GEOMETRÍA II

De la diagonalización a las isometrías

Ignacio Sánchez Rodríguez

Departamento de Geometría y Topología

Universidad de Granada

GEOMETRÍA II. De la diagonalización a las isometrías

Ignacio Sánchez Rodríguez

De la edición en papel:

I.S.B.N.: 978-84-15873-33-4
Depósito Legal: GR- 434 / 2014

Edita e Imprime: Godel Impresiones Digitales SL.

a Irene

Prólogo

Este libro expone los contenidos de la asignatura *Geometría II* del título de *Grado en Matemáticas* de la Universidad de Granada, que está programada como asignatura semestral de primer curso. El autor ha impartido esta asignatura los segundos semestres de los cursos 2010-11, 2011-12 y 2012-13, y quiere reflejar aquí esta experiencia docente.

En la asignatura *Geometría I* del primer semestre de primer curso, se enseñan los conocimientos básicos de espacios vectoriales, sistemas de ecuaciones lineales, matrices y aplicaciones lineales. La materia de este libro es, pues, una continuación de aquella en la enseñanza de la geometría vectorial básica. En estas páginas, esencialmente, se hace el recorrido que va desde la diagonalización de endomorfismos de un espacio vectorial hasta la clasificación de las isometrías de un espacio vectorial euclídeo.

Quiero agradecer a los profesores del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada que me han mostrado su apoyo en este trabajo, a mi hermano y a los estudiantes que con sus indicaciones me han hecho mejorar los contenidos de este libro.

Granada, Febrero de 2014

Ignacio Sánchez Rodríguez

Tema 0

Preliminares y notaciones

En este capítulo preliminar daremos las principales notaciones que usaremos a lo largo del curso, y de paso recordaremos algunos conceptos de la asignatura Geometría I.

Sobre espacios vectoriales.

Nosotros trabajaremos, en general, con *espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales* $\mathbb{R}$ y de *dimensión finita*, salvo alguna excepción que se indicaría llegado el caso. Los espacios vectoriales los denotaremos usualmente con las letras $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ o $\mathbf{W}$. Escribiremos $\dim(\mathbf{V})$ o $\dim \mathbf{V}$ para la dimensión de $\mathbf{V}$.

Los elemento de un espacio vectorial, llamados *vectores*, los denotamos con letras minúsculas y con barrita encima, $\bar{v} \in \mathbf{V}$ y, en particular, el vector cero se escribirá $\bar{0}$ (en algún caso usaremos la flecha encima $\vec{v}$ para referirnos a los vectores de la geometría elemental del plano o del espacio).

Las *bases de un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ de dimensión finita, $\dim \mathbf{V} = n$, se denotarán típicamente con letras caligráficas mayúsculas, $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ Así podemos representar una base de $\mathbf{V}$ por $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$; como es un conjunto de vectores ordenado hemos elegido representarlo entre paréntesis en vez de entre llaves.

Para un subconjunto $S \subset \mathbf{V}$, designamos con $\mathbf{L}(S)$ al *subespacio vectorial* *generado* por S; es decir, $\mathbf{L}(S) \subset \mathbf{V}$ son los vectores que se obtienen por combinación lineal finita de vectores de S. Cuando $S = \{\bar{u}, \dots, \bar{v}\}$ consta de un número finito de vectores, $\mathbf{L}(S)$ se puede designar también por $<\{\bar{u}, \dots, \bar{v}\}>$. De ahora en adelante la igualdad o equivalencia de notaciones la indicaremos con tres rayitas; en este caso: $\mathbf{L}(S) \equiv <\{\bar{u}, \dots, \bar{v}\}>$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos el espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$, cuyos vectores son las llamadas *n-tuplas* de números $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, con $x_i \in \mathbb{R}$. A una 2-tupla la llamaremos *par* y a una 3-tupla la llamaremos *terna*. Para la *base estándar* de $\mathbb{R}^n$, llamada también base *usual* o *canónica*, reservamos la notación $\mathcal{B}_0 = \big(\bar{e}_1 \equiv (1, 0, \dots, 0), \; \dots \;, \bar{e}_n \equiv (0, \dots, 0, 1)\big)$.

Sobre matrices.

Al conjunto de *matrices reales de orden* $m \times n$, es decir, con m filas y n columnas lo denotamos por $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, o simplemente $\mathcal{M}_{m,n}$. Sabemos que con las operaciones suma de matrices y producto de escalares por matrices, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión igual a mn.

Frecuentemente usaremos letras mayúsculas para denotar a una matriz, $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, y escribiremos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Abreviadamente usamos la notación $A = (a_{ij})$; pero no hay que confundirla con a_{ij} (sin paréntesis) que representa el número de la casilla de A que está en la fila i y en la columna j.

Considerad que una matriz fila, $(x_1 \, x_2 \dots \, x_n) \in \mathcal{M}_{1,n}$ (sin comas), es un objeto diferente de una n-tupla, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (con comas).

Denotamos el *rango de una matriz* A por $\mathrm{r}(A)$ o $\mathrm{rango}(A)$ y la *matriz traspuesta* de A por A^t.

Sobre matrices cuadradas.

Denotamos con $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, o $\mathcal{M}_n$, al conjunto de las *matrices reales cuadradas de orden* n, es decir, con n filas y n columnas. Denotamos a la *traza* de $A \in \mathcal{M}_n$ por $\mathrm{tr}(A)$ o $\mathrm{traza}(A)$, y al *determinante* de A por $\det(A)$.

Al igual que las matrices rectangulares, las matrices cuadradas $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forman un espacio vectorial real, con $\dim \mathcal{M}_n = n^2$. Dos subespacios vectoriales importantes de $\mathcal{M}_n$ son:

- El subespacio vectorial de las *matrices simétricas*, denotado por $\mathbf{S}_n$.
- El subespacio vectorial de las *matrices antisimétricas* denotado por $\mathbf{A}_n$.

Cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se obtiene de manera única como la suma de una matriz simétrica A_s y de una antisimétrica A_a; para probarlo basta con definir $A_s := \frac{1}{2}(A + A^t)$ y $A_a := \frac{1}{2}(A - A^t)$. Se obtiene que $\mathcal{M}_n$ es igual a la *suma directa* $\mathbf{S}_n \oplus \mathbf{A}_n$.

La notación ":=" la usaremos frecuentemente para indicar que el término del lado de los dos puntitos se define con el término del otro lado de la igualdad.

Por otra parte, el producto de matrices de $\mathcal{M}_n$ sigue siendo de $\mathcal{M}_n$, es decir, que el producto de matrices es una operación interna en $\mathcal{M}_n$. Entonces, si consideramos el subconjunto de las *matrices regulares o invertibles* de orden n, es decir, las matrices A con $\det(A) \neq 0$, resulta que este subconjunto con la operación producto de matrices es un grupo, llamado el *grupo lineal general* y se designa por $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})$ o, simplemente, por $\mathbf{Gl}_n$. El elemento unidad del grupo es la matriz identidad de orden n, denotada por $\mathbf{I}_n$ y la matriz inversa de A se designa por A^{-1}.

Algunos subgrupos importantes de $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R}) \equiv \mathbf{Gl}_n$ son:

- $\mathbf{Gl}_n^+ := \{A \in \mathbf{Gl}_n : \det(A) > 0\}$.
- El *grupo lineal especial*, $\mathbf{Sl}(n, \mathbb{R}) \equiv \mathbf{Sl}_n := \{A \in \mathbf{Gl}_n : \det(A) = 1\}$,
- El *grupo ortogonal*, $\mathbf{O}(n, \mathbb{R}) \equiv \mathbf{O}(n) \equiv \mathbf{O}_n := \{A \in \mathbf{Gl}_n : A^{-1} = A^t\}$.

Sobre aplicaciones lineales.

Para una *aplicación lineal* f entre dos espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, escribimos el diagrama:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbf{W}, \\ & \bar{v} & \longmapsto & f(\bar{v}) = \bar{w}, \end{array}$$

donde $\mathbf{V}$ es el *espacio inicial* o *dominio* de f y $\mathbf{W}$ el *espacio final* o *codominio* de f.

Preferentemente, denotamos al *núcleo* de f por $\ker f$, pero se puede usar $\mathrm{N}(f)$; y para la *imagen* de f usamos indistintamente las notaciones $f(\mathbf{V}) \equiv \operatorname{im} f$. Recordemos que $\operatorname{rango}(f) := \dim(\operatorname{im} f)$ y $\operatorname{nulidad}(f) := \dim(\ker f)$ y que el *teorema de las dimensiones para una aplicación lineal* asegura que $\dim \mathbf{V} = \dim(\operatorname{im} f) + \dim(\ker f)$.

El conjunto de aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$, con las operaciones suma de aplicaciones lineales y producto de un escalar por una aplicación lineal, resulta ser un espacio vectorial real, que denotamos por $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, cuya dimensión es igual al producto $(\dim \mathbf{V})(\dim \mathbf{W})$.

El *espacio dual* de $\mathbf{V}$ es el espacio vectorial $\mathbf{V}^* \equiv \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{R})$; un elemento $\varphi \in \mathbf{V}^*$ es, pues, una aplicación lineal $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ y se le llama una *forma lineal* sobre $\mathbf{V}$.

Una aplicación lineal f también se la conoce como un *homomorfismo* de espacios vectoriales. Si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva decimos, respectivamente, que se trata de un *monomorfismo*, *epimorfismo* o *isomorfismo* (de espacios vectoriales).

Una aplicación lineal $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ decimos que es un *endomorfismo* de $\mathbf{V}$, y al conjunto de todos ellos se lo denota por $\operatorname{End} \mathbf{V} \equiv \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$. Si f es además biyectiva decimos que f es un *automorfismo* de $\mathbf{V}$, y al conjunto de todos ellos se lo denota por $\operatorname{Aut} \mathbf{V}$.

Si $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$, decimos que un subespacio $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ es un *subespacio invariante* por f si se verifica que $f(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$. En ese caso, a la restricción de f a $\mathbf{U}$, $f|_{\mathbf{U}}\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$, se le puede cambiar el codominio con el propio $\mathbf{U}$, obteniéndose un endomorfismo de $\mathbf{U}$ que lo denotamos por $f_{\mathbf{U}}\colon \mathbf{U} \to \mathbf{U}$.

Las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

El conjunto de las matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ se puede poner en correspondencia biyectiva con el conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ de la siguiente forma:

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}$, existe una única aplicación lineal

$$\begin{array}{rccl} h_A\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & h_A(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m) \end{array}$$

que está determinada por la ecuación matricial

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

Notad que cada columna j de la matriz A son las componentes de la m-tupla $h_A(\bar{e}_j)$, $j = 1, \dots, n$, siendo $\mathcal{B}_0 = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$.

Y viceversa, dada una aplicación lineal $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, existe una única matriz $A_h \in \mathcal{M}_{m,n}$ cuya columna j son las componentes de la m-tupla $h(\bar{e}_j)$, $j = 1, \dots, n$.

Además, la aplicación $A \to h_A$ establece un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$; y se verifica que la inversa de este isomorfismo aplica $h \to A_h$.

Es bastante frecuente *identificar* $\mathcal{M}_{m,n} \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, y se suele escribir la aplicación h_A simplemente como A, quedando:

$$\begin{array}{rccl} A\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \bar{x} & \longmapsto & A\bar{x} = \bar{y}, \quad \text{escribiendo } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \end{array}$$

Nota: En la ecuación matricial (0.1) nosotros hemos *representado matricialmente* los vectores de $\mathbb{R}^n$ (o de $\mathbb{R}^m$) como matrices columna. Algunos autores prefieren usar la representación matricial de los vectores de $\mathbb{R}^n$ como matrices fila. En este caso, la ecuación matricial que define a la aplicación lineal, que hemos llamado h_A, es la ecuación traspuesta de la ecuación (0.1); quedaría $(x_1 \dots x_n)A^t = (y_1 \dots y_m)$ y se consideraría, en este caso, que A^t sería la matriz que representa o se identifica con la aplicación lineal h_A.

Nosotros en este curso, cuando en ecuaciones matriciales usemos vectores de $\mathbb{R}^n$, los representaremos generalmente con *matrices columna.*

Coordenadas en un espacio vectorial.

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita con $\dim \mathbf{V} = n$. Si damos una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ de $\mathbf{V}$ entonces obtenemos una biyección de $\mathbf{V}$ con $\mathbb{R}^n$ que asigna a cada vector $\bar{v} \in \mathbf{V}$ sus *coordenadas respecto a la base* $\mathcal{B}$; dichas coordenadas son las componentes de la n-tupla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que están determinadas por la ecuación vectorial $\bar{v} = x_1\bar{b}_1 + \cdots + x_n\bar{b}_n$. Denotaremos a esta n-tupla de $\mathbb{R}^n$ por $\bar{v}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; es decir, $\bar{v}_{\mathcal{B}}$ son las coordenadas de $\bar{v}$ en la base $\mathcal{B}$.

Si llamamos $\iota_{\mathcal{B}}$ a la biyección que asigna a un vector sus coordenadas respecto a una base $\mathcal{B}$, resumimos la aplicación en este diagrama:

$$\begin{array}{rccl} \iota_{\mathcal{B}}\colon & \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \bar{v} & \longmapsto & \bar{v}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

Resulta, además, que $\iota_{\mathcal{B}}$ es un isomorfismo; y está determinado por las n condiciones $\iota_{\mathcal{B}}(\bar{b}_j) = \bar{e}_j,\ j = 1, \dots, n$, siendo $\mathcal{B}_0 = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$.

Cambio de coordenadas en un espacio vectorial.

Si ahora damos en $\mathbf{V}$ otra base, $\mathcal{B}' = (\bar{b}'_1, \dots, \bar{b}'_n)$, entonces obtenemos una nueva asignación de coordenadas y, por tanto, un nuevo isomorfismo $\iota_{\mathcal{B}'}\colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n,\ \bar{v} \mapsto \bar{v}_{\mathcal{B}'} = (x'_1, \dots, x'_n)$. Nos interesa conocer la aplicación

$$\begin{array}{rccc} P\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \bar{v}_{\mathcal{B}'} & \longmapsto & \bar{v}_{\mathcal{B}} \end{array}$$

que a partir de las coordenadas de $\bar{v}$ respecto a $\mathcal{B}'$ nos da las coordenadas de $\bar{v}$ respecto a $\mathcal{B}$. Podemos ver esta aplicación dentro del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "\mathbf{I_V}"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{B}'}"'] & \mathbf{V} \arrow[d, "\iota_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "P"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bar{v} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \bar{v} \arrow[d, mapsto] \\ \bar{v}_{\mathcal{B}'} \arrow[r, mapsto] & \bar{v}_{\mathcal{B}} \end{tikzcd}$$

donde $\mathbf{I_V}$ es la aplicación identidad de $\mathbf{V}$.

Nota: Se dice que es un *diagrama conmutativo* porque los dos "caminos" dan igual resultado; como en este caso, $P \circ \iota_{_{\mathcal{B}'}} = \iota_{_{\mathcal{B}}} \circ \mathbf{I_V}$. Generalmente todos los diagramas que usamos son conmutativos.

Resulta que esta aplicación P es un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ y, por tanto, se puede identificar con una matriz regular, denotada igualmente por P, que es la llamada *matriz de cambio de base (o de coordenadas) de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$*. Algunas notaciones alternativas para esta matriz son

$$P = M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \equiv \mathcal{B}'_{_{\mathcal{B}}}.$$

La notación $P = \mathcal{B}'_{_{\mathcal{B}}}$ se justifica porque sus columnas son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ respecto a la base $\mathcal{B}$; es decir, la columna j de P son las componentes de $(\bar{b}'_j)_{_{\mathcal{B}}}$. Según lo que veremos en el apartado siguiente sobre la expresión en coordenadas de una aplicación lineal, también se podrá escribir $M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = M(\mathbf{I_V}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

En resumen, la ecuación matricial del cambio de coordenadas es:

$$M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{o, si se prefiere,} \quad \mathcal{B}'_{_{\mathcal{B}}}\, \bar{v}_{_{\mathcal{B}'}} = \bar{v}_{_{\mathcal{B}}}. \tag{0.2}$$

Nota: Si usáramos las matrices fila para representar matricialmente los vectores de $\mathbb{R}^n$ habríamos obtenido una ecuación matricial traspuesta de la anterior, considerándose en ese caso que P^t sería la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Es fácil probar que la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es:

$$P^{-1} = \mathcal{B}_{_{\mathcal{B}'}} \equiv M(\mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Si $\mathcal{B}''$ es una tercera base de $\mathbf{V}$ obtenemos que $\bar{v}_{_{\mathcal{B}}} = \mathcal{B}''_{_{\mathcal{B}}}\, \bar{v}_{_{\mathcal{B}''}}$ y que $\bar{v}_{_{\mathcal{B}'}} = \mathcal{B}''_{_{\mathcal{B}'}}\, \bar{v}_{_{\mathcal{B}''}}$. Sustituyendo $\bar{v}_{_{\mathcal{B}'}}$ de esta última ecuación en la ecuación (0.2), se sigue que $\mathcal{B}''_{_{\mathcal{B}}}\, \bar{v}_{_{\mathcal{B}''}} = \mathcal{B}'_{_{\mathcal{B}}}\, \mathcal{B}''_{_{\mathcal{B}'}}\, \bar{v}_{_{\mathcal{B}''}}$. Como esto es válido para todo $\bar{v}_{_{\mathcal{B}''}}$ de $\mathbb{R}^n$, se deduce que

$$\mathcal{B}''_{_{\mathcal{B}}} = \mathcal{B}'_{_{\mathcal{B}}}\, \mathcal{B}''_{_{\mathcal{B}'}} \quad \text{o, si se prefiere,} \quad M(\mathcal{B}'', \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}', \mathcal{B})\, M(\mathcal{B}'', \mathcal{B}').$$

Expresión matricial de una aplicación lineal.

Sea f una aplicación lineal entre los espacios vectoriales $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, con $\dim \mathbf{V} = n$ y $\dim \mathbf{W} = m$. Escribimos:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbf{W} \\ & \bar{v} & \longmapsto & f(\bar{v}) \end{array}$$

Dadas una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ de $\mathbf{V}$ y una base $\mathcal{C} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m)$ de $\mathbf{W}$, obtenemos el siguiente diagrama (que es conmutativo porque $\iota_{\mathcal{C}} \circ f = A \circ \iota_{\mathcal{B}}$):

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{B}}"'] & \mathbf{W} \arrow[d, "\iota_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \bar{v} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(\bar{v}) \arrow[d, mapsto] \\ \bar{v}_{\mathcal{B}} \arrow[r, mapsto] & f(\bar{v})_{\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

donde, por definición, A es la aplicación que a partir de las coordenadas de $\bar{v}$ en la base $\mathcal{B}$, $\bar{v}_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$, nos da las coordenadas de $f(\bar{v})$ en la base $\mathcal{C}$, $f(\bar{v})_{\mathcal{C}} = (y_1, \dots, y_m)$.

La matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ decimos que es la *matriz asociada a f, o que representa a f, en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$* y la denotamos por

$$A = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \equiv f(\mathcal{B})_{\mathcal{C}}.$$

Podemos escribir la ecuación matricial de f en coordenadas así:

$$(0.3) \qquad M(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad \text{o, si se prefiere,} \qquad f(\mathcal{B})_{\mathcal{C}}\, \bar{v}_{\mathcal{B}} = f(\bar{v})_{\mathcal{C}},$$

La notación $A = f(\mathcal{B})_{\mathcal{C}}$ se justifica porque sus columnas son las coordenadas de la imagen por f de los vectores de la base $\mathcal{B}$ respecto a la base $\mathcal{C}$; es decir, la columna j de A son las componentes de $(f(\bar{b}_j))_{\mathcal{C}}$.

De las ecuaciones (0.2) y (0.3) se deduce fácilmente que la matriz A' que representa a f en dos nuevas bases, $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{V}$ y $\mathcal{C}'$ de $\mathbf{W}$, se obtiene mediante la ecuación escrita así:

$$A' \equiv f(\mathcal{B}')_{\mathcal{C}'} = \mathcal{C}_{\mathcal{C}'}\; f(\mathcal{B})_{\mathcal{C}}\; \mathcal{B}'_{\mathcal{B}}\,, \text{ o también así:}$$

$$A' \equiv M(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') = M(\mathcal{C}, \mathcal{C}') M(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) M(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Estudiaremos esto más detenidamente en el caso de los endomorfismos.

Expresión matricial de la composición de aplicaciones lineales.

Sean $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ espacios vectoriales con dimensiones p, n y m, respectivamente. Si $g : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ y $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ son dos aplicaciones lineales, entonces la composición de aplicaciones $f \circ g : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ es también una aplicación lineal y está definida por

$$(f \circ g)(\bar{u}) := f(g(\bar{u})).$$

Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases de $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$, respectivamente, entonces (representando matricialmente los vectores de $\mathbb{R}^{p,n\,\acute{o}\,m}$ como matrices columna) resulta fácil probar que

$$M(f \circ g, \mathcal{A}, \mathcal{C}) = M(f, \mathcal{B}, \mathcal{C})\, M(g, \mathcal{A}, \mathcal{B})\,, \text{ o escrito así:}$$

$$(f \circ g)(\mathcal{A})_{\mathcal{C}} = f(\mathcal{B})_{\mathcal{C}}\, g(\mathcal{A})_{\mathcal{B}}.$$

Esto se resume en el siguiente diagrama, donde $D \equiv M(g, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv g(\mathcal{A})_{\mathcal{B}}$ y $A \equiv M(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \equiv f(\mathcal{B})_{\mathcal{C}}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{U} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{A}}"'] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & \mathbf{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{B}}"'] & \mathbf{W} \arrow[d, "\iota_{\mathcal{C}}"'] \\
\mathbb{R}^p \arrow[r, "D"] \arrow[rr, bend right, "A\,D"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Tema 1

Diagonalización de endomorfismos

Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $\mathbf{V}$, lo que escribimos así: $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$. Esto, por definición, significa que $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es una aplicación lineal. Suponemos que $\mathbf{V}$ es de dimensión finita, $\dim \mathbf{V} = n$.

Dada una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ de $\mathbf{V}$, hay un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ que *representa* a f en la base $\mathcal{B}$ y que, por definición, es la aplicación que a partir de las coordenadas de $\bar{u}$ nos da las coordenadas de $f(\bar{u})$, ambas respecto a la base $\mathcal{B}$. Dicho endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ se identifica con una matriz cuadrada de orden n que la denotamos por

$$A = M(f, \mathcal{B}) \equiv f(\mathcal{B})_{\mathcal{B}}.$$

Según el convenio adoptado de cómo tratar los vectores de $\mathbb{R}^n$ en las ecuaciones matriciales, sabemos que $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{V}$,

$$f(\bar{u})_{\mathcal{B}} = M(f, \mathcal{B})\, \bar{u}_{\mathcal{B}}, \tag{1.1}$$

donde $\bar{u}_{\mathcal{B}}$ y $f(\bar{u})_{\mathcal{B}}$ son, respectivamente, las coordenadas de $\bar{u}$ y de $f(\bar{u})$ respecto a $\mathcal{B}$, puestas como matrices columna.

La situación que tenemos la resume el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{B}}"'] & \mathbf{V} \arrow[d, "\iota_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bar{u} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(\bar{u}) \arrow[d, mapsto] \\ \bar{u}_{\mathcal{B}} \arrow[r, mapsto] & f(\bar{u})_{\mathcal{B}} \end{tikzcd}$$

Recordemos que una matriz diagonal es aquella que fuera de la diagonal principal solo tiene ceros; por ejemplo, como esta: $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

El **problema de la diagonalización de endomorfismos** se puede enunciar de la manera siguiente:

> Dado $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$, saber si existe alguna base de $\mathbf{V}$ tal que la matriz que representa a f en esa base sea una matriz diagonal. Si existen tales bases, decimos que f *es un endomorfismo diagonalizable*. El siguiente paso es encontrar una base $\mathcal{C}$ de $\mathbf{V}$ tal que $M(f, \mathcal{C})$ sea diagonal.

En general, si tenemos una nueva base $\mathcal{C} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$ de $\mathbf{V}$, obtenemos una nueva matriz asociada

$$D = M(f, \mathcal{C}) \equiv f(\mathcal{C})_{\mathcal{C}}$$

y un nuevo diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{C}}"'] & \mathbf{V} \arrow[d, "\iota_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bar{u} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(\bar{u}) \arrow[d, mapsto] \\ \bar{u}_{\mathcal{C}} \arrow[r, mapsto] & f(\bar{u})_{\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

.

Consideremos la aplicación P que envía las coordenadas respecto a $\mathcal{C}$ de cada vector de $\mathbf{V}$ a sus coordenadas respecto a $\mathcal{B}$. La aplicación P es un automorfismo de $\mathbb{R}^n$ y se identifica con la matriz regular $P \equiv \mathcal{C}_{\mathcal{B}} \equiv M(\mathcal{C}, \mathcal{B})$; podemos escribir:

$$\begin{aligned} P\colon \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \bar{u}_{\mathcal{C}} &\longmapsto \bar{u}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Usando las aplicaciones A, D y P obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "P"] \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \bar{u}_{\mathcal{B}} \arrow[r, mapsto] & f(\bar{u})_{\mathcal{B}} \\ \bar{u}_{\mathcal{C}} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & f(\bar{u})_{\mathcal{C}} \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Puesto que P es un isomorfismo, podemos usar P^{-1}, y reescribir el diagrama así:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "P"] \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} P\bar{x} \arrow[r, mapsto] & AP\bar{x} \arrow[d, mapsto] \\ \bar{x} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & D\bar{x} = P^{-1}AP\bar{x} \end{tikzcd}$$

donde, en el cuadro de la derecha, hemos aplicado a un vector arbitrario $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, partiendo desde la esquina inferior izquierda, los dos "caminos" del diagrama.

Se demuestra fácilmente que si $D\bar{x} = P^{-1}AP\bar{x}$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$D = P^{-1}AP.$$

En resumen, la ecuación matricial que relaciona las matrices que representan a un endomorfismo $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ en dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de $\mathbf{V}$, se escribe así:

$$(1.2) \qquad M(f, \mathcal{C}) = M(\mathcal{B}, \mathcal{C})\, M(f, \mathcal{B})\, M(\mathcal{C}, \mathcal{B})\,, \ \text{ o así: } f(\mathcal{C})_{\mathcal{C}} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}}\, f(\mathcal{B})_{\mathcal{B}}\, \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$$

Por gusto, y sin ánimo de liarnos demasiado, podemos juntar todos los diagramas y obtenemos el siguiente diagrama, algo más complicado, que resume la situación del cambio de coordenadas para un endomorfismo f:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\iota_{\mathcal{C}}"'] & \mathbf{V} \arrow[d, "\iota_{\mathcal{B}}"] \arrow[dd, bend left=60, "\iota_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "P"] \arrow[r, "D"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \bar{u} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[dd, mapsto, bend right=60] & f(\bar{u}) \arrow[d, mapsto] \arrow[dd, mapsto, bend left=60] \\ \bar{u}_{\mathcal{B}} \arrow[r, mapsto] & f(\bar{u})_{\mathcal{B}} \\ \bar{u}_{\mathcal{C}} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & f(\bar{u})_{\mathcal{C}} \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Observamos, pues, que el problema de la diagonalización de una aplicación lineal f es equivalente al siguiente **problema de diagonalización de matrices**:

> Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, saber si existen una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que se verifique la ecuación $D = P^{-1}AP$; en caso de que existan, encontrar tales D y P que la verifiquen. Si esto sucede decimos que A *es una matriz diagonalizable*.

Recordemos que A y $D \in \mathcal{M}_n$ son *matrices semejantes* si existe una matriz regular P tal que $D = P^{-1}AP$. Así el problema de diagonalización de matrices ("por semejanza" se añade a veces) es el siguiente:

> *$A \in \mathcal{M}_n$ es diagonalizable si y solo si A es semejante a una matriz diagonal.*

1.1. Valores y vectores propios. Subespacios propios

Damos el concepto de endomorfismo diagonalizable en la siguiente definición.

