# MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA I

**Ignacio Sánchez Rodríguez**

PROBLEMAS PROPUESTOS – Curso 2006-07

ÍNDICE



*Date*: Revisado el 24 de Enero de 2007.

## 1. Matrices y determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales.

1.1 Una propiedad de los determinantes es la siguiente:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B), \qquad \forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Recuerda que una matriz es *invertible* si y sólo si su determinante no es 0. Deducid razonadamente que

(a) Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ son invertibles entonces $A \cdot B$ es invertible. ¿Cuál es la inversa de $A \cdot B$?

*Nota*: Habremos probado que $D$ es la inversa de $C$ si $C \cdot D = D \cdot C = \mathrm{I}_n$. Según ésto, decidid si la inversa de $A \cdot B$ es $A^{-1} \cdot B^{-1}$ o es $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(b) Si $A$ es una matriz invertible entonces también lo son $A^2 = A \cdot A$. ¿Es lo mismo $(A^2)^{-1}$ que $(A^{-1})^2$?

1.2 Hallad las inversas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Cual es la inversa de $A \cdot B$?

1.3 Explicad por qué, $\forall n \in \mathbb{N}$, son verdaderas cada una de las siguientes propiedades de las matrices traspuestas:

(a) $(A+B)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + B^{\mathrm{t}}$ $\qquad \forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

(b) $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = A$ $\qquad \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

(c) $(\alpha A)^{\mathrm{t}} = \alpha(A^{\mathrm{t}})$ $\qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

(d) $(A \cdot B)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} \cdot A^{\mathrm{t}}$ $\qquad \forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

*Nota*: El último apartado es el más difícil de explicar; trata de comprender por qué es así, y luego intenta explicarlo.

1.4 Por definición sabemos que la *traza* de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ es

$$\mathrm{Traza}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Razonad por qué son verdaderas las siguientes propiedades de la traza:

(a) $\text{Traza}(A+B) = \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B) \qquad \forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

(b) $\text{Traza}(\alpha A) = \alpha\, \text{Traza}(A) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

(c) $\text{Traza}(A \cdot B) = \text{Traza}(B \cdot A) \qquad \forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

*Nota*: De nuevo, el último apartado es el más difícil; trata de comprenderlo; ponte el caso $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ ; y halla $\text{Traza}(A \cdot B)$.

1.5 Calculad $\text{Traza}(A \cdot A^{\text{t}})$, siendo $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Haced el mismo cálculo: $\text{Traza}(A \cdot A^{\text{t}})$, para una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Generalizad el resultado para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

1.6 Demostrad que cualquier matriz cuadrada se puede escribir, de manera única, como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

*Nota*: Éste ejercicio está hecho en clase.Trata de recordarlo y reproducirlo.

1.7 Una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se dice que es una matriz *ortogonal* si $A \cdot A^{\text{t}} = \text{I}_n$.

(a) ¿Qué valores puede tomar el determinante de una matriz ortogonal? ¿Es invertible una matriz ortogonal arbitraria?

*Nota*: Usad la propiedad: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(b) Hallad las condiciones que ha de verificar una matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ para ser una matriz ortogonal.

*Nota*: Se trata de escribir las ecuaciones que han de verificar $a$, $b$, $c$ y $d$, para que aquello suceda.

(c) Dad todas las matrices ortogonales de orden dos que existen con $a = \frac{1}{2}$.

1.8 Razonad por qué:

(a) El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.

(b) El producto de dos matrices simétricas no es, en general, una matriz simétrica.

(c) La inversa de una matriz ortogonal es ortogonal.

(d) Es falso que toda matriz simétrica es invertible.

1.9 Una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se dice que es una matriz *idempotente* si $A^2 = A$.

(a) La matriz nula $\mathbf{0}$ y la matriz identidad $\text{I}_n$ son idempotentes, ¿verdad?. Dad dos ejemplos más de matrices idempotentes de orden dos.

(b) Hallad las condiciones que ha de verificar una matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ para ser una matriz idempotente.

