Un tratamiento de los invariantes diferenciales de G - estructuras

Ignacio Sánchez Rodríguez

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

IX Encuentro Andaluz de Geometría

In memóriam del profesor Florentino García Santos

Jaén (España), 11 de Mayo de 2012

Presentación

- El paradigma de invariante diferencial escalar de una G-estructura es la curvatura escalar $\mathbf{S}_{\mathbf{g}}\colon M \to \mathbb{R}$ de una variedad riemanniana $(M, \mathbf{g})$. En cada $m \in M$ se define $\mathbf{S}_{\mathbf{g}}(m)$ a partir de los valores de $\mathbf{g}$ y sus derivadas parciales hasta segundo orden en m, es decir, el 2-jet de la métrica en m. Se dice que la curvatura escalar es invariante por difeomorfismos porque si $\varphi\colon M \to M$ es un difeomorfismo entonces la curvatura escalar de la métrica $\varphi^{-1*}\mathbf{g}$ verifica que $\mathbf{S}_{\varphi^{-1*}\mathbf{g}} = \mathbf{S}_{\mathbf{g}} \circ \varphi^{-1}$.
- Los invariantes diferenciales escalares de las métricas están bien estudiados y se sabe cuántos hay funcionalmente independientes –según la dimensión de M y el orden máximo de las derivadas parciales de $\mathbf{g}$ involucradas– y cómo se obtienen a partir de la curvatura de Riemann.
- Este es un trabajo preparatorio para estudiar los invariantes diferenciales escalares de otros tipos de G-estructuras. En especial, nos interesan los invariantes diferenciales de las estructuras conformes –no confundir con los *invariantes conformes con peso*; en todo caso, los invariantes en sintonía con nuestro trabajo serían de *peso cero*–.

Introducción

- P, fibrado principal sobre M de grupo G; acción $p \cdot g$ por la derecha; $P/G = M$.
- W, variedad; acción $g \cdot w$ por la izquierda; $G \backslash W$ –espacio topológico, no es variedad en general–; notación: $[w]$.
- $P \times W$; acción por la derecha $(p, w) \cdot g := (p \cdot g, g^{-1} \cdot w)$; obtenemos el fibrado asociado $P(W) \equiv (P \times W)/G$; notación: $[p, w]$.
- LM, fibrado de las referencias lineales sobre M de grupo Gl_n.
- $\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n$, variedad cociente; acción por la izquierda de Gl_n sobre $\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n$.
- $LM(\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n)$, fibrado de las métricas: Dar una métrica $\mathbf{g}$ equivale a dar una sección $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}} \colon M \to LM(\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n)$, siendo $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}(m) = [l, \mathrm{O}_n]$ para cualquier base $\mathbf{g}$-ortonormal $l \in LM$. Y viceversa, una sección $\boldsymbol{\sigma}$ define una métrica especificándonos las bases ortonormales.
- El fibrado $J^r LM(\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n)$ de r-jets de secciones de $LM(\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n)$, en cada elemento $j^r_m\boldsymbol{\sigma}$, lleva la información del r-jet en m de la correspondiente métrica $\mathbf{g}$.
- Podemos definir la función curvatura escalar $\mathbf{S} \colon J^2 LM(\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n) \to \mathbb{R}$ de tal forma que $\mathbf{S} \circ j^2\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}} = \mathbf{S}_{\mathbf{g}}$ –es decir, $\mathbf{S}(j^2_m\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}) = \mathbf{S}_{\mathbf{g}}(m)$–.

Introducción

- $LM(\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n)$, fibrado de las métricas: Dar una métrica $\mathbf{g}$ equivale a dar una sección $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}} \colon M \to LM(\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n)$, siendo $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}(m) = [l, \mathrm{O}_n]$ para cualquier referencia $\mathbf{g}$-ortonormal $l \in LM$. Y viceversa, una sección $\boldsymbol{\sigma}$ define una métrica diciéndonos quiénes son las referencias ortonormales.
- El fibrado $J^r LM(\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n)$ de r-jets de secciones de $LM(\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n)$, en cada elemento $j^r_m\boldsymbol{\sigma}$, lleva la información del r-jet en m de la correspondiente métrica $\mathbf{g}$.
- Podemos definir la función curvatura escalar $\mathbf{S} \colon J^2 LM(\mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n) \to \mathbb{R}$ de tal forma que $\mathbf{S} \circ j^2\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}} = \mathbf{S}_{\mathbf{g}}$ –es decir, $\mathbf{S}(j^2_m\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}}) = \mathbf{S}_{\mathbf{g}}(m)$–.
- Acción de un difeomorfismo $\varphi \colon M \to M$

  sobre LM: $\quad l \mapsto \varphi_* \circ l$.