Definición 1.1. Sea $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$. Decimos que f *es un endomorfismo diagonalizable* si existe una base de $\mathbf{V}$ tal que la matriz que representa a f en esa base es una matriz diagonal.

Este concepto se puede expresar de otra manera equivalente según nos indica el siguiente resultado.

Lema 1.1. *Sean $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una aplicación lineal y $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ una base de $\mathbf{V}$. Se verifica que:*

$$M(f,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \textit{con} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

si y solo si

$$f(\bar{b}_1) = \lambda_1 \bar{b}_1, \quad f(\bar{b}_2) = \lambda_2 \bar{b}_2, \; \dots, \quad f(\bar{b}_n) = \lambda_n \bar{b}_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Demostración. La existencia de $\mathcal{B}$ verificando (1.3) es la definición de que f sea un endomorfismo diagonalizable. Veamos que (1.3) $\Rightarrow$ (1.4). Como dijimos en la ecuación (1.1), $f(\bar{u})_{\mathcal{B}} = M(f, \mathcal{B})\, \bar{u}_{\mathcal{B}}$, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{V}$. Ahora, puesto que $\bar{b}_1 = 1\bar{b}_1 + 0\bar{b}_2 + \cdots + 0\bar{b}_n$ se sigue que $\bar{b}_{1_{\mathcal{B}}} = (1, 0, \dots, 0)$. Procedamos a hallar las coordenadas de $f(\bar{b}_1)$ respecto a la base $\mathcal{B}$:

$$f(\bar{b}_1)_{\mathcal{B}} = M(f, \mathcal{B})\, \bar{b}_{1_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, $f(\bar{b}_1)_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, 0, \dots, 0)$, lo cual significa que

$$f(\bar{b}_1) = \lambda_1 \bar{b}_1 + 0\bar{b}_2 + \cdots + 0\bar{b}_n = \lambda_1 \bar{b}_1.$$

El mismo razonamiento, hecho para $i = 1$, nos vale para $i \in \{2, \dots, n\}$ y así nos queda:

$$f(\bar{b}_i)_{\mathcal{B}} = M(f, \mathcal{B})\, \bar{b}_{i_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \lambda_i \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

es decir, que $f(\bar{b}_i) = \lambda_i \bar{b}_i$, $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.

Veamos que (1.4) $\Rightarrow$ (1.3). Si $f(\bar{b}_j) = \lambda_j \bar{b}_j$ entonces en coordenadas es $f(\bar{b}_j)_{\mathcal{B}} = (0, \dots, \lambda_j, \dots, 0)$, con λ_j en la posición j-ésima. Como la columna j-ésima de la matriz $M(f, \mathcal{B})$ son las coordenadas de $f(\bar{b}_j)$ respecto a la base $\mathcal{B}$, se obtiene inmediatamente la expresión diagonal (1.3) de la matriz $M(f, \mathcal{B})$. $\square$

El lema anterior nos dice que la matriz que representa a f en la base $\mathcal{B}$ es una matriz diagonal cuando la imagen por f de cada vector $\bar{b}_i$ de $\mathcal{B}$ es proporcional a sí mismo; esto es, $\bar{b}_i$ y su imagen están en la misma recta vectorial. El hecho de que un vector, $\bar{u}$, y su imagen por un endomorfismo, $f(\bar{u})$, sean proporcionales es, como vemos, muy relevante; por ello lo destacamos en la siguiente definición.

Definición 1.2. Sea f un endomorfismo de $\mathbf{V}$.

1. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *valor propio* o *autovalor* de f si existe un vector $\bar{u} \in \mathbf{V}$, con $\bar{u} \neq \bar{0}$, tal que $f(\bar{u}) = \lambda\bar{u}$.

2. Decimos que $\bar{u} \in \mathbf{V}$, con $\bar{u} \neq \bar{0}$, es un *vector propio* o *autovector* de f correspondiente a un valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ si $f(\bar{u}) = \lambda\bar{u}$.

Notad que $f(\bar{0}) = \bar{0} = k\bar{0}$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$ y $\forall\, f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$; es decir, el vector $\bar{0}$ y su imagen por un endomorfismo son siempre proporcionales; por ello no es conveniente incluir al $\bar{0}$ en la anterior definición.

Otra manera de decir cuándo un endomorfismo es diagonalizable nos la da la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Un endomorfismo $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es diagonalizable si y solo si existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ formada por vectores propios de f.*

Demostración. Es una consecuencia del Lema 1.1 y de la Definición 1.2. □

Si aplicamos esta Definición 1.2 al caso $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$, y teniendo en cuenta que cada endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ se identifica con una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, obtenemos la siguiente definición, similar a la anterior, pero ahora con matrices cuadradas.

Definición 1.3. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un *valor propio* o *autovalor* de A si existe un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\bar{x} \neq \bar{0}$, tal que $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

2. Decimos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\bar{x} \neq \bar{0}$, es un *vector propio* o *autovector* de A, correspondiente al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, si $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

Como ya dijimos, representamos los vectores $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ con matrices columnas en las ecuaciones matriciales. Explícitamente, la ecuación matricial $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

El siguiente resultado relaciona las definiciones 1.2 y 1.3:

Lema 1.3. *Sean $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$ y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$. Sea $A = M(f, \mathcal{B}) \in \mathcal{M}_n$ la matriz que representa a f en la base $\mathcal{B}$. Se verifica:*

$$f(\bar{u}) = \lambda\bar{u} \iff A\,\bar{u}_{\mathcal{B}} = \lambda\,\bar{u}_{\mathcal{B}}\,, \tag{1.6}$$

Demostración. La ecuación (1.1) nos dice que $f(\bar{u})_{\mathcal{B}} = A\,\bar{u}_{\mathcal{B}}$; por otro lado, es elemental que $(\lambda\bar{u})_{\mathcal{B}} = \lambda\,\bar{u}_{\mathcal{B}}$; y el resultado se sigue inmediatamente. □

Proposición 1.4. *Dado $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$ y dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$, los valores propios de $M(f, \mathcal{B})$ son los mismos que los de f; y los vectores propios de $M(f, \mathcal{B})$ son las coordenadas de los vectores propios de f respecto a $\mathcal{B}$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Lema 1.3 y de las definiciones anteriores. □

Vamos a estudiar, ahora, el conjunto de vectores propios correspondientes a un valor propio.

Lema 1.5. *Sea $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $\mathbf{V}_\lambda = \{\bar{u} \in \mathbf{V} : f(\bar{u}) = \lambda\bar{u}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$.*

Demostración. Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}_\lambda$ y $k \in \mathbb{R}$; tenemos que

$$f(\bar{u} + \bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) = \lambda\bar{u} + \lambda\bar{v} = \lambda(\bar{u} + \bar{v})$$
$$f(k\bar{u}) = kf(\bar{u}) = k\lambda\bar{u} = \lambda\,k\bar{u}$$

entonces $\bar{u} + \bar{v} \in \mathbf{V}_\lambda$ y $k\bar{u} \in \mathbf{V}_\lambda$; lo cual termina la prueba. □

Definición 1.4. Sean $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$ y λ un valor propio de f. Definimos

$$\mathbf{V}_\lambda := \{\bar{u} \in \mathbf{V} : f(\bar{u}) = \lambda\bar{u}\}$$

como el *subespacio propio de f correspondiente al valor propio λ*.

La siguiente proposición resume algunas propiedades de los subespacios propios.

Proposición 1.6. *Sea* $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$*, con* $\dim \mathbf{V} = n$*. Si* λ *es un valor propio de* f *entonces:*

(a) $\dim \mathbf{V}_\lambda \geq 1$.

(b) $\mathbf{V}_\lambda = \ker(f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V})$.

(c) $\dim \mathbf{V}_\lambda = n - \operatorname{rango}(f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V})$.

(d) $\det(f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V}) = 0$.

Demostración. (a) Si λ es un valor propio es porque $\mathbf{V}_\lambda$ contiene algún vector distinto de $\bar{0}$, luego la dimensión de $\mathbf{V}_\lambda$ es mayor que 0, lo que prueba (a).

(b) Probemos primero que $\mathbf{V}_\lambda \subset \ker(f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V})$. Si $\bar{u} \in \mathbf{V}_\lambda$, se sigue que $f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$; luego

$$f(\bar{u}) - \lambda \bar{u} = (f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V})(\bar{u}) = \bar{0},$$

es decir que $\bar{u} \in \ker(f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V})$. Probemos ahora que $\ker(f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V}) \subset \mathbf{V}_\lambda$. Si $\bar{u} \in \ker(f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V})$ entonces $(f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V})(\bar{u}) = \bar{0}$; luego, $f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$ y, por tanto, $\bar{u} \in \mathbf{V}_\lambda$. Y así hemos probado (b).

(c) El teorema de las dimensiones para un endomorfismo $g \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ nos asegura que $\dim \mathbf{V} = \dim(\operatorname{im} g) + \dim(\ker g)$. Si esto se lo aplicamos al endomorfismo $g = f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V}$ y usamos (b) queda la formula en (c).

(d) Si λ es valor propio entonces por (a) y (b) $\ker(f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V}) \neq \{\bar{0}\}$. Luego $f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V}$ es un endomorfismo no inyectivo, y por tanto no es un isomorfismo; entonces necesariamente $\det(f - \lambda \mathbf{I}_\mathbf{V}) = 0$. $\square$

Si aplicamos esta proposición al caso $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$, como cada endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ se identifica con una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, obtenemos una proposición similar para matrices. Notad que λ es un valor propio de A si existe un $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, tal que $\bar{x} \in \ker(A - \lambda \mathbf{I}_n)$ o, equivalentemente, $(A - \lambda \mathbf{I}_n)\bar{x} = \bar{0}$, que explícitamente queda:

$$(A - \lambda \mathbf{I}_n)\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Fácilmente se prueba que equivale a la ecuación (1.5). Resumiendo tenemos:

Proposición 1.7. *Sea $A \in \mathcal{M}_n$, λ un valor propio de A y $\hat{\mathbf{V}}_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ el subespacio propio de A correspondiente a λ. Se verifica:*

(a) $\dim \hat{\mathbf{V}}_\lambda \geq 1$.

(b) $\hat{\mathbf{V}}_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbf{I}_n) \subset \mathbb{R}^n$.

(c) $\dim \hat{\mathbf{V}}_\lambda = n - \operatorname{rango}(A - \lambda \mathbf{I}_n)$.

(d) $\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$.

Los resultados de las Proposiciones 1.6 y 1.7 son equivalentes cuando $A = M(f, \mathcal{B})$, siendo $\mathcal{B}$ una base de $\mathbf{V}$; según se deduce del Lema 1.3 y de la Prop. 1.4.

Estudiamos ahora qué sucede con los subespacios propios correspondientes a valores propios diferentes.

Proposición 1.8. *Sea $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ valores propios de f, distintos entre sí. Si $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r$ son vectores propios correspondientes, respectivamente, a $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ entonces se verifica que $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r\}$ son linealmente independientes.*

Demostración. Hacemos la demostración por inducción. Si $r = 1$ es inmediato porque un vector distinto de $\bar{0}$ es por sí mismo linealmente independiente.

Supongamos cierto el resultado para $r - 1$ vectores. Partimos de la ecuación:

$$k_1 \bar{u}_1 + \cdots + k_r \bar{u}_r = \bar{0} \tag{1.8}$$

y hemos de probar que $k_1 = \cdots = k_r = 0$. Multiplicando por λ_1 queda

$$\lambda_1 k_1 \bar{u}_1 + \lambda_1 k_2 \bar{u}_2 + \cdots + \lambda_1 k_r \bar{u}_r = \bar{0}. \tag{1.9}$$

Por otra parte, aplicando f a ambos lados de la ecuación (1.8) queda

$$\begin{aligned} f(k_1 \bar{u}_1 + \cdots + k_r \bar{u}_r) = k_1 f(\bar{u}_1) + \cdots + k_r f(\bar{u}_r) = \\ = k_1 \lambda_1 \bar{u}_1 + k_2 \lambda_2 \bar{u}_2 + \cdots + k_r \lambda_r \bar{u}_r = \bar{0} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Restando a la ecuación (1.9) la última ecuación en (1.10) queda

$$k_2(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{u}_2 + \cdots + k_r(\lambda_1 - \lambda_r)\bar{u}_r = \bar{0}.$$

Como $\{\bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r\}$ son $r-1$ vectores propios correspondientes a valores propios distintos entre sí, entonces, por la hipótesis de inducción, serán linealmente independientes; y se sigue que $k_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 0, \dots, k_r(\lambda_r - \lambda_1) = 0$. Puesto que los autovalores son distintos entre sí, esto implica que $k_2 = 0, \dots, k_r = 0$; sustituyendo estos valores en (1.8), queda $k_1\bar{u}_1 = \bar{0}$ lo que implica que también $k_1 = 0$, puesto que $\bar{u}_1 \neq 0$. Así finaliza la prueba. □

Nota sobre la definición de suma directa.

Recordemos que si dos subespacios vectoriales $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$ de $\mathbf{V}$ verifican que $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\bar{0}\}$ se dice que la suma de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$ es *suma directa*, y se escribe $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$. En particular, si $\mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$ y $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\bar{0}\}$ se dice que $\mathbf{V}$ es suma directa de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$, y se denota por $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$.

Este concepto se generaliza de la siguiente manera: Sean $S_1, \dots, S_r$ subespacios vectoriales de $\mathbf{V}$. Decimos que la suma $S_1 + \cdots + S_r$ es suma directa si se verifica

$$S_j \cap \sum_{i=1,\, i\neq j}^{r} S_i = \{\bar{0}\},\ \forall j \in \{1, \dots, r\};$$

y escribimos $S_1 + \cdots + S_r = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$. Teniendo en cuenta lo dicho, introducimos la siguiente definición:

Definición 1.5. Sean $S_1, \dots, S_r$ subespacios vectoriales de $\mathbf{V}$. Decimos que $\mathbf{V}$ es suma directa de $S_1, \dots, S_r$, y escribimos $\mathbf{V} = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$, si se verifican las dos condiciones:

(a) $\mathbf{V} = S_1 + \cdots + S_r$,

(b) $S_j \cap \sum_{i=1,\, i\neq j}^{r} S_i = \{\bar{0}\},\ \forall j \in \{1, \dots, r\}$.

El resultado fundamental sobre sumas directas es el siguiente:

Proposición 1.9. *Sean $S_1, \dots, S_r$ subespacios vectoriales de $\mathbf{V}$. Cada vector $\bar{u} \in \mathbf{V}$ se expresa de manera única como $\bar{u} = \bar{u}_1 + \cdots + \bar{u}_r$, con $\bar{u}_i \in S_i$, si y solo si $\mathbf{V} = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por hipótesis, es inmediato que $\mathbf{V} = S_1 + \cdots + S_r$. Para probar (b) de la Def. 1.5, lo hacemos para $j = 1$, y se procedería igual para otro valor de j, sin más que reordenar los subespacios.

Si $\bar{u} \in S_1 \cap \sum_{i=2}^{r} S_i$, entonces, por un lado, $\bar{u} \in S_1$ y obtenemos la expresión:

$$\bar{u} = \bar{u} + \bar{0} + \cdots + \bar{0} \in S_1 + S_2 + \cdots + S_r,$$

y por otro lado, ya que $\bar{u} \in \sum_{i=2}^{r} S_i$, obtenemos esta otra expresión:

$$\bar{u} = \bar{0} + \bar{u}_2 + \cdots + \bar{u}_r \in S_1 + S_2 + \cdots + S_r.$$

Como la expresión de $\bar{u}$ en sumandos de S_i ha de ser única entonces necesariamente $\bar{u} = \bar{0}$. Con esto hemos probado que $S_1 \cap \sum_{i=2}^{r} S_i = \{\bar{0}\}$.

($\Leftarrow$) Dado $\bar{u} \in \mathbf{V}$, si suponemos que tenemos para $\bar{u}$ dos expresiones:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \cdots + \bar{u}_r = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \cdots + \bar{v}_r,$$

con $\bar{u}_i$, $\bar{v}_i \in S_i$, entonces

$$\bar{u}_1 - \bar{v}_1 = (\bar{v}_2 - \bar{u}_2) + \cdots + (\bar{v}_r - \bar{u}_r) \in S_2 + \cdots + S_r;$$

resultando que $\bar{u}_1 - \bar{v}_1 \in S_1 \cap \sum_{i=2}^{r} S_i$; luego, la condición (b) aplicada a $j = 1$ nos dice que $\bar{u}_1 - \bar{v}_1 = \bar{0}$ y, por tanto, $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$. Por análogo razonamiento se llega a que $\bar{u}_j = \bar{v}_j$ para los demás valores de j; y se sigue que la expresión $\bar{u} = \bar{u}_1 + \cdots + \bar{u}_r$, con $\bar{u}_i \in S_i$, es única. □

Proposición 1.10. *Sean $S_1, \dots, S_r$ subespacios vectoriales de $\mathbf{V}$ y supongamos que $\mathbf{V} = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$. Si tomamos una base $\mathcal{B}_i$ de cada S_i y unimos las bases en un solo conjunto ordenado de vectores $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$ entonces $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbf{V}$ y $\dim \mathbf{V} = \dim S_1 + \cdots + \dim S_r$.*

Demostración. Notad primero que, por la condición (b) de la Def. 1.5, si $i \neq j$ entonces $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \varnothing$; esto es, como conjuntos son disjuntos. Escribamos $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ ordenado de forma que primero están los vectores de $\mathcal{B}_1$, a continuación los de $\mathcal{B}_2$, y así sucesivamente. Puesto que $\mathbf{V} = S_1 + \cdots + S_r$ y cada $\mathcal{B}_i$ es una base de S_i, es claro que $\mathcal{B}$ es un sistema generador de $\mathbf{V}$.

Veamos que $\mathcal{B}$ son vectores linealmente independientes. Partiendo de la ecuación $\bar{0} = x_1\bar{b}_1 + \cdots + x_n\bar{b}_n$, y sumando por separado los vectores de cada base, obtenemos que $\bar{0} = \bar{v}_1 + \cdots + \bar{v}_r$, con $\bar{v}_i \in S_i$. En particular, tendríamos $\bar{v}_i = x_{i_1}\bar{b}_{i_1} + \cdots + x_{i_k}\bar{b}_{i_k}$, siendo $\mathcal{B}_i = (\bar{b}_{i_1}, \dots, \bar{b}_{i_k})$ (con $i_1, \dots, i_k$ dígitos consecutivos). Pero, por la Prop. 1.9, la descomposición en sumandos de $S_1, \dots, S_r$ del $\bar{0}$ es única, luego $\bar{v}_i = \bar{0}$; además, como $\mathcal{B}_i$ es una base, se verifica también que $x_{i_1} = \cdots = x_{i_k} = 0$. Puesto que esto es verdadero para todo $i = 1, \dots, r$, entonces todos los escalares $x_1, \dots, x_n$ deben ser 0. Luego $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ son linealmente independientes y $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbf{V}$.

Habiendo probado que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$ es una base, la fórmula de la dimensión de $\mathbf{V}$ es ahora evidente. □

Dicho esto sobre las sumas directas de subespacios vectoriales, volvamos a las propiedades de los subespacios propios de un endomorfismo.

Proposición 1.11. *Sea $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$, sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ valores propios de f, distintos entre sí, y llamemos $\mathbf{V}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{V}_{\lambda_r}$ a los correspondientes subespacios propios. Entonces se verifica:*

$$\mathbf{V}_{\lambda_j} \cap \sum_{i=1,\, i\neq j}^{r} \mathbf{V}_{\lambda_i} = \{\bar{0}\}, \tag{1.11}$$

para cada $j \in \{1, \dots, r\}$.

Demostración. Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que para algún j es falsa la igualdad (1.11). Sin perdida de generalidad, supongamos que para $j = 1$ no se verifica (1.11). Eso significa que existe un vector $\bar{v} \neq \bar{0}$ tal que $\bar{v} \in \mathbf{V}_{\lambda_1} \cap \sum_{i=2}^{r} \mathbf{V}_{\lambda_i}$, es decir, que $\bar{v}$ es vector propio para λ_1 y que $\bar{v} = \bar{u}_2 + \cdots + \bar{u}_r$ con $\bar{u}_2 \in \mathbf{V}_{\lambda_2}, \dots, \bar{u}_r \in \mathbf{V}_{\lambda_r}$; entonces $\{v, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r\}$

serían vectores propios de valores propios distintos entre sí y linealmente dependientes, lo cual está en contradicción con la Proposición 1.8. $\square$

Con tanta generalidad no se nos vaya a pasar algo importante:

Corolario 1.12. *Si $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$, y λ_1 y λ_2 son valores propios de f, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\mathbf{V}_{\lambda_1} + \mathbf{V}_{\lambda_2} = \mathbf{V}_{\lambda_1} \oplus \mathbf{V}_{\lambda_2}$ (es decir, $\mathbf{V}_{\lambda_1} \cap \mathbf{V}_{\lambda_2} = \{\bar{0}\}$).*

Demostración. Es por la Prop. 1.11 para $r = 2$, y por la definición de suma directa. $\square$

El siguiente resultado nos da un importante criterio para saber si un endomorfismo es diagonalizable.

Teorema 1.13. *Sea $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ todos los distintos valores propios de f, cuyos subespacios propios correspondientes son $\mathbf{V}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{V}_{\lambda_r}$. Se verifica:*

$$f \text{ es diagonalizable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_{\lambda_r}\,.$$

Demostración. Si f es diagonalizable, por la Prop. 1.2, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de vectores propios de f, cada uno de los cuales pertenecerá a algún $\mathbf{V}_{\lambda_i}$. Sin pérdida de generalidad, consideremos que la base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ está ordenada de forma que primero están los vectores de $\mathbf{V}_{\lambda_1}$, a continuación los de $\mathbf{V}_{\lambda_2}$, y así sucesivamente. Por tratarse de una base, cada $\bar{u} \in \mathbf{V}$ se puede expresar como $\bar{u} = x_1\bar{b}_1 + \cdots + x_n\bar{b}_n$; sumando por separado la combinación lineal de los vectores de cada $\mathbf{V}_{\lambda_i}$, obtendremos que $\bar{u} = \bar{u}_1 + \cdots + \bar{u}_r$, con $\bar{u}_i \in \mathbf{V}_{\lambda_i}$. Esto prueba que $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\lambda_1} + \cdots + \mathbf{V}_{\lambda_r}$. Por la Def. 1.5 y la Prop. 1.11, se concluye que $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_{\lambda_r}$.

Probemos el recíproco. Por la Prop. 1.10 si tomamos una base $\mathcal{B}_i$ de cada $\mathbf{V}_{\lambda_i}$ y las unimos en un solo conjunto ordenado obtenemos una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$. Como $\mathcal{B}$ está formada por vectores propios de f, se sigue de la Prop. 1.2 que f es diagonalizable. $\square$

1.2. Polinomio característico. Multiplicidad

En todo esta sección, $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial real con $\dim \mathbf{V} = n$. Veamos la siguiente sencilla proposición.

Proposición 1.14. *Sea $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$. Se verifica que:*

$$\lambda \text{ es un valor propio de } f \quad \Longleftrightarrow \quad \det(f - \lambda \mathbf{I}_{\mathbf{V}}) = 0.$$

Demostración. La implicación directa ($\Rightarrow$) se demostró en la Prop. 1.6(d). Para demostrar el recíproco: si $\det(f - \lambda \mathbf{I}_{\mathbf{V}}) = 0$ entonces el endomorfismo $f - \lambda \mathbf{I}_{\mathbf{V}}$ no es un automorfismo, por tanto no es inyectivo. Esto quiere decir que $\ker(f - \lambda \mathbf{I}_{\mathbf{V}}) \neq \{\bar{0}\}$; luego, existe $\bar{u} \neq \bar{0}$ tal que $(f - \lambda \mathbf{I}_{\mathbf{V}})(\bar{u}) = \bar{0}$, es decir, tal que $f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$. □

Si aplicamos esta proposición al caso $\mathbf{V} = \mathbb{R}^n$, y teniendo en cuenta que cada endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ se identifica con una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, obtenemos la siguiente proposición, similar a la anterior, pero ahora con matrices cuadradas.

Proposición 1.15. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se verifica que:*

$$\lambda \text{ es un valor propio de } A \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = 0.$$

Nota: Decimos que la traza y el determinante son *invariantes de un endomorfismo* porque, si bien se suelen calcular con la matriz que representa al endomorfismo en una base determinada, cuando cambiamos de base, los valores de la traza y del determinante de la nueva matriz que representa al endomorfismo no varían. Así, si $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$,

$$\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}\big(M(f, \mathcal{B})\big), \quad \text{y} \quad \det(f) = \det\big(M(f, \mathcal{B})\big)$$

para cualquier base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$.

Corolario 1.16. *Sea $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ y sea $A = M(f, \mathcal{B})$, la matriz que representa a f en una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica que*

$$\lambda \text{ es un valor propio de } f \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = 0.$$

Demostración. Como $M(f,\mathcal{B})-\lambda\mathbf{I}_n$ es la matriz que representa al endomorfismo $f-\lambda\mathbf{I}_\mathbf{V}$ en la base $\mathcal{B}$, se tiene que $\det(f-\lambda\mathbf{I}_\mathbf{V})=\det(M(f,\mathcal{B})-\lambda\mathbf{I}_n)$. Luego el resultado se sigue de la Proposición 1.14. $\square$

Vemos pues que, conocida $A=M(f,\mathcal{B})$, los valores propios de f son las soluciones de la ecuación $\det(A-\lambda\mathbf{I}_n)=0$. Con la notación $A=(a_{ij})$, la ecuación queda:

$$\det(A-\lambda\mathbf{I}_n)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{1.12}$$

donde consideramos a λ como la incógnita. Desarrollando el determinante, vemos que se trata de un polinomio de grado n con coeficientes reales en la indeterminada λ.

Introduzcamos la siguiente definición.

Definición 1.6. Sea $f\in\operatorname{End}\mathbf{V}$. Diremos que:

(a) El *polinomio característico de* f es $\det(f-\lambda\mathbf{I}_\mathbf{V})$.

(b) La *ecuación característica de* f es: $\det(f-\lambda\mathbf{I}_\mathbf{V})=0$.

La definición correspondiente para matrices cuadradas es:

Definición 1.7. Sea $A\in\mathcal{M}_n$. Diremos que:

(a) El *polinomio característico de* A es $\det(A-\lambda\mathbf{I}_n)$.

(b) La *ecuación característica de* A es: $\det(A-\lambda\mathbf{I}_n)=0$.

Con esta definición, se puede afirmar que las *raíces del polinomio característico* de una matriz A, o lo que es lo mismo, las soluciones de la ecuación característica de A, son los valores propios de A.

El resultado que viene a continuación es bastante claro, puesto que se puede considerar que dos matrices semejantes representan a un mismo endomorfismo en diferentes bases.

Lema 1.17. *Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, la misma ecuación característica.*

Demostración. Supongamos $B = P^{-1}AP$, con $A, B, P \in \mathcal{M}_n$ y $\det(P) \neq 0$; esto nos dice que A y B son matrices semejantes. Se obtiene que

$$B - \lambda \mathbf{I}_n = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}\mathbf{I}_n P = P^{-1}(A - \lambda \mathbf{I}_n)P$$

luego $A - \lambda \mathbf{I}_n$ y $B - \lambda \mathbf{I}_n$ son matrices semejantes. Como sabemos que dos matrices semejantes tienen el mismo determinante el resultado se sigue. □

Nota sobre las raíces de un polinomio con coeficientes reales.

Para estudiar en profundidad las raíces del polinomio característico, que tiene coeficientes reales, conviene conocer parte de la teoría de polinomios con coeficientes complejos, en particular, el llamado Teorema Fundamental del Álgebra, que daremos sin demostración.

- Un *polinomio de grado* n *en una indeterminada,* x*, con los coeficientes* a_j *en* $\mathbb{K}$ (aquí $\mathbb{K}$ será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), es una expresión como esta:

  $$p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n,$$

  estando dados los $a_j \in \mathbb{K}$, para $j = 0, 1, \ldots, n$, y con $a_n \neq 0$. Diremos que dos polinomios son *iguales* si todos los coeficientes del mismo grado son iguales.