1.10 Discutid por qué son verdaderas las siguientes frases:

(a) Si $A$ es una matriz idempotente y $B = \mathrm{I}_n - A$, entonces $B$ también es idempotente.

(b) Si $A$ y$B$ son como en el apartado anterior entonces se verifica que $A \cdot B = B \cdot A = \mathbf{0}$.

(c) Una matriz invertible, distinta de la matriz unidad, no puede ser idempotente.

1.11 Una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se dice que es una matriz *nilpotente* si $A^2 = 0$.

(a) Hallad las condiciones que ha de verificar una matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ para ser una matriz nilpotente.

(b) Dad algún ejemplo de matriz nilpotente de orden tres, distinto de la matriz $\mathbf{0}$.

(c) Probad que si $A$ es una matriz nilpotente y $B = \mathrm{I}_n - A$, entonces $B$ es invertible y su inversa es $B^{-1} = \mathrm{I}_n + A$.

*Nota*: Recordad de nuevo que para probar que $D$ es $B^{-1}$, la inversa de $B$, hay que verificar que $B \cdot D = D \cdot B = \mathrm{I}_n$.

1.12 Una matriz $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ se dice que es una matriz *unipotente* si $A^2 = \mathrm{I}_n$.

(a) Demostrad que si $A$ es una matriz unipotente, entonces $A$ es invertible. ¿Cuál es su inversa?

(b) Hallad las condiciones que ha de verificar una matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ para ser una matriz unipotente. Dad varios ejemplos de matrices unipotentes de orden dos.

1.13 Se dice que dos matrices, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *conmutan* si $A \cdot B = B \cdot A$. Demostrad que la condición necesaria y suficiente que han de verificar $A$ y $B$ para que $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$ y $(A-B) \cdot (A+B) = A^2 - B^2$ es que $A$ y $B$ conmuten.

1.14 Sea la ecuación matricial

$$A^2 + xA + y\mathrm{I}_2 = 0 \qquad (1)$$

(a) Halla una ecuación matricial equivalente a (1) del tipo $A \cdot B = \mathrm{I}_2$, siendo $B$ una matriz que depende de $A$, $x$, $y$.

(b) Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ¿para qué valores de $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica la ecuación (1)? Utiliza el apartado anterior para hallar la inversa de $A$.

1.15 Determinad si son invertibles las siguientes matrices y, en ese caso, calculad las matrices inversas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.16 Considerad la siguiente sucesión de matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

(a) Expresad la matriz $A_n$, con $n \in \mathbb{N}$.

(b) Determinad si, $\forall n \in \mathbb{N}$, la matriz $A_n$ es invertible.

(c) Calcular, en ese caso, las matrices inversas.

1.17 Hallad la matriz escalonada reducida por filas de cada una de las siguientes matrices, y decidid su rango:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 9 \\ 1 & 8 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.18 Razonad si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

*Nota*: Para estos ejercicios habría que empezar diciendo o bien “Sí es verdadera, porque ...” o bien “Es falsa, porque ...”

(a) Cualquier sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas, tiene una única solución.

*Nota*: En este caso, si creemos que la frase *no* es verdadera, basta con dar un *contraejemplo*, y decís: “Es falsa, porque por ejemplo el sistema ... tal y cual ...“ ( en *tal y cual* escribís un sistema concreto de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, por ejemplo, que tenga más de una solución o que no tenga ninguna solución, y concluís que la frase es falsa.)

Si, en cambio, creemos que la frase *sí* es verdadera deberíamos decir algo así como: “Sí es verdadera; porque por el teorema de tal y tal ... y tal y tal ... se deduce que los sistemas de esa forma tienen úna única solución".

(b) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene dos soluciones distintas, entonces tiene infinitas soluciones distintas.

(c) Un sistema de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas no puede tener una única solución.

1.19 Inventad dos sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, uno que sea incompatible y otro que sea compatible indeterminado.

