

## DESPLAZAMIENTO AL ROJO COSMOLÓGICO EN EL MODELO DE SEGAL

C. Fernández, I. Sánchez y E. Aguirre,  
Departamento de Geometría y Topología  
Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN. Se desarrolla aquí un sistema general para el análisis del desplazamiento al rojo en espacio-tiempos conformes. En particular se aplica al modelo cosmológico de Irving E. Segal. Se prueba que, contrariamente a la afirmación de Segal, no aparece desplazamiento al rojo cosmológico en su modelo.

### INTRODUCCION.

En 1976, tras varios artículos previos, I.E. Segal publicó un libro donde propuso un modelo cosmológico, caracterizado esencialmente por ser un modelo conforme y, en cierto sentido, no expansivo aunque en cambio afirma predecir un desplazamiento al rojo cosmológico dependiente cuadráticamente de la distancia al observador.

La extensa evidencia experimental en favor de modelos cosmológicos (métricos) expansivos y la complejidad matemática del modelo de Segal han sido probablemente las razones por las cuales hasta ahora dicho modelo no ha recibido mucha atención de los cosmólogos. El interés del modelo estaría en el hecho de que predice un desplazamiento al rojo cosmológico debido a una expansión que es solamente aparente u observacional. El presente trabajo está dedicado a probar que bajo este modelo no se predeciría tal hecho ya que la interpretación dada del desplazamiento al rojo no es la correcta.

En este trabajo toda variedad será  $C^\infty$ , Hausdorff y paracompacta. Cuando el mismo índice aparezca dos veces en un mismo término, arriba y abajo, entenderemos un sumatorio sobre el conjunto de todos los valores posibles de ese índice:  $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  para  $a, b, c, \dots$ ,  $\{0, 1, 2, 3\}$  para  $\mu, \nu, \dots$ , y  $\{1, 2, 3\}$  para  $i, j, k, \dots$ .

## 1. ESPACIO-TIEMPOS CONFORMES

### Definición 1.

(a) Sea  $L$  un espacio vectorial real de dimensión finita. Una estructura lineal conforme sobre  $L$  es una clase de equivalencia  $C$  de formas bilineales simétricas no degeneradas sobre  $L$ , mediante la relación de equivalencia:  $b \sim b'$  si  $b' = ab$  para algún  $a$  (real)  $> 0$  (si bien en la definición dada por Segal ([1], pág. 37) se exige solamente que  $a \neq 0$ , para los casos que nos interesan no se pierde generalidad tomando  $a > 0$ ). Escribiremos  $[b] = [b']$ . Llamaremos al par  $(L, C)$  un espacio vectorial conforme. Si  $b \in C$  diremos que  $b$  induce la estructura conforme  $C$  y que  $b$  y  $C$  son compatibles.

(b) Sea  $M$  una variedad. Una estructura conforme  $\mathcal{C}$  sobre  $M$  es una asignación, para cada punto  $p \in M$ , de una estructura lineal conforme  $\mathcal{C}_p$  sobre  $T_p M$  con la condición de diferenciabilidad siguiente:

$\forall p \in M, \exists$  entorno  $U$  de  $p$  y una estructura (semi)riemanniana ("(pseudo)métrica")  $g$ , definida en  $U$ , tales que  $[g_q] = \mathcal{C}_q$ ,  
 $\forall q \in U$ .

Diremos que  $(M, \mathcal{C})$  es una variedad conforme y que  $g$  y  $\mathcal{C}$  son compatibles; escribiremos  $g \in \mathcal{C}/U$ .

(c) En el caso en que  $M$  sea conexa y de dimensión 4, y de que las métricas  $g$  que intervienen en la definición del apartado (b) sean lorentzianas (esto es, de signatura  $(- + + +)$ , se dirá que  $(M, \mathcal{C})$  es un espacio-tiempo conforme (ETC).

(d) Sean  $(M, \mathcal{C})$  un ETC,  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$  y  $g$  una métrica lorentziana compatible con  $\mathcal{C}$  y cuyo dominio contenga a  $p$ . Diremos que  $v$  es

- .de tipo tiempo (o temporal) si  $g(v, v) < 0$
- .de tipo luz si  $v \neq 0$  y  $g(v, v) = 0$ .
- .de tipo espacio (o espacial) si  $v = 0$  ó  $g(v, v) > 0$ .

Estas definiciones (obviamente independientes de la  $g$  compatible con  $\mathcal{C}$  elegida) nos permiten clasificar los vectores de  $TM$  en tres conjuntos disjuntos: el de vectores temporales  $\mathcal{T}$ , el de vectores luz  $\mathcal{L}$  y el de vectores espaciales  $\mathcal{E}$ . Se verifica  $TM = \mathcal{T} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{E}$ .

Se usarán las definiciones correspondientes para curvas, campos de vectores, y subvariedades de  $M$ .

El conjunto  $\mathcal{L}_p := \mathcal{L} \cap T_p M$  se llama el cono de luz en  $p$ . Tanto  $\mathcal{L}_p$  como  $\mathcal{T}_p := \mathcal{T} \cap T_p M$  tienen dos componentes conexas ([2], ejercicio 1.1.9).

La existencia de una estructura conforme  $\mathcal{C}$  sobre una variedad  $M$  restringe la topología de la variedad. En particular, se verifica el siguiente:

Lema 1.

Sea  $M$  una variedad de dimensión  $\geq 2$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (i)  $M$  admite una estructura conforme  $\mathcal{C}$  inducida por estructuras semi-riemannianas locales con índice 1.
- (ii)  $M$  admite una estructura semi-riemanniana (global) con índice 1.
- (iii)  $M$  admite un campo de direcciones (líneas).
- (iv)  $M$  admite un campo de vectores que no se anula en ningún punto.

Demostración:

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Esto es una consecuencia de un argumento estándar que usa particiones de la unidad y las estructuras semi-riemannianas locales que induce  $\mathcal{C}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) es trivial.

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii). Véase ([3], p.39-40); en esta prueba constructiva el campo de direcciones obtenido (resp. asumido) llega a ser de tipo tiempo para la estructura semi-riemanniana asumida (resp. obtenida).

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iv). Véase ([4], p.149); la prueba de  $\Rightarrow$  no es constructiva y el campo de vectores admisible no necesita ser de tipo tiempo para la estructura semi-riemanniana asumida.

Es bien conocido también que en un ETC  $(M, \mathcal{C})$  el conjunto  $\mathcal{C} \subset TM$  es una subvariedad abierta con una o dos componentes conexas ([2], Pr. 1.2.1.).

Definición 2.

(a) Un ETC  $(M, \mathcal{C})$  se dice orientable-tiempo si  $\mathcal{C}$  tiene dos componentes conexas. Si designamos una de ellas como el futuro  $\mathcal{C}^+$  (y la otra como el pasado  $\mathcal{C}^-$ ), obtenemos una orientación temporal para el ETC y éste se dirá orientado-tiempo.

(b) Sea  $(M, \mathcal{C})$  un ETC orientado-tiempo. Un vector temporal  $v \in \mathcal{E}_p$  (con  $p \in M$ ) se dirá temporal-futuro (resp. temporal-pasado) si  $v \in \mathcal{E}_p^+ := \mathcal{E}^+ \cap T_p M$  (resp.  $v \in \mathcal{E}_p^- := \mathcal{E}^- \cap T_p M$ ).