- Una *raíz del polinomio* es un valor $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que

  $$p(\alpha) = a_0 + a_1\, \alpha + \cdots + a_n\, \alpha^n = 0.$$

  Para que α sea una raíz de $p(x)$ es necesario y suficiente que exista un polinomio $q(x)$ de grado $n-1$ tal que $p(x) = (x - \alpha)q(x)$. Ahora, si β es raíz de $q(x)$, existe un polinomio $s(x)$ de grado $n-2$ tal que $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)s(x)$. Se sigue que un polinomio de grado n tiene, como máximo, n raíces.

- Dada una raíz α de un polinomio $p(x)$ se llama *orden de multiplicidad* de α al mayor número natural k tal que $p(x) = (x-\alpha)^k q(x)$, para algún polinomio $q(x)$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son todas las raíces de $p(x)$ y $k_1, \dots, k_r$ sus respectivos órdenes de multiplicidad entonces

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r} q(x),$$

  donde $q(x)$ es un polinomio que no tiene raíces en $\mathbb{K}$.

- *Teorema Fundamental del Álgebra*: Todo polinomio $p(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz $\alpha \in \mathbb{C}$.

- Se sigue que todo polinomio con coeficientes complejos se puede escribir como:

$$p(x) = c(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r}$$

  con $c \in \mathbb{C}$ el coeficiente del término de mayor grado, con $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ todas sus raíces y con $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ sus respectivos órdenes de multiplicidad. Obviamente, se verifica que $\text{grado}(p(x)) = k_1 + \cdots + k_r$.

- Si consideramos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, se puede aplicar el resultado anterior a un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales; y éste puede tener raíces reales y complejas. Pero, como afirma el siguiente teorema, si un número complejo es una raíz de un polinomio con coeficientes reales entonces resulta que también es raíz el número complejo conjugado.

- *Teorema para polinomios con coeficientes reales*: Todo polinomio $p(x)$ con coeficientes en $\mathbb{R}$ se puede escribir como:

$$p(x) = c(x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r} (x^2 + b_1 x + c_1)^{h_1} \cdots (x^2 + b_s x + c_s)^{h_s}$$

  con $c \in \mathbb{R}$ el coeficiente del término de mayor grado, con $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ todas sus raíces y con $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ sus respectivos órdenes de multiplicidad, y donde cada polinomio $x^2 + b_i x + c_i$ tienen dos raíces complejas conjugadas (que no se considerarán raíces de $p(x)$ pues, en este caso, solo consideramos raíces reales). Obviamente, se verifica que el grado de $p(x)$ es igual a $k_1 + \cdots + k_r + 2h_1 + \cdots + 2h_s$.

Volviendo al polinomio característico de una matriz A, obtenemos fácilmente algunos términos del polinomio característico:

Proposición 1.18. *Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Se verifica que:*

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}_n) = \det(A) + \cdots + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n. \tag{1.13}$$

Demostración. Si calculamos el determinante $\det(A-\lambda\mathbf{I}_n)$ se observa (ver la fórmula (1.12)) que los términos de grado n y $n-1$ están en el sumando obtenido de multiplicar los términos de la diagonal principal: $(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$; de aquí resulta fácil deducir los términos $(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n$ del polinomio característico. También se observa en el desarrollo del determinante $\det(A-\lambda\mathbf{I}_n)$, que la suma de todos los términos que no multiplican a λ nos da precisamente el $\det(A)$, siendo éste, pues, el término independiente del polinomio característico de A. $\square$

Asociados a cada valor propio de un endomorfismo nos han aparecido dos números naturales: el orden de multiplicidad en el polinomio característico del endomorfismo y la dimensión del subespacio propio correspondiente al valor propio. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 1.8. Sean $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$ y λ_0 un valor propio de f. Diremos que:

(a) La *multiplicidad aritmética* de λ_0 es el orden de multiplicidad, k_{λ_0}, de λ_0 como raíz del polinomio característico de f, $p(\lambda) = \det(f - \lambda\mathbf{I}_{\mathbf{V}})$.

(b) La *multiplicidad geométrica* de λ_0 es la dimensión, $d_{\lambda_0} = \dim \mathbf{V}_{\lambda_0}$, del subespacio propio correspondiente.

La misma definición para matrices, formulada ligeramente distinta:

Definición 1.9. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y λ_0 un valor propio de A. Diremos que:

(a) La *multiplicidad aritmética* de λ_0 es el orden de multiplicidad, k_{λ_0}, de λ_0 como raíz del polinomio característico de A, $p(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{I}_n)$.

(b) La *multiplicidad geométrica* de λ_0 es $d_{\lambda_0} = n - \operatorname{rango}(A - \lambda_0\mathbf{I}_n)$.

Consultad la Prop. 1.7 para entender el apartado (b). Se verifica que la multiplicidad aritmética de un valor propio es mayor o igual que su multiplicidad geométrica; veámoslo:

Proposición 1.19. *Sean $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ y λ_0 un valor propio de f. Se verifica que $d_{\lambda_0} \leq k_{\lambda_0}$*

Demostración. Elijamos una base $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_d)$, del subespacio propio $\mathbf{V}_{\lambda_0} \subset \mathbf{V}$, correspondiente a λ_0. Claramente, $d \equiv d_{\lambda_0} = \dim \mathbf{V}_{\lambda_0}$. Completemos la base elegida $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_d)$ de $\mathbf{V}_{\lambda_0}$, hasta obtener una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_d, \dots, \bar{b}_n)$ del espacio vectorial $\mathbf{V}$. Entonces, la matriz que representa al endomorfismo f en esta base $\mathcal{B}$ será necesariamente una matriz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forma

$$M(f, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 \mathbf{I}_d & P \\ \hline 0 & Q \end{array}\right).$$

Para calcular el orden de multiplicidad de λ_0 escribamos el polinomio característico de f, que no es otro que:

$$\det(M(f, \mathcal{B}) - \lambda \mathbf{I}_n) = \left|\begin{array}{c|c} (\lambda_0 - \lambda)\mathbf{I}_d & P \\ \hline 0 & Q - \lambda \mathbf{I}_{n-d} \end{array}\right| = (\lambda_0 - \lambda)^d \det(Q - \lambda \mathbf{I}_{n-d}),$$

donde ya se observa que el orden de multiplicidad de la raíz λ_0 es como mínimo $d \equiv d_{\lambda_0}$; pudiendo ser de una multiplicidad aritmética mayor, si λ_0 fuese también raíz del polinomio $\det(Q - \lambda \mathbf{I}_{n-d})$. En cualquier caso la desigualdad se verifica. $\square$

1.3. El teorema fundamental de la diagonalización

Supongamos que tenemos un endomorfismo $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ del cual conocemos todos sus valores propios distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ con multiplicidades aritméticas $k_{\lambda_1}, \dots, k_{\lambda_r}$ y con multiplicidades geométricas $d_{\lambda_1}, \dots, d_{\lambda_r}$, respectivamente.

Veamos qué pasa si suponemos que f es diagonalizable. Entonces, por el Teorema 1.13, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_{\lambda_r}$, siendo cada $\mathbf{V}_{\lambda_i}$ el subespacio propio correspondiente a cada λ_i.

Aplicamos ahora la Prop. 1.10: Tomamos una base $\mathcal{B}_i$ de cada $\mathbf{V}_{\lambda_i}$ y unimos las bases en un sólo conjunto ordenado $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r)$, que resulta ser una base de $\mathbf{V}$ formada por vectores propios de f. Además, como $\dim \mathbf{V}_{\lambda_i} = d_{\lambda_i}$, se obtiene que $\dim \mathbf{V} = d_{\lambda_1} + \cdots + d_{\lambda_r}$.

Si procedemos como en el Lema 1.1, se verificará que la matriz $M(f, \mathcal{B})$ será una matriz diagonal $n \times n$ con la diagonal principal completa con los números:

$$\lambda_1, \overset{d_{\lambda_1}}{\ldots}, \lambda_1, \lambda_2, \overset{d_{\lambda_2}}{\ldots}, \lambda_2, \ \ldots \ , \lambda_r, \overset{d_{\lambda_r}}{\ldots}, \lambda_r$$

Restando λ en la diagonal y haciendo el determinante, el polinomio característico de esta matriz $M(f, \mathcal{B})$ será:

$$(\lambda_1 - \lambda)^{d_{\lambda_1}} (\lambda_2 - \lambda)^{d_{\lambda_2}} \ldots (\lambda_r - \lambda)^{d_{\lambda_r}},$$

con lo cual necesariamente d_{λ_j} es el orden de multiplicidad de la raíz λ_j, es decir, $d_{\lambda_j} = k_{\lambda_j}$ para cada j.

Este resultado, con su recíproco, se conoce como el *Teorema fundamental de la diagonalización de endomorfismos* que enunciamos a continuación.

Teorema 1.20. *Sea $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$, con $\dim \mathbf{V} = n$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ todos los distintos valores propios de f, con multiplicidades aritméticas $k_{\lambda_1}, \ldots, k_{\lambda_r}$ y con multiplicidades geométricas $d_{\lambda_1}, \ldots, d_{\lambda_r}$, respectivamente. La condición necesaria y suficiente para que f sea diagonalizable es que se verifiquen las dos condiciones siguientes:*

(a) $k_{\lambda_1} + \cdots + k_{\lambda_r} = n$. *Es decir, el polinomio característico de f tiene n raíces, si contamos cada una de ellas tantas veces como indique su orden de multiplicidad.*

(b) $k_{\lambda_j} = d_{\lambda_j}$, *para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$. Es decir, el orden de multiplicidad de cada valor propio como raíz del polinomio característico es igual a la dimensión de su correspondiente subespacio propio.*

Demostración. Hemos demostrado, antes del enunciado del teorema, que si f es diagonalizable se verifica (a) y (b). Probemos que (a) y (b) implican que f es diagonalizable. Por Teor. 1.13, basta probar que $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_{\lambda_r}$. Ahora bien, por la Prop. 1.11 se verifica la propiedad (b) de la definición de suma directa, Def. 1.5. Llamemos $\mathbf{W} := \mathbf{V}_{\lambda_1} + \cdots + \mathbf{V}_{\lambda_r} = \mathbf{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_{\lambda_r}$. Nos falta probar la propiedad (a): que $\mathbf{W} = \mathbf{V}$. Pero por la Prop. 1.10, como el subespacio vectorial $\mathbf{W}$ es suma directa, su dimensión será igual a la suma de las dimensiones de todos los $\mathbf{V}_{\lambda_j}$; pero según (a) y (b) esta dimensión es n; luego $\mathbf{W} = \mathbf{V}$. $\square$

Como corolario de este teorema, surge un resultado análogo para matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en cuanto éstas se identifican con endomorfismos de $\mathbb{R}^n$. Se deja al estudiante, como ejercicio, redactar el enunciado de lo que sería el *Teorema fundamental de la diagonalización de matrices* y, apoyándose en las proposiciones precedentes, probar que un endomorfismo f verifica las condiciones (a) y (b) del Teorema 1.20 si y sólo si la matriz que representa a f en una base $\mathcal{B}$ verifica las correspondientes condiciones (a) y (b) del teorema fundamental de la diagonalización de matrices.

1.4. Ejercicios del Tema 1.

1. Denotemos al plano vectorial por $\mathbf{V}_2$. Sea $f\colon \mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}_2$ un endomorfismo del plano vectorial de entre uno de los siguientes casos:

   - Simetría respecto a una recta vectorial.
   - Simetría central.
   - Giro de 90º alrededor del origen.
   - Giro de ángulo α alrededor del origen.
   - Proyección perpendicular sobre una recta vectorial.
   - Homotecia de razón $k > 0$ (esto es, $f(\vec{u}) = k\vec{u}$, $\forall\, \vec{u}$).

   Para cada uno de los casos:

a. Razonad gráficamente (con regla y compás) que f es una aplicación lineal.

b. Elegid alguna base $\mathcal{B} = (\vec{v}, \vec{w})$ de $\mathbf{V}_2$ y hallar la matriz $M(f, \mathcal{B})$ que representa al endomorfismo.

c. ¿Podéis encontrar un vector $\vec{v}$ tal que $\big(\vec{v}, f(\vec{v})\big)$ sea una base de $\mathbf{V}_2$? Hallar, en esos casos, la matriz que representa a f.

d. Analizad $f \circ f$ con ayuda de alguna matriz que represente a f.

e. Discutid los casos en que f es un endomorfismo diagonalizable.

2. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $\mathbf{V}$. Probar que si $f \circ f = \mathbf{I}_{\mathbf{V}}$ (la aplicación identidad de $\mathbf{V}$) entonces los únicos números que pueden ser valores propios de f son el 1 y el -1.

3. Sea $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$. Demostrar que si λ es un valor propio de f y damos un número real k entonces $k\lambda$ es un valor propio del endomorfismo kf.

4. Sean $f, g \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ y sean $c, k \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\bar{u}$ es un vector propio de f y de g. Probar que $\bar{u}$ es también vector propio de $cf + kg$.

5. Siendo f un endomorfismo de $\mathbf{V}$, demostrad que el 0 es un valor propio de f si y solo si f no es una aplicación inyectiva.

6. Calcular los valores propios de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Calcular los valores propios de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Calcular los valores propios del endomorfismo
$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = (x + y, y)$$
y determinar los correspondientes subespacios propios.

9. Sea $\mathcal{P}_1 = \{p(t) = a_{_0} + a_{_1}t : a_{_0}, a_{_1} \in \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 1 con coeficientes reales. Hallar los valores propios y los correspondientes subespacios propios del endomorfismo

$$f\colon \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_1, \quad p(t) \longmapsto tp'(t),$$

donde p' es la derivada de p.

10. ¿Para qué valores $\alpha \in \mathbb{R}$ es diagonalizable la matriz

$$A_{_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

y para cuáles no lo es?

11. Calcular los valores propios del endomorfismo

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x - 2y, -2x + 4y)$$

y determinar los correspondientes subespacios propios.

12. Calcular los valores propios del endomorfismo

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = (-x + y, -x - 3y)$$

y determinar los correspondientes subespacios propios.

Tema 2

Formas bilineales y formas cuadráticas

El concepto general de aplicación bilineal es el siguiente: Supongamos que tenemos tres espacios vectoriales $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ y una aplicación del producto cartesiano $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$:

$$\Psi \colon \mathbf{U} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}.$$

Si fijamos un vector $\bar{v}_0 \in \mathbf{V}$ podemos considerar la aplicación:

$$\Psi(\,\cdot\,, \bar{v}_0) \colon \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{W}, \quad \bar{u} \longmapsto \Psi(\bar{u}, \bar{v}_0);$$

igualmente, si fijamos un vector $\bar{u}_0 \in \mathbf{U}$ podemos considerar la aplicación:

$$\Psi(\bar{u}_0, \,\cdot\,) \colon \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{W}, \quad \bar{v} \longmapsto \Psi(\bar{u}_0, \bar{v}).$$

Decimos que Ψ es una *aplicación bilineal* si $\Psi(\,\cdot\,, \bar{v})$ y $\Psi(\bar{u}, \,\cdot\,)$ son aplicaciones lineales $\forall\, \bar{v} \in \mathbf{V}$ y $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{U}$. Bien entendido lo anterior, se puede decir que $\Psi \colon \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ es bilineal si es “lineal en cada factor”.

Damos a continuación algunos ejemplos de aplicaciones que son bilineales, como podréis fácilmente comprobar.

Ejemplos 2.1. **1.** Pongamos $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{W} = \mathbb{R}$, considerando $\mathbb{R}$ como espacio vectorial de dimensión uno. Fijado un $k \in \mathbb{R}$, definamos la aplicación:

$$\Psi_k \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \Psi_k(x, y) = kxy.$$

2. Dado un espacio vectorial real $\mathbf{V}$, recordemos que una *forma lineal* sobre $\mathbf{V}$ es una aplicación lineal $\varphi\colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$. El espacio vectorial que forman estas formas lineales es denotado por $\mathbf{V}^*$, el espacio dual de $\mathbf{V}$. La siguiente aplicación es bilineal:

$$\begin{array}{rcl} \Psi \ : \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\bar{u}, \varphi) & \longmapsto & \Psi(\bar{u}, \varphi) = \varphi(\bar{u}). \end{array}$$

3. La aplicación producto de matrices también es bilineal:

$$\begin{array}{rcl} \Psi \ : \mathcal{M}_{m,n} \times \mathcal{M}_{n,p} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,p} \\ (A, B) & \longmapsto & \Psi(A, B) = AB. \end{array}$$

4. El producto vectorial en $\mathbb{R}^3$, como aplicación $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \times \vec{y}$, es bilineal:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \quad \times \quad \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) & \longmapsto & \left(\left|\begin{smallmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{smallmatrix}\right|, -\left|\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{smallmatrix}\right|, \left|\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{smallmatrix}\right| \right). \end{array}$$

Una extensión del concepto de bilinealidad es el siguiente concepto de aplicación r veces lineal. A una aplicación del producto cartesiano de r espacios vectoriales $\mathbf{V}_1 \times \cdots \times \mathbf{V}_r$ sobre un espacio vectorial $\mathbf{W}$,

$$\Psi\colon \mathbf{V}_1 \times \cdots \times \mathbf{V}_r \longrightarrow \mathbf{W},$$

que sea “lineal en cada factor”, se le llama aplicación *r-lineal* o *multilineal.*

Un ejemplo de aplicación multilineal surge del concepto usual de determinante de una matriz. Podemos definir la *aplicación determinante en* $\mathbb{R}^n$ por

$$\det\colon \mathbb{R}^n \times \overset{n}{\cdots} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \det(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) := \det(A),$$

siendo $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matriz cuyas n columnas son las coordenadas de los n vectores $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$; es decir, $\bar{x}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$. La aplicación determinante en $\mathbb{R}^n$, así definida, es n-lineal; ello se sigue de una de las propiedades de los determinantes de matrices (concretamente ¿de qué propiedad?).

2.1. Formas bilineales. Expresión matricial y congruencia

En este Tema 2 vamos a ocuparnos de un tipo sencillo de aplicaciones bilineales, llamadas formas bilineales, que tienen gran importancia para equipar de nuevas e interesantes estructuras geométricas a un espacio vectorial. En esta sección, $\mathbf{V}$ será un espacio vectorial real de dimensión n.

Definición 2.1. Una *forma bilineal* ψ sobre $\mathbf{V}$ es una aplicación

$$\psi\colon \mathbf{V}\times\mathbf{V}\longrightarrow\mathbb{R}$$

tal que, dado cualquier $\bar u\in\mathbf{V}$, se verifica:

$$\begin{cases}\psi(\bar v+\bar w,\bar u)=\psi(\bar v,\bar u)+\psi(\bar w,\bar u)\\ \psi(\alpha\,\bar v,\bar u)=\alpha\,\psi(\bar v,\bar u)\end{cases}\qquad \forall\,\bar v,\bar w\in\mathbf{V},\ \forall\,\alpha\in\mathbb{R}, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases}\psi(\bar u,\bar v+\bar w)=\psi(\bar u,\bar v)+\psi(\bar u,\bar w)\\ \psi(\bar u,\alpha\,\bar v)=\alpha\,\psi(\bar u,\bar v)\end{cases}\qquad \forall\,\bar v,\bar w\in\mathbf{V},\ \forall\,\alpha\in\mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Se dice que ψ es lineal en el primer factor del producto cartesiano $\mathbf{V}\times\mathbf{V}$ porque, dado $\bar u\in\mathbf{V}$, las fórmulas (2.1) son equivalentes a que sea lineal la aplicación

$$\psi(\,\cdot\,,\bar u)\colon \mathbf{V}\longrightarrow\mathbb{R},\quad \bar v\longmapsto\psi(\bar v,\bar u);$$

e igualmente, se dice que ψ es lineal en el segundo factor porque, dado $\bar u\in\mathbf{V}$, (2.2) equivale a la linealidad de la aplicación

$$\psi(\bar u,\,\cdot\,)\colon \mathbf{V}\longrightarrow\mathbb{R},\quad \bar v\longmapsto\psi(\bar u,\bar v).$$

Pensad que, fijado $\bar u$, tanto $\psi(\,\cdot\,,\bar u)$ como $\psi(\bar u,\,\cdot\,)$ son formas lineales sobre $\mathbf{V}$, es decir, son elementos del espacio $\mathbf{V}^*$, dual de $\mathbf{V}$.

Las formas bilineales como espacio vectorial.

Se define de manera natural la suma $\psi + \psi'$ de dos formas bilineales sobre $\mathbf{V}$ y el producto de un escalar por una forma bilineal, $\alpha\psi$, del siguiente modo: $\forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$ y $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$(2.3) \qquad (\psi + \psi')(\bar{u}, \bar{v}) := \psi(\bar{u}, \bar{v}) + \psi'(\bar{u}, \bar{v})\,, \qquad (\alpha\psi)(\bar{u}, \bar{v}) := \alpha\, \psi(\bar{u}, \bar{v}).$$

Con estas operaciones resulta que:

Proposición 2.1. *El conjunto de formas bilineales sobre* $\mathbf{V}$ *es un espacio vectorial real, que denotamos por* $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R})$*, cuya dimensión es* n^2*.*

Demostración. Planteamos como ejercicio, al final del Tema 2, probar esta proposición. □

Pensad que el elemento "cero" de $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ es la forma ψ_0, definida por $\psi_0(\bar{u}, \bar{v}) = 0$, $\forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$. Llamaremos a ψ_0 la *forma bilineal nula.*

El espacio vectorial de las aplicaciones bilineales $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^*)$ de las aplicaciones lineales de $\mathbf{V}$ en el dual $\mathbf{V}^*$, mediante el isomorfismo definido en la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *La siguiente aplicación es un isomorfismo:*

$$(2.4) \qquad \mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^*)\,, \quad \psi \longmapsto \widetilde{\psi},$$

donde $\widetilde{\psi}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$ *se define por* $\widetilde{\psi}(\bar{u}) := \psi(\,\cdot\,, \bar{u})$*; es decir,* $\widetilde{\psi}(\bar{u})(\bar{v}) = \psi(\bar{v}, \bar{u})$.

Demostración. Dejamos como ejercicio para el final del tema la prueba de esta proposición. □

Expresión matricial de una forma bilineal.

Recordad que cada aplicación lineal está determinada si se conoce como actúa sobre los vectores de una base. Demostremos que lo mismo sucede con las aplicaciones bilineales.

En concreto, si tenemos una forma bilineal ψ sobre $\mathbf{V}$ y una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ de $\mathbf{V}$, entonces $\psi(\bar{u}, \bar{v})$ está determinado si conocemos los valores $\psi(\bar{b}_i, \bar{b}_j) \in \mathbb{R}$, $\forall\, i, j = 1, \dots, n$, y las coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ respecto a la base $\mathcal{B}$. Veámoslo:

Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$, con $\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{b}_i$ y $\bar{v} = \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{b}_j$. Para calcular $\psi(\bar{u}, \bar{v})$ usamos repetidamente las igualdades (2.1) y (2.2) de la Def. 2.1 y obtenemos:

$$\begin{aligned}\psi(\bar{u}, \bar{v}) &= \psi(x_1\bar{b}_1 + x_2\bar{b}_2 + \cdots + x_n\bar{b}_n\,, y_1\bar{b}_1 + y_2\bar{b}_2 + \cdots + y_n\bar{b}_n) = \\ &= x_1\psi(\bar{b}_1\,, \bar{v}) + x_2\psi(\bar{b}_2\,, \bar{v}) + \cdots + x_n\psi(\bar{b}_n\,, \bar{v}) = \\ &= x_1y_1\psi(\bar{b}_1, \bar{b}_1) + x_1y_2\psi(\bar{b}_1, \bar{b}_2) + x_2y_1\psi(\bar{b}_2, \bar{b}_1) + \\ &\quad + x_2y_2\psi(\bar{b}_2, \bar{b}_2) + \cdots + x_ny_n\psi(\bar{b}_n, \bar{b}_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j\,\psi(\bar{b}_i, \bar{b}_j).\end{aligned} \tag{2.5}$$

La ecuación así obtenida, $\psi(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j\,\psi(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$, la podemos expresar como una ecuación matricial. Para ello, definamos la siguiente matriz:

Definición 2.2. Sean una forma bilineal ψ sobre $\mathbf{V}$ y una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ de $\mathbf{V}$. Definimos la *matriz asociada* (o *que representa a*) ψ *en la base* $\mathcal{B}$ como la matriz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dada por:

$$M(\psi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \psi(\bar{b}_1, \bar{b}_1) & \psi(\bar{b}_1, \bar{b}_2) & \cdots & \psi(\bar{b}_1, \bar{b}_n) \\ \psi(\bar{b}_2, \bar{b}_1) & \psi(\bar{b}_2, \bar{b}_2) & \cdots & \psi(\bar{b}_2, \bar{b}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi(\bar{b}_n, \bar{b}_1) & \psi(\bar{b}_n, \bar{b}_2) & \cdots & \psi(\bar{b}_n, \bar{b}_n) \end{pmatrix}.$$

Podemos escribir simplificadamente $M(\psi, \mathcal{B}) = \big(\psi(\bar{b}_i, \bar{b}_j)\big)$. Incluso, es frecuente denotar $\psi(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$ por ψ_{ij}, cuando no hay confusión respecto a la base que estamos usando. En resumen:

$$M(\psi, \mathcal{B}) = \big(\psi(\bar{b}_i, \bar{b}_j)\big) = (\psi_{ij}).$$

Con ayuda de esta matriz, obtenemos en la siguiente proposición la llamada *expresión matricial de la forma bilineal* ψ respecto a una base.

Proposición 2.3. *Sean una forma bilineal ψ y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$. Se verifica:*

$$\psi(\bar{u},\bar{v}) = \bar{u}_{\mathcal{B}}^{t}\, M(\psi,\mathcal{B})\,\bar{v}_{\mathcal{B}}, \qquad \forall\,\bar{u},\bar{v}\in\mathbf{V},$$

donde $\bar{u}_{\mathcal{B}}$ y $\bar{v}_{\mathcal{B}}$ son las coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ respecto a $\mathcal{B}$, expresadas como matrices columna ($\bar{u}_{\mathcal{B}}^{t}$ es la matriz fila, traspuesta de $\bar{u}_{\mathcal{B}}$).

Demostración. Como hicimos previamente a la ecuación (2.5), pongamos $\mathcal{B} = (\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n)$ y demos dos vectores $\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{b}_i$ y $\bar{v} = \sum_{j=1}^{n} y_j\bar{b}_j$ de $\mathbf{V}$. Escribamos las coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ respecto a $\mathcal{B}$ como matrices columna:

$$\bar{u}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \bar{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Entonces, la ecuación (2.5) se puede escribir como la ecuación matricial:

$$\psi(\bar{u},\bar{v}) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} \psi(\bar{b}_1,\bar{b}_1) & \dots & \psi(\bar{b}_1,\bar{b}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi(\bar{b}_n,\bar{b}_1) & \dots & \psi(\bar{b}_n,\bar{b}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \bar{u}_{\mathcal{B}}^{t}\, M(\psi,\mathcal{B})\,\bar{v}_{\mathcal{B}}, \tag{2.6}$$

lo cual se comprueba en un fácil ejercicio. □

Proposición 2.4. *Dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$, la aplicación*

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{V},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \psi \longmapsto M(\psi,\mathcal{B})$$

es un isomorfismo. Además, respecto al isomorfismo de la Proposición 2.2, *se verifica que*

$$M(\psi,\mathcal{B}) = M(\widetilde{\psi},\mathcal{B},\mathcal{B}^*), \tag{2.7}$$

siendo $\mathcal{B}^*$ la base dual de $\mathcal{B}$.

Demostración. La prueba de que la aplicación dada en la primera parte de esta proposición es un isomorfismo, la dejamos como ejercicio propuesto al final de este Tema 2.

