FACETA EPISTÉMICA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE LA DERIVADA

Luis R. Pino-Fan

Tesis de Fin de Máster

Dirigida por los doctores,

Juan D. Godino y Vicenç Font

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Granada, Septiembre de 2010

A mis padres

Agradecimientos

A Dios,…

…por ser la razón de mi existencia y por brindarme la oportunidad de lograr mis metas personales y profesionales.

A mis padres, Luis Ángel Pino Pérez y Reyna Isabel Fan García, quienes me han apoyado en todas y cada una de las etapas de mi vida, porque pese a las adversidades, con esfuerzo y amor me han impulsado a ser el profesional y, sobre todo, la persona que soy.

A Melvi, por estar siempre conmigo, por sus consejos y apoyo incondicional, por sus palabras de aliento y ánimo en aquellos momentos de nostalgia y debilidad.

A mi tutor el Dr. Juan Díaz Godino por haber aceptado dirigir esta tesis, por su apoyo, sus sabios consejos y por orientarme amablemente durante el desarrollo de este trabajo, haciendo una experiencia única el trabajar con él.

Al Dr. Vicenç Font Moll, por aceptar ser codirector de esta tesis, por sus consejos y sugerencias, relevantes para el desarrollo de la investigación.

A mis compañeros, mis nuevos amigos, del Máster porque con su compañía fue más ameno y grato pasar todo este tiempo fuera de casa. Especialmente a Lilia, con quien compartí muchos momentos y porque sin su apoyo esta experiencia no hubiera podido ser concretada ahora.

Por último, a todos aquellos que, de alguna u otra manera, me han apoyado o contribuido en el desarrollo de este trabajo. A todos, mil gracias!

Granada, Septiembre de 2010

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Didáctica de la Matemática

FACETA EPISTÉMICA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE LA DERIVADA

Trabajo de maestría presentado por D. Luis Roberto Pino Fan en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

D. Luis Roberto Pino Fan

Los Directores

Dr. Juan Díaz Godino

Dr. Vicenç Font Moll

Granada, Septiembre de 2010

Este trabajo ha sido desarrollado en el seno del grupo FQM-126 del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, "Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística", en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores, SEJ2007-60110/EDUC, MEC-FEDER, y EDU 2009-08120/EDUC.

ÍNDICE

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 4

ANEXO

INTRODUCCIÓN

Las cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje del cálculo infinitesimal han sido intensamente investigadas en educación matemática. En particular la *derivada*, considerada como noción clave del *Cálculo*, ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores).

La gran cantidad de resultados de la investigación didáctica sobre la derivada plantea un reto a los formadores de profesores, que sintetizamos en la siguiente pregunta, ¿Qué debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible? Para responder a esta pregunta se precisa reconstruir el sistema de conocimientos disponibles sobre cada uno de los aspectos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de la derivada.

El objetivo de nuestra investigación es avanzar en la reconstrucción del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada utilizando algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Este marco teórico propone tener en cuenta seis facetas o dimensiones del conocimiento didáctico-matemático: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional, aportando además para cada una de ellas criterios e indicadores empíricos de idoneidad didáctica. Con esta finalidad, en este trabajo de tesis de maestría, centrándonos en la *dimensión epistémica* del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada, nos hemos propuesto realizar una descripción del *significado global de la derivada*, distinguiendo los significados parciales de la misma y su articulación; para ello se realiza un estudio de tipo histórico-epistemológico, apoyado en la noción de configuración epistémica.

Los resultados aportados con este estudio servirán de punto de partida para guiar la caracterización del conocimiento didáctico-matemático del profesor de bachillerato sobre el objeto derivada, y posteriormente, centrar investigaciones relativas a la formación de profesores, al diseño de instrumentos de evaluación y desarrollo de conocimientos didácticos-matemáticos sobre dicha noción.

En este trabajo hemos contemplado, para llevar a cabo el estudio antes mencionado, el desarrollo de cuatro capítulos. En el primero se describirán el área problemática, las herramientas teóricas que enmarcarán nuestro trabajo, y se establecerán los objetivos específicos y la metodología a seguir. En el segundo capítulo realizaremos un estudio histórico-epistemológico sobre la derivada, desde la matemática griega hasta las generalizaciones que hoy en día se tienen de la misma. En el tercer capítulo realizaremos la reconstrucción del significado global de la derivada, mediante la identificación de los significados parciales, a partir del estudio histórico realizado en el Capitulo 2. Finalmente, el último capítulo, de síntesis y conclusiones, además de presentar un panorama general del trabajo desarrollado, discutiremos las aportaciones, implicaciones y vías de continuidad futuras de nuestra investigación.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

El descubrimiento del *Cálculo* es uno de los grandes logros intelectuales de la civilización, pues ha servido por más de tres siglos como la principal herramienta cuantitativa para la investigación de problemas científicos. Actualmente el Cálculo es fundamental para áreas de las matemáticas tales como la probabilidad, la topología, la teoría de grupos y aspectos del álgebra, la geometría y la teoría de números. Sin él, la tecnología moderna y la física podrían ser difíciles de imaginar (Kleiner, 2002).

Sin embargo, la enseñanza de las nociones del cálculo es conocida por ser una fuente de serios problemas, tanto para los alumnos como para los profesores (Hitt, 2003), de cara a la comprensión de sus ideas fundamentales. La *derivada* es uno de los conceptos fundamentales para el estudio del cálculo, pero frecuentemente el tratamiento que se le da a este concepto en la escuela, se enfoca al manejo y la aplicación de fórmulas y recursos algebraicos, lo que puede provocar en los estudiantes dificultades para la comprensión de este concepto. Esto es señalado por Artigue (1995), cuando dice que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para que los estudiantes logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro de este campo de las matemáticas.

Así mismo, Artigue (1998) señala que las investigaciones didácticas muestran con toda evidencia que no es fácil para los estudiantes entrar en el campo conceptual del Análisis, cuando éste no es reducido a su parte algebrizada, sino que pretende el desarrollo de los modos de pensamiento y de las técnicas que hoy en día están fundamentadas en él. De esta forma, algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación;

no obstante, presentan dificultades cuando necesitan manejar el *"significado del objeto derivada"*, el cual comúnmente se presenta en la enseñanza través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente.

No obstante, las investigaciones realizadas, referentes al significado del objeto derivada, se han centrado en describir las características de los significados construidos por los estudiantes, mostrando la existencia de conflictos e inconsistencias entre las construcciones realizadas y los significados formales presentados por los libros de texto (Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006). En este sentido, Sierpinska (1990) señala que "Comprender el concepto será concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la 'estructura' del concepto (la estructura es la red de sentidos de las sentencias consideradas). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27). Por su parte, Zandieh (2000) sugiere que un estudiante no tiene una comprensión completa sobre el concepto derivada, si éste no puede reconocer y construir cada uno de los tres procesos (razón, límite y función) involucrados en la comprensión del concepto de derivada en algún contexto relevante.

Además de la naturaleza compleja del objeto derivada, la problemática que conlleva su comprensión se debe, en gran parte, a cómo el profesor transmite sus conocimientos sobre dicho objeto a los estudiantes. Y es que en algunas ocasiones, el profesor no tiene un buen dominio de las matemáticas que enseña (Badillo, 2003) (clara comprensión del concepto, las diversas formas de representación, *los distintos significados del concepto*, etc.) o bien, domina los conceptos matemáticos, pero no tiene las herramientas suficientes que le permitan transmitir adecuadamente esos saberes a sus estudiantes (discurso, situaciones problema, etc.). Tal es el caso de la problemática, que se ha reflejado en diversas investigaciones (Inglada y Font, 2003; Badillo, Font y Azcárate, 2005; Font, 2008), sobre cómo presentan los libros de texto la noción de la derivada, lo cual genera en los estudiantes conflictos semióticos, por ejemplo, el causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto al usar la notación incremental $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en\ x=a)}$ como primera notación para definir la derivada en un punto (Font, 2005).

En general, la derivada, ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores) e instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada), tal y como se muestra en Artigue, Batanero y Kent (2007) o en Sánchez, García y Llinares

(2008). Esta gran cantidad de resultados de la investigación didáctica sobre la derivada, plantea un reto a los formadores de profesores que sintetizamos con la pregunta: *¿Qué debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible?*

En este sentido, nos hemos decantado por el estudio de los saberes del profesor, es decir, los conocimientos que el profesor de bachillerato debe de tener para la enseñanza de la derivada. Específicamente, estamos interesados en investigar posibles respuestas a la pregunta: ***¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado de bachillerato con relación a la enseñanza de la noción de derivada, teniendo en cuenta el estado actual de las investigaciones en Didáctica del Cálculo?***

Nuestro planteamiento es que la determinación del conocimiento didáctico-matemático de los profesores, para la enseñanza de la derivada, nos dará pautas para la construcción de instrumentos de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores en formación inicial y, posteriormente, diseñar, implementar y evaluar situaciones didácticas y procesos de estudio que promuevan la reflexión de los futuros profesores acerca de sus propias concepciones sobre las matemáticas, su didáctica y la evolución de las mismas hacia una visión sociocultural y constructivista.

Así, en este trabajo, nos proponemos avanzar en la consecución de la respuesta a la pregunta anterior mediante la ***reconstrucción de un significado global de la derivada*** que sirva de referencia para determinar aspectos esenciales del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

La reconstrucción de un significado global de la derivada resulta especialmente importante puesto que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, requieren un estudio en profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Tal estudio debe aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen. Además, como señala Sierpinska (1990), “La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos” (p. 35).

A grandes rasgos, hemos descrito la problemática que será el centro de interés de este trabajo de investigación. No obstante, la formulación que hemos hecho del problema de investigación, es demasiado general, por lo que se hace necesario, para realizar un estudio a profundidad, su operativización. Por esta razón, en el apartado 1.4, definiremos los objetivos específicos de nuestra investigación. Pero antes, en el siguiente apartado presentaremos el conjunto de herramientas teóricas que nos ayudarán a definir los objetivos de investigación y que enmarcarán nuestro estudio.

1.2. MARCO TEÓRICO

Para lograr nuestro propósito, hemos adoptado el modelo teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática desarrollada en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007). Dicho marco teórico incluye un modelo epistemológico sobre las matemáticas, sobre bases antropológicas y socioculturales, un modelo cognitivo, sobre bases semióticas de índole pragmatista, y un modelo instruccional coherente con los anteriores. El EOS viene desarrollándose desde 1994, en interacción con diversas investigaciones teóricas y experimentales desarrolladas en tesis doctorales y otros trabajos de investigación, y lo estamos usando porque nos provee de "herramientas" teóricas que nos permitirán realizar un análisis minucioso de los conocimientos didáctico-matemáticos, que deben de tener los profesores de bachillerato para la instrucción de la derivada. Así mismo, con dicho modelo se pueden explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

A continuación describiremos brevemente algunas de las nociones del EOS que serán de utilidad para el desarrollo de este trabajo.

1.2.1. Sistemas de prácticas: personales e institucionales

Dentro del enfoque ontosemiótico sobre el conocimiento y la instrucción matemática, la noción de *"sistema de prácticas"* juega un papel central para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Godino y Batanero (1994) llaman sistema de prácticas a *"toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas"* (p. 334). Así, estas prácticas pueden ser realizadas por una persona o compartidas en el seno de una institución, lo cual da lugar a las nociones de *sistemas de prácticas personales* y *sistemas de prácticas institucionales,* las cuales son definidas por Godino y Batanero (1994) como sigue:

> "El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I" (p. 337).

> "Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación $P_p(C)$" (p. 339).

Los sistemas de prácticas se proponen como respuestas a la cuestión semiótica, ¿qué significa el objeto O?, o a la cuestión ontológica, ¿qué es el objeto matemático O? (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009). En los siguientes apartados veremos cuál es la relación subyacente entre los sistemas de prácticas, los objetos matemáticos y sus significados.

1.2.2. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

En el EOS se adopta de entrada un cierto pragmatismo puesto que se considera a los *objetos matemáticos* como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994). En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.), que evocamos al hacer matemáticas y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura (Godino y Font, 2007).

Ahora bien, como vimos en la sección anterior, los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales; así, si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución entonces los objetos emergentes se considerarán como *"objetos institucionales"*, mientras que si tales sistemas corresponden a una persona, entonces serán considerados *"objetos personales"*. Godino y Batanero (1994) los definen de la siguiente manera: "El objeto institucional O_I es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_I(C)$. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de O_I" (p. 338). Mientras que el "objeto personal O_p es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_p(C)$" (p. 339).

Los autores señalan que la emergencia del objeto personal es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y del aprendizaje; mientras que la emergencia del objeto institucional es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado es reconocido como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociados.

Como hemos señalado, en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (lenguaje, símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.); en este sentido dentro del EOS se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, intervinientes en los sistemas de prácticas (Godino y Font, 2007):

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos,…) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,…).
- *Situaciones-Problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios,…).
- *Conceptos-Definiciones* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, derivada,…).
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos,…).
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,…).
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,…).

A su vez estos objetos se organizan en entidades más complejas: sistemas conceptuales, teorías, etc. Estos seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

En el apartado 1.2.4 veremos cómo estos objetos primarios están relacionados entre sí formando redes más complejas de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

1.2.3. Significados y tipos de significados

En el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función, derivada,…), desde una perspectiva pragmático-antropológica. El significado de un objeto matemático se define como el *sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones–problemas en las que dicho objeto interviene*. Así, el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas, institucional y personal, lo cual da origen a los *significados institucionales* y *significados personales* respectivamente. Godino y Batanero (1994) definen estos significados de la siguiente manera:

> "Significado de un objeto institucional O_I es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado" (p. 340).

Esta noción de significado institucional permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica, el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como su evolución temporal y dependencia institucional. En correspondencia con el significado institucional de un objeto, los autores dan la siguiente definición:

> "Significado de un objeto personal O_p es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado" (p. 341).

Hay que resaltar que los significados personales incluyen conocimiento, comprensión y competencia. Además, es obvio que los objetos personales e institucionales no tienen un único significado. Por ejemplo, en una clase de matemáticas (una institución) en donde se lleva a cabo un sistema de prácticas de donde emerge el objeto "derivada", el significado que los estudiantes atribuyan a dicho objeto dependerá de los sistemas de prácticas que lleve a cabo esa institución en particular, y que es distinto al significado subyacente a los sistemas de prácticas que lleve a cabo otra institución.

Los sistemas de prácticas se han categorizado teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre la faceta personal, o idiosincrásica de un sujeto, de las prácticas y la faceta institucional (compartida, social) de las mismas. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia. La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de tipologías de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales[1] (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009).

[1] Para más detalles acerca de los tipos de significados institucionales y personales, ver Godino, Batanero y Font (2007).

1.2.4. Configuraciones de objetos y procesos

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más "fino" de la actividad matemática, en el EOS se ha introducido la tipología de objetos matemáticos primarios antes comentada (situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos).

Estos objetos primarios están relacionados entre sí formando *redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas*, lo que en el EOS se conoce con el nombre de *configuraciones*. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Así, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e.g., plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos el uso de *lenguajes*, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones–problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la *configuración* de la Figura 1.1 (Font y Godino, 2006, p. 69).

La definición de objeto como emergente de los sistemas de prácticas, y la tipología de objetos primarios responden a la necesidad de poder describir los sistemas de prácticas, a fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

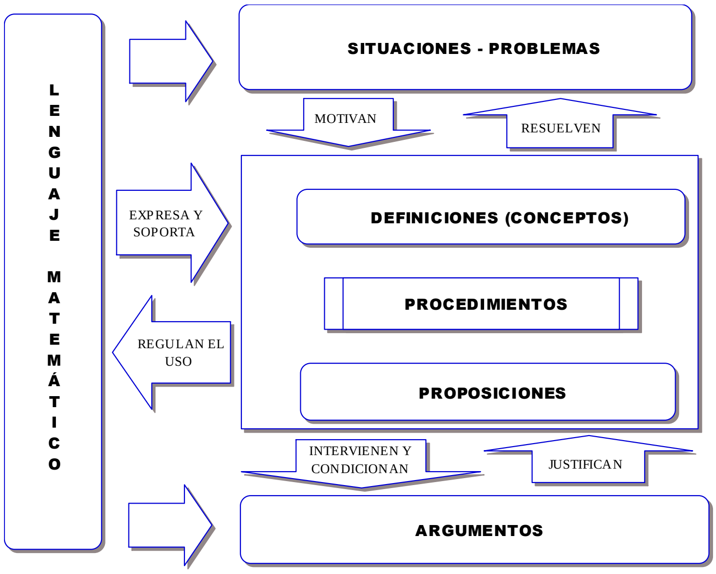


Figura 1.1 Configuración de objetos primarios

1.2.5. Conocimientos, creencias y concepciones del profesorado sobre la enseñanza-aprendizaje de la derivada

De acuerdo con Ponte y Chapman (2006), las investigaciones realizadas dentro del campo de formación de profesores de matemáticas, se han centrado en diversos aspectos del conocimiento y la práctica del profesor, mismos que pueden ser agrupados en cuatro grandes categorías: a) conocimiento matemático de los profesores, b) conocimiento de los profesores para la enseñanza de las matemáticas, c) creencias y concepciones de los profesores, y d) la práctica del profesor.

En lo que se refiere a los conocimientos del profesor de matemáticas, como se verá en la siguiente sección, existen diversas propuestas de modelos con los que se tratan de determinar los elementos que componen el conocimiento que los profesores de matemáticas deberían tener para desarrollarse lo más eficazmente posible en su práctica.

Otras investigaciones se han centrado en determinar el conocimiento que el profesor de matemáticas necesita para su práctica profesional, *el conocimiento profesional del profesor de matemáticas*. Llinares (2000) señala que la práctica profesional del profesor es el conjunto de actividades que genera cuando realiza tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor. Así, el conocimiento profesional está estrechamente vinculado a la acción, y de acuerdo con Ponte (1994), incluye tres tipos de conocimiento: *académico*, *profesional* y *sentido común*.

Las investigaciones sobre la práctica del profesor en la enseñanza de la derivada se pueden clasificar en dos grupos: aquellas relativas al uso de las nuevas tecnologías (ordenadores, calculadoras gráficas) y aquellas que señalan el uso de problemas de aplicación a ciencias del cálculo, introduciéndolo a través de problemas, por ejemplo, de la física. Dichas investigaciones relativas a la práctica del profesor cuando enseñan cálculo, ponen de manifiesto la búsqueda de formas de modelar o caracterizar dicha práctica a través del uso de herramientas tecnológicas, presencia de diferentes representaciones o uso de situaciones en las que se aplica el cálculo (Gavilán, 2005).

El estudio de las creencias y concepciones, por su parte, resulta necesario para comprender la práctica de los profesores de matemáticas. Estos constructos han sido intensamente investigados dentro del campo de la educación matemática y de la psicología cognitiva, entre otros aspectos, para tratar de establecer diferencias entre ellos. Por ejemplo, Flores (1998) señala que el término creencia se atribuye a una actitud y a un contenido; la actitud se encierra tanto en el grado de probabilidad de certeza como en la predisposición a la acción, lo que confiere un carácter emotivo, mientras que el contenido encierra un conocimiento que no necesita formularse en términos de modelos compartidos, y que se caracteriza por no haber sido contrastado. Las concepciones las entiende en el sentido de Thompson (1992), es decir, como el constructo que incluye tanto los aspectos emotivos (creencias) como los cognitivos, conceptuales y conscientes que organizan el pensamiento.

Además, en congruencia con el EOS, Flores (1998) entiende a las creencias y concepciones como significados que atribuyen los profesores en formación inicial a las matemáticas y a su enseñanza y aprendizaje. Estos significados (creencias y concepciones) de los sujetos no son directamente observables, sino que pertenecen a un nivel de información más profundo, muchas veces inconsciente, no siempre accesible al sujeto investigado.

Moreno (2005), señala que las creencias juegan un papel muy importante en todo lo que se relaciona con el profesor y la toma de decisiones en su ámbito profesional, por lo que cualquier intento de implementación de la calidad docente debería pasar por detectar, identificar, analizar e interpretar cuáles son las concepciones y creencias de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la materia en sí misma en su contexto específico de enseñanza. Sin embargo, las investigaciones desarrolladas cuyo objetivo es determinar las creencias y concepciones de los profesores con relación a la enseñanza de la derivada, han sido muy escasas. Uno de ellos es el trabajo propuesto por García, Azcárate y Moreno (2006) en el cual se estudian las creencias y concepciones de diez profesores universitarios del área de ciencias económicas, respecto de cómo abordan la enseñanza del cálculo diferencial, qué ejemplos matemáticos o no matemáticos consideran los más adecuados para llegar al objeto derivada, qué tipos de aplicaciones de la derivada enseñan a sus estudiantes y cuál es su postura frente a una propuesta de enseñanza del cálculo con problemas que involucran situaciones reales de la carrera objeto de estudio. Los investigadores concluyen que, debido a sus creencias, casi todos los profesores abordan la enseñanza de la derivada de manera tradicional, dando más énfasis al contenido matemático, descuidando así, el contenido del área de la economía relacionado con el cálculo diferencial.

Como señalan García, Azcárate y Moreno (2005), el estudio de las creencias y concepciones no es suficiente si se quiere profundizar en el conocimiento profesional del profesor, sino que se requiere seguir avanzando es aspectos tales como profundizar en el conocimiento del contenido y el conocimiento de la enseñanza, en aspectos concretos como el conocimiento del profesor sobre el objeto matemático derivada.

1.3. LA NOCIÓN DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO

Dentro del campo de formación de profesores, se han realizado diversos intentos para determinar los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debería tener para desarrollarse eficazmente en su práctica y facilitar el aprendizaje de sus estudiantes.

Uno de los pioneros en esta área fue Shulman quien, en su trabajo de 1986, propuso tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido (PCK[2]) y conocimiento curricular. El PCK es descrito por Shulman como "la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza" (p. 9). Posteriormente, en otro trabajo, Shulman (1987) amplía sus ideas y propone siete categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento curricular, conocimiento pedagógico del contenido (PCK), conocimiento de los estudiantes y sus características, conocimiento de los contextos educativos, y conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Otro de los trabajos importantes en el campo, es el desarrollado, en diversas investigaciones, por Deborah Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), quienes apoyándose en las ideas de Shulman (concretamente en las nociones del conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido), han propuesto la noción de "conocimiento matemático para la enseñanza (MKT[3])" definido como "el conocimiento matemático

[2] Pedagogical Content Knowledge
[3] Matematical Knowledge for Teaching

que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). Este conocimiento (MKT) está conformado por dos grandes categorías, cada una de las cuales, a su vez, están conformadas por otras categorías de conocimiento: el conocimiento del contenido (que incluye el conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático) y el conocimiento pedagógico del contenido (conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo). Esto se puede ver de manera más clara en la Figura 1.2.

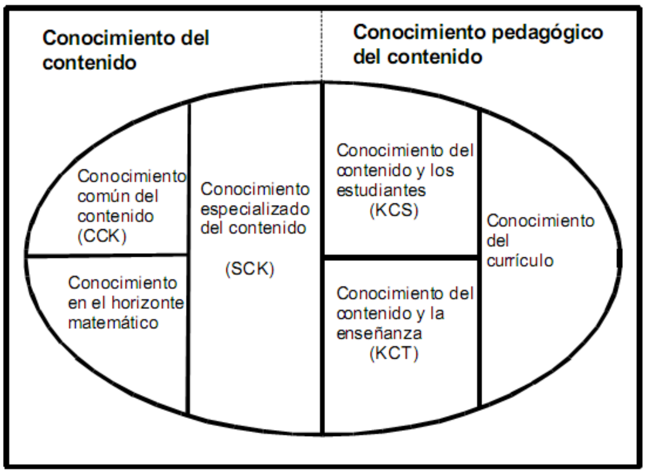


Figura 1.2. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377)

En general, como señala Godino (2009), los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de profesor de matemáticas.

En este sentido Godino (2009) propone un modelo de “conocimiento didáctico-matemático (CDM)” que permite categorizar y analizar los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor, mediante la aplicación del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.

Nosotros usaremos la expresión *“conocimiento didáctico-matemático (CDM)”* del profesor, para referir a la fusión de las nociones MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) y PCK (Pedagogical Content Knowledge), al considerar que expresión “Conocimiento matemático para la enseñanza” no refleja adecuadamente los diversos componentes o facetas que se deben tener en cuenta, al igual que ocurre con la expresión “Conocimiento pedagógico del contenido”. Entendemos que la “Didáctica de la Matemática” es la disciplina académica y el área de conocimiento cuyo objetivo específico es la articulación coherente de las distintas facetas o dimensiones que se ponen en juego en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El término “conocimiento” lo usamos en el sentido de constructo epistémico–cognitivo–afectivo general que incluye comprensión, competencia y disposición.

Así, el CDM viene a ser la trama de ***relaciones*** que se establecen entre los objetos que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones - problemas matemáticos para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes.

Dicho modelo de “conocimiento didáctico-matemático”, propuesto por Godino (2009), tiene en cuenta las siguientes facetas para analizar los procesos de instrucción matemática, constituyendo, así mismo, categorías para analizar y clasificar los conocimientos didácticos sobre la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos:

1. *Epistémica*: Distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza, de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
2. *Cognitiva*: Desarrollo de los significados personales (aprendizajes).
3. *Afectiva*: Distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
4. *Interaccional*: Secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados.
5. *Mediacional*: Distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
6. *Ecológica:* Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,... que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Para cada una de estas facetas se contemplan, a su vez, diversos niveles que permiten el análisis del CDM del profesor de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales. Estos niveles son:

1. *Prácticas matemáticas y didácticas*. Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.
2. *Configuraciones de objetos y procesos* (matemáticos y didácticos). Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
3. *Normas y metanormas*. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
4. *Idoneidad*. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica

En la Figura 1.3 se puede observar cómo interactúan las facetas y los niveles del conocimiento del profesor que acabamos de describir.

Figura 1.3. Facetas y niveles del conocimiento del profesor

Estas facetas y niveles, junto con las herramientas teóricas que se han descrito en los apartados anteriores (objetos, configuraciones de objetos y procesos, etc.), nos van a permitir analizar y categorizar el conocimiento didáctico-matemático que debe tener el profesor de matemáticas para implementar procesos de instrucción idóneos sobre el concepto de derivada, todo ello de una manera relativa al desarrollo de las investigaciones actuales en Didáctica del Cálculo. La noción de configuración, concretamente, nos permitirá identificar los significados parciales de la derivada y con ello describir el significado global de dicho concepto, mediante el estudio de las entidades primarias que la componen y que se ponen en juego en la resolución de un campo determinado de situaciones-problemas matemáticos.

1.4. OBJETIVOS

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemática y de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus respectivos profesores. Como señala Moreno (2005), el profesor es clave para el éxito y necesario para implementar cualquier cambio o propuesta didáctica que tenga su origen en la investigación.

Recientemente ha habido un incremento notable de las investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas como se refleja en las revisiones incluidas en los "handbooks" de investigación en educación matemática (Bishop et. al., 2003; English et al., 2002; Llinares y Krainer, 2006; Hill y cols, 2007; Franke y cols, 2007; Sowder, 2007; Jaworski, Giménez et al 2009), y la publicación de revistas específicas como Journal of Mathematics Teacher Education. Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas. Sin embargo, como bien señala Gavilán (2005), existen muy pocas investigaciones centradas en los profesores en relación a la noción de derivada.

En este sentido, como señalamos anteriormente, nos hemos interesado en investigar *cuál es el conocimiento didáctico-matemático que debe tener un profesor de matemáticas de bachillerato, con relación a la enseñanza de la noción de derivada*; aunque para ello, surge la necesidad, como primer paso, de reconstruir un significado epistémico global de la derivada que sirva de referencia en la caracterización de dicho conocimiento didáctico-matemático. Concretamente, en este trabajo de investigación nos hemos propuesto los siguientes objetivos específicos:

> ***O1. Identificar los distintos significados parciales del objeto derivada y sus respectivas configuraciones, mediante un estudio histórico-epistemológico sobre dicho objeto.***

O2. Reconstruir un significado de referencia global de la derivada, mediante la consideración de los significados parciales y sus respectivas configuraciones identificados.

La reconstrucción de un *significado de referencia global para la derivada (O2),* mediante la *identificación de los distintos significados parciales y sus respectivas configuraciones (O1),* es fundamental para la caracterización del conocimiento didáctico-matemático del profesorado, requerido para la enseñanza idónea del objeto derivada, puesto que, a partir de éstos, el profesor como representante de la institución escolar, determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, implementados y evaluados, en su práctica educativa.

Además, al considerarse, dentro del EOS, los significados como sistemas de prácticas, la reconstrucción del significado global de la derivada resulta de gran interés, puesto que nos permite identificar y describir los distintos subsistemas de prácticas ligados a tipos específicos de problemas, lo cual resulta necesario tanto para la elaboración de currículos como para la construcción de proyectos de enseñanza (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007).

1.5. METODOLOGÍA

El trabajo de investigación que aquí desarrollamos, tiene un carácter primordialmente cualitativo, basado en la búsqueda sistemática y análisis de fuentes documentales de las investigaciones realizadas sobre cuestiones relativas a la evolución histórica de la derivada.

Para la recolección de los datos que nos ayudarán a conseguir los objetivos que nos hemos planteado, hemos elaborado un instrumento que denominamos *"Guía para el reconocimiento y categorización de objetos y significados"*, la cual nos permitirá reconstruir el significado global de referencia, mediante la identificación de los significados parciales, de la noción derivada a partir de los informes de investigación y documentos históricos del cálculo infinitesimal [4]. Este instrumento se ha construido tomando como base la "Guía de reconocimiento de Objetos y Procesos (GROS)" desarrollada e implementada en el marco del EOS (ver por ejemplo, Godino y Batanero, 2009).

[4] *Cálculo infinitesimal* es como se conoce en la actualidad al área de las matemáticas que estudia las relaciones entre las funciones, sus derivadas y sus integrales. Sin embargo, como se verá en el Capítulo 2, no fue hasta después de la consolidación del Cálculo con Newton y Leibniz, que se comenzó llamar de esta forma.

La “guía para el reconocimiento y categorización de objetos y significados”, consiste en la identificación y descripción sistemática de los objetos primarios (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en los sistemas de prácticas de los cuales emerge el objeto derivada (ver figura 1.4). Es decir, nuestra guía, en esencia, lleva asociada la noción de *configuración* que nos proporciona el EOS la cual será de utilidad para describir los distintos significados parciales de la derivada a partir de la identificación de los objetos matemáticos primarios intervinientes en los distintos problemas que fueron abordados en la historia y que dieron pie a la emergencia de la derivada.

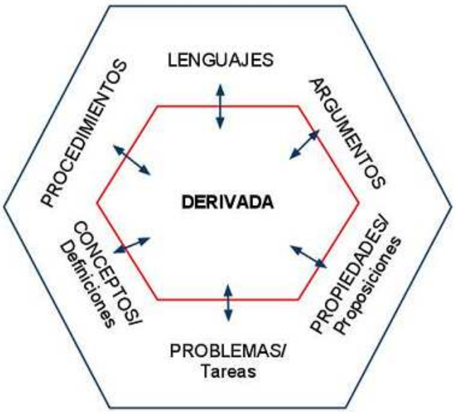


Figura 1.4. Objetos intervinientes en las prácticas epistémicas de las cuales emerge la derivada

Además, en el análisis de las configuraciones socio-epistémicas, cada uno de los objetos intervinientes puede verse desde las distintas facetas duales que propone el EOS (ver figura 1.5), razón por la cual las tendremos presentes en nuestro análisis.

Figura 1.5. Facetas duales desde la que se pueden ver los elementos de cada configuración

Cabe aclarar que, aunque nuestro trabajo se centra en el desarrollo de un estudio histórico-epistemológico de la derivada, éste no puede ser considerado como un tipo de investigación histórica, en cuanto que recurrimos principalmente a las fuentes secundarias, es decir, los trabajos que diversos historiadores han desarrollado en relación al objeto derivada. Esto no quiere decir, que no seamos consientes de los riesgos que implica el tomar este tipo de fuentes como recursos principales. Por esta razón, una vez seleccionadas las fuentes de información, contrastaremos éstas para buscar los puntos en común de las mismas respecto al tema de nuestro interés. En este sentido, el trabajo que desarrollamos puede verse, más bien, como un estudio documental, en cuanto que, a partir del análisis de las diversas fuentes, identificaremos y describiremos de manera detallada las distintas configuraciones epistémicas y los significados parciales asociados a éstas. La reconstrucción del significado global de la derivada se realizará a partir de los significados parciales y sus respectivas configuraciones epistémicas identificadas.

CAPÍTULO 2

ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA DERIVADA

2.1. LA GÉNESIS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA MATEMÁTICA GRIEGA

Como hemos señalado el objeto *derivada*, a lo largo de la historia, emerge de una serie de prácticas matemáticas realizadas para resolver problemas relacionados con el trazado de tangentes, cálculos de máximos y mínimos y de velocidades. La pregunta que nos surge casi en forma inmediata es, ¿en qué punto de la historia de las matemáticas, se comienzan a abordar este tipo de problemáticas?

Estudiando la historia, para responder a esas interrogantes, nos remontamos a la matemática griega donde tres grandes matemáticos, Euclides, Arquímedes y Apolonio, marcaron el rumbo de las matemáticas. Las obras de estos tres matemáticos son la causa de que al período comprendido desde el 300 al 200 a.C., se le denominara la *Edad de Oro* de la matemática griega.

Al parecer, fue Euclides el primer matemático que introdujo la noción de recta tangente. En su *libro III* de su gran obra *Elementos de Geometría* mejor conocida como *Los Elementos*, Euclides da, entre otras, las siguientes definiciones y proposiciones:

"Definición II. Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta.