Dado  $v \in \mathcal{E}_p^+$ , cualquier vector  $w$  temporal-futuro (resp. temporal-pasado) en  $p$  verifica  $g(v, w) < 0$  (resp.  $g(v, w) > 0$ ), con  $g$  compatible con  $\mathcal{C}$  ; por otra parte, cualquier vector  $u$  de tipo luz en  $p$  ve-

rifica  $g(v, u) < 0$  ó bien  $g(v, u) > 0$ . Un vector luz  $u \in \mathcal{L}_p$  se dirá luz-futuro (resp. luz-pasado) si se verifica  $g(v, u) < 0$  (resp.

$g(v, u) > 0$ ),  $\forall v \in \mathcal{E}_p^+$  ([2], 1.1.9). El conjunto  $\mathcal{L}_p^+$  de vectores luz-futuro en  $p$  verifica  $\overline{\mathcal{E}_p^+} = \mathcal{L}_p^+ \cup \{0\} \cup \mathcal{E}_p^+$ , y análogamente para el conjunto  $\mathcal{L}_p^-$  de vectores luz-pasado.

Los anteriores conceptos se aplican en la forma obvia a campos de vectores, a curvas, etc.

### Lema 2.

(i) Un ETC es orientable-tiempo sii admite un campo de vectores  $C^\infty$ , global y temporal. Elegida una orientación temporal dicho campo es necesariamente futuro en todo punto o pasado en todo punto.

(ii) Todo ETC simplemente conexo es orientable-tiempo.

Demostración: Véase [5], pág. 17-19.

La orientabilidad temporal no es la única condición que resulta razonable imponer a un ETC. Usualmente se asume también la condición de causalidad, que implica la inexistencia de curvas futuras no espaciales cerradas. Otras condiciones más restrictivas (como la causalidad fuerte, la causalidad estable y la hiperbolicidad global), que satisfacen los modelos cosmológicos clásicos y el modelo de Segal, no las discutiremos aquí.

Definición 3.

Sea  $(M, \mathcal{C})$  un ETC orientado-tiempo. El grupo causal de  $(M, \mathcal{C})$  se define como el grupo de todos los difeomorfismos conformes de  $(M, \mathcal{C})$  sobre sí mismo que preservan la orientación tiempo.

Lema 3.

Sea  $(M, \mathcal{C})$  un ETC orientado-tiempo. Entonces, su grupo causal es un grupo de Lie de dimensión igual o menor que 15.

Demostración:

Véase [6], ejemplo I.2.6 y el teorema I.5.1.

Es claro que si dos ETC orientados-tiempo son causalmente difeomórficos, entonces sus grupos causales son isomorfos como grupos de Lie.

Como con los campos de Killing en el caso métrico, tenemos la siguiente

Definición 4.

Sea  $(M, \mathcal{C})$  un ETC orientado-tiempo. Un campo de vectores  $X$  sobre  $M$  es causal si el grupo a un parámetro local de difeomorfismos locales generado por  $X$  es causal, esto es, si y solo si se verifica lo siguiente:

$\forall g \in \mathcal{C}$  con  $\text{Dom } X \cap \text{Dom } g \neq \emptyset$ ,  $L_X g = \sigma g$  ( $\sigma$  siendo una cierta función  $C^\infty$  definida sobre la intersección de los dominios de  $X$  y  $g$ ).

El número maximal de campos causales  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes sobre cualquier subconjunto abierto de  $M$  será igual, o menor, a 15 (ver Lema 3).

Por último un resultado ([1], p.26 y 39) acerca de la posibilidad de obtener ETC orientados-tiempo con idéntica estructura local pero diferente topología global:

Lema 4.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC. Si  $\tilde{\phi} : \tilde{M} \rightarrow M$  es un recubrimiento de  $M$ , entonces  $(\tilde{M}, \tilde{\phi}^* \mathcal{E})$  es un ETC, definiendo  $\tilde{\phi}^* \mathcal{E} = [\tilde{\phi}^* g]$  ( $g$  siendo cualquier métrica global sobre  $M$  compatible con  $\mathcal{E}$ , ver Lema 1). Si  $(M, \mathcal{E})$  es orientado-tiempo, lo es también  $(\tilde{M}, \tilde{\phi}^* \mathcal{E})$ .

## 2. OBSERVADORES Y SISTEMAS DE REFERENCIA

La representación matemática más simple de un observador es la dada por una curva temporal futura, cuya trayectoria representa toda su historia y cuyo parámetro representa la noción de tiempo que posee.

### Definición 5.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo. Un observador en  $M$  es una curva temporal futura  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ , cuya parametrización define el tiempo propio del observador.

Un observador sólo puede, en rigor, registrar sucesos que tienen lugar sobre su trayectoria espacio-temporal; para obtener información de otros sucesos precisa de la cooperación de otros observadores que, junto con él, proporcionen un sistema de referencia.

### Definición 6.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo. Un sistema de referencia (SR) en  $M$  es un campo de vectores  $Q$  temporal futuro definido en un abierto  $U \subset M$ . Cada curva integral de  $Q$  se dirá un observador de  $Q$ . El SR se dirá global si  $U=M$ ; en otro caso se dirá local.

Un corolario del Lema 2 es el siguiente:

### Lema 5.

Un ETC orientado-tiempo admite un SR global.

Para que un sistema de referencia  $Q$  sea operativo debe poder ofrecer una noción de simultaneidad. Las siguientes definiciones afinan el concepto de SR.



Definición 7.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo. Un SR  $Q$  con dominio  $U \subset M$  se dice sincronizable si, dada  $g \in \mathcal{E}|_U$ , podemos encontrar funciones  $h, t$  sobre  $U$ , con  $h > 0$  y tales que se verifique  $g(Q, \cdot) = -h dt$ . Llamaremos a  $t$  función tiempo para  $Q$ .

Nótese que si se cumple la condición de sincronizabilidad para una  $g \in \mathcal{E}|_U$ , se cumplirá también para cualquier otra  $g' \in \mathcal{E}|_U$ . En efecto, puesto que  $g' = fg$ , con  $f$  una función positiva, se tendrá  $g'(Q, \cdot) = -h' dt$ , con  $h' = fh > 0$ .

Definición 8.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo. Un SR en  $M$  sincronizable,  $Q$ , se dice sincronizable a tiempo propio si existe alguna  $t$  función tiempo para  $Q$  tal que  $Q(t) = 1$ . Llamaremos a  $t$  (que ahora es única salvo una constante aditiva) función tiempo propio para  $Q$ .

Lema 6.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SR en  $M$  sincronizable a tiempo propio, con  $t$  una función tiempo propio para  $Q$ . Entonces  $t$  coincide sobre cada observador de  $Q$  con el tiempo propio de dicho observador (salvo una constante aditiva).

Demostración:

Sean  $\gamma$  un observador de  $Q$  y  $\tau$  su tiempo propio asociado. Entonces se verifica

$$l=Q(t) \cdot \gamma = (Q \cdot \gamma)(t) = \gamma_*(t) = \frac{d(t \cdot \gamma)}{d\tau} \Rightarrow t \cdot \gamma = \tau + a, a \in \mathbb{R}.$$

Vamos a ver ahora cómo un SR arbitrario "metriza" unívocamente la región del ETC en la que está definido, de forma tal que el tiempo propio de cada uno de sus observadores coincida con la longitud de arco medida a lo largo de las correspondientes trayectorias.

Lema 7.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SR con dominio  $U \subset M$ . Existe entonces una única métrica lorentziana  $g^Q \in \mathcal{E}|_U$  sobre  $U$  tal que  $g^Q(Q, Q) = -1$ .

