos, asociadas a validaciones de tipo perceptivo, en las cuales hay una predominancia de la componente visual. Dichas justificaciones, si son apoyadas en buenas representaciones planas de los objetos, propiedades y procedimientos involucrados, se consideran pertinentes (ejemplo en figura 6.10).

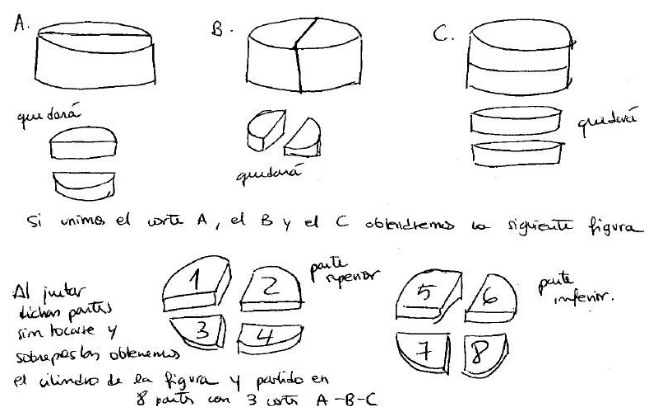


Figura 6.10: Ejemplo de justificación pertinente del procedimiento visual de cortar, apoyada en representaciones ostensivas.

Sin embargo, en muchos casos los alumnos no consiguen describir adecuadamente, gráficamente o analíticamente, el procedimiento visual que les ha permitido resolver la tarea, y las argumentaciones resultan incompletas (ejemplo en figura 6.11)

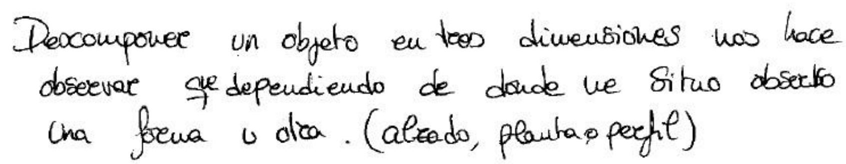


Figura 6.11: Ejemplo de justificación incompleta, basada en propiedades visuales aisladas.

Además, frecuentemente la descripción verbal del procedimiento visual se apoya únicamente en la descripción de la simulación de la experiencia empírica (de plegar, cortar, girar,…), resultando adecuado únicamente para alumnos que puedan "ver" dicha acción (ejemplo en figura 6.12)

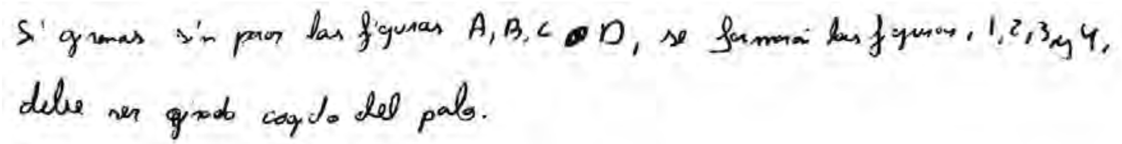


Figura 6.12: Ejemplos de justificación basada en la descripción de la experiencia física.

Aunque las tareas presentadas tengan una fuerte componente empírica, consideramos que, para argumentar sus soluciones de forma pertinente los alumnos tengan que poder relacionar los conceptos, propiedades y procedimientos visuales involucrados en la solución con los objetos analíticos a los cuales se refieren.

En las argumentaciones de tipo deductivo-informales dadas por los alumnos, dicha sinergia entre lo visual y analítico propia de las tareas está a veces presente de forma implícita: para describir los objetos visuales utilizados el sujeto utiliza un vocabulario cotidiano, cuyos términos de lenguaje se refieren a determinados objetos analíticos. Dicha relación entre los objetos visuales ("ver") y objetos analíticos ("saber"), aunque no explicitada por el estudiante, le permite no obstante hacer afirmaciones correctas sobre las soluciones presentadas, y justificar sus soluciones

La carencia de pruebas deductivo-formales, con referencias a objetos independientes del contexto y con potencial de generalidad a diferentes situaciones, manifiesta que la interpretación del término "justificar" por parte de los alumnos ha sido estrictamente dependiente al nivel de las tareas (sub-ítems a). La gran mayoría de estudiantes, no relacionan de forma espontánea la justificación de dichas tareas con otros temas más avanzados del currículo correspondiente, como puede ser el dibujo técnico, propiedades de geometría analítica,…

Por lo que se refiere a la identificación de conocimientos puestos en juego en la resolución de la tarea, los resultados muestran que a nivel individual los alumnos tienen un conocimiento especializado muy pobre. Hemos realizado un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta sobre conocimientos movilizados en cada ítem (categorizando los diferentes tipos de objetos matemáticos reconocidos), y también un análisis cuantitativo, distinguiendo un grado de pertinencia al conjunto de conocimientos reconocidos por cada estudiante. El grado de pertinencia refleja el número de conocimientos adecuados identificados por los estudiantes, que han sido evaluados y clasificados comparándolos con una respuesta esperada, elaborada mediante un análisis a priori de la tarea solicitada. La puntuación media de toda la muestra relativa a esta variable fue solo de 3,6 (sobre 10).