  sobre $LM(W)$: $\quad \bar{\varphi} \colon [l, w] \mapsto [\varphi_* \circ l, w]$.

  sobre secciones $\boldsymbol{\sigma} \colon M \to LM(W)$: $\quad \boldsymbol{\sigma} \mapsto \bar{\varphi} \circ \boldsymbol{\sigma} \circ \varphi^{-1}$.

  sobre jets de secciones: $\quad \widehat{\varphi}^r \colon j^r_m\boldsymbol{\sigma} \mapsto j^r_{\varphi(m)}(\bar{\varphi} \circ \boldsymbol{\sigma} \circ \varphi^{-1})$.
- Volvemos al caso $W = \mathrm{Gl}_n/\mathrm{O}_n$. Se demuestra que $\boldsymbol{\sigma}_{\varphi^{-1*}\mathbf{g}} = \bar{\varphi} \circ \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{g}} \circ \varphi^{-1}$ y a partir de esto se prueba que

$$\mathbf{S}_{\varphi^{-1*}\mathbf{g}} = \mathbf{S}_{\mathbf{g}} \circ \varphi^{-1},\ \forall\, \mathbf{g},\ \forall\, \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{S} = \mathbf{S} \circ \widehat{\varphi}^2,\ \forall\, \varphi$$

Acción de los difeomorfismos sobre los fibrados de referencias y los fibrados asociados

- Sea $F^r M$ el fibrado de referencias de orden r sobre M, con $\dim M = n$. Es un fibrado principal con grupo G^r_n, el grupo de r-jets. La acción por la derecha de $j^r_0\xi \in \mathrm{G}^r_n$ sobre $j^r_0\psi \in F^r M$ se define por $j^r_0(\psi \circ \xi) \in F^r M$

  ξ un difeomorfismo entre entornos de $0 \in \mathbb{R}^n$, con $\xi(0) = 0$,

  ψ un difeomorfismo entre un entorno de 0 y un abierto de M.

  El pseudogrupo $\mathcal{D}M$ de difeomorfismos entre abiertos de M, actúa sobre $F^r M$: La acción por la izquierda de $\varphi \in \mathcal{D}M$ sobre $j^r_0\psi \in F^r M$ se define por $j^r_0(\varphi \circ \psi) \in F^r M$, –está definida cuando $\psi(0) \in \operatorname{dom}\varphi$–.

  La acción de los difeomorfismos es una acción transitiva:

  $$\forall\, j^r_0\psi, j^r_0\psi' \in F^r M,\ \exists\, \varphi \in \mathcal{D}M \text{ tal que } j^r_0(\varphi \circ \psi) = j^r_0\psi' \,.$$

- Sea $F^r M(W)$ un fibrado asociado a $F^r M$; en él la acción por la izquierda de $\varphi \in \mathcal{D}M$ se define por –sobre $\operatorname{dom}\varphi$–:

  $$\bar{\varphi}^r : F^r M(W) \to F^r M(W), \quad [j^r_0\psi, w] \mapsto [j^r_0(\varphi \circ \psi), w]$$

.

Invariantes diferenciales

Definición (Invariantes de fibrados asociados)

Una función $f\colon F^rM(W) \to \mathbb{R}$ es un *invariante diferencial escalar de $F^rM(W)$* si, $\forall\, w \in W$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}M$ y $\forall\, j^r_0\psi \in F^rM$ con $\psi 0 \in \operatorname{dom}\varphi$, se verifica:

$$f[j^r_0\psi, w] = f[j^r_0(\varphi \circ \psi), w].$$

Equivalentemente, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}M$, $f \circ \bar{\varphi}^r = f$ sobre $\operatorname{dom}\varphi$.

Reduzcamos el problema de hallar los invariantes diferenciales escalares de $F^rM(W)$ a un problema que es independiente de M y de sus difeomorfismos.

Teorema (Independencia de M de los invariantes)

El conjunto de invariantes diferenciales escalares de $F^rM(W)$ está en correspondencia biyectiva con el conjunto de funciones $h\colon \mathrm{G}^r_n\backslash W \to \mathbb{R}$ tales que $h \circ \Pi$ sea diferenciable –siendo $\Pi\colon W \to \mathrm{G}^r_n\backslash W,\ w \mapsto [w]$–.