La demostración es trivial, al igual que la del siguiente lema

Lema 8.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SR con dominio  $U \subset M$ . Entonces  $Q$  es sincronizable a tiempo propio si existe una función  $t$  sobre  $U$  tal que  $g^Q(Q, \cdot) = -dt$ .

Sea  $Q$  un SR, denotaremos por  $\nabla^Q$  a la conexión de Levi-Civita correspondiente a  $g^Q$ . Nótese que la condición  $g^Q(Q, Q) = \text{cte.}$  es necesaria pero no suficiente para que  $Q$  sea un campo geodésico de  $\nabla^Q$ , sí lo es en el caso de  $Q$  sincronizable a tiempo propio:

Lema 9.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SR en  $M$  sincronizable a tiempo propio, entonces  $\nabla_Q^Q Q = 0$ .

La demostración es una consecuencia directa del hecho de satisfacer  $\nabla^Q$  la identidad de Ricci y de tener torsión cero.

Ciertos sistemas de referencia factorizan su dominio de definición en parte temporal y parte espacial, respetando la estructura conforme, como precisamos en la siguiente

Definición 9.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo. Un SR sincronizable a tiempo propio  $Q$  con dominio  $U \subset M$  se dice factorizador (SRF) de  $U$  si existe un difeomorfismo  $\bar{\phi}: T \times S \rightarrow U$ , con  $T$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ , y  $S$  una variedad diferenciable 3-dimensional y tal que

i) se verifica  $\bar{\phi}_* \partial_t = Q$ , siendo  $\partial_t$  el campo estándar sobre  $T$  considerado como campo de vectores sobre  $T \times S$ .

ii) existan estructuras riemannianas  $l$  y  $h$  sobre  $T$  y  $S$  respectivamente, que hacen de  $\bar{\phi}$  un difeomorfismo causal entre  $(T \times S, [-1 \oplus h])$  y  $(U, \mathcal{E}|_U)$ .

Definición 10.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo. Sea  $Q$  un SRF de  $U \subset M$  (como en la definición 9).

(a)  $Q$  es homogéneo temporal si se verifican cualquiera de las afirmaciones contenidas en el lema 10, b.

(b)  $Q$  es homogéneo espacial si  $(S, h)$  posee un grupo de isometrías transitivo de tres dimensiones.

(c)  $Q$  es isótropo espacial alrededor de un punto  $s \in S$  si  $(S, h)$  posee un grupo de isometrías de tres dimensiones que dejan fijo a  $s$ .

Resaltemos que la isotropía espacial alrededor de todo punto implica la homogeneidad espacial y, viceversa, la homogeneidad espacial y la isotropía alrededor de un punto implica la isotropía alrededor de cualquier otro punto ([7]; 13.1).

Se puede probar fácilmente que las isometrías contempladas en la definición anterior se corresponden de manera natural a isometrías en

$(U, g^Q)$ . Así si un SRF satisface la def. 10, b y c, entonces la variedad métrica  $(U, g^Q)$  tendrá un grupo de isometrías de, al menos, 6 dimensiones. Si el SRF es además homogéneo temporal el grupo tendrá una dimensión más. Nótese que la dimensión máxima del grupo de isometrías es diez ([7]).

En el lema 9 se probó que si un SR es sincronizable a tiempo propio, es geodésico para la conexión métrica asociada; ahora probaremos que si el SR es además factorizador y homogéneo temporal entonces es paralelo para dicha conexión:

Lema 11.

Sea  $(M, \theta)$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SRF con dominio  $U \subset M$ , homogéneo temporal. Entonces  $\nabla_X^Q Q = 0$ , para todo campo  $X$  definido sobre  $U$ .

Demostración.

Por ser  $Q$  un SRF se deduce directamente del lema 10, a, que alrededor de cada punto de  $U$  existen coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  de tal forma que

$$g^Q = -dx^0 \otimes dx^0 + f(x^0) h_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i \otimes dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ y } Q = \partial / \partial x^0.$$

En dichas coordenadas los coeficientes de la conexión métrica  $\nabla^Q$

son:

$$\Gamma_{00}^\alpha = \Gamma_{0\alpha}^0 = 0 \text{ con } \alpha = 0, 1, 2, 3$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} \delta_j^i \frac{\dot{f}}{f}$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} \dot{f} h_{ij}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{il} (h_{jl,k} + h_{kl,j} - h_{jk,l}) \text{ con } i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Sea  $X$  un campo sobre  $U$ , en coordenadas  $X = X^\alpha \partial / \partial x^\alpha$ .

$$\nabla_X^Q Q = X^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^0 \partial / \partial x^\alpha = X^i \Gamma_{i0}^0 \partial / \partial x^i = X^i \frac{\dot{f}}{2f} \delta_i^0 \partial / \partial x^i = \frac{\dot{f}}{2f} X^i \partial / \partial x^i,$$

por ser  $Q$  homogéneo temporal,  $\dot{f} = 0$  (lema 10, b, iii), luego  $\nabla_X^Q Q = 0$ .

Por último, tengamos en cuenta que un difeomorfismo causal transforma un SR en otro SR con idénticas propiedades de sincronizabilidad y simetría, como establece el siguiente lema cuya demostración es una mera cuestión de cálculo.

Lema 12.

Sean  $(M, \mathcal{C})$  y  $(M', \mathcal{C}')$  dos ETC orientados-tiempo, sea  $\Phi$  un difeomorfismo causal de  $M$  en  $M'$ , y sea  $Q$  un SR en  $M$ . Entonces  $\Phi_* Q$  es un SR en  $M'$  y cada una de las siguientes propiedades es cierta para  $\Phi_* Q$  si lo es para  $Q$ ,

- . ser sincronizable
- . ser sincronizable a tiempo propio
- . ser factorizador .
- . ser homogéneo temporal
- . ser homogéneo espacial
- . ser isótropo espacial alrededor de un punto.

Diremos que dos sistemas de referencia son conjugados si existe un difeomorfismo causal que transforma el uno en el otro.

La definición de SRF se ajusta a la noción de "observador métrico" dada por Segal ([1]) y contiene a su vez la de "sistema acompañante" (comoving frame) de los modelos cosmológicos clásicos. Las propiedades de los factorizadores se resumen en el siguiente

Lema 10.

Sea  $(M, \mathcal{C})$  un ETC orientado-tiempo y sea  $Q$  un SRF de  $U \subset M$ . Con las notaciones de la definición 9 se tiene

(a)  $\Phi^* g^Q = -dt^2 \oplus fh$ , con  $f$  una cierta función definida positiva

que depende exclusivamente del primer factor de  $T \times S$ . Por tanto,  $t \circ \bar{\Phi}^{-1}$  es una función tiempo propio para  $Q$ . (Notamos indistintamente a la carta identidad  $t$  y a la proyección canónica  $\pi_1: T \times S \rightarrow T$  compuesta con  $t$ ).

(b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$(i) \text{ las traslaciones en } T, \alpha: T \times S \longrightarrow T \times S \\ (t, s) \longmapsto (t+a, s) \quad (t, t+a \in T)$$

son causales en  $(T \times S, [-1 \oplus h])$ .

(ii) las traslaciones en  $T$  son isometrías de la métrica  $\bar{\Phi}^* g^Q$ .

(iii) la función  $f$  del apartado (a) es constante.

Demostración:

(a) Es claro que <sup>se</sup> verifica  $\bar{\Phi}^* g^Q = \Omega(-1 \oplus h) = \Omega \Psi(-dt^2 \oplus \frac{1}{\Psi} h)$ , con  $\Omega$  (resp.