Definición IV. Se dice que dos círculos son mutuamente tangentes cuando se tocan mutuamente y no se cortan.

Proposición XVI. La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del circulo; entre esta recta y la periferia no se interpondrá ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor.

Proposición XVII. Desde un punto dado trazar una recta tangente a un círculo dado.

Proposición XVIII. Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente." (Vera, 1970, vol. 1).

Euclides da argumentaciones puramente sintéticas para sus proposiciones, por ejemplo, para la proposición XVII, mencionada arriba, podríamos sintetizar el razonamiento de Euclides como sigue. Con base en la figura 2.1, sea *A* el punto y *BGD* el círculo; tómese el centro *E* de éste y trace el segmento *AE*; con centro en *E* y radio *EA* trace el círculo *AZH*; desde *D* trazar *DZ* perpendicular a *AE* y una *E* con *Z* y *A* con *B*. Por ser *E* centro de los círculos *BDG* y *AHZ*, las rectas *EA* y *EZ* son iguales y también *ED* y *EB*, luego las dos *AE* y *EB* con iguales a *ZE* y *ED*, y forman el ángulo común en *E*. Por tanto, *DZ* y *AB* son iguales e iguales los triángulos *DEZ* y *EBA* y, por consiguiente, el ángulo *EDZ* será igual al ángulo *EBA*, y cómo el ángulo *EDZ* es recto, el ángulo *EBA* también será recto, y por ser *EB* perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la *AB* es tangente al círculo.

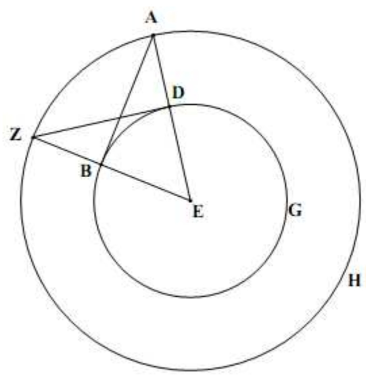


Figura 2.1. Solución de Euclides de la proposición XVII

Posteriormente, en el libro IV de sus *Elementos*, Euclides utiliza de manera implícita las nociones de rectas y circunferencias tangentes para las proposiciones referentes al trazado de polígonos circunscritos a una circunferencia.

Apolonio de Perga, conocido en su época como *El Gran Geómetra*, también trabajó el problema de las tangentes; de hecho, una de sus obras lleva el título *"Tangencias (o Contactos)"*. En este tratado, Apolonio plantea el siguiente problema: *dados tres elementos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia, trácese una circunferencia que sea tangente*[1] *a cada uno de los tres elementos dados.* Al problema anterior, en la actualidad, se le conoce como el *"Problema de*

[1] Apolonio concebía una circunferencia tangente a un punto, a una circunferencia que pase por él.

Apolonio”. Las soluciones que da Apolonio al problema planteado no se conocen con exactitud, pero pueden inferirse de la información que proporciona Pappus. No obstante, al parecer, el caso más difícil (dadas tres circunferencias trazar una cuarta que sea tangente a las tres dadas) no fue resuelto por Apolonio; fue Newton quien dio la solución mediante el uso de regla y compás.

En el libro I de su obra *Cónicas*, Apolonio introduce algunas proposiciones respecto a las tangentes. Ejemplo de esto, es la siguiente proposición que, por cierto, muestra de manera clara la similitud entre su concepción y la de Euclides, respecto a las tangentes:

“Proposición 32. La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección.” (Vera, 1970, vol. 2).

Así mismo, en el libro II de su obra *Cónicas*, Apolonio continua con el estudio de las tangentes, demostrando, aunque de forma sintética, la propiedad que dice que si *P* es un punto cualquiera de una hipérbola de centro *C*, entonces la tangente en *P* cortará a las asíntotas *L* y *L’* que equidistan de *P*. Posteriormente, en ese mismo libro, muestra cómo trazar rectas tangentes a una cónica haciendo uso de las propiedades de la división armónica de un segmento.

Apolonio también abordó problemas de máximos y mínimos, aunque en realidad, sus teoremas de máximos y mínimos, eran teoremas sobre tangentes y normales a las secciones cónicas.

A diferencia de Euclides y Apolonio, Arquímedes no abordó de manera “explicita” el problema de las tangentes. En sus trabajos, Arquímedes utiliza la noción de recta tangente y sus propiedades, para el trazado de polígonos circunscritos a circunferencias. Sin embargo, en su obra *Sobre las espirales*, Arquímedes pudo encontrar la tangente a la curva que lleva su nombre: *la espiral de Arquímedes*.

Hay que señalar que los matemáticos griegos no disponían de una definición muy satisfactoria de la tangente a una curva *C* en un punto *P*, considerándola como una recta *L* que tiene el único punto *P* común con la curva, y tal que no pueda trazarse ninguna otra recta pasando por *P* e incluida entre la recta *L* y la curva *C* (Boyer, 1999). Posiblemente Arquímedes tuvo que romper con esta concepción para trazar la tangente de la espiral, adoptando un punto de vista cinemático que le permitió determinar la dirección instantánea del movimiento del punto mediante el cual se genera la curva.

Después de la contribución de Euclides, Apolonio y Arquímedes, no se volvieron a realizar contribuciones importantes a los problemas de tangentes, velocidades y máximos y mínimos; la *derivada* como objeto emergente de estas prácticas matemáticas, tendría que esperar hasta la edad media para recibir nuevas aportaciones para su desarrollo.

2.2. LA NOCIÓN DE VARIACIÓN EN LA EDAD MEDIA

El concepto de variación continua de cantidades no apareció en la matemática de los griegos de la antigüedad clásica, pues sus cantidades eran numéricas y discretas o geométricas y estáticas. Estudiaron el movimiento uniforme (lineal o circular), de modo que los conceptos de *aceleración* y *velocidad instantánea* carecían de sentido para ellos (Cantoral y Farfán, 2004).

El estudio del cambio en general y el movimiento como caso particular, comenzó durante el siglo XIV principalmente en las universidades de Oxford y París. En Oxford, en el Merton College, los filósofos escolásticos Thomas Bradwardine y Richard Swineshead describieron la *latitud de formas,* lo que hoy puede denominarse intensidad de cualidades[2]. Estos escolásticos de Merton, estudiaban las variaciones de la intensidad de una cualidad, desde un punto a otro de un cuerpo, o desde un punto a otro del tiempo; como producto de esto, ellos lograron deducir una formulación para el caso de una velocidad de cambio uniforme que se conoce como la *Regla del Merton College* o simplemente *Regla de Merton*.

Para enunciar la regla de Merton, los escolásticos definieron: el movimiento como uniforme cuando las distancias iguales eran recorridas en tiempos iguales; la aceleración uniforme, como aquella para la cual incrementos iguales de velocidad se adquieren en intervalos de tiempo iguales; y el movimiento variable como velocidad instantánea. Así, expresada en términos de tiempo y distancia, la regla de Merton nos dice:

> *"Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total s es tal como aquella que se tendría durante el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniforme igual al promedio de su velocidad inicial v_o y su velocidad final v_f (es decir, su velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo).*

[2] En la filosofía aristotélica, cualidades son aquellos atributos que admiten intensidad (en un punto del cuerpo, en un instante del tiempo), tales como calor y densidad. Las cualidades intensivas (o locales) fueron distinguidas de las cantidades extensivas (o globales) como la altura o el peso. La velocidad instantánea fue vista como una cualidad, la intensidad del movimiento; la correspondiente cantidad era el movimiento total, es decir, la distancia recorrida (Cantoral y Farfán, 2004).

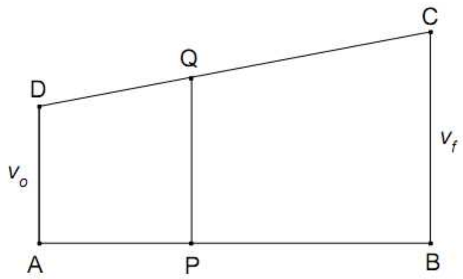


Figura 2.2. Demostración geométrica de Oresme de la Regla de Merton

Esto es, $s = \frac{1}{2}(v_o + v_f)t$, en donde t es la longitud del intervalo considerado." (Cantoral y Farfán, 2004, p. 52).

El trabajo con problemas sobre la *latitud de las formas*, llevó al planteamiento de varias series infinitas. Por ejemplo en 1345, el ya mencionado Richard Swineshead escolástico del Merton College, escribió su *Liber Calculationum* en el que, además de la regla de Merton, resuelve el siguiente problema de la *ley artificial*:

> *"Si a lo largo de la primera mitad de un cierto intervalo de tiempo, una forma se mantiene con cierta intensidad; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo la forma se mantiene al doble de dicha intensidad; a lo largo del siguiente octavo de intervalo la forma se mantiene al triple de intensidad, y así ad infinitum, entonces la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la forma durante el segundo intervalo [el doble de la intensidad inicial]"* (González, 1992, p. 47).

Como se puede observar el problema equivale a la suma de la serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 2$$

Para llegar al resultado, Swineshead presentó una argumentación verbal extensa y confusa. Casi treinta años más tarde, Oresme pudo demostrarlo, en forma más sencilla, mediante procedimientos geométricos.

El escolástico parisino Nicole Oresme, continúa con el desarrollo de la llamada *latitud de las formas* en su obra *Tractatus de latitudinibus formarum* en la cual escribe:

> *"La dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de figuras*

geométricas. Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo." (González, 1992, p. 42).

Así, la noción de gráfico como elemento descriptivo de una cualidad, es importante, pues facilita la comprensión de la variación de un fenómeno, a lo que él llama la representación gráfica de *las intensidades de las cualidades*. De esta forma, elegido un punto origen en una recta horizontal, Oresme toma como *longitudo* (longitud) nuestra abscisa, que es el tiempo, y como *latituto* (latitud) nuestra ordenada que es la intensidad o la amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros. La cualidad forma o propiedad se representa, de acuerdo con la variación de la intensidad, respecto del tiempo. Esta variación se refleja mediante la "figura total" o simplemente *figura* como lo llamó Oresme, es decir, el área que determina esa curva, el eje de las longitudes y las intensidades inicial y final. Por ejemplo, para la demostración geométrica que da Oresme de la regla de Merton, (véase figura 2.2) considera el movimiento uniformemente acelerado durante un intervalo de tiempo $(0,\ t)$ correspondiente a la longitud *AB*, la latitud en cada punto *P* de *AB* es una ordenada *PQ* cuya longitud es la velocidad en el instante correspondiente, por lo que el lado *CD* es una grafo velocidad – tiempo. Oresme vio que la definición de aceleración uniforme implica que *CD* es un segmento de línea recta, y que la *figura* o *figura total*, es un trapezoide con base $AB=t$ y alturas $AD=v_o$ y $BC=v_f$. Supuso que el área *s* de ese trapezoide es igual a la distancia total recorrida y a partir de la fórmula para hallar el área del trapezoide se sigue inmediatamente que $s=\frac{1}{2}(v_o+v_f)t$.

González (1992) señala que Oresme introduce cinco ideas innovadoras al campo de las matemáticas: a) la medida de diversas variables físicas por medio de segmentos; b) algún tipo de relación funcional entre variables; c) una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales; d) la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo y, e) una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad – tiempo.

Hay que señalar que durante este período, los resultados fueron hallados mediante argumentaciones verbales o geométricamente mediante la representación de la forma, más que mediante consideraciones aritméticas basadas en la noción intuitiva de límite, que fue ampliamente usada durante el siglo XVII.

A finales del siglo XVI y principios del siglo XVII, fue una época fértil para las ciencias exactas como un todo. La astronomía hizo grandes progresos por medio de la obra de Johannes Kepler; Simón Stevin, por su parte, contribuyó en gran medida a la estática con su tratado *De Beghinselen* *der Weeghconst* (*"Los elementos del arte de la pesada"*). En la mecánica, la deducción por Galileo Galilei de las leyes de la caída libre de los cuerpos y de la trayectoria parabólica de los proyectiles, significó una ruptura con la física aristotélica y el comienzo de una nueva época en la que iba a utilizarse ampliamente la matemática en la física (Andersen, 1984).

Otra contribución de Johannes Kepler, fue la resolución de un problema de aplicación práctica sobre máximos y mínimos. De acuerdo con Durán (1996), este problema tiene su origen de una cosecha excepcional de uvas en Austria, que una vez procesada generó gran cantidad de vino. Para guardar dicho vino, a principios del siglo XVII, Kepler estudió la forma de los barriles que con menor superficie (menor cantidad de madera utilizada para hacerlos) tuviera mayor volumen (pudieran albergar más cantidad de vino). Para estudiar este problema Kepler empleo un método que es considerado el primer antecedente del que empleamos en la actualidad para el cálculo de extremos; concretamente, Kepler buscó el punto donde la variación en el volumen producida por una variación de las dimensiones fuera prácticamente nula; es decir, en términos actuales, buscó los puntos que anulaban la derivada de la función que medía el volumen.

El interés de Kepler en el cálculo de volúmenes de barriles de vino dio como resultado el libro *Nova stereometria doliorum vinariorum* ("nueva medida de volúmenes de toneles para vino"). En este libro, Kepler consideraba sólidos de revolución como si estuvieran compuestos de diversas maneras por una cantidad infinita de partes sólidas. Por ejemplo, consideraba una esfera como formada por un número infinito de conos con vértice común en el centro y base en la superficie de la esfera; esto lo conduciría al resultado de que "la esfera es igual en volumen al cono que tiene como altura el radio de la esfera y como base un círculo igual al área de dicha esfera, es decir, un círculo con el diámetro de la esfera como radio" (Andersen, 1984).

En el siguiente apartado discutiremos las aportaciones más importantes que tuvieron lugar durante el siglo XVII, mismos que dan paso al surgimiento y fundación de la derivada.

2.3. SIGLO XVII: CREACIÓN Y DESARROLLO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

El siglo XVII representó un punto de inflexión para el desarrollo de las matemáticas en general y para el surgimiento del *cálculo infinitesimal*. Por un lado las aportaciones de Viète al campo del álgebra y la publicación de su obra "El Arte Analítica", y por otro, la creación de la *Geometría Analítica,* jugaron un factor determinante para el descubrimiento y desarrollo del cálculo diferencial.

Las investigaciones medievales sobre el movimiento, en particular las de Oresme, conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. Galileo toma estas ideas y las demuestra con argumentos de indivisibles. Así mismo, Galileo establece la ley fundamental de la composición vectorial del movimiento y la aplica para determinar la trayectoria descrita por un proyectil. Además, si se representa el movimiento en un gráfico de desplazamiento – tiempo, la dirección de éste da la dirección de la tangente a la trayectoria, mientras la velocidad da la pendiente de la línea tangente (González, 1992).

Estas ideas posteriormente serían recogidas y desarrolladas por matemáticos como Roberval, Torricelli y Newton, quien más tarde desarrollaría su cálculo de fluxiones.

Los problemas de diferenciación aparecen bajo tres aspectos: *velocidades*, *tangentes* y *máximos y mínimos*. El abordar estos problemas, durante este período, significó el inicio de los argumentos infinitesimales que luego desembocarían en el uso de *diferenciales*, en el cálculo diferencial de Leibniz, y de los *momentos* en el cálculo de fluxiones de Newton.

2.3.1. Descartes y su método de las tangentes

La creación de la *geometría analítica* es considerada la contribución más importante de Descartes (1596 – 1650) a las matemáticas. Según Boyer (1999) el objetivo del "método" (la geometría analítica) de descartes era doble: 1) el de liberar en lo posible a la geometría, a través de los métodos algebraicos, del uso de las figuras, y 2) darle un significado concreto a las operaciones del álgebra por medio de su interpretación geométrica. Así, para resolver un problema geométrico, Descartes partía del estudio de éste para traducirlo a un lenguaje de ecuaciones algebraicas y después, una vez simplificada la ecuación lo más posible, resolvía dicha ecuación mediante la geometría. De esta forma se puede decir que la geometría analítica de Descartes es la aplicación sistemática y completa del álgebra a la geometría y viceversa.

Uno de los aspectos que debemos señalar aquí, es en cuanto a los problemas en los que estaban interesados los matemáticos de aquella época, problemas que fueron primordiales para el desarrollo del cálculo: *problemas de máximos y mínimos, problemas de tangentes y problemas de cuadraturas* (Durán, 1996). Descartes lo expresa de la siguiente manera:

> *"Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de las curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella. Y me atrevería a decir que éste es no sólo el problema*

más útil y más general de la geometría que conozco, sino incluso de los que hubiera deseado nunca conocer" (Descartes; citado en Boyer, 1999, p. 435).

De acuerdo con Collette (1993) Descartes elaboró tres métodos para calcular las normales (o, equivalentemente, las tangentes). El primero, apareció en el libro II de la *géométrie*, es conocido como *el método del círculo*. El *método del círculo* de Descartes es un método para el trazado de las tangentes a las líneas curvas mediante la construcción previa de la recta normal (González, 1992). El segundo método consistía en determinar la tangente a una curva considerándola como la posición particular de una secante que gira en torno al pie de la tangente, hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva llegan a coincidir. El tercer método expresa el punto de vista adoptado en la actualidad para introducir el concepto de derivada en un punto: la tangente está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquella corte a la curva, coincida con el primero.

Es importante señalar que, aunque Descartes manifestó cierto interés por los métodos infinitesimales, no participó en su desarrollo porque sus trabajos no eran más que una ejemplificación en el desarrollo de su filosofía; de hecho su método es puramente algebraico y no recurre a los conceptos (noción intuitiva) de límite o infinitésimo, él evitaba el uso de métodos infinitesimales a causa de los riesgos que presentaban y debido a la ausencia de fundamentación teórica para el razonamiento infinitesimal. Sin embargo queriendo corregir la regla de los máximos y mínimos de Fermat, utiliza un procedimiento que es equivalente a definir la tangente como límite de la secante.

Aun así, el *método del círculo* de Descartes es puramente algebraico, donde, a diferencia de los métodos de Fermat, como veremos más adelante, queda bien claro que no aparecen consideraciones de tipo infinitesimal (González, 1992). El siguiente ejemplo (Andersen, 1984) muestra cómo Descartes aplicaba dicho método: supongamos dada la curva algebraica *ACE*, y supongamos que se pide trazar la normal a la curva en *C* (ver la figura 2.3).

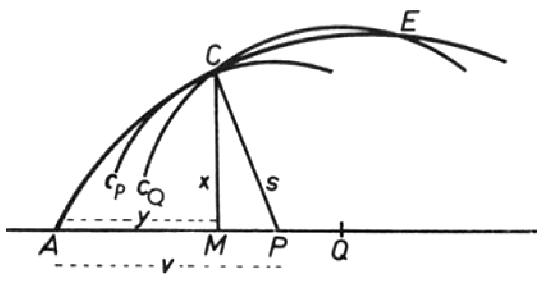


Figura 2.3. Método del círculo de Descartes

Descartes supone que la recta *CP* es la solución del problema. Sea *CM=x, AM=y, AP=v, CP=s*. Además de la curva *x=f(y)* o *ACE,* Descartes consideraba el círculo c_P con centro en *P* y que pasa por *C*; es decir, el círculo de ecuación $x^2 + (v - y)^2 = s^2$. La circunferencia de este círculo toca a la curva *CE* en *C* sin cortarla, mientras que la circunferencia c_Q, $x^2 + (v_Q - y)^2 = s_Q{}^2$, con centro en un punto *Q* distinto de *P* y que pasa por *C*, cortará a la curva no sólo en *C*, sino también en algún otro punto; sea este punto *E*. Esto significa que la ecuación $(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - s_Q{}^2 = 0$, obtenida sustituyendo *x=f(y)* en la ecuación de c_Q, tiene dos raíces distintas[3]; pero "cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E*, más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final, cuando los puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales, es decir, cuando la circunferencia que pasa por *C* toque a la curva en el punto *C* sin cortarla" (Descartes, citado en Andersen, 1984, p. 30). Descartes llegó a la conclusión de que *CP* será una normal a la curva *C* cuando *P* (es decir, *v*) esté determinado de tal manera que la ecuación $(f(y))^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0$, tenga dos raíces iguales y_0. Usando términos modernos es fácil comprobar que esta condición nos da la expresión correcta para la subnormal *MP*: $v - y_0 = f'(y_0) \cdot f(y_0)$.

Descartes dio ejemplos de su *método del círculo* hallando, entre otras cosas, la normal a la elipse. Sin embargo, a pesar de que dicho método es aplicable a cualquier curva algebraica, éste se complica cuando la ecuación de la curva no es una ecuación algebraica sencilla, debido a los laboriosos cálculos que hay que hacer para determinar *v* comparando los coeficientes (Andersen, 1984).

2.3.2. El método de los extremos de Fermat

Fermat (1601 – 1665) representa uno de los eslabones intermedios más importantes en la transición de la matemática antigua a la moderna. Al igual que Descartes, Fermat desarrolló su propia geometría analítica. De esta forma se puede decir que tanto Descartes como Fermat son los fundadores de la geometría analítica.

Con base en las obras fundamentales de la antigüedad clásica griega (los *Elementos* de Euclides, las *Cónicas* de Apolonio, las obras de Arquímedes, la *Aritmética* de Diofanto, la *Colección matemática* de Pappus, etc.), así como en la teoría de ecuaciones de Viète (en particular en el método de la *Syncrisis* de su *Arte analítica*), Fermat desarrolla los primeros métodos generales, en la historia de las matemáticas, para la determinación de extremos (González, 2008), que posteriormente aplica a la determinación de las normales y tangentes.

---

[3] Descartes consideraba solamente curvas para las cuales *(f(y))*^{2} es un polinomio en *y*, o y^2 un polinomio en *x*.

Según González (2008) Fermat realizó cinco trabajos o memorias sobre máximos y mínimos:

1. *Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum* (método para hallar máximos y mínimos). Esta memoria, también conocida como el *Methodus*, que Fermat compone entre 1629 y 1637, es un procedimiento puramente algorítmico desprovisto de todo fundamento demostrativo, donde Fermat introduce la técnica de la *adigualdad*[4]. En la segunda parte de este tratado Fermat describe el primer ejemplo de aplicación del método de máximos y mínimos al trazado de las tangentes a las líneas curvas, la tangente de la parábola, que provoca la polémica entre Descartes y Fermat sobre los máximos y mínimos y las tangentes.
2. *Ad eamdem methodum…*(sobre el mismo método de máximos y mínimos). Esta obra fue escrita en 1638 para explicar su método a Mydorgue y Desargues, cuando Descartes les pidió que actuaran como árbitros en su controversia con Fermat. En esta obra Fermat ilustra su método aplicándolo a una serie de ejemplos entre los cuales destaca la resolución del famoso problema de Pappus. Termina este trabado aplicando el método al trazado de la tangente a la elipse.
3. *Analityca eiusdem methodi investigatio* (investigación analítica del método de máximos y mínimos). En este escrito Fermat, con base en su propio perfeccionamiento del método de *Syncrisis* de la teoría de ecuaciones de Viète, establece los fundamentos teóricos de su método de máximos y mínimos.
4. *La carta a Pierre Brûlart.* Publicada en 1919, en esta obra Fermat ensaya realizar un cierto desarrollo limitado en serie, y aunque no podía demostrarlo rigurosamente, le parecía verosímil que se determinaba un extremo a partir de la ecuación que resulta al anular el coeficiente del término de primer grado. Además, hacía notar que había descubierto que el coeficiente del término de segundo grado era negativo en caso de máximo y positivo en caso de mínimo.
5. *Ad methodum de máxima et minima appendix* (apéndice al método de máximos y mínimos). En esta obra escrita en 1644 Fermat aplica la misma técnica que en su primera memoria, descrita anteriormente, complementándola con una extraordinaria mejora y simplificación de un método de Viète para eliminar expresiones racionales de las ecuaciones. De esta forma

[4] La idea de hacer "adiguales" dos expresiones proviene de Diofanto, quien usa en la *Aritmética* el término griego *parisótes* para designar una aproximación a un número racional tan cercana a éste como sea posible. Xylander introduce el término latino *adaequalitas* del griego *parisótes* en su versión al latín de la *Aritmética*, publicada en 1575

Fermat pudo extender las reglas del *"Methodus"* a problemas más complicados en los que la expresión era irracional; concretamente al problema de Arquímedes[5].

La importancia del método para hallar máximos y mínimos presentado por Fermat en el *"Methodus"*, además de ser el primer método general en la historia de las matemáticas para determinar máximos y mínimos, radica en la idea de incrementar una magnitud considerable a la variable independiente. Fermat describe su método de la siguiente forma:

"Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

1. *Sea A una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).*
2. *Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de A en términos que pueden ser de cualquier grado.*
3. *Se sustituirá a continuación la incógnita original A por A+E, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de A y E, en términos que pueden ser de cualquier grado.*
4. *Se "adigualará", para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.*
5. *Se eliminarán todos los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de E o de una de sus potencias.*
6. *Se dividirán todos los términos por E, o por alguna potencia superior de E, de modo que desaparecerá la E, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los miembros.*
7. *Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la E o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.*
8. *La resolución de ésta última ecuación dará el valor de A, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original."* (González, 2008, p. 65).

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar cómo aplicaba Fermat su método para el cálculo de extremos: Dividir un segmento de longitud *N* en dos partes de manera que el producto sea el máximo posible. Para dar solución al problema, sea *A* la cantidad desconocida por la que tendremos que dividir el segmento de longitud *N*.

[5] Encontrar el cono de superficie total máxima que se puede inscribir en una esfera dada.

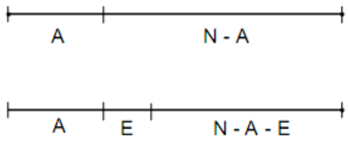


Figura 2. 4. Ejemplo del método de los extremos de Fermat

De tal forma que el producto pedido estará dado por la expresión:

$$f(A) = A(N - A) = AN - A^2 \text{ …(1)}$$

Ahora bien, dado que queremos que el producto sea el máximo posible, incrementemos a nuestra variable *A* una magnitud *E*, de tal forma que el producto estaría dado por:

$$f(A + E) = (A + E)(N - A - E) = AN - A^2 + NE - 2AE - E^2 \text{ …(2)}$$

"Adigualando" las expresiones (1) y (2) obtenemos:

$$AN - A^2 \approx AN - A^2 + NE - 2AE - E^2$$

$$NE \approx 2AE + E^2 \text{ …(3)}$$

Dividiendo ambos miembros de la *"adigualdad" por E, obtenemos:*

$$N \approx 2A + E \text{ …(4)}$$

Finalmente, haciendo *E=0*, en (4) nos queda:

$$2A = N$$

Lo que significa que el producto es máximo cuando $A = \frac{N}{2}$.

El método de los extremos fue aplicado por Fermat, alrededor de 1632, a la determinación de las normales y tangentes o, más precisamente, de las subtangentes a una curva (Collette, 1993). En la segunda parte del *"Methodus"* Fermat emplea el método de los extremos para hallar la tangente de una parábola en un punto[6]. Para ello, Fermat utiliza, además de la "adigualdad", dos propiedades: la primera es la "definición" de parábola que manejaba Apolonio la cual sostiene que "una parábola es una curva para la que dados dos de sus puntos cualesquiera *B*, *P*, se tiene que $\frac{BC^2}{PI^2} = \frac{CD}{ID}$" (ver figura

[6] El desarrollo del ejemplo de la parábola dado por Fermat para ilustrar cómo aplica su método para la obtención de máximos y mínimos, puede verse en González (2008), pp. 109-112.

2.5); la segunda es la relación de semejanza entre los triángulos, que contienen las subtangentes, *BCE* y *OIE* para establecer que $\frac{BC}{OI} = \frac{CE}{IE}$.

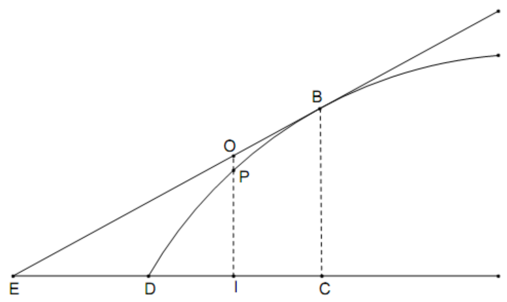


Figura 2. 5 Aplicación del método de los extremos al cálculo de la tangente a la parábola

Debemos subrayar dos cuestiones importantes, la primera es que el proceso utilizado por Fermat es, en esencia, similar al cálculo de $lim_{E\to 0} \frac{f(A+E)-f(A)}{E}$, que se emplea en la actualidad para hallar la primera derivada. Sin embargo, una de las principales críticas a su método, radica en la fundamentación del paso de la *"adigualdad"* a la igualdad y la división por *E,* ya que en el mismo proceso considera $E = 0$ y $E \neq 0$.

A pesar de esto, las aportaciones realizadas por Fermat al desarrollo del cálculo diferencial a través de sus trabajos sobre máximos y mínimos y tangentes, hacen que diversos matemáticos del siglo XVIII, tales como Laplace y Lagrange, lo consideren el verdadero inventor del cálculo diferencial. Como señala Durán (1996) el mismo Newton, en una carta descubierta en 1934, escribe que sus ideas para el desarrollo del cálculo las tomó del método de tangentes de Fermat.

2.3.3. Los métodos cinemáticos de Roberval y Torricelli

Roberval (1602 - 1675) y Torricelli (1608 – 1647) desarrollaron entre 1630 y 1640 métodos para el trazado de tangentes, basándose en argumentos cinemáticos. Roberval establece que la dirección del movimiento de un móvil que describe una circunferencia es la perpendicular en el extremo del diámetro, y de aquí, generalizando, enuncia lo que él llama axiomas o *principios de invención* para encontrar las tangentes a la curva (González, 1992). Este principio de invención se basa en la siguiente afirmación:

> *"…en todas las demás líneas curvas, cualesquiera que sean, su tocante en cualquier punto es la línea de dirección del movimiento que tiene en ese mismo punto el móvil que la describe"* (Collette, 1993, p.40).

Como se puede observar, para Roberval, la tangente a una curva representa la dirección del movimiento del punto que describe la curva en el punto de tangencia. De acuerdo con Collette (1993) la regla que permite a Roberval trazar la tangente a una curva dada, es la siguiente:

> *"por las propiedades específicas de la línea dada (que os serán dadas) examinad los distintos movimientos que tiene el punto que la describe en el lugar en el que queráis trazar la tocante: de todos estos movimientos compuestos en uno sólo, trazad la línea de dirección del movimiento compuesto; tendréis la tocante de la línea curva."* (p. 40).

Según González (1992) el método de Roberval utiliza el concepto intuitivo de movimiento instantáneo y se basa en tres principios básicos: 1) Considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil; 2) considerar la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento instantáneo en ese punto móvil, y 3) Si el movimiento que describe la curva es una combinación de movimientos simples, la línea instantánea del movimiento o dirección de la tangente puede hallarse por composición de movimientos, mediante la ley del paralelogramo. De este último principio subyace el que dicho método no sea general, ya que solamente es válido cuando el paralelogramo de velocidades resulta ser un cuadrado o un rombo.

Por su parte, Torricelli también utiliza un método para el trazado de tangentes que se basa esencialmente en una concepción dinámica de la tangente, la cual resulta de la composición de dos movimientos de un punto móvil que traza la curva. Trazar la tangente a una curva descrita por el movimiento de un punto que resulta de la composición de dos movimientos consiste en determinar la resultante de las velocidades de los dos movimientos (Collette, 1993).

Torricelli, en su obra *De motu gravium* incorporada a su *Opera Geométrica* de 1644, recoge y desarrolla los resultados de Oresme y Galileo y, tras nuevas especulaciones cinemáticas, obtiene para curvas particulares (parábolas de orden cualquiera) resultados fácilmente generalizables, que permiten establecer desde un punto de vista cinemático, el carácter inverso de las operaciones de cuadraturas, que dan el espacio conocida la velocidad, y de construcción de tangentes que dan la velocidad conocido el espacio. Es decir, si $s = s(t)$ y $v = v(t)$ representan respectivamente el espacio y la velocidad en función del tiempo, se tiene que: a) el área limitada por la curva $v = v(t)$ y el eje de las abscisas representa, para cada *t*, el espacio recorrido $s = s(t)$, y b) la pendiente de la tangente a la curva $s = s(t)$ representa, para cada *t*, la ordenada de la curva $v = v(t)$ en la abscisa *t*.

Al tomar la dirección instantánea del movimiento como conocida, tanto Roberval como Torricelli habían evitado el uso de infinitesimales en su método, el cual tenía la ventaja adicional de ser aplicable a curvas que no están referidas directamente a un sistema de coordenadas. Sin embargo, el método no era general en cuanto a que no todas las velocidades podían ser determinadas (Andersen, 1984).

2.3.4. Las reglas de Hudde y Sluse

En la época del matemático holandés Johann Hudde los dos temas de más interés entre los matemáticos eran la geometría analítica y el análisis matemático. Hudde y Sluse trabajaron en ambos temas. Las reglas de estos dos matemáticos proveen de algoritmos que facilitan la obtención de las raíces dobles. Hudde expresa su regla de la siguiente manera:

> *"Si una ecuación tiene una raíz doble y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria, de forma que el primer término de la progresión multiplica al primer término de la ecuación y así sucesivamente, el producto obtenido es una ecuación que tiene la raíz dada."*(González, 1992, p. 193)

Boyer (1999) señala que esta regla no es más que una forma camuflada del teorema moderno que dice que si *r* es una raíz doble de la ecuación algebraica *f(x)=0*, entonces *r* también es raíz de la ecuación *f'(x)=0*. Una segunda regla dada por Hudde consiste en una modificación del teorema de Fermat que en la actualidad se formula diciendo que si *f(a)* es un valor máximo o mínimo relativo de un polinomio *f(x)*, entonces *f'(a)=0*.