1.20 Un sistema de ecuaciones lineales se dice, por definición, que es *homogéneo* si es 0 el término independiente de cada ecuación del sistema.

(a) ¿Puede existir un sistema de ecuaciones lineales homogéneo que sea incompatible? Razonad la respuesta.

(b) Hallad las soluciones de los siguientes sistemas homogéneos:

(i)
$$\begin{aligned} 2x+y+3z&=0\\ 3x+3y+z&=0\\ x-y+5z&=0 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 3x+5y+2z&=0\\ -x+3y+z&=0\\ 2x+y+z&=0 \end{aligned}$$

1.21 Hallad un sistema de ecuaciones lineales escalonado, equivalente a cada uno de los siguientes sistemas:

(i)
$$\begin{aligned} -x+y+z-2t+s&=-1\\ 2x+y+3z-t&=-1\\ 2y-2z+2t+s&=-1 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 5x-5y-2z&=2\\ 3x+4y+3z&=5\\ 2x+y+z&=4 \end{aligned}$$

Resolved los 2 sistemas.

1.22 Hallad un sistema de ecuaciones lineales escalonado reducido equivalente a cada uno de los siguientes sistemas:

(a)
$$\begin{aligned} 3x-4y+6z-3t-s&=2\\ x-3y+z-s&=2\\ -x+y+z-2t+s&=-1\\ 2x+y+3z-t&=-1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 5x-5y-2z&=2\\ -x+2y+z&=-3\\ 3x+4y+3z&=5\\ 2x+y+z&=4 \end{aligned}$$

Resolved los 2 sistemas.

1.23 Para cada $k \in \mathbb{R}$, los apartados (a) y (b) que siguen, nos dan dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} kx - y &= 5 \\ 7x + y &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} 3x + 2y &= k \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

Hallad los valores de $k$ que hacen compatibles los sistemas (a) y (b) y, en cada uno de esos casos, hallad las soluciones del sistema en función de $k$.

1.24 Analizad la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, según los valores de $k$ y $s$.

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} kx \qquad &= 6 \\ 2x + sy &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} 3x + ky &= 6 \\ 2x - y &= s \end{aligned}$$

Hallad las soluciones de los sistemas en los casos compatibles.

1.25 Hallad los valores de $k$ que hacen compatibles a los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + ky + kz &= 5 \\ 4x + ky &= 5 \end{aligned} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= k \\ x + y + kz &= k^2 \end{aligned}$$

En cada uno de esos casos, hallad las soluciones del sistema.

1.26 Determinad la ecuación $y = ax + b$ de la recta del plano $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) : \forall x, y \in \mathbb{R}\}$, que pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(3, 7)$.

*Nota*: En este ejercicio, los números $a$, $b$ son las incógnitas. Se trata de un sistema de 2 ecuaciones lineales (las que se obtienen de reemplazar $(x, y)$ por cada punto dado) con 2 incógnitas ($a$ y $b$) que tendréis que resolver.

1.27 Determinad el polinomio $y = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica en el plano $\mathbb{R}^2$ pasa por los puntos $(1, 12)$, $(2, 15)$ y $(3, 16)$.

*Nota*: En este caso, los números a determinar (las incógnitas) son $a$, $b$, $c$ y se tiene un sistema de 3 ecuaciones lineales (las que se obtienen de reemplazar $(x, y)$ por cada punto dado) con 3 incógnitas, $a$, $b$ y $c$, que tendréis que resolver.

## 2. Espacios vectoriales. Subespacios vectoriales

2.1 En el plano P de vectores flechas supongamos que se verifica $2\vec{u}+3\vec{v}-4\vec{w}=\vec{0}$. Expresad cada uno de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, como combinación lineal de los otros dos.

2.2 En el plano P un conjunto ordenado de dos vectores no paralelos $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ forman una *base* de P. Si $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$, se dice que $x$ e $y$ (ó $(x,y)\in\mathbb{R}^2$) *son las coordenadas de* $\vec{w}$ *respecto de* la base $B$.