Demostración

Dado un invariante $f\colon F^rM(W)\to\mathbb{R}$, la función $h[w]:=f[j^r_0\psi,w]$ está bien definida porque:
(*i*) para otro $j^r_0\psi'$, obtenemos un difeomorfismo $\varphi=\psi'\circ\psi^{-1}$ entre entornos de $\psi 0$ y $\psi' 0$; entonces $f[j^r_0\psi',w]=f[j^r_0(\varphi\circ\psi),w]=f[j^r_0\psi,w]$;
(*ii*) si $w'\in[w]$, existe $j^r_0\xi\in\mathrm{G}^r_n$ tal que $[j^r_0\psi,w']=[j^r_0\psi,j^r_0\xi\cdot w]=[j^r_0(\psi\circ\xi),w]$, luego $f[j^r_0\psi,w']=f[j^r_0(\psi\circ\xi),w]$ y, por (*i*), $f[j^r_0\psi,w']=f[j^r_0\psi,w]$.
La diferenciabilidad se sigue de la igualdad $h\circ\Pi=f\circ\pi\circ\iota_z$, donde $\pi\colon F^rM\times W\to F^rM(W)$ es la proyección natural y $\iota_z\colon W\to F^rM\times W$, $\iota_z(w):=(z,w)$, para $z\in F^rM$.
Recíprocamente, dada $h\colon \mathrm{G}^r_n\backslash W\to\mathbb{R}$, la función $f[j^r_0\psi,w]:=h[w]$, $\forall\, j^r_0\psi\in F^rM$, que es obviamente invariante, está bien definida porque
$f[j^r_0(\psi\circ\xi),j^r_0\xi^{-1}\cdot w]=h[j^r_0\xi^{-1}\cdot w]=h[w],\quad \forall\, j^r_0\xi\in\mathrm{G}^r_n$
Sabemos que f es diferenciable si y solo si $f\circ\pi$ es diferenciable; como $f\circ\pi=h\circ\Pi\circ\pi_2$, siendo $\pi_2\colon F^rM\times W\to W$ la proyección $\pi_2(z,w)=w$, la diferenciabilidad de f se sigue de la diferenciabilidad de $h\circ\Pi$.

Fibrados de r-jets de secciones

- Dado un fibrado E sobre M con fibra W, se obtiene el fibrado de r-jets de secciones locales de E, $J^r E$, cuya base es M y su fibra es $J^r_0(\mathbb{R}^n, W)$, el espacio de r-jets en 0 de aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en W.
- Veamos como funciona en el caso $E = F^k M(W)$. Usemos la sección natural de $F^k M$ inducida por una carta (x, U):

$$\widehat{x}^k \colon U \to F^k M, \quad p \mapsto \widehat{x}^k p := j^k_0(x^{-1} \circ \tau_{x(p)}),$$

con $\tau_{x(p)}$ la translación por $x(p)$ en $\mathbb{R}^n$. Una trivialización local de E es:

$$\Psi^x \colon E|_U \to U \times W, \quad [\widehat{x}^k p, w] \mapsto (p, w).$$

Ahora, una sección local $\sigma \colon U \to E$ viene caracterizada por la aplicación $\sigma^x \colon U \to W$ tal que $\Psi^x(\sigma(p)) = (p, \sigma^x(p))$. Podemos escribir $\sigma = [\widehat{x}^k, \sigma^x]$. Una trivialización local de $J^r E$ es

$$J^r E|_U \to U \times J^r_0(\mathbb{R}^n, W), \quad j^r_p \sigma \mapsto \left(p, j^r_0(\sigma^x \circ x^{-1} \circ \tau_{xp})\right).$$

Fibrado de jets de secciones es fibrado asociado

Proposición (1)

Si $E = F^kM(W)$ es un fibrado asociado a F^kM con fibra típica W entonces J^rE es un fibrado asociado a $F^{r+k}M$ con fibra típica $J^r_0(\mathbb{R}^n, W)$.

Demostración

Consideremos la siguiente acción de $j^{r+k}_0\xi \in \mathrm{G}^{r+k}_n$ sobre $j^r_0\mu \in J^r_0(\mathbb{R}^n, W)$ definida por

$$j^r_0\big((j^k\xi \cdot \mu) \circ \xi^{-1}\big) \in J^r_0(\mathbb{R}^n, W), \tag{1}$$

donde interviene la función W-valuada dada por

$$(j^k\xi \cdot \mu)(v) := j^k_0(\tau_{-\xi(v)} \circ \xi \circ \tau_v) \cdot \mu(v), \quad v \in \mathbb{R}^n;$$

aquí el último punto se refiere a la acción de G^k_n sobre W.