En 1659, Johann Hudde dio una formulación general de un patrón subyacente a las soluciones de problemas de máximos y mínimos por el método de Fermat, que en notación moderna, afirma que dado un polinomio de la forma $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces, se tiene un máximo o un mínimo cuando $\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$ (Grabiner, 1983).

De acuerdo con Andersen (1984), Hudde aplicó su regla al cálculo de valores máximos o mínimos aceptando como hipótesis que si α es un valor de *x* que hace a *p(x)* máximo o mínimo, entonces la ecuación *p(x)=p(α)* tiene dos raíces iguales. También extendió su método a una regla para determinar subtangentes, y aunque no dio ni una demostración de dicha regla, es interesante por ser una de las primeras reglas generales que se dieron: Sea una curva de ecuación $p(x, y) = 0$, donde p es un polinomio en *x* e *y*; la regla de Hudde asegura que la subtangente *t* correspondiente a un punto (x, y) viene dada por $t = \frac{-x(\ p(x,y),\ \ a,\ \ d)_y}{(\ p(x,y),\ \ a,\ \ d)_x}$, donde los subíndices significan que en el numerador $p(x, y)$

debe ser considerado como un polinomio en *y* mientras que en el denominador como un polinomio en *x*.

La regla de Hudde para la obtención de las raíces dobles hizo más fácil de aplicar el método de Descartes, porque podía tomarse una progresión aritmética preparada para que un posible término complicado quedara multiplicado por cero. De hecho Newton, en sus trabajos del otoño de 1664, halla la subnormal de una curva aplicando una combinación del método de Descartes y la regla de Hudde (Andersen, 1984).

Por su parte, René François de Sluse obtuvo en 1652, no se sabe si a partir de Torricelli o de forma independiente, una regla para hallar la tangente a una curva dada por una ecuación de la forma $f(x, y)=0$, donde *f* es un polinomio. Esta regla, que no fue publicada hasta 1673, se puede enunciar de la siguiente manera: "la subtangente en cuestión será el cociente obtenido, dividiendo los términos del polinomio $f(x, y)$ que contengan la variable *y*, cada uno de ellos multiplicado por el exponente de la potencia de *y* que aparece, por los términos en que aparezca la variable *x*, multiplicado cada uno de ellos por el correspondiente exponente de *x* y divididos todos ellos por *x*" (Boyer, 1999, p. 471). Lo anterior equivale a escribir, en notación actual, $\frac{yf_y}{f_x}$.

2.3.5. El método de las tangentes de Barrow

Después de las aportaciones realizadas por Descartes y Fermat tanto con el desarrollo de la geometría analítica y los trabajos realizados sobre los problemas de tangentes y máximos y mínimos, diversos matemáticos, entre los que podemos mencionar a Roberval, Torricelli, Wallis, entre otros, siguieron trabajando en esta misma dirección casi al mismo tiempo en el que se desarrollaban métodos para abordar problemas de cuadraturas, cálculo de áreas y volúmenes.

Sin embargo, fue en los trabajos de Barrow (1630 - 1677) que el cálculo diferencial dio el siguiente paso importante rumbo a su evolución. Barrow, apoyándose en los conceptos medievales de tiempo y movimiento, ligados a los indivisibles de Cavalieri y a la composición de movimiento de Torricelli, fue capaz de establecer (aunque de manera intuitiva) que los procesos de cálculo de tangentes eran inversos a los de cuadraturas. Collette (1993) señala que en la cuarta lección de su obra *"Lectiones opticae"* publicada en 1669, Barrow incluye un pasaje en el que menciona que a partir del conocimiento de la tangente a una curva es posible pasar a la construcción y cuadratura de otra y viceversa (a lo que hoy conocemos como Teorema fundamental del Calculo).

De todos los matemáticos que aportaron a la evolución del cálculo diferencial, Barrow fue quien más cerca estuvo de fundar el cálculo, antes que Newton y Leibniz. Sin embargo, el hacer a un lado la nueva geometría analítica y evocarse a los razonamientos geométricos de los antiguos griegos, impidió a Barrow adelantarse a la fundación del cálculo. González (1992) lo expresa de la siguiente manera:

> *"Se puede aventurar que fue la forma geométrica de trabajar lo que impidió a Barrow, a pesar de sus magníficos resultados de anticipación, desarrollar el enfoque algorítmico que es el ingrediente esencial del cálculo, pues su obra padece una total limitación operacional que hace imprescindible la utilización constante de figuras geométricas complejas, a las que se esclaviza, porque en su descripción minuciosa puede estar la clave de la demostración"* (pp. 204).

De todos los trabajos desarrollados por Barrow sólo en su método para la obtención de las tangentes adoptó un enfoque analítico. Su método para el cálculo de tangentes es muy parecido al de Fermat, excepto por el *triángulo diferencial*[7] también llamado *triángulo de Barrow,* y que en lugar de realizar un incremento (*E* en el método de Fermat) Barrow introduce dos incrementos *e* y *a*, lo que de acuerdo con Boyer (1999) equivale en nuestro lenguaje actual a Δx y Δy respectivamente.

Con base en la figura 2.6, Barrow describe así su método de las tangentes:

"Sean *AP* y *PM* dos líneas rectas dadas, *PM* cortando a la curva dada en *M*, y supongamos que *MT* corta a la curva en *M* y corta a la recta *AP* en *T*.

Para encontrar el segmento *PT*, consideremos un arco de la curva infinitamente pequeño *MN*. Tracemos *NQ* y *NR*, paralelas respectivamente a *MP* y *AP*. Sea *MP=m*, *PT=t*, *MR=a* y *NR=e* otros segmentos determinados por la naturaleza de la curva. Comparamos *MR* con *NR* por medio de una ecuación obtenida por cálculo. A continuación observaremos las siguientes reglas:

Regla 1. En el cálculo omitiremos todos los términos conteniendo potencias de *a* o *e*, o productos de ellos.

Regla 2. Después de formar la ecuación desecharemos todos los términos que consisten en letras significando cantidades determinadas o conocidas, o términos que no contienen *a* o *e* (estos términos pasándolos a un lado de la ecuación serán siempre igual a cero).

[7] También se le conoce como *triángulo característico*, y antes de Barrow ya era utilizado por Torriceli, Pascal, Neil, etc. Este triángulo es la piedra angular para el desarrollo del cálculo de Leibniz.

Regla 3. Se sustituye m (o MP) por a y t (o PT) por e, de aquí se encontrará la cantidad PT." (González, 1992, pp. 205)

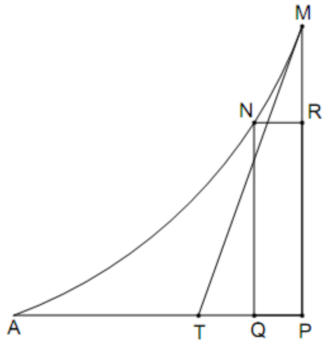


Figura 2. 6. Método de las tangentes de Barrow

A continuación proponemos el siguiente ejemplo para ilustrar el método de las tangentes de Barrow. Consideremos la curva dada por la expresión $y^2 = 3x$, primero sustituyendo x y y por x+e y y+a respectivamente, obtenemos:

$$y^2 + 2ya + a^2 = 3x + 3e$$

Aplicando la *regla 1*, es decir, despreciando los términos que contienen potencias de orden superior a 1 de a y e:

$$y^2 + 2ya = 3x + 3e$$

Aplicando la *regla 2*, es decir, sustrayendo de la expresión anterior $y^2 = 3x$:

$$2ya = 3e$$

Finalmente aplicando la *regla 3*:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{m}{t} = \frac{a}{e} = \frac{3}{2y}$$

De donde la subtangente viene dada por $PT = t = \frac{2my}{3}$.

Observemos dos aspectos importantes en el método de las tangentes de Barrow; el primero es que, al aplicar la *regla 3* (para el cálculo de la subtangente t), Barrow encuentra la razón $\frac{a}{e}$ considerando la semejanza entre los triángulos MTP y MNR. El segundo aspecto es que Barrow aplica el triángulo característico concibiendo la tangente como posición límite de la secante cuando a y e se aproximan a cero, aplicando (intuitivamente) el límite al suprimir las potencias de a y e de orden superior a uno.

2.4. LOS FUNDADORES DEL CÁLCULO

Como señala González (1992), es indiscutible que Newton y Leibniz son los verdaderos artífices del *cálculo infinitesimal*, pero estos dos grandes genios del pensamiento se encontraron un “terreno abonado” por numerosos matemáticos, como Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Roberval, Barrow, etc., que habían desarrollado, en la resolución de ciertos problemas, multitud de métodos y técnicas infinitesimales, de las que Newton y Leibniz “destilaron” el algoritmo universal que constituye el cálculo infinitesimal.

Como sabemos, Newton y Leibniz “fundaron”[8], de manera independiente, el Cálculo Infinitesimal. Sin embargo, y a pesar de la polémica suscitada por la supremacía de la autoría, lo cierto es que sus cálculos infinitesimales eran muy diferentes en cuanto a ideas y estilo.

Por un lado Newton comienza con la consideración de elementos infinitesimales, a la manera de Fermat y Barrow, pero enseguida deriva hacia una concepción mecánica, basada en la idea intuitiva del movimiento continuo, manejando el concepto de *fluente*, como cantidad que varía respecto al tiempo, y de *fluxión* como su velocidad de cambio respecto al tiempo (González, 1992); de ahí que al cálculo desarrollado por Newton se le conozca como *cálculo fluxional*.

El cálculo de Leibniz, por su parte, tiene un carácter más simbólico y analítico, siendo las *diferencias infinitesimales* y la suma de *infinitamente pequeños*, las bases de su cálculo diferencial e integral respectivamente (González, 1992).

A continuación describiremos las características del *cálculo de fluxiones* de Newton y el *cálculo diferencial* de Leibniz, así como las ideas y concepciones bajo las que realizaron sus desarrollos estos dos grandes matemáticos.

2.4.1. El cálculo fluxional de Newton

Al inicio de sus investigaciones sobre las propiedades de las líneas curvas, Newton se apoyó principalmente en el Método de las tangentes de Descartes y en la regla de Hudde para determinar

[8] Decimos que Newton y Leibniz fundaron, y no crearon, el Cálculo diferencial, dado que las bases del cálculo, diferencial e integral, ya estaban sentadas con los desarrollos de Fermat, Barrow, Wallis etc.

los extremos. En su obra *De analysi*, compuesta alrededor de 1669 pero publicada hasta 1711, Newton establece los fundamentos de su método de las series infinitas. Al principio de este tratado, Newton establece la siguiente regla:

$$\textit{Regla 1. Si } ax^{m/n} = y\textit{, entonces el área será } z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Posteriormente, en su *De analysi*, Newton da un método general para hallar la relación entre la cuadratura de una curva y su ordenada, método del cual surge como consecuencia inmediata la *Regla 1* antes mencionada. Este método general consiste en suponer una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde *m* es entero o fraccionario. Entonces Newton denota con *"o"* a un intervalo de tiempo muy pequeño, con *"ox"* o *"momento de x"* a un incremento infinitesimal de *x*, análogamente define *"oy"* o *"momento de y"*. Así, *"z+oy"* es el crecimiento del área cuando *x* varía un tiempo *o*. Por tanto, para una variación de tiempo *o*, se tiene que $z + oy = a(x + o)^m$. Después Newton desarrolla el segundo miembro en serie binómica infinita, cuando *m* es fraccionario, sustrae de esta serie el área $z = ax^m$, divide cada uno de los términos obtenidos por *o*, y suprime todos los términos que contienen *o* o alguna de sus potencias y obtiene finalmente que $y = max^{m-1}$.

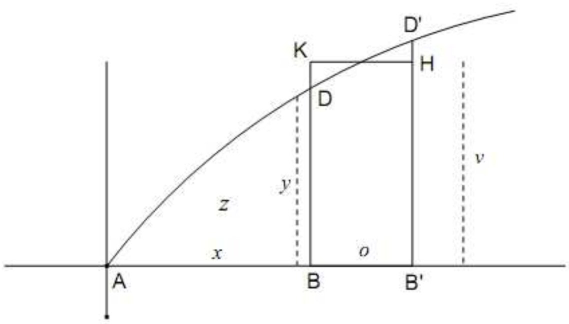


Figura 2. 7. Método de Newton para hallar relaciones entre curvas y sus áreas

Ilustremos lo anterior con el siguiente ejemplo (Bos, 1984, pp. 79): De la figura 2.7, el área *ABD=z*, *AB=x*; sean $BB' = o$ y *BK=v* tales que el área $BDD'B'$=*área* $BKHB' = ov$. Tomemos, por ejemplo, la curva para la cual $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$ (ecuación 1), es decir (elevando al cuadrado para obtener una ecuación polinómica) $z^2 = \frac{4}{9}x^3$ (ecuación 2); entonces se tiene:

$$(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3$$

de donde

$$z^2 + 2zov + o^2v = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3) \text{ …(ecuación 3)}$$

Sustituyendo las ecuaciones 1 en 3, simplificando y dividiendo los dos miembros de la expresión resultante por *o* nos queda:

$$2zv + ov = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo^2 + o^2) \text{ …(ecuación 4)}$$

Ahora, Newton toma $BB' = o$ *infinitamente pequeño* de tal forma que, como se muestra en la figura, *v*=*y*, y los términos que contienen *o* desaparecen, por lo que de la ecuación 4 obtenemos:

$$2zy = \frac{4}{3}x^2 \text{ …(ecuación 5)}$$

y finalmente, sustituyendo la ecuación 1 en 5, se obtiene:

$$y = x^{1/2}$$

En su obra *De analysi*, Newton también demuestra el recíproco, es decir, dada una curva $y = max^{m-1}$, entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$.

En 1736 se publica la obra *Methodus fluxionum et serierum infiniturum*, también conocida como el *método de las fluxiones*. En esta obra, Newton expone su segunda concepción del análisis introduciendo en sus métodos infinitesimales el concepto de *fluxión*. Así, en el artículo 60 de esta obra Newton expresa lo siguiente:

> *"Llamaré cantidades fluentes, o simplemente fluentes, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y, z, para distinguirlas de las otras cantidades que, en las ecuaciones, se consideran como conocidas y determinadas, y que se representan por las primeras letras a, b, c, etc. Representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones…"* (Collette, 1993, p. 109).

De esta forma, vemos como para Newton *x* y *y* son cantidades fluentes dado que, al ser generadas por movimiento, varían con respecto éste, y $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son las fluxiones de las fluentes *x* y *y* respectivamente, es decir las velocidades de dichos movimientos. Así mismo, Newton llama *"momento de la fluente"* a la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como *x* en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño. Por tanto, la "la velocidad $\dot{x}$ por una cantidad infinitamente pequeña *o*, es decir, $\dot{x}o$, representa el momento de una cantidad cualquiera *x*". Newton prosigue la descripción de su método:

> *"Ya que los momentos como $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ son las anexiones o aumentos infinitamente pequeños de las cantidades fluentes x e y durante los intervalos de tiempo infinitamente pequeños, se sigue que estas cantidades x e y, después de un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se convierten en $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$…De ese modo, se puede sustituir en la misma ecuación $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en lugar de x e y."* (Collette, 1993, p.110).

En la primera parte del *método de las fluxiones*, Newton trata la reducción de "términos complicados" mediante división y extracción de raíces con el fin de obtener sucesiones infinitas, evidenciando así, las "herramientas" que utilizará para resolver los problemas. En la segunda parte, propone una serie de problemas con el fin de mostrar la potencialidad de su método; el primero de ellos consiste en encontrar la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito. El segundo problema la inversa del primero.

El siguiente ejemplo (Bos, 1984) fue uno de los propuesto por Newton en su obra de 1671, y ejemplifica cómo aplicaba su método de las fluxiones. Consideremos la curva de ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ (ecuación 1), si sustituimos en ella *x* y *y* por $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ respectivamente, obtenemos:

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) + (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) \\ - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$$

si eliminamos ahora $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, que es igual a cero, por la ecuación 1, dividiendo después por *o* y despreciando finalmente los términos en que todavía figure el factor *o,* nos queda:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Con esto vemos como las *fluxiones* o velocidades de los movimientos de las fluentes, es a lo que más tarde llamaríamos la *derivada*; y los momentos como $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ del *cálculo de fluxiones* de Newton, serían las diferencias infinitamente pequeñas o *diferenciales* dx y dy en el cálculo diferencial de Leibniz.

2.4.2. El cálculo diferencial de Leibniz

A diferencia de Newton, el enfoque de Leibniz se basa fundamentalmente en el concepto de sumas y diferencias finitas (para el caso discreto) y, cuando se aplica a curvas (para el caso continuo), pueden llegar a ser infinitamente pequeñas. Tal y como señala Collette (1993), su finalidad era elaborar un método eficaz mediante el cual, sin recurrir a diagramas, ciertas propiedades de las curvas puedan ser determinadas por medio de su *cálculo de las diferencias*.

En este sentido Bos (1984), señala que fueron tres las ideas principales que permitieron a Leibniz el desarrollo de su cálculo infinitesimal. La primera era una idea filosófica fundamental, la construcción de una *characteristica generalis*, es decir, un lenguaje simbólico general mediante el cual se pudieran escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de argumentación y de razonamiento; estos símbolo deberían obedecer ciertas reglas de combinación entre ellos que vendrían a garantizar la corrección de los argumentos formulados en este lenguaje. La segunda idea se refiere a las sucesiones de diferencias; en sus estudios sobre sucesiones numéricas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y sus sucesiones de diferencias primeras asociadas, $b_1 = a_1 - a_2,\ b_2 = a_2 - a_3,\ b_3 = a_3 - a_4,\ \ldots$ Leibniz se había dado cuenta de la relación

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$$

lo que permite sumar fácilmente las sucesiones de diferencias. Basado en este descubrimiento, Leibniz obtuvo algunos resultados de entre los cuales se encuentra el denominado *triángulo armónico*. Estos resultados hicieron que Leibniz se diera cuenta de que el formar las sucesiones de diferencias y las sucesiones de sumas eran operaciones inversas una de la otra. La curva en la figura 2.8 define una sucesión de ordenadas equidistantes *y*. si su distancia es 1, la suma de estas ordenadas nos da una aproximación de la cuadratura de la curva, y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas nos da aproximadamente la pendiente de la correspondiente tangente.

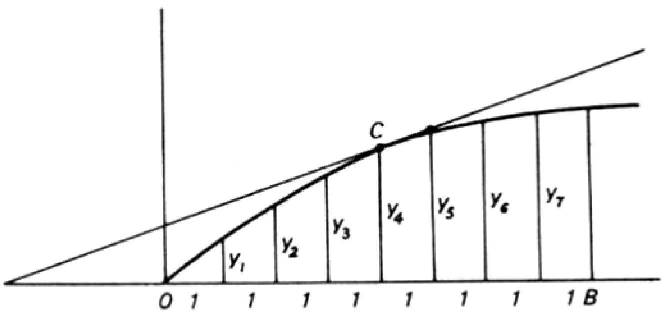


Figura 2.8

Fijémonos de que cuanto más pequeña se elija la unidad 1, mejor es la aproximación. Así, Leibniz dedujo que si dicha unidad pudiera ser tomada *infinitamente pequeña*, las aproximaciones harían exactas, y por tanto, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. De esta forma, Leibniz dedujo, de la relación inversa entre sumas y diferencias de sucesiones, que la determinación de cuadraturas y tangentes son operaciones inversas una de la otra.

La tercera idea principal, fue el uso del *triángulo diferencial* en las transformaciones de cuadraturas. Leibniz observó, estudiando la obra de Pascal, la importancia del pequeño triángulo *cc'd* situado a lo largo de la curva en la figura 2.9, pues se podía considerar semejante a los triángulos formados por la ordenada, tangente y subtangente, o por la ordenada, normal y subnormal.

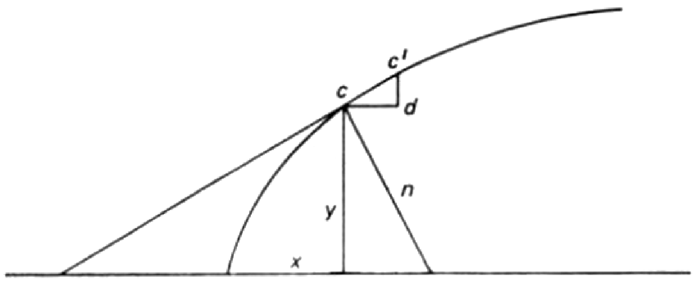


Figura 2.9. Triángulo diferencial de Leibniz

De esta forma, y con base en las tres ideas anteriores, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y ∂ que, de hecho, los concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Así, después de varios estudios, Leibniz concibe la *diferencial* de una variable y, es decir, dy, como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y; análogamente define dx como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de *x* (ver figura 2.10). De aquí que una suma tal como $\int y\, dx$ (lo que más tarde los Bernoulli llamarían *integral*) es la suma de los rectángulos infinitamente pequeños de base *dx* y altura *y*; por lo tanto, la cuadratura de una curva es igual a $\int y\, dx$.

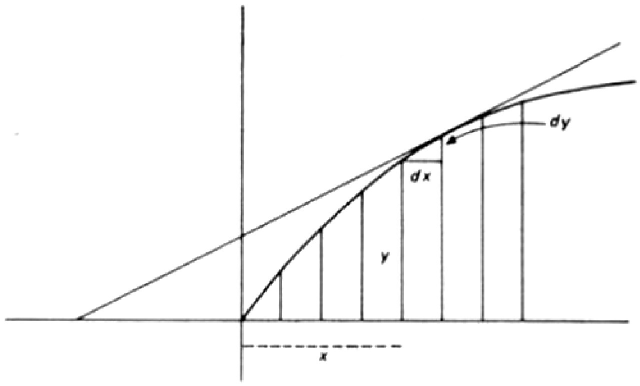


Figura 2.10. El uso de diferenciales de Leibniz

Posteriormente, Leibniz afirma que *la integración en cuanto a proceso de sumación es la inversa de la diferenciación.* Pronto se interesa en la relación que existe entre dx y dy y del significado de expresiones tales como $d(uv)$, $d(u/v)$, etc. Así, en un manuscrito fechado el 26 de junio de 1676, Leibniz afirma que la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente $\frac{dy}{dx}$, dándose cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas.

La primera publicación de Leibniz sobre el cálculo de diferencias, aparece en *Acta Eruditorum* en 1684, bajo el título *"Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur"* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales). En esta obra, según Collette (1993), Leibniz introduce por primera vez la expresión *cálculo diferencial* y proporciona las fórmulas, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, todas éstas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión.

2.4.3. El problema de la fundamentación

Tanto Newton como Leibniz trabajaron con cantidades *infinitamente pequeñas,* y ambos fueron conscientes de las dificultades subyacentes a su uso. Por un lado, Newton afirmaba que a su cálculo se le podía dar una fundamentación rigurosa por medio del concepto de *razón primera y última,* el cual lleva implícito el concepto de límite (Bos, 1984). Así, en su obra *Philosophiae naturalis principia mathematica*, se encuentra el siguiente lema, en la sección I del Libro I:

> *"Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra*

más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales." (Durán, 1996, p. 54).

Con este lema, Newton intentaba justificar el concepto de *incrementos evanescentes* con el que pretendió evitar el uso de las cantidades infinitesimales en el "desarrollo del concepto de derivada".

En este sentido, la principal crítica fue la del obispo George Berkeley, quien deja en evidencia la vaguedad que rodea a las cantidades infinitamente pequeñas, a los incrementos evanescentes y sus razones, a las diferenciales y a las fluxiones de orden superior:

> *"¿Qué son estas Fluxiones? ¿Las velocidades de incrementos evanescentes? ¿Y qué son estos mismos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas sin ser tampoco una simple nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de las cantidades desaparecidas?"* (Bos, 1984, p.119).

Berkeley también critica la inconsistencia lógica que supone trabajar con incrementos pequeños, los cuales primero se suponen distintos de cero para poder dividir por ellos y, finalmente se les considera iguales a cero para poder liberarse de ellos. Sin embargo, era consciente de que el cálculo conducía a conclusiones correctas con gran éxito, aunque este éxito lo explicaba como una *compensación de errores* que estaba implícito en la aplicación de las reglas del cálculo. Por ejemplo, si uno determina una tangente, en primer lugar se supone que el triángulo característico es semejante al triángulo formado por la ordenada la subtangente y la tangente, lo cual implica un error porque esos dos triángulos son sólo aproximadamente semejantes. A continuación se aplican las reglas del cálculo para hallar la razón $\frac{dy}{dx}$, lo cual introduce un nuevo error, ya que estas reglas han sido deducidas despreciando diferenciales de orden superior. Estos dos errores vienen a compensarse uno con otro, y así el matemático llega *"bien que no a la Ciencia, sí a la Verdad, porque no puede llamarse ciencia cuando se procede a ciegas y se llega a la verdad no sabiendo cómo ni por qué medios"* (Bos, 1984, p. 120).

De esta forma, el reconocimiento de la necesidad de justificar matemáticamente los métodos infinitesimales generadas por las críticas de Berkeley impulsó, en los años siguientes, el trabajo de fundamentación del cálculo el cual, después de un siglo, culminaría con la resolución del problema de los fundamentos en el cálculo diferencial moderno.

2.5. EN BUSCA DEL RIGOR EN LA FUNDAMENTACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Al final del siglo XVII, el cálculo diferencial estaba establecido sobre los trabajos de Newton y Leibniz, aunque como hemos visto, sin una fundamentación matemática rigurosa. El concepto de *derivada* y su fundamentación, fue desarrollándose gradualmente durante los siglos XVIII y XIX, junto con las ideas de función, continuidad y límites, principalmente. En este sentido, Bos (1984) señala que los desarrollos realizados durante los siglos XVIII y XIX, que más tarde llevarían a la fundamentación del cálculo diferencial y a la definición que actualmente se tiene de la derivada, se pueden resumir en los siguientes: 1) la idea de que el cálculo tiene que ver con funciones, más que con variables; 2) la elección de la *derivada* como concepto fundamental del cálculo diferencial, en lugar de la *diferencial*; 3) la consideración de la derivada como función; 4) el concepto de *límite* y, en particular, el límite de una función cuando la variable independiente se comporta de una cierta manera señalada explícitamente, y de esta forma, en lugar de hablar simplemente del límite de la variable dependiente *p*, se hace la indicación explícita tal como $\lim_{h \to 0} p(h)$.

A continuación presentamos un breve recorrido por los aspectos más relevantes de la fundamentación del cálculo diferencial, mismos que dan lugar a la definición de la derivada tal y como la conocemos hoy en día.

Después de que Newton y Leibniz sentaron las bases del cálculo, los matemáticos de la época continuaron los desarrollos y sobre todo las aplicaciones de las nuevas ideas a una gran cantidad de problemas, principalmente de la física, tales como el de la cuerda vibrante, la catenaria o el de la braquistócrona. El problema de la cuerda vibrante, por ejemplo, fue abordado por grandes matemáticos entre los cuales podemos mencionar a D'Alembert, Daniel Bernoulli y Leonhard Euler, quienes sostuvieron una extensa discusión sobre la solución y el tipo de funciones que podrían ser admitidas dentro de ésta (Grabiner, 1983). Esta problemática, el tipo de funciones que se podían utilizar en el cálculo y en particular en la solución del problema de la cuerda vibrante, era una de las dificultades importantes relativas a la fundamentación del cálculo, cuestión que fue ampliamente debatida al analizar la solución a la ecuación en derivadas parciales que describe el movimiento que realiza una cuerda al tensarla por los extremos conocida como "ecuación de ondas", la cual es planteada en notación moderna de la siguiente manera:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$$

donde y es el desplazamiento transversal en el instante t del punto de abscisa x de una cuerda uniforme sujeta por sus extremos a dos puntos del eje x distantes π entre sí. La solución era:

$$y = f(x + ct) + g(x - ct)$$

donde f y g quedaban determinadas por las condiciones iniciales. Euler sostenía que en dicha solución deberían admitirse funciones con "picos" para poder representar la posición inicial de la cuerda al tañerla, a lo que D'Alembert contestaba diciendo que en tales puntos no existiría la segunda diferencial y así no podría aplicarse en ellos la ecuación solución. Sin embargo Euler mantenía que f y g, en la solución, podían sustituirse por funciones "completamente arbitrarias" que no necesitaban estar definidas por expresiones algebraicas ni por leyes mecánicas. Fue entonces cuando Daniel Bernoulli, con su artículo de *1775a*, entró a la discusión argumentando sobre la base de la superposición de los componentes armónicos de la vibración de la cuerda, que dicha cuerda presentaba en cada instante una combinación de vibraciones sinusoidales, con lo cual su forma vendría dada por (Grattan-Guinness, 1984):

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \operatorname{sen} rx$$

Uno de los primeros matemáticos en dar un paso importante de cara a la fundamentación del cálculo diferencial fue Leonhard Euler, quien, como señala Grattan-Guinness (1984), había sido el responsable de importantes perfeccionamientos y desarrollos del cálculo de Leibniz, a pesar de que sus fundamentos todavía no estaban suficientemente claros. Por tal razón Euler es considerado el fundador del análisis, toda una rama de las matemáticas que en particular engloba los métodos infinitesimales del cálculo diferencial e integral. En este sentido, sus libros *Introductio in analysin infinitorum (1784), Institutiones calculi differentialis (1755)* e *Institutiones calculi integralis (1768-80),* son las piezas clave que dieron una estructuración adecuada a la nueva disciplina (Durán, 1996). Así, en su obra *Institutiones calculi differentialis* Euler lleva a cabo una estructuración del cálculo diferencial retomando la idea de diferencial en el sentido de diferencia, aunque introduciendo un cambio en el cálculo leibniziano que los aproxima a la interpretación de los *incrementos evanescentes* de Newton. Para Euler el cálculo es un método para determinar el cociente $\frac{dy}{dx}$ cuando los incrementos se desvanecen; esto lo expresa de la siguiente forma:

> *"…un método para determinar la proporción de los incrementos evanescentes, estos que las funciones toman cuando la variable de la función se modifica por uno de tales incrementos"* (Euler, 1775, en Durán, 1996, p. 168).

Es decir, en el análisis de Euler comienza a surgir el cociente de incrementos $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ el cual dará origen a la derivada de una función. Otro aspecto de suma importancia es que Euler comienza a ver a las funciones como una aplicación que a un número *x* asocia otro *f(x)*, lo cual conllevaba a considerar a la derivada como el concepto básico del cálculo diferencial, y no a los diferenciales *dx* y *dy* los cuales eran considerados los conceptos básicos cuando la función era pensada como una relación entre las variables *x* e *y*.

Otra herramienta útil e importante de cara a la fundamentación es la serie de Taylor, desarrollada en parte para ayudar a resolver ecuaciones diferenciales. Brook Taylor apoyándose en las propiedades de las diferencias finitas, escribió una ecuación expresando que es posible plantear *f(x+h)* en términos de *f(x)* y su cociente de diferencias de varios ordenes (Grabiner, 1983). Esta idea fue usada por Lagrange quien afirmaba que toda función puede ser desarrollada en una serie de Taylor de la forma $f(x+h)=a_0+a_1h+\frac{1}{2!}a_2h^2+\cdots$, y que sus cocientes diferenciales (a los que llamaba "funciones derivadas") venían definidos como los cocientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$, en la función anterior (Grattan-Guinness, 1984).

Durán (1996) señala que el trabajo de Joseph Louis Lagrange fue el primer intento serio de fundamentar con rigor el cálculo infinitesimal (aunque sin éxito). Esto lo reflejaba en su libro más importante sobre análisis *Théorie des fonctions analytiques* publicado en 1779 y en el cual se encuentra la primera aparición del teorema del valor medio para funciones derivables, así como la primera expresión para el resto en la fórmula de Taylor que hoy conocemos como la *expresión de Lagrange del resto*. A Lagrange también se debe el término de *"función derivada"* y la notación f' para denotar la derivada de la función *f*.

Otro matemático que aportó avances en la justificación del cálculo diferencial fue Simon Lhuilier quien en su estudio de *1986a* define el límite al estilo de D'Alembert como el valor del que una variable puede llegar a diferir en menos que una cantidad arbitrariamente pequeña. Así mismo, Lhuilier da un tratamiento interesante al cálculo diferencial definiendo la derivada de la manera moderna: $\frac{dy}{dx}$ es el límite del cociente de las diferencias o cociente incremental, además $\frac{dy}{dx}$ debe ser leído, según él, cómo un símbolo único y no como una razón (Grattan-Guinness, 1984). Sin embargo, Lhuilier caería en una contradicción al denominar $\frac{dy}{dx}$ "razón diferencial", lo que supondría un desajuste entre la definición y la terminología.

No es hasta el primer cuarto del siglo XIX cuando se logra dar el impulso definitivo a la fundamentación rigurosa del concepto de derivada de la mano de dos grandes matemáticos Augustin Cauchy y Bernhard Bolzano. Esencialmente ambos aritmetizaron el concepto de límite de D'Alembert; así, en su libro *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* (1821) Cauchy definió: "Cuando los sucesivos valores atribuidos una variable aproximan indefinidamente a un valor fijo tanto que al final difieren de él tanto como uno desea, esta última cantidad es denominada el límite de todas las otras" (Durán, 1996, p. 56). Usando este concepto dio una definición rigurosa del concepto de cantidad infinitesimal: "cuando los sucesivos valores de una variable disminuyen indefinidamente, de tal forma que llegan a ser menores que cualquier cantidad dada, esa variable es lo que denominamos un infinitésimo. El límite de esa variable es cero" (Ibid.).