Probad que si se verifica también que $\vec{w}=r\vec{u}+s\vec{v}$ entonces $(x,y)=(r,s)$.

*Nota*: En este ejercicio, estamos probando que las coordenadas de un vector dado de P respecto de una base fijada son únicas. Esto es un enunciado cierto para un espacio vectorial cualquiera.

2.3 Consideremos $\mathbb{R}^2$, el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los pares.

a. Probad que $B_\mathrm{u}=\{(1,0),(0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, llamada la base *usual*, *canónica* o *estándar*.

b. Probad que $B=\{(1,1),(0,1)\}$ es otra base de $\mathbb{R}^2$.

c. Las coordenadas del par $(3,4)$ respecto a la base $B_\mathrm{u}$ son 3 y 4 porque $(3,4)=3(1,0)+4(0,1)$. ¿Cuáles son las coordenadas de $(3,4)$ respecto de la base $B$?

2.4 Plantead un ejercicio análogo al anterior, considerando ahora $\mathbb{R}^3$, el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las ternas. Y resolvedlo.

2.5 El conjunto $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ de las funciones reales continuas es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con la operación *suma* definida por:

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x),\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \forall f,g\in\mathscr{F}(\mathbb{R})$$

y la operación *producto por escalares* definida por:

$$(\alpha\,\centerdot\, f)(x):=\alpha f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall f\in\mathscr{F}(\mathbb{R}).$$

Discutid razonadamente si son subespacios vectoriales de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ los siguientes subconjuntos:

a. El conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ de los *polinomios* con coeficientes reales. (Recordad que $p\in\mathscr{F}(\mathbb{R})$ es un polinomio si

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k,\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

donde $a_i\in\mathbb{R}$ son los coeficientes y al mayor exponente $k\in\mathbb{N}$ se le llama el *grado* del poliniomio.)

b. El conjunto $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual a dos, es decir,

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = \{a + bx + cx^2 \colon a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

c. El conjunto $\widetilde{\mathscr{P}_2}$ de los polinomios de grado exactamente igual a dos, es decir, $\widetilde{\mathscr{P}_2} = \{a + bx + cx^2 \colon a, b, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0\}$.

d. El conjunto $\mathscr{P}_{2,h}$ de los polinomios *homogéneos* de segundo grado, es decir,

$$\mathscr{P}_{2,h} = \{ax^2 \colon a \in \mathbb{R}\}.$$

2.6 El conjunto $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de las matrices reales de orden $m \times n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con las usuales operaciones *suma* y *producto por escalares* de las matrices; en particular, lo es el conjunto de las matrices cuadradas $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de orden 2 (ó $2 \times 2$).

Discutid razonadamente si son subespacios vectoriales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ los siguientes subconjuntos:

a. El conjunto $Q$ de las matrices con determinante nulo, es decir,

$$Q = \{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \colon a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0\}.$$

b. El conjunto $G$ de las matrices con traza nula, es decir,

$$G = \{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \colon a_{11} + a_{22} = 0\}.$$

2.7 Consideremos el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de las matrices $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Probad que $B_{\mathrm{u}} = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. La llamaremos la base *usual*, *canónica* o *estándar* de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Si las coordenadas de la matriz $C$ respecto a la base $B_{\mathrm{u}}$ son $(x, y, z, t)$, ¿de qué matriz se trata?

c. Plantead las ecuaciones, con las incógnitas $x, y, z, t$, que deben verificar las coordenadas de $C$ para ser una matriz simétrica.

d. Plantead igualmente las ecuaciones para ser $C$ una matriz antisimétrica.

2.8 Probad que $\{(1,3,1), (2,-1,1), (5,0,2), (0,1,2)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$, y extraed de él una base de $\mathbb{R}^3$.

2.9 Probad que $\{(2,1,0,5), (1,-1,0,3)\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, y ampliadlo hasta obtener una base de $\mathbb{R}^4$.

2.10 Decidid si el conjunto $\{(1,2,3),(1,1,1),(-1,2,0)\}$ de vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes o independientes.