De forma general se puede observar que la mayoría de conocimientos encontrados son de tipo conceptual: los alumnos mencionan conceptos básicos generalmente ya presentes en el enunciado de la tarea, aunque no los definen (Figuras 6.13 y 6.14).

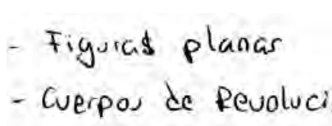


Figura 6.13: Ejemplo de respuesta parc. pertinente.

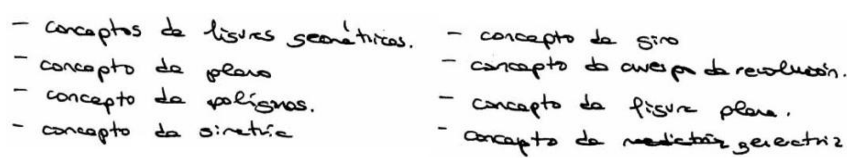


Figura 6.14: Ejemplo de respuesta pertinente.

Por lo que se refiere a la elaboración de variaciones de las tareas, también hemos realizado un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los estudiantes, categorizando los diferentes tipos de cambios propuestos: cambios en el lenguaje y artefactos visuales, cambios en la descripción de conceptos visuales, cambios en las propiedades del objeto, cambios en el procedimiento visual y cambios en la longitud de la tarea. También hemos realizado un análisis cuantitativo, distinguiendo un grado de pertinencia al conjunto de tareas propuestas por cada estudiante. De igual modo que para los conocimientos, el grado de pertinencia de las respuestas se asignó comparando una respuesta esperada, elaborada mediante un análisis a priori de la tarea solicitada, con las soluciones dadas por los estudiantes.

La puntuación media de todo el grupo para la variable grado de pertinencia de la respuesta fue solo de 3,0 (sobre 10). Estos resultados mostraron un muy pobre conocimiento especializado relacionado con la planificación de variaciones de tareas visuales.

En particular se ha observado que la mayoría de las variaciones no pertinentes han sido realizadas interpretando los términos cambio del enunciado” únicamente por lo que se refiere a cambio de aspectos lingüísticos (figura 6.15). Se encontraron entonces enunciados muy parecidos al original, donde únicamente aparecen cambios en la estructura de la pregunta y/o cambios de lenguaje sin interés.

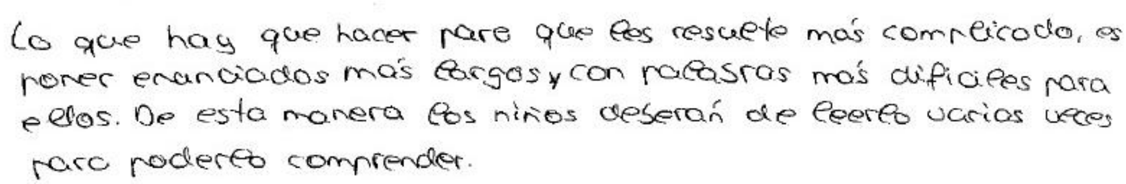

Lo que hay que hacer para que les resulte más complicado, es poner enunciados más largos y con palabras más difíciles para ellos. De esta manera los niños deberán de leerlo varias veces para poderlo comprender.

Figura 6.15: Ejemplo de justificación de una variación no pertinente.

Sin embargo, a nivel global, observamos que la muestra de estudiantes ha conseguido manifestar un considerable conjunto de conocimientos especializados pertinentes: los alumnos han identificados un interesante conjunto de conocimientos puestos en juegos en las tareas visuales seleccionadas (resumidos en las tablas 5.52, 5.53, 5.54) y han conseguido proponer un conjunto amplio de cambios pertinentes y significativos.

Esta constatación nos permite prever que, la puesta en común de los conocimientos especializados de los estudiantes, con implementación de acciones formativas específicas, podría resultar muy constructiva.