Para definir la derivada en términos de esta definición de límite, Cauchy considera el límite de la razón de las diferencias $\frac{f(x+i)+f(x)}{i}$ en un intervalo continuo de *f(x)* (Grabiner, 1981). De esta forma, en su libro *Résumé des Leçons donnéss a l'Écolle Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*, Cauchy define la derivada de la siguiente manera: "Cuando la función $y = f(x)$ es continua entre dos límites dados de la variable *x*, y uno asigna un valor entre estos límites a la variable, un incremento infinitesimal de la variable produce un incremento infinitesimal en la función misma. Consecuentemente, si ponemos $\Delta x = i$ los dos términos del cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ serán infinitésimos. Pero considerando que estos términos tienden a cero simultáneamente, el cociente mismo puede converger a otro límite, positivo o negativo. Este límite, cuando exista, tiene un valor definido para cada valor particular de *x*; pero varía con *x*. Así, por ejemplo, si tomamos $f(x) = x^m$, siendo *m* un entero positivo, la razón de las diferencias infinitesimales será $\frac{(x+i)^m-x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}i + \cdots + i^{m-1}$; y su límite será la cantidad mx^{m-1}, esto es, una nueva función de la variable *x*. Lo mismo ocurrirá generalmente; sólo que la forma de la nueva función que sirve de límite a la razón $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá de la forma de la función $y = f(x)$. Para indicar esta dependencia, damos a la nueva función el nombre de derivada y la designamos, usando un apóstrofe, por la notación y' o $f'(x)$" (Durán, 1996, p. 174). En 1817, Bolzano había definido la derivada de una función de una manera similar, como la cantidad $f'(x)$ hacia la que se aproxima el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando Δx se aproxima a cero.

Cauchy el primer matemático en demostrar teoremas con base en una definición "rigurosa" de la derivada; uno de ellos es el teorema que afirma que si *f(x)* es una función continua entre $x = x_0$ y $x = X$, entonces

$$\min_{[x_0,\ X]} f'(x) \leq \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} \leq \max_{[x_0,\ X]} f'(x)$$

del cual se deduce que si $f'(x)$ es continua entre $x = x_0$ y $x = x_0 + h$, entonces habrá un θ entre 0 y 1, tal que

$$\frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} = f'(x_0 + \theta h)$$

El teorema y su consecuencia son esenciales para la teoría rigurosa de Cauchy sobre la derivada y para la estructura lógica de su cálculo (Grabiner, 1981). Sin embargo, a pesar de que Cauchy, en palabras de Durán (1996), dio "un paso de gigante" en dirección a la fundamentación del cálculo diferencial, sus definiciones de límites y de infinitésimos no eran suficientes para respaldar con fundamento todo el trabajo desarrollado.

Finalmente fue el matemático alemán Karl Weierstrass quien culminó el proceso de fundamentación del cálculo, aportando la definición de límite tal y como hoy se enseña. Weierstrass elimina los elementos imprecisos que aparecían en la definición de Cauchy tales como *aproximan indefinidamente* o *difieren tanto como uno desea*, y los sustituye por la ahora clásica expresión algebraica del épsilon y el delta: *"el límite de una función f(x) vale L cuando x tiende a* x_0 *si para cualquier cantidad positiva* $\varepsilon > 0$ *existe otra cantidad positiva* $\delta > 0$ *de manera que para todo punto x verificando* $0 < |x - x_0| < \delta$ *y donde la función f esté definida se tiene que* $|f(x) - L| < \varepsilon$*"* (Durán, 1996, p. 57). Así mismo, puso fin al extenso debate sobre la definición de función continua definiéndola tal y como conocemos hoy en día: "$f(x)$ es continua en x_0 si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$, existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que, para todo punto del intervalo $|x - x_0| < \delta$ donde la función f esté definida, se verifica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$" (Ibid., p. 59).

De esta forma, hacia el primer cuarto de siglo XIX, la derivada, que comenzó su "recorrido" en el siglo XVII, alcanzó una fundamentación lógica adecuada basada en el concepto de límite: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$. Transcurriría algún tiempo más para que, en el debate sobre el problema de la relación entre la continuidad y derivabilidad, quedara claro que no existe relación alguna.

2.6. GENERALIZACIONES DE LA DERIVADA

En los apartados anteriores, hemos realizado un recorrido por las etapas más importantes de la evolución histórica de la derivada de una función real de una sola variable. Sin embargo, es conveniente saber que se han realizado diversas generalizaciones sobre dicho objeto matemático, algunas más investigadas que otras en el campo de Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, la *derivada parcial* que, en síntesis, es la derivada de una función de varias variables con respecto a una de esas variables, y que resulta de gran utilidad en ramas de las matemáticas tales como el cálculo de variaciones y la geometría diferencial. La *derivada parcial* describe la variación de una función real de dos o más variables en dirección de cada uno de los ejes coordenados. Existe una generalización llamada *derivada direccional*, que estudia la variación de una función en una dirección de un vector arbitrario, y se aplica tanto a funciones vectoriales reales como complejas: "Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y sea $f\colon S \to \mathbb{R}^m$. Se desea estudiar cómo varía f cuando pasamos, a lo largo de un segmento rectilíneo, de un punto $c \in S$ a un punto próximo $c + u$, donde $u \neq 0$. Cada uno de los puntos del segmento se puede expresar por medio de $c + hu$, donde h es real. El vector u define la dirección del segmento rectilíneo. Suponemos que c es un punto interior de S. Entonces existe una bola n-dimensional $B(c\,;r)$ contenida en S, y, si h es suficientemente pequeño, el segmento rectilíneo que une c con $c + hu$ está contenido en $B(c\,;r)$ y por lo tanto en S. Entonces la *derivada direccional* de f en el punto c y en la dirección u, designada por medio del símbolo $f'(c\,;u)$, se define por la ecuación $f'(c\,;u) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$, siempre que el límite exista" (Apostol, 2006, p. 417).

Menos conocida es la definición de derivada en un punto que presentó Carathéodory en su libro *Theory of Functions of a Complex Variable*: "Sea f una función real definida en un intervalo abierto U, se dice que f es diferenciable en un punto $a \in U$ si existe una función $\emptyset$ que es continua en $x = a$ y que satisface la relación $f(x) - f(a) = \emptyset(x)(x - a)$ para toda $x \in U$. De esta formulación se tienen dos consecuencias inmediatas: 1) Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a; y 2) Si f es diferenciable en a, existe al menos una función $\emptyset$ que satisface la definición; además, si $f'(a)$ existe, $f'(a) = \emptyset(a)$" (Kuhn, 1991, p.41). Aunque Carathéodory presenta su definición dentro del marco de la teoría de funciones de variable compleja, Kuhn (1991) muestra que esta definición aplicada a funciones de variable real, facilita en gran parte el manejo demostrativo de algunos teoremas del cálculo diferencial tales como la regla de la cadena y el teorema de la función inversa. Posteriormente, Acosta y Delgado (1994) extendieron la definición de Carathéodory a funciones de

$\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ como sigue: "Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable en a si existe una función $\emptyset: \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{m\times n}$ que es continua en a y que satisface la relación $f(x) - f(a) = \emptyset(x)(x - a)$, donde la función $\emptyset$ es la función pendiente de f en a" (p. 333).

En el marco de los espacios normados, específicamente para los espacios de Banach, tiene lugar otra definición de la derivada conocida como *derivada de Fréchet* o *diferencial total*. Inicialmente, Fréchet dió la siguiente definición: "Sean X e Y espacios lineales normados. Se dice que una aplicación $F: U \to Y$, donde U es un subconjunto abierto de X, es diferenciable en $x_0 \in U$, si existe un operador lineal continuo $L(x_0): X \to Y$ tal que la siguiente representación se da para cada $h \in X$ con $x_0 + h \in U$: $F(x_0 + h) - F(x_0) = L(x_0)h + R(x_0\,, h)$, donde $\lim_{h\to 0} \frac{\|R(x_0;\, h)\|}{\|h\|} = 0$ " (Pinzón y Paredes, 1999, p. 72). Posteriormente, Fréchet proporcionó una definición más precisa: "Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable en a si existe una transformación lineal $\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-\lambda(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$" (Acosta y Delgado, 1994, p. 333).

Otra definición importante de la derivada es la conocida con el nombre de *derivada de Gâteaux*, que fue introducida por Gâteaux en 1913 para funcionales. La *derivada de Gâteaux* es una generalización de la noción de *derivada direccional* y de la noción de *primera variación* manejada en el cálculo variacional: "Sea X y Y espacios normados reales, y U un subconjunto abierto de X. Sean $x_0 \in U$ y $h \in X$ un elemento fijo diferente de cero. Dado que U es abierto, existe un intervalo $I = (-\tau, \tau)$, para algún $\tau > 0$, tal que si $t \in I$ entonces $(x_0 + th) \in U$. Si la aplicación $\Phi(t) = F(x_0 + th)$ tiene una derivada usual en $t = 0$, entonces $\Phi'(0)$ es llamada la variación de Gâteaux de F en x_0 con incremento h, y es denotada por $VF(x_0; h) = \frac{d}{dt}F(x_0 + th) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{F(x_0 + th) - F(x_0)\}$" (Pinzón y Paredes, 1999, p. 71). Para funciones de varias variables la derivada de Gâteaux comúnmente nombrada *G-diferencial*, se conoce como derivada direccional.

Acosta y Delgado (1994) lograron establecer la equivalencia entre las definiciones de derivada dadas por Fréchet y Carathéodory: "Toda función diferenciable en el sentido de Fréchet es diferenciable en el sentido de Carathéodory y viceversa" (p. 333). Además, es posible demostrar que una función diferenciable según Fréchet es diferenciable según Gâteaux, pero la afirmación inversa es falsa; y debido a la equivalencia entre la derivada de Carathéodory y la de Fréchet, toda función diferenciable según Carathéodory también es diferenciable según Gâteaux (Pinzón y Paredes, 1999).

En este aparado hemos querido presentar algunas de las principales generalizaciones a propósito de la derivada de una función real de una variable; otras maneras de definir la derivada puede encontrarse en el trabajo de Pinzón y Paredes (1999).

2.7. IMPLICACIONES DE LA HISTORIA DE LA DERIVADA EN LA ENSEÑANZA

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, la derivada se ha ido desarrollando de manera paulatina desde los primeros trabajos sobre tangentes en la matemática griega hasta la definición formal que fue dada a partir de la definición rigurosa del límite. Como señala Grabiner (1983), la derivada fue usada de manera implícita por Fermat, Barrow, entre otros matemáticos del siglo XVII; Newton y Leibniz comenzaron a elaborarla, Taylor, Euler y otros, la desarrollaron, Lagrange la nombró y caracterizó, y al final de un largo período Cauchy y Weierstrass la definieron de manera general.

La historia nos evidencia que el desarrollo y evolución de la derivada es, de hecho, completamente inverso a la forma en que en la actualidad es enseñada y presentada en algunos libros de texto en los cuales se comienza con la definición, luego se exploran y proporcionan algunos resultados y por último se realizan algunas aplicaciones. Esto es lo que Freudenthal denomina "inversión antididáctica". Aunado a este hecho, nos encontramos que en la mayoría de las ocasiones, la enseñanza de los conceptos básicos del cálculo, tal como la derivada, se realiza con un fuerte aspecto rutinario, centrándose en los métodos para la diferenciación sin justificarlos (Doorman y Van Maanen, 2008).

Recientemente, muchos investigadores se han interesado en el aspecto histórico-epistémico de la derivada y sobre cómo este puede ayudar para desarrollar procesos de enseñanza eficaces que promuevan el aprendizaje y la reflexión de los estudiantes. Por ejemplo, el trabajo de Tall (2009) en el que presenta un marco teórico para el desarrollo cognitivo del pensamiento matemático a partir de las percepciones y acciones de los estudiantes para alcanzar la producción formal de las matemáticas, señala que dicho marco teórico muestra cómo los procesos fundamentales que siguieron nuestros predecesores para la invención del cálculo, se encuentran directamente relacionadas con las concepciones de los estudiantes. Su hipótesis es que el marco teórico que presenta, se basa en el crecimiento del pensamiento matemático, tanto en términos de la forma en que éste se desarrolla en los estudiantes desde la infancia hasta la madurez, y también, la forma en cómo dicho pensamiento se fue desarrollando o evolucionando a lo largo de la historia.

Otra investigación desarrollada en este sentido es la de Doorman y Van Maanen (2008) quienes realizan una revisión histórica sobre el desarrollo del cálculo, con el fin de dar una recomendación o propuesta de secuencia instruccional para el cálculo. Dicha recomendación la realizan argumentando que la historia les sugiere que, a los métodos formales de diferenciación e integración, precede una comprensión intuitiva del cálculo a partir del razonamiento con gráficas, sumas y diferencias, áreas y pendientes. Estos autores concluyen con un "llamado" a la reflexión histórica en la educación matemática, como un método para cambiar la práctica orientada a la rutina.

Estas problemáticas, que se viven en la enseñanza actual del cálculo diferencial, ya eran señaladas por Richard Dedekind quien expresaba: "Considero que, desde el punto de vista didáctico, el recurso a la intuición geométrica en una primera presentación del cálculo diferencial es sumamente útil, e incluso indispensable si no se quiere perder demasiado tiempo. Pero nadie puede negar que esta forma de introducir el cálculo diferencial pueda ser tildada de no científica" (Durán, 1996, p. 70). Además, como bien apunta Grabiner (1983), en el siglo XVII el cálculo fue comprendido de manera intuitiva y, sin la fundamentación rigurosa que fue alcanzada en el siglo XIX, fue aplicado para resolver un gran número de problemas, como el de la cuerda vibrante o la ecuación para el movimiento del sistema solar; así mismo, fueron inventados y aplicados conceptos y áreas importantes de las matemáticas tales como la transformación de Laplace, el cálculo de variaciones y la función Gamma. Entonces, ¿porqué la enseñanza de los conceptos fundamentales del cálculo se empeña en realizarse en orden inverso a como éstos evolucionaron y se desarrollaron en la historia, dando más énfasis a las definiciones formales y métodos generales?

En este sentido, es conveniente apuntar que estas consideraciones empíricas fueron esenciales para el desarrollo de los métodos infinitesimales. Los matemáticos, liberados de las ataduras que el rigor impone en los procesos creativos, fueron capaces de desarrollar nuevas y poderosas herramientas de estudio. Así, estamos de acuerdo con Durán (1996) cuando señala: "De nuevo la historia nos muestra, con un ejemplo práctico, el lugar que el rigor debe ocupar en un proceso matemático: siempre después de la fase de invención" (p. 99).

CAPÍTULO 3

UNA PROPUESTA DE RECONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO EPISTÉMICO GLOBAL DE LA DERIVADA

3.1. INTRODUCCIÓN

A lo largo del Capítulo 2, hemos descrito de manera amplia, aunque no exhaustiva, la forma en que el objeto derivada fue evolucionando y desarrollándose a lo largo de la historia, hasta alcanzar la definición rigurosa, que actualmente conocemos, en el primer cuarto del siglo XIX. Así mismo, hemos observado cómo la derivada surgió, en la historia, básicamente para tratar de resolver tres tipos de problemáticas: 1) problemas sobre tangentes, 2) problemas sobre máximos y mínimos, y 3) problemas sobre velocidades. Sin embargo, estas tres problemáticas no siempre fueron abordadas con las mismas técnicas, procedimientos, lenguajes, etc., y menos aún con el mismo "grado" de generalización.

En esta sección se pretende, teniendo en mente la consecución del segundo objetivo (O2), reconstruir un significado global u holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) de la derivada a partir del estudio histórico que se ha llevado a cabo. Para ello es necesario identificar los significados parciales de la derivada y sus respectivas configuraciones asociadas (O1), a lo largo de la historia. En este sentido, la noción de *configuración epistémica* que nos proporciona el EOS nos será de utilidad para describir los distintos significados parciales de la derivada a partir de la identificación de los objetos matemáticos primarios intervinientes en los distintos problemas, y sus subtipos, que fueron abordados en la historia y que dieron origen a la creación de la derivada (ver figura 1.4).

De lo que se trata es de describir el significado del objeto derivada, que se constituye con base en la resolución de un determinado problema (o subtipo de problema, es decir una variante de una de las tres problemáticas principales) que es abordada utilizando determinados lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos; dicho en otras palabras, identificar el significado parcial de la derivada asociado a determinada configuración de objetos y procesos. De este modo, el conjunto de significados del objeto derivada subyacentes a las distintas configuraciones (significados parciales) conformarán el significado epistémico global para el objeto derivada.

Es importante aclarar que dos configuraciones serán diferentes cuando alguno de los elementos primarios que la componen (elementos lingüísticos, situaciones-problemas, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos o argumentos) varíe. Señalamos esto, ya que, por ejemplo, los problemas sobre tangentes fueron abordados en distintas épocas en la historia y los lenguajes, argumentos, propiedades, etc., utilizados por los matemáticos griegos obviamente no fueron los mismos que utilizaron los matemáticos del siglo XVII. En definitiva, hay cambios significativos en las prácticas operativas y discursivas que se implementan en cada caso.

Además, en el análisis de las configuraciones epistémicas se tendrán en cuenta las dualidades intensivo-extensivo, ostensivo-no ostensivo, expresión-contenido, unitario-sistémico y personal-institucional, desde las que se pueden mirar a los objetos primarios involucrados en las distintas configuraciones (ver figura 1.5). Concretamente nos centraremos en los aspectos intensivos-extensivos (o general-particular), de los objetos primarios que componen cada configuración, puesto que esta dualidad nos ayudará a determinar los distintos niveles de generalización entre las configuraciones.

3.2. TIPOS DE CONFIGURACIONES SOCIO-EPISTÉMICAS EN PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN EL USO DE LA DERIVA

A continuación describiremos las configuraciones socio-epistémicas identificadas a lo largo del recorrido histórico de la derivada. Partiremos de las tres problemáticas principales que, históricamente, dieron origen a dicho objeto: 1) problemas sobre tangentes, 2) problemas sobre máximos y mínimos, y 3) problemas sobre velocidades. Así mismo, tendremos en cuenta el trabajo realizado por Ibarra y Gómez (2005) con la finalidad de comparar similitudes y diferencias entre nuestros puntos de vista para establecer cada una de las configuraciones.

3.2.1. Problema 1: La tangente en la matemática griega

Antes de describir esta primera configuración, analicemos el siguiente problema prototípico:

"Desde un punto dado trazar una recta tangente a un círculo".

Este problema es la proposición XVII que Euclides enuncia en su *libro III* de su obra *Elementos de Geometría*. La respuesta que, de acuerdo con Vera (1970, vol. 1), da Euclides es la siguiente: "(Con base en la figura 2.1, véase Capítulo 2) sea *A* el punto y *BGD* el círculo; tómese el centro *E* de éste y trace el segmento *AE*; con centro en *E* y radio *EA* trace el círculo *AZH*; desde *D* trazar *DZ* perpendicular a *AE* y una *E* con *Z* y *A* con *B*. Por ser *E* centro de los círculos *BDG* y *AHZ*, las rectas *EA* y *EZ* son iguales y también *ED* y *EB*, luego las dos *AE* y *EB* con iguales a *ZE* y *ED*, y forman el ángulo común en *E*. Por tanto, *DZ* y *AB* son iguales e iguales los triángulos *DEZ* y *EBA* y, por consiguiente, el ángulo *EDZ* será igual al ángulo *EBA*, y cómo el ángulo *EDZ* es recto, el ángulo *EBA* también será recto, y por ser *EB* perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la *AB* es tangente al círculo".

Primeramente, como podemos observar, el problema que plantea Euclides se trata de trazar una recta tangente a una curva específica, en este caso el círculo. Este tipo de problemas del trazado de tangentes, son propias de esta primera configuración, pues los matemáticos griegos no disponían de métodos generales para trazar rectas tangentes a cualquier curva, por lo que los problemas que abordaban eran múltiples casos particulares. En este sentido, estamos de acuerdo con Ibarra y Gómez (2005) con el hecho de que las *situaciones-problemas* que se presentan en esta primera configuración, son aquellas en las que se debe trazar la recta tangente a una curva específica (círculos, cónicas de Apolonio, espiral de Arquímedes, etc.) en un punto determinado aunque genérico. Otros ejemplos de situaciones-problemas propias de esta configuración, pueden verse en el apartado 2.1.

En cuanto a la solución del problema proporcionada por Euclides, vemos como en ella se utiliza un *lenguaje* propio de la geometría euclidiana y sus *argumentaciones*, tal y como lo señala Vera (1970, vol. 1), son puramente sintéticas. En dicha solución vemos que intervienen *conceptos* tales como círculo, segmento, radio, perpendicularidad, congruencia de triángulos y segmentos, igualdad (de ángulos) y el concepto de tangente. Así mismo, en la solución aparece la *propiedad* de perpendicularidad entre la recta tangente y el radio que toca al punto de tangencia, la cual Euclides enuncia de la siguiente forma: "Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente" (Vera, 1970, vol.1). En la solución propuesta por Euclides podemos observar que los *procedimientos* geométricos que utiliza, están encaminados a construir la recta tangente buscada, basándose en ésta propiedad; esto se puede ver cuando argumenta: “…y por ser *EB* perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la *AB* es tangente al círculo”.

El ejemplo analizado nos permite ver, de manera global, las características de ésta primera configuración epistémica: “La tangente en la matemática griega”. En general, puede decirse que esta configuración es más extensiva que intensiva, en cuanto a que las situaciones-problemas, procedimientos, argumentos, etc., se encuentran enfocados a casos particulares, pues como hemos señalado, las *situaciones-problemas* que se presentan en esta primera configuración, son aquellas en las que se debe trazar la recta tangente a una curva específica en un punto determinado.

Como se vio en el apartado 2.1, Euclides fue el matemático más influyente de esa época, razón por la cual el *lenguaje* y *argumentación* eran propios de la geometría sintética. Por esta misma razón, los *conceptos-definiciones* y *proposiciones-propiedades* involucrados en la resolución de problemas eran, en su mayoría, las que había propuesto Euclides en su obra *Los elementos,* o variaciones de éstos. Ejemplos de conceptos-definiciones que intervienen en esta configuración son: “a) Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta (Definición II del libro III de los Elementos de Euclides); b) Se dice que dos círculos son mutuamente tangentes cuando se tocan mutuamente y no se cortan (Definición IV del libro III de los Elementos de Euclides)” (Vera, 1970, vol. 1). Algunos ejemplos de proposiciones-propiedades en esta configuración son: “a) La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del circulo; entre esta recta y la periferia no se interpondrá ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor (Proposición XVI del libro III de los Elementos de Euclides); b) Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente (Proposición XVIII del libro III de los Elementos de Euclides); c) La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección (Proposición 32 del libro I de las Cónicas de Apolonio)” (Vera, 1970).

Con respecto a los *procedimientos* característicos en esta configuración, debemos señalar que los matemáticos griegos basaban sus demostraciones en las construcciones geométricas, por lo cual puede decirse que los procedimientos utilizados son una combinación de estas construcciones y las argumentaciones y lenguaje propios de la geometría sintética, basados en las definiciones y proposiciones.

Para finalizar debemos señalar que Apolonio también abordó problemas de máximos y mínimos, aunque en realidad, sus teoremas de máximos y mínimos, eran sobre tangentes y normales a las secciones cónicas, razón por la cual, se han considerado sus aportaciones en el análisis de esta primera configuración epistémica.

3.2.2. Problema 2: Sobre la variación en la edad media

Para la descripción de esta segunda configuración epistémica, partiremos del estudio histórico realizado en el apartado 2.2, en el cual vimos que, durante el siglo XIV, comenzaron los estudios sobre el cambio en general y el movimiento como caso particular. Las investigaciones medievales sobre el movimiento comenzaron principalmente en las universidades de Oxford (por los escolásticos del Merton College) y París (principalmente Oresme). En particular, la demostración que realiza Oresme de la denominada "Regla de Merton", conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. A continuación, analizaremos esta demostración de Oresme de la Regla de Merton y, a partir de dicho análisis, describiremos los objetos primarios que componen esta segunda configuración.

Expresada en términos de tiempo y distancia, la regla de Merton nos dice:

"*Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total s es tal como aquella que se tendría durante el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniforme igual al promedio de su velocidad inicial v_o y su velocidad final v_f (es decir, su velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo)*".

Para la demostración geométrica, Oresme considera el movimiento uniformemente acelerado durante un intervalo de tiempo $(0,\ t)$ correspondiente a la longitud *AB* (ver figura 2.2, Capítulo 2), la latitud en cada punto *P* de *AB* es una ordenada *PQ* cuya longitud es la velocidad en el instante correspondiente, por lo que el lado *CD* es un grafo velocidad – tiempo. Oresme vio que la definición de aceleración uniforme implica que *CD* es un segmento de línea recta, y que la *figura* o *figura total*, es un trapezoide con base $AB=t$ y alturas $AD=v_o$ y $BC=v_f$. Supuso que el área *s* de ese trapezoide es igual a la distancia total recorrida y a partir de la fórmula para hallar el área del trapezoide se sigue inmediatamente que $s=\frac{1}{2}\left(v_o+v_f\right)t$ (Cantoral y Farfán, 2004).

En cuanto a la *situación-problema* planteada, es decir, el enunciado de la Regla de Merton, vemos que se trata de un problema que involucra el cálculo de la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve con aceleración uniforme, lo cual va a ser característico de esta configuración ya que los matemáticos de aquella época se habían interesado en abordar problemas físicos (o del mundo real) relacionados con el cambio en general y el movimiento en particular, lo que los escolásticos de Merton llamaban “variaciones de la intensidad de una cualidad, desde un punto a otro de un cuerpo, o desde un punto a otro del tiempo”. Otro ejemplo de una *situación-problema* característico de esta configuración es la denominada ley artificial: “Si a lo largo de la primera mitad de un cierto intervalo de tiempo, una forma se mantiene con cierta intensidad; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo la forma se mantiene al doble de dicha intensidad; a lo largo del siguiente octavo de intervalo la forma se mantiene al triple de intensidad, y así ad infinitum, entonces la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la forma durante el segundo intervalo [el doble de la intensidad inicial]” (González, 1992, p. 47).

Estos ejemplos de *situaciones-problemas* (la regla de Merton y la ley artificial), son a su vez, ejemplos típicos de *proposiciones-propiedades* en esta configuración, puesto que se empleaban en la resolución de nuevas situaciones-problemas. Otros ejemplos de proposiciones-propiedades, son las que González señala como ideas innovadoras introducidas por Oresme: a) la medida de diversas variables físicas por medio de segmentos; b) algún tipo de relación funcional entre variables; c) una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales; d) la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo y, e) una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad – tiempo.

Respecto a los *conceptos-definiciones,* observamos que desde el enunciado del problema, es decir, la regla de Merton, intervienen conceptos tales como: a) aceleración uniforme, definida por los escolásticos de Merton como aquella para la cual incrementos iguales de velocidad se adquieren en intervalos de tiempo iguales; b) movimiento uniforme, definido como aquel que se tiene cuando las distancias iguales eran recorridas en tiempos iguales; c) velocidad instantánea, que es la forma en que definieron al movimiento variable; d) longitudo (longitud), la cual sería nuestra abscisa, que considera es el tiempo; e) latituto (latitud), que sería nuestra ordenada, y considerada la intensidad o la amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros; f) representación gráfica de las intensidades de las cualidades, que es la representación de la forma de acuerdo con la variación de la intensidad, respecto del tiempo. Este último concepto, introducido por Oresme, se hace presente mediante el grafico de la figura 2.2, con el cual describe la demostración de la regla de Merton (ver sección 2.2). Los *conceptos-definiciones* que acabamos de mencionar, son algunos de los más representativos en esta configuración.

El *lenguaje* y *procedimientos* utilizados por Oresme en su demostración eran netamente geométricos, mediante la representación de la forma (como el gráfico de la figura 2.2), lo cual queda constatado cuando el propio Oresme señala: "La dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de figuras geométricas. Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo." (González, 1992, p. 42). Sin embargo, los procedimientos y el lenguaje utilizados en un inicio por los escolásticos del Merton College, fueron descriptivos, con *argumentaciones* verbales extensas y confusas. En general, los *lenguajes* y *procedimientos* característicos de esta segunda configuración fueron los descriptivos, geométricos (mediante la representación de la forma), o una combinación entre ambos.

Los *argumentos* que realiza Oresme en la demostración de la regla de Merton, fueron descriptivos mediante la representación de la forma, ya que, de acuerdo con Oresme, la noción de gráfico como elemento descriptivo de una cualidad, es importante, pues facilita la comprensión de la variación de un fenómeno (a lo que él llama la representación gráfica de *las intensidades de las cualidades*). Hay que señalar que durante este período, los resultados fueron hallados mediante *argumentaciones* verbales o geométricamente mediante la representación de la forma, más que mediante consideraciones aritméticas basadas en la noción intuitiva de límite, que fue ampliamente usada durante el siglo XVII.

En general, la configuración se puede considerar más extensiva que intensiva, puesto que aún no se contaban con métodos generales para resolver problemas sobre variación, y en particular, sobre movimiento.

3.2.3. Problema 3: Métodos algebraicos para hallar tangentes

Con las aportaciones de Viète al campo de álgebra y la creación de la Geometría Analítica, el desarrollo del Cálculo en general se dio a marchas agigantadas. Los matemáticos del siglo XVII, con las ventajas de las nuevas y poderosas "herramientas", comenzaron a desarrollar, como vimos en los apartados 2.3 y 2.4, distintos métodos para abordar problemas sobre tangentes, máximos y mínimos y velocidades, todos ellos con la finalidad de encontrar métodos generales aplicables a determinados campos de problemas.

Sin embargo, todos esos métodos fueron concebidos desde distintos enfoques conceptuales. Uno de ellos, que da pie a esta tercera configuración, son los métodos algebraicos desarrollados principalmente por Descartes, Hudde y Sluse, para el cálculo de tangentes, normales o subnormales. A continuación describiremos esta tercera configuración epistémica mediante el análisis de un problema.

El problema es el siguiente: Con base en la figura 2.3 (Capítulo 2),

"Supongamos dada la curva algebraica ACE, trazar la normal a la curva en C"

Para la solución, Descartes supone que la recta *CP* es la solución del problema. Sea *CM=x*, *AM=y*, *AP=v*, *CP=s*. Además de la curva *x=f(y)* o *ACE*, Descartes consideraba el círculo c_P con centro en *P* y que pasa por *C*; es decir, el círculo de ecuación $x^2 + (v - y)^2 = s^2$. La circunferencia de este círculo toca a la curva *CE* en *C* sin cortarla, mientras que la circunferencia c_Q de ecuación $x^2 + (v_Q - y)^2 = {s_Q}^2$, con centro en un punto *Q* distinto de *P* y que pasa por *C*, cortará a la curva no sólo en *C*, sino también en algún otro punto; sea este punto *E*. Esto significa que la ecuación $(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - {s_Q}^2 = 0$, obtenida sustituyendo *x=f(y)* en la ecuación de c_Q, tiene dos raíces distintas[1]; pero "cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E*, más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final, cuando los puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales, es decir, cuando la circunferencia que pasa por *C* toque a la curva en el punto *C* sin cortarla" (Descartes, citado en Andersen, 1984, p. 30). Descartes llego a la conclusión de que *CP* será una normal a la curva *C* cuando *P* (es decir, *v*) esté determinado de tal manera que la ecuación $(f(y))^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0$, tenga dos raíces iguales y_0.

Como señalamos al principio, los tipos de *situaciones-problemas* que se abordan en esta configuración, son el trazar rectas normales, tangentes o subtangentes a una curva dada en un punto determinado, tal como el ejemplo propuesto.

En la solución de Descartes es fácil ver cómo el *lenguaje*, con respecto al utilizado en las configuraciones anteriores, cambia del netamente geométrico-descriptivo al de ecuaciones algebraicas y de la geometría analítica. Por ejemplo, en la descripción de la solución aparecen expresiones algebraicas para la curva *ACE*, ecuaciones de circunferencias y manipulaciones algebraicas de éstas para obtener la solución. En general, para resolver un problema geométrico, Descartes partía del estudio de éste para traducirlo a un lenguaje de ecuaciones algebraicas y después, una vez simplificada la ecuación lo más posible, resolvía dicha ecuación mediante la

[1] Descartes consideraba solamente curvas para las cuales $(f(y))^2$ es un polinomio en *y*, o y^2 un polinomio en *x*.

geometría. De esta forma, el *lenguaje* usado en esta configuración es el característico de los *procedimientos* algebraicos y de la geometría analítica.

Así mismo, los *argumentos* que presenta Descartes en la solución, son de tipo algebraico, basándose en las *propiedades-proposiciones* de la geometría analítica, o análisis geométricos, por ejemplo: a) "…esto significa que la ecuación $(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - {s_Q}^2 = 0$, obtenida sustituyendo *x=f(y)* en la ecuación de c_Q, tiene dos raíces distintas…"; b) "cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E*, más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final, cuando los puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales…". De esta forma, los *argumentos* en esta configuración van a ser algebraicos (basándose en las *propiedades-proposiciones* de la geometría analítica) y/o geométricos.

En cuanto a los *propiedades-proposiciones*, podemos señalar un ejemplo claro en la solución de Descartes: "*CP* será una normal a la curva *C* cuando *P* (es decir, *v*) esté determinado de tal manera que la ecuación $(f(y))^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0$, tenga dos raíces iguales y_0". En general, las *propiedades-proposiciones* característicos de esta configuración, son aquellas provenientes del algebra y del estudio de las curvas mediante la geometría analítica, por ejemplo: a) "Si una ecuación tiene una raíz doble y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria, de forma que el primer término de la progresión multiplica al primer término de la ecuación y así sucesivamente, el producto obtenido es una ecuación que tiene la raíz dada (Regla de Hudde para la obtención de raíces dobles)" (González, 1992, p. 193); b) "…la subtangente en cuestión será el cociente obtenido, dividiendo los términos del polinomio *f(x, y)* que contengan la variable *y*, cada uno de ellos multiplicado por el exponente de la potencia de *y* que aparece, por los términos en que aparezca la variable *x*, multiplicado cada uno de ellos por el correspondiente exponente de *x* y divididos todos ellos por *x* (regla de Sluse para hallar tangentes)" (Boyer, 1999).