2.11 Decidid si el conjunto $\{(2,1,0,1),(1,-1,1,2),(0,1,0,2)\}$ de vectores de $\mathbb{R}^4$ son linealmente dependientes o independientes.

2.12 Verificad que el conjunto $\{1+x, 2x+x^2, 3+x-x^2\}$ es una base de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. Hallad las coordenadas de $1+3x+x^2$ en dicha base.

2.13 Verificad que el conjunto $B = \{1-x, x-x^2, x^2-x^3, 2x^3\}$ es una base del espacio vectorial $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que 3. Hallad las coordenadas del polinomio $p(x) = 3-5x-7x^3$ respecto de la base $B$.

2.14 Decidid si es una base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ el conjunto $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)\right\}$.

2.15 Si $\{e_1,e_2,e_3\}$ es una base de un espacio vectorial $V$, probad que $\{b_1,b_2,b_3\}$ también es una base de $V$, siendo $b_1 = 2e_1-e_2$, $b_2 = e_1+e_2-e_3$, $b_3 = e_1+e_3$.

2.16 Sean $B = \{(1,2),(2,-1)\}$ y $B' = \{(1,-1),(0,3)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$. Llamemos $(x,y)$ a las coordenadas en la base $B$ de un vector $v$ de $\mathbb{R}^2$ y llamemos $(x',y')$ a las coordenadas en la base $B'$ del mismo vector $v$. Hallad las ecuaciones que relacionan ambos sistemas de coordenadas, es decir, hallar $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tales que

$$x' = ax+by$$
$$y' = cx+dy$$

2.17 Sea $B = \{(1,3,1),(1,0,1),(2,1,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Llamemos $(x',y',z')$ a las coordenadas en la base $B$ del vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Hallad la matriz $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, tal que

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

2.18 Sean $U$ y $W$ dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial $V$.
(a) ¿En qué casos la unión de $U$ y $W$ es un subespacio vectorial de $V$?
(b) ¿Es cierto que si $\dim U + \dim W = \dim(U+W)$ entonces $U \cap W = \{0\}$?
(c) Probad que si $U \cap W = \{0\}$ entonces $\dim U + \dim W \leq \dim V$.

2.19 Sea el subespacio vectorial $U = \mathscr{L}\big(\{(1,2,1),(0,3,3),(2,1,-1)\}\big)$ de $\mathbb{R}^3$. Determinad una base de $U$, las ecuaciones paramétricas de $U$ respecto a esta base y las ecuaciones cartesianas de $U$.

2.20 Sea $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x+y-2z+t = 0,\, 2x-y-z+3t = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Determinad una base de $W$ y las ecuaciones paramétricas de $W$ respecto a esta base.

2.21 En $\mathbb{R}^3$ consideremos los subespacios:

$$U = \mathscr{L}\big(\{(1,0,0),(0,1,0)\}\big) \quad \text{y} \quad W = \mathscr{L}\big(\{(0,1,1),(1,0,1)\}\big).$$

Hallad las ecuaciones implícitas o cartesianas de $U+W$ y de $U\cap W$. Analizad si $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

2.22 En $\mathbb{R}^3$ consideremos los subespacios:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x+y+z = 0\} \quad \text{y} \quad W = \{(t,2t,3t) \colon t \in \mathbb{R}\}.$$

Probad que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

2.23 En $\mathbb{R}^4$ consideremos los subespacios:

$$U = \mathscr{L}\big(\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}\big) \quad \text{y} \quad W = \mathscr{L}\big(\{(2,0,1,3),(1,-1,0,2)\}\big).$$

Hallad las ecuaciones implícitas o cartesianas de $U+W$ y de $U\cap W$. Analizad si $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

2.24 Demostrad que $S = \{C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \colon C = C^{\mathrm{t}}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Demostrad lo mismo para $A = \{C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \colon C = -C^{\mathrm{t}}\}$. Hallar la dimensión de $S+A$ y la dimensión de $S\cap A$. Analizad si $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = S \oplus A$