$\Psi$ ) una función positiva sobre  $T \times S$  (resp. sobre  $T$ ). Ahora bien,

$$-1 = g^Q(Q, Q) = \bar{\Phi}^* g^Q(\partial_t, \partial_t) = -\Omega \Psi; \text{ por tanto } \bar{\Phi}^* g^Q = -dt^2 \oplus fh, \text{ con}$$

$$f \equiv 1/\Psi.$$

(b) Dado que  $L_{\partial_t}(\bar{\Phi}^* g^Q) = L_{\partial_t}(-dt^2 \oplus fh) = 0 \oplus (\partial_t f)h$ , se tendrá:

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) En efecto: si para todo  $g \in [-1 \oplus h]$  existe una función  $\sigma_g$  tal que  $L_{\partial_t} g = \sigma_g g$ , se verificará en particular para  $g \equiv \bar{\Phi}^* g^Q$ . Por lo dicho arriba  $\sigma_g$  sólo puede valer cero; entonces  $L_{\partial_t}(\bar{\Phi}^* g^Q) = 0$ .

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) En efecto  $L_{\partial_t}(\bar{\Phi}^* g^Q) = 0$  si  $f$  es constante sobre  $T$ .

Las definiciones que siguen clasifican los SRF atendiendo al número y tipo de isometrías.

### 3. DESPLAZAMIENTO AL ROJO EN UN ETC

Supongamos que, acompañando a cierto observador  $\gamma$ , hay un fragmento de materia en el que tiene lugar una transición atómica concreta y fija con emisión de luz, dispositivo al que en lo sucesivo llamaremos "fuente luminosa". En un cierto intervalo  $\Delta\tau$  de tiempo propio de  $\gamma$  se emiten  $n$  pulsos luminosos; la frecuencia de emisión, observada por  $\gamma$ , será, pues,  $\nu_E|_{\gamma} = \frac{n}{\Delta\tau}$ .

Supongamos ahora que los  $n$  pulsos son recibidos por otro observador  $\gamma'$  en un intervalo  $\Delta\tau'$  de su tiempo propio; la frecuencia de recepción, observada por  $\gamma'$ , sería, pues,  $\nu_R|_{\gamma'} = \frac{n}{\Delta\tau'}$ . La razón de ambas frecuencias será  $r := \frac{\nu_E|_{\gamma}}{\nu_R|_{\gamma'}} = \frac{\Delta\tau'}{\Delta\tau}$ . El hecho de que sea  $r > 1$  (respectivamente,  $r < 1$ ) está significando que la frecuencia de emisión, observada por  $\gamma$  con respecto a su tiempo propio, es mayor (resp. menor) que la frecuencia de recepción, observada por  $\gamma'$  con respecto a su tiempo propio. Dicho de otro modo, el observador  $\gamma'$  encuentra que la frecuencia de la luz se halla desplazada hacia valores más bajos (resp. más altos) que los hallados por  $\gamma$  en emisión. Puesto que la luz roja se caracteriza por ser de menor frecuencia que la azul se dice que  $\gamma'$  observa un "desplazamiento al rojo" (resp. al azul) con respecto a las observaciones hechas por  $\gamma$ .

La observación sistemática de valores  $r > 1$  para los espectros de la luz procedentes de la mayor parte de las galaxias y quásares se conoce con el nombre de desplazamiento al rojo cosmológico. La interpretación hoy día generalmente aceptada de dicho fenómeno está basada en los llamados modelos cosmológicos "expansivos" ([7], cp. 14-15).

Veremos como un ETC orientado-tiempo  $(M, \mathcal{E})$  proporciona un marco apropiado para analizar el desplazamiento al rojo cosmológico; para ello basta postular la relevancia cosmológica de un sistema de referencia factorizador global,  $Q$ . En concreto, cualquier galaxia de las llamadas "típicas" (esto es, cuyas trayectorias sean aproximadamente las de la materia en promedio; véase [7], cap. 14) seguirá una línea de universo representada por la curva integral  $\gamma$  del SRF postulado,  $Q$ , y nuestra galaxia (que se puede considerar "típica"; véase [7], pág. 110) estará representada por otra de tales curvas  $\gamma'$ . La parametrización de ambas curvas representará la que se obtendrá sobre las respectivas líneas de universo con sendos relojes físicamente idénticos acompañando a cada una de las galaxias. Está justificado, aunque no lo discutiremos aquí, suponer que las trayectorias seguidas por la luz en su propagación son precisamente aquellas que admiten parametrizaciones que las hacen geodésicas-luz de cualquier métrica lorentziana dada y compatible con la estructura conforme.

Definición 11.

Sea  $(M, \mathcal{E})$  un ETC orientado-tiempo. Sean los observadores  $\gamma: \mathcal{E} \rightarrow M$ ,  $\gamma': \mathcal{E}' \rightarrow M$  y sean  $[c, d] \subset \mathcal{E}$ ,  $[c', d'] \subset \mathcal{E}'$ .

Supongamos que existe una función  $C^\infty$  biyectiva  $f: [c, d] \rightarrow [c', d']$  tal que  $\forall \tau \in [c, d]$ ,  $\exists$  curva luz-futura entre  $\gamma\tau$  y  $\gamma'f\tau$  que es geodésica para alguna  $g \in \mathcal{G}$ . En tal caso definimos la razón de tiempos propios  $r$  relativa a  $\gamma$  y  $\gamma'$  en  $\gamma'f\tau_0$

(con  $\tau_0 \in (c, d)$ ) como  $r := \left. \frac{df}{d\tau} \right|_{\tau_0}$ .



Es sabido que, dadas  $g, g' \in \mathcal{C}$ , cualquier geodésica-luz de  $g$  puede reparametrizarse convenientemente para ser geodésica-luz de  $g'$  (véase [2], pág. 132), con lo que es obvio que la definición anterior no depende de la  $g$  elegida.

La razón de tiempos propios  $r$  representa la versión infinitesimal del cociente  $\frac{\Delta\tau'}{\Delta\tau}$ . El siguiente lema proporciona un método para calcular  $r$  vía un cociente de productos escalares.

Lema 13.

Sea  $(M, \mathcal{C})$  un ETC orientado-tiempo. Sean  $\gamma, \gamma', f, z_0$  como en la definición 11. Sea  $g \in \mathcal{C}$  y sea  $\lambda: [a, b] \rightarrow M$ , con  $\lambda a = \gamma z_0, \lambda b = \gamma' z_0$ , la geodésica luz-futura de  $g$  cuya existencia viene garantizada por la definición 11. Entonces se tiene:

$$r = \frac{g(\lambda_* a, \gamma_* z_0)}{g(\lambda_* b, \gamma'_* (f z_0))}$$

Demostración: Sea  $\lambda^z: [a, b] \rightarrow M$ , con  $\lambda^z a = \gamma z, \lambda^z b = \gamma' f z$ , la correspondiente geodésica luz-futura entre  $\gamma z$  y  $\gamma' f z$ ,  $\forall z \in [c, d]$  (con  $\lambda^z = \lambda$ ). Sean  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  y  $\sigma: \mathcal{D} \rightarrow M$  definida por  $\sigma(u, z) := \lambda^z u$ . Entonces se verifica:  $g(\sigma_* \partial/\partial x^1, \sigma_* \partial/\partial x^2) = 0$  (constante); se sigue (véase [2], § 5.0.3) que  $g(\sigma_* \partial/\partial x^1), \sigma_* \partial/\partial x^2$  es constante a lo largo de cada geodésica  $\lambda^z$  ( $x^1, x^2$ , coordenadas estándar en  $\mathbb{R}^2$ ).