Fibrado de jets de secciones es fibrado asociado

Proposición (1)

Si $E = F^k M(W)$ es un fibrado asociado a $F^k M$ con fibra típica W entonces $J^r E$ es un fibrado asociado a $F^{r+k} M$ con fibra típica $J^r_0(\mathbb{R}^n, W)$.

Demostración

(cont.) Se prueba que (1) define una acción por la izquierda de G^{r+k}_n sobre $J^r_0(\mathbb{R}^n, W)$ y, entonces, produce un fibrado asociado $F^{r+k}M(J^r_0(\mathbb{R}^n, W))$. Podemos definir una aplicación fibrada –en el dominio de la carta x– por

$$\begin{array}{rcl} \Lambda\colon J^r E & \longrightarrow & F^{r+k}M(J^r_0(\mathbb{R}^n, W)) \\ j^r_p\sigma & \longmapsto & \left[\widehat{x}^{r+k}p,\, j^r_0(\sigma^x \circ x^{-1} \circ \tau_{x(p)})\right], \end{array}$$

que es un isomorfismo de fibrados. Probamos que esta definición es independiente de la carta y, así pues, que es un isomorfismo de fibrados globalmente definido.

Acción de difeomorfismos sobre jets de secciones

En un fibrado $E = F^kM(W)$ se definía la acción de un difeomorfismo φ por:

$$\bar{\varphi}^k\colon E \to E,\ [j_0^k\psi, w] \mapsto [j_0^k(\varphi\circ\psi), w].$$

Si σ es una sección de E entorno a $p \in M$ entonces $\bar{\varphi}^k \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ es una sección de E entorno a $\varphi(p)$; se define la acción de φ sobre J^rE por:

$$\widehat{\varphi}^{r,k}\colon J^rE \to J^rE, \quad j_p^r\sigma \mapsto j_{\varphi(p)}^r(\bar{\varphi}^k \circ \sigma \circ \varphi^{-1}).$$

Definición (Invariantes de fibrados de jets de secciones)

Sea $E = F^kM(W)$. Una función diferenciable $f\colon J^rE \to \mathbb{R}$ es un *invariante diferencial escalar de orden r sobre E* si, $\forall \varphi \in \mathcal{D}M$, $f \circ \widehat{\varphi}^{r,k} = f$ sobre $\operatorname{dom}\varphi$.

La acción de φ y, por tanto, la noción de invariante diferencial es la misma bajo el isomorfismo Λ, ya que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
J^rE & \xrightarrow{\Lambda} & F^{r+k}M(J_0^r(\mathbb{R}^n, W)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \widehat{\varphi}^{r,k}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bar{\varphi}^{r+k}} \\
J^rE & \xrightarrow{\Lambda} & F^{r+k}M(J_0^r(\mathbb{R}^n, W))
\end{array}$$

El fibrado de G-estructuras

Sea G un subgrupo cerrado de Gl_n. La acción por la izquierda de Gl_n sobre Gl_n/G nos da el fibrado asociado $M_G \equiv LM(\mathrm{Gl}_n/G)$, llamado *el fibrado de G-estructuras*. Sus secciones, $\sigma\colon M \to M_G$, se corresponden con los subfibrados $P \subset LM$ con grupo G, dados por $P = \{l \in LM\colon [l, G] \in \sigma(M)\}$, que son las G-estructuras de M.
Sea $J^r M_G$ el fibrado de r-jets de secciones locales, cuya fibra es $J^r_0(\mathbb{R}^n, \mathrm{Gl}_n/G)$. La acción de $\varphi \in \mathcal{D}M$ sobre $J^r M_G$ se define por:

$$\widehat{\varphi}^{r,1}\colon J^r M_G \to J^r M_G, \quad j^r_p \sigma \mapsto j^r_{\varphi(p)}(\bar{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}).$$

Definition (Invariantes de G-estructuras)

Un *invariante diferencial escalar de orden r de G-estructuras sobre M* es una función diferenciable $f\colon J^r M_G \to \mathbb{R}$ tal que, $\forall \varphi \in \mathcal{D}M$, se verifica $f \circ \widehat{\varphi}^{r,1} = f$ sobre $\mathrm{dom}\,\varphi$.