## 3. Aplicaciones lineales

3.1 Decidir si son aplicaciones lineales las siguientes aplicaciones:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = |t|$

(b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \frac{x-y}{3}$

(c) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \quad h(s,t) = \left(\begin{smallmatrix} s+2t & s-t \\ -t & s+t \end{smallmatrix}\right)$

(d) $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R}), \quad l(s,t) = x^2 + (2s-t)x + (s-2t)$

3.2 Hallar el núcleo y la imagen de cada una de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, definidas por las siguientes expresiones:

(a) $f(x,y) = (3x-2y, x+4y)$

(b) $g(x,y) = (x-y, 0)$

(c) $h(x,y) = (x+2y, 3x+6y)$

(d) $f_0(x,y) = (0,0)$

3.3 Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal definida por

$$f(1,0,0) = (2,1), \quad f(0,1,0) = (3,2), \quad f(0,0,1) = (-1,1).$$

Escribir las ecuaciones de $f$, siendo $f(x,y,z) = (x',y')$. Escribir la matriz asociada a $f$ y la ecuación matricial correspondiente. Hallar una base de $\operatorname{Ker}(f)$. ¿Es $B_u = \{(1,0),(0,1)\}$ una base de $\operatorname{Im}(f)$?

3.4 Sean $f$ y $g$ dos aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que verifican

$$f(1,0) = (2,2,0), \quad f(0,1) = (-1,1,1)$$
$$g(1,1) = (1,3,1), \quad g(1,-1) = (3,1,-1).$$

Probar que $f(x,y) = g(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3.5 Hallar la matriz asociada y el rango de la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z,t) = (2x-2y-2z+2t\,, x-y-z+t\,, x+y+2z-t)$. Discutir si $f$ es inyectiva o sobreyectiva.

3.6 Dar un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea el plano determinado por la ecuación $2x+2y-z=0$ y cuyo núcleo contenga al vector $(0,0,1)$.

3.7 Dar una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, cuyo núcleo sea el plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z=0\}$ y cuya imagen sea la recta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x-2y=0\}$.

3.8 Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(1,0,1) = (1,1), \quad f(1,0-1) = (0,1), \quad f(1,1,1) = (1,0)$$

Hallar la matriz de $f$ respecto a las bases usuales. Encontrar unas bases del núcleo y de la imagen de $f$.

3.9 Sea $f$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, con $f(x,y,z) = (x-z, y-x, z-y)$. Hallar una base de $f(W)$, siendo $W$ el subespacio definido por la ecuación $y+z=0$.

3.10 Sean $f\colon U \to V$ y $g\colon V \to W$ dos aplicaciones lineales. Probar que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ si y sólo si $g \circ f$ es igual a la aplicación nula.

3.11 Probar que la aplicación $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = (2x-y, x-2y)$ es un isomorfismo. Hallar $g^{-1}$.

3.12 Para cada $a \in \mathbb{R}$, sea la aplicación lineal $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f_a(x,y) = (ax+y, x+ay, ax+ay)$. Hallar los valores de $a$ para los que $f_a$ es inyectiva.

3.13 Encontrar un automorfismo $f$ de $\mathbb{R}^3$ de manera que $f(U) = W$, siendo $U$ y $W$ los subespacios definidos por

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = 0\}, \qquad W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0\}.$$

3.14 Sean $f$ y $g$ dos aplicaciones lineales de $U$ en $V$. Definimos la *suma de aplicaciones*

$$f+g\colon U \longrightarrow V, \qquad (f+g)(u) := f(u) + g(u).$$

Probar que $f+g$ es una aplicación lineal. Hallar las matrices asociadas $A$ de $f$, $A'$ de $g$ y $A''$ de $f+g$; siendo $f$ y $g$ aplicaciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$, dadas por

$$f(x,y,z) = (2x-3y+7z, x-2y+4z), \qquad g(x,y,z) = (-4x+5y-2z, 3x-4z)$$

Comprobar que $A'' = A + A'$.