4. APORTACIONES DEL TRABAJO

Nuestro interés por indagar la VOT en el campo de la formación de profesores de educación primaria nos llevó a explorar y clasificar de manera sistemática las investigaciones referidas a los aspectos epistémicos (significados institucionales), cognitivos (errores, dificultades en el aprendizaje por parte de niños y adolescentes) e instruccionales (experiencias de enseñanza, uso de recursos). Consideramos que la síntesis realizada de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la VOT es una primera aportación de nuestra investigación.

La recopilación y clasificación, en relación con los diferentes aspectos del tema, de los ítems usados en investigaciones anteriores, es un material potencialmente útil para otros investigadores que quieren abordar el tema de la VOT, tanto en el ámbito de evaluación como instruccional.

La aplicación del marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática ha permitido sintetizar los resultados de las investigaciones y analizar la complejidad de los objetos y procesos intervinientes, argumentando la pertinencia del estudio de determinados conocimientos para la enseñanza del tema. Dicho análisis ha llevado al planteamiento de una visión ontosemiótica de la visualización espacial, que consideramos otra aportación del trabajo.

En particular se ha mostrado que el uso de la Guía para el Reconocimiento de Objetos y Procesos (GROP) ayuda a desvelar de manera sistemática la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en una práctica matemática, esto es, los conocimientos (comprensiones, competencias,…) requeridas para su realización, como también a explicar las dificultades de los estudiantes en términos de la complejidad de las conocimientos requeridos. Se trata de superar una visión limitada de la matemática, frecuentemente concebida en términos de conceptos y procedimientos, reconociendo, además, el papel de los distintos lenguajes y significados atribuidos a términos y expresiones, los tipos de justificaciones de propiedades y procedimientos, los procesos de argumentación y generalización.

El análisis de los libros de textos de educación primaria nos ha permitido determinar la incidencia de determinados tipos de tareas y representaciones planas en los diferentes libros de textos, por año, editorial y curso, permitiéndonos destacar los ejemplares y colecciones de libros de textos que más promueven el desarrollo de le VOT sugerido en los currículos. Consideramos que este resultado es una aportación interesante, por ejemplo para los profesores y educadores que quieren seleccionar adecuadamente determinados libros de textos para sus alumnos.

La clasificación de tareas sobre VOT presentes en los libros de textos de educación primaria analizados, constituye un interesante material para el estudio del conocimiento común de los futuros profesores sobre el tema. Además la recopilación de los diferentes acercamientos a las representaciones planas dadas en los libros puede guiar a profesores y educadores en la interpretación de determinadas respuestas gráficas de los alumnos.

Por lo que se refiere a la construcción del cuestionario, observamos que la construcción de instrumentos de evaluación del conocimiento matemático para la enseñanza es un campo de creciente interés como se pone de manifiesto en los trabajos de Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008).

La estructura de cada ítem y los enunciados de las consignas hacen operativo parte del modelo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009) y permiten a los futuros profesores explicitar algunos aspectos de los diferentes tipos de sus conocimientos, relacionados con la faceta epistémica: el conocimiento común, especializado y ampliado del contenido.

El intento de clarificar y hacer operativa la noción de conocimiento didáctico-matemático, es una aportación teórica para el campo de investigación sobre formación de profesores (Wood, 2008).

La aplicación de este cuestionario a una muestra relativamente importante (241) de futuros profesores, ha permitido caracterizar los conocimientos didáctico-matemáticos sobre VOT evaluados. Dicha información complementa y amplía los resultados de investigaciones previas sobre el tema.

Se observa que los estudiantes no tienen el conocimiento común esperado, o sea suficiente para resolver con éxito todas las tareas de los libros de texto de educación primaria presentadas. En particular, en algunos alumnos, se encontraron los siguientes errores/dificultades relativas al conocimiento común:

- Errores en la terminología de elementos geométricos: llaman partes de objetos tridimensionales utilizando palabras que corresponden a la geometría bidimensional (por ejemplo lado en lugar que cara), utilizan expresiones ambiguas o incorrectas cuando se refieren a la posición o al movimiento del objeto (errores también destacados por Gorgorió 1998, y Pallascio, Allaire y Mongeau, 1993),
- Interpretaciones incorrectas del concepto de vista: consideran las vistas de un objeto

tridimensional como sus caras, en lugar de sus proyecciones ortogonales.

- Interpretación incorrecta de representaciones planas de objetos tridimensionales: no asocian la representación plana con el objeto tridimensional que representa, considerando la representación únicamente como objeto bidimensional.

El conocimiento ampliado también resultó insuficiente para resolver con éxito la mayoría de las tareas propuestas. En particular, los resultados muestran, al igual que en el estudio de Malara (1998), que los futuros profesores se encontraron con dificultades para coordinar las visiones parciales de un objeto, para visualizar los objetos globalmente, para producir una representación plana de objetos tridimensionales y para verificar la corrección de sus producciones y conceptualizar los principios de representación.