Invariantes diferenciales de G-estructuras

El isomorfismo Λ de la Proposición (1) permite identificar $J^r M_G$ con $F^{r+1}M\big(J^r_0(\mathbb{R}^n, \mathrm{Gl}_n/G)\big)$, el fibrado asociado respecto a la acción de $j^{r+1}_0\xi \in \mathrm{G}^{r+1}_n$ sobre $j^r_0\mu \in J^r_0(\mathbb{R}^n, \mathrm{Gl}_n/G)$ definida por

$$j^r_0\big((D\xi \cdot \mu) \circ \xi^{-1}\big) \in J^r_0(\mathbb{R}^n, \mathrm{Gl}_n/G),$$

donde $(D\xi \cdot \mu)(v) := D\xi|_v \cdot \mu(v)$, con $v \in \mathbb{R}^n$ y el punto es la acción de Gl_n sobre Gl_n/G.
Así un invariante diferencial puede verse como una función diferenciable $f\colon F^{r+1}M\big(J^r_0(\mathbb{R}^n, \mathrm{Gl}_n/G)\big) \to \mathbb{R}$ que verifica $f \circ \bar{\varphi}^{r+1} = f$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}M$.
Ahora, como aplicación a G-estructuras del teorema de independencia de M de los invariantes, obtenemos:

Teorema (G-invariantes de orden r)

El conjunto de invariantes diferenciales escalares de orden r de G-estructuras sobre una variedad M está en correspondencia biyectiva natural con las funciones $h\colon \mathrm{G}^{r+1}_n \backslash J^r_0(\mathbb{R}^n, \mathrm{Gl}_n/G) \to \mathbb{R}$ tales que $h \circ \Pi$ es diferenciable. Llamaremos a una tal h un G-invariante escalar de orden r.

Mínimo número de invariantes de G-estructuras

Se demuestra que el subespacio, G^r, de $\mathrm{G}_n^{r+1}\backslash J_0^r(\mathbb{R}^n, \mathrm{Gl}_n/G)$ formado por las órbitas de dimensión máxima –en $J_0^r(\mathbb{R}^n, \mathrm{Gl}_n/G)$– es abierto y denso y conjeturo que es una variedad diferenciable cuya dimensión, m_r, será el número de G-invariantes escalares de orden r funcionalmente independientes.

Teorema (Mínimo número de invariantes)

Sea $G \subset Gl_n$ y $m = \dim G$. El número de G-invariantes escalares de orden r funcionalmente independientes verifica

$$m_r \geq (n^2 - m)\binom{n+r}{n} - n\binom{n+r+1}{n} + n.$$

Demostración

Teniendo en cuenta que $\dim J_0^r(\mathbb{R}^n, \mathrm{Gl}_n/G) = (n^2 - m)\binom{n+r}{n}$ y $\dim \mathrm{G}_n^{r+1} = n\left(\binom{n+r+1}{n} - 1\right)$, el resultado se sigue de $\dim(\mathrm{G}_n^{r+1}\backslash G^r) \geq \dim G^r - \dim \mathrm{G}_n^{r+1}$.

Mínimo número de invariantes métricos y conformes

En el caso de las paralelizaciones de M –$G = \{I_n\}$– o en el caso de las referencias proyectivas –$G = \{kI_n : k \neq 0\}$– el número mínimo del teorema coincide con el número exacto de invariantes.

En el caso métrico el número mínimo coincide con el número exacto de $O(n;\mathbb{R})$-invariantes, salvo el caso $n = 2$ y $r = 2$ en que hay un invariante.

En el caso conforme, el número exacto de $CO(n;\mathbb{R})$-invariantes es un problema abierto.

Nº mínimo de O_n-invariantes

$n \diagdown r$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	-	**0**	2	5	9
3	-	3	18	45	87
4	-	14	74	200	424
5	-	40	215	635	1475
6	-	90	510	1644	4164

Nº mínimo de CO_n-invariantes

$n \diagdown r$	1	2	3	4	5
1	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-
3	-	-	-	10	31
4	-	-	39	130	298
5	-	19	159	509	1223
6	-	62	426	1434	3702

References

Pedro L. García, J. Muñoz Masqué,
Differential invariants on the bundles of G-structures,
Lect. Notes in Math. **1410** (1989), 177–201.

J. Muñoz Masqué, Antonio Valdés,
The number of functionally independent invariants of a pseudo-Riemannian metric,
J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994), 7843–7855.

R. A. Sarkisyan,
On differential invariants of geometric structures
Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 70:2 (2006), 99–158