3.15 Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f$ una aplicación lineal de $U$ en $V$. Definimos el *producto de un escalar por una aplicación* como

$$\alpha \cdot f\colon U \longrightarrow V, \qquad (\alpha \cdot f)(u) := \alpha \cdot f(u).$$

Probar que $\alpha \cdot f$ es una aplicación lineal. Hallar las matrices asociadas $A$ de $f$, y $A'$ de $\alpha \cdot f$; siendo $f$ la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$, dada por

$$f(x,y) = (x-4y, 2x+3y, x-2y, -y)$$

Comprobar que $A' = \alpha A$.

3.16 Una aplicación lineal $f$ de un espacio vectorial real $V$ en $\mathbb{R}$ se dice que es una *forma lineal* de $V$. ¿Qué orden tienen las matrices que representan a las formas lineales de $\mathbb{R}^3$? Da algún ejemplo. Si una forma lineal de $\mathbb{R}^n$ no es la aplicación nula, ¿qué dimensión tiene su núcleo?

3.17 Sean $U$ y $V$ dos espacios vectoriales y $f\colon U \to V$ una aplicación lineal. Razonar si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:
(a) Si $\mathrm{rango}(f) \geq \dim(V)$ entonces $\mathrm{rango}(f) = \dim(V)$.
(b) Si $\mathrm{rango}(f) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$ entonces $\dim(V)$ es par.
(c) Si $\mathrm{rango}(f) \geq \dim(U)$ entonces $f$ es inyectiva.

3.18 Sean $U, V$ y $W$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Probar que si $f\colon U \to V$ y $g\colon V \to W$ son dos aplicaciones lineales entonces la composición

$$g \circ f\colon U \to W$$

es una aplicación lineal.

3.19 Sean $B = \{b_1, b_2\}$ y $C = \{c_1, c_2\}$ dos bases de un espacio vectorial $U$, tales que

$$c_1 = 2b_1, \qquad c_2 = b_1 - b_2.$$

Si un endomorfismo $f$ de $U$ tiene por matriz asociada $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ respecto a la base $B$, ¿cuál es la matriz asociada a $f$ respecto a la base $C$?

3.20 Sea $f$ el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(x,y,z) = (2x+y-z, -x-2y+z, x-5y-2z)$. Hallar la matriz asociada a $f$ respecto a la base

$$B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}.$$

3.21 Deducir razonadamente si son verdaderas las siguientes afirmaciónes:
(a) Todo endomorfismo inyectivo es sobreyectivo.
(b) La composición de monomorfismos es un monomorfismo.
(c) La imagen de un subespacio de dimensión 1 es un subespacio de la misma dimensión.

## 4. Diagonalización

4.1 Sea $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Llamemos $t = \text{Traza}(A)$ y $d = \det(A)$.

(a) Probar que el polinomio característico de $A$ es $p(\lambda) = \lambda^2 - t\lambda + d$.

(b) Hallar el número de autovalores de $A$, según el signo de $t^2 - 4d$.

(c) Si $A$ es diagonalizable y $t^2 = 4d$, hallar la expresión general de $A$.

4.2 Sea la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, con $b \neq 0$. Hallar los autovalores de $A$ y una matriz $P$ tal que $D = P \cdot A \cdot P^{-1}$ sea una matriz diagonal.

4.3 Digamos que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una *rotación "positiva"* de ángulo $\theta$ si $f$ es una aplicación lineal cuya matriz asociada en la base usual es $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. Hallar para qué valores de $\theta$ es $f$ diagonalizable.

4.4 Probar si es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 12 & -2 \\ -16 & 17 & -1 \\ -24 & 24 & -1 \end{pmatrix}$$

Encontrar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de $A$.

4.5 Probar si es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Encontrar, si es posible, una matriz $P$ tal que $P \cdot A \cdot P^{-1}$ de como resultado una matriz diagonal.

4.6 Sea $f$ el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base usual es

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Probar si $f$ es diagonalizable. Hallar una base de cada subespacio propio de $f$.