En lo que se refiere al conocimiento especializado, se han observado numerosas dificultades, tanto por lo que se refiere a las argumentaciones, como a la identificación de conocimientos puestos en juego y a la elaboración de variaciones de tareas. En particular se ha observado que los estudiantes utilizan mayoritariamente argumentaciones visuales (de tipo empírico-perceptivas) para justificar las soluciones de las tareas propuestas (lo que concuerda con Fernández, 2011), raramente apoyadas en las propiedades analíticas que subyacen.

Aunque los estudiantes movilizan gran cantidad de objetos y procesos visuales en sus resoluciones y justificaciones, no lo hacen de forma eficiente y muchas veces ni siquiera de forma consciente, puesto que los conocimientos identificados son muy escasos.

Una consecuencia educativa de nuestro análisis es que los sujetos cuyo estilo cognitivo es básicamente visual deberían ser instruidos para desarrollar habilidades analíticas, y viceversa, porque ambas habilidades son útiles para la práctica matemática en diferentes momentos de su realización. Se trataría pues de favorecer el desarrollo del estilo cognitivo armónico que describió Krutestkii (1976), el cual combina características del visual y analítico.

El profesor, y previamente los diseñadores curriculares y formadores de profesores, debe tomar conciencia del papel de la visualización, y en general la ostensión, en la construcción y comunicación matemática. Es necesario tener en cuenta la naturaleza no ostensiva, inmaterial, de los objetos matemáticos y las relaciones dialécticas complejas que se establecen entre estos objetos y sus representaciones materiales.

Esta información, junto con el instrumento de evaluación construido puede ser el punto de partida para el diseño, implementación y evaluación de intervenciones educativas en el campo de la formación de profesores de educación primaria.

5. LIMITACIONES DEL TRABAJO Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Los resultados del trabajo exponen un conjunto de conocimientos personales (conocimientos comunes, ampliados y especializados) para cada uno de los ítems. Sería interesante intentar elaborar configuraciones cognitivas para cada uno de los ítems, lo que necesitaría realizar un estudio de casos para varios sujetos, con entrevistas personales, con el fin de analizar con mejor eficacia el procedimiento utilizado para su resolución caracterizando sus componentes analíticas y visuales.

Dada la amplitud de los componentes y elementos de significado del conocimiento didáctico-matemático, como se pone de manifiesto en Godino (2009), ha sido necesario restringir la evaluación a aspectos parciales relevantes del conocimiento común, ampliado y especializado de la VOT. Se ha dejado como cuestión abierta para futuras investigaciones la evaluación de las dimensiones cognitiva (conocimiento del contenido en relación a los estudiantes) e instruccional (conocimiento del contenido con relación a la enseñanza).

Además, en lo que se refiere al contenido matemático de las tareas, observamos que en nuestro estudio sólo se han analizado determinadas tipología de tareas. Como se ha visto en los Capítulos 1 y 3 existen variedad de tipos de tareas sobre VOT, y sería entonces interesante ampliar el estudio a otros contenidos, como puede ser la rotación de objetos tridimensionales, y las secciones planas de objetos geométricos.

Además, las consignas elaboradas en el cuestionario, para evaluar el conocimiento especializado del contenido, aplicadas a temas diferentes, pueden generar otros cuestionarios para la evaluación de contenidos específicos.

Desde una perspectiva formativa nuestra investigación ha revelado las importantes carencias de los estudiantes de magisterio en cuanto a conocimiento común, ampliado y especializado del contenido sobre la VOT. Se deriva por tanto la necesidad de diseñar, implementar y evaluar acciones formativas específicas para promover la mejora de dichos conocimientos que incluyan, en particular, actividades de interpretación y elaboración de diferentes tipos de representaciones planas y la reflexión sobre sus respectivas funciones y límites. Como afirma Parzysz (1991, p. 591) "una base científica podría ser dada a las reglas del dibujo técnico (que en general son dadas como simples convenciones, sin una justificación real), con lo que la educación matemática estaría más cerca del tipo de problemas que se encuentran en la vida cotidiana o profesional".