Como ejemplos de *conceptos-definiciones* propios de esta configuración, podemos señalar las distintas formas de concebir la recta tangente a una curva: a) "…como la posición particular de una secante que gira en torno al pie de la tangente, hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva llegan a coincidir"; b) "…aquella que está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquella corte a la curva, coincida con el primero" (otros ejemplos de los elementos que componen esta configuración, pueden verse en los apartados 2.3.1 y 2.3.4).

Descartes, como muchos matemáticos de la época, tenía la finalidad de encontrar un método general para trazar tangentes (o mejor dicho, normales) a una curva; esto se evidencia claramente cuando señala: “Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de las curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella…” (Descartes; citado en Boyer, 1999, p. 435). Sin embargo, a pesar de que su método es aplicable a cualquier curva algebraica, éste se complica cuando la ecuación de la curva no es una ecuación algebraica sencilla, debido a los laboriosos cálculos que hay que hacer para determinar v comparando los coeficientes (Andersen, 1984). Aún así, los desarrollos que hemos enmarcado en esta configuración, muestran serios intentos para encontrar métodos cada vez más generales, para abordar los problemas sobre el trazado de tangentes.

3.2.4. Problema 4: Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes

Como señalamos en la segunda configuración, las investigaciones medievales sobre el movimiento, en particular las de Oresme, conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. Galileo toma estas ideas y las demuestra con argumentos de indivisibles. Así mismo, Galileo establece la ley fundamental de la composición vectorial del movimiento y la aplica para determinar la trayectoria descrita por un proyectil. Además, si se representa el movimiento en un gráfico de desplazamiento-tiempo, la dirección de éste da la dirección de la tangente a la trayectoria, mientras la velocidad da la pendiente de la línea tangente (González, 1992).

Estas ideas posteriormente serían recogidas y desarrolladas por matemáticos como Roberval, Torricelli (ver apartado 2.3.3) y Newton, quien más tarde desarrollaría su cálculo de fluxiones, mismo que hemos considerado en una configuración aparte, debido a las diferencias conceptuales de las cuales hablaremos más adelante.

Las *situaciones-problemas, lenguajes y procedimientos* en esta cuarta configuración epistémica, siguen siendo los mismos que en la configuración pasada; es decir, se siguen abordando problemas relacionados con el trazado de tangentes a distintas curvas. Del mismo modo los procedimientos y lenguajes son los de la geometría analítica y el álgebra.

Sin embargo, como es lógico de suponer, al haber cambios conceptuales en los métodos de ésta cuarta configuración, los elementos de ésta (definiciones, proposiciones y argumentos) también varían. Así, mediante *argumentaciones cinemáticas*, se logran establecer nuevos *conceptos-definiciones* y *propiedades-proposiciones* inherentes a esta configuración epistémica.

Ejemplos de *conceptos-definiciones* utilizados en esta configuración son: a) concepto intuitivo de movimiento instantáneo; b) "Una curva es la trayectoria de un punto móvil"; c) "…en todas las demás líneas curvas, cualesquiera que sean, su tocante en cualquier punto es la línea de dirección del movimiento que tiene en ese mismo punto el móvil que la describe (concepción de tangente de Roberval)"; d) "…una tangente es la que resulta de la composición de dos movimientos de un punto móvil que traza la curva (concepción de tangente de Sluse)".

Algunas *propiedades-proposiciones* prototípicas de esta configuración son: a) "Si el movimiento que describe la curva es una combinación de movimientos simples, la línea instantánea del movimiento o dirección de la tangente puede hallarse por composición de movimientos, mediante la ley del paralelogramo"; b) "Trazar la tangente a una curva descrita por el movimiento de un punto que resulta de la composición de dos movimientos consiste en determinar la resultante de las velocidades de los dos movimientos"; c) "…si $s = s(t)$ y $v = v(t)$ representan respectivamente el espacio y la velocidad en función del tiempo, se tiene que: 1) el área limitada por la curva $v = v(t)$ y el eje de las abscisas representa, para cada *t*, el espacio recorrido $s = s(t)$, y 2) la pendiente de la tangente a la curva $s = s(t)$ representa, para cada *t*, la ordenada de la curva $v = v(t)$ en la abscisa *t*".

Nuestra lectura final, respecto a la dualidad *extensiva-intensiva*, es que los métodos empleados, en esta configuración, para el trazado de tangentes nuevamente son extensivos en cuanto a que no son generalizables para todos los casos. Esto lo señala Andersen (1984) de la siguiente manera: "Al tomar la dirección instantánea del movimiento como conocida, tanto Roberval como Torricelli habían evitado el uso de infinitesimales en su método, el cual tenía la ventaja adicional de ser aplicable a curvas que no están referidas directamente a un sistema de coordenadas. Sin embargo, el método no era general en cuanto a que no todas las velocidades podían ser determinadas".

3.2.5. Problema 5: Las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos

Esta quinta configuración epistémica ha surgido, principalmente, de las obras de Fermat, uno de los matemáticos más influyentes respecto al desarrollo del cálculo diferencial; de hecho, sus trabajos sobre máximos y mínimos y tangentes, hizo que diversos matemáticos del siglo XVIII, tales como Laplace y Lagrange, lo consideraran el verdadero inventor del cálculo diferencial.

Con base en las obras fundamentales de la antigüedad clásica griega (los *Elementos* de Euclides, las *Cónicas* de Apolonio, las obras de Arquímedes, la *Aritmética* de Diofanto, la *Colección matemática* de Pappus, etc.), así como en la teoría de ecuaciones de Viète (en particular en el método de la

Syncrisis de su *Arte analítica*), Fermat desarrolla los primeros métodos generales, en la historia de las matemáticas, para la determinación de extremos (González, 2008), que posteriormente aplica a la determinación de las normales y tangentes.

Como en las secciones anteriores, partiremos del análisis de un problema para describir los elementos que componen esta quinta configuración. El problema es el siguiente (tomado de la sección 2.3.2):

"Dividir un segmento de longitud N en dos partes de manera que el producto sea el máximo posible"

Para dar solución al problema, sea *A* la cantidad desconocida por la que tendremos que dividir el segmento de longitud *N* (ver figura 2.4). De tal forma que el producto pedido estará dado por la expresión:

$$f(A) = A(N - A) = AN - A^2 \ldots(1)$$

Ahora bien, dado que queremos que el producto sea el máximo posible, incrementemos a nuestra variable *A* una magnitud *E*, de tal forma que el producto estaría dado por:

$$f(A + E) = (A + E)(N - A - E) = AN - A^2 + NE - 2AE - E^2 \ldots(2)$$

"Adigualando" las expresiones (1) y (2) obtenemos:

$$AN - A^2 \approx AN - A^2 + NE - 2AE - E^2$$

$$NE \approx 2AE + E^2 \ldots(3)$$

Dividiendo ambos miembros de la *"adigualdad" por E, obtenemos:*

$$N \approx 2A + E \ldots(4)$$

Finalmente, haciendo *E=0*, en (4) nos queda:

$$2A = N$$

Lo que significa que el producto es máximo cuando $A = \frac{N}{2}$ (González, 2008).

Otro tipo de *situaciones-problemas* que fueron abordados en esta configuración, además de aquellos en los que se pretendían calcular extremos (como en el ejemplo que estamos analizando), fueron los problemas de aplicación práctica sobre máximos y mínimos. Ejemplo de esto es el problema abordado por Kepler sobre el cálculo de volúmenes de barriles de vino; Kepler estudió la forma de los barriles que con menor superficie (menor cantidad de madera utilizada para hacerlos) tuviera mayor volumen (pudieran albergar más cantidad de vino) (ver apartado 2.2).

El *lenguaje* utilizado por Fermat en la solución del problema, es prácticamente el mismo que en las configuraciones anteriores: algebraico, gráfico y/o descriptivo. Este lenguaje es el que utilizaron la mayoría de los matemáticos del siglo XVII hasta antes de los desarrollos de Newton y Leibniz.

Una de las *propiedades* principales en esta configuración, radica en la idea de incrementar una magnitud considerable a la variable independiente o a la magnitud que podríamos interpretar como la variable independiente (González, 2008; Andersen, 1984); situación que representa el punto de partida para el uso de magnitudes infinitamente pequeñas, es decir, los infinitesimales. La propiedad que acabamos de mencionar se puede identificar en la solución que da Fermat al problema, que hemos planteado a manera de ejemplo, cuando señala: "…incrementemos a nuestra variable *A* una magnitud *E*…". Otra *propiedad* clave en el método de Fermat, es la "Adigualdad" que establece para "aproximar tanto como sea posible" la expresión que determina el producto a la expresión que determina el producto cuando se incrementa la cantidad desconocida (*A*), es decir, $AN - A^2 \approx AN - A^2 + NE - 2AE - E^2$. Esto significa que *E* es tan pequeña, que ambas cantidades son "casi iguales"; en términos actuales, que *E* se aproxima a cero. Un último ejemplo de una *propiedad-proposición* característica de esta configuración es la formulación general, dada por Hudde, de un patrón subyacente a las soluciones de problemas de máximos y mínimos por el método de Fermat, que en notación moderna, afirma que dado un polinomio de la forma $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces, se tiene un máximo o un mínimo cuando $\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$ (Grabiner, 1983).

El método de Fermat para el cálculo de extremos (ver apartado 2.3.2), en sí mismo, un claro ejemplo de los *procedimientos* utilizados, es incluso, el más importante en esta configuración.

En cuanto a las argumentaciones características de esta configuración, además de las algebraicas y las geométricas, se empiezan a elaborar, aunque de manera implícita, argumentaciones basadas en las cantidades infinitesimales. Esto puede verse, en la solución del ejemplo, cuando Fermat "adiguala" las cantidades, de trasfondo radica la idea de que *E* se aproxima a cero. Así mismo, cuando se divide ambos miembros de la "adigualdad" por *E*, nuevamente detrás está la idea de que *E* se aproxima a cero pero no llega a ser cero. En contradicción con esto último, cuando se hace $E=0$, la idea subyacente es que E es "tan pequeña" que se le puede desestimar. Lo anterior, de hecho, es una de las principales críticas a su método, ya que en el mismo proceso considera $E = 0$ y $E \neq 0$. Aún así, el proceso utilizado por Fermat es, en esencia, similar al cálculo de $lim_{E\to 0}\frac{f(A+E)-f(A)}{E}$, que se emplea en la actualidad para hallar la primera derivada.

Para finalizar, hay que señalar que en esta configuración aparecen, aunque de manera muy intuitiva, *conceptos-definiciones* importantes tales como el límite y la derivada. Otra cuestión es que, al desarrollarse métodos generales para la determinación de máximos y mínimos (por ejemplo, el método de Fermat o la formulación de Hudde), esta configuración tiene características más *intensivas que las anteriores*.

3.2.6. Problema 6: Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes

El método de los extremos, comentado anteriormente, fue aplicado por Fermat alrededor de 1632 a la determinación de las normales y tangentes o, más precisamente, de las subtangentes a una curva (Collette, 1993). En la segunda parte del *"Methodus"* Fermat emplea el método de los extremos para hallar la tangente de una parábola en un punto (ver sección 2.3.2). Por su parte, Barrow desarrolló un método para el cálculo de tangentes muy parecido al de Fermat, excepto por el "triángulo diferencial" también llamado "triángulo de Barrow", y que en lugar de realizar un incremento (E en el método de Fermat) Barrow introduce dos incrementos e y a, lo que de acuerdo con Boyer (1999) equivale en nuestro lenguaje actual a Δx y Δy respectivamente (ver sección 2.3.5).

En esta configuración epistémica hemos incluido las aportaciones que realizan, principalmente Barrow y Fermat, para abordar *situaciones-problemas* sobre el cálculo de tangentes o subtangentes. Consideremos el siguiente ejemplo:

"Hallar la subtangente a la curva dada por la expresión $y^2 = 3x$"

Lo primero que hace Barrow para resolver el problema es sustituir x y y por x+e y y+a respectivamente, de donde obtiene:

$$y^2 + 2ya + a^2 = 3x + 3e$$

Aplicando la *regla 1*, es decir, despreciando los términos que contienen potencias de orden superior a 1 de a y e:

$$y^2 + 2ya = 3x + 3e$$

Aplicando la *regla 2*, es decir, sustrayendo de la expresión anterior $y^2 = 3x$:

$$2ya = 3e$$

Finalmente aplicando la *regla 3*:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{m}{t} = \frac{a}{e} = \frac{3}{2y}$$

de donde la subtangente viene dada por $PT = t = \frac{2my}{3}$.

El método, o *procedimiento*, que sigue Barrow para hallar la subtangente consta de tres reglas (ver sección 2.3.5) en las cuales moviliza una serie de propiedades, definiciones y argumentos. Una de estas *proposiciones-propiedades*, en la solución de Barrow, se tiene al aplicar la *regla 3* (para el cálculo de la subtangente *t*), ya que encuentra la razón $\frac{a}{e}$ considerando la semejanza entre los triángulos *MTP* y *MNR* (ver figura 2.6). Otro ejemplo son los dos incrementos *e* y *a*, que considera Barrow para las variables independiente y dependiente respectivamente (en la figura 2.6 *MR=a* y *NR=e*); los cuales al aplicar la regla 1, en la solución del ejemplo, considera "tan próximos a cero" y, al aplicar (intuitivamente) el límite, suprime las potencias de *a* y *e* de orden superior a uno.

Otras *proposiciones-propiedades* utilizadas en esta configuración, son: a) la relación de semejanza entre los triángulos, que contienen las subtangentes, *BCE* y *OIE* para establecer que $\frac{BC}{OI} = \frac{CE}{IE}$ (ver figura 2.5), en la aplicación del método de los extremos de Fermat al cálculo de tangentes y subtangentes; b) "Sea una curva de ecuación $p(x,y) = 0$, donde p es un polinomio en x e y; la subtangente t correspondiente a un punto (x,y) viene dada por $t = \frac{-x(\ p(x,y),\ a,\ d)_y}{(\ p(x,y),\ a,\ d)_x}$, donde los subíndices significan que en el numerador $p(x,y)$ debe ser considerado como un polinomio en *y* mientras que en el denominador como un polinomio en *x*" (regla de Hudde para determinar subtangentes, ver apartado 2.3.4).

En general, algunos de los principales *conceptos-definiciones* que se manejan en esta configuración son: a) la concepción de Barrow sobre la tangente, como posición límite de la secante cuando *a* y *e* se aproximan a cero, hecho del cual subyace suprimir las potencias de *a* y *e* de orden superior a uno en la primera regla de Barrow; b) la noción intuitiva de límite, tanto en el método de Barrow para hallar las subtangentes, como en el método de los extremos de Fermat descrito en la sección anterior; y c) la noción intuitiva de la derivada.

En cuanto a los *argumentos*, en esta configuración, se siguieron manteniendo los algebraicos, geométricos y consideraciones infinitesimales, como se puede apreciar claramente en la solución del ejemplo planteado, cuando (en la regla 1) se "suprime las potencias mayores de uno" de a y e por ser infinitamente pequeños. Así mismo, el *lenguaje* utilizado en esta configuración es de tipo geométrico, algebraico y/o descriptivo.

Los métodos para el cálculo de tangentes y subtangentes considerados en esta configuración (métodos de Fermat, Barrow y Hudde) son interesantes por ser algunos de los primeros métodos o reglas generales que se dieron.

3.2.7. Problema 7: El Cálculo de fluxiones

Como señala González (1992), es indiscutible que Newton y Leibniz son los verdaderos artífices del *cálculo infinitesimal*. Sin embargo, existen diferencias conceptualmente importantes entre las ideas de Newton (ver apartado 2.4.1) y las de Leibniz (ver apartado 2.4.2), razón por la cual, a diferencia del trabajo de Ibarra y Gómez (2005), hemos considerado ambos planteamientos en configuraciones distintas.

Newton comienza con la consideración de elementos infinitesimales, a la manera de Fermat y Barrow, pero enseguida deriva hacia una concepción mecánica, basada en la idea intuitiva del movimiento continuo, manejando el *concepto* de *fluente*, como cantidad que varía respecto al tiempo, y de *fluxión* como su velocidad de cambio respecto al tiempo (González, 1992); de ahí que al cálculo desarrollado por Newton se le conozca como *cálculo fluxional*.

Comencemos pues, esta séptima configuración epistémica, con el siguiente ejemplo (Bos, 1984) que fue uno de los propuestos por Newton en su obra de 1671, y ejemplifica cómo aplicaba su método de las fluxiones:

"Dada la curva de ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, calcular las fluxiones"

Para resolver el problema, Newton sustituye en la ecuación dada x y y por $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ respectivamente, obteniendo:

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) + (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$$

luego elimina $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, que es igual a cero (de acuerdo con la ecuación dada originalmente), divide después por o y desprecia finalmente los términos en que todavía figura el factor o, quedando finalmente:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Primeramente, observemos que Newton introduce nuevos *conceptos-definiciones* en sus desarrollos sobre el cálculo infinitesimal y, con ellos, nuevas expresiones terminológicos y notacionales (además del lenguaje algebraico, geométrico y descriptivo), entre los cuales podemos señalar: a)*"o"* es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño b) "momento de *x*" que define como un incremento infinitesimal de *x* y que representa con *ox* (análogamente define el momento de *y*, *oy*); c) en palabras de Newton: "Llamaré *cantidades fluentes*, o simplemente *fluentes*, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto *v, x, y, z,* para distinguirlas de las otras cantidades"; d) el concepto fluxión definido con sus palabras: "representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones…"; e) *"momento de la fluente"* es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como *x* en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño *"o"*, es decir, $\dot{x}o$.

El método de las fluxiones de Newton es, a su vez, el *procedimiento* más importante de esta configuración; por ejemplo, en la siguiente descripción Newton sugiere (y a la vez *argumenta*) la sustitución de x e y por $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ respectivamente: "Ya que los momentos como $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ son las anexiones o aumentos infinitamente pequeños de las cantidades fluentes x e y durante los intervalos de tiempo infinitamente pequeños, se sigue que estas cantidades x e y, *después de un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se convierten en* $x + \dot{x}o$ *e* $y + \dot{y}o$…De ese modo, se puede sustituir en la misma ecuación $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en lugar de x e y" (Collette, 1993, p.110). En este último ejemplo, al igual que en el problema propuesto al inicio, vemos como Newton *argumenta* los procedimientos (y en general sus definiciones y proposiciones) con base en consideraciones dinámicas y de infinitesimales, apoyándose siempre en el álgebra y el análisis geométrico.

Dentro de las *proposiciones-propiedades* dadas por Newton, podemos mencionar las siguientes: a) *Si* $ax^{m/n} = y$, *entonces el área será* $z = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$; b) Supongamos una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde *m* es entero o fraccionario, entonces la curva está dada por la expresión $y = max^{m-1}$; c) dada una curva $y = max^{m-1}$, entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$ (recíproco del inciso b); d) "Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales" (Durán, 1996, p. 54).

En cuanto a los tipos de *situaciones-problemas* de esta configuración, Newton abordó problemas sobre el cálculo de la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito y viceversa; así mismo Newton hacía uso de sus algoritmos para la determinación de máximos y mínimos, tangentes y curvaturas (Bos, 1984). En este sentido, al ser los algoritmos de Newton universales, en palabras de González (1992), es decir, aplicables a una variedad de problemas, esta configuración la reconocemos como altamente general o intensiva.

Así, vemos como en esta configuración las *fluxiones* o velocidades de los movimientos de las fluentes, es lo que en la actualidad conocemos como la *derivada*, y los momentos como $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ del *cálculo de fluxiones* de Newton, serían las diferencias infinitamente pequeñas o *diferenciales* dx y dy en el cálculo diferencial de Leibniz.

3.2.8. El Cálculo de diferencias

A diferencia de Newton, el cálculo de Leibniz tiene un carácter más simbólico y analítico, siendo las *diferencias infinitesimales* y la suma de *infinitamente pequeños*, las bases de su cálculo diferencial e integral respectivamente (González, 1992). Como señala Collette (1993), su finalidad era elaborar un método eficaz mediante el cual, sin recurrir a diagramas, ciertas propiedades de las curvas puedan ser determinadas por medio de su *cálculo de las diferencias*. A continuación describiremos, con algunos ejemplos, los elementos primarios que componen esta octava configuración, basándonos en el estudio histórico del apartado 2.4.2.

Leibniz abordó *situaciones-problemas* sobre máximos y mínimos, tangentes y puntos de inflexión; esto se evidencia claramente en el título de su obra *"Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur"* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales), en la cual introduce por primera vez la expresión *cálculo diferencial* y proporciona las fórmulas, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, todas éstas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión.

Uno de los objetivos de Leibniz, y que de acuerdo con Bos (1984) fue una de las tres ideas principales que permitieron el desarrollo de su cálculo infinitesimal, es la construcción de una *characteristica generalis,* es decir, un *lenguaje* simbólico general mediante el cual se pudieran escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de *argumentación* y de razonamiento. Con este fin, Leibniz logró introducir un nuevo lenguaje accesible, que aún se mantiene en nuestros días, el cual facilita la manipulación de los conceptos, procedimientos y argumentos, en el cálculo diferencial. Por ejemplo, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y ∂, los cuales concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Así mismo, denota con dy y dx a las diferenciales de las variables x e y respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de x e y.

Los lenguajes, nuevos términos y notaciones, introducidos por Leibniz, estaban asociados a una serie de nuevos *conceptos-definiciones* o *procedimientos* primordiales en su cálculo de diferencias. Por ejemplo, dy la utiliza para denotar el concepto de diferencial de una variable y, la cual define como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y (análogamente define la diferencial de la variable x, dx). Así mismo, como ya señalamos anteriormente, introduce los símbolos $\int$ para representar el proceso de sumar rectángulos o áreas, y ∂ para representar las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Las fórmulas proporcionadas por Leibniz, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, son ejemplos de *proposiciones* y *procedimientos* al mismo tiempo.

En cuanto a las *proposiciones-propiedades* utilizadas en esta configuración, dos de las principales, que de acuerdo con Bos (1984) fueron utilizadas por Leibniz, en el desarrollo de su cálculo de diferencias, son: la relación que dedujo a partir de sus estudios sobre sucesiones numéricas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y sus sucesiones de diferencias primeras asociadas, $b_1 = a_1 - a_2,\ b_2 = a_2 - a_3, \ldots$; Leibniz se dio cuenta de la relación $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. La segunda es la relación de semejanza entre el triángulo $cc'd$ situado a lo largo de la curva en la figura 2.9, y los triángulos formados por la ordenada, tangente y subtangente, o por la ordenada, normal y subnormal.

Otros ejemplos de *proposiciones-propiedades* son los siguientes: a) "…una suma tal como $\int y\,dx$ es la suma de los rectángulos infinitamente pequeños de base dx y altura y; por lo tanto, la cuadratura de una curva es igual a $\int y\,dx$"; b) "…la integración en cuanto a proceso de sumación es la inversa de la diferenciación"; c) "la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente $\frac{dy}{dx}$, ya que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas".

Finalmente, hay que señalar que para sus *argumentaciones,* Leibniz utilizó consideraciones algebraicas, geométricas e infinitesimales. Además, al desarrollar Leibniz un método general para el cálculo de la diferencial de una variable, esta configuración es altamente intensiva, a pesar de que quedaran pendientes cuestiones sobre la fundamentación (ver apartado 2.4.3).

Observemos también, la importante diferencia conceptual entre las ideas de Newton, discutidas en el apartado anterior, y las de Leibniz. Newton tiene una visión dinámica de las curvas, como generadas por un movimiento. En este sentido, para el cálculo de las fluxiones (o derivadas), hace uso de los infinitésimos pero no le interesan estos por sí mismos, sino el límite cuando estos van *desvaneciéndose*. En cambio Leibniz, concibe una curva como formada por un conjunto de segmentos rectos de longitud infinitesimal, de esta forma, se interesa por las propiedades de estas cantidades infinitesimales en sí. De ahí que desarrolle su método para la suma de estas cantidades (integración) y para la diferencia de ellas (derivación).

Como señala Durán (1996), el desarrollo de los conceptos de diferencial e integral con la apreciación explícita de que son conceptos inversos, el desarrollo de unas reglas para el cálculo de la diferencial y la aplicación de estos conceptos a la resolución de problemas de tangentes, cuadraturas, máximos y mínimos, problemas inversos de tangentes, etc., situaron el cálculo de las diferencias de Leibniz por encima del cálculo de fluxiones de Newton.

3.2.9. La derivada como límite

Al final del siglo XVII, el cálculo diferencial estaba establecido sobre los trabajos de Newton y Leibniz, aunque como hemos visto, sin una fundamentación matemática rigurosa. Los matemáticos que sucedieron a Newton y Leibniz, continuaron los desarrollos y sobre todo, las aplicaciones de las nuevas ideas a una gran cantidad de problemas principalmente de la física, por ejemplo, el de la cuerda vibrante, la catenaria o el de la braquistócrona. Además, los aportes realizados en esta etapa, posterior al establecimiento del cálculo Newtoniano y Leibniziano, se orientaron hacia la búsqueda de una fundamentación rigurosa de las nuevos métodos generales desarrollados por Newton y Leibniz. De esta forma, el concepto de *derivada* y su fundamentación, fue desarrollándose gradualmente durante los siglos XVIII y XIX, junto con las ideas de función, continuidad y límites, principalmente.

En este apartado, describiremos las características de la novena configuración epistémica, a partir del análisis del estudio histórico desarrollado en la sección 2.5, sobre el desarrollo de una fundamentación rigurosa de la derivada, hasta llegar a la definición que conocemos en la actualidad.

Como se ha señalado antes, entre las principales *situaciones-problemas* de esta configuración, se encuentra la aplicación de los nuevos métodos generales de Newton y Leibniz, en la resolución de problemas principalmente de la física, por ejemplo, el de la cuerda vibrante, así como para el cálculo de tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión, velocidades; pero sobre todo, las *situaciones-problemas* iban encaminadas al desarrollo de conceptos, propiedades, etc., para dar una fundamentación rigurosa a los aportes de Newton y Leibniz, esto es, se trata de una configuración fuertemente formal.

En este sentido, en esta etapa se desarrollaron una serie de *conceptos-definiciones* primordiales no sólo para el desarrollo de la fundamentación de la derivada, sino para el Cálculo Infinitesimal en general. El concepto de función, por ejemplo, el cual Euler comienza a considerar como una aplicación que a un número *x* asocia otro *f(x)*. El concepto de límite, del cual se dieron diversas definiciones a lo largo de esta etapa, como por ejemplo: a) "el valor del que una variable puede llegar a diferir en menos que una cantidad arbitrariamente pequeña (Simon Lhuilier)"; b) "Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable aproximan indefinidamente a un valor fijo tanto que al final difieren de él tanto como uno desea, esta última cantidad es denominada el límite de todas las otras (Cauchy)"; c) "el límite de una función *f(x)* vale L cuando *x* tiende a x_0 si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$ existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que para todo punto *x* verificando $0 < |x - x_0| < \delta$ y donde la función f esté definida se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Weierstrass)". Así mismo, la *derivada* es definida por Cauchy de la siguiente manera: "Cuando la función $y = f(x)$ es continua entre dos límites dados de la variable *x*, y uno asigna un valor entre estos límites a la variable, un incremento infinitesimal de la variable produce un incremento infinitesimal en la función misma. Consecuentemente, si ponemos $\Delta x = i$ los dos términos del cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ serán infinitésimos. Pero considerando que estos términos tienden a cero simultáneamente, el cociente mismo puede converger a otro límite, positivo o negativo. Este límite, cuando exista, tiene un valor definido para cada valor particular de *x*; pero varía con *x*. Así, por ejemplo, si tomamos $f(x) = x^m$, siendo *m* un entero positivo, la razón de las diferencias infinitesimales será $\frac{(x+i)^m-x^m}{i}=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}i+\cdots+i^{m-1}$; y su límite será la cantidad mx^{m-1}, esto es, una nueva función de la variable x. Lo mismo ocurrirá generalmente; sólo que la forma de la nueva función que sirve de límite a la razón $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá de la forma de la función $y=f(x)$. Para indicar esta dependencia, damos a la nueva función el nombre de derivada y la designamos, usando un apóstrofe, por la notación y' o $f'(x)$". Por su parte, Bolzano define la *derivada de una función* como "la cantidad $f'(x)$ hacia la que se aproxima el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando Δx se aproxima a cero". Finalmente, en el primer cuarto del siglo XIX la *derivada de una función* se define como:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

Como *proposiciones-propiedades* características de esta configuración, se tienen, entre otros, varios teoremas tales como: a) El teorema del valor medio para funciones derivables, así como la primera expresión para el resto en la fórmula de Taylor que hoy conocemos como la expresión de Lagrange del resto; b) "si *f(x)* es una función continua entre $x=x_0$ y $x=X$, entonces $\min_{[x_0,\ X]}f'(x)\leq\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}\leq\max_{[x_0,\ X]}f'(x)$, del cual se deduce que si $f'(x)$ es continua entre $x=x_0$ y $x=x_0+h$, entonces habrá un θ entre 0 y 1, tal que $\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}=f'(x_0+\theta h)$ (Cauchy)"; c) "$f(x)$ es continua en x_0 si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon>0$, existe otra cantidad positiva $\delta>0$ de manera que, para todo punto del intervalo $|x-x_0|<\delta$ donde la función f esté definida, se verifica que $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (Weierstrass)"; d) la derivabilidad implica continuidad pero no viceversa.

En cuanto a los elementos lingüísticos propios de esta configuración, estamos de acuerdo con Ibarra y Gómez (2004), es formal, predominantemente algebraicos, en ocasiones apoyado en lenguajes geométricos. Durante esta etapa se introduce las notaciones que se conservan en la actualidad, por ejemplo y' o $f'(x)$ para denotar la derivada de una función, se representó con ε y δ a las cantidades infinitamente pequeñas que aparecen en la definición actual del límite; en general, el lenguaje simbólico característico del álgebra se puede ver en las definiciones de conceptos (y proposiciones) tales como límite, continuidad, derivada, entre otros. Así mismo, los *procedimientos* característicos de esta configuración son más aritméticos, es decir, predominan las manipulaciones algebraicas sustentadas en las propiedades y proposiciones establecidas; ejemplo de esto son las diversas demostraciones de teoremas sobre el cálculo diferencial.

Como señala Ibarra y Gómez (2004), los *argumentos* de esta configuración no presentan las incoherencias de las argumentaciones con infinitésimos ya que se ha conseguido fundamentar el análisis infinitesimal sobre conceptos aritméticos; primordialmente el de límite que fue la noción clave para fundamentar el objeto derivada.

3.3. SIGNIFICADO EPISTÉMICO GLOBAL DE LA DERIVADA

En el Capítulo 2 realizamos un estudio histórico-epistemológico sobre la evolución del objeto derivada, con el fin de reconstruir el significado global de dicho concepto, entendido de manera sistémica y pragmática, a través de la identificación y reconstrucción de los distintos significados parciales que, a lo largo de la historia, se le ha ido asignando.

Nuestro esfuerzo por la reconstrucción de un significado global para la derivada, ha resultado en la identificación de nueve sistemas de prácticas los cuales llevan, cada uno a su vez, asociados una configuración epistémica y constituyen un significado parcial de la derivada. A estas nueve configuraciones, respectivamente asociadas a los sistemas de prácticas, las hemos denominado: 1) *la tangente en la matemática griega (CE_1)*; 2) *sobre la variación en la edad media (CE_2)*; 3) *métodos algebraicos para hallar tangentes (CE_3)*; 4) *concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes (CE_4)*; 5) *las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos (CE_5)*; 6) *métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes (CE_6)*; 7) *el cálculo de fluxiones (CE_7)*; 8) *el cálculo de diferencias (CE_8)* y, 9) *la derivada como límite (CE_9).*

Es importante aclarar, que dentro del EOS una de las maneras de entender el significado de un concepto es, desde la perspectiva pragmatista, en términos de los sistemas de prácticas en que dicho objeto interviene (significado sistémico). Tales sistemas de prácticas están ligados a tipos de situaciones-problemas, de donde se deriva la posibilidad de distinguir distintos significados cuando se abordan problemas diferentes.

De esta forma, el objeto derivada, a lo largo de su evolución histórica, ha adoptado nueve significados distintos (significados parciales), es decir, el objeto derivada se ha activado implícita o explícitamente en nueve subsistemas de prácticas cada uno de los cuales tiene una configuración asociada de objetos y procesos. Estas nueve configuraciones (descritas en el apartado anterior), a pesar de ser distintas entre sí, algunas de ellas tienen similitudes, de manera que se pueden relacionar como se ilustra en la figura 3.1.