Probemos la igualdad de matrices (2.7). Dada una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n)$ de $\mathbf{V}$, recordamos que la base dual de $\mathcal{B}$ es la base $\mathcal{B}^* = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ de $\mathbf{V}^*$, donde cada forma lineal $\xi_i\colon \mathbf{V}\to\mathbb{R}$ está determinada por las condiciones:

$$\xi_i(\bar{b}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j; \end{cases}$$

esta δ_{ij} es la llamada delta de Kronecker.

Teniendo esto en cuenta, dada una forma lineal $\varphi \in \mathbf{V}^*$, es sencillo calcular sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}^*$, que son $(\varphi)_{\mathcal{B}^*} = \big(\varphi(\bar{b}_1), \dots, \varphi(\bar{b}_n)\big)$.

La aplicación lineal $\widetilde{\psi} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^*)$, definida en la Prop. 2.2, se representa por la matriz $M(\widetilde{\psi}, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$. Como sabemos que la columna j de esta matriz son las coordenadas de la forma lineal $\widetilde{\psi}(\bar{b}_j)$ respecto a la base $\mathcal{B}^*$, calculemos dichas coordenadas según lo dicho en el párrafo anterior. Entonces queda, usando la definición de $\widetilde{\psi}$, que la columna j de $M(\widetilde{\psi}, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$ es:

$$\big(\widetilde{\psi}(\bar{b}_j)\big)_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}(\bar{b}_j)(\bar{b}_1) \\ \dots \\ \widetilde{\psi}(\bar{b}_j)(\bar{b}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\bar{b}_1, \bar{b}_j) \\ \dots \\ \psi(\bar{b}_n, \bar{b}_j) \end{pmatrix};$$

y se ve que esta columna es igual a la columna j de $M(\psi, \mathcal{B})$.

Como esto es cierto $\forall\, j$, entonces la ecuación (2.7) se verifica. $\square$

La expresión matricial de una forma bilineal ante cambios de base. Matrices congruentes.

Dada otra base $\mathcal{C} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$ de $\mathbf{V}$, obtenemos otra matriz asociada a la forma bilineal ψ que denotamos por $M(\psi, \mathcal{C}) = \big(\psi(\bar{c}_i, \bar{c}_j)\big)$. Representando las coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en $\mathcal{C}$ por

$$\bar{u}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \bar{v}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

queda, análogamente a (2.6), la expresión matricial de ψ en la base $\mathcal{C}$:

$$\psi(\bar{u}, \bar{v}) = (x'_1 \dots x'_n) \begin{pmatrix} \psi(\bar{c}_1, \bar{c}_1) & \dots & \psi(\bar{c}_1, \bar{c}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi(\bar{c}_n, \bar{c}_1) & \dots & \psi(\bar{c}_n, \bar{c}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix} = \bar{u}_{\mathcal{C}}^{\,t}\, M(\psi, \mathcal{C})\, \bar{v}_{\mathcal{C}}. \tag{2.8}$$

Veamos en la siguiente proposición cómo se transforman las expresiones matriciales de ψ en las dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

Proposición 2.5. *Sea ψ una forma bilineal sobre $\mathbf{V}$. Dadas dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de $\mathbf{V}$, existe una matriz regular $P \in \mathcal{M}_n$ tal que*

$$M(\psi, \mathcal{C}) = P^t\, M(\psi, \mathcal{B})\, P\,. \tag{2.9}$$

Concretamente, tomando $P = M(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ se verifica la ecuación (2.9).

Demostración. Consideremos la matriz de cambio de base $P = M(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$. Dados $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$, obtenemos que $\bar{u}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}\, \bar{u}_{\mathcal{C}}$ y $\bar{v}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}\, \bar{v}_{\mathcal{C}}$, o bien denotando:

$$X \equiv \bar{u}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; Y \equiv \bar{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; X' \equiv \bar{u}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \; Y' \equiv \bar{v}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix},$$

nos queda:

$$X = PX', \qquad Y = PY'. \tag{2.10}$$

Ahora, llamando $A \equiv M(\psi, \mathcal{B})$ y $A' \equiv M(\psi, \mathcal{C})$, de las ecuaciones (2.6) y (2.8) se sigue la ecuación $X^t AY = X'^t A'Y'$. Sustituyendo X e Y según (2.10) obtenemos:

$$X'^t P^t APY' = X'^t A'Y'^t.$$

Como esto último es cierto para todo X' e Y', si lo aplicamos a $X'^t = (0 \dots 1 \dots 0)$, con 1 en la casilla i-ésima, y a $Y'^t = (0 \dots 1 \dots 0)$, con 1 en la casilla j-ésima, resulta que la casilla 'ij' de la matriz P^tAP y la casilla 'ij' de la matriz A' son iguales.

Como esto es cierto $\forall\, i, j = 1, \dots, n$, se sigue que $A' = P^tAP$. Además, como es sabido, $P = M(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ es una matriz regular. $\square$

Definición 2.3. Dadas dos matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se dice que A es *congruente* con A' si existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con $\det(P) \neq 0$, tal que $A' = P^tAP$.

La *relación de congruencia* en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se define así: Dadas $A, A' \in \mathcal{M}_n$,

$$A \sim A' \quad \text{si y sólo si} \quad A \text{ es congruente con } A'.$$

La relación de congruencia es una relación de equivalencia; la prueba de ello se deja como ejercicio al final de este Tema 2.

Con esta definición y la Prop. 2.5 anterior se sigue inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario 2.6. *Las matrices asociadas a una forma bilineal ψ en dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son matrices congruentes.*

Formas bilineales simétricas y antisimétricas.

Definición 2.4. Sea ψ una forma bilineal sobre $\mathbf{V}$. Diremos que ψ es una forma bilineal *simétrica* si

$$\psi(\bar{u},\bar{v}) = \psi(\bar{v},\bar{u}), \quad \forall \bar{u},\bar{v} \in \mathbf{V},$$

y diremos que ψ es *antisimétrica* si

$$\psi(\bar{u},\bar{v}) = -\psi(\bar{v},\bar{u}), \quad \forall \bar{u},\bar{v} \in \mathbf{V}.$$

Proposición 2.7. *Una forma bilineal ψ sobre $\mathbf{V}$ es simétrica (respectivamente, antisimétrica) si y solo si la matriz $M(\psi,\mathcal{B})$ asociada a ψ en una base cualquiera $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ es una matriz simétrica (respectivamente, antisimétrica).*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ de $\mathbf{V}$. Si la forma bilineal ψ es simétrica entonces, en particular, $\psi(\bar{b}_i,\bar{b}_j) = \psi(\bar{b}_j,\bar{b}_i)$; luego $M(\psi,\mathcal{B}) = M(\psi,\mathcal{B})^t$. Y si ψ es antisimétrica entonces $\psi(\bar{b}_i,\bar{b}_j) = -\psi(\bar{b}_j,\bar{b}_i)$; de aquí se sigue que $M(\psi,\mathcal{B}) = -M(\psi,\mathcal{B})^t$.

($\Leftarrow$) Usemos la expresión matricial de ψ en una base $\mathcal{B}$ dada en Prop. 2.3. Supongamos que $M(\psi,\mathcal{B}) \equiv A$ es simétrica, es decir, $A = A^t$; por la ecuación (2.6), y llamando $X \equiv \bar{u}_{\mathcal{B}}$, $Y \equiv \bar{v}_{\mathcal{B}}$, la prueba de que ψ es simétrica nos queda así:

$$\psi(\bar{u},\bar{v}) = X^tAY = X^tA^tY = (Y^tAX)^t \overset{(*)}{=} Y^tAX = \psi(\bar{v},\bar{u}),$$

donde la igualdad $(*)$ se sigue de que la matriz Y^tAX es de orden 1×1, es decir un escalar. Igual se prueba la antisimetría de ψ si partimos de $A = -A^t$ □

Proposición 2.8. *Cada forma bilineal ψ se descompone de manera única en la suma de una forma bilineal simétrica $\psi_{\mathbf{s}}$ y una antisimétrica $\psi_{\mathbf{a}}$, es decir, $\psi = \psi_{\mathbf{s}} + \psi_{\mathbf{a}}$.*

Demostración. Conviene saber ya que la parte simétrica y la parte antisimétrica de ψ se definen así:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{s}}(\bar{u},\bar{v}) &:= \tfrac{1}{2}\big(\psi(\bar{u},\bar{v}) + \psi(\bar{v},\bar{u})\big)\\
\psi_{\mathbf{a}}(\bar{u},\bar{v}) &:= \tfrac{1}{2}\big(\psi(\bar{u},\bar{v}) - \psi(\bar{v},\bar{u})\big),
\end{aligned}$$

aunque la prueba completa de este resultado se propone al final del tema en los ejercicios. $\square$

Las formas bilineales según sean simétricas o antisimétricas tienen aplicaciones geométricas muy diferentes. Por ejemplo, el determinante de matrices de orden 2, considerando las columnas de la matriz como vectores de $\mathbb{R}^2$, es una forma bilineal antisimétrica:

$$\begin{array}{rccl} \det\colon & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\vec{x}, \vec{y}) & \longmapsto & \left| \begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{smallmatrix} \right| = x_1 y_2 - x_2 y_1 \,. \end{array}$$

Por otra lado, el producto escalar estándar en $\mathbb{R}^2$ es una forma bilineal simétrica:

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \longmapsto & \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2. \end{array}$$

2.2. Métricas y formas cuadráticas. Clasificación

En este curso estamos interesados en las aplicaciones a la geometría de las formas bilineales simétricas, que llamaremos abreviadamente *métricas* (de un espacio vectorial). De ahora en adelante, nos centraremos en el estudio de las formas bilineales simétricas. En esta sección, seguirá siendo $\mathbf{V}$ un espacio vectorial real de dimensión finita.

Definición 2.5. Una *métrica* $\mathbf{g}$ *de un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ es una forma bilineal simétrica sobre $\mathbf{V}$,

$$\mathbf{g}\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R};$$

y decimos que $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ es un *espacio vectorial métrico*. Denotamos por $\mathcal{S}_2(\mathbf{V})$ al conjunto de todas las métricas de $\mathbf{V}$.

Damos a continuación algunos ejemplos de métricas en espacios vectoriales reales; comprobar que cada una de ellas es una forma bilineal simétrica es un buen ejercicio.

Ejemplos 2.2. 1. El producto escalar estándar en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \longmapsto & \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \end{array}$$

es una métrica que se llama la *métrica euclídea estándar* de $\mathbb{R}^n$.

2. Para cada par $(s,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, con $s + t \leq n$, definimos la métrica $\mathbf{g}^{s,t}$ de $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathbf{g}^{s,t}(\vec{x}, \vec{y}) = -x_1 y_1 - \cdots - x_s y_s + x_{s+1} y_{s+1} + \cdots + x_{s+t} y_{s+t}.$$

Cuando $(s,t) = (0,n)$ obtenemos la métrica euclídea estándar. Cuando $(s,t) = (1, n-1)$ obtenemos la llamada *métrica lorentziana estándar* de $\mathbb{R}^n$. En $\mathbb{R}^4$, la métrica del tipo $(s,t) = (1,3)$ (ó $(3,1)$ si se prefiere) es la que usa la Teoría de la Relatividad Especial.

3. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_n$ de matrices reales cuadradas, se puede definir la métrica:

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{g}\colon & \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A,B) & \longmapsto & \mathbf{g}(A,B) := \operatorname{tr}(A^t\, B) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}. \end{array}$$

4. En el espacio vectorial $\mathcal{P}_k$ de los polinomios de grado $\leq k$ con coeficientes reales, la expresión $\mathbf{g}(p(x), q(x)) = \displaystyle\int_0^1 p(t) q(t) dt$ define una métrica sobre $\mathcal{P}_k$. También se puede definir la misma métrica en el espacio vectorial $\mathcal{C}([0,1])$ de las funciones reales continuas en el intervalo $[0,1]$, aunque este espacio no es de dimensión finita.

Si $\mathbf{g}$ es una métrica de $\mathbf{V}$ y tenemos un subespacio vectorial $\mathbf{U}$ de $\mathbf{V}$, entonces la *restricción* de $\mathbf{g}$ a $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$, sigue siendo bilineal y simétrica; por tanto, $\mathbf{g}$ induce una métrica en cada subespacio $\mathbf{U}$. Así lo establecemos en la siguiente definición.

Definición 2.6. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial métrico y sea $\mathbf{U}$ un subespacio vectorial de $\mathbf{V}$. La métrica $\mathbf{g}_{\mathbf{U}}$ definida por

$$\mathbf{g}_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \times \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{g}_{\mathbf{U}}(\bar{u}, \bar{v}) := \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{U}.$$

es llamada la *métrica inducida* en $\mathbf{U}$ y $(\mathbf{U}, \mathbf{g}_{\mathbf{U}})$ es el *subespacio métrico inducido.*

Sabemos que el producto cartesiano $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ de dos espacios vectoriales es un espacio vectorial, llamado *espacio vectorial producto* de $\mathbf{U}$ por $\mathbf{V}$, con las operaciones siguientes: $\forall\, \bar{u}, \bar{u}' \in \mathbf{U},\ \forall\, \bar{v}, \bar{v}' \in \mathbf{V},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\bar{u}, \bar{v}) + (\bar{u}', \bar{v}') := (\bar{u} + \bar{u}', \bar{v} + \bar{v}'), \qquad \alpha\,(\bar{u}, \bar{v}) := (\alpha\,\bar{u}, \alpha\,\bar{v}).$$

Proposición 2.9. *Sean* $(\mathbf{U}, \mathbf{h})$ *y* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *dos espacios vectoriales métricos. Se define la aplicación* $\mathbf{b}\colon (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \times (\mathbf{U} \times \mathbf{V}) \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\mathbf{b}\big((\bar{u}, \bar{v}), (\bar{u}', \bar{v}')\big) := \mathbf{h}(\bar{u}, \bar{u}') + \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{v}').$$

Entonces se verifica que $(\mathbf{U} \times \mathbf{V}, \mathbf{b})$ *es un espacio vectorial métrico, llamado el* espacio métrico producto *de* $(\mathbf{U}, \mathbf{h})$ *por* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$*.*

Demostración. La prueba es un ejercicio fácil de hacer. □

Igual que el conjunto de las formas bilineales, $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ (ver Prop. 2.1), el conjunto de las métricas sobre $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial (en realidad, es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R})$), donde la *métrica nula* no es otra que la forma bilineal nula ψ_0.

Proposición 2.10. *El conjunto* $\mathcal{S}_2(\mathbf{V})$ *de las métricas de* $\mathbf{V}$ *tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión* $\frac{n(n+1)}{2}$*, siendo* $n = \dim \mathbf{V}$*.*

Demostración. La demostración se propone en los ejercicios del final de este Tema 2. □

Ortogonalidad respecto a una métrica.

Estudiamos ahora el concepto de ortogonalidad en relación con la definición de métrica, dada en la Def. 2.5.

En la geometría elemental del plano o del espacio y, en general, en la geometría vectorial euclídea que estudiaremos en el Tema 3, el concepto de ortogonalidad se corresponde con la noción de perpendicularidad: "formar ángulo recto". Advertimos que, en cambio, en otros espacios vectoriales métricos la noción de ortogonalidad a veces no se corresponde con esta idea intuitiva de perpendicularidad.

Definición 2.7. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial métrico. Diremos que:

- $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$ son *vectores ortogonales* (*respecto a* $\mathbf{g}$) si $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0$.
- Dos subespacios vectoriales $\mathbf{U}, \mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ son *subespacios ortogonales* (*respecto a* $\mathbf{g}$) si, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{U}$ y $\forall\, \bar{v} \in \mathbf{W}$, $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son vectores ortogonales.

Lema 2.11. *Sean* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial métrico y* $\mathbf{U}$ *un subespacio vectorial de* $\mathbf{V}$.

(a) *El conjunto* $\mathbf{U}^{\perp} := \{\bar{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0,\ \forall \bar{u} \in \mathbf{U}\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbf{V}$.

(b) *Si* $\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r\})$ *entonces* $\bar{v} \in \mathbf{U}^{\perp}$ *si y solo si se verifican las ecuaciones* $\mathbf{g}(\bar{u}_1, \bar{v}) = 0, \dots, \mathbf{g}(\bar{u}_r, \bar{v}) = 0$.

Demostración. Si $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces, $\forall \bar{u} \in \mathbf{U}$, se verifica $\mathbf{g}(\bar{u}, \alpha\bar{v} + \beta\bar{w}) = \alpha\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) + \beta\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{w}) = 0$; luego $\alpha\bar{v} + \beta\bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$, lo que finaliza la demostración de (a).

Como tenemos que $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r\}$ es un sistema generador (eventualmente, podría ser una base) de $\mathbf{U}$, entonces los vectores de $\mathbf{U}$ son las combinaciones lineales de $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r$. Con esto, resulta fácil probar (b), usando la definición de $\mathbf{U}^{\perp}$ y la bilinealidad de $\mathbf{g}$. □

Con esta proposición demostrada, podemos definir con coherencia lo siguiente.

Definición 2.8. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial métrico.

- Dado un subespacio $\mathbf{U}$ de $\mathbf{V}$, se define el *subespacio ortogonal* a $\mathbf{U}$ como el subespacio vectorial $\mathbf{U}^{\perp} := \{\bar{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0,\ \forall \bar{u} \in \mathbf{U}\}$.

- En particular, se define el *subespacio ortogonal* a $\bar{u} \in \mathbf{V}$ como el subespacio vectorial $\mathbf{L}(\bar{u})^{\perp} := \{\bar{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0\}$.

Notad que el vector $\bar{0}$ es ortogonal sí mismo y a todos los demás vectores de $\mathbf{V}$. Pero hay también ciertas métricas de $\mathbf{V}$, para las que hay vectores no nulos que son ortogonales a sí mismos e, incluso, ortogonales a todos los vectores de $\mathbf{V}$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ con la métrica $\mathbf{g}^{1,1}$ del ejemplo 2.2.2 el vector $\vec{x} = (1,1)$ es ortogonal a sí mismo: $\mathbf{g}^{1,1}(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. Y también en $\mathbb{R}^2$, pero con la métrica $\mathbf{g}^{0,1}$ el vector $\vec{e}_1 = (1,0)$ es ortogonal a todo vector: $\mathbf{g}^{0,1}(\vec{e}_1, \vec{v}) = 0$, $\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

Proposición 2.12. *Sea* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial métrico. Si existe* $\bar{u} \in \mathbf{V}$ *que verifica* $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) \neq 0$ *entonces*

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}(\bar{u}) \oplus \mathbf{L}(\bar{u})^{\perp}. \tag{2.11}$$

Demostración. Sea un vector $\bar{u} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) \neq 0$. Demos un vector cualquiera $\bar{v} \in \mathbf{V}$ y escribamos $\bar{v} = k\bar{u} + \bar{w}$, siendo $k = \frac{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})}{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{u})}$. Se verifica que

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{w}) = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v} - k\bar{u}) = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) - k\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) - \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0,$$

es decir, que $\bar{w} \in \mathbf{L}(\bar{u})^{\perp}$. Así, hemos descompuesto un vector arbitrario $\bar{v}$ en suma de $k\bar{u} \in \mathbf{L}(\bar{u})$ y $\bar{w} \in \mathbf{L}(\bar{u})^{\perp}$. Veamos que esta descomposición es única: Si $\bar{v} = k'\bar{u} + \bar{w}'$, con $\bar{w}' \in \mathbf{L}(\bar{u})^{\perp}$, entonces, haciendo $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{g}(\bar{u}, k'\bar{u} + \bar{w}')$, obtenemos que $k' = \frac{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})}{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{u})} = k$, y de aquí se sigue que $\bar{w}' = \bar{w}$. Luego el resultado es consecuencia de la Prop. 1.9. $\square$

Nota: En los espacios vectoriales métricos lorentzianos, como en el estándar lorentziano de $\mathbb{R}^n$ (ver Ejem. 2.2.2), existen vectores $\vec{u} \neq \vec{0}$ tales que $\mathbf{g}_{1,n-1}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$. Para estos vectores, llamados *vectores de tipo luz*, no se verifica la ecuación (2.11). Se verifica, en cambio, que $\mathbf{L}(\vec{u}) \subset \mathbf{L}(\vec{u})^{\perp}$; aunque sí sigue siendo válido que $\dim\big(\mathbf{L}(\vec{u})^{\perp}\big) = n-1$ (si queréis, tratad de probarlo cuando $n = 2$ ó $n = 3$).

Forma cuadrática asociada a una métrica.

Las formas cuadráticas siempre están asociadas a formas bilineales. Si ψ es una forma bilineal, la forma cuadrática asociada es la aplicación $F_\psi \colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, dada por $F_\psi(\bar{u}) = \psi(\bar{u}, \bar{u})$, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{V}$. Ahora bien, la forma cuadrática F_ψ sólo depende de la parte simétrica de ψ, respecto a la descomposición de una forma bilineal en parte simétrica y parte antisimétrica: $\psi = \psi_{\mathbf{s}} + \psi_{\mathbf{a}}$, puesto que $\psi_{\mathbf{a}}(\bar{u}, \bar{u}) = 0$, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{V}$. Por lo tanto, las formas cuadráticas se pueden definir asociándolas sólo a formas bilineales simétricas, es decir, a métricas.

Definición 2.9. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial real. Una *forma cuadrática sobre* $\mathbf{V}$ se define como una aplicación $F \colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que verifica:

(a) $F(\alpha\bar{u}) = \alpha^2 F(\bar{u})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{u} \in \mathbf{V}$.

(b) La aplicación $\mathbf{g}_{F} \colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ es una métrica de $\mathbf{V}$ si definimos:

$$\mathbf{g}_{F}(\bar{u}, \bar{v}) := \tfrac{1}{2}(F(\bar{u} + \bar{v}) - F(\bar{u}) - F(\bar{v})), \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}.$$

Las formas cuadráticas que aquí tratamos se llaman *reales* porque están definidas sobre un espacio vectorial real y están valuadas en $\mathbb{R}$. Notad que $\mathbf{g}_{F}$ está unívocamente determinada por F. Se suele decir que la *forma polar* de F es la métrica $\mathbf{g}_{F}$. (Probad como ejercicio que (a) implica que $F(\bar{0}) = 0$.)

Proposición 2.13. *Sea* $\mathbf{g}$ *una métrica de* $\mathbf{V}$*. La aplicación* $F_{\mathbf{g}} \colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$*,* $F_{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u})$ *verifica:*

(a) $F_{\mathbf{g}}(\alpha\bar{u}) = \alpha^2 F_{\mathbf{g}}(\bar{u}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \bar{u} \in \mathbf{V}$.

(b) $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}(F_{\mathbf{g}}(\bar{u} + \bar{v}) - F_{\mathbf{g}}(\bar{u}) - F_{\mathbf{g}}(\bar{v})), \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$.

Demostración. Probemos (a): $F_{\mathbf{g}}(\alpha\bar{u}) = \mathbf{g}(\alpha\bar{u}, \alpha\bar{u}) = \alpha^2 \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) = \alpha^2 F_{\mathbf{g}}(\bar{u})$.

Para probar (b), procedemos así:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(F_{\mathbf{g}}(\bar{u} + \bar{v}) - F_{\mathbf{g}}(\bar{u}) - F_{\mathbf{g}}(\bar{v})) &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{g}(\bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v}) - \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) - \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{v})) = \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) + \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) + \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{u}) + \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{v}) - \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) - \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{v})) = \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) + \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{u})) = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}).
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del hecho de que $\mathbf{g}$ es simétrica. □

Con esta proposición se ha probado que $F_{\mathbf{g}}$ es una forma cuadrática sobre $\mathbf{V}$ y que su forma polar es $\mathbf{g}$. Introducimos esto en forma de definición.

Definición 2.10. Sea $\mathbf{g}$ una métrica de $\mathbf{V}$. Definimos la *forma cuadrática $F_{\mathbf{g}}$ asociada* a $\mathbf{g}$ como la forma cuadrática sobre $\mathbf{V}$:

$$\begin{array}{rccl} F_{\mathbf{g}}: & \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \bar{u} & \longmapsto & F_{\mathbf{g}}(\bar{u}) := \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}). \end{array}$$

La fórmula (b) de la Prop. 2.13 se llama la *descomposición polar* de $\mathbf{g}$. Por dicha proposición, se ve que toda forma cuadrática es siempre la forma cuadrática asociada a una métrica. La aplicación $F \mapsto \mathbf{g}_F$ es una biyección entre las formas cuadráticas y las métricas, y es fácil ver que su inversa aplica $\mathbf{g} \mapsto F_{\mathbf{g}}$; con lo cual será equivalente el estudio de las métricas al estudio de las formas cuadráticas sobre $\mathbf{V}$.

Proposición 2.14. *El conjunto $\mathcal{F}(\mathbf{V})$ de todas las formas cuadráticas sobre $\mathbf{V}$, con las operaciones naturales de suma y producto por escalares, es un espacio vectorial real. Además, la aplicación entre las formas cuadráticas y las métricas dada por:*

$$\mathcal{F}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathcal{S}_2(\mathbf{V}), \qquad F \longmapsto \mathbf{g}_F$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. La demostración se os propone en dos ejercicios al final del Tema 2. □

Clasificación de las métricas y de las formas cuadráticas.

Las métricas y, por consiguiente, las formas cuadráticas pueden clasificarse siguiendo ciertos criterios que resumimos en la siguiente definición.

Definición 2.11. Sea $\mathbf{g}$ una métrica, no nula, de un espacio vectorial $\mathbf{V}$. Diremos que:

A) $\mathbf{g}$ es una *métrica no degenerada* si se verifica que:

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \ \forall \, \bar{v} \in \mathbf{V}, \quad \text{implica que} \ \ \bar{u} = \bar{0}.$$

Equivalentemente, $\mathbf{g}$ es *no degenerada* si se verifica que:

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{g}(\bar{u}', \bar{v}), \ \forall \, \bar{v} \in \mathbf{V}, \quad \text{implica que} \ \ \bar{u} = \bar{u}'.$$

B) $\mathbf{g}$ es una *métrica degenerada* si:

$$\exists \, \bar{u} \in \mathbf{V}, \ \text{con} \ \bar{u} \neq \bar{0}, \ \text{tal que} \ \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \ \forall \, \bar{v} \in \mathbf{V}.$$

(Notad que A es lo contrario de B.)

Si $\mathbf{g}$ es no degenerada, diremos que:

A1) $\mathbf{g}$ es *definida positiva* si: $\forall \, \bar{u} \in \mathbf{V}$ con $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) > 0$.

A2) $\mathbf{g}$ es *definida negativa* si: $\forall \, \bar{u} \in \mathbf{V}$ con $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) < 0$.

A3) $\mathbf{g}$ es *indefinida no degenerada* si: $\exists \, \bar{u} \in \mathbf{V}$ con $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) > 0$ y $\exists \, \bar{v} \in \mathbf{V}$ con $\mathbf{g}(\bar{v}, \bar{v}) < 0$.

Si $\mathbf{g}$ es degenerada, diremos que:

B1) $\mathbf{g}$ es *semidefinida positiva* si: $\forall \, \bar{u} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) \geq 0$.

B2) $\mathbf{g}$ es *semidefinida negativa* si: $\forall \, \bar{u} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) \leq 0$.

B3) $\mathbf{g}$ es *indefinida degenerada* si: $\exists \, \bar{u} \in \mathbf{V}$ con $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) > 0$ y $\exists \, \bar{v} \in \mathbf{V}$ con $\mathbf{g}(\bar{v}, \bar{v}) < 0$.

A las métricas definidas positivas se las denomina *métricas euclídeas* y nos ocuparemos de ellas en el Tema 3.

Esta misma clasificación sirve igualmente para las formas cuadráticas: Diremos que una forma cuadrática F, no nula, es *no degenerada* (*definida positiva*, *definida negativa* o *indefinida no degenerada*) o *degenerada* (*semidefinida positiva*, *semidefinida negativa* o *indefinida degenerada*) según lo sea la correspondiente métrica asociada $\mathbf{g}_F$.