Otro interesante aspecto que no se ha contemplado en esta investigación está relacionado con el uso de software o applets de geometría dinámica. Siguiendo a Cunningham (1991), consideramos que esta nueva herramienta puede ofrecer lo mejor del mundo simbólico y lo mejor del mundo intuitivo. La informática educativa tiene ya una importante producción visual, y estas nuevas herramientas de aprendizaje visual necesitan un conjunto de técnicas de evaluación diferentes de las utilizadas para el aprendizaje simbólico tan familiar. Sería entonces interesante explorar y ampliar la temática, incluyendo el uso de software de geometría dinámica (como por ejemplo Cabri 3D o GeoGebra) y applets que pondrían en juego imágenes dinámicas, y nuevos medios para aprender a comunicar ideas matemáticas visualmente, hacer conjeturas, explorar conceptos y sus representaciones. Tanto Battista (2007, p. 883) como Laborde (2001, p. 303) señalan que los profesores no están aprovechando la capacidad de estos entornos para apoyar la formulación de una demostración.

6. PUBLICACIONES DERIVADAS DE LA TESIS DOCTORAL

Artículos de revista:

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (2), 163 184.

Gonzato, M., Fernández, T. y Godino, J. D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números*, 77, 99-117.

Gonzato, M., Godino, J. D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23, (3), 5-37.

Gonzato, M. y Godino, J. D. (2010). Aspectos históricos, sociales y educativos de la orientación espacial. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 45-58.

Comunicaciones en Actas de Congresos referidas:

Godino, J. D., Fernández, T, Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2013). Synergy between visual and analytical languages in mathematical thinking. *CERME 8*. Antalya, Turkey. (En prensa).

Gonzato, M., Godino, J. D., Contreras, A. y Fernández, T. (2013). Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. *XVII Simposio de la SEIEM.* Bilbao: SEIEM (aceptado).

Gonzato, M., Godino, J. D. y Neto, T. (2012). Esquemas de pruebas de maestros en formación en tareas visuales. En H. Pinto, H. Jacinto, A. Henriques, A. Silvestre e C. Nunes (Eds), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Gonzato, M., Godino, J. D. y Contreras, J. M. (2011). Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. En M. Marín; G. Fernández, L. J. Blanco, M. M. Palarea (Eds.*), Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 383-392). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Godino, J. D., Gonzato, M. y Fernández, T. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M. Moreno, J. Carrillo, A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Gonzato, M., Godino, J. D. y Contreras, J. M. (2010). Análisis de los conocimientos puestos en juego en la resolución de tareas de visualización y orientación de objetos tridimensionales. *Actas digitales del XIII congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Córdoba: Sociedad Thales de Educación Matemática.

Gonzato, M., y Godino, J. D. (2009). Habilidades de orientación espacial: de la cartografía al GPS. En C. Cañadas e J. M. Contreras (Eds), *Actas de las XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas* (CD ROM). Granada: Sociedad Thales.

REFERENCIAS

Antonini. S., Presmeg. N, Mariotti, M. A. y Zaslavsky, O. (2011). On examples in mathematical thinking and learning. *ZDM Mathematics Education*, 43, 191–194.

Arpinati, M. (2003). L'insegnamento della geometria oggi e domani. Geometria senza Software Geometrico. *Cabrirrsae*, n.35-36.

Arpinati, M. y Pellegrino, C. (1991). Alla ricerca di una strategia di classificazione sugli sviluppi piani dei parallelepipedi rettangoli. *La Matematica e la sua didattica*, 4, 4-11.

Arzarello F., Micheletti C., Olivero F., Paola D. y Robutti O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, 32-39. Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Association des Professeur de Mathématiques de l'Enseignement Public (A.P.M.E.P) (1983). 1. Géométrie, Elem-Math VII. *Aides pédagogiques pour le cycle moyen*, n. 49.

Bagni, G. T, y D'Amore, B. (1994). *Alle radici storiche della prospettiva*. Angeli: Milano.

Baldy, R. (1988). De l'espace du dessin à celui de l'objet. Une activité de mises en correspondances entre des dessins en perspective cavalière et des objets réels. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 43-57.

Baldy, R., Chatillon, J-F. y Cadopi, M. (1993). Dessin plan, dessin en perspective: étude des effets de transfert chez adultes debutants. En A. Bessot y P. Verrilon (Eds), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (pp. 17-34). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Barnhart, E. N. (1942). Development stages in compositional construction in children's drawings. *Journal of Experimental Education*, 11(2), 156-184.

Bartolini Bussi, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 31, 11-41.

Bartolini Bussi, M. G. (2007). Semiotic mediation: fragments from a classroom experiment on the coordination of spatial perspectives. *ZDM: The International Journal of Mathematics Education*, vol. 39, 63-71.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Battista, M. T. y Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *Mathematics Teacher*, 88(1), 48-54.

Battista, M. T. y Clements, D. H. (1996). Student's understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258-292.

Battista, M. T., Wheatley, G. y Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 332-340.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational studies in Mathematics*, 16, 389-409.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T. (1988). The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls. *American Educational Research Journal*, 25, 51-71.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T. (1989). The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 49- 59.