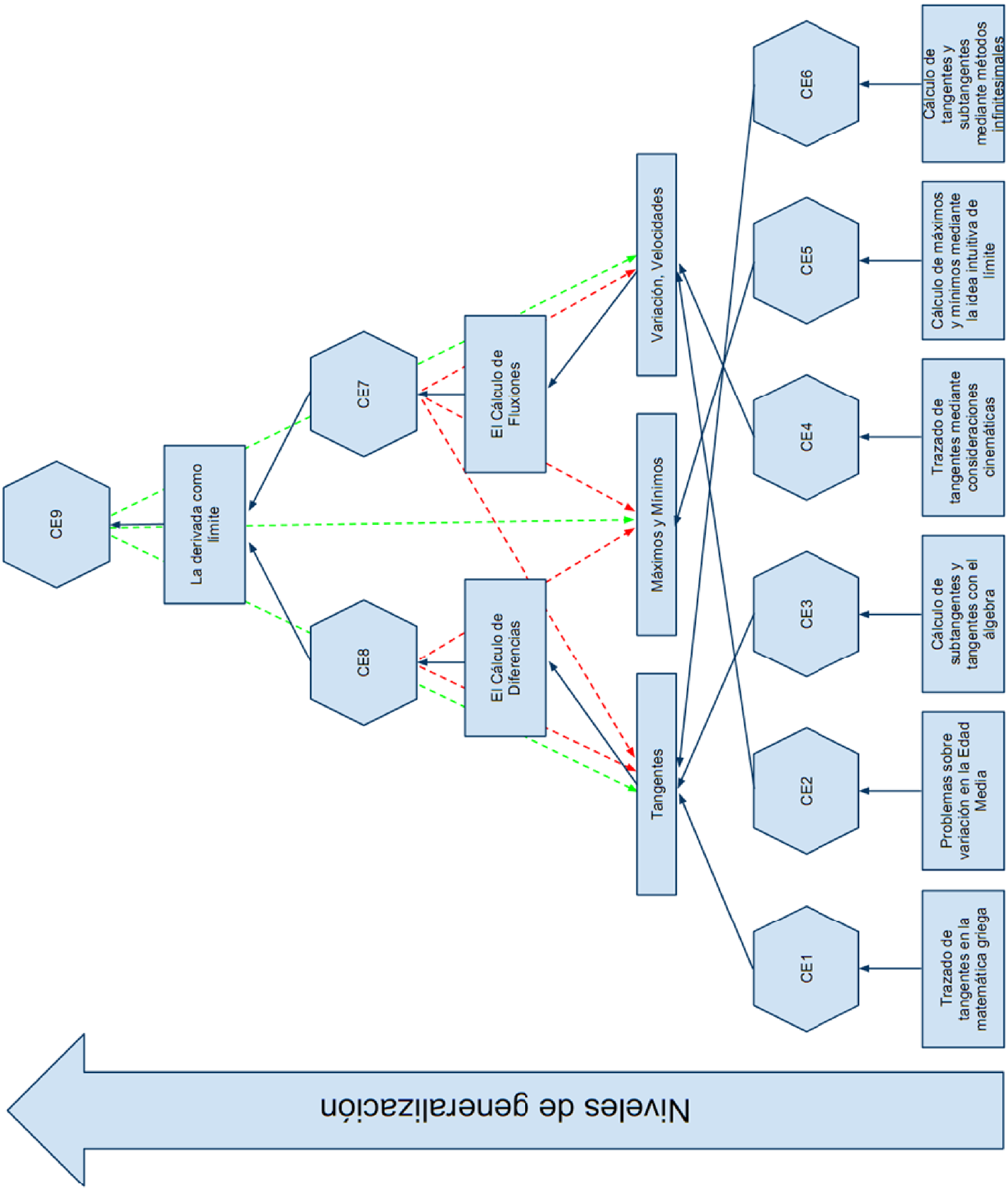


Figura 3.1. Significado epistémico global de la derivada

En la base del esquema en la figura 3.1, se han considerado cronológicamente seis *sistemas de prácticas/significados parciales* que pueden verse como "primarios" en cuanto que, las configuraciones activadas en dichos sistemas (CE_1, CE_2, CE_3, CE_4, CE_5 y CE_6), tienen un carácter extensivo, es decir, se resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas, con métodos y procedimientos particulares, etc.

Sin embargo, dentro de estas seis configuraciones “primarias”, hay algunas que son similares entre sí. Tal es el caso de las configuraciones CE_1, CE_3 y CE_6 que, al activar significados parciales similares para la derivada, pueden considerarse similares, razón por la que se pueden agrupar dando origen a un sistema de prácticas más “genérico” en el cual se abordan situaciones-problemas sobre tangentes en general. A este sistema de prácticas con su configuración asociada, la hemos denominado “tangentes”. Análogamente, las configuraciones CE_2 y CE_4 se pueden agrupar dando paso a un nuevo sistema más general, con su respectiva configuración asociada, la cual denominamos “variación, velocidades” ya que se abordan problemas de este tipo. La configuración CE_5, también la hemos denominado “máximos y mínimos”.

Posteriormente Newton, apoyándose en la configuración subyacente al sistema de prácticas genérico “variación, velocidades”, desarrolla un nuevo *sistema de prácticas* de la derivada como fluxión, en el cual se activa una configuración más general (CE_7), de tal forma que los nuevos procedimientos, lenguajes, conceptos, definiciones, etc., de dicha configuración, son aplicados luego para resolver situaciones-problemas característicos de los sistemas de prácticas “tangentes”, “máximos y mínimos” y “variación, velocidades”, aspecto que se señala con las flechas punteadas de color rojo que van de CE_7 a los tres sistemas de prácticas genéricos.

Del mismo modo Leibniz, apoyándose en la configuración asociada al sistema de prácticas “tangentes”, desarrolla un nuevo *sistema de prácticas* de la derivada como cociente de diferenciales en el que se activa una configuración más general (CE_8), la cual posteriormente aplica para la resolución de situaciones-problemas característicos de los sistemas de prácticas puestos en juego en las situaciones de cálculo de tangentes y de máximos y mínimos.

Finalmente, los matemáticos que sucedieron a Newton y Leibniz, tomando como base sus desarrollos (CE_7 y CE_8) generaron un nuevo *sistema de prácticas* de carácter formal de la derivada como límite del cociente de incrementos, el cual lleva asociado una configuración (CE_9) que constituye la formalización del objeto derivada. Las flechas punteadas de color verde que salen de CE_9 indican que los elementos de dicha configuración son aplicados para la solución de problemas propios de los sistemas de prácticas “tangentes”, “variación, velocidades” y “máximos y mínimos”.

De esta forma, vemos como el objeto derivada comienza a emerger de los *sistemas de prácticas* “primarios” los cuales básicamente pueden agruparse en tres sistemas de prácticas genéricos en los cuales se abordan problemáticas sobre: a) tangentes; b) máximos y mínimos; y c) velocidades. Las configuraciones asociadas a dichos sistemas de prácticas primarios, dan paso a nuevos sistemas de prácticas en los cuales se activan CE_7 y CE_8, mismas que alcanzan justificaciones formales en CE_9. El nivel de generalización progresivo de cada una de las configuraciones, también ha sido ilustrado en el esquema de la figura 3.1.

La consideración conjunta de los elementos, y sus relaciones, ilustrados en el esquema de la figura 3.1, es lo que conforma, primordialmente, el *significado epistémico global de la derivada*.

Las relaciones existentes entre las distintas configuraciones epistémicas identificadas en la figura 3.1, podrían seguir extendiéndose, por ejemplo la configuración CE_7 que tiene vinculado el significado de la derivada como fluxión, junto con algunas ideas de provenientes de las configuraciones CE_8 y $CE_{9,}$ dan lugar a un nuevo sistema de prácticas del cual emerge una nueva rama de las matemáticas: "El cálculo de variaciones". Sin embargo, esto no es objeto de estudio de nuestra investigación, ya que sólo pretendíamos reconstruir el significado global para la derivada de una variable real que sirva de referencia para sistematizar los conocimientos de los profesores de educación secundaria y bachillerato sobre la derivada, en lo que respecta a la faceta o dimensión epistémica de dicho conocimiento.

No obstante, el *significado global* de la derivada quedaría incompleto si no consideráramos las distintas generalizaciones que se han realizado sobre dicho objeto matemático (ver apartado 2.6). Estas generalizaciones de la derivada constituyen el *conocimiento matemático avanzado* sobre el objeto derivada; lo que en términos del modelo de Ball y colaboradores sería el conocimiento en el horizonte matemático.

Para finalizar este apartado, hay que señalar que el *significado epistémico global de la derivada* que hemos reconstruido, representa la *faceta epistémica* del conocimiento didáctico-matemático que el profesor de bachillerato debería tener sobre la derivada.

CAPÍTULO 4

SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas y de las administraciones educativas, debido a que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus respectivos profesores. Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el *conocimiento didáctico-matemático* que el profesorado requiere para enseñar tópicos específicos de matemáticas. En particular, nosotros nos hemos interesado por el objeto *derivada*, dado que la consideramos un objeto clave para la comprensión y estudio del *Cálculo* en general, además de su naturaleza compleja que se refleja en los múltiples problemas a los que se enfrentan tanto alumnos como profesores en el día a día de su práctica educativa.

Sin embargo, las investigaciones que se han realizado referentes a la *derivada*, se centran en aspectos de índole cognitivos e instruccionales, existiendo, así, muy pocas investigaciones enfocadas a los profesores (Gavilán, 2005), y menos aún, sobre los conocimientos que debe de tener un profesor sobre esta noción.

Debido a lo anterior, nos hemos interesado por el campo de investigación que trata de avanzar en la caracterización de *los conocimientos didáctico-matemáticos que serían útiles al profesorado de bachillerato para una enseñanza idónea de la derivada*. En este trabajo nos hemos centrado en un aspecto parcial de esta problemática, en particular en realizar una ***reconstrucción del significado epistémico global de la derivada***, que sirva de referencia para determinar aspectos esenciales de la faceta o dimensión epistémica del conocimiento didáctico-matemático del profesor. En este sentido, para esta investigación planteamos dos objetivos específicos, el primero de ellos (O1) orientado a la *identificación de los distintos significados parciales de la derivada*, mediante el análisis y descripción de las configuraciones epistémicas asociadas a las prácticas matemáticas de las cuales emergió dicho objeto. El segundo (O2) reflejaba nuestra pretensión por *reconstruir un significado global de la derivada a partir de los significados parciales identificados* en O1.

Con el fin de lograr dichos objetivos, en el Capitulo 2 desarrollamos un estudio histórico sobre la evolución de la derivada, desde la matemática griega hasta nuestros días. Mediante las herramientas teóricas que nos proporciona el EOS, concretamente la noción de configuración epistémica, en el Capítulo 3, se pudo identificar nueve configuraciones epistémicas asociadas a los distintos problemas, que fueron abordados por matemáticos de distintas épocas y que dieron paso al surgimiento de la derivada. Dichas configuraciones las denominamos: 1) *la tangente en la matemática griega* (CE_1); 2) *sobre la variación en la edad media* (CE_2); 3) *métodos algebraicos para hallar tangentes* (CE_3); 4) *concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes* (CE_4); 5) *las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos* (CE_5); 6) *métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes* (CE_6); 7) *el cálculo de fluxiones* (CE_7); 8) *el cálculo de diferencias* (CE_8) y, 9) *la derivada como límite* (CE_9) (ver apartado 3.2).

Estas nueve configuraciones identificadas, dan pautas que nos permiten apreciar cómo la derivada emerge de nueve sistemas de prácticas, cada uno de los cuales dota a dicho objeto de un significado distinto (o significado parcial). Un aspecto que es necesario aclarar en este punto, es en relación con el sistema de prácticas "máximos y mínimos", en el cual se activa la configuración CE_5. Y es que en la actualidad, las prácticas que involucran el cálculo de máximos y mínimos son consideradas aplicaciones de la derivada. Sin embargo, las prácticas sobre máximos y mínimos fueron claves en la evolución histórica de la derivada, pues fue precisamente en los trabajos de Fermat sobre los extremos, en donde por primera vez aparece de forma casi explícita el objeto derivada (ver apartado 2.3.2). No en vano Laplace y Lagrange consideraban a Fermat el verdadero inventor del cálculo diferencial.

De esta forma, el significado global de la derivada queda constituido, por un lado, por los nueve significados parciales, y las relaciones entre sus respectivas configuraciones, ilustrados en la figura 3.1. Pero por otro lado, dicho significado global quedaría incompleto, si no se tomaran en cuenta las distintas generalizaciones de la derivada, tratadas en el apartado 2.6. Así, la consideración conjunta de los significados parciales, y las relaciones entre sus respectivas configuraciones, y de las generalizaciones de la derivada, constituyen el *significado epistémico global* o lo que es igual, la *faceta epistémica* del conocimiento didáctico-matemático sobre esta noción.

La reconstrucción del significado global de la derivada resulta especialmente importante puesto que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, requieren un estudio en profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Tal estudio debe aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen. Es decir, es a partir del significado holístico de un objeto, que se determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, implementados y evaluados, en una práctica educativa específica.

De esta manera, es indudable que el *significado global de la derivada* debe ser parte del "background" que el profesor de secundaria/bachillerato debe tener para realizar procesos idóneos de enseñanza-aprendizaje sobre esta noción. Aún más, es pieza clave del conocimiento didáctico-matemático del profesor puesto que constituye, como hemos dicho, la faceta epistémica del mismo.

Para finalizar este trabajo, debemos recalcar que la reconstrucción del significado global que hemos realizado, tan sólo es el primer paso en la determinación de los conocimientos didácticos-matemáticos que debería tener el profesor de bachillerato, para el diseño e implementación de procesos de enseñanza-aprendizaje idóneos sobre la derivada. Desde nuestro punto de vista, un segundo paso, que queda como una cuestión abierta para investigaciones futuras, puede resumirse con la pregunta: *¿Qué nos dicen las investigaciones realizadas en el ámbito de didáctica de la matemática, acerca de los conocimientos que debe tener el profesor de bachillerato, para la enseñanza de la noción de derivada?* El determinar el conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, mediante la revisión y análisis de las investigaciones que se han llevado a cabo dentro del campo de didáctica de la matemática referentes a esta noción, es un aspecto que se hace necesario debido al amplio bagaje de investigaciones realizadas desde distintas aproximaciones teóricas, lo cual obstaculiza en muchas ocasiones el entendimiento de los formadores de profesores, sobre aquello que debe conocer el profesorado para la enseñanza de la derivada.

Además, dado que la formación inicial es la base de la enseñanza de las matemáticas, pero sólo proporciona una parte de lo que el profesorado necesita conocer y comprender en el ejercicio de su carrera (NCTM, 2000), otras cuestiones que quedan abiertas y que pueden servir para dar continuidad a nuestro trabajo, pueden ser:

a) El diseño y elaboración de instrumentos que permitan evaluar los conocimientos didácticos-matemáticos de los profesores en formación inicial y permanente, sobre la noción derivada.
b) El diseño, implementación y evaluación de situaciones didácticas y procesos de estudio que promuevan la reflexión de los profesores y futuros profesores acerca de sus propias concepciones sobre el objeto derivada y su didáctica.
c) Estudiar el tipo de formación inicial y permanente que sería necesaria para lograr que el profesor desarrolle los conocimientos didáctico-matemáticos para una enseñanza idónea de la derivada.

REFERENCIAS

Acosta, E., y Delgado, C. (1994). Fréchet vs. Carathéodory. *The American Mathematical Monthly, 101(4)*, 332-338.

Andersen, K. (1984). Las técnicas del cálculo, 1630-1660. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* [From the calculus to set theory, 1630-1910. An introductory history] (M. Martínez Trad.). (pp. 22-68). Madrid, España: Alianza Editorial.

Apostol, T. M. (2006). *Análisis matemático* [Mathematical Analysis] (J. Pla Trad.). (Segunda ed.). Barcelona, España: Editorial Reverté.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M., Batanero, C., y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. Lester K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 1011-1049). Charlotte, NC: Information Age.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia.* Tesis doctoral no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Badillo, E., Font, V., y Azcárate, C. (2005). Conflictos semióticos relacionados con el uso de la notación incremental y diferencial en libros de física y de matemática del bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias.* Número extra. VII Congreso.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Bos, H. J. M. (1984). Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* [From the calculus to set theory, 1630-1910. An introductory history] (M. Martínez Trad.). (pp. 69-124). Madrid: Alianza Universidad.

Boyer, C. B. (1999). *Historia de la matemática* [A history of mathematics] (M. Martínez Trad.). Madrid: Alianza Editorial.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Australia: Thompson.

Collette, J. (1993). *Historia de las matemáticas II* (3ª ed. en castellano). Madrid: Siglo XXI.

Contreras, A., Font, V., Luque, L., y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(2), 151-186.

Doorman, M., y van Maanen, J. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian Senior Mathematics Journal, 22*(2), 4-11.

Durán, A. (1996). *Historia con personajes de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza Editorial.

Ferrini-Mundy, J., y Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrals. En E. Dubinsky, y J. Kaput (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning* (pp. 31-45). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Flores, P. (1998). *Creencias y concepciones de los futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza* (Tesis doctoral, defendida 1995). Granada: Comares.

Font, V. (1999). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades.* Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* Universidad de Córdoba, España. 109-128.

Font, V. (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo della derivata. *Atti del Convegno di Didáctica della Matematica 2008,* Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza. 13-24.

Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición por límites. *Unión, Revista Iberoamericana De Educación Matemática, 18*, 15-28.

García, L., Azcárate, C., y Moreno, M. (2005). Conocimiento del contenido didáctico del profesor de matemáticas de universidad y su relación con otros contenidos disciplinares. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* Universidad de Córdoba, España.

García, L., Azcárate, C., y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 85-116.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Sevilla, España.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

González, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid: Alianza Editorial.

González, P. (2008). *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial*. Madrid: Nivola.

Grabiner, J. (1981). *The origins of cauchy's rigorous calculus*. Cambridge, Massachusetts and London, England: The MIT Press.

Grabiner, J. (1983). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine, 56*(4), 195-206.

Grabiner, J. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly, 90*(3), 185-194.

Grattan-Guinness, I. (1984). La aparición del análisis matemático y los progresos en su fundamentación desde 1780 a 1800. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910. Una introducción histórica* [From the calculus to set theory, 1630 - 1910. An introductory history] (M. Martínez Trad.). (pp. 125-193). Madrid: Alianza Editorial.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 372-400.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior,* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México. Descargado el 8 de mayo de 2010 de http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc.

Ibarra, E., y Gómez, J. (2005). Estudio histórico - epistémico de la derivada. *Primer Congreso Internacional Sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas,* Universidad de Jaén. 357-385.

Inglada, N., y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación de incremental. *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM),* Córdoba, España. (Boletín no. 15), 1-18.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 137-174.

Kuhn, S. (1991). The derivative a la Carathéodory. *The American Mathematical Monthly, 98(1),* 40-44.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. Da Ponte y L. Serrazina (Eds.) *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia.* (pp. 109-132). Editorial: Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao: Lisboa, Portugal. Lugar de publicación Portugal.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: Evolución, estado actual y retos futuros. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* Universidad de Córdoba, España. 81-96.

Pinzón, S., y Paredes, M. (1999). La derivada de Carathéodory en $\mathbb{R}^2$. *Revista INTEGRACIÓN, 17(2),* 65-98.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII*. (Vol. I, pp. 195-210). Lisboa, Portugal.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ramos, A. (2005). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales: El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales.* Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.

Sánchez, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267-296.

Sánchez - Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24, 85 – 98.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Sierpinka, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24-36.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 5-24.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM Mathematics Education*, *41*(4), 481-492.

Vera, F. (1970). *Cientificos griegos, 1, pitagoras, hipocrates, democrito, platon, aristoteles, teofrasto, eudemo de rodas, euclides, aristarco*. Madrid: Aguilar.

Vera, F. (1970). *Cientificos griegos, 2, arquimedes, apolonio de pergamo, eratostenes, nicandr*. Madrid: Aguilar.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1), 77 - 120.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. IV* (pp. 103-127). Washington, D. C.: American Mathematical Society y Mathematical Association of America.

ANEXO

ARTÍCULO EN ELABORACIÓN

FACETA EPISTÉMICA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO SOBRE LA DERIVADA[1]

Luis R. Pino-Fan, Juan D. Godino y Vicenç Font

RESUMEN

Una enseñanza idónea de un contenido matemático específico requiere por parte del profesor de la apropiación, entre otros, de una trama compleja de conocimientos sobre el propio contenido a enseñar, los significados personales de los estudiantes sobre el mismo, así como recursos instruccionales específicos. En este trabajo presentamos una síntesis de conocimientos sobre la derivada relativos al componente epistémico del conocimiento didáctico-matemático. Utilizando las nociones de configuración epistémica y de significado holístico del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento y la instrucción matemática presentamos una reconstrucción de dicho significado para la noción de derivada, que tiene en cuenta los tipos de problemas abordados en distintos momentos históricos y los sistemas de prácticas correspondientes. Este significado holístico constituye un aspecto esencial del conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas.

1. INTRODUCCIÓN

Conocimiento didáctico-matemático y sus componentes

Actualmente, la formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemática y de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus respectivos profesores. Como señala Moreno (2005), el profesor es clave para el éxito y necesario para implementar cualquier cambio o propuesta didáctica que tenga su origen en la investigación.

Recientemente ha habido un incremento notable de las investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas como se refleja en las revisiones incluidas en los "handbooks" de investigación en educación matemática (Bishop et. al., 2003; English et al., 2002; Llinares y Krainer, 2006; Hill y cols, 2007; Franke y cols, 2007; Sowder, 2007; Jaworski, Giménez et al 2009), y la publicación de revistas específicas como Journal of Mathematics Teacher Education. Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas. En este sentido, se han realizado diversos intentos para determinar los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debería tener para desarrollarse eficazmente en su práctica y facilitar el aprendizaje de sus estudiantes.

Uno de los pioneros en esta área, como es bien sabido, fue Shulman, quien en su trabajo de 1986 propuso tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Artículo en elaboración. Versión, 16 Agosto 2010.

pedagógico del contenido (PCK[2]) y conocimiento curricular. El PCK es descrito por Shulman como "la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza" (p. 9). Posteriormente, en otro trabajo, Shulman (1987) amplía sus ideas y propone siete categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento curricular, conocimiento pedagógico del contenido (PCK), conocimiento de los estudiantes y sus características, conocimiento de los contextos educativos, y conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

Otro de los trabajos importantes en el campo, es el desarrollado, en diversas investigaciones, por Deborah Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), quienes apoyándose en las ideas de Shulman (concretamente en las nociones del conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido), han propuesto la noción de "conocimiento matemático para la enseñanza (MKT[3])" definido como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). Este conocimiento (MKT) está conformado por dos grandes categorías, cada una de las cuales, a su vez, están conformadas por otras categorías de conocimiento: el conocimiento del contenido (que incluye el conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático) y el conocimiento pedagógico del contenido (conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo). Esto se puede ver de manera más clara en la Figura 1.

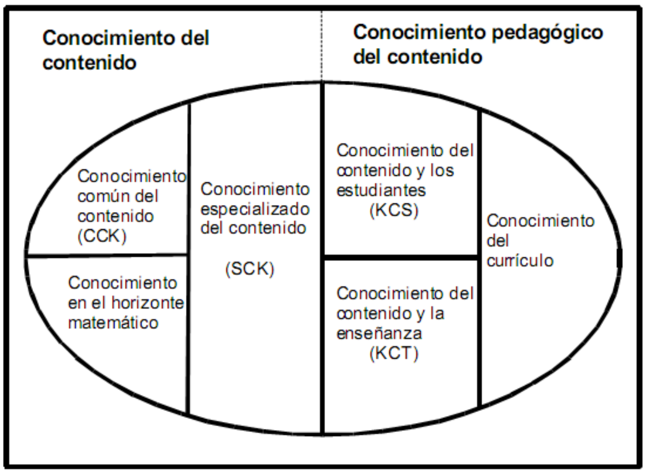


Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377)

En general, como señala Godino (2009), los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de profesor de matemáticas.

En este sentido Godino (2009) propone un modelo de "conocimiento didáctico-matemático" que permite categorizar y analizar los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor, mediante la aplicación del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Este marco teórico propone tener en cuenta seis facetas o dimensiones del conocimiento didáctico-matemático:

[2] Pedagogical Content Knowledge
[3] Matematical Knowledge for Teaching

epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (ver Figura 2); aportando además para cada una de ellas criterios e indicadores empíricos de idoneidad didáctica.

Figura 2. Facetas y niveles del conocimiento del profesor

Nosotros usaremos la expresión *"conocimiento didáctico-matemático (CDM)"* del profesor, para referir a la fusión de las nociones MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) y PCK (Pedagogical Content Knowledge), al considerar que expresión "Conocimiento matemático para la enseñanza" no refleja adecuadamente los diversos componentes o facetas que se deben tener en cuenta, al igual que ocurre con la expresión "Conocimiento pedagógico del contenido". Entendemos que la "Didáctica de la Matemática" es la disciplina académica y el área de conocimiento cuyo objetivo específico es la articulación coherente de las distintas facetas o dimensiones que se ponen en juego en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Además, hay que resaltar, que el término "conocimiento" lo usamos en el sentido de constructo epistémico–cognitivo–afectivo general que incluye comprensión, competencia y disposición.

Así, el CDM viene a ser la trama de ***relaciones*** que se establecen entre los objetos que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones - problemas matemáticos para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes.

Didáctica de la derivada

Las cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje del cálculo infinitesimal han sido intensamente investigadas en educación matemática. En particular la *derivada*, considerada una noción clave en el estudio del Cálculo, ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores) e instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada), tal y como se muestra en Artigue, Batanero y Kent (2007) o en Sánchez, García y Llinares (2008). Sin embargo, como bien señala Gavilán (2005), existen muy pocas investigaciones centradas en los profesores, y menos aún, en los conocimientos que debe de tener un profesor sobre esta noción.

Dentro de estas investigaciones centradas en el profesor, podemos encontrar aquellas que estudian aspectos de su práctica profesional y aquellas que estudian sus creencias y concepciones sobre la enseñanza-aprendizaje de la derivada. Las investigaciones sobre la práctica del profesor en la enseñanza de la derivada se pueden clasificar en dos grupos: aquellas relativas al uso de las nuevas tecnologías (ordenadores, calculadoras gráficas) y aquellas que señalan el uso de problemas de aplicación a ciencias del cálculo, introduciéndolo a través de problemas, por ejemplo, de la física. Estas investigaciones ponen de manifiesto la búsqueda de formas de modelar o caracterizar dicha práctica a través del uso de herramientas tecnológicas, presencia de diferentes representaciones o uso de situaciones en las que se aplica el cálculo (Gavilán, 2005).

El estudio de las creencias y concepciones, por su parte, resultan necesario para comprender la práctica de los profesores de matemáticas. Al respecto, Moreno (2005), señala que las creencias juegan un papel muy importante en todo lo que se relaciona con el profesor y la toma de decisiones en su ámbito profesional, por lo que cualquier intento de implementación de la calidad docente debería pasar por detectar, identificar, analizar e interpretar cuáles son las concepciones y creencias de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la materia en sí misma en su contexto específico de enseñanza. Sin embargo, las investigaciones desarrolladas cuyo objetivo es determinar las creencias y concepciones de los profesores con relación a la enseñanza de la derivada, han sido muy escasas. Uno de ellos es el trabajo propuesto por García, Azcárate y Moreno (2006) en el cual se estudian las creencias y concepciones de diez profesores universitarios del área de ciencias económicas, sobre cómo abordan la enseñanza del cálculo diferencial.

Otro tipo de investigaciones, que se han desarrollado recientemente, son aquellas que se han centrado en el discurso del docente cuando utiliza un razonamiento matemático para la demostración de teoremas en el salón de clase; principalmente los investigadores se han interesado en cómo se consigue dar validez a la argumentación. También están las investigaciones que estudian el uso de las metáforas en el discurso del profesor. Por ejemplo, Font (2009) centrándose en el uso de metáforas, analiza dos secuencias de actividades para calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ en las que no se utiliza la definición de la función derivada como límite de las tazas medias de variación.

En general, esta gran cantidad de resultados de la investigación didáctica sobre la derivada, plantea un reto a los formadores de profesores que sintetizamos con la pregunta: *¿Qué debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible?*

Para responder a esta pregunta se precisa reconstruir el sistema de conocimientos disponibles sobre cada uno de los aspectos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de la derivada. En este sentido, el objetivo de este trabajo es avanzar en la reconstrucción del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada mediante la descripción del *significado epistémico global de la derivada*, distinguiendo los significados parciales de la misma y su articulación. Para ello se realiza un estudio de tipo histórico-epistemológico, apoyados en el uso de algunas de las herramientas teóricas que nos proporciona el enfoque ontosemiótico del cognición y la instrucción matemática, mismas que se describen en el siguiente apartado.

2. NOCIONES TEÓRICAS Y METODOLOGÍA

Para lograr nuestro propósito, hemos adoptado el modelo teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática desarrollada en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007). El EOS viene desarrollándose desde 1994, en interacción con diversas investigaciones teóricas y experimentales desarrolladas en tesis doctorales y otros trabajos de investigación, y lo estamos usando porque nos provee de “herramientas” teóricas que nos permitirán realizar un análisis minucioso de cada uno de los componentes del conocimiento didáctico-matemático, que deben de tener los profesores de bachillerato para la instrucción de la derivada.

Concretamente, la noción de configuración epistémica (CE) nos permitirá reconstruir el *significado global de referencia* mediante la identificación de los significados parciales de la noción derivada, a partir de los informes de investigación y documentos históricos del cálculo infinitesimal. Se trata de identificar y describir de manera sistemática, los objetos primarios (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) intervinientes en los sistemas de prácticas de los cuales emerge el objeto derivada (ver figura 3).

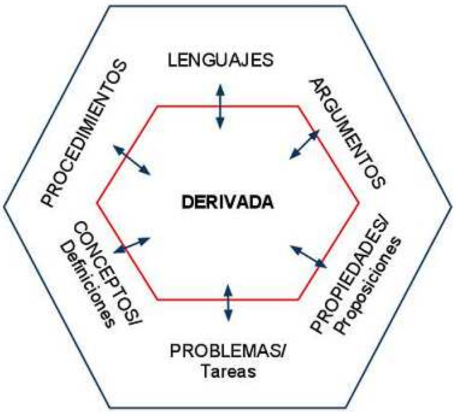


Figura 3. Objetos intervinientes en las prácticas epistémicas de las cuales emerge la derivada

Además, en el análisis de las configuraciones epistémicas, cada uno de los objetos intervinientes puede verse desde las distintas facetas duales que propone el EOS, razón por la cual las tendremos presentes en nuestro análisis. La figura 4 resume dichas facetas duales.

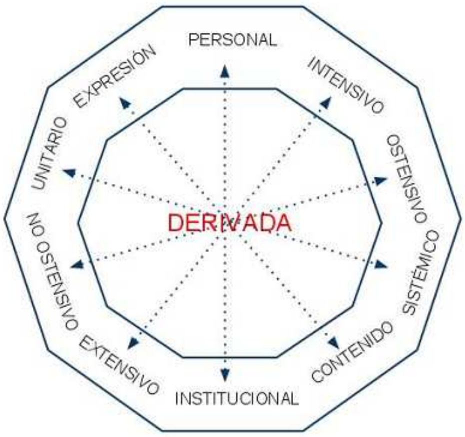


Figura 4. Facetas duales desde la que se pueden ver los elementos de cada configuración

Concretamente nos centraremos en los aspectos intensivos-extensivos (o general-particular), de los objetos primarios que componen cada configuración, puesto que esta dualidad nos ayudará a determinar los distintos niveles de generalización entre las configuraciones.

Así, el presente trabajo puede verse como un estudio documental, en cuanto que, a partir del análisis de las diversas fuentes, identificaremos y describiremos de manera detallada las distintas configuraciones epistémicas y los significados parciales asociados a éstas. La reconstrucción del significado global de la derivada se realizará a partir de los significados parciales y sus respectivas configuraciones epistémicas identificadas.

En los siguientes apartados describiremos las nueve configuraciones socio-epistémicas identificadas a lo largo del recorrido histórico de la derivada. Organizamos nuestra descripción partiendo de las tres problemáticas principales: 1) problemas sobre tangentes, 2) problemas sobre máximos y mínimos, y 3) problemas sobre velocidades. Además hemos considerado el orden cronológico de las configuraciones. Así, en el apartado 3 presentamos la descripción de las configuraciones uno, tres y seis; en el apartado 4 las configuraciones dos y cuatro, etc.

3. EL PROBLEMA DEL TRAZADO DE TANGENTES

Los sistemas de prácticas que involucran el "cálculo" de tangentes, fue uno de los más recurrentes en la evolución histórica de la derivada. En esta sección describimos las configuraciones asociadas a los problemas sobre tangentes; para ello partimos del análisis de un ejemplo de problema prototípico de cada configuración.

Problema 1: La tangente en la matemática griega (CE_1)

"Desde un punto dado trazar una recta tangente a un círculo".

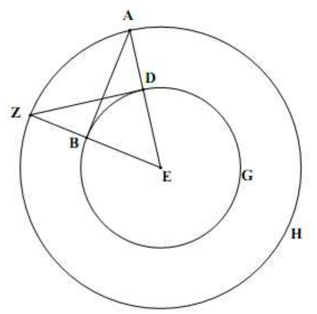


Figura 5. Solución de Euclides de la proposición XVII

Este problema es la proposición XVII que Euclides enuncia en su *libro III* de su obra *Elementos de Geometría*. La respuesta que, de acuerdo con Vera (1970, vol. 1), da Euclides es la siguiente: "(Con base en la figura 5) sea *A* el punto y *BGD* el círculo; tómese el centro *E* de éste y trace el segmento *AE*; con centro en *E* y radio *EA* trace el círculo *AZH*; desde *D* trazar *DZ* perpendicular a *AE* y una *E* con *Z* y *A* con *B*. Por ser *E* centro de los círculos *BDG* y *AHZ*, las rectas *EA* y *EZ* son iguales y también *ED* y *EB*, luego las dos *AE* y *EB* con iguales a *ZE* y *ED*, y forman el ángulo común en *E*. Por tanto, *DZ* y *AB* son iguales e iguales los triángulos *DEZ* y *EBA* y, por consiguiente, el ángulo *EDZ* será igual al ángulo *EBA*, y cómo el ángulo *EDZ* es recto, el ángulo *EBA* también será recto, y por ser *EB* perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la *AB* es tangente al círculo".

Primeramente, como podemos observar, el problema que plantea Euclides se trata de trazar una recta tangente a una curva específica, en este caso el círculo. Este tipo de problemas del trazado de tangentes, son propias de esta primera configuración, pues los matemáticos griegos no disponían de métodos generales para trazar rectas tangentes a cualquier curva, por lo que los problemas que abordaban eran múltiples casos particulares. En este sentido, estamos de acuerdo con Ibarra y Gómez (2005) con el hecho de que las *situaciones-problemas* que se presentan en esta primera configuración, son aquellas en las que se debe trazar la recta tangente a una curva específica (círculos, cónicas de Apolonio, espiral de Arquímedes, etc.) en un punto determinado aunque genérico.