Así, podemos escribir

$$g(\lambda_* a, \gamma_* z_0) = g(\lambda_* b, \gamma'_* (f z_0)) \left. \frac{df}{dz} \right|_{z_0},$$

de donde se deduce

$$r := \left. \frac{df}{dz} \right|_{z_0} = \frac{g(\lambda_* a, \gamma_* z_0)}{g(\lambda_* b, \gamma'_* (f z_0))}.$$

El resultado de  $r$  calculado a partir de  $g$  no se altera si en lugar de  $g$  se elige otra métrica  $g' \in \mathcal{C}$  (lo que resulta lógico, ya que  $r$  es independiente de  $g$ ); de hecho lo que sucede es que la contribución

del factor conforme  $\alpha$  (con  $g' = \alpha g$ ), sobre ambas curvas  $\gamma$  y  $\gamma'$ , se cancela exactamente con la contribución del factor que proviene de la reparametrización de la curva  $\lambda$  para mantener su carácter geodésico al cambiar  $g$  por  $g'$ .

Corolario. En las hipótesis del lema 13 se verifica

$$r = \frac{g(\lambda_{*a}, \gamma_{*z_0})}{g(\lambda_{*a}, \Pi_{b,a}^g \gamma'_*(fz_0))}$$

siendo  $\Pi_{b,a}^g$  el transporte paralelo definido por la conexión de Levi-Civita,  $\nabla^g$ , sobre la curva  $\lambda$  entre los puntos  $\lambda_b = \gamma'_*(fz_0)$  y  $\lambda_a = \gamma_{*z_0}$ .

Demostración:

Se sigue inmediatamente de que el transporte  $\Pi^g$  preserva los productos escalares definidos por  $g$  y de que  $\lambda$  es geodésica de  $\nabla^g$ .

El siguiente teorema afirma que los observadores de un sistema de referencia factorizador (no necesariamente global) temporalmente homogéneo no pueden apreciar desplazamiento al rojo.

Teorema 1.

Sea  $(M, \mathcal{L})$  un ETC orientado tiempo. Sea  $Q$  un SRF homogéneo temporal. Entonces <sup>para</sup> cualquier pareja de observadores de  $Q$ ,  $\gamma$  y  $\gamma'$  en las condiciones de la definición 11 la razón de tiempos propios es igual a 1.

Demostración:

En el corolario del lema 13 tomemos  $g := g^Q$ . Por ser  $Q$  un SRF homogéneo temporal, se verifica (lema 14)  $\nabla_V^Q Q = 0, \forall v \in TM$  y, puesto que  $\nabla^g = \nabla^Q$ , se tiene  $\Pi_{b,a}^g Q(\alpha b) = Q(\alpha a)$  sobre cualquier curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ . En particular, para  $\lambda$  se verifica que  $\Pi_{b,a}^g (\gamma'_*(fz_0)) = \Pi_{b,a}^g (Q(\lambda b)) = Q(\lambda a) = \gamma_{*z_0}$  con lo cual  $r=1$ .

#### 4. EL MODELO DE SEGAL

El modelo de Segal ([1], cap. III, 1, 2) consiste básicamente en una triplete  $(M, \mathcal{E}, Q)$ ,  $(M, \mathcal{E})$  siendo un ETC orientado-tiempo verificando la condición de causalidad, y  $Q$  siendo un cierto SRF completo global sobre  $(M, \mathcal{E})$ , homogéneo, isótropo espacial y homogéneo temporal.

$Q$  representaría las curvas integrales de las trayectorias de la materia en promedio en el espacio-tiempo. Nótese que la exigencia de homogeneidad temporal no la satisfacen en los modelos cosmológicos clásicos el sistema de referencia "acompañante" (comoving), pues el espacio-tiempo (métrico) sería estático y no podría ofrecer una explicación del desplazamiento al rojo cosmológico observado.

El ETC  $(R \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  con  $h$  la métrica estándar en  $S^3$ , es el elegido por Segal para su modelo por razones de maximalidad del grupo causal ([1], pp. 58-59). El SRF puede elegirse como  $\partial_t$ , o cualquiera conjugado a éste.

Segal obtiene este espacio como el recubridor universal de la "compactificación conforme del espacio de Minkowski". Para justificar tal denominación se sigue un elaborado proceso que no desarrollamos en este trabajo, véase [1]. Para nuestro propósito nos bastará considerar la aplicación causal que se establece entre el espacio de Minkowski y el ETC del modelo, que, como veremos más adelante, juega un papel esencial en la asignación de coordenadas a los sucesos.

El espacio de Minkowski en su versión conforme: Sea  $R^4$  con  $x^0, x^1, x^2, x^3$  las funciones coordenadas usuales, y sea  $\eta = -dx^0{}^2 + \sum_{i=1}^3 dx^i{}^2$  la métrica lorentziana habitual. Es claro que  $(R^4, [\eta])$  es un ETC; orientado-tiempo si declaramos a  $\partial/\partial x^0$  ( $\equiv \partial_x^0$ ) "futuro". Su grupo causal es de 11 dimensiones, de las que 10 corresponden a las isometrías de  $\eta$  (grupo de Poincaré) y la restante a la dilatación de escalas ([8]).

Utilizaremos también para  $\mathbb{R}^4$  las funciones coordenadas  $(x^0, x^r, x^\theta, x^\varphi)$  relacionadas con las dadas anteriormente por:  $x^1 = x^r \operatorname{sen} x^\theta \operatorname{sen} x^\varphi$ ,  $x^2 = x^r \operatorname{sen} x^\theta \cos x^\varphi$ ,  $x^3 = x^r \cos x^\theta$ .

La relación causal entre  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  y  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  se resume en el lema que a continuación damos sin demostración.

Lema 14.

Existe una aplicación  $J: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \times S^3$  que verifica:

i)  $J$  es un difeomorfismo causal de  $(\mathbb{R}^4, [\eta])$  y la restricción de  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h])$  a la imagen  $J(\mathbb{R}^4) \equiv U$ .  $U$  es el abierto de  $\mathbb{R} \times S^3$  definido por

$$\begin{cases} -\pi < t + \rho < \pi & \text{con } \rho \geq 0 \\ -\pi < t - \rho < \pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

siendo  $t$  la carta identidad de  $\mathbb{R}$  y  $(\rho, \theta, \varphi)$  las coordenadas esféricas sobre  $S^3$ .

ii)  $J$  viene dado en coordenadas por las expresiones

$$\begin{cases} t = \arctan \frac{x^0}{1 + \frac{\eta(x,x)}{4}} \\ \rho = \arctan \frac{x^r}{1 - \frac{\eta(x,x)}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = x^\theta \\ \varphi = x^\varphi \end{cases} \quad \text{con } \eta(x,x) = -x^0^2 + x^1^2 + x^2^2 - x^3^2$$

la inversa viene dada por

$$\begin{cases} x^0 = \tan\left(\frac{t+\rho}{2}\right) + \tan\left(\frac{t-\rho}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen} t}{\operatorname{cost} + \operatorname{cos} \rho} \\ x^r = \tan\left(\frac{t+\rho}{2}\right) - \tan\left(\frac{t-\rho}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen} \rho}{\operatorname{cost} + \operatorname{cos} \rho} \end{cases} \quad \begin{cases} x^\theta = \theta \\ x^\varphi = \varphi \end{cases}$$

$$\text{iii) } (J^{-1})^* \eta = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{t+\rho}{2}\right) \cos^2\left(\frac{t-\rho}{2}\right)} (-dt^2 \oplus h) \Big|_U$$

Este lema muestra que  $J$  no es otra que la aplicación conforme entre el espacio de Minkowski y una región del espacio estático de Einstein dada en [3], p. 118-121.