Berthelot, R. y Salin M. H. (1992). *L'énseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. These, Université de Bourdeaux.

Berthelot, R. y Salin M. H. (1993), Conditions didactiques de l'apprentissage des plans et cartes dans l'enseignement élémentaire. En Bessot, A. y Verrilon, P. (Eds) *Espaces Graphiques et Graphismes d'espaces*. La pensée Sauvage éditions: Grenoble.

Besuden, H. (1990). Räumliche Orientierung: Die rechts/links Beziehung, *Math. Schule*, 28 (7/8), 461-474.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 7-16.

Buekenhout, F. y and Parker, M. (1998). The number of nets of the regular convex polytopes in dimension *Discrete Mathematics,* 186, 69-94.

Campanario, J. M. (2001). ¿Qué puede hacer un profesor como tú o un alumno como el tuyo con un libro de texto como éste? Una relación de actividades poco convencionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (3), 351-364.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grénoble: La Pensée sauvage.

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York : Macmillan Publishing Co.

Cohen, N. (2003). Curved solid nets. En N. Pateman, B. J. Dourgherty y J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 2, 229-236.

Colmez, F. y Parzysz, B. (1993). Le vu e le su dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 a la seconde. En A. Bessot y P. Verrilon (Eds), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (pp. 35-55). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en didactique des Mathemátiques*, 25 (2), 151-186.

Cuisinier, G. Docq, C., Gilbert, T., Hauchart, C. Rouche, N. y Tossut, R. (2007). Les representations planes comme fil conducteur pour l`enseignement de la géometrie. *Mathématique et Pédagogie*, 168, 17-57.

Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 19 (pp. 67-76). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis*. Madrid: Ediciones Pirámide, S. A.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher, 37* (6), 14-20.

Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students´ spatial visualization and spatial orientation; an evidence base for instruction. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. y Sakonidis, H. (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference,* 2, 417-424.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 st Century: an ICMI study.* Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME,* 3-26.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.

Eisenberg, T., y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25–38). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Falcade R. y Strozzi P. (2008). Il gioco dei paesaggi. *Bambini*, allegato al n.10/2008 (dossier).

Fernández, T. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. Tesis doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 139-162.

Fischbein, E. (1998). Conoscenza intuitive e conoscenza logica nell' attività matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 365-401.

Fischbein, E. y Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal in Science Education*, 20 (10), 1193-1211.

Flores, P. (2006). Pirámides rellenas de… pirámides. Puzzles espaciales que favorecen la visualización. En P. Flores, F. Ruiz, F. y M. De la Fuente (Coords.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 221-247). Federación Española de Profesores de Matemáticas y SAEM THALES.

Font, V., Bolite, J. y Acevedo, J. I. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, doi: 10.007/s10649-010-9247-4.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problema of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 69, 33-52.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics,* 82, 97–124.

Font, V., Godino, J. D., Planas, N. y Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and sinecdoque in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics,* 30(1), 15-19.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dotrecht, D.: Reidel.

Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations. *Proceedings of the 9th PME International Conference*, 2, 53-71.

Ghiglione, R. y Matalón, B. (1989). *Las encuestas sociológicas*. México: Trillas.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V, Roa, R. y Ruiz, F. (2004a). *Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., Cid, E., Font, V, Roa, R. y Ruiz, F. (2004b). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). Análisis onto-semiótico de problemas combinatorios y de su resolución por estudiantes universitarios. *Educational Studies in Mathematics, 60* (1), 3-36.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Challenges for Teaching and Teacher Education*. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252.

Godino, J. D. , Fernández, T, Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2013), Synergy between visual and analytical languages in mathematical thinking. *CERME 8.* Antalya, Turkey. (En prensa).

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial), 133-156.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (2), 163-184.

Godino, J. D., Gonzato, M., Fernández, T. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea metemática. En Moreno, Mar; Carrillo, José; Estrada, Assumpta (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Godino, J. D. y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. *CERME 8.* Antalya, Turkey. (En prensa).

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia. Centro de Profesores y Recursos*. Murcia.

Gonzato, M., Fernández, T. y Godino, J. D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial: un estudio sistemático basado en la investigación didáctica. *Números* 77, 99-117.

Gonzato, M. y Godino, J. (2010). Aspectos históricos, sociales y educativos de la orientación espacial. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 23*, 45-58.

Gonzato, M., Godino, J. D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimiento didáctico-matemático sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23(3), 5-37.

Gorgorió, N. (1994). *Estratègies, dificultats i errors en els aprenentatges de les habilitats espacials.* Tesis Doctoral. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.

Gorgorió, N. (1996). Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference,* 3, 3-19.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics* 35, 207-231.