En la solución del ejemplo vemos como en se utiliza un *lenguaje* propio de la geometría euclidiana y sus *argumentaciones*, tal y como lo señala Vera (1970, vol. 1), son puramente sintéticas. Además, en dicha solución intervienen *conceptos* tales como círculo, segmento, radio, perpendicularidad, congruencia de triángulos y segmentos, igualdad (de ángulos) y el concepto de tangente. Así mismo, aparece la *propiedad* de perpendicularidad entre la recta tangente y el radio que toca al punto de tangencia, la cual Euclides enuncia de la siguiente forma: “Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente” (Vera, 1970, vol.1). Como se puede observar, los *procedimientos* geométricos que se utilizan en dicha solución están encaminados a construir la recta tangente buscada, basándose en ésta propiedad; esto se puede ver cuando argumenta: “…y por ser *EB* perpendicular desde el centro en el extremo del diámetro, la *AB* es tangente al círculo”.

El ejemplo analizado nos permite ver, de manera global, las características de ésta primera configuración epistémica: “La tangente en la matemática griega”. En general, puede decirse que esta configuración es más extensiva que intensiva, en cuanto a que las situaciones-problemas, procedimientos, argumentos, etc., se encuentran enfocados a casos particulares, pues como hemos señalado, las *situaciones-problemas* que se presentan en esta primera configuración, son aquellas en las que se debe trazar la recta tangente a una curva específica en un punto determinado. Euclides fue el matemático más influyente de esa época, razón por la cual el *lenguaje* y *argumentación* eran propios de la geometría sintética. Por esta misma razón, los *conceptos-definiciones* y *proposiciones-propiedades* involucrados en la resolución de problemas eran, en su mayoría, las que había propuesto Euclides en su obra *Los elementos,* o variaciones de éstos. Ejemplos de conceptos-definiciones que intervienen en esta configuración son: “a) Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta (Definición II del libro III de los Elementos de Euclides); b) Se dice que dos círculos son mutuamente tangentes cuando se tocan mutuamente y no se cortan (Definición IV del libro III de los Elementos de Euclides)” (Vera, 1970, vol. 1). Algunos ejemplos de proposiciones-propiedades en esta configuración son: “a) La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del circulo; entre esta recta y la periferia no se interpondrá ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor (Proposición XVI del libro III de los Elementos de Euclides); b) Si una recta es tangente a un círculo y se traza el radio en el punto de contacto, este radio es perpendicular a la tangente (Proposición XVIII del libro III de los Elementos de Euclides); c) La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección (Proposición 32 del libro I de las Cónicas de Apolonio)” (Vera, 1970).

Con respecto a los *procedimientos* característicos en esta configuración, debemos señalar que los matemáticos griegos basaban sus demostraciones en las construcciones geométricas, por lo cual puede decirse que los procedimientos utilizados son una combinación de estas construcciones y las argumentaciones y lenguaje propios de la geometría sintética, basados en las definiciones y proposiciones.

Para finalizar debemos señalar que Apolonio también abordó problemas de máximos y mínimos, aunque en realidad, sus teoremas de máximos y mínimos, eran sobre tangentes y normales a las secciones cónicas, razón por la cual, se han considerado sus aportaciones en el análisis de esta primera configuración epistémica.

Problema 2: Métodos algebraicos para hallar tangentes (CE_3)

Con las aportaciones de Viète al campo de álgebra y la creación de la Geometría Analítica, el desarrollo del Cálculo en general se dio a marchas agigantadas. Los matemáticos del siglo XVII, con las ventajas de las nuevas y poderosas “herramientas”, comenzaron a desarrollar distintos métodos para abordar problemas sobre tangentes, máximos y mínimos, y velocidades, todos ellos con la finalidad de encontrar métodos generales aplicables a determinados campos de problemas. Sin embargo todos esos métodos fueron concebidos desde distintos enfoques conceptuales. Uno de ellos, que da pie a esta tercera configuración, son los métodos algebraicos desarrollados principalmente por Descartes, Hudde y Sluse, para el cálculo de tangentes, normales o subnormales. A continuación describiremos esta tercera configuración epistémica mediante el análisis del siguiente problema: (con base en la figura 6)

"Supongamos dada la curva algebraica ACE, trazar la normal a la curva en C"

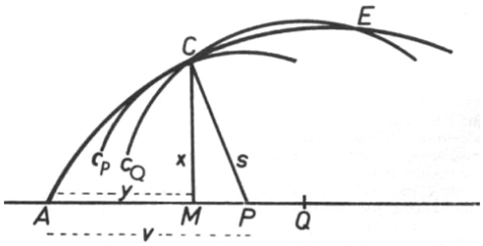


Figura 6. Método del círculo de Descartes

Para la solución, Descartes supone que la recta *CP* es la solución del problema. Sea *CM=x*, *AM=y*, *AP=v*, *CP=s*. Además de la curva *x=f(y)* o *ACE*, Descartes consideraba el círculo c_P con centro en *P* y que pasa por *C*; es decir, el círculo de ecuación $x^2 + (v - y)^2 = s^2$. La circunferencia de este círculo toca a la curva *CE* en *C* sin cortarla, mientras que la circunferencia c_Q de ecuación $x^2 + (v_Q - y)^2 = s_Q{}^2$, con centro en un punto *Q* distinto de *P* y que pasa por *C*, cortará a la curva no sólo en *C*, sino también en algún otro punto; sea este punto *E*. Esto significa que la ecuación $(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - s_Q{}^2 = 0$, obtenida sustituyendo *x=f(y)* en la ecuación de c_Q, tiene dos raíces distintas[4]; pero "cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E*, más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final, cuando los puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales, es decir, cuando la circunferencia que pasa por *C* toque a la curva en el punto *C* sin cortarla" (Descartes, citado en Andersen, 1984, p. 30). Descartes llego a la conclusión de que *CP* será una normal a la curva *C* cuando *P* (es decir, *v*) esté determinado de tal manera que la ecuación $(f(y))^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0$, tenga dos raíces iguales y_0.

Como señalamos al principio, los tipos de *situaciones-problemas* que se abordan en esta configuración, son el trazar rectas normales, tangentes o subtangentes a una curva dada en un punto determinado, tal como el ejemplo propuesto. En la solución de Descartes es fácil ver cómo el *lenguaje*, con respecto al utilizado en las configuraciones anteriores, cambia del netamente geométrico-descriptivo al de ecuaciones algebraicas y de la geometría analítica. Por ejemplo, en la descripción de la solución aparecen expresiones algebraicas para la curva *ACE*, ecuaciones de circunferencias y manipulaciones algebraicas de éstas para obtener la solución. En general, para resolver un problema geométrico, Descartes partía del estudio de éste para traducirlo a un lenguaje de ecuaciones algebraicas y después, una vez simplificada la ecuación lo más posible, resolvía dicha ecuación mediante la geometría. De esta forma, el *lenguaje* usado en esta configuración es el característico de los *procedimientos* algebraicos y de la geometría analítica.

Así mismo, los *argumentos* que presenta Descartes en la solución, son de tipo algebraico, basándose en las *propiedades-proposiciones* de la geometría analítica, o análisis geométricos, por ejemplo: a) "…esto significa que la ecuación $(f(y))^2 + (v_Q - y)^2 - s_Q{}^2 = 0$, obtenida sustituyendo *x=f(y)* en

[4] Descartes consideraba solamente curvas para las cuales *(f(y))*^{2} es un polinomio en *y*, o *y*^{2} un polinomio en *x*.

la ecuación de c_Q, tiene dos raíces distintas…”; b) “cuanto más se aproximen uno al otro *C* y *E*, más pequeña será la diferencia de las dos raíces, y al final, cuando los puntos coincidan, las raíces serán exactamente iguales…”. De esta forma, los *argumentos* en esta configuración van a ser algebraicos (basándose en las *propiedades-proposiciones* de la geometría analítica) y/o geométricos.

En cuanto a los *propiedades-proposiciones*, podemos señalar un ejemplo claro en la solución de Descartes: “*CP* será una normal a la curva *C* cuando *P* (es decir, *v*) esté determinado de tal manera que la ecuación $(f(y))^2 + (v - y)^2 - s^2 = 0$, tenga dos raíces iguales y_0”. En general, las *propiedades-proposiciones* característicos de esta configuración, son aquellas provenientes del algebra y del estudio de las curvas mediante la geometría analítica, por ejemplo: a) “Si una ecuación tiene una raíz doble y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria, de forma que el primer término de la progresión multiplica al primer término de la ecuación y así sucesivamente, el producto obtenido es una ecuación que tiene la raíz dada (Regla de Hudde para la obtención de raíces dobles)” (González, 1992, p. 193); b) “…la subtangente en cuestión será el cociente obtenido, dividiendo los términos del polinomio *f(x, y)* que contengan la variable *y*, cada uno de ellos multiplicado por el exponente de la potencia de *y* que aparece, por los términos en que aparezca la variable *x*, multiplicado cada uno de ellos por el correspondiente exponente de x y divididos todos ellos por *x* (regla de Sluse para hallar tangentes)” (Boyer, 1999, p. 471).

Como ejemplos de *conceptos-definiciones* propios de esta configuración, podemos señalar las distintas formas de concebir la recta tangente a una curva: a) “…como la posición particular de una secante que gira en torno al pie de la tangente, hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva llegan a coincidir”; y b) “…aquella que está determinada por una recta que gira alrededor del punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquella corte a la curva, coincida con el primero”. Descartes, como muchos matemáticos de la época, tenía la finalidad de encontrar un método general para encontrar tangentes (o mejor dicho, normales) a una curva, esto se evidencia claramente cuando señala: “Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de las curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella…” (Descartes; citado en Boyer, 1999, p. 435). Sin embargo, a pesar de que su método es aplicable a cualquier curva algebraica, éste se complica cuando la ecuación de la curva no es una ecuación algebraica sencilla, debido a los laboriosos cálculos que hay que hacer para determinar *v* comparando los coeficientes (Andersen, 1984). Aún así, los desarrollos que hemos enmarcado en esta configuración, muestran serios intentos para encontrar métodos cada vez más generales, para abordar los problemas sobre el trazado de tangentes.

Problema 3: Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes (CE_6)

En esta configuración epistémica hemos incluido las aportaciones que realizan, principalmente Barrow y Fermat, para abordar *situaciones-problemas* sobre el cálculo de tangentes o subtangentes. Consideremos el siguiente ejemplo:

“Hallar la subtangente a la curva dada por la expresión $y^2 = 3x$*”*

Lo primero que hace Barrow para resolver el problema es sustituir x y y por x+e y y+a respectivamente, de donde obtiene: $y^2 + 2ya + a^2 = 3x + 3e$. Luego despreciando los términos que contienen potencias de orden superior a 1 de a y e (regla 1) obtiene: $y^2 + 2ya = 3x + 3e$. Sustrayendo de la expresión anterior $y^2 = 3x$ (regla 2): $2ya = 3e$. Finalmente aplicando la *regla 3*: $\frac{PM}{PT} = \frac{m}{t} = \frac{a}{e} = \frac{3}{2y}$, de donde la subtangente viene dada por $PT = t = \frac{2my}{3}$.

El método, o *procedimiento*, que sigue Barrow para hallar la subtangente consta de tres reglas en las cuales moviliza una serie de propiedades, definiciones y argumentos. Una de estas *proposiciones-propiedades*, en la solución de Barrow, se tiene al aplicar la *regla 3* (para el cálculo de la subtangente *t*), ya que encuentra la razón $\frac{a}{e}$ considerando la semejanza entre los triángulos *MTP* y *MNR* (ver figura 7). Otro ejemplo son los dos incrementos e y a, que considera Barrow para las variables independiente y dependiente respectivamente (en la figura 7 *MR*=a y *NR*=e); los cuales al aplicar la regla 1, en la solución del ejemplo, considera "tan próximos a cero" y, al aplicar (intuitivamente) el límite, suprime las potencias de a y e de orden superior a uno.

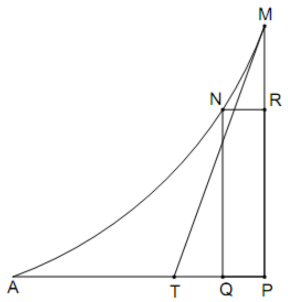


Figura 7. Método de las tangentes de Barrow

Otras *proposiciones-propiedades* utilizadas en esta configuración, son: a) la relación de semejanza entre los triángulos, que contienen las subtangentes, *BCE* y *OIE* para establecer que $\frac{BC}{OI} = \frac{CE}{IE}$ (ver figura 8), en la aplicación del método de los extremos de Fermat al cálculo de tangentes y subtangentes; b) "Sea una curva de ecuación $p(x, y) = 0$, donde p es un polinomio en x e y; la subtangente t correspondiente a un punto (x, y) viene dada por $t = \frac{-x(\ p(x,y),\ \ a,\ \ d)_y}{(\ p(x,y),\ \ a,\ \ d)_x}$, donde los subíndices significan que en el numerador $p(x, y)$ debe ser considerado como un polinomio en y mientras que en el denominador como un polinomio en *x*" (regla de Hudde para determinar subtangentes).

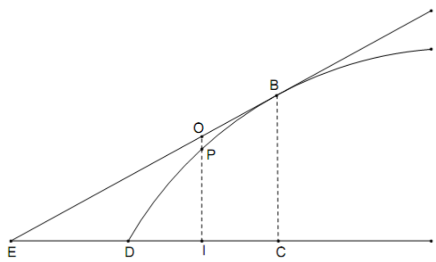


Figura 8. Aplicación del método de los extremos al cálculo de la tangente a la parábola

En general, algunos de los principales *conceptos-definiciones* que se manejan en esta configuración son: a) la concepción de Barrow sobre la tangente, como posición límite de la secante cuando a y e se aproximan a cero, hecho del cual subyace suprimir las potencias de a y e de orden superior a uno en la primera regla de Barrow; b) la noción intuitiva de límite, tanto en el método de Barrow para hallar las subtangentes, como en el método de los extremos de Fermat el cual será descrito en el siguiente apartado; y c) la noción intuitiva de la derivada. En cuanto a los *argumentos*, en esta configuración, se siguieron manteniendo los algebraicos, geométricos y consideraciones infinitesimales, como se puede apreciar claramente en la solución del ejemplo planteado, cuando (en la regla 1) se "suprime las potencias mayores de uno" de a y e por ser infinitamente pequeños. Así mismo, el *lenguaje* utilizado en esta configuración es de tipo geométrico, algebraico y/o descriptivo.

Los métodos para el cálculo de tangentes y subtangentes considerados en esta configuración (métodos de Fermat, Barrow y Hudde) son interesantes por ser algunos de los primeros métodos o reglas generales que se dieron.

4. ESTUDIO DE LA VARIACIÓN

Problema 4: Sobre la variación en la edad media (CE_2)

Durante el siglo XIV, comenzaron los estudios sobre el cambio en general y el movimiento como caso particular. Las investigaciones medievales sobre el movimiento comenzaron principalmente en las universidades de Oxford (por los escolásticos del Merton College) y París (principalmente Oresme). En particular, la demostración que realiza Oresme de la denominada “Regla de Merton”, conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. A continuación, analizaremos esta demostración de Oresme de la Regla de Merton y, a partir de dicho análisis, describiremos los objetos primarios que componen esta segunda configuración. Expresada en términos de tiempo y distancia, la regla de Merton nos dice:

“*Si un cuerpo se mueve con aceleración uniforme durante un intervalo de tiempo dado, la distancia total s es tal como aquella que se tendría durante el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniforme igual al promedio de su velocidad inicial v_o y su velocidad final v_f (es decir, su velocidad instantánea en el punto medio del intervalo de tiempo)*”.

Para la demostración geométrica, Oresme considera el movimiento uniformemente acelerado durante un intervalo de tiempo $(0,\ t)$ correspondiente a la longitud *AB* (ver figura 9), la latitud en cada punto *P* de *AB* es una ordenada *PQ* cuya longitud es la velocidad en el instante correspondiente, por lo que el lado *CD* es un grafo velocidad – tiempo. Oresme vio que la definición de aceleración uniforme implica que *CD* es un segmento de línea recta, y que la *figura* o *figura total*, es un trapezoide con base $AB=t$ y alturas $AD=v_o$ y $BC=v_f$. Supuso que el área *s* de ese trapezoide es igual a la distancia total recorrida y a partir de la fórmula para hallar el área del trapezoide se sigue inmediatamente que $s=\frac{1}{2}(v_o+v_f)t$ (Cantoral y Farfán, 2004).

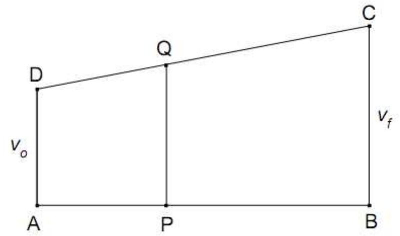


Figura 9. Demostración geométrica de Oresme de la Regla de Merton

En cuanto a la *situación-problema* planteada, es decir, el enunciado de la Regla de Merton, vemos que se trata de un problema que involucra el cálculo de la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve con aceleración uniforme, lo cual va a ser característico de esta configuración ya que los matemáticos de aquella época se habían interesado en abordar problemas físicos (o del mundo real) relacionados con el cambio en general y el movimiento en particular, lo que los escolásticos de Merton llamaban “variaciones de la intensidad de una cualidad, desde un punto a otro de un cuerpo, o desde un punto a otro del tiempo”. Otro ejemplo de una *situación-problema* característico de esta configuración es la denominada ley artificial: “Si a lo largo de la primera mitad de un cierto intervalo de tiempo, una forma se mantiene con cierta intensidad; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo la forma se mantiene al doble de dicha intensidad; a lo largo del siguiente octavo de intervalo la forma se mantiene al triple de intensidad, y así ad infinitum, entonces la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la forma durante el segundo intervalo [el doble de la intensidad inicial]" (González, 1992, p. 47). Estos ejemplos de *situaciones-problemas* (la regla de Merton y la ley artificial), son a su vez, ejemplos típicos de *proposiciones-propiedades* en esta configuración, puesto que se empleaban en la resolución de nuevas situaciones-problemas. Otros ejemplos de proposiciones-propiedades, son las que González señala como ideas innovadoras introducidas por Oresme: a) la medida de diversas variables físicas por medio de segmentos; b) algún tipo de relación funcional entre variables; c) una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales; d) la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo y, e) una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad-tiempo.

Respecto a los *conceptos-definiciones*, observamos que desde el enunciado del problema, es decir, la regla de Merton, intervienen conceptos tales como: a) aceleración uniforme, definida por los escolásticos de Merton como aquella para la cual incrementos iguales de velocidad se adquieren en intervalos de tiempo iguales; b) movimiento uniforme, definido como aquel que se tiene cuando las distancias iguales eran recorridas en tiempos iguales; c) velocidad instantánea, que es la forma en que definieron al movimiento variable; d) longitudo (longitud), la cual sería nuestra abscisa, que considera es el tiempo; e) latituto (latitud), que sería nuestra ordenada, y considerada la intensidad o la amplitud del fenómeno, ya sea velocidad, calor u otros; f) representación gráfica de las intensidades de las cualidades, que es la representación de la forma de acuerdo con la variación de la intensidad, respecto del tiempo. Este último concepto, introducido por Oresme, se hace presente mediante el grafico de la figura 9, con el cual describe la demostración de la regla de Merton. Los *conceptos-definiciones* que acabamos de mencionar, son algunos de los más representativos en esta configuración.

El *lenguaje* y *procedimientos* utilizados por Oresme en su demostración eran netamente geométricas, mediante la representación de la forma (como el gráfico de la figura 9), lo cual queda constatado cuando el propio Oresme señala: "La dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones y dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de figuras geométricas. Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo." (González, 1992, p. 42). Sin embargo, los procedimientos y el lenguaje utilizados en un inicio por los escolásticos del Merton College, fueron descriptivos, con *argumentaciones* verbales extensas y confusas. En general, los *lenguajes* y *procedimientos* característicos de esta segunda configuración fueron los descriptivos, geométricos (mediante la representación de la forma), o una combinación entre ambos.

Los *argumentos* que realiza Oresme en la demostración de la regla de Merton, fueron descriptivos mediante la representación de la forma, ya que, de acuerdo con Oresme, la noción de gráfico como elemento descriptivo de una cualidad, es importante, pues facilita la comprensión de la variación de un fenómeno (a lo que él llama la representación gráfica de *las intensidades de las cualidades*). Hay que señalar que durante este período, los resultados fueron hallados mediante *argumentaciones* verbales o geométricamente mediante la representación de la forma, más que mediante consideraciones aritméticas basadas en la noción intuitiva de límite, que fue ampliamente usada durante el siglo XVII.

En general, la configuración se puede considerar más extensiva que intensiva, puesto que aún no se contaban con métodos generales para resolver problemas sobre variación, y en particular, sobre movimiento.

Problema 5: Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes (CE_4)

Como señalamos en la segunda configuración, las investigaciones medievales sobre el movimiento, en particular las de Oresme, conducen a la idea de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. Galileo toma estas ideas y las demuestra con argumentos de indivisibles. Así mismo, Galileo establece la ley fundamental de la composición vectorial del movimiento y la aplica para determinar la trayectoria descrita por un proyectil. Además, si se representa el movimiento en un gráfico de desplazamiento-tiempo, la dirección de éste da la dirección de la tangente a la trayectoria, mientras la velocidad da la pendiente de la línea tangente (González, 1992). Estas ideas posteriormente serían recogidas y desarrolladas por matemáticos como Roberval, Torricelli y Newton, quien más tarde desarrollaría su cálculo de fluxiones, mismo que hemos considerado en una configuración aparte, debido a las diferencias conceptuales de las cuales hablaremos más adelante.

Las *situaciones-problemas, lenguajes y procedimientos* en esta cuarta configuración epistémica, siguen siendo los mismos que en CE_3; es decir, se siguen abordando problemas relacionados con el trazado de tangentes a distintas curvas. Del mismo modo los procedimientos y lenguajes son los de la geometría analítica y el álgebra. Sin embargo, como es lógico de suponer, al haber cambios conceptuales en los métodos de ésta cuarta configuración, los elementos de ésta (definiciones, proposiciones y argumentos) también varían. Así, mediante *argumentaciones cinemáticas*, se logran establecer nuevos *conceptos-definiciones* y *propiedades-proposiciones* inherentes a esta configuración epistémica.

Ejemplos de *conceptos-definiciones* utilizados en esta configuración son: a) concepto intuitivo de movimiento instantáneo; b) "Una curva es la trayectoria de un punto móvil"; c) "…en todas las demás líneas curvas, cualesquiera que sean, su tocante en cualquier punto es la línea de dirección del movimiento que tiene en ese mismo punto el móvil que la describe (concepción de tangente de Roberval)"; d) "…una tangente es la que resulta de la composición de dos movimientos de un punto móvil que traza la curva (concepción de tangente de Sluse)".

Algunas *propiedades-proposiciones* prototípicas de esta configuración son: a) "Si el movimiento que describe la curva es una combinación de movimientos simples, la línea instantánea del movimiento o dirección de la tangente puede hallarse por composición de movimientos, mediante la ley del paralelogramo"; b) "Trazar la tangente a una curva descrita por el movimiento de un punto que resulta de la composición de dos movimientos consiste en determinar la resultante de las velocidades de los dos movimientos"; c) "…si $s = s(t)$ y $v = v(t)$ representan respectivamente el espacio y la velocidad en función del tiempo, se tiene que: 1) el área limitada por la curva $v = v(t)$ y el eje de las abscisas representa, para cada *t*, el espacio recorrido $s = s(t)$, y 2) la pendiente de la tangente a la curva $s = s(t)$ representa, para cada *t*, la ordenada de la curva $v = v(t)$ en la abscisa *t*".

Nuestra lectura final, respecto a la dualidad *extensiva-intensiva*, es que los métodos empleados, en esta configuración, para el trazado de tangentes nuevamente son extensivos en cuanto a que no son generalizables para todos los casos. Esto lo señala Andersen (1984) de la siguiente manera: "Al tomar la dirección instantánea del movimiento como conocida, tanto Roberval como Torricelli habían evitado el uso de infinitesimales en su método, el cual tenía la ventaja adicional de ser aplicable a curvas que no están referidas directamente a un sistema de coordenadas. Sin embargo, el método no era general en cuanto a que no todas las velocidades podían ser determinadas".

5. CÁLCULO DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Esta quinta configuración epistémica ha surgido, principalmente, de las obras de Fermat, uno de los matemáticos más influyentes respecto al desarrollo del cálculo diferencial; de hecho, sus trabajos sobre máximos y mínimos y tangentes, hizo que diversos matemáticos del siglo XVIII, tales como Laplace y Lagrange, lo consideraran el verdadero inventor del cálculo diferencial.

Con base en las obras fundamentales de la antigüedad clásica griega (los *Elementos* de Euclides, las *Cónicas* de Apolonio, las obras de Arquímedes, la *Aritmética* de Diofanto, la *Colección matemática* de Pappus, etc.), así como en la teoría de ecuaciones de Viète (en particular en el método de la *Syncrisis* de su *Arte analítica*), Fermat desarrolla los primeros métodos generales, en la historia de las matemáticas, para la determinación de extremos (González, 2008), que posteriormente aplica a la determinación de las normales y tangentes.

Problema 6: Las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos (CE_5)

Como en las secciones anteriores, partiremos del análisis de un problema para describir los elementos que componen esta quinta configuración. El problema es el siguiente:

"Dividir un segmento de longitud N en dos partes de manera que el producto sea el máximo posible"

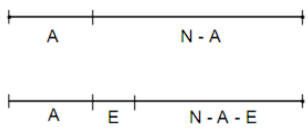


Figura 10. Aplicación del método de los extremos de Fermat

Para dar solución al problema, sea *A* la cantidad desconocida por la que tendremos que dividir el segmento de longitud *N* (ver figura 10). De tal forma que el producto pedido estará dado por la expresión:

$$f(A) = A(N - A) = AN - A^2 \ \ldots(1)$$

Ahora bien, dado que queremos que el producto sea el máximo posible, incrementemos a nuestra variable *A* una magnitud *E*, de tal forma que el producto estaría dado por:

$$f(A + E) = (A + E)(N - A - E) = AN - A^2 + NE - 2AE - E^2 \ \ldots(2)$$

"Adigualando" las expresiones (1) y (2) obtenemos:

$$AN - A^2 \approx AN - A^2 + NE - 2AE - E^2$$

$$NE \approx 2AE + E^2 \ \ldots(3)$$

Dividiendo ambos miembros de la *"adigualdad" por E, obtenemos:*

$$N \approx 2A + E \ \ldots(4)$$

Finalmente, haciendo *E=0*, en (4) nos queda:

$$2A = N$$

Lo que significa que el producto es máximo cuando $A = \frac{N}{2}$ (González, 2008).

Otro tipo de *situaciones-problemas* que fueron abordados en esta configuración, además de aquellos en los que se pretendían calcular extremos (como en el ejemplo que estamos analizando), fueron los problemas de aplicación práctica sobre máximos y mínimos. Ejemplo de esto es el problema abordado por Kepler sobre el cálculo de volúmenes de barriles de vino; Kepler estudió la forma de los barriles que con menor superficie (menor cantidad de madera utilizada para hacerlos) tuviera mayor volumen (pudieran albergar más cantidad de vino).

El *lenguaje* utilizado por Fermat en la solución del problema, es prácticamente el mismo que en las configuraciones anteriores: algebraico, gráfico y/o descriptivo. Este lenguaje es el que utilizaron la mayoría de los matemáticos del siglo XVII hasta antes de los desarrollos de Newton y Leibniz.

Una de las *propiedades* principales en esta configuración, radica en la idea de incrementar una magnitud considerable a la variable independiente o a la magnitud que podríamos interpretar como la variable independiente (González, 2008; Andersen, 1984); situación que representa el punto de partida para el uso de magnitudes infinitamente pequeñas, es decir, los infinitesimales. La propiedad que acabamos de mencionar se puede identificar en la solución que da Fermat al problema, que hemos planteado a manera de ejemplo, cuando señala: "…incrementemos a nuestra variable *A* una magnitud *E*…". Otra *propiedad* clave en el método de Fermat, es la "Adigualdad" que establece para "aproximar tanto como sea posible" la expresión que determina el producto a la expresión que determina el producto cuando se incrementa la cantidad desconocida (*A*), es decir, $AN - A^2 \approx AN - A^2 + NE - 2AE - E^2$. Esto significa que *E* es tan pequeña, que ambas cantidades son "casi iguales"; en términos actuales, que *E* se aproxima a cero. Un último ejemplo de una *propiedad-proposición* característica de esta configuración es la formulación general, dada por Hudde, de un patrón subyacente a las soluciones de problemas de máximos y mínimos por el método de Fermat, que en notación moderna, afirma que dado un polinomio de la forma $y = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces, se tiene un máximo o un mínimo cuando $\sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = 0$ (Grabiner, 1983).

El método de Fermat para el cálculo de extremos en sí mismo, un claro ejemplo de los *procedimientos* utilizados, es incluso, el más importante en esta configuración.

En cuanto a las *argumentaciones* características de esta configuración, además de las algebraicas y las geométricas, se empiezan a elaborar, aunque de manera implícita, argumentaciones basadas en las cantidades infinitesimales. Esto puede verse, en la solución del ejemplo, cuando Fermat "adiguala" las cantidades, de trasfondo radica la idea de que *E* se aproxima a cero. Así mismo, cuando se divide ambos miembros de la "adigualdad" por *E*, nuevamente detrás está la idea de que *E* se aproxima a cero pero no llega a ser cero. En contradicción con esto último, cuando se hace *E=0*, la idea subyacente es que *E* es "tan pequeña" que se le puede desestimar. Lo anterior, de hecho, es una de las principales críticas a su método, ya que en el mismo proceso considera $E = 0$ y $E \neq 0$. Aún así, el proceso utilizado por Fermat es, en esencia, similar al cálculo de $lim_{E \to 0} \frac{f(A+E) - f(A)}{E}$, que se emplea en la actualidad para hallar la primera derivada.

Para finalizar, hay que señalar que en esta configuración aparecen, aunque de manera muy intuitiva, *conceptos-definiciones* importantes tales como el límite y la derivada. Otra cuestión es que, al desarrollarse métodos generales para la determinación de máximos y mínimos (por ejemplo, el método de Fermat o la formulación de Hudde), esta configuración tiene características más *intensivas que las anteriores*.

6. LA DERIVADA COMO FLUXIÓN

Como señala González (1992), es indiscutible que Newton y Leibniz son los verdaderos artífices del *cálculo infinitesimal*. Sin embargo, existen diferencias conceptualmente importantes entre las ideas de Newton y las de Leibniz, razón por la cual, a diferencia del trabajo de Ibarra y Gómez (2005), hemos considerado ambos planteamientos en configuraciones distintas.

Newton comienza con la consideración de elementos infinitesimales, a la manera de Fermat y Barrow, pero enseguida deriva hacia una concepción mecánica, basada en la idea intuitiva del movimiento continuo, manejando el *concepto* de *fluente*, como cantidad que varía respecto al tiempo, y de *fluxión* como su velocidad de cambio respecto al tiempo (González, 1992); de ahí que al cálculo desarrollado por Newton se le conozca como *cálculo fluxional.*

Comencemos pues, esta séptima configuración epistémica, con el siguiente ejemplo (Bos, 1984) que fue uno de los propuestos por Newton en su obra de 1671, y ejemplifica cómo aplicaba su método de las fluxiones.

Problema 7: El Cálculo de fluxiones (CE_7)

"Dada la curva de ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, *calcular las fluxiones"*

Para resolver el problema, Newton sustituye en la ecuación dada x y y por $x + \dot{x}o$ y $y + \dot{y}o$ respectivamente, obteniendo:

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - (ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2) + (axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0$$

luego elimina $x^3 - ax^2 + axy - y^3$, que es igual a cero (de acuerdo con la ecuación dada originalmente), divide después por *o* y desprecia finalmente los términos en que todavía figura el factor *o*, quedando finalmente:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$$

Primeramente, observemos que Newton introduce nuevos *conceptos-definiciones* en sus desarrollos sobre el cálculo infinitesimal y, con ellos, nuevas expresiones terminológicas y notacionales (además del lenguaje algebraico, geométrico y descriptivo), entre los cuales podemos señalar: a)"o" es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño b) "momento de *x*" que define como un incremento infinitesimal de *x* y que representa con *ox* (análogamente define el momento de *y, oy*); c) en palabras de Newton: "Llamaré *cantidades fluentes*, o simplemente *fluentes*, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto *v, x, y, z,* para distinguirlas de las otras cantidades"; d) el concepto fluxión definido con sus palabras: "representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones…"; e) "*momento de la fluente*" es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como *x* en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño "o", es decir, $\dot{x}o$.

El método de las fluxiones de Newton es, a su vez, el *procedimiento* más importante de esta configuración; por ejemplo, en la siguiente descripción Newton sugiere (y a la vez *argumenta*) la sustitución de x e y por $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ respectivamente: "Ya que los momentos como $\dot{x}o, \dot{y}o$ son las anexiones o aumentos infinitamente pequeños de las cantidades fluentes x e y durante los intervalos de tiempo infinitamente pequeños, se sigue que estas cantidades x e y, después de un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se convierten en $x + \dot{x}o \;\; e \;\; y + \dot{y}o$…De ese modo, se puede sustituir en la misma ecuación $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en lugar de x e y" (Collette, 1993, p.110). En este último ejemplo, al igual que en el problema propuesto al inicio, vemos como Newton *argumenta* los procedimientos (y en general sus definiciones y proposiciones) con base en consideraciones dinámicas y de infinitesimales, apoyándose siempre en el álgebra y el análisis geométrico.