Sistemas de referencia en el modelo de Segal. Ahora la cuestión es la siguiente: dado un observador  $\gamma$  de  $\partial_t$ , ¿cuáles son las coordenadas que  $\gamma$  asigna a los puntos de su entorno?. Esta cuestión es importante. En efecto, ya que el análisis de las observaciones experimentales es esencialmente minkowskiano (esto es, en términos de  $(\mathbb{R}^4, [\gamma])$ ), el problema es cómo "transferir" los sucesos de interés desde  $(M, \mathcal{C})$  a el espacio vectorial conforme  $(T_p M, \mathcal{C}_p)$  (canónicamente identificado con  $(\mathbb{R}^4, [\gamma])$ ), para todo punto  $p$  sobre el rango de  $\gamma$ .

Una posibilidad razonable es considerar la métrica  $g^{\partial_t} \in [-dt^2 \oplus h]$  y coordinatizar mediante la carta normal correspondiente a dicha métrica entorno a cualquiera de los puntos de la curva  $\gamma$ . Sobre la variedad métrica  $(\mathbb{R} \times S^3, g^{\partial_t})$ , que corresponde al espacio tiempo estático de Einstein, la aplicación  $\text{Exp}^{-dt^2 \oplus h}$  (o, con más precisión, la inversa de esta exponencial en la región donde ella es un difeomorfismo) parece ser la aplicación idónea para asignar coordenadas locales por los observadores de  $\partial_t$ . (Nótese que  $g^{\partial_t} = dt^2 \oplus h$ )

Pero en el modelo cosmológico de Segal ninguna métrica tiene un significado intrínseco sobre el espacio-tiempo. ¿Cómo definir entonces sistemas de coordenadas locales asociados a los observadores de  $\partial_t$ ? El criterio de Segal es que esta coordinatización la da la aplicación  $J$  (descrita en el lema 14) (o con más precisión la inversa de esta aplicación en la región donde es un difeomorfismo).

Concerniente a esta coordinatización alternativa hacemos los siguientes comentarios:

i) En el modelo de Segal está en principio permitido postular una coordinatización por medio de  $\text{Exp}^{-dt^2 \oplus h}$  o por medio de  $J$ .

ii) La aplicación  $J$  no solamente es un difeomorfismo sobre todo  $\mathbb{R}$  sino que también es globalmente causal. Ambas cosas

no las verifica en general la aplicación  $\text{Exp}^{-dt^2 \otimes h}$ . Desde este punto de vista parece mejor  $J$  como coordinatizadora.

iii) De las expresiones en coordenadas de ambas se deduce que, en las proximidades del punto de observación, ambas coordinatizaciones conducen a los mismos resultados (hasta términos de segundo orden en las coordenadas). Así pues, Segal argumenta que uno debe atender a las observaciones experimentales de sucesos que tienen lugar en regiones remotas en orden a decidir sobre la validez física de una u otra coordinatización.

iv) Segal afirma que su modelo, con la coordinatización dada por  $J$ , predice un desplazamiento al rojo cosmológico y consigue aproximar mejor los datos experimentales que los modelos (métricos) "expansivos". (sobre esta última cuestión, de la que no nos ocuparemos, véase [9]).

En el capítulo 5 nos ocuparemos de discutir la supuesta predicción de un desplazamiento al rojo cosmológico vía la aplicación  $J$ . Antes veamos como la coordinatización por  $J$  puede ser expresada en el lenguaje de los sistemas de referencia desarrollado en el capítulo 3.

Lema 15.

Sea  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \otimes h])$  el ETC orientado-tiempo del modelo de Segal.

Sea el difeomorfismo  $J: \mathbb{R}^4 \rightarrow U \subset \mathbb{R} \times S^3$  del lema 14. Definamos sobre

$U$  el campo  $K := J_* \partial_X$ , entonces se tiene:

i) La métrica lorentziana  $g^K$  inducida sobre  $U$  (lema 7) resulta ser  $g^K = F(-dt^2 \otimes h)|_U$ , con

$$F := \left( \cos^2\left(\frac{t+\rho}{2}\right) \cos^2\left(\frac{t-\rho}{2}\right) \right)^{-1}.$$

ii)  $K$  es un SRF homogéneo temporal.

iii) La exponencial  $\text{Exp}_e^{F(-dt^2 \otimes h)}$  asociada a  $g^K$  entorno al punto  $e$

perteneciente a  $\mathbb{R} \times S^3$  de coordenadas  $(t=0, \rho=0, \theta=0, \varphi=0)$  coincide con la aplicación  $J$ .

iv) El campo  $K$  verifica

$$K = \left( \frac{1}{2}(1 + \cos t \cos \rho) \partial_t - \frac{1}{2} \sin t \sin \rho \partial_\rho \right) \Big|_U.$$

Demostración:

i) Dado que  $J^{-1} * \eta = F(-dt^2 \oplus h)$  (Lema 14, iii), se tiene:

$$F(-dt^2 \oplus h)(K, K) = \eta(J_*^{-1} K, J_*^{-1} K) = \eta(\partial_{x^0}, \partial_{x^0}) = -1.$$

ii) Puesto que  $J$  es causal,  $K$  es un SR. Dado que  $g^K(K, \cdot) = \eta(J_*^{-1} K, J_*^{-1} \cdot) = -dx^0$ ,  $K$  es sincronizable a tiempo propio con función tiempo propio:  $x^0, J^{-1} = \frac{2 \sin t}{\cos t + \cos \rho}$  ;

pero además  $K$  es un factorizador completo de  $U$  vía  $\Phi := J: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow U$ .

Dado que  $J^* g^K = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i$ ,  $K$  es homogéneo temporal.

iii) Es trivial, dado que  $J: (\mathbb{R}^4, \eta) \rightarrow (U, F(-dt^2 \oplus h)|_U)$  es una isometría

iv) Escribiendo  $K = (f \partial_t + g \partial_\rho) \Big|_U$ , y teniendo en cuenta

$$\begin{cases} \frac{\partial x^0}{\partial t} = 2 \frac{1 + \cos t \cos \rho}{(\cos t + \cos \rho)^2} = \frac{\partial x^r}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x^r}{\partial t} = 2 \frac{\sin t \sin \rho}{(\cos t + \cos \rho)^2} = \frac{\partial x^0}{\partial \rho} \end{cases}$$

y la identidad  $(1 + \cos t \cos \rho)^2 - (\sin t \sin \rho)^2 = (\cos t + \cos \rho)^2$ , se llega a la expresión deseada.

El lema anterior ofrece una nueva perspectiva sobre el modelo cosmológico de Segal. En efecto, los observadores de  $Q = \partial_t$  coordinan (localmente) la variedad espacio-tiempo  $\mathbb{R} \times S^3$  esencialmente en la misma forma en que se hace en la teoría general de la relatividad, esto es, vía la exponencial asociada a una cierta métrica lorentziana compatible con la estructura conforme  $[-dt^2 \oplus h]$ . Lo novedoso del

modelo no está pues ~~tanto~~ en la "forma de coordinatizar" como en la elección de la métrica; Segal postula que las "las mediciones locales antropomórficamente posibles vienen representadas por variable dinámicas planas y no curvas, mientras que el análisis y la dinámica "verdaderos", no antropomórficos, son curvos y no planos" ([1], pág. 75; aquí el adjetivo "plano" se refiere obviamente al hecho de que  $F(-dt^2 \oplus h)$  es una métrica lorentziana plana, mientras que  $(-dt^2 \oplus h)$  no lo es), lo que equivale a decir que cada observador de  $Q = \partial_t$  se sitúa observacionalmente "como si" en realidad el SRF del que él es curva integral fuera el correspondiente  $K$  centrado en el punto de observación y no  $Q$ .