Recordad lo dicho para formas bilineales en la Def. 2.2 y la Prop. 2.3. Lo mismo se aplica para las métricas, siendo ahora:

$$M(\mathbf{g},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\bar{b}_1,\bar{b}_1) & \mathbf{g}(\bar{b}_1,\bar{b}_2) & \cdots & \mathbf{g}(\bar{b}_1,\bar{b}_n) \\ \mathbf{g}(\bar{b}_2,\bar{b}_1) & \mathbf{g}(\bar{b}_2,\bar{b}_2) & \cdots & \mathbf{g}(\bar{b}_2,\bar{b}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{g}(\bar{b}_n,\bar{b}_1) & \mathbf{g}(\bar{b}_n,\bar{b}_2) & \cdots & \mathbf{g}(\bar{b}_n,\bar{b}_n) \end{pmatrix} \equiv \big(\mathbf{g}(\bar{b}_i,\bar{b}_j)\big).$$

Se suele escribir $(\mathbf{g}_{ij}) \equiv \big(\mathbf{g}(\bar{b}_i,\bar{b}_j)\big)$ si se sobrentiende la base que se emplea.

Proposición 2.15. *Una métrica* $\mathbf{g}$*, no nula, sobre* $\mathbf{V}$*, con* $\dim \mathbf{V} = n$*, es degenerada si y solo si* $\det\big(M(\mathbf{g},\mathcal{B})\big) = 0$*, para cualquier base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbf{V}$*. Por tanto,* $\mathbf{g}$ *es no degenerada si y solo si* $\det\big(M(\mathbf{g},\mathcal{B})\big) \neq 0$.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbf{V}$ y denotemos $A = M(\mathbf{g},\mathcal{B})$ (matriz no nula por hipótesis). Si $\mathcal{B}'$ es otra base de $\mathbf{V}$ y denotamos $A' = M(\mathbf{g},\mathcal{B}')$, entonces, según la ecuación (2.9) de la Prop. 2.5, $A' = P^t A P$, con $\det(P) \neq 0$. Se deduce que $\det(A') = \big(\det(P)\big)^2 \det(A)$, por lo cual, si la proposición es cierta para una base, es cierta para cualquier base.

Supongamos que $\mathbf{g}$ es degenerada. Por definición, $\mathbf{g}$ es degenerada si y solo si

$$\exists\, \bar{u} \neq \bar{0} \text{ tal que } \mathbf{g}(\bar{u},\bar{v}) = 0,\ \forall\, \bar{v} \in \mathbf{V}. \tag{2.12}$$

Representando las coordenadas en $\mathcal{B}$ de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, como matrices columna, por $\bar{u}_{\mathcal{B}} = X$ y $\bar{v}_{\mathcal{B}} = Y$, la condición (2.12) es equivalente a:

$$\exists\, X \neq \bar{0} \text{ tal que } X^t A Y = 0,\ \forall\, Y. \tag{2.13}$$

Puesto que $J = X^t A$ es una matriz fila e Y es una matriz columna, se verifica que: $JY = 0,\ \forall\, Y$, si y sólo si $J = (0 \cdots 0)$. Por ello, la condición (2.13) es equivalente a:

$$\exists\, X \neq \bar{0} \text{ tal que } X^t A = (0 \cdots 0).$$

Si desarrollamos la ecuación matricial $X^t A = (0 \cdots 0)$ en las ecuaciones de sus componentes, obtenemos un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas, cuyos coeficientes son las componentes de la matriz A y sus incógnitas son las componentes de la matriz columna X, digamos $x_1, \dots, x_n$. Este sistema lineal homogéneo tendrá alguna solución $X \neq \bar{0}$ si y solo si $\det(A) = 0$. Así que $\mathbf{g}$ es degenerada si y solo si $\det M(\mathbf{g}, \mathcal{B}) = 0$ y, por tanto, $\mathbf{g}$ es no degenerada si y solo si es $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ es regular. □

Según esta proposición, también podemos decir que $\mathbf{g}$ es no degenerada si y sólo si $\operatorname{rango} M(\mathbf{g}, \mathcal{B}) = \dim \mathbf{V}$; profundicemos un poco más en esto del rango.

Lema 2.16. *Dada una métrica* $\mathbf{g}$ *de* $\mathbf{V}$*, el rango de la matriz* $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ *es el mismo para cualquier base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbf{V}$*.*

Demostración. Se sigue del hecho de que $A = M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ y $A' = M(\mathbf{g}, \mathcal{B}')$, con $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbf{V}$, son matrices congruentes; es decir, existe una matriz regular P tal que $A' = P^t A P$. Como P^t es también regular, resulta que A y A' son equivalentes, es decir, que son apropiadas para representar a una misma aplicación lineal; por tanto tienen el mismo rango. □

El lema precedente nos permite la siguiente definición.

Definición 2.12. Se define el *rango de una métrica* $\mathbf{g}$ de $\mathbf{V}$ como el rango de cualquier matriz representativa de $\mathbf{g}$ en una base de $\mathbf{V}$. Llamamos *nulidad* de $\mathbf{g}$ a la diferencia entre $\dim \mathbf{V}$ y el rango de $\mathbf{g}$. Se define también

$$N_{\mathbf{g}} := \{\bar{u} \in \mathbf{V} : \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0, \ \forall\, \bar{v} \in \mathbf{V}\},$$

llamado el *núcleo de* $\mathbf{g}$ *o de su forma cuadrática asociada.*

Proposición 2.17. *Dada una métrica* $\mathbf{g}$ *de* $\mathbf{V}$*, se verifica:*

(a) $N_{\mathbf{g}}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbf{V}$*.*

(b) $N_{\mathbf{g}} = \{\bar{0}\}$ *si y solo si* $\mathbf{g}$ *es no degenerada.*

(c) $\dim N_{\mathbf{g}}$ *es igual a la nulidad de* $\mathbf{g}$

Demostración. La prueba se deja aquí como ejercicio. □

Ley de inercia de Sylvester.

El teorema que se conoce como *Ley de inercia de Sylvester* establece que dada una métrica $\mathbf{g}$ de $\mathbf{V}$, cualquier matriz diagonal que represente a $\mathbf{g}$ en cierta base de $\mathbf{V}$ tendrá en su diagonal principal un número de términos negativos y un número de términos positivos, cuya cantidad es independiente de cual sea la base que consiga diagonalizar a $\mathbf{g}$. Por ello se dice que ese par de números naturales es un *invariante* de las métricas y se conoce como la *signatura de* $\mathbf{g}$. Pero antes nos aseguraremos que para cualquier métrica existen bases que la "diagonalizan".

Proposición 2.18. *Todo espacio vectorial métrico* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$*, admite una base* $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ *tal que* $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ *es una matriz diagonal. Es decir, existe una base* $\mathcal{B}$ *de vectores ortogonales entre sí; esto es,* $\mathbf{g}(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = 0, \ \ \forall\, i \neq j$*.*

Demostración. Si $\mathbf{g} = \psi_0$, la métrica nula, entonces en cualquier base la matriz de ψ_0 es la matriz nula que es diagonal. Supondremos que $\mathbf{g} \neq \psi_0$ y vamos a probarlo por inducción sobre la dimensión de $\mathbf{V}$. El resultado es trivial para $\dim \mathbf{V} = 1$ Hagamos la siguiente hipótesis de inducción: la proposición se verifica para métricas en espacios vectoriales de dimensión $n-1$.

Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial métrico con $\dim \mathbf{V} = n$. Como $\mathbf{g}$ no es nula, la correspondiente forma cuadrática $F_{\mathbf{g}}$ tampoco es nula y, por tanto, existirá $\bar{u} \in \mathbf{V}$ tal que $F_{\mathbf{g}}(\bar{u}) = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) \neq 0$. La Proposición 2.12 nos daba la fórmula (2.11):

$$\mathbf{V} = \mathbf{L}(\bar{u}) \oplus \mathbf{L}(\bar{u})^{\perp};$$

y como $\dim(\mathbf{L}(\bar{u})) = 1$ entonces $\dim\left(\mathbf{L}(\bar{u})^{\perp}\right) = n-1$. Entonces, por la hipótesis de inducción aplicada a $(\mathbf{L}(\bar{u})^{\perp}, \mathbf{g}_{\mathbf{L}(\bar{u})^{\perp}})$, que es el subespacio métrico inducido de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ (recordad la Definición 2.6), existirá una base $(\bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$ de $\mathbf{L}(\bar{u})^{\perp}$ formada por vectores ortogonales entre sí. Ahora, de la fórmula (2.11) y por las propiedades de la suma directa es inmediato verificar que $\mathcal{B} = (\bar{u} \equiv \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$ es una base de $\mathbf{V}$ de vectores ortogonales entre sí y, por tanto, $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ es una matriz diagonal. □

Teorema 2.19 (Ley de inercia de Sylvester)**.** *Sea* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial métrico con* $\dim \mathbf{V} = n$. *Entonces para cualquier base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbf{V}$ *tal que* $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ *es diagonal, las cantidades de números positivos, de negativos y de ceros que hay en la diagonal principal de* $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ *son siempre las mismas.*

Demostración. Sean $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ y $\mathcal{C} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$ dos bases de $\mathbf{V}$ tales que la matriz de $\mathbf{g}$ correspondiente sea diagonal, es decir:

$$M(\mathbf{g}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\bar{b}_1,\bar{b}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{g}(\bar{b}_2,\bar{b}_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{g}(\bar{b}_n,\bar{b}_n) \end{pmatrix},$$

$$M(\mathbf{g}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\bar{c}_1,\bar{c}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{g}(\bar{c}_2,\bar{c}_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{g}(\bar{c}_n,\bar{c}_n) \end{pmatrix}.$$

Por la Prop. 2.18 tales bases existen. Por el Lema 2.16, ambas matrices tienen el mismo rango y por tanto la misma cantidad de ceros en la diagonal principal; entonces bastará probar que la cantidad de números negativos es la misma.

Supongamos que ambas matrices tienen los términos estrictamente negativos colocados en primer lugar, reordenando las bases si fuera necesario, de tal modo que:

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\bar{b}_1, \bar{b}_1) < 0, \dots, \ \mathbf{g}(\bar{b}_s, \bar{b}_s) < 0, \ \mathbf{g}(\bar{b}_{s+1}, \bar{b}_{s+1}) \geq 0, \dots, \ \mathbf{g}(\bar{b}_n, \bar{b}_n) \geq 0, \\ \mathbf{g}(\bar{c}_1, \bar{c}_1) < 0, \dots, \ \mathbf{g}(\bar{c}_r, \bar{c}_r) < 0, \ \mathbf{g}(\bar{c}_{r+1}, \bar{c}_{r+1}) \geq 0, \dots, \ \mathbf{g}(\bar{c}_n, \bar{c}_n) \geq 0. \end{cases}$$

Consideremos los subespacios vectoriales $\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_s\})$ y $\mathbf{W} = \mathbf{L}(\{\bar{c}_{r+1}, \dots, \bar{c}_n\})$. Si $\bar{u} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ entonces:

(i) $\bar{u} = \alpha_1 \bar{b}_1 + \cdots + \alpha_s \bar{b}_s$, para algunos $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}$; y por la bilinealidad, se obtiene que

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2 \, \mathbf{g}(\bar{b}_i, \bar{b}_i) \leq 0; \tag{2.14}$$

(ii) $\bar{u} = \beta_{r+1} \bar{c}_{r+1} + \cdots + \beta_n \bar{c}_n$, para algunos $\beta_{r+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$; y por la bilinealidad, se obtiene que

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) = \sum_{i=r+1}^{n} \beta_i^2 \, \mathbf{g}(\bar{c}_i, \bar{c}_i) \geq 0.$$

Entonces $\mathbf{g}(\bar{u},\bar{u}) = 0$. Esto, llevado a (2.14), implica que $\alpha_i = 0,\ \forall i = 1,\dots,s$, luego $\bar{u} = 0$. Hemos probado que $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\bar{0}\}$, luego su suma es suma directa y las dimensiones quedan:

$$n \geq \dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W} = s + n - r \quad \Rightarrow \quad s \leq r.$$

Considerando ahora $\mathbf{U}' = \mathbf{L}(\{\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_r\})$ y $\mathbf{W}' = \mathbf{L}(\{\bar{b}_{s+1},\dots,\bar{b}_n\})$, y repitiendo el razonamiento, concluimos que $r \leq s$. Por tanto, $s = r$, y el teorema se sigue. □

Definición 2.13. Sea $\mathbf{g}$ una métrica de $\mathbf{V}$, con $\dim \mathbf{V} = n$. Llamamos la *signatura* de $\mathbf{g}$ al par (s,t), siendo s el número de términos negativos y t el número de términos positivos de una matriz diagonal asociada a $\mathbf{g}$.

El rango de $\mathbf{g}$ es necesariamente igual a $s+t$; y la nulidad de $\mathbf{g}$ será igual $n-s-t$. Notad que $s+t \leq n$, y que se dará la igualdad si y solo si la métrica es no degenerada.

Supongamos que la métrica $\mathbf{g}$ es de signatura (s,t) y $\mathcal{B} = (\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_n)$ es una base que diagonaliza $\mathbf{g}$, por ejemplo ordenados de tal forma que

$$F_{\mathbf{g}}(\bar{b}_1) < 0,\dots,\ F_{\mathbf{g}}(\bar{b}_s) < 0,\ F_{\mathbf{g}}(\bar{b}_{s+1}) > 0,\dots,\ F_{\mathbf{g}}(\bar{b}_{s+t}) > 0,$$
$$F_{\mathbf{g}}(\bar{b}_{s+t+1}) = 0,\dots,\ F_{\mathbf{g}}(\bar{b}_n) = 0.$$

Entonces de $\mathcal{B}$ puede obtenerse otra base $\mathcal{C} = (\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_n)$ tal que la matriz que representa a $\mathbf{g}$ en $\mathcal{C}$ sea una matriz diagonal que sólo tenga -1, $+1$ ó 0 en la diagonal principal. Basta para ello tomar $\bar{c}_i = \dfrac{\bar{b}_i}{\sqrt{|\mathbf{g}(\bar{b}_i,\bar{b}_i)|}}$ para cualquier i, con $1 \leq i \leq s+t$ y queda

$$M(\mathbf{g},\mathcal{C}) = \left(\begin{array}{c|c|c} -\mathbf{I}_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{I}_t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n.$$

Definición 2.14. Las bases que diagonalizan $\mathbf{g}$ con sólo -1, $+1$ ó 0 en la diagonal principal las llamaremos *bases ortonormales* del espacio vectorial métrico $(\mathbf{V},\mathbf{g})$.

Consecuencia de la Prop. 2.18 y de lo que acabamos de decir es el resultado siguiente:

Corolario 2.20. *Todo espacio vectorial métrico* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *admite bases ortonormales.*

La manera de ordenar que hemos elegido, primero los negativos y a continuación los positivos, es una elección convencional.

La denominación de "base ortonormal" que usamos nosotros, generalmente, se utiliza sólo en el caso de métricas no degeneradas.

Os propongo como ejercicio que digáis, suponiendo $\dim \mathbf{V} = n$, qué debe cumplir la signatura (s, t) para cada uno de los tipos de métricas (A1, A2, A3, B1, B2, B3) de la Definición 2.11.

2.3. Ejercicios del Tema 2.

1. Sea $\mathcal{P}_1$ el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 1. Probar que la aplicación $\psi\colon \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\psi(a_0 + a_1 t\,,\, c_0 + c_1 t) = a_0c_0 + a_0c_1 + a_1c_0$, es una forma bilineal sobre $\mathcal{P}_1$.

2. Hallar la forma bilineal ψ sobre $\mathcal{P}_2$ cuya matriz asociada en la base $\mathcal{B}_\circ = (1, t, t^2)$ es
$$M(\psi, \mathcal{B}_\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} ;$$
es decir, hallar $\psi(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\,,\, c_0 + c_1 t + c_2 t^2)$.

3. Probar que el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^3$ es una forma bilineal con la matriz $\mathbf{I}_3$ como matriz asociada en la base estándar.

4. Hallar la matriz A asociada al producto escalar estándar de $\mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B} = \big((1,1), (2,0)\big)$. Hallar la fórmula que expresa la congruencia entre A e $\mathbf{I}_2$.

5. Hallar la forma bilineal ψ sobre $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base estándar es
$$M(\psi, \mathcal{B}_\circ) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Probar que si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y bilineal entonces $f(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

7. Probar que es una relación de equivalencia la relación en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida por: "$A \sim A'$ si y sólo si A es congruente con A'".

8. Sea ψ una forma bilineal sobre un espacio vectorial $\mathbf{V}$.

   a. Probar que $\psi^{\mathbf{t}}$, definida por $\psi^{\mathbf{t}}(\bar{u}, \bar{v}) := \psi(\bar{v}, \bar{u})$, es una forma bilineal sobre $\mathbf{V}$.

   b. Probar que $\psi_{\mathbf{s}} := \frac{1}{2}(\psi + \psi^{\mathbf{t}})$ es una forma bilineal simétrica y que $\psi_{\mathbf{a}} := \frac{1}{2}(\psi - \psi^{\mathbf{t}})$ es una forma bilineal antisimétrica.

   c. Probar que ψ se expresa de manera única como suma de una forma bilineal simétrica y una antisimétrica.

9. Sea $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ ($\mathcal{S}_2(\mathbf{V})$ y $\mathcal{A}_2(\mathbf{V})$, respectivamente) el conjunto de formas bilineales (simétricas y antisimétricas, respectivamente) sobre $\mathbf{V}$. Demostrar que:

   a. $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n^2.

   b. $\mathcal{S}_2(\mathbf{V})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$. Es decir, las métricas de $\mathbf{V}$ forman un espacio vectorial.

   c. $\mathcal{A}_2(\mathbf{V})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$.

   d. $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R}) = \mathcal{S}_2(\mathbf{V}) \oplus \mathcal{A}_2(\mathbf{V})$.

10. Dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$, probad que la aplicación
$$\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \psi \longmapsto M(\psi, \mathcal{B})$$
es un isomorfismo.

11. Probar que si F y F' son formas cuadráticas sobre $\mathbf{V}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces las aplicaciones $F + F'$ y kF son también formas cuadráticas. Probar que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbf{V})$ de todas las formas cuadráticas sobre $\mathbf{V}$, con estas operaciones, es un espacio vectorial.

12. Probar que la aplicación entre las formas cuadráticas y las métricas dada por:
$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & \mathcal{F}(\mathbf{V}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_2(\mathbf{V}) \\ & F & \longmapsto & \mathbf{g}_{F} \end{array}$$
es un isomorfismo de espacios vectoriales.

13. Probar que el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^n$ es una métrica no degenerada y definida positiva. Se la conoce también como métrica euclídea estándar de $\mathbb{R}^n$.

14. Encontrar algún vector de $\mathbb{R}^3$, distinto de $\bar{0}$ y ortogonal a sí mismo con respecto a la métrica $\mathbf{g}$, cuya matriz asociada en la base estándar es
$$M(\mathbf{g}, \mathcal{B}_\circ) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Sea $(\mathbb{R}^2, \mathbf{g})$ el espacio métrico cuya métrica en la base estándar es $M(\mathbf{g}, \mathcal{B}_\circ) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Hallar dos vectores $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$, no proporcionales y ortogonales a sí mismos (es decir, $\bar{u} \neq \alpha\bar{v}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, y $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) = \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{v}) = 0$). ¿Son $\bar{u}$ y $\bar{v}$ ortogonales entre sí?

16. Probar que la métrica $\mathbf{g}$ de $\mathbb{R}^3$, con matriz asociada:
$$M(\mathbf{g}, \mathcal{B}_\circ) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
es degenerada. Encontrar un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$, ortogonal a todos los demás.

17. Demostrar que la aplicación $\mathbf{h}\colon \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$, dada por $\mathbf{h}(A, B) = \operatorname{tr}(A^t\, B)$ es una métrica en el espacio vectorial de las matrices cuadradas 2×2. Hallar la matriz asociada a $\mathbf{h}$ en la base estándar de $\mathcal{M}_2$.

18. Sea $\mathcal{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado ≤ 2. Usando las propiedades de las integrales, probar que
$$\mathbf{g}(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$
define una métrica en $\mathcal{P}_2$. Hallar la matriz asociada a $\mathbf{g}$ en la base $\mathcal{B} = (1 + x, 1 - x, x^2)$ de $\mathcal{P}_2$.

19. Dada una forma bilineal ψ sobre $\mathbf{V}$.

    a. Probar que $\psi(\,\cdot\,, \bar{u}) \in \mathbf{V}^*$ y, también, que $\psi(\bar{u}, \,\cdot\,) \in \mathbf{V}^*$, $\forall \bar{u} \in \mathbf{V}$.

    b. Demostrar que la aplicación $\tilde{\psi}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$, $\bar{u} \mapsto \psi(\,\cdot\,, \bar{u})$, es lineal.

    c. Dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ y la correspondiente base dual $\mathcal{B}^*$ de $\mathbf{V}^*$, ¿qué relación hay entre las matrices $M(\psi, \mathcal{B})$ y $M(\tilde{\psi}, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*)$?

    d. Probar que la aplicación $\psi \mapsto \tilde{\psi}$ establece un isomorfismo entre $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbb{R})$ y $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^*)$.

20. Clasificad, según la definición 2.11, las diferentes métricas $\mathbf{g}^{s,t}$ de $\mathbb{R}^n$ del Ejemplo 2.2.2, según los valores de n, s y t.

Tema 3

Espacios vectoriales euclídeos

Las métricas de un espacio vectorial que son definidas positivas son las más importantes pues son la base para comprender las nociones intuitivas y formales de la geometría de Euclides. Con ellas, conceptos intuitivos tales como ángulo y distancia podrán ser rigurosamente construidos.

3.1. Métrica euclídea. Norma, ángulo. Bases ortonormales

Definición 3.1. Una métrica $\mathbf{g}$ de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ es una *métrica euclídea* si es definida positiva. Un *espacio vectorial euclídeo* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ es un espacio vectorial dotado de una métrica euclídea.

Una métrica euclídea se llama también un *producto escalar*. Es frecuente denotar $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v})$ por $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, o por $\bar{u} \cdot \bar{v}$; y se lee: *el producto escalar de $\bar{u}$ por $\bar{v}$*, o simplemente: *$\bar{u}$ por $\bar{v}$*.

Para una métrica lorentziana se suele emplear el nombre de *producto escalar lorentziano*.

La definición 3.1 incluye que $\mathbf{g} \colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal, simétrica, no degenerada y definida positiva. El que $\mathbf{g}$ sea definida positiva equivale a que, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{V}$:

$$\bar{u} \neq \bar{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) > 0. \tag{3.1}$$

Probad que (3.1) implica que $\mathbf{g}$ es no degenerada (ver Def. 2.11.A).

Ejemplos 3.1. 1. Algunas métricas que dimos en los Ejem. 2.2 del Tema 2 son euclídeas: Lo es la métrica euclídea estándar de $\mathbb{R}^n$, que denotaremos por $\mathbf{g}_0(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. La métrica de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ del Ejem. 2.2.3, $\mathbf{g}(A, B) = \mathrm{tr}(A^t\, B) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$, también es euclídea.

2. También obtenemos una métrica euclídea en un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión finita si fijamos una base $\mathcal{B}$ y, para cada $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$ de coordenadas $\bar{u}_{\mathcal{B}}, \bar{v}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\mathbf{g}_{\mathcal{B}}(\bar{u}, \bar{v}) := \bar{u}_{\mathcal{B}} \cdot \bar{v}_{\mathcal{B}}\,;$$

es decir, la métrica euclídea estándar aplicada a las coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en la base $\mathcal{B}$. Más adelante veremos que todas las diferentes métricas euclídeas de $\mathbf{V}$ se pueden obtener por este procedimiento.

Recordemos del Tema 2 que, en un espacio vectorial métrico cualquiera, se define el concepto de ortogonalidad entre vectores o entre subespacios vectoriales (ver Def. 2.7). Veíamos allí ciertas propiedades del concepto de ortogonalidad en el Lema 2.11 y en la Proposición 2.12. Ahora, al considerar métricas euclídeas, obtenemos nuevas propiedades de la ortogonalidad.

Lema 3.1. *En un espacio vectorial euclídeo* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *se verifica:*

(a) *El único vector ortogonal a sí mismo es el* $\bar{0}$.

(b) *Si los vectores* $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k$ *son no nulos y ortogonales entre sí entonces son linealmente independientes.*

(c) *Si* $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_k$ *son subespacios vectoriales de* $\mathbf{V}$ *ortogonales entre sí entonces su suma es suma directa.*

Demostración. El apartado (a) se sigue inmediatamente de que $\mathbf{g}$ es definida positiva, viendo la equivalencia (3.1) que se da en un espacio euclídeo.

Para probar (b), partimos de la ecuación: $\alpha_1\bar{u}_1+\cdots+\alpha_k\bar{u}_k = \bar{0}$; si hacemos el producto escalar por $\bar{u}_i$ a ambos lados de esta igualdad, nos queda:

$$\mathbf{g}(\alpha_1\bar{u}_1 + \cdots + \alpha_k\bar{u}_k, \bar{u}_i) = \alpha_1\,\mathbf{g}(\bar{u}_1, \bar{u}_i) + \cdots + \alpha_k\,\mathbf{g}(\bar{u}_k, \bar{u}_i) = \alpha_i\,\mathbf{g}(\bar{u}_i, \bar{u}_i) = 0\,;$$

donde la segunda igualdad se sigue por la hipótesis de que $\mathbf{g}(\bar{u}_j, \bar{u}_i) = 0$, si $j \neq i$; y la última igualdad se sigue de que si $\bar{u}_i \neq \bar{0}$, por (3.1), tenemos que $\mathbf{g}(\bar{u}_i, \bar{u}_i) \neq 0$, y entonces $\alpha_i = 0$. Como esto es cierto $\forall\, i \in \{1, \dots, k\}$, entonces, se deduce que $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k$ son linealmente independientes.

Para probar (c), hay que probar la propiedad (b) de la Def. 1.5 de la suma directa: $\forall\, j \in \{1, \dots, r\}$,

$$\mathbf{U}_j \cap \sum_{i=1,\, i\neq j}^{r} \mathbf{U}_i = \{\bar{0}\}.$$

Lo probamos, por reducción al absurdo, para $j = 1$ (igual se probaría para otro j, reordenando y renombrando los subespacios $\mathbf{U}_i$ convenientemente). Supongamos que existe $\bar{v} \neq \bar{0}$ tal que $\bar{v} \in \mathbf{U}_1 \cap \sum_{i=2}^{k} \mathbf{U}_i$; esto significa que $\bar{v} \in \mathbf{U}_1$ y que $\bar{v} = \alpha_2\bar{u}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{u}_k$ con $\bar{u}_2 \in \mathbf{U}_2, \ldots, \bar{u}_k \in \mathbf{U}_k$. Si hacemos el producto escalar por $\bar{v}$ a ambos lados de la anterior igualdad, nos queda:

$$\mathbf{g}(\bar{v}, \bar{v}) = \mathbf{g}(\alpha_2\bar{u}_2 + \cdots + \alpha_k\bar{u}_r, \bar{v}) = \alpha_2\,\mathbf{g}(\bar{u}_2, \bar{v}) + \cdots + \alpha_k\,\mathbf{g}(\bar{u}_k, \bar{v})\,;$$

como $\bar{v} \in \mathbf{U}_1$ y el subespacio $\mathbf{U}_1$ es ortogonal a $\mathbf{U}_i$, $\forall\, i \in \{2, \dots, k\}$, entonces $\mathbf{g}(\bar{u}_i, \bar{v}) = 0$; así queda que $\mathbf{g}(\bar{v}, \bar{v}) = 0$. Pero por hipótesis $\bar{v} \neq \bar{0}$, lo que está en contradicción, de nuevo por (3.1), con que $\mathbf{g}$ es definida positiva. Entonces debe ser $\mathbf{U}_1 \cap \sum_{i=2}^{k} \mathbf{U}_i = \{\bar{0}\}$. □

También es propio de una métrica euclídea que la métrica inducida en un subespacio vectorial (ver Definición 2.6) siga siendo una métrica euclídea.