Dentro de las *proposiciones-propiedades* dadas por Newton, podemos mencionar las siguientes: a) *Si* $ax^{m/n} = y$, *entonces el área será* $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$; b) Supongamos una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde *m* es entero o fraccionario, entonces la curva está dada por la expresión $y = max^{m-1}$; c) dada una curva $y = max^{m-1}$, entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$ (recíproco del inciso b); d) "Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales" (Durán, 1996, p. 54).

En cuanto a los tipos de *situaciones-problemas* de esta configuración, Newton abordó problemas sobre el cálculo de la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito y viceversa; así mismo Newton hacía uso de sus algoritmos para la determinación de máximos y mínimos, tangentes y curvaturas (Bos, 1984). En este sentido, al ser los algoritmos de Newton universales, en palabras de González (1992), es decir, aplicables a una variedad de problemas, esta configuración la reconocemos como altamente intensiva.

Así, vemos como en esta configuración las *fluxiones* o velocidades de los movimientos de las fluentes, es lo que en la actualidad conocemos como la *derivada*, y los momentos como $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ del *cálculo de fluxiones* de Newton, serían las diferencias infinitamente pequeñas o *diferenciales* dx y dy en el cálculo diferencial de Leibniz.

7. LA DERIVADA COMO COCIENTE DE DIFERENCIALES

A diferencia de Newton, el cálculo de Leibniz tiene un carácter más simbólico y analítico, siendo las *diferencias infinitesimales* y la suma de *infinitamente pequeños*, las bases de su cálculo diferencial e integral respectivamente (González, 1992). Como señala Collette (1993), su finalidad era elaborar un método eficaz mediante el cual, sin recurrir a diagramas, ciertas propiedades de las curvas puedan ser determinadas por medio de su *cálculo de las diferencias*. A continuación describiremos, con algunos ejemplos, los elementos primarios que componen esta octava configuración.

Problema 8: El Cálculo de diferencias (CE_8)

Leibniz abordó *situaciones-problemas* sobre máximos y mínimos, tangentes y puntos de inflexión; esto se evidencia claramente en el título de su obra "*Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur*" (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales), en la cual introduce por primera vez la expresión *cálculo diferencial* y proporciona las fórmulas, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, todas éstas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión.

Uno de los objetivos de Leibniz, y que de acuerdo con Bos (1984) fue una de las tres ideas principales que permitieron el desarrollo de su cálculo infinitesimal, es la construcción de una *characteristica generalis*, es decir, un *lenguaje* simbólico general mediante el cual se pudieran escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de *argumentación* y de razonamiento. Con este fin, Leibniz logró introducir un nuevo lenguaje accesible, que aún se mantiene en nuestros días, el cual facilita la manipulación de los conceptos, procedimientos y argumentos, en el cálculo diferencial. Por ejemplo, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y ∂, los cuales concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Así mismo, denota con dy y dx a las diferenciales de las variables x e y respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de x e y.

Los lenguajes, nuevos términos y notaciones, introducidos por Leibniz, estaban asociados a una serie de nuevos *conceptos-definiciones* o *procedimientos* primordiales en su cálculo de diferencias. Por ejemplo, dy la utiliza para denotar el concepto de diferencial de una variable y, la cual define como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y (análogamente define la diferencial de la variable x, dx). Así mismo, como ya señalamos anteriormente, introduce los símbolos $\int$ para representar el proceso de sumar rectángulos o áreas, y ∂ para representar las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Las fórmulas proporcionadas por Leibniz, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, son ejemplos de *proposiciones* y *procedimientos* al mismo tiempo.

En cuanto a las *proposiciones-propiedades* utilizadas en esta configuración, dos de las principales, que de acuerdo con Bos (1984) fueron utilizadas por Leibniz, en el desarrollo de su cálculo de diferencias, son: la relación que dedujo a partir de sus estudios sobre sucesiones numéricas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y sus sucesiones de diferencias primeras asociadas, $b_1 = a_1 - a_2,\ b_2 = a_2 - a_3, \ldots$; Leibniz se dio cuenta de la relación $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. La segunda es la relación de semejanza entre el triángulo $cc'd$ situado a lo largo de la curva en la figura 11, y los triángulos formados por la ordenada, tangente y subtangente, o por la ordenada, normal y subnormal.

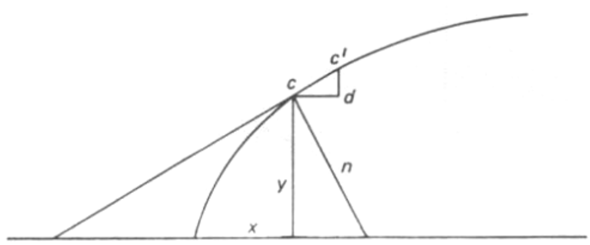


Figura 11. Triángulo diferencial de Leibniz

Otros ejemplos de *proposiciones-propiedades* son los siguientes: a) "…una suma tal como $\int y\,dx$ es la suma de los rectángulos infinitamente pequeños de base dx y altura y; por lo tanto, la cuadratura de una curva es igual a $\int y\,dx$"; b) "…la integración en cuanto a proceso de sumación es la inversa de la diferenciación"; c) "la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente $\frac{dy}{dx}$, ya que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas".

Finalmente, hay que señalar que para sus *argumentaciones*, Leibniz utilizó consideraciones algebraicas, geométricas e infinitesimales. Además, al desarrollar un método general para el cálculo de la diferencial de una variable, esta configuración es altamente intensiva, a pesar de que quedaran pendientes cuestiones sobre la fundamentación.

Observemos también, la importante diferencia conceptual entre las ideas de Newton, discutidas en el apartado anterior, y las de Leibniz. Newton tiene una visión dinámica de las curvas, como generadas por un movimiento. En este sentido, para el cálculo de las fluxiones (o derivadas), hace uso de los infinitésimos pero no le interesan estos por sí mismos, sino el límite cuando estos van *desvaneciéndose*. En cambio Leibniz, concibe una curva como formada por un conjunto de segmentos rectos de longitud infinitesimal, de esta forma, se interesa por las propiedades de estas cantidades infinitesimales en sí. De ahí que desarrolle su método para la suma de estas cantidades (integración) y para la diferencia de ellas (derivación). Como señala Durán (1996), el desarrollo de los conceptos de diferencial e integral con la apreciación explícita de que son conceptos inversos, el desarrollo de unas reglas para el cálculo de la diferencial y la aplicación de estos conceptos a la resolución de problemas de tangentes, cuadraturas, máximos y mínimos, problemas inversos de tangentes, etc., situaron el cálculo de las diferencias de Leibniz por encima del cálculo de fluxiones de Newton.

8. LA DERIVADA COMO LÍMITE

Al final del siglo XVII, el cálculo diferencial estaba establecido sobre los trabajos de Newton y Leibniz, aunque sin una fundamentación matemática rigurosa. Los matemáticos que sucedieron a Newton y Leibniz, continuaron los desarrollos y sobre todo, las aplicaciones de las nuevas ideas a una gran cantidad de problemas principalmente de la física, por ejemplo, el de la cuerda vibrante, la catenaria o el de la braquistócrona. Además, los aportes realizados en esta etapa, posterior al establecimiento del cálculo Newtoniano y Leibniziano, se orientaron hacia la búsqueda de una fundamentación rigurosa de las nuevos métodos generales desarrollados por Newton y Leibniz. De esta forma, el concepto de *derivada* y su fundamentación, fue desarrollándose gradualmente durante los siglos XVIII y XIX, junto con las ideas de función, continuidad y límites, principalmente. Describimos a continuación la novena configuración epistémica, a partir del análisis del estudio histórico sobre el desarrollo de una fundamentación rigurosa de la derivada, hasta llegar a la definición que conocemos en la actualidad.

Problema 9: La derivada como límite (CE_9)

Como se ha señalado antes, entre las principales *situaciones-problemas* de esta configuración, se encuentra la aplicación de los nuevos métodos generales de Newton y Leibniz, en la resolución de problemas principalmente de la física, por ejemplo, el de la cuerda vibrante, así como para el cálculo de tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión, velocidades; pero sobre todo, las *situaciones-problemas* iban encaminadas al desarrollo de conceptos, propiedades, etc., para dar una fundamentación rigurosa a los aportes de Newton y Leibniz, esto es, se trata de una configuración fuertemente formal.

En este sentido, en esta etapa se desarrollaron una serie de *conceptos-definiciones* primordiales no sólo para el desarrollo de la fundamentación de la derivada, sino para el Cálculo Infinitesimal en general. El concepto de función, por ejemplo, el cual Euler comienza a considerar como una aplicación que a un número x asocia otro $f(x)$. El concepto de límite, del cual se dieron diversas definiciones a lo largo de esta etapa, como por ejemplo: a) "el valor del que una variable puede llegar a diferir en menos que una cantidad arbitrariamente pequeña (Simon Lhuilier)"; b) "Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable aproximan indefinidamente a un valor fijo tanto que al final difieren de él tanto como uno desea, esta última cantidad es denominada el límite de todas las otras (Cauchy)"; c) "el límite de una función *f(x)* vale L cuando x tiende a x_0 si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$ existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que para todo punto x verificando $0 < |x - x_0| < \delta$ y donde la función f esté definida se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Weierstrass)*"*. Así mismo, la *derivada* es definida por Cauchy de la siguiente manera: "Cuando la función $y = f(x)$ es continua entre dos límites dados de la variable *x*, y uno asigna un valor entre estos límites a la variable, un incremento infinitesimal de la variable produce un incremento infinitesimal en la función misma. Consecuentemente, si ponemos $\Delta x = i$ los dos términos del cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ serán infinitésimos. Pero considerando que estos términos tienden a cero simultáneamente, el cociente mismo puede converger a otro límite, positivo o negativo. Este límite, cuando exista, tiene un valor definido para cada valor particular de *x*; pero varía con *x*. Así, por ejemplo, si tomamos $f(x) = x^m$, siendo *m* un entero positivo, la razón de las diferencias infinitesimales será $\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} i + \cdots + i^{m-1}$; y su límite será la cantidad mx^{m-1}, esto es, una nueva función de la variable *x*. Lo mismo ocurrirá generalmente; sólo que la forma de la nueva función que sirve de límite a la razón $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá de la forma de la función $y = f(x)$. Para indicar esta dependencia, damos a la nueva función el nombre de derivada y la designamos, usando un apóstrofe, por la notación y' o $f'(x)$". Por su parte, Bolzano define la *derivada de una función* como "la cantidad $f'(x)$ hacia la que se aproxima el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando Δx se aproxima a cero". Finalmente, en el primer cuarto del siglo XIX la *derivada de una función* se define como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

Como *proposiciones-propiedades* características de esta configuración, se tienen, entre otros, varios teoremas tales como: a) El teorema del valor medio para funciones derivables, así como la primera expresión para el resto en la fórmula de Taylor que hoy conocemos como la expresión de Lagrange del resto; b) "si *f(x)* es una función continua entre $x = x_0$ y $x = X$, entonces $\min_{[x_0,\ X]} f'(x) \leq \frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} \leq \max_{[x_0,\ X]} f'(x)$, del cual se deduce que si $f'(x)$ es continua entre $x = x_0$ y $x = x_0 + h$, entonces habrá un θ entre 0 y 1, tal que $\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h} = f'(x_0 + \theta h)$ (Cauchy)"; c) "$f(x)$ es continua en x_0 si para cualquier cantidad positiva $\varepsilon > 0$, existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que, para todo punto del intervalo $|x - x_0| < \delta$ donde la función f esté definida, se verifica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Weierstrass)"; d) la derivabilidad implica continuidad pero no viceversa.

En cuanto a los elementos lingüísticos propios de esta configuración, estamos de acuerdo con Ibarra y Gómez (2004), es formal, predominantemente algebraicos, en ocasiones apoyado en lenguajes geométricos. Durante esta etapa se introduce las notaciones que se conservan en la actualidad, por ejemplo y' o $f'(x)$ para denotar la derivada de una función, se representó con ε y δ a las cantidades infinitamente pequeñas que aparecen en la definición actual del límite; en general, el lenguaje simbólico característico del álgebra se puede ver en las definiciones de conceptos (y proposiciones) tales como límite, continuidad, derivada, entre otros. Así mismo, los *procedimientos* característicos de esta configuración son más aritméticos, es decir, predominan las manipulaciones algebraicas sustentadas en las propiedades y proposiciones establecidas; ejemplo de esto son las diversas demostraciones de teoremas sobre el cálculo diferencial.

Como señala Ibarra y Gómez (2004), los *argumentos* de esta configuración no presentan las incoherencias de las argumentaciones con infinitésimos ya que se ha conseguido fundamentar el análisis infinitesimal sobre conceptos aritméticos; primordialmente el de límite que fue la noción clave para fundamentar el objeto derivada.

9. OTRAS GENERALIZACIONES DE LA DERIVADA

En los apartados anteriores, hemos realizado la descripción de las nueve configuraciones epistémicas identificadas en el estudio de la evolución histórica de la derivada de una función real de una sola variable. Sin embargo, es conveniente saber que se han realizado diversas generalizaciones sobre dicho objeto matemático, algunas más conocidas que otras en el campo de Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, la *derivada parcial* que, en síntesis, es la derivada de una función de varias variables con respecto a una de esas variables, y que resulta de gran utilidad en ramas de las matemáticas tales como el cálculo de variaciones y la geometría diferencial. La *derivada parcial* describe la variación de una función real de dos o más variables en dirección de cada uno de los ejes coordenados. Existe una generalización llamada *derivada direccional*, que estudia la variación de una función en una dirección de un vector arbitrario, y se aplica tanto a funciones vectoriales reales como complejas: "Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y sea $f: S \to \mathbb{R}^m$. Se desea estudiar cómo varía f cuando pasamos, a lo largo de un segmento rectilíneo, de un punto $c \in S$ a un punto próximo $c + u$, donde $u \neq 0$. Cada uno de los puntos del segmento se puede expresar por medio de $c + hu$, donde h es real. El vector u define la dirección del segmento rectilíneo. Suponemos que c es un punto interior de S. Entonces existe una bola n-dimensional $B(c\,; r)$ contenida en S, y, si h es suficientemente pequeño, el segmento rectilíneo que une c con $c + hu$ está contenido en $B(c\,; r)$ y por lo tanto en S. Entonces la *derivada direccional* de f en el punto c y en la dirección u, designada por medio del símbolo $f'(c\,; u)$, se define por la ecuación $f'(c\,; u) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+hu)-f(c)}{h}$, siempre que el límite exista" (Apostol, 2006, p. 417).

Menos conocida es la definición de derivada en un punto que presentó Carathéodory en su libro *Theory of Functions of a Complex Variable*: "Sea f una función real definida en un intervalo abierto U, se dice que f es diferenciable en un punto $a \in U$ si existe una función $\emptyset$ que es continua en $x = a$ y que satisface la relación $f(x) - f(a) = \emptyset(x)(x - a)$ para toda $x \in U$. De esta formulación se tienen dos consecuencias inmediatas: 1) Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a; y 2) Si f es diferenciable en a, existe al menos una función $\emptyset$ que satisface la definición; además, si $f'(a)$ existe, $f'(a) = \emptyset(a)$" (Kuhn, 1991, p.41). Aunque Carathéodory presenta su definición dentro del marco de la teoría de funciones de variable compleja, Kuhn (1991) muestra que esta definición aplicada a funciones de variable real, facilita en gran parte el manejo demostrativo de algunos teoremas del cálculo diferencial tales como la regla de la cadena y el teorema de la función inversa. Posteriormente, Acosta y Delgado (1994) extendieron la definición de Carathéodory a funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ como sigue: "Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable en a si existe una función $\emptyset: \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{m\times n}$ que es continua en a y que satisface la relación $f(x) - f(a) = \emptyset(x)(x - a)$, donde la función $\emptyset$ es la función pendiente de f en a" (p. 333).

En el marco de los espacios normados, específicamente para los espacios de Banach, tiene lugar otra definición de la derivada conocida como *derivada de Fréchet* o *diferencial total*. Inicialmente, Fréchet dio la siguiente definición: "Sean X e Y espacios lineales normados. Se dice que una aplicación $F: U \to Y$, donde U es un subconjunto abierto de X, es diferenciable en $x_0 \in U$, si existe un operador lineal continuo $L(x_0): X \to Y$ tal que la siguiente representación se da para cada $h \in X$ con $x_0 + h \in U$: $F(x_0 + h) - F(x_0) = L(x_0)h + R(x_0, h)$, donde $\lim_{h\to 0} \frac{\|R(x_0; h)\|}{\|h\|} = 0$ " (Pinzón y Paredes, 1999, p. 72). Posteriormente, Fréchet proporcionó una definición más precisa: "Sean

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es diferenciable en a si existe una transformación lineal $\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\lim_{x \to a} \frac{\|f(x)-f(a)-\lambda(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$" (Acosta y Delgado, 1994, p. 333).

Otra definición importante de la derivada es la conocida con el nombre de *derivada de Gâteaux*, que fue introducida por Gâteaux en 1913 para funcionales. La *derivada de Gâteaux* es una generalización de la noción de *derivada direccional* y de la noción de *primera variación* manejada en el cálculo variacional: "Sea X y Y espacios normados reales, y U un subconjunto abierto de X. Sean $x_0 \in U$ y $h \in X$ un elemento fijo diferente de cero. Dado que U es abierto, existe un intervalo $I = (-\tau, \tau)$, para algún $\tau > 0$, tal que si $t \in I$ entonces $(x_0 + th) \in U$. Si la aplicación $\Phi(t) = F(x_0 + th)$ tiene una derivada usual en $t = 0$, entonces $\Phi'(0)$ es llamada la variación de Gâteaux de F en x_0 con incremento h, y es denotada por $VF(x_0; h) = \frac{d}{dt}F(x_0 + th) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\{F(x_0 + th) - F(x_0)\}$" (Pinzón y Paredes, 1999, p. 71). Para funciones de varias variables la derivada de Gâteaux comúnmente nombrada *G-diferencial,* se conoce como derivada direccional.

Acosta y Delgado (1994) lograron establecer la equivalencia entre las definiciones de derivada dadas por Fréchet y Carathéodory: "Toda función diferenciable en el sentido de Fréchet es diferenciable en el sentido de Carathéodory y viceversa" (p. 333). Además, es posible demostrar que una función diferenciable según Fréchet es diferenciable según Gâteaux, pero la afirmación inversa es falsa; y debido a la equivalencia entre la derivada de Carathéodory y la de Fréchet, toda función diferenciable según Carathéodory también es diferenciable según Gâteaux (Pinzón y Paredes, 1999).

10. SIGNIFICADO HOLÍSTICO DE LA DERIVADA

Nuestro esfuerzo por la reconstrucción de un significado global para la derivada, ha resultado en la identificación de nueve sistemas de prácticas los cuales llevan, cada uno a su vez, asociados una configuración epistémica y constituyen un significado parcial de la derivada. A estas nueve configuraciones, respectivamente asociadas a los sistemas de prácticas, las hemos denominado: 1) *la tangente en la matemática griega (CE_1)*; 2) *sobre la variación en la edad media (CE_2)*; 3) *métodos algebraicos para hallar tangentes (CE_3)*; 4) *concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes (CE_4)*; 5) *las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos (CE_5)*; 6) *métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes (CE_6)*; 7) *el cálculo de fluxiones (CE_7)*; 8) *el cálculo de diferencias (CE_8)* y, 9) *la derivada como límite (CE_9).*

Es importante aclarar, que dentro del EOS una de las maneras de entender el significado de un concepto es, desde la perspectiva pragmatista, en términos de los sistemas de prácticas en que dicho objeto interviene (significado sistémico). Tales sistemas de prácticas están ligados a tipos de situaciones-problemas, de donde se deriva la posibilidad de distinguir distintos significados cuando se abordan problemas diferentes.

De esta forma, el objeto derivada, a lo largo de su evolución histórica, ha adoptado nueve significados distintos (significados parciales), es decir, el objeto derivada se ha activado implícita o explícitamente en nueve subsistemas de prácticas cada uno de los cuales tiene una configuración asociada de objetos y procesos. Estas nueve configuraciones (descritas en los apartados anteriores), a pesar de ser distintas entre sí, algunas de ellas tienen similitudes, de manera que se pueden relacionar como se ilustra en el esquema de la figura 12.

En la base del esquema en la figura 3.1, se han considerado cronológicamente seis *sistemas de prácticas/significados parciales* que pueden verse como "primarios" en cuanto que, las configuraciones activadas en dichos sistemas (CE_1, CE_2, CE_3, CE_4, CE_5 y CE_6), tienen un carácter extensivo, es decir, se resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas, con métodos y procedimientos particulares, etc. Sin embargo, dentro de estas seis configuraciones "primarias", hay algunas que son similares entre sí. Tal es el caso de las configuraciones CE_1, CE_3 y CE_6 que, al activar significados parciales similares para la derivada, pueden considerarse similares, razón por la que se pueden agrupar dando origen a un sistema de prácticas más "genérico" en el cual se abordan situaciones-problemas sobre tangentes en general. A este sistema de prácticas con su configuración asociada, la hemos denominado "tangentes". Análogamente, las configuraciones CE_2 y CE_4 se pueden agrupar dando paso a un nuevo sistema más general, con su respectiva configuración asociada, la cual denominamos "variación, velocidades" ya que se abordan problemas de este tipo. La configuración CE_5, también la hemos denominado "máximos y mínimos".

Posteriormente Newton, apoyándose en la configuración subyacente al sistema de prácticas genérico "variación, velocidades", desarrolla un nuevo *sistema de prácticas* de la derivada como fluxión, en el cual se activa una configuración más general (CE_7), de tal forma que los nuevos procedimientos, lenguajes, conceptos, definiciones, etc., de dicha configuración, son aplicados luego para resolver situaciones-problemas característicos de los sistemas de prácticas "tangentes", "máximos y mínimos" y "variación, velocidades", aspecto que se señala con las flechas punteadas de color rojo que van de CE_7 a los tres sistemas de prácticas genéricos. Del mismo modo Leibniz, apoyándose en la configuración asociada al sistema de prácticas "tangentes", desarrolla un nuevo *sistema de prácticas* de la derivada como cociente de diferenciales en el que se activa una configuración más general (CE_8), la cual posteriormente aplica para la resolución de situaciones-problemas característicos de los sistemas de prácticas puestos en juego en las situaciones de cálculo de tangentes y de máximos y mínimos.

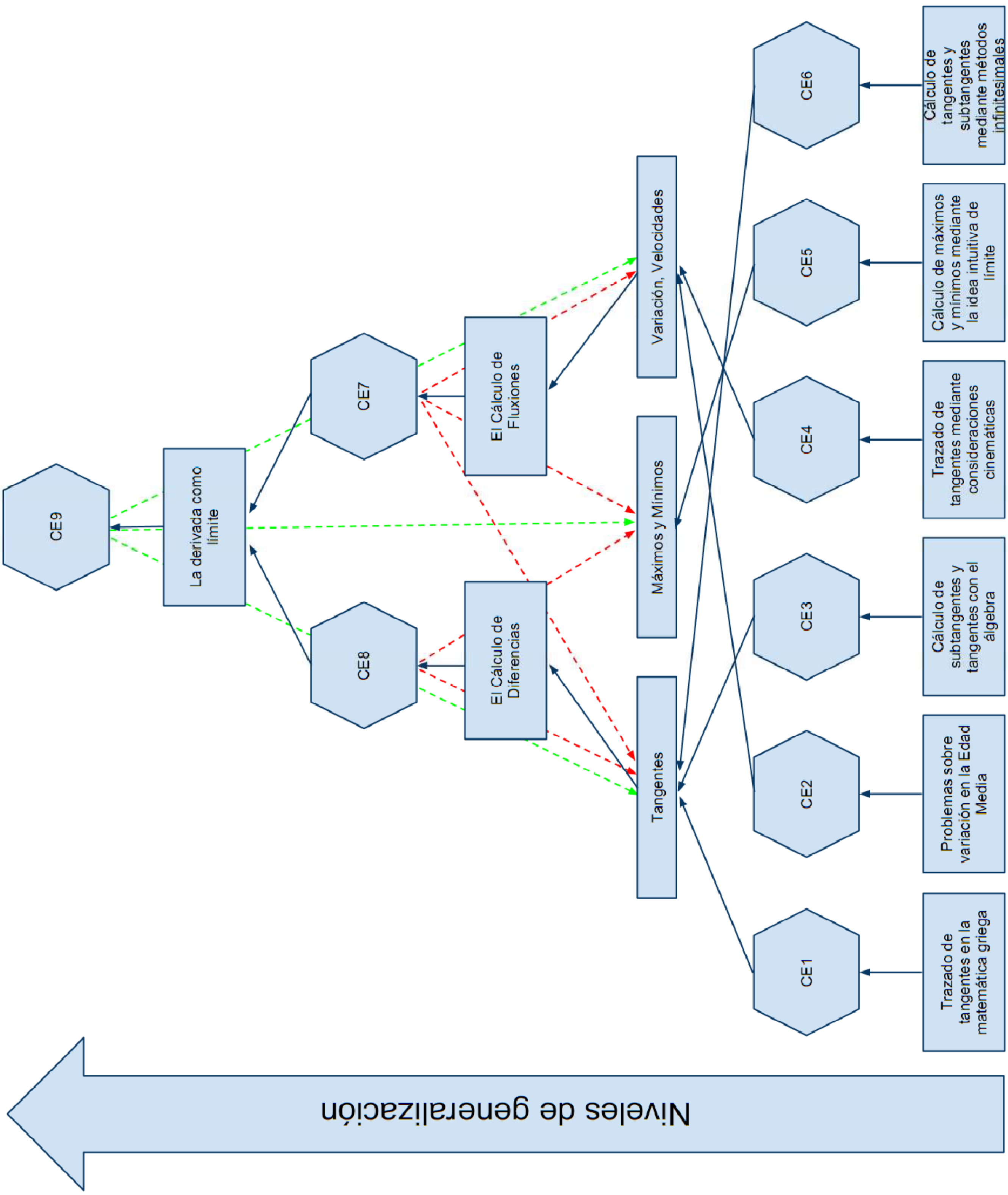
Finalmente, los matemáticos que sucedieron a Newton y Leibniz, tomando como base sus desarrollos (CE_7 y CE_8) generaron un nuevo *sistema de prácticas* de carácter formal de la derivada como límite del cociente de incrementos, el cual lleva asociado una configuración (CE_9) que constituye la formalización del objeto derivada. Las flechas punteadas de color verde que salen de CE_9 indican que los elementos de dicha configuración son aplicados para la solución de problemas propios de los sistemas de prácticas "tangentes", "variación, velocidades" y "máximos y mínimos".

De esta forma, vemos como el objeto derivada comienza a emerger de los *sistemas de prácticas* "primarios" los cuales básicamente pueden agruparse en tres sistemas de prácticas genéricos en los cuales se abordan problemáticas sobre: a) tangentes; b) máximos y mínimos; y c) velocidades. Las configuraciones asociadas a dichos sistemas de prácticas primarios, dan paso a nuevos sistemas de prácticas en los cuales se activan CE_7 y CE_8, mismas que alcanzan justificaciones formales en CE_9. El nivel de generalización de cada una de las configuraciones, también ha sido ilustrado en el esquema de la figura 12.

La consideración conjunta de los elementos, y sus relaciones, ilustrados en el esquema de la figura 3.1, es lo que conforma, primordialmente, el *significado epistémico global de la derivada*.

Las relaciones existentes entre las distintas configuraciones epistémicas identificadas en la figura 12, podrían seguir extendiéndose, por ejemplo la configuración CE_7 que tiene vinculado el significado de la derivada como fluxión, junto con algunas ideas de provenientes de las configuraciones CE_8 y CE_9, dan lugar a un nuevo sistema de prácticas del cual emerge una nueva rama de las matemáticas: "El cálculo de variaciones". Sin embargo, esto no es objeto de estudio de nuestra investigación, ya que sólo pretendíamos reconstruir el significado global para la derivada de una variable real que sirva de referencia para sistematizar los conocimientos de los profesores de educación secundaria/bachillerato sobre la derivada, en lo que respecta a la faceta o dimensión epistémica. No obstante, el *significado* *global* de la derivada quedaría incompleto si no consideráramos las distintas generalizaciones que se han realizado sobre dicho objeto matemático (ver apartado 9). Estas generalizaciones de la derivada constituyen el *conocimiento matemático avanzado* sobre el objeto derivada; lo que en términos del modelo de Ball y colaboradores sería el conocimiento en el horizonte matemático.

Figura 12. Significado epistémico global de la derivada



11. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

La gran diversidad de investigaciones en el campo de didáctica de la matemática, referentes a los aspectos cognitivos e instruccionales sobre la derivada, plantea un reto a los formadores de profesores que sintetizamos con la pregunta: ¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado de secundaria/ bachillerato con relación a la enseñanza de la noción de derivada? En este trabajo, nos propusimos avanzar en la consecución de la respuesta a la pregunta anterior mediante la ***reconstrucción de un significado epistémico global de la derivada*** que sirva de referencia para determinar aspectos esenciales del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

Nuestra propuesta de reconstrucción del significado global de la derivada resulta especialmente importante puesto que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, requieren un estudio en profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Tal estudio debe aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen. Es decir, es a partir del significado holístico de un objeto, que se determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, implementados y evaluados, en una práctica educativa específica.

De esta manera, es indudable que el *significado global de la derivada* debe ser parte del "background" que el profesor de bachillerato debe tener para realizar procesos eficaces de enseñanza-aprendizaje sobre esta noción. Aún más, es pieza clave del conocimiento didáctico-matemático del profesor, puesto que constituye la faceta epistémica del mismo.

Finalmente, los resultados aportados con este estudio servirán de punto de partida para guiar la caracterización del conocimiento didáctico-matemático del profesor de bachillerato sobre el objeto derivada, y posteriormente, centrar investigaciones relativas a la formación de profesores, al diseño de instrumentos de evaluación y desarrollo de conocimientos didácticos-matemáticos sobre dicha noción. Nuestro planteamiento es que la determinación del conocimiento didáctico-matemático de los profesores, para la enseñanza de la derivada, nos dará pautas para la construcción de instrumentos de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores en formación inicial y, posteriormente, diseñar, implementar y evaluar situaciones didácticas y procesos de estudio que promuevan la reflexión de los futuros profesores acerca de sus propias concepciones sobre las matemáticas, su didáctica y la evolución de las mismas hacia una visión sociocultural y constructivista.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores, SEJ2007-60110/EDUC (Universidad de Granada), y EDU 2009-08120/EDUC (Universidad de Barcelona).

REFERENCIAS

Acosta, E., y Delgado, C. (1994). Fréchet vs Carathéodory. *The American Mathematical Monthly, 101(4),* 332-338.

Andersen, K. (1984). Las técnicas del cálculo, 1630-1660. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* [From the calculus to set theory, 1630-1910. An introductory history] (M. Martínez Trans.). (pp. 22-68). Madrid, España: Alianza Editorial.

Apostol, T. M. (2006). *Análisis matemático* [Mathematical Analysis] (J. Pla Trans.). (Segunda ed.). Barcelona, España: Editorial Reverté.

Artigue, M., Batanero, C., y Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. Lester K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of*

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Bos, H. J. M. (1984). Newton, Leibniz y la tradición leibniziana. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica* [From the calculus to set theory, 1630-1910. An introductory history] (M. Martínez Trans.). (pp. 69-124). Madrid: Alianza Universidad.

Boyer, C. B. (1999). *Historia de la matemática* [A history of mathematics] (M. Martínez Trans.). Madrid: Alianza Editorial.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Australia: Thompson.

Collette, J. (1993). *Historia de las matemáticas II* (3ª ed. en castellano). Madrid: Siglo XXI.

Durán, A. (1996). *Historia con personajes de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza Editorial.

Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición por límites. *Unión, Revista Iberoamericana De Educación Matemática, 18*, 15-28.

García, L., Azcárate, C., y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 85-116.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Sevilla, España.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

González, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid: Alianza Editorial.

González, P. (2008). *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial*. Madrid: Nivola.

Grabiner, J. (1981). *The origins of cauchy's rigorous calculus*. Cambridge, Massachusetts and London, England: The MIT Press.

Grabiner, J. (1983). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine*, *56*(4), 195-206.

Grabiner, J. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly, 90*(3), 185-194.

Grattan-Guinness, I. (1984). La aparición del análisis matemático y los progresos en su fundamentación desde 1780 a 1800. En I. Grattan-Guinness (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910. Una introducción histórica* [From the calculus to set theory, 1630 - 1910. An introductory history] (M. Martínez Trans.). (pp. 125-193). Madrid: Alianza Editorial.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schlling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

Ibarra, E., y Gómez, J. (2005). Estudio histórico - epistémico de la derivada. *Primer Congreso Internacional Sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas,* Universidad de Jaén. 357-385.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 137-174.

Kuhn, S. (1991). The derivative a la Carathéodory. *The American Mathematical Monthly*, *98(1)*, 40-44.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: Evolución, estado actual y retos futuros. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* Universidad de Córdoba, España. 81-96.

Pinzón, S., y Paredes, M. (1999). La derivada de Carathéodory en $\mathbb{R}^2$. *Revista INTEGRACIÓN, 17(2)*, 65-98.

Sánchez, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Vera, F. (1970). *Cientificos griegos, 1, pitagoras, hipocrates, democrito, platon, aristoteles, teofrasto, eudemo de rodas, euclides, aristarco*. Madrid: Aguilar.

Vera, F. (1970). *Cientificos griegos, 2, arquimedes, apolonio de pergamo, eratostenes, nicandr*. Madrid: Aguilar.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1), 77 - 120.