## 5. ¿HAY DESPLAZAMIENTO AL ROJO EN EL MODELO DE SEGAL?

Como ya hemos visto en el capítulo 3, un ETC orientado-tiempo  $(M, \mathcal{C})$  en el que hay definido un SRF  $Q$  global, cuyas curvas integrales representen las trayectorias de la materia en promedio, proporciona un marco adecuado para analizar el desplazamiento al rojo cosmológico (esto es, entre observadores de  $Q$ ). El modelo de Segal (véase el capítulo 4) se ajusta a este esquema; en este sentido el siguiente teorema es el resultado más importante de este trabajo.

### Teorema 2.

Sea el modelo cosmológico de Segal  $(\mathbb{R} \times S^3, [-dt^2 \oplus h], \partial_t)$ . Sean  $\gamma$  y  $\gamma'$  dos observadores de  $\partial_t$ . Entonces la razón de tiempos propios para la radiación emitida por  $\gamma$  y recibida por  $\gamma'$  es igual a 1.

### Demostración.

Se sigue inmediatamente del carácter homogéneo temporal del SRF  $\partial_t$  y del teorema 1.

El teorema anterior nos dice que, en el modelo cosmológico de Segal, no existe desplazamiento al rojo cosmológico.

¿Cómo se compagina lo anterior con la afirmación de I. E. Segal sobre la existencia del desplazamiento al rojo? En nuestra opinión, ello tiene que ver con una concepción equivocada por parte de Segal de la interpretación del desplazamiento al rojo. En el resto de este capítulo vamos a analizar la demostración que Segal hace de la existencia de dicho desplazamiento en su modelo

### Nota previa

- i) En lo sucesivo, identificaremos los observadores  $\gamma$  y  $\gamma'$  de  $Q \equiv \partial_t$  con una galaxia típica y con la Tierra, respectivamente.

ii) Designaremos por  $G$  un punto del rango de  $\gamma$  (correspondiente a un cierto instante de tiempo propio  $\tau_0$ ,  $\gamma\tau_0 = G$ ); sin pérdida de generalidad podemos tomar  $t(G) = \rho(G) = \theta(G) = \varphi(G) = 0$ . Supondremos que, entorno al punto  $G$ , la galaxia emite radiación que es captada en la Tierra entorno a un punto del rango de  $\gamma'$  que designaremos por  $T$ . Consideramos la trayectoria de la radiación entre  $G$  y  $T$  con la parametrización que la hace geodésica de la métrica lorentziana global  $g^{\delta\epsilon}$ , llamaremos  $\lambda$  a dicha trayectoria así parametrizada. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que dicha propagación se realiza a  $\theta = \varphi = \text{constante} = 0$ , por lo que podremos tomar  $\lambda$  como curva integral del campo (geodésico)  $\partial_t + \partial_p$ . Eligiendo  $\lambda_0 = G$ ,  $\lambda_\alpha = T$ , ( $0 < \alpha < \pi$ ), <sup>obtenemos</sup>  $\theta(T) = \varphi(T) = 0$ ,  $t(T) = \rho(T) = \alpha$ .

Por último, designaremos por  $P$  el punto sobre el rango de  $\gamma$  de coordenadas  $t(P) = \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ),  $\rho(P) = \theta(P) = \varphi(P) = 0$ .

iii) Denominaremos carta-Segal centrada en  $G$  a la aplicación  $J_G^{-1}: \mathbb{R} \times S^3 \supset U_G \rightarrow \mathbb{R}^4$  que fue discutida en el cap. 4. El subíndice  $G$  hace referencia a que dicha aplicación toma el punto  $G$  como origen de coordenadas. Designaremos por  $(x_G^0, x_G^1, x_G^2, x_G^3)$  coordenadas cartesianas en el  $\mathbb{R}^4$  de la carta-Segal centrada en  $G$  y por  $K_G$  el campo local (véase lema 15) correspondiente

Cuando nos refiramos a la carta-Segal centrada en  $P$  utilizaremos las notaciones  $J_P^{-1}$ ,  $(x_P^0, x_P^1, x_P^2, x_P^3)$ ,  $U_P$ ,  $K_P$ ; y análogamente para el punto  $T$ .

El punto de vista en favor de la existencia de desplazamiento al rojo cosmológico en el modelo de Segal podría resumirse de la siguiente manera:

Si el observador  $\gamma'$  coordinatizara la variedad mediante la exponencial asociada a  $g^Q = -dt^2 \oplus h$  las curvas integrales de  $Q$  (que representan las trayectorias de la materia en promedio) se corresponderían, sobre el  $\mathbb{R}^4$  de la carta, con las curvas integrales del campo  $\partial x^0$ : el cosmos aparecería estático al observador  $\gamma'$ . Sería, vía  $J$ , la coordinatización alternativa (la única "antropomórficamente posible" según postula Segal), la responsable de que apareciera un desplazamiento al rojo cosmológico.

Vamos a exponer a continuación dos tipos de argumentos que prueban que el punto de vista arriba indicado es en realidad erróneo y que corroboran el resultado obtenido en el teorema 2.

A) El primer argumento es de tipo estructural. El punto de vista anterior no puede ser correcto, simplemente porque diferentes coordinatizaciones (más o menos "subjetivas", aunque sólo una quizás "antropomórficamente posible") de la variedad no pueden alterar el resultado ("objetivo", en cuanto ligado a las nociones de tiempo propio sobre  $\gamma$  y sobre  $\gamma'$ ) de que la relación de tiempos propios  $r$  (véase definición 11) entre los observadores  $\gamma$  y  $\gamma'$  de  $Q = \partial_t$  depende exclusivamente

-del instante  $\tau_0$  (de tiempo propio sobre  $\gamma$ ) en que se realiza la emisión, y

-de la función  $C^\infty$  biyectiva  $f$  entre cierto intervalo (de tiempo propio sobre  $\gamma$ ) en torno a  $\tau_0$  y otro intervalo de tiempo propio sobre  $\gamma'$ , función que garantiza la "conectabilidad-vía-luz" de  $\gamma$  y  $\gamma'$  para instantes de emisión próximos a  $\tau_0$ ,

valiendo por tanto  $r=1$  (teorema 2), independientemente de cómo el observador-terrestre "vea" las restantes curvas integrales de  $Q = \partial_t$ .

B) El segundo argumento considera la apariencia observacional para T de la trayectoria espacio-temporal de G. Se trata de analizar en qué sentido el cosmos no aparece estático al observador Y'. Para ello calcularemos, en el punto G, el jacobiano del cambio de cartas-Segal centradas en G y T (suponiendo que cada uno de estos puntos pertenece al dominio de definición de la carta-Segal centrada en el otro).