Lema 3.2. *Sea* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial euclídeo y sea* $\mathbf{U}$ *un subespacio vectorial de* $\mathbf{V}$. *Si* $\mathbf{g}_{\mathbf{U}}$ *es la métrica inducida por* $\mathbf{g}$ *en* $\mathbf{U}$ *entonces* $(\mathbf{U}, \mathbf{g}_{\mathbf{U}})$ *es un espacio vectorial euclídeo.*

Demostración. Consideramos probado, acorde a lo dicho antes de la Def. 2.6 del Tema 2, que $\mathbf{g}_{\mathbf{U}}$ es una métrica en $\mathbf{U}$. Como por definición de métrica inducida:

$$\mathbf{g}_{\mathbf{U}}(\bar{u},\bar{v}) := \mathbf{g}(\bar{u},\bar{v}), \quad \forall \bar{u},\bar{v} \in \mathbf{U},$$

es inmediato ver que si $\mathbf{g}$ es definida positiva entonces $\mathbf{g}_{\mathbf{U}}$ lo es también. □

En cambio, en un espacio vectorial lorentziano $(\mathbf{V},\mathbf{g})$, dependiendo del subespacio $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$, la métrica inducida $\mathbf{g}_{\mathbf{U}}$ puede ser euclídea o lorentziana, o incluso degenerada.

Norma de un vector en un espacio vectorial euclídeo.

La forma cuadrática $F_{\mathbf{g}}$ asociada con una métrica euclídea $\mathbf{g}$ verifica que $F_{\mathbf{g}}(\bar{u}) := \mathbf{g}(\bar{u},\bar{u}) \geq 0$, $\forall\, \bar{u}$, con lo cual se puede extraer la raíz cuadrada de $F_{\mathbf{g}}(\bar{u})$, y se obtiene lo que se llama la *norma* (también llamado el *módulo*) del vector $\bar{u}$.

Definición 3.2. Sea $(\mathbf{V},\mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo. La *norma* (*asociada a* $\mathbf{g}$) de un vector $\bar{u} \in \mathbf{V}$ se define por

$$\|\bar{u}\|_{\mathbf{g}} := +\sqrt{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{u})}\,.$$

Escribiremos $\|\bar{u}\|$ en vez de $\|\bar{u}\|_{\mathbf{g}}$ si no hay confusión posible.

Algunas propiedades que tiene la norma son los siguientes:

Lema 3.3. *La norma asociada a una métrica euclídea* $\mathbf{g}$ *de* $\mathbf{V}$ *verifica:*

(a) $\|\bar{u}\| \geq 0, \quad \forall \bar{u} \in \mathbf{V}$*; además,* $\|\bar{u}\| = 0$ *si y solo si* $\bar{u} = \bar{0}$.

(b) $\|\alpha\, \bar{u}\| = |\alpha|\, \|\bar{u}\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \bar{u} \in \mathbf{V}$.

Demostración. Se obtiene (a) de que $\mathbf{g}$ es definida positiva, usando la equivalencia (3.1). Para probar (b), basta hacer $\mathbf{g}(\alpha\bar{u},\alpha\bar{u}) = \alpha^2\mathbf{g}(\bar{u},\bar{u})$ y tomar la raíz cuadrada positiva en ambos miembros. □

Nota sobre vectores unitarios: Un vector $\bar{u} \in \mathbf{V}$ se dice que es un *vector unitario* si $\|\bar{u}\| = 1$. Notad que si $\bar{v} \neq \bar{0}$ entonces $\frac{1}{\|\bar{v}\|}\,\bar{v}$ y $\frac{-1}{\|\bar{v}\|}\,\bar{v}$ son los únicos vectores unitarios proporcionales a $\bar{v}$. El subconjunto de vectores unitarios de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ es la llamada *esfera unidad* o *esfera de radio uno*. En el caso de $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea estándar (ver Ejemplo 2.2.1) la esfera de radio uno la denotamos por

$$\mathbb{S}^n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\vec{x}\| = 1\} \equiv \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : (x_1)^2 + \cdots + (x_{n+1})^2 = 1\}.$$

Proposición 3.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sea* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial euclídeo. Se verifica*

$$|\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v})| \leq \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\,, \qquad \forall\, \bar{u},\, \bar{v} \in \mathbf{V}\,. \tag{3.2}$$

La igualdad en (3.2) *se obtiene si y solo si* $\bar{u}$ *y* $\bar{v}$ *son linealmente dependientes.*

Demostración. Si $\bar{u} = \bar{0}$ entonces se verifica trivialmente la igualdad en (3.2) y $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes. Supongamos que $\bar{u} \neq \bar{0}$. Se tiene que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \|x\bar{u} - \bar{v}\|^2 = \mathbf{g}(x\bar{u} - \bar{v}, x\bar{u} - \bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 x^2 - 2\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v})x + \|\bar{v}\|^2\,. \tag{3.3}$$

La derecha de la desigualdad es un polinomio de segundo grado en la indeterminada x. Como, según (3.3), el polinomio toma valores positivos $\forall\, x \in \mathbb{R}$, el polinomio tiene a lo sumo una raíz real y, por tanto, el discriminante del polinomio es negativo o cero; es decir, que el discriminante queda

$$4\,\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v})^2 - 4\,\|\bar{u}\|^2\|\bar{v}\|^2 \leq 0\,; \tag{3.4}$$

dividiendo por 4 y pasando el término negativo a la derecha de la desigualdad queda $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v})^2 \leq \|\bar{u}\|^2\|\bar{v}\|^2$; y tomando raíces cuadradas positivas se obtiene la desigualdad (3.2).

Veamos la segunda parte. Cuando $\bar{u} \neq \bar{0}$ se verifica que: $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes si y sólo si $\bar{v} = \beta\bar{u}$, para alguna $\beta \in \mathbb{R}$. Pero si $\bar{v} = \beta\bar{u}$ se obtiene la igualdad en (3.2) porque:

$$|\mathbf{g}(\bar{u}, \beta\bar{u})| = |\beta\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u})| = |\beta|\,\|\bar{u}\|^2 = \|\bar{u}\|\,\|\beta\bar{u}\|.$$

Y viceversa, si se verifica la igualdad $|\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})| = \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|$ es que se anula el discriminante (3.4); luego el polinomio en (3.3), supuesto que $\bar{u} \neq \bar{0}$, tiene una raíz $x_0 \in \mathbb{R}$ y nos queda:

$$0 = \|x_0\bar{u} - \bar{v}\|^2$$

Por tanto, debe ser $\bar{v} = x_0\bar{u}$; es decir, $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes. $\square$

Nota: También puede razonarse a partir de la fórmula (3.3), tomando el valor $x = \frac{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})}{\|\bar{u}\|^2}$. Probad así la desigualdad (3.2) como ejercicio.

Proposición 3.5 (Desigualdad triangular)**.** *Sea* $(\mathbf{V},\mathbf{g})$ *un espacio vectorial euclídeo. Se verifica la siguiente desigualdad, llamada* desigualdad triangular*:*

$$\|\bar{u}+\bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|\,, \qquad \forall \bar{u},\, \bar{v} \in \mathbf{V}\,. \tag{3.5}$$

Demostración. Hagamos el siguiente desarrollo:

$$\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = \mathbf{g}(\bar{u}+\bar{v},\bar{u}+\bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v}).$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (3.2) queda:

$$\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 \leq \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\| = (\|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|)^2;$$

que es (3.5) al hacer la raíz cuadrada a los dos extremos de la desigualdad. $\square$

Nota sobre espacios vectoriales normados y espacios métricos.

La definición general de una *norma* en un espacio vectorial $\mathbf{V}$ (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, de dimensión finita o infinita) es la de una función $\|\cdot\|\colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

(a) $\|\bar{u}\| \geq 0, \quad \forall \bar{u} \in \mathbf{V}$; además, $\|\bar{u}\| = 0$ si y solo si $\bar{u} = \bar{0}$;

(b) $\|\alpha\,\bar{u}\| = |\alpha|\,\|\bar{u}\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall \bar{u} \in \mathbf{V}$;

(c) $\|\bar{u}+\bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|\,, \quad \forall \bar{u},\, \bar{v} \in \mathbf{V}$;

y un *espacio vectorial normado* $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial sobre el que se ha definido una norma.

La norma de un espacio vectorial real $\mathbf{V}$ de dimensión finita asociada a una métrica euclídea, definida en Def. 3.2, verifica estas tres propiedades según el Lema 3.3 y la Proposición 3.5; luego es una *norma* según esta definición general; aunque pueden darse otras *normas* en $\mathbf{V}$ que no estén construidas a partir de una métrica euclídea.

Una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, donde X es, en principio, solamente un conjunto, se dice que es una *distancia* en X si se verifica:

(a) $d(x, y) \geq 0, \ \forall\, x, y \in X$; con $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(b) $d(x, y) = d(y, x), \ \forall\, x, y \in X$;

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \ \forall\, x, y, z \in X$.

Se dice que (X, d) es un *espacio métrico* si X es un conjunto con una distancia d en él definida. Notad que en un espacio métrico no hay definidas en X, a priori, ninguna operación y los números reales sólo aparecen para asignar valores a las distancias: X es un mero conjunto *sin estructura algebraica*. La materia que estudia los espacios métricos es la *Topología*.

En un espacio vectorial normado $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ se puede definir una función *distancia* por la fórmula:

$$\mathbf{d}(\bar{u}, \bar{v}) := \|\bar{v} - \bar{u}\|, \qquad \forall \bar{u},\, \bar{v} \in \mathbf{V}.$$

En particular, en un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ se define la *distancia euclídea* entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ como $\|\bar{v} - \bar{u}\|_{\mathbf{g}}$; pero este concepto es más propio de la llamada *Geometría Afín Euclídea* y nosotros apenas lo usaremos en esta asignatura.

Ángulo en un espacio vectorial euclídeo.

En un espacio vectorial euclídeo puede introducirse la noción de ángulo entre dos vectores de la siguiente forma. Debido a la desigualdad de Cauchy-

Schwarz, para cualesquiera $\bar{u}$ y $\bar{v}$ no nulos, obtenemos que:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|} \leq 1\,.$$

Este cociente, al ser un número entre -1 y 1, identifica un único ángulo $\theta \in [0,\pi]$ tal que $\cos\theta$ sea igual a dicho cociente. Esto es debido a que la función coseno establece una biyección entre los intervalos $[0,\pi]$ y $[-1,1]$. Recogemos esto en la siguiente definición, denotando al ángulo θ entre dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ por $\theta \equiv \widehat{\bar{u},\bar{v}}$.

Definición 3.3. Sea $(\mathbf{V},\mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo. El *ángulo entre dos vectores* $\bar{u}$, $\bar{v} \in \mathbf{V}$, con $\bar{u} \neq \bar{0}$ y $\bar{v} \neq \bar{0}$, se define como

$$\widehat{\bar{u},\bar{v}} := \arccos \frac{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|} \in [0,\pi].$$

De esta definición se deduce que

$$\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v}) = \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\,\cos\widehat{\bar{u},\bar{v}}\,.$$

Por la simetría de $\mathbf{g}$ se verifica que $\widehat{\bar{u},\bar{v}} = \widehat{\bar{v},\bar{u}}$. Más adelante introduciremos la noción de *ángulo orientado entre dos vectores* $\bar{u}$, $\bar{v}$, (ver Def. 3.11), que podrá tomar valores en el intervalo $[0,2\pi)$; para ello, se determinará un sentido preferente de recorrer la abertura entre dos vectores, distinguiéndose entre el ángulo (orientado) de $\bar{u}$ a $\bar{v}$ y el de $\bar{v}$ a $\bar{u}$.

Ejemplo 3.2. En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar estándar, tomemos $\vec{u} = (0,2)$ y $\vec{v} = (1,1)$. Calculemos el ángulo (no orientado) entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y entre $\vec{u}$ y $-\vec{v}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\vec{u},\vec{v}} &= \arccos \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \equiv 45^\circ,\\
\widehat{\vec{u},\text{-}\vec{v}} &= \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} \equiv 135^\circ.
\end{aligned}$$

Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son no nulos y ortogonales, se deduce que $\cos\widehat{\bar{u},\bar{v}} = 0$; luego, $\widehat{\bar{u},\bar{v}} = \frac{\pi}{2} \equiv 90^\circ$. De aquí que, en espacios vectoriales euclídeos, sea apropiado decir que dos vectores, no nulos, son ortogonales si son *perpendiculares*, es decir, si forman un ángulo de 90°.

Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son ambos no nulos y linealmente dependientes entonces $\bar{v} = \alpha\bar{u}$. Si, además, $\alpha > 0$ entonces $\widehat{\bar{u},\bar{v}} = 0$; y si $\alpha < 0$, entonces $\widehat{\bar{u},\bar{v}} = \pi$ (comprobadlo como ejercicio).

Bases ortonormales y el grupo ortogonal.

En un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, con $\dim \mathbf{V} = n$, la signatura de la métrica $\mathbf{g}$, que se definía en Def. 2.13 del Tema 2, es $(0, n)$. Esto quiere decir que si $\mathcal{B}$ es una base tal que $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ es una matriz diagonal, entonces todos los números de la diagonal principal son estrictamente positivos. Necesariamente, por ser $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ diagonal, dos vectores de $\mathcal{B}$ distintos son ortogonales entre sí.

La definición 2.14 aplicada al caso euclídeo nos da la siguiente definición.

Definición 3.4. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo. Una *base ortonormal* (*respecto a* $\mathbf{g}$) es una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ de $\mathbf{V}$ tal que

$$\mathbf{g}(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = 0 \quad \text{con} \quad i \neq j, \quad \text{y} \quad \|\bar{b}_i\|_{\mathbf{g}} = 1, \quad \forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Dicho de otra manera, $\mathcal{B}$ es una base ortonormal si $M(\mathbf{g}, \mathcal{B}) = \mathbf{I}_n$, o equivalentemente, si $\mathbf{g}(\bar{b}_i, \bar{b}_j) = \delta_{ij}$ (la delta de Kronecker).

Proposición 3.6. *Cualquier espacio vectorial euclídeo de dimensión finita tiene alguna base ortonormal.*

Demostración. En realidad es un corolario de la Prop. 2.18. Basta notar que si en una base $\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$ de un espacio vectorial euclídeo, cuyos vectores son ortogonales entre sí, reemplazamos cada $\bar{b}_i$ por $\frac{1}{\|\bar{b}_i\|}\bar{b}_i$ o $\frac{-1}{\|\bar{b}_i\|}\bar{b}_i$, entonces obtenemos una base ortonormal. □

Resulta muy interesante memorizar que las coordenadas de un vector $\bar{u} \in \mathbf{V}$ en una base ortonormal $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ son:

$$(3.6)\quad \bar{u}_{\mathcal{B}} = \big(\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_1), \dots, \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_n)\big), \quad \text{o que:} \quad \bar{u} = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_1)\bar{b}_1 + \cdots + \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_n)\bar{b}_n.$$

Esto es muy fácil de comprobar haciendo el producto escalar por $\bar{b}_i$ a ambos lados de la igualdad $\bar{u} = x_1\bar{b}_1 + \cdots + x_n\bar{b}_n$; usando la bilinealidad de $\mathbf{g}$ y la Definición 3.4 os quedará $x_i = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_i)$.

Además, dados $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$, cuyas coordenadas en una base ortonormal son $\bar{u}_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\bar{v}_{\mathcal{B}} = (y_1, \dots, y_n)$, podemos calcular matricialmente $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v})$, siguiendo la ecuación (2.6) del Tema 2. Para ello, si representamos $\bar{u}_{\mathcal{B}}$ y $\bar{v}_{\mathcal{B}}$ como matrices columna, nos queda:

$$\text{(3.7)} \qquad \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \bar{u}^{\,t}_{\mathcal{B}}\, \bar{v}_{\mathcal{B}} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n\,.$$

Esto significa que cuando trabajamos en coordenadas respecto a una base ortonormal de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, la métrica euclídea $\mathbf{g}$ opera como la métrica euclídea estándar de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos 3.3. 1. La base estándar de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B}_0 = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) \equiv \big((1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\big)$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea estándar.

2. En el Ejemplo 3.1.2, la base $\mathcal{B}$ es una base ortonormal respecto a la métrica $\mathbf{g}_{\mathcal{B}}$ allí definida.

Recordad que el *grupo lineal general*, $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})$, es el grupo que forman las matrices invertibles de orden n, con la operación producto de matrices (releed el apartado “Sobre matrices cuadradas” del Tema 0: *Preliminares y notaciones*). El *grupo ortogonal* $\mathbf{O}(n, \mathbb{R}) \equiv \mathbf{O}_n$ es el subgrupo de $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})$ de las matrices P tales que $P^t\, P = \mathbf{I}_n$ o, equivalentemente, $P^{-1} = P^t$; y se las llama *matrices ortogonales*. Probad que $\mathbf{O}_n$ es un grupo y que $P \in \mathbf{O}_n$ verifica que el determinante de P es 1 ó -1, es decir, $|\det(P)| = 1$.

Lema 3.7. *Dada $P \in \mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})$, las n columnas de P son las coordenadas de los n vectores de una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea estándar si y solo si $P \in \mathbf{O}_n$.*

Demostración. Sea $P = (a_{ij})$ y sean los vectores $\vec{v}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$ de $\mathbb{R}^n$, con j de 1 a n. Entonces la matriz P tiene por columna j las coordenadas de $\vec{v}_j$ y los vectores $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ forman una base de $\mathbb{R}^n$ porque P es regular.

Notad que si $P^t = (d_{ij})$ entonces $d_{ij} = a_{ji}$. Llamemos $(c_{ij}) = P^t P$ y hagamos el producto de matrices; y queda:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j, \qquad \forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Luego $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ es ortonormal, es decir, $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij}$ (la delta de Kronecker) si y solo si $P^t P = \mathbf{I}_n \equiv (\delta_{ij})$. □

Fijaros en el lema, que por el mero hecho de pertenecer a $\mathbf{O}_n$ la matriz $P = \mathcal{B}_{\mathcal{B}_0}$ es una matriz de cambio de base entre bases ortonormales (ver Ejem. 3.3.1). Lo mismo se obtiene si en el lema se cambia columnas por filas; es decir, las n filas de una matriz ortogonal forman, como las columnas, una base ortonormal del espacio vectorial euclídeo estándar $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_0)$.

Este lema es un caso particular del siguiente resultado: En cualquier espacio vectorial euclídeo, las matrices de cambio de base entre bases ortonormales son las matrices ortogonales.

Proposición 3.8. *Sea* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial euclídeo de dimensión* n *y sean* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{C}$ *dos bases ortonormales. Entonces la matriz de cambio de base es una matriz ortogonal; es decir,* $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} \in \mathbf{O}_n$. *Además, si* $\mathcal{D}$ *es base de* $\mathbf{V}$ *y* $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \in \mathbf{O}_n$ *entonces* $\mathcal{D}$ *es base ortonormal.*

Demostración. Por ser $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases ortonormales, $M(\mathbf{g}, \mathcal{B}) = \mathbf{I}_n$ y $M(\mathbf{g}, \mathcal{C}) = \mathbf{I}_n$; por tanto, por (2.9) de la Prop. 2.5, la matriz $P = M(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \equiv \mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ verifica $\mathbf{I}_n = P^t\, \mathbf{I}_n\, P$; y así $P \in \mathbf{O}_n$. Además, como $M(\mathbf{g}, \mathcal{B}) = \mathbf{I}_n$ y $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} \in \mathbf{O}_n$ se deduce, también de (2.9), que $M(\mathbf{g}, \mathcal{D}) = \mathbf{I}_n$; luego $\mathcal{D}$ es ortonormal. □

Corolario 3.9. *Dado un espacio vectorial euclídeo* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, *existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de bases ortonormales y el grupo* $\mathbf{O}_n$, *con* $n = \dim \mathbf{V}$.

Demostración. Por la Prop. 3.8, si $\mathcal{C}$ es una base ortonormal respecto a $\mathbf{g}$ entonces está bien definida la aplicación $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}_c$ entre el conjunto de bases ortonormales de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ y el grupo ortogonal $\mathbf{O}_n$. Es fácil probar que es una biyección, y se deja como ejercicio. $\square$

Nota sobre estructuras geométricas en un espacio vectorial.

En todo este apartado, será $\mathbf{V}$ un espacio vectorial real, con $\dim \mathbf{V} = n$. Planteemos la siguiente cuestión: dada una base cualquiera, ¿para qué métricas euclídeas, si existen, es una base ortonormal? Demos la respuesta:

Proposición 3.10. *Dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$, existe una única métrica euclídea $\mathbf{g}$ tal que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal respecto a $\mathbf{g}$.*

Demostración. El resultado es inmediato porque la condición $M(\mathbf{g}, \mathcal{B}) = \mathbf{I}_n$ determina una única métrica euclídea $\mathbf{g}$ y, respecto a ella, $\mathcal{B}$ es base ortonormal. Esta métrica $\mathbf{g}$ es la $\mathbf{g}_{\mathcal{B}}$ dada en el Ejemplo 3.1.2. $\square$

Además, por la Prop. 3.8, cualquier otra base cuya matriz de cambio de base con $\mathcal{B}$ sea de $\mathbf{O}_n$ es también ortonormal respecto a la misma $\mathbf{g}$.

Desarrollemos esta idea con un enfoque más general, que resultará bastante natural e interesante por el carácter unificador de conceptos geométricos bastante dispares. Este desarrollo nos será de utilidad para introducir otras estructuras geométricas que necesitaremos, como es la *orientación de un espacio vectorial.*

Una *estructura geométrica* sobre un espacio vectorial (por ejemplo, una métrica) la vamos a caracterizar por un subconjunto de bases (en el caso de la métrica, las bases ortonormales). Más concretamente, consideremos el *conjunto de todas las bases de* $\mathbf{V}$, que denotaremos por $\mathbf{F}^{\mathbf{V}}$; una estructura geométrica sobre $\mathbf{V}$ va a ser definida por una clase de equivalencia de bases respecto a una relación de equivalencia en el conjunto $\mathbf{F}^{\mathbf{V}}$.

Sabemos que las matrices de cambio de base entre las bases de $\mathbf{V}$ son las matrices de $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})$. Escojamos un subgrupo cualquiera G de $\mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})$ e introduzcamos la siguiente *relación* entre las bases de $\mathbf{V}$.

Definición 3.5. Sea G un subgrupo de $\mathbf{Gl}(n,\mathbb{R})$. Definimos en el conjunto $\mathbf{F}^{\mathbf{V}} = \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ es base de } \mathbf{V}\}$ la relación:

$$\mathcal{B} \overset{G}{\sim} \mathcal{C} \qquad \Longleftrightarrow \qquad M(\mathcal{B},\mathcal{C}) \equiv \mathcal{B}_{\mathcal{C}} \in G.$$

Lema 3.11. *Dado un subgrupo G de $\mathbf{Gl}(n,\mathbb{R})$, la relación $\overset{G}{\sim}$ es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathbf{F}^{\mathbf{V}}$ de las bases de $\mathbf{V}$.*

Demostración. La prueba se apoya esencialmente en el hecho de que G es un grupo respecto al producto de matrices. Escribamos $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D} \in \mathbf{F}^{\mathbf{V}}$.

(i)*Propiedad reflexiva*: Como $\mathbf{I}_n \in G$ y $M(\mathcal{B},\mathcal{B}) = \mathbf{I}_n$, entonces $\mathcal{B} \overset{G}{\sim} \mathcal{B}$.

(ii)*Propiedad simétrica*: Como para cada $P \in G$ se tiene que $P^{-1} \in G$, si $M(\mathcal{B},\mathcal{C}) \in G$ entonces $M(\mathcal{B},\mathcal{C})^{-1} = M(\mathcal{C},\mathcal{B}) \in G$; es decir, $\mathcal{B} \overset{G}{\sim} \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \overset{G}{\sim} \mathcal{B}$.

(iii)*Propiedad transitiva*: El producto de matrices $P \cdot Q \in G$, si $P, Q \in G$. Luego, si $M(\mathcal{B},\mathcal{C}), M(\mathcal{C},\mathcal{D}) \in G$ entonces $M(\mathcal{C},\mathcal{D}) \cdot M(\mathcal{B},\mathcal{C}) = M(\mathcal{B},\mathcal{D}) \in G$ (para esta igualdad, ved el final del apartado “Cambio de coordenadas en un espacio vectorial” del Tema 0: *Preliminares y notaciones*). Hemos probado que $\mathcal{B} \overset{G}{\sim} \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \overset{G}{\sim} \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B} \overset{G}{\sim} \mathcal{D}$. □

Como en toda relación de equivalencia, se obtiene el *conjunto cociente* $\mathbf{F}^{\mathbf{V}}/_{\overset{G}{\sim}}$ formado por las distintas *clases de equivalencia.* La clase de equivalencia a la que pertenece una base $\mathcal{B}$ la denotamos por $[\mathcal{B}]_G$ y consiste en todas las bases relacionadas con $\mathcal{B}$ por $\overset{G}{\sim}$; podemos escribir:

$$[\mathcal{B}]_G := \{\mathcal{C} \in \mathbf{F}^{\mathbf{V}} : \mathcal{B} \overset{G}{\sim} \mathcal{C}\} = \{\mathcal{C} \in \mathbf{F}^{\mathbf{V}} : \mathcal{B}_{\mathcal{C}} \in G\},$$

sin olvidar que $[\mathcal{B}]_G$ es un elemento de $\mathbf{F}^{\mathbf{V}}/_{\overset{G}{\sim}}$. Obviamente,

$$\mathcal{B} \overset{G}{\sim} \mathcal{C} \ \text{ si y solo si } \ [\mathcal{B}]_G \equiv [\mathcal{C}]_G.$$

En este contexto introducimos la siguiente importante definición:

Definición 3.6. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial. Una *G-estructura vectorial sobre* $\mathbf{V}$ es una clase de equivalencia $[\mathcal{B}]_G \in \mathbf{F}^{\mathbf{V}}/_{\overset{G}{\sim}}$.

Diremos que un automorfismo $f \in \operatorname{Aut} \mathbf{V}$, *conserva* la G-estructura vectorial $[\mathcal{B}]_G$ si $M(f, \mathcal{B}) \in G$, lo cual es equivalente a que f lleva bases en $[\mathcal{B}]_G$ a bases en $[\mathcal{B}]_G$.

Aplicado al concepto de métrica euclídea, ésta se corresponderá con una $\mathbf{O}_n$-estructura vectorial. Si denotemos por $\mathcal{S}_2^{\text{eu.}}(\mathbf{V})$ al conjunto de todas las métricas euclídeas sobre $\mathbf{V}$, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.12. *Existe una biyección natural entre las métricas euclídeas de* $\mathbf{V}$ *y las* $\mathbf{O}_n$*-estructuras vectoriales sobre* $\mathbf{V}$*. Concretamente, la siguiente aplicación es biyectiva:*

$$\mathcal{S}_2^{eu.}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbf{F}^{\mathbf{V}}/\underset{\sim}{\mathbf{O}_n}\,, \quad \mathbf{g} \longmapsto [\mathcal{B}]_{\mathbf{O}_n}\,,$$

siendo $[\mathcal{B}]_{\mathbf{O}_n}$ *el conjunto de bases ortonormales respecto a* $\mathbf{g}$*.*

Demostración. El conjunto de bases ortonormales respecto a una métrica euclídea es, por la Prop. 3.8, una clase de equivalencia de $\mathbf{F}^{\mathbf{V}}/\underset{\sim}{\mathbf{O}_n}$, luego la aplicación está bien definida. Ahora, si dos métricas euclídeas $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}'$ comparten una base ortonormal $\mathcal{B}$ es porque $M(\mathbf{g}, \mathcal{B}) = M(\mathbf{g}', \mathcal{B}) = \mathbf{I}_n$, entonces $\mathbf{g} = \mathbf{g}'$; luego la aplicación es inyectiva. Por otro lado, si $[\mathcal{B}]_{\mathbf{O}_n} \in \mathbf{F}^{\mathbf{V}}/\underset{\sim}{\mathbf{O}_n}$ entonces, por la Prop. 3.10, existe una métrica euclídea $\mathbf{g}$ tal que $\mathcal{B}$ es ortonormal respecto a $\mathbf{g}$; luego la aplicación es sobreyectiva. □

Los automorfismos de $\mathbf{V}$ que conservan una $\mathbf{O}_n$-estructura vectorial, serán las isometrías lineales de la métrica que estudiaremos en la Sección 3.4.