Guay, R. B. y McDaniel, E. D. (1977). The relationship between mathematics achivement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8 (3), 211-215.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Síntesis.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis doctoral, Universitat de València: España.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias,* 18(1), 35-53.

Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de las Ciencias* 19(3), 415-431.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad geométrica. *Educación Matemática* 16(3), 103-125.

Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática, 17(2),* 117-152.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática XIV* (pp.21-68). Lleida: SEIEM.

Guillén, G., González, E. y García, M.A. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 247-258). Santander: SEIEM.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En A. Gutiérrez (Ed.), *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría* (pp. 44-59). México D.F.: CINVESTAV.

Gutiérrez, A. (1992). Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional geometry. *Structural Topology*, 18, 31-48.

Gutiérrez, A. (1996a). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference,* 1, 3-19.

Gutiérrez, A. (1996b). The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them. En A.R. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 23-32). Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T.

Gutiérrez, A. (1996c). Children's ability for using different plane representations of space figures. En A.R. Batturo (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 33-42). Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *EMA*, 3(3), 193-220.

Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores, F. Ruiz y M. De la Fuente (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz : Federación Española de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education* 22(3), 237-251.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A.Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Harel, G. y Sowder, L (2007). Toward a comprehensive perspective on proof, En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, National Council of Teachers of Mathematics.

Harris, J. W. y Stöcker, H. (Eds.) (1998). Solids of rotation. En *Handbook of Mathematics and Computational Science* (pp. 111-113). New York: Springer-Verlag.

Hart, L. C., Smith, S. Z, Swars, S. L. y Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 3 (1), 26-41.

Henry, M. (1999). L'introduction des probabilities au lycée : un processus de modélization comparable à celui de la géometrie, *Repères-IREM*, 36, 15-34.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher, P. y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the psychology of mathematics education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge U.P.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education, Vol 1* (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39, 372-400.

Hoffer, A. R. (1977). *Mathematics Resource Project. Geometry and visualization*. USA: Creative Publications: Palo Alto.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2003). Quand deux droites son «à peu près » parallèles ou le versant géométrique du « presque » égal. *Revue « petit X »*, 61, Grenoble.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Editorial Alfar.

Johnson, M (1987). *The body in the mind*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Johnson, B. y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33 (7), 14-26.

Junta de Andalucía (2007). Orden 10/8/2007 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. Área de Matemáticas.

Kern, W. F. y Bland, J. R. (Eds) (1948). *Solid Mensuration with proofs, 2nd ed.* New York: Wiley.

Kindt, M. (1993). Enfoque realista de la educación matemática. En A. Solar, F. Alayo, M. Kindt y L. Puig (Eds.) *Aspectos didácticos de matemáticas, 4* (pp. 67-91). Zaragoza: ICE de la Universidad de Zaragoza.

Kosslyn, S.M. (1980). *Image and mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: The University of Chicago Press.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. En C. Keitel y K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology,* 121, 48-67.

Laborde, C. (1996). Cabri Geómetre o una nueva relación con la geometría. *Investigación y didáctica de las matemáticas,* 67-85.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, NY: Basic Books.

Lappan, G., Phillips, E. D. y Winter, M. J. (1984). Spatial visualization. *Mathematics Teacher*, 77, 618-623.

Lehrer, R., Jenkins, M., y Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-168). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lowenfeld, V. (1972). *Desarrollo de la capacidad creadora*. Buenos Aires: Editorial Kapelusz.

Lurçat, L. (1979). *El niño y el espacio: la función del cuerpo*. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Lurçat, L. (1980). *L'activité graphique à l'école maternelle*. Paris: ESF.

Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.

Malkevitch, J. (2001). La géométrie et la paire de ciseaux. *La Recherche,* 346, 62-63.

Mariotti, M.A. (1997). *Interaction beween images and concepts in geometrical reasoning. Seconda Edición.* Tesis Doctoral. Università di Tel Aviv y Dipartimento di Matematica di Pisa, n. 5.32.1071.

Mariotti, M. A. (1998). Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate*, 21B(3), 209-52.

Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*, 219-248.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics,* 44(1/2), 87-125.

Maschietto, M. y Bartolini Bussi, M. G. (2005). Meaning construction through semiotic means: The case of the visual pyramid. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 3, 311-320.

McGee, M.G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.

Mesquita, A.L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural topology*, 18, 19-30.

Millman, J. y Greene, J. (1989). The specification and development of test achievement and ability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (pp. 335-366). London: Macmillan.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.

Mitchelmore, M. C. (1978). Developmental stages in children's representation of regular solid figures. *The Journal of Genetic Psychology*, 133, 229-239.