Un sencillo cálculo conduce a

$$\frac{\partial(x_T^0, x_T^1, x_T^2, x_T^3)}{\partial(x_G^0, x_G^1, x_G^2, x_G^3)} \Big|_G = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} & 0 & 0 & \frac{\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} & 0 & 0 & \frac{1+\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} \end{pmatrix}$$

Esta transformación (lineal) puede considerarse (bidimensionalmente, respecto de las coordenadas  $x_G^0, x_G^3$ ) como la composición de una dilatación en un factor  $\frac{1}{\cos\alpha}$  y de la transformación de Lorentz (bidimensional)

$$\frac{1}{2\cos\alpha} \begin{pmatrix} 1+\cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \sin^2\alpha & 1+\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

Comparando esta última con la transformación-Lorentz estándar

$$\frac{\partial(x_T^0, x_T^3)}{\partial(x_G^0, x_G^3)} = \begin{pmatrix} \delta & \delta\beta \\ \delta\beta & \delta \end{pmatrix}$$

(la cual se interpreta a su vez diciendo que el origen de las coordenadas  $x_G$  se mueve con una velocidad  $\beta$  ( $-1 < \beta < 1$ ) respecto del origen de las coordenadas  $x_T$  en la dirección de la coordenada  $x_T^3$ ; y siendo  $\delta \equiv (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ ), se obtiene

$$\beta = \frac{\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}, \quad \delta = \frac{1+\cos^2\alpha}{2\cos\alpha};$$

esta velocidad relativa  $\beta > 0$  en la dirección de la coordenada  $x_T^3$  supone, dado que  $x_T^3(G) = -\text{tg}\alpha < 0$ , un ACERCAMIENTO APARENTE DE G CON RESPECTO A T.

Así pues, la apariencia observacional para T de la trayectoria espacio-temporal de G (en  $t = \tau = 0$ ) vendría caracterizada por

- una dilatación de los valores medidos para las coordenadas  $(x_T^0, x_T^r)$  de un suceso próximo a G, en relación con los valores para las coordenadas  $(x_G^0, x_G^r)$  de dicho suceso ( $\equiv$  contracción de las escalas que definen  $(x_T^0, x_T^r)$  en relación con las que definen  $(x_G^0, x_G^r)$ ), en un factor  $\frac{1}{\cos\alpha}$
- un acercamiento radial relativo de G con velocidad

$$\beta_r = \frac{-\text{sen}^2\alpha}{1 + \text{cos}^2\alpha};$$

¿Cuál sería el efecto observacional en cuanto al desplazamiento al rojo de la radiación emitida en G y recibida en T? Es claro que se tendría

$$r_{\text{dilatación} + \text{acercamiento}} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot r_{\text{acercamiento}}$$

Ahora bien, el factor  $r_{\text{acercamiento}}$  se calcula fácilmente y el resultado (bien conocido) es

$$r_{\text{acercamiento}} = \tilde{v}(1 + \beta_r) = \frac{1 + \text{cos}^2\alpha}{2\text{cos}\alpha} \left(1 - \frac{\text{sen}^2\alpha}{1 + \text{cos}^2\alpha}\right) = \text{cos}\alpha;$$

con lo que resulta claro que  $r_{\text{dilatación} + \text{acercamiento}} = 1$ . Vemos de nuevo que no aparece desplazamiento al rojo cosmológico en el modelo de Segal.

Nota. En [1], III-7, Segal lleva a cabo casi hasta el final el cálculo que acabamos de hacer, llegando a dar la expresión del jacobiano

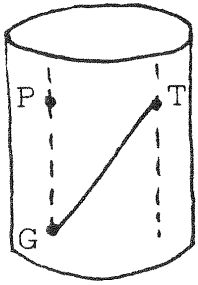
$$\left. \frac{\partial(x_T)}{\partial(x_G)} \right|_G$$

Sorprende que Segal obtenga ([1], III-6)

$$r = \frac{2}{1+\cos\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2};$$

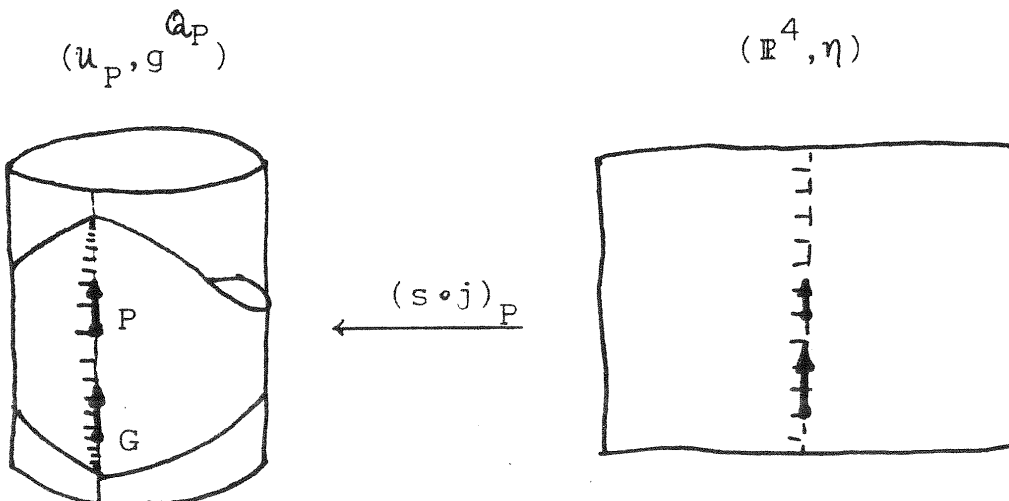
en nuestro esquema ello equivaldría a considerar que G y T se hallaran sobre la misma curva integral de  $Q=\partial_t$ . En efecto:

consideremos el punto P del rango de  $\gamma$ , de coordenadas  $t(P)=\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ),  $\rho(P)=\theta(P)=\varphi(P)=0$ . Se tiene:



$$\frac{\partial(x_P^0, x_P^1, x_P^2, x_P^3)}{\partial(x_G^0, x_G^1, x_G^2, x_G^3)} \Big|_G = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\cos\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{1+\cos\alpha} \end{pmatrix}$$

Así pues, la apariciencia observacional para P (en  $t=\alpha$ ,  $\rho=0$ ) de la trayectoria espacio-temporal de G vendría caracterizada por una dilatación de los valores medidos para las coordenadas  $(x_P^0, x_P^r)$  de un suceso próximo a G, en relación con los valores para las coordenadas  $(x_G^0, x_G^r)$  de dicho suceso ( $\equiv$  contracción de las escalas que definen  $(x_P^0, x_P^r)$  en relación con las que definen  $(x_G^0, x_G^r)$ ), en un factor  $\frac{2}{1+\cos\alpha}$ . Ello se ilustra en el siguiente diagrama:



Aceptando que  $r$  fuera el dado por este esquema, es claro que resultaría  $r = \frac{2}{1+\cos\alpha}$ .

Sin embargo, el fenómeno del desplazamiento al rojo tiene que ver no con una "evolución temporal" sino con una "propagación de luz".

## REFERENCIAS

- [1] I.E. Segal, "Mathematical cosmology and extragalactic astronomy", Academic Press, New York, 1976.
- [2] R.K. Sachs-H. Wu, "General Relativity for Mathematicians", Springer, New York, 1977.
- [3] S.W. Hawking-G.F.R. Ellis, "The large scale structure of space-time", Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1973.
- [4] B. O'Neill, "Semi-Riemannian Geometry", Acad. Press. New York, 1983
- [5] J.K. Beem-P.E. Ehrlich, "Global Lorentzian Geometry", Marcel Dekker, New York, 1981.
- [6] S. Kobayashi, "Transformation groups in differential geometry", Springer, Berlin, 1972.
- [7] S. Weinberg, "Gravitation and cosmology", John Wiley, New York, 1972
- [8] E.C. Zeeman, Journal of Math. Phys. 5, 490 (1964).
- [9] R.M. Soneira, Astrophysical Journal, 230, L63-L65 (1979).