Veamos otro ejemplo de G-estructura vectorial, que nos será de utilidad en lo que sigue. Recordemos que otro subgrupo del grupo lineal general es $\mathbf{Gl}_n^+ := \{A \in \mathbf{Gl}(n, \mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$.

Definición 3.7. Una *orientación* $\mathcal{O}$ *de* $\mathbf{V}$ es una $\mathbf{Gl}_n^+$-estructura vectorial sobre $\mathbf{V}$. Elegida una orientación $\mathcal{O}$ de $\mathbf{V}$, se dice que $\mathbf{V}$ es un *espacio vectorial orientado.*

Proposición 3.13. *Un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *admite dos y solo dos posibles orientaciones.*

Demostración. Sea una base $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ de $\mathbf{V}$. Si $\mathcal{C}$ es otra base de $\mathbf{V}$ pueden darse dos casos: o bien $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{C}}) > 0$ y en ese caso $\mathcal{C} \in [\mathcal{B}]_{\mathbf{Gl}_n^+}$; o bien $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{C}}) < 0$, en cuyo caso $[\mathcal{C}]_{\mathbf{Gl}_n^+} \neq [\mathcal{B}]_{\mathbf{Gl}_n^+}$. En este segundo supuesto, si $\mathcal{D}$ es otra base de $\mathbf{V}$, tomando determinantes en la igualdad $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = \mathcal{D}_{\mathcal{C}}\, \mathcal{B}_{\mathcal{D}}$, como $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{C}}) < 0$, se deduce que $\det(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}) > 0$ o $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{D}}) > 0$; es decir, $\mathcal{D} \in [\mathcal{C}]_{\mathbf{Gl}_n^+}$ o $\mathcal{D} \in [\mathcal{B}]_{\mathbf{Gl}_n^+}$; luego solo puede haber dos elementos en $\mathbf{F}^{\mathbf{V}}/_{\underset{\sim}{\mathbf{Gl}_n^+}}$. Tomando $\mathcal{C} = (-\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)$, se tiene que $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & \bar{0} \\ \bar{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$ y $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{C}}) = -1 < 0$; luego efectivamente hay dos y solo dos clases de equivalencia en $\mathbf{F}^{\mathbf{V}}/_{\underset{\sim}{\mathbf{Gl}_n^+}}$. $\square$

Las bases pertenecientes a la clase de equivalencia elegida se llaman de *orientación positiva* y las bases de $\mathbf{V}$ pertenecientes a la otra clase se llaman de *orientación negativa*. Se puede decir también que $\mathcal{B}$ *define la orientación* $\mathcal{O} = [\mathcal{B}]_{\mathbf{Gl}_n^+}$ de $\mathbf{V}$.

Dada una métrica euclídea y una orientación de $\mathbf{V}$, el conjunto de bases ortonormales de orientación positiva constituye una clase respecto a la relación de equivalencia, según la Def. 3.5, que prescribe el llamado *grupo ortogonal especial*, $\mathbf{SO}_n := \mathbf{O}_n \cap \mathbf{Gl}_n^+$.

Otra cuestión que resuelve la idea de G-estructura vectorial es la siguiente: ¿Qué estructura geométrica implementar en un espacio vectorial para *medir volúmenes n-dimensionales*? Veamos primero qué entendemos por un *paralelepípedo n-dimensional* o *n-paralelepípedo* de $\mathbf{V}$, con $\dim \mathbf{V} = n$, para definir después la medida de su *volumen* (*n-dimensional*) respecto a una métrica euclídea.

Si $n = 1$, (un paralelepípedo 1-dimensional) es un segmento coincidente con un vector no nulo. Si $n = 2$, (un paralelepípedo 2-dimensional) es un paralelogramo (un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos) con un vértice en el origen y un par de lados coincidentes con una base del plano euclídeo estándar. Si $n = 3$, es un paralelepípedo (un sólido limitado por seis paralelogramos, cuyas caras opuestas son paralelas) con un vértice en el origen y tres aristas coincidentes con una base del espacio tridimensional euclídeo estándar. Un *paralelepípedo n-dimensional* (*n-paralelepípedo*) *determinado por una base* $\mathcal{P}$ *de* $\mathbf{V}$ se define, por analogía con el paralelogramo y el paralelepípedo, como la *extensión* delimitada por los $(n-1)$-paralelepípedos paralelos determinados por los n vectores de la base $\mathcal{P}$.

En el plano euclídeo estándar, el área de un paralelogramo es igual al valor absoluto del determinante de la matriz de las coordenadas, respecto a una base ortonormal, de dos vectores que sean lados contiguos del paralelogramo. En el espacio euclídeo estándar, el volumen de un paralelepípedo se halla tomando el valor absoluto del determinante de la matriz de las coordenadas, en una base ortonormal, de tres vectores que sean aristas del paralelepípedo que concurren en un mismo vértice. Procediendo por analogía, parece natural introducir la siguiente definición. Seguimos suponiendo $\dim \mathbf{V} = n$ en todo este apartado.

Definición 3.8. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo. El *volumen (respecto a* $\mathbf{g}$*) de un* n*-paralelepípedo determinado por una base* $\mathcal{P}$ *de* $\mathbf{V}$ es el valor absoluto del determinante de la matriz de las coordenadas de los vectores de $\mathcal{P}$, respecto a una base ortonormal.

Veamos que esta definición no depende de la base ortonormal respecto a la cual se tomen coordenadas de los vectores de $\mathcal{P}$: Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son dos bases ortonormales de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ y $\mathcal{P}$ es una base cualquiera de $\mathbf{V}$, obtenemos que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}\, \mathcal{P}_{\mathcal{C}}$. Tomando determinantes y el valor absoluto a ambos lados de la anterior igualdad, como $\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}) = \pm 1$, se sigue que

$$|\det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}})| = |\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}})|\,|\det(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})| = |\det(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})|.$$

Ahora bien, para definir el volumen de un n-paralelepípedo no es necesaria una métrica euclídea (hay muchas métricas euclídeas diferentes que "miden" el mismo volumen para cualquier n-paralelepípedo). Realmente es suficiente una G-estructura vectorial más amplia para obtener un medidor de volúmenes; bastará considerar el subgrupo del grupo lineal general $\mathbf{Sl}_n^{\pm} := \{A \in \mathbf{Gl}(n, \mathbb{R}) : |\det(A)| = 1\}$ (probad que es un subgrupo que contiene a $\mathbf{O}_n$).

Definición 3.9. Un *medidor de volumen de* un espacio vectorial $\mathbf{V}$ es una $\mathbf{Sl}_n^{\pm}$-estructura vectorial $\boldsymbol{w}$ sobre $\mathbf{V}$. Definimos el *volumen medido por* $\boldsymbol{w}$ del n-paralelepípedo determinado por una base $\mathcal{P}$ de $\mathbf{V}$ como la cantidad $|\det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}})|$, siendo $\mathcal{B} \in \boldsymbol{w}$.

Esta definición no depende de la base $\mathcal{B} \in \boldsymbol{w}$ respecto a la cual se tomen coordenadas de los vectores de $\mathcal{P}$. Comprobadlo: se hace igual que la comprobación posterior a Def. 3.8. Es fácil probar también que dos $\mathbf{Sl}_n^{\pm}$-estructuras vectoriales diferentes, $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{w}'$, dan lugar a volúmenes diferentes para iguales n-paralelepípedos.

Proposición 3.14. *Una métrica euclídea* $\mathbf{g}$ *de un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *determina un único medidor de volumen de* $\mathbf{V}$ *dado por* $\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}} := [\mathcal{B}]_{\mathbf{Sl}_n^{\pm}}$, *siendo* $\mathcal{B}$ *una base ortonormal respecto a* $\mathbf{g}$.

Demostración. Sea $[\mathcal{B}]_{\mathbf{O}_n}$ el conjunto de bases ortonormales respecto a $\mathbf{g}$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ dos de esas bases. Como $|\det(\mathcal{B}_{\mathcal{C}})| = 1$, entonces $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ pertenecen al mismo medidor de volumen en $\mathbf{V}$. Luego, la aplicación $[\mathcal{B}]_{\mathbf{SO}_n} \mapsto [\mathcal{B}]_{\mathbf{Sl}_n^{\pm}}$ está bien definida. □

Corolario 3.15. *Para cualquier* n*-paralelepípedo determinado por una base de* $\mathbf{V}$*, su volumen respecto a una métrica euclídea* $\mathbf{g}$ *y su volumen medido por* $\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}$ *son iguales.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ una base ortonormal de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ y una base $\mathcal{C} \in \boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}$; entonces $|\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}})| = 1$. Dado el paralelepípedo determinado por una base $\mathcal{P}$, su volumen respecto a $\mathbf{g}$ es igual a $|\det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}})|$ y su volumen medido por $\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}$ es igual a $|\det(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})|$. Pero

$$|\det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}})| = |\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}})|\,|\det(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})| = |\det(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})|,$$

luego el resultado se sigue. □

Otro caso de G-estructura vectorial que nos interesa estudiar, se obtiene con el *grupo lineal especial*, $\mathbf{Sl}(n,\mathbb{R}) \equiv \mathbf{Sl}_n := \{A \in \mathbf{Gl}(n,\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.

Definición 3.10. Un *medidor de volumen orientado* $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$ *de* $\mathbf{V}$ es una $\mathbf{Sl}_n$-estructura vectorial sobre $\mathbf{V}$. Definimos el *volumen orientado* (*respecto a* $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$) *del* n*-paralelepípedo determinado por una base* $\mathcal{P}$ *de* $\mathbf{V}$ como $\det(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})$, siendo $\mathcal{C} \in \boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$.

Veamos que esta definición no depende de la base $\mathcal{C} \in \boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$ respecto a la cual se tomen coordenadas de los vectores de $\mathcal{P}$: Si $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$ y $\mathcal{P}$ es una base cualquiera de $\mathbf{V}$, obtenemos que $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}\, \mathcal{P}_{\mathcal{C}}$. Tomando determinantes a ambos lados de la igualdad, como $\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}) = 1$, se sigue que $\det(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}) = \det(\mathcal{P}_{\mathcal{C}})$; luego la definición no depende de la base elegida en $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$.

Lema 3.16. *Un medidor de volumen orientado* $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$ *de un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *determina una orientación* $\mathcal{O}$ *de* $\mathbf{V}$ *y un medidor de volumen* $\boldsymbol{w}$*. Además, como subconjuntos de bases de* $\mathbf{V}$*, se verifica que* $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}} = \boldsymbol{w} \cap \mathcal{O}$*.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}} = [\mathcal{B}]_{\mathbf{Sl}_n} \in \mathbf{F}^{\mathbf{V}}/_{\underset{\sim}{\mathbf{Sl}_n}}$ un medidor de volumen orientado de $\mathbf{V}$. Veamos que la orientación dada por $\mathcal{O} := [\mathcal{B}]_{\mathbf{Gl}_n^+}$ solo depende de $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$: si $\mathcal{C} \overset{\mathbf{Sl}_n}{\sim} \mathcal{B}$, quiere decir que $\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}) = 1$, entonces $\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}) > 0$, y por tanto $\mathcal{C} \in [\mathcal{B}]_{\mathbf{Gl}_n^+}$. También, el medidor de volumen definido por $\boldsymbol{w} := [\mathcal{B}]_{\mathbf{Sl}_n^{\pm}}$ solo depende de $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$, porque $|\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}})| = 1$, y por tanto, si $\mathcal{C} \overset{\mathbf{Sl}_n}{\sim} \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{C} \in [\mathcal{B}]_{\mathbf{Sl}_n^{\pm}}$.

Así, las bases de $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$ pertenecen a la orientación $\mathcal{O}$ y al medidor de volumen $\boldsymbol{w}$. Luego, las aplicaciones $[\mathcal{B}]_{\mathbf{Sl}_n} \mapsto [\mathcal{B}]_{\mathbf{Gl}_n^+}$ y $[\mathcal{B}]_{\mathbf{Sl}_n} \mapsto [\mathcal{B}]_{\mathbf{Sl}_n^{\pm}}$ están bien definidas y unívocamente determinadas; y $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}} \subset \boldsymbol{w} \cap \mathcal{O}$. Por último, si $\mathcal{C} \in \boldsymbol{w} \cap \mathcal{O}$ entonces $\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}) > 0$ y $|\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}})| = 1$; luego $\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}) = 1$ y $\boldsymbol{w} \cap \mathcal{O} \subset \boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$. Se concluye que $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}} = \boldsymbol{w} \cap \mathcal{O}$. □

Proposición 3.17. *Una métrica euclídea* $\mathbf{g}$ *y una orientación* $\mathcal{O}$ *de un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *determinan un medidor de volumen orientado* $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}_{\mathbf{g}}$ *de* $\mathbf{V}$*.*

Demostración. Sea $[\mathcal{B}]_{\mathbf{SO}_n}$ el conjunto de bases ortonormales orientadas positivamente y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ dos de esas bases. Como $\det(\mathcal{B}_{\mathcal{C}}) = 1$, entonces $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ pertenecen al mismo medidor de volumen orientado. Luego, la aplicación $[\mathcal{B}]_{\mathbf{SO}_n} \mapsto [\mathcal{B}]_{\mathbf{Sl}_n} =: \boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}_{\mathbf{g}}$ está bien definida y unívocamente determinada. □

Nota: De entre todas las G-estructuras vectoriales tratadas en este apartado solo las $\mathbf{O}_n$-estructuras poseen la propiedad de inducir una $\mathbf{O}_m$-estructura en los subespacios vectoriales, no nulos, de dimensión $m < n$; esto se probó en el Lema 3.2. En los casos $G = \mathbf{Gl}_n^+$, $\mathbf{SO}_n$, $\mathbf{Sl}_n^\pm$ o $\mathbf{Sl}_n$, las G-estructuras vectoriales sobre $\mathbf{V}$ no inducen la misma clase de G-estructura vectorial sobre los subespacios no impropios de $\mathbf{V}$.

Para entender mejor la siguiente proposición, releed antes la introducción al Tema 2.

Proposición 3.18. *Dado un medidor de volumen orientado $\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}$ de $\mathbf{V}$ se define la aplicación:*

$$\det\nolimits_{\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}} : \mathbf{V}\times \overset{n}{\cdots} \times\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \det\nolimits_{\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) := \det(A),$$

siendo $A = (a_{ij})$ la matriz cuyas n columnas son las coordenadas de $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ en una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ en la clase $\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}$. Esta aplicación es multilineal y es independiente de la base $\mathcal{B} \in \boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}$. Además, si $\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}$ y $\widetilde{\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}}$ son medidores de volumen orientado de $\mathbf{V}$ diferentes, entonces $\det_{\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}} \neq \det_{\widetilde{\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}}}$.

Demostración. Se demuestra que $\det_{\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}}$ es una aplicación multilineal por la propiedad de los determinantes que nos dice que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & k\,a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & k\,a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Veamos que $\det_{\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}}$ está bien definido, es decir, es independiente de la base $\mathcal{B}$ en la clase $\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}$. Si $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ son linealmente dependientes entonces $\det_{\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) = \det A = 0$, cualquiera que sea la base perteneciente a $\boldsymbol{w}^{\circlearrowleft}$ que tomemos para hallar A.

Si $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ son linealmente independientes entonces $\mathcal{D} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ es una base de $\mathbf{V}$. Si ahora tomamos $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$, es decir que $\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}) = 1$, y tenemos en cuenta que $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}\, \mathcal{D}_{\mathcal{C}}$ se sigue que $\det(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}) = \det(\mathcal{D}_{\mathcal{C}})$. Luego $\det_{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}}$ está bien definido.

Por último, si $\mathcal{B} \in \boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}$ y $\mathcal{B}' \in \widetilde{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}}$, con $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}} \neq \widetilde{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}}$, entonces $\det(\mathcal{B}'_{\mathcal{B}}) \neq 1$. Si $\mathcal{D}$ es una base de $\mathbf{V}$, como $\mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}'_{\mathcal{B}}\, \mathcal{D}_{\mathcal{B}'}$, debe ser $\det(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}) \neq \det(\mathcal{D}_{\mathcal{B}'})$ y, por tanto, $\det_{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}} \neq \det_{\widetilde{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}}}$. $\square$

La función $\det_{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}}$ verifica, además de la multilinealidad, la propiedad *antisimétrica*: $\det_{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}}(\dots, \bar{v}_i, \dots, \bar{v}_j, \dots) = -\det_{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}}(\dots, \bar{v}_j, \dots, \bar{v}_i, \dots)$, $\forall\, i \neq j$.

Una aplicación $\mathbf{V} \times \overset{n}{\dots} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que verifique la multilinealidad y la antisimetría se le llama una *función determinante* en $\mathbf{V}$. Es fácil demostrar que cada función determinante en $\mathbf{V}$, no nula, se obtiene a partir de una $\mathbf{Sl}_n$-estructura vectorial, como en la Prop. 3.18. Se demuestra, además, que hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de funciones determinante en $\mathbf{V}$ y el conjunto de medidores de volumen orientado de $\mathbf{V}$.

Ángulo orientado.

Un plano vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ es un espacio vectorial euclídeo con $\dim \mathbf{V} = 2$. Sean $(\mathbf{V}, \mathbf{g}, \mathcal{O})$ un plano vectorial euclídeo orientado, $\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}_{\mathbf{g}}$ su medidor de volumen orientado (Prop. 3.17) y $\det_{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}_{\mathbf{g}}}$ la función determinante asociada (Prop. 3.18).

Lema 3.19. *Se verifica que*

$$\left(\det_{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}_{\mathbf{g}}}(\bar{u}, \bar{v})\right)^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) & \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) \\ \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) & \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{v}) \end{vmatrix}, \qquad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}. \tag{3.8}$$

Demostración. Las coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en una base ortonormal $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, por (3.6) (después de Prop. 3.6), son $\bar{u}_{\mathcal{B}} = (\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_1), \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_2))$ y $\bar{v}_{\mathcal{B}} = (\mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_1), \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_2))$.

Por un lado, tomando $\mathcal{B} \in \boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}_{\mathbf{g}}$, por la Prop. 3.18, queda:

$$\det_{\boldsymbol{w}^{\mathcal{O}}_{\mathbf{g}}}(\bar{u}, \bar{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_1) & \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_1) \\ \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_2) & \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_2) \end{vmatrix} = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_1)\mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_2) - \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{b}_2)\mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_1);$$

si elevamos al cuadrado nos da:

$$\big(\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u},\bar{v})\big)^2 = \mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_1)^2\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_2)^2 + \mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_2)^2\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_1)^2 - \\ - 2\mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_1)\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_2)\mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_2)\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_1)$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{g}(\bar{u},\bar{u}) & \mathbf{g}(\bar{u},\bar{v}) \\ \mathbf{g}(\bar{u},\bar{v}) & \mathbf{g}(\bar{v},\bar{v}) \end{vmatrix} = \mathbf{g}(\bar{u},\bar{u})\mathbf{g}(\bar{v},\bar{v}) - \mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})^2 =$$
$$= \big(\mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_1)^2 + \mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_2)^2\big)\big(\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_1)^2 + \mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_2)^2\big) -$$
$$-\big(\mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_1)\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_1) + \mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_2)\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_2)\big)^2 =$$
$$= \mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_1)^2\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_2)^2 + \mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_2)^2\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_1)^2 - 2\mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_1)\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_1)\mathbf{g}(\bar{u},\bar{b}_2)\mathbf{g}(\bar{v},\bar{b}_2).$$

Y la ecuación queda demostrada. □

Proposición 3.20. *Dados $\bar{u},\bar{v} \in \mathbf{V}$, no nulos, se verifica que*

$$\frac{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})^2}{\|\bar{u}\|^2\,\|\bar{v}\|^2} + \frac{\big(\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u},\bar{v})\big)^2}{\|\bar{u}\|^2\,\|\bar{v}\|^2} = 1; \tag{3.9}$$

por tanto, existe un único $\rho \in [0,2\pi)$ tal que

$$\cos\rho = \frac{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}, \qquad \operatorname{sen}\rho = \frac{\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u},\bar{v})}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}.$$

Demostración. La ecuación (3.8) desarrollada es:

$$\big(\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u},\bar{v})\big)^2 = \|\bar{u}\|^2\,\|\bar{v}\|^2 - \mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})^2.$$

De aquí, dado que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ no son nulos, la ecuación (3.9) es una consecuencia inmediata. El resto se sigue de que si $x, y \in \mathbb{R}$ verifican la ecuación $x^2+y^2 = 1$ entonces existe un ρ único en $[0,2\pi)$ tal que $\cos\rho = x$ y $\operatorname{sen}\rho = y$. □

Definición 3.11. Sea $(\mathbf{V},\mathbf{g})$ un plano vectorial euclídeo orientado. Dados $\bar{u},\bar{v} \in \mathbf{V}$, no nulos, el *ángulo orientado de $\bar{u}$ a $\bar{v}$* se define como el único valor $\widehat{\bar{u},\bar{v}}^{\mathcal{O}} \in [0,2\pi)$ tal que

$$\widehat{\bar{u},\bar{v}}^{\mathcal{O}} := \arccos\frac{\mathbf{g}(\bar{u},\bar{v})}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|} = \operatorname{arc\,sen}\frac{\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u},\bar{v})}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}.$$

Ejemplo 3.4. En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar estándar y con la orientación estándar, que es la que define la base estándar $\big((1,0),(0,1)\big)$, retomemos el ejemplo 3.2. Calculemos el ángulo orientado entre $\vec{u}=(0,2)$ y $\vec{v}=(1,1)$; y entre $\vec{u}$ y $-\vec{v}$:

$$\widehat{\bar{u},\bar{v}}^{\mathcal{O}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{7\pi}{4} \equiv 325^\circ,$$
$$\widehat{\bar{u},\text{-}\vec{v}}^{\mathcal{O}} = \arccos\frac{-1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} \equiv 135^\circ.$$

Si representamos el plano $\mathbb{R}^2$ con el eje OX horizontal, con los valores $x>0$ a la derecha, y el eje OY vertical, con los valores $y>0$ en la parte superior, el ángulo orientado entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es la abertura recorrida de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Producto vectorial y producto mixto.

Actualicemos para las métricas euclídeas, un resultado sobre formas bilineales que vimos en el Tema 2 (repasad la Prop. 2.2 y el Ejer. 19 al final del Tema 2, aplicadas a $\mathbf{g}$, que es una forma bilineal simétrica).

Lema 3.21. *Dada una métrica euclídea* $\mathbf{g}$ *en* $\mathbf{V}$*, con* $\dim\mathbf{V}=n$*, la aplicación*

$$\tilde{\mathbf{g}}\colon \mathbf{V}\longrightarrow\mathbf{V}^*, \qquad \bar{u}\longmapsto\mathbf{g}(\bar{u},\,\cdot\,) \tag{3.10}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Por (2.7) de la Proposición 2.4, dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$, tenemos que

$$M(\mathbf{g},\mathcal{B}) = M(\tilde{\mathbf{g}},\mathcal{B},\mathcal{B}^*)$$

con $\mathcal{B}^*$ la correspondiente base de $\mathbf{V}^*$ dual de $\mathcal{B}$. Como $\mathbf{g}$ es no degenerada entonces (ver Prop. 2.15) $\det\big(M(\mathbf{g},\mathcal{B})\big) = \det\big(M(\tilde{\mathbf{g}},\mathcal{B},\mathcal{B}^*)\big)\neq 0$ luego $\tilde{\mathbf{g}}$ es un isomorfismo. $\square$

Notad, por la demostración de la proposición, que $\tilde{\mathbf{g}}$ es un isomorfismo para cualquier métrica $\mathbf{g}$ no degenerada, en particular, también para las métricas lorentzianas.

Con el lema precedente, podemos definir el llamado *producto vectorial* del espacio euclídeo tridimensional usual de la siguiente manera. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo orientado de dimensión 3, con orientación $\mathcal{O}$. Sean $\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}$ el correspondiente medidor de volumen orientado y $\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}$ su función determinante.

Definición 3.12. Dados $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$ definimos el *producto vectorial de $\bar{u}$ por $\bar{v}$* como:

$$\bar{u} \times \bar{v} := \tilde{\mathbf{g}}^{-1}\big(\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, \bar{v}, \,\cdot\,)\big) \in \mathbf{V} \tag{3.11}$$

Notad que, al ser $\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}$ una aplicación trilineal, entonces es lineal en cada factor y, en particular, $\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, \bar{v}, \,\cdot\,) \in \mathbf{V}^*$. Luego, por el anterior Lema 3.21, la fórmula (3.11) está correctamente definida y nos da un único vector de $\mathbf{V}$, que denotamos por $\bar{u} \times \bar{v}$.

La fórmula (3.11) es equivalente a

$$\mathbf{g}(\bar{u} \times \bar{v}, \,\cdot\,) = \tilde{\mathbf{g}}(\bar{u} \times \bar{v}) = \det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, \bar{v}, \,\cdot\,) \tag{3.12}$$

Hallemos las coordenadas de $\bar{u} \times \bar{v}$ respecto a una base ortonormal $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, respecto a la cual: $\bar{u}_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\bar{v}_{\mathcal{B}} = (y_1, y_2, y_3)$. Por (3.6) (después de Prop. 3.6), y usando coordenadas en $\mathcal{B}$ para el cálculo de $\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}$ (Prop. 3.18), obtenemos:

$$\begin{aligned}
(\bar{u} \times \bar{v})_{\mathcal{B}} &= \big(\mathbf{g}(\bar{u} \times \bar{v}, \bar{b}_1), \mathbf{g}(\bar{u} \times \bar{v}, \bar{b}_2), \mathbf{g}(\bar{u} \times \bar{v}, \bar{b}_3)\big) \\
&= \big(\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{b}_1), \det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{b}_2), \det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{b}_3)\big) \\
&= \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right) = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),
\end{aligned}$$

que es el resultado del producto vectorial estándar $(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3)$ en $\mathbb{R}^3$.

Recordad que el *producto mixto* de tres vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ en el espacio euclídeo estándar $\mathbb{R}^3$ es $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$. Consecuentemente de esto, como la fórmula (3.12) nos da que $\mathbf{g}(\bar{u} \times \bar{v}, \bar{w}) = \det_{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, podemos adoptar la siguiente definición.

Definición 3.13. Sea un espacio vectorial euclídeo orientado $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ de dimensión 3. Dados $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbf{V}$, definimos el *producto mixto* de $\bar{u}, \bar{v}$ y $\bar{w}$ por el valor $\det_{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathbb{R}$.

Las propiedades del producto mixto se deducen de las propiedades de los determinantes, pero no nos detendremos aquí en ello.

Procedimiento de Gram-Schmidt.

Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo, con $\dim \mathbf{V} = n$. Sabemos, por Prop. 3.6, que todo espacio vectorial euclídeo admite bases ortonormales.

El siguiente teorema nos da un procedimiento constructivo para obtener, a partir de cualquier base de $\mathbf{V}$, una única base ortonormal de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ de tal forma que: (a) el subespacio vectorial, $\mathbf{U}_k$, generado por los primeros k vectores de la base de partida es el mismo que el subespacio generado por los primeros k vectores de la base ortonormal obtenida; y (b) la base del espacio vectorial $\mathbf{U}_k$ que forman los primeros k vectores de la base de partida y la que forman los primeros k vectores de la base ortonormal obtenida pertenecen a la misma orientación de $\mathbf{U}_k$. Este procedimiento de obtención de una base ortonormal a partir de una base dada se conoce como *procedimiento de Gram-Schmidt.*

Teorema 3.22 (Procedimiento de Gram-Schmidt)**.** *Sea $\mathcal{C} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ una base cualquiera de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. Entonces existe una única base ortonormal $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ tal que, $\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$, se verifica:*

(a) $\mathbf{U}_k \equiv \mathbf{L}(\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}) = \mathbf{L}(\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k\})$.