4.7 Sea $f$ un endomorfismo de $V$, con $\dim(V) = 2$. Sea $v \neq \bar{0}$ un autovector de $f$ correspondiente a un autovalor $\lambda$. Supongamos que existe $w \in V$ tal que $(f - \lambda \mathrm{I}_V)(w) = v$.

(a) Probar que $B = \{v, w\}$ es una base de $V$.

(b) Hallar la matriz de $f$ en la base $B$.
(c) Demostrar que $f$ no es diagonalizable.

4.8 Sea $f$ un endomorfismo. Probar que $f$ es biyectiva si y sólo si el 0 no es autovalor de $f$.

4.9 Para que valores de $\alpha$ y $\beta$ es diagonalizable la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.10 Deducir razonadamente si son verdaderas las siguientes afirmaciónes:
(a) Si $v$ es un autovector de $f$ y de $g$ entonces $v$ es un autovector de $g \circ f$.
(b) Si $\lambda$ es un autovalor de $f$ entonces $\lambda^2$ es un autovalor de $f \circ f$.
(c) Si $f$ es invertible y $\lambda$ es un autovalor de $f$ entonces $1/\lambda$ es un autovalor de $f^{-1}$.

## 5. ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS

5.1 En $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar euclídeo usual, ¿qué dimensión tiene el mayor subespacio ortogonal a un vector dado, no nulo?

5.2 Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar euclídeo usual, cuyo primer vector esté en la recta $3x-4y=0$.

5.3 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar euclídeo usual, hallar la ecuación implícita y una base de $S^\perp$ siendo $S$ la recta generada por el vector $(1,-2,3)$.

5.4 En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar euclídeo usual, encontrad una base ortonormal con uno de sus vectores en la bisectriz del primer cuadrante.

5.5 ¿Existe un producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^2$ para el cual la base $\{$ (2,1),(1,2)$\}$ es ortonormal? Si es que sí, ¿cuál sería la norma del vector $(3,3)$?

5.6 Sea $\mathscr{P}^2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq 2$ sobre $\mathbb{R}$. Definamos, $\forall p(x), q(x) \in \mathscr{P}^2(\mathbb{R})$,

$$\langle p(x), q(x)\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)\cdot q(x)\, dx.$$

Probad que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto escalar euclídeo. Respecto a este producto escalar:

(a) Hallad la norma del polinomio $p(x) = 3x^2-4x-1$.
(b) Hallad el ángulo entre los polinomios $1+x$ y $3x^2-4x-1$.
(c) Hallad un polinomio $q(x)$ que sea ortogonal al polinomio $x^2$.

5.7 Sea $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 sobre $\mathbb{R}$. Definamos, $\forall A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Traza}(A\cdot B^{\mathrm{t}}).$$

(a) Probad que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto escalar euclídeo.
(b) Hallad el producto escalar $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t\end{smallmatrix}\right)\right\rangle$.
(c) Probad que una base ortonormal de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle)$ es la base usual de las matrices $2\times 2$ (véase el problema 2.7).
(d) Si $S$ es el subespacio vectorial de las matrices simétricas, probad que $S^\perp$ son las matrices antisimétricas.

5.8 Hallar la matriz (matriz de Gram) asociada al producto escalar euclídeo usual de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base $B = \{(1,1,2),(1,-1,0),(0,0,3)\}$.

5.9 Hallar una recta ortogonal al plano $P = \mathrm{L}(\{(-1,1,0),(2,-1,1)\})$. Hallar un plano ortogonal a la recta $R = \{(x,y,z) : x-y+z=0,\ x+y=0\}$.

5.10 Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $f(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$. Probad que, con el producto escalar usual, se verifica:

(a) $\langle u,v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle\,, \qquad \forall u,v \in \mathbb{R}^2.$

(b) $\|u\| = \|f(u)\|\,, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^2.$

(c) El ángulo entre $u$ y $f(u)$ es siempre el mismo para todo $u \in \mathbb{R}^2$.