Monge, G. (1999). *Geometría descriptiva*. Mexico: Ed. Limusa.

Muñiz, J. (2002). *Teoría clásica de los test*. Madrid: Pirámide.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. EEUU: National Council of Teachers of Mathematics. (Edición electrónica: http://standards.nctm.org/).

Osterlind, S. J. (1989). *Constructing test items.* Boston, Kluwer.

Pallascio, R. Allaire, A. y Mongeau P. (1993). The development of spatial competencies through alternating analytic and synthetic activities. *For the Learning of Mathematics*, 13(3), 8-15.

Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs “seeing”. Problem of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students’ conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 575-593.

Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l’enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s’agit-il*? Quaderni di Ricerca in Didattica*, 17, 128-151.

Peirce, C. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987.

Piaget, J. (1928). *Judgement and Reasoning in the Child.* New York: Harcourt, Brace, & Co.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1967). *The child’s conception of space*. New York: W. W. Norton & Co.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1971). *Mental imagery and the child*. London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The child’s conception of geometry*. London: Routledge and Kegan Paul.

Pittalis, M., Mousoulides, N. y Christou, C. (2009). Level of sophistication in representing 3D shapes. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference,* 4, 385-392.

Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance*. Educational Studies in Mathematics,* 70, 5-26.

Potari, D. y Spiliotopoulou, V. (2001). Patterns in children’s drawings and actions while constructing the nets of solids: the case of the conical surfaces. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 23 (4), 41-62.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42-46.

Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school mathematics. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 191–198). Assisi, Italy: PME Committee.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 205–236). Rotterdam: Sense Publishers.

Presmeg, N. C. (2008). An overarching theory for research in visualization in mathematics education. *ICME11*. Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 2 de septiembre de 2010 desde http://tsg.icme11.org/document/get/97

Rarmirez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.ª ed.). Consultado en http://www.rae.es/rae.html

Real Academia Española (2005). *Diccionario del estudiante*. Santillana Editor

Real Academia Española (2006). *Diccionario de la RAE esencial*. Madrid: Editorial ESPASA CALPE.

Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.

Rodríguez, A. (1992). *Elementos de geometría descriptiva*. España: Murcia Ed.

Rüegg, A. y Burmeister, G. (2010). *Méthodes constructives de la géométrie spatiale.* Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes.

Sack, J. y Vazquez, I. (2008). Three-dimensional visualization: Children's non-conventional verbal representations. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda, (Eds.), *Proceeding of the Joint Meeting 32nd Conference of the international Group for the psychology of Mathematics Education and the North American chapter XXX,* 4 (pp. 217-224). Morealia, Michoacán, México: PME.

Senechal, M. (1990). Shape. En L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy (pp. 139-181)*. Washington, DC: National Academy Press.

Shephard, G. C. (1975). Convex polytopes with convex nets. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 78 (3), 389-403.

Shin, S-J. y Lemon, O. (2008). *Diagrams*. Stanford Encyclopedia of Philosophy

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4 - 14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Stoker, J. J. (1961). Developable surfaces in the large. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 14(3), 627-635.

Tartre, L. A. (1990). Saptial skills, gender and mathematics. En E. Fennema y G. Leder (Eds.), *Mathematics and Gender; Influences on teachers and students* (pp. 27-59). New York, NY: Teachers College Press.

Thomas, N.J.T. (2010). Mental imagery. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Extraído el 20 de enero de 2012 desde *http://plato.stanford.edu/entries/mental-imagery/.*

Thorndike, R. L. (1989*). Psicometría aplicada.* México: Limusa.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction-the Wiskobas project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemas in school geometry. En M.M. Lindquist y A. P. Shulte (Eds*.), Learning and Teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook* (pp. 17-31). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Orlando, FL: Academic Press.

Van Hiele, P.M. (2002). Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking. En D. Tall y M. Thomas (Eds), *Intelligence, learning and understanding in mathematics. A tribute to Richard Skemp.* Flaxton, Australia: PostPressed.

Veloso, E. (1993). Tudo o que há num cubo, *Educação e Matemática,* 26, 23-26.

Vérillon, P. y Rabardel, P. (1993). De l'analyse des compétences à l'élaboration de contenus : contribution de la psychologie et de la sémiologie à la conception en ingénierie didactique. En A. Bessot y P. Vérillon (Eds.) *Espaces graphiques et graphismes* *d'espaces. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux* (pp. 145-181). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Verjat, I. (1994). Confrontation de deux approches de la localisation spatiale. *L'Année Psychologique*, 94, 403-424.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* New York, NY: The MacMillan Company.

Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education.* Rotterdam: Sense Publishers.