(b) $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k)$ *y* $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$ *son bases de* $\mathbf{U}_k$ *que definen la misma orientación de* $\mathbf{U}_k$.

Demostración. A partir de los vectores $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ de la base $\mathcal{C}$ y la métrica euclídea $\mathbf{g}$, definamos los vectores $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= \bar{u}_1 \\
\bar{v}_2 &= \bar{u}_2 - \frac{\mathbf{g}(\bar{u}_2, \bar{v}_1)}{\mathbf{g}(\bar{v}_1, \bar{v}_1)}\,\bar{v}_1 \\
\bar{v}_3 &= \bar{u}_3 - \frac{\mathbf{g}(\bar{u}_3, \bar{v}_1)}{\mathbf{g}(\bar{v}_1, \bar{v}_1)}\,\bar{v}_1 - \frac{\mathbf{g}(\bar{u}_3, \bar{v}_2)}{\mathbf{g}(\bar{v}_2, \bar{v}_2)}\,\bar{v}_2 \\
\cdots \quad & \cdots \quad \cdots \\
\bar{v}_k &= \bar{u}_k - \frac{\mathbf{g}(\bar{u}_k, \bar{v}_1)}{\mathbf{g}(\bar{v}_1, \bar{v}_1)}\,\bar{v}_1 - \cdots - \frac{\mathbf{g}(\bar{u}_k, \bar{v}_{k-1})}{\mathbf{g}(\bar{v}_{k-1}, \bar{v}_{k-1})}\,\bar{v}_{k-1} \\
\cdots \quad & \cdots \quad \cdots \\
\bar{v}_n &= \bar{u}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mathbf{g}(\bar{u}_n, \bar{v}_i)}{\mathbf{g}(\bar{v}_i, \bar{v}_i)}\bar{v}_i
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

La definición es correcta si $\mathbf{g}(\bar{v}_i, \bar{v}_i) \neq 0$, es decir, como la métrica es euclídea, si $\bar{v}_i \neq \bar{0}$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$. Esto se prueba por un razonamiento de inducción finita: (1) $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$ porque $\bar{u}_1$ pertenece a una base. (2) Supongamos que $\bar{v}_i \neq \bar{0}$, $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$, lo que implica que $\bar{v}_k$ está bien definido. Veamos que $\bar{v}_k \neq \bar{0}$. Si fuese $\bar{v}_k = \bar{0}$ entonces $\bar{u}_k$ sería combinación lineal de $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-1}$ y, por tanto, $\bar{u}_k$ sería también combinación lineal de $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{k-1}$, lo cual no es posible pues $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k$ forman parte de una base; entonces $\bar{v}_k \neq \bar{0}$. Luego $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ están bien definidos por (3.13).

Probemos, por inducción finita, que los vectores $\bar{v}_i$ son ortogonales entre sí: (1′) Comprobamos que $\mathbf{g}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = 0$ (como ejercicio, comprobad que $\mathbf{g}(\bar{v}_1, \bar{v}_3) = 0$ y $\mathbf{g}(\bar{v}_2, \bar{v}_3) = 0$). (2′) Supongamos que $\mathbf{g}(\bar{v}_i, \bar{v}_j) = 0$, $\forall i, j \in \{1, \dots, k-1\}$ con $i \neq j$; entonces es fácil comprobar que $\mathbf{g}(\bar{v}_k, \bar{v}_i) = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$. Luego $\mathbf{g}(\bar{v}_i, \bar{v}_j) = 0$, $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ con $i \neq j$.

Así, aplicando la inducción hasta $k = n$, se deduce que $\mathbf{g}(\bar{v}_i, \bar{v}_j) = 0$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$.

Ahora, por el Lema 3.1(b), como son ortogonales entre sí $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ son linealmente independientes; y por tanto, $\mathcal{D} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ es una base de $\mathbf{V}$ de vectores ortogonales entre sí. Reemplazando cada $\bar{v}_i$ por $\bar{b}_i \equiv \frac{1}{\|\bar{v}_i\|}\,\bar{v}_i$, obtenemos una base ortonormal de $\mathbf{V}$:

$$\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) \equiv \left(\tfrac{1}{\|\bar{v}_1\|}\, \bar{v}_1, \ldots, \tfrac{1}{\|\bar{v}_n\|}\, \bar{v}_n\right). \tag{3.14}$$

Veamos que cumple las condiciones del enunciado: (a) Son inmediatas las igualdades $\mathbf{L}(\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k\}) = \mathbf{L}(\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}) = \mathbf{L}(\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k\})$; la primera igualdad porque $\bar{b}_i$ y $\bar{v}_i$ son proporcionales, y la segunda por las ecuaciones (3.13). (b) Si despejamos los $\bar{u}_i$ de (3.13) observamos que la matriz de cambio de base de $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ a $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ es una matriz triangular con solo unos en la diagonal principal, por tanto, su determinante es $1 > 0$. Además, la matriz de cambio de base de $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k)$ a $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ es diagonal con valores positivos en la diagonal principal, por tanto también tiene determinante positivo. Luego las tres bases definen la misma orientación en $\mathbf{L}(\{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k\})$.

La unicidad se prueba por inducción sobre la dimensión de $\mathbf{V}$: $(1'')$ Para $n = 1$, dado $\bar{u}_1 \neq \bar{0}$, el vector unitario $\bar{b}_1 = \frac{1}{\|\bar{u}_1\|}\bar{u}_1$ es el único que verifica (a) y (b). $(2'')$ Supongamos que en todo espacio vectorial de dimensión $n-1$ se verifica el teorema, que incluye la unicidad. Ahora, dada la base de $\mathbf{V}$ $\mathcal{C} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$, aplicamos el teorema a la base $(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1})$ del subespacio $\mathbf{W} = \mathbf{L}(\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}\})$, obteniendo la base ortonormal $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{n-1})$ de $\mathbf{W}$ que, por la hipótesis (2), es la única que verifica (a) y (b) para cada $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Esta base es parte de la base $\mathcal{B}$, dada en (3.14). Se obtiene que $\mathbf{L}(\bar{b}_n)^{\perp} = \mathbf{W}$ y que $\mathbf{V} = \mathbf{L}(\bar{b}_n) \oplus \mathbf{W}$ (ver Prop. 2.12); luego solo hay dos bases ortonormales que verifican (a) para $k \leq n$ y (b) para $k \leq n-1$, que son las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}' = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{n-1}, -\bar{b}_n)$. Como $\det(\mathcal{B}'_{\mathcal{B}}) = -1 < 0$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son de diferente orientación; y solo $\mathcal{B}$ define la misma orientación que $\mathcal{C}$. $\square$

El siguiente resultado recuerda al *Teorema de ampliación a una base* que afirma que, dados unos vectores linealmente independientes, existe una base que los contiene. Aunque es un corolario del proceso de Gram-Schmidt, se puede denominar el *Teorema de ampliación a una base ortonormal.*

Corolario 3.23. *Sea* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial euclídeo. Si* $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k$ *son vectores unitarios y ortogonales entre sí entonces existe una base ortonormal* $\mathcal{B} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}, \ldots, \bar{u}_n)$ *de* $\mathbf{V}$.

Demostración. Sabemos, por el Lema 3.1(b), que $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}$ son linealmente independientes; luego, por el teorema de ampliación a una base, existe una base $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k, \bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_n)$ de $\mathbf{V}$. Aplicando a esta base el procedimiento de Gram-Schmidt, obtenemos una base ortonormal en la cual sus k primeros vectores no se modifican; y así se obtiene la base que se afirma. $\square$

Proyecciones y simetrías ortogonales.

En la línea del Lema 3.1, podemos añadir el siguiente resultado.

Lema 3.24. *Para cualquier subespacio vectorial* $\mathbf{U}$ *de un espacio vectorial euclídeo* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$*, el subespacio ortogonal* $\mathbf{U}^\perp$ (ver Def 2.8) *verifica*

$$\mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp = \mathbf{V}.$$

Así, en el caso euclídeo, se llama a $\mathbf{U}^\perp$ *el* complemento ortogonal *de* $\mathbf{U}$.

Demostración. Por el Lema 3.1(c), la suma de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^\perp$ es una suma directa y tenemos que $\mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp \subset \mathbf{V}$. Veamos que $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp) = \dim \mathbf{V}$ y habremos acabado. Sea $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k)$ una base ortonormal de $\mathbf{U}$, que sabemos que existe, por Prop. 3.6 aplicado a $(\mathbf{U}, \mathbf{g}_\mathbf{U})$ (ver Lema 3.2). Ahora, por Cor. 3.23, la ampliamos a una base ortonormal $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}, \dots, \bar{u}_n)$ de $\mathbf{V}$. Es claro que $\bar{u}_{k+1}, \dots, \bar{u}_n$ son linealmente independientes, y que pertenecen a $\mathbf{U}^\perp$, ya que son ortogonales a una base de $\mathbf{U}$; entonces $\dim \mathbf{U}^\perp \geq n - k$. Pero además,

$$\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{U}^\perp = k + \dim \mathbf{U}^\perp \leq n,$$

entonces $\dim \mathbf{U}^\perp \leq n - k$. Luego, ha de ser $\dim \mathbf{U}^\perp = n - k$, y por tanto, $\dim(\mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp) = n$. $\square$

Este resultado permite la descomposición unívoca de cada vector de $\mathbf{V}$ en suma de dos vectores, uno de $\mathbf{U}$ y otro de $\mathbf{U}^\perp$. Veamos dos interesantes tipos de endomorfismos de un espacio vectorial euclídeo, que se pueden definir en base a esta descomposición de vectores. Pero antes, recordemos un concepto del que hablamos al final del apartado "Sobre aplicaciones lineales" del

Tema 0: *Preliminares y notaciones*: Dado un endomorfismo $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, un subespacio vectorial $\mathbf{U}$ de $\mathbf{V}$ es un *subespacio invariante* por f si $f(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$.

En lo que sigue, $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ es un espacio vectorial euclídeo y $\mathbf{U}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$.

Definición 3.14. La *proyección ortogonal* sobre $\mathbf{U}$ es la aplicación

$$\mathbf{p}^{\mathbf{U}}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \quad \mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{v}) = \bar{u}, \qquad \text{siendo } \bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \text{ con } \bar{u} \in \mathbf{U} \text{ y } \bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}.$$

La aplicación está bien definida porque la descomposición de un vector respecto a una suma directa es única.

Veamos sus propiedades.

Proposición 3.25. *La proyección ortogonal sobre* $\mathbf{U}$ *verifica:*

(a) $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}$ *es una aplicación lineal.*

(b) $\ker \mathbf{p}^{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^{\perp}$, $\operatorname{im} \mathbf{p}^{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$.

(c) $\mathbf{U}$ *y* $\mathbf{U}^{\perp}$ *son subespacios invariantes por* $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}$.

(d) $\mathbf{p}^{\mathbf{U}} \circ \mathbf{p}^{\mathbf{U}} = \mathbf{p}^{\mathbf{U}}$.

Demostración. (a) Sean $\bar{v}, \bar{v}' \in \mathbf{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ y $\bar{v}' = \bar{u}' + \bar{w}'$, con $\bar{u}, \bar{u}' \in \mathbf{U}$ y $\bar{w}, \bar{w}' \in \mathbf{U}^{\perp}$, entonces $\bar{v} + \bar{v}' = (\bar{u} + \bar{u}') + (\bar{w} + \bar{w}')$ y $\alpha\bar{v} = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{w}$. Puesto que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^{\perp}$ son subespacios vectoriales, $\bar{u} + \bar{u}'$, $\alpha\bar{u} \in \mathbf{U}$ y $\bar{w} + \bar{w}'$, $\alpha\bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$; y entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{v} + \bar{v}') &= \bar{u} + \bar{u}' = \mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{v}) + \mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{v}') \\ \mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\alpha\bar{v}) &= \alpha\bar{u} = \alpha\, \mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{v}), \end{aligned}$$

demostrándose así que $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}$ es lineal.

(b) Veamos que $\ker \mathbf{p}^{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^{\perp}$. Si $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{v}) = \bar{0}$, como $\bar{v} - \mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{v}) = \bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$, entonces $\bar{v} \in \mathbf{U}^{\perp}$; luego, $\ker \mathbf{p}^{\mathbf{U}} \subset \mathbf{U}^{\perp}$. Ahora, si $\bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$, como $\bar{w} = \bar{0} + \bar{w}$, entonces, por la unicidad de la descomposición de la suma directa, $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{w}) = \bar{0}$; luego, $\mathbf{U}^{\perp} \subset \ker \mathbf{p}^{\mathbf{U}}$.

Veamos que $\operatorname{im} \mathbf{p}^{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$. Por definición de $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}$, $\operatorname{im} \mathbf{p}^{\mathbf{U}} \subset \mathbf{U}$; por otro lado, si $\bar{u} \in \mathbf{U}$, $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{u}) = \bar{u}$, luego, $\mathbf{U} \subset \operatorname{im} \mathbf{p}^{\mathbf{U}}$.

(c) Como ya hemos dicho, si $\bar{u} \in \mathbf{U}$ entonces $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{u}) = \bar{u}$; luego $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$ y resulta que $\mathbf{U}$ es invariante por $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}$. Por otro lado, si $\bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$, hemos visto ya en (b) que $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{w}) = \bar{0}$; luego, $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\mathbf{U}^{\perp}) = \{\bar{0}\} \subset \mathbf{U}^{\perp}$ y obtenemos que $\mathbf{U}^{\perp}$ es invariante por $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}$, según la definición de subespacio invariante.

(d) Si $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$, con $\bar{u} \in \mathbf{U}$ y $\bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$, resulta inmediato verificar que $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{v})) = \mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{u}) = \bar{u} = \mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{v})$. □

Puesto que la descomposición de un vector respecto a una suma directa es única, la siguiente aplicación también está bien definida.

Definición 3.15. La *simetría ortogonal* respecto a $\mathbf{U}$ es la aplicación

$$\mathbf{s}^{\mathbf{U}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \quad \mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{v}) = \bar{u} - \bar{w}, \qquad \text{siendo } \bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \text{ con } \bar{u} \in \mathbf{U} \text{ y } \bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}.$$

Proposición 3.26. *La simetría ortogonal respecto a* $\mathbf{U}$ *verifica:*

(a) $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ *es una aplicación lineal.*

(b) $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ *es un isomorfismo.*

(c) $\mathbf{U}$ *y* $\mathbf{U}^{\perp}$ *son subespacios invariantes por* $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$.

(d) $\mathbf{s}^{\mathbf{U}} \circ \mathbf{s}^{\mathbf{U}} = \mathbf{I}_{\mathbf{V}}$.

Demostración. (a) Con el mismo preámbulo a la demostración del apartado (a) de la Prop. 3.25 se obtiene que

$$\mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{v} + \bar{v}') = \bar{u} + \bar{u}' - (\bar{w} + \bar{w}') = (\bar{u} - \bar{w}) + (\bar{u}' - \bar{w}') = \mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{v}) + \mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{v}')$$
$$\mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\alpha\bar{v}) = \alpha\bar{u} - (\alpha\bar{w}) = \alpha(\bar{u} - \bar{w}) = \alpha\, \mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{v}),$$

concluyendo así que $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ es lineal.

(b) Sea $\bar{v} \in \ker \mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ y $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$, con $\bar{u} \in \mathbf{U}$ y $\bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$; entonces $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{v}) = \bar{u} - \bar{w} = \bar{0}$. Luego $\bar{u} = \bar{w} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{\perp}$; pero como $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{\perp} = \{\bar{0}\}$, $\bar{u} = \bar{w} = \bar{0}$. Concluimos que $\bar{v} = \bar{0}$ y que $\ker \mathbf{s}^{\mathbf{U}} = \{\bar{0}\}$; es decir, $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ es un endomorfismo inyectivo. Por tanto, $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ es un isomorfismo.

(c) De la definición de $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ se sigue que que si $\bar{u} \in \mathbf{U}$ entonces $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{u}) = \bar{u}$; y que si $\bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$ entonces $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{w}) = -\bar{w}$. Luego $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$ y $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\mathbf{U}^{\perp}) = \mathbf{U}^{\perp}$, y ambos subespacios son invariantes.

(d) Dado $\bar{v} \in \mathbf{V}$, descomponemos $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$, con $\bar{u} \in \mathbf{U}$ y $\bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$, y calculamos:

$$\mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{v})) = \mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{u} - \bar{w}) = \mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{u}) - \mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{w}) = \bar{u} - (-\bar{w}) = \bar{u} + \bar{w} = \bar{v};$$

lo que prueba que $\mathbf{s}^{\mathbf{U}} \circ \mathbf{s}^{\mathbf{U}} = \mathbf{I}_{\mathbf{V}}$ □

La siguiente proposición es muy práctica para resolver ejercicios donde intervienen proyecciones o simetrías ortogonales.

Proposición 3.27. *Si* $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$ *es base ortonormal de* $\mathbf{U}$ *y* $(\bar{b}_{k+1}, \dots, \bar{b}_n)$ *es base ortonormal de* $\mathbf{U}^{\perp}$ *entonces,* $\forall \bar{v} \in \mathbf{V}$:

$$\mathbf{p}^{\mathbf{U}}(\bar{v}) = \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_1)\bar{b}_1 + \cdots + \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_k)\bar{b}_k\,,$$

$$\mathbf{s}^{\mathbf{U}}(\bar{v}) = \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_1)\bar{b}_1 + \cdots + \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_k)\bar{b}_k - \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_{k+1})\bar{b}_{k+1} - \cdots - \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{b}_n)\bar{b}_n\,.$$

Demostración. El resultado se sigue inmediatamente de la expresión (3.6), de las coordenadas de un vector en una base ortonormal, y de las definiciones de $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}$ y $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$. □

3.2. Endomorfismos autoadjuntos y su diagonalización

Los *endomorfismos autoadjuntos* respecto a una métrica euclídea, llamados también *endomorfismos simétricos*, son una clase interesante de endomorfismos: La proyección ortogonal sobre un subespacio es un tipo particular de endomorfismos autoadjunto; y las cuestiones sobre la diagonalización de los endomorfismos autoadjuntos desempeñan un papel importante para resolver la diagonalización de cualquier métrica o forma cuadrática.

Aunque en esta sección nos ocuparemos principalmente de las métricas euclídeas, el siguiente resultado es cierto para el caso más amplio de las métricas no degeneradas.

Proposición 3.28. *Sea* $\mathbf{g}$ *una métrica no degenerada en un espacio vectorial* $\mathbf{V}$ *de dimensión finita. Dado* $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$*, existe una única aplicación* $f^\dagger \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *que verifica*

$$\mathbf{g}(f^\dagger(\bar{u}), \bar{v}) = \mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{v})), \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}, \tag{3.15}$$

Además, $f^\dagger$ *es lineal; es decir,* $f^\dagger \in \operatorname{End}\mathbf{V}$.

Demostración. Veamos primero que si $f^\dagger$ es una aplicación que verifica (3.15) entonces necesariamente $f^\dagger$ es lineal. Dados $\bar{u}, \bar{w} \in \mathbf{V}$, se obtiene que $\forall\, \bar{v} \in \mathbf{V}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(f^\dagger(\bar{u}+\bar{w}), \bar{v}) &= \mathbf{g}(\bar{u}+\bar{w}, f(\bar{v})) = \mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{v})) + \mathbf{g}(\bar{w}, f(\bar{v})) = \\ &= \mathbf{g}(f^\dagger(\bar{u}), \bar{v}) + \mathbf{g}(f^\dagger(\bar{w}), \bar{v}) = \mathbf{g}(f^\dagger(\bar{u}) + f^\dagger(\bar{w}), \bar{v})\,;\end{aligned}$$

como $\mathbf{g}$ es no degenerada, de Def. 2.11.A, se sigue que

$$f^\dagger(\bar{u}+\bar{w}) = f^\dagger(\bar{u}) + f^\dagger(\bar{w}).$$

Igualmente, dados $k \in \mathbb{R}$ y $\bar{u} \in \mathbf{V}$, se tiene que $\forall\, \bar{v} \in \mathbf{V}$,

$$\mathbf{g}(f^\dagger(k\bar{u}), \bar{v}) = \mathbf{g}(k\bar{u}, f(\bar{v})) = k\mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{v})) = k\mathbf{g}(f^\dagger(\bar{u}), \bar{v}) = \mathbf{g}(kf^\dagger(\bar{u}), \bar{v})\,;$$

y como $\mathbf{g}$ es no degenerada, se sigue que

$$f^\dagger(k\bar{u}) = kf^\dagger(\bar{u}).$$

Por tanto hemos probado que $f^\dagger$ es lineal.

Veamos que existe algún endomorfismo verificando (3.15). Como $\mathbf{V}$ es de dimensión finita, dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$, existen las matrices $A \equiv M(f, \mathcal{B})$ y $N \equiv M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$. Como $\mathbf{g}$ es no degenerada, por la Prop. 2.15, existe N^{-1} y podemos definir $C = NAN^{-1}$; consideremos el endomorfismo $f^\dagger$ unívocamente definido por la condición $M(f^\dagger, \mathcal{B}) = C^t$. Comprobemos que $f^\dagger$ verifica (3.15): Denotando las coordenadas de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ como matrices columna por $\bar{u}_{\mathcal{B}} \equiv X$, $\bar{v}_{\mathcal{B}} \equiv Y$, queda: $f^\dagger(\bar{u})_{\mathcal{B}} = C^tX$ y $f(\bar{v})_{\mathcal{B}} = AY$; entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(f^\dagger(\bar{u}), \bar{v}) &= (C^tX)^tNY = X^tCNY = \\ &= X^t(NAN^{-1})NY = X^tN(AY) = \mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{v})).\end{aligned}$$

Por último, veamos la unicidad de $f^\dagger$. Supongamos que $h \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ también verifica $\mathbf{g}(h(\bar{u}), \bar{v}) = \mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{v}))$, $\forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$. Entonces, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{V}$, obtenemos

$$\mathbf{g}(h(\bar{u}), \bar{v}) = \mathbf{g}(f^\dagger(\bar{u}), \bar{v}),\ \forall\, \bar{v} \in \mathbf{V},$$

y, como $\mathbf{g}$ es no degenerada, debe ser $h(\bar{u}) = f^\dagger(\bar{u})$. Luego, $h = f^\dagger$. □

Hemos visto que si una métrica es no degenerada entonces la propiedad (3.15) permite definir un endomorfismo $f^\dagger$ a partir de un endomorfismo f dado. Continuaremos el tema solo para las métricas euclídeas que es el caso que utilizaremos, aunque la teoría podría desarrollarse con pocas diferencias para métricas no degeneradas de diferentes signaturas.

En el resto de esta sección $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ será un espacio vectorial euclídeo, con $\dim \mathbf{V} = n$.

Definición 3.16. Dado $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$, la aplicación $f^\dagger$ que verifica (3.15) se denomina el *endomorfismo adjunto de f respecto a* $\mathbf{g}$. Si sucede que $f^\dagger = f$, es decir, si

$$\mathbf{g}(f(\bar{u}), \bar{v}) = \mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{v})), \qquad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}, \tag{3.16}$$

decimos que f es un *endomorfismo autoadjunto respecto a* $\mathbf{g}$.

Dada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$, consideremos las matrices $M(f, \mathcal{B})$ y $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$, y denotemos las coordenadas de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ como matrices columna por $\bar{u}_{\mathcal{B}} \equiv X$, $\bar{v}_{\mathcal{B}} \equiv Y$, entonces la identidad (3.16) se escribe en coordenadas así: $\forall\, X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X^t\, M(f, \mathcal{B})^t\, M(\mathbf{g}, \mathcal{B})\, Y = X^t\, M(\mathbf{g}, \mathcal{B})\, M(f, \mathcal{B})\, Y. \tag{3.17}$$

Esto nos lleva al siguiente resultado:

Lema 3.29. *Dada una base $\mathcal{B}$ de* $\mathbf{V}$*, $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ es autoadjunto respecto a* $\mathbf{g}$ *si y sólo si*

$$M(f, \mathcal{B})^t\, M(\mathbf{g}, \mathcal{B}) = M(\mathbf{g}, \mathcal{B})\, M(f, \mathcal{B}). \tag{3.18}$$

Demostración. Por un argumento similar al empleado en otras ocasiones, si en la igualdad (3.17) consideremos sucesivamente, $\forall\, i, j$, las matrices columna $X = E_i$, $Y = E_j$, (siendo E_i, $\forall\, i$, la que tiene un 1 en la fila i y un 0 en las demás filas) entonces se deduce fácilmente la ecuación (3.18). El recíproco, que también es fácil, lo podéis hacer como ejercicio. $\square$

El resultado que sigue establece una correspondencia biyectiva, dependiente de una base ortonormal elegida, entre endomorfismos autoadjuntos y matrices simétricas.

Proposición 3.30. *Sean $\mathcal{B}$ una base ortonormal de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ y $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$. Se verifica que f es un endomorfismo autoadjunto si y solo si $M(f, \mathcal{B})$ es una matriz simétrica.*

Demostración. Puesto que para una métrica euclídea $M(\mathbf{g}, \mathcal{B}) = \mathbf{I}_n$, el resultado se sigue de la fórmula (3.18) del Lema 3.29. $\square$

Es decir, la ecuación (3.18) respecto a una base ortonormal es:

$$M(f, \mathcal{B})^t\, \mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n\, M(f, \mathcal{B})$$

lo que implica que $M(f, \mathcal{B})^t = M(f, \mathcal{B})$, esto es, la simetría de $M(f, \mathcal{B})$. Esto no sucede para métricas indefinidas no degeneradas pues, en ese caso, las bases ortonormales $\mathcal{B}$ dan lugar a que $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ sea una matriz diagonal, distinta de $\mathbf{I}_n$ (con algún -1 en la diagonal principal); lo cual hace que la ecuación (3.18), para un endomorfismo autoadjunto f respecto a una métrica indefinida, no implique la simetría de $M(f, \mathcal{B})$.

Diagonalización de endomorfismos autoadjuntos.

Hemos visto que la Proposición 3.30 establece una estrecha relación entre endomorfismos autoadjuntos respecto a una métrica euclídea y matrices cuadradas reales simétricas. Probaremos aquí que cualquier endomorfismo autoadjunto respecto a una métrica euclídea es diagonalizable. Esto implicará que cualquier matriz simétrica es diagonalizable.

Analicemos primero qué podemos afirmar de los autovalores de una matriz simétrica.

Proposición 3.31. *Toda matriz simétrica de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tiene* n *valores propios (reales), contando cada uno tantas veces como indique su multiplicidad aritmética.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Por el teorema fundamental del álgebra, su polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{I}_n)$ tiene n-raíces complejas contadas tantas veces como indique su orden de multiplicidad. Supongamos que $\lambda_0 = a + b\,i \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(\lambda)$; por ser éste un polinomio de coeficientes reales, también será raíz el complejo conjugado $\overline{\lambda}_0 = a - b\,i$. Es decir, $\det(A - \lambda_0 \mathbf{I}_n) = \det(A - \overline{\lambda}_0 \mathbf{I}_n) = 0$

Como el determinante de un producto es el producto de los determinantes, la matriz producto $C = (A - \lambda_0 \mathbf{I}_n)(A - \overline{\lambda}_0 \mathbf{I}_n)$ verifica que $\det(C) = 0$. Ahora, desarrollemos C:

$$\begin{aligned} C &= (A - (a + b\,i)\mathbf{I}_n)(A - (a - b\,i)\mathbf{I}_n) = \\ &= A^2 - 2aA + (a + b\,i)(a - b\,i)\mathbf{I}_n = \\ &= A^2 - 2aA + a^2\mathbf{I}_n + b^2\mathbf{I}_n = (A - a\mathbf{I}_n)^2 + b^2\mathbf{I}_n = \\ &= (A - a\mathbf{I}_n)^t(A - a\mathbf{I}_n) + b^2\mathbf{I}_n \quad [\text{pues } A = A^t \text{ y } a\mathbf{I}_n = (a\mathbf{I}_n)^t)]. \end{aligned}$$

Nos ha quedado que C es una matriz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Como $\det(C) = 0$, si pensamos C como la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, concluimos que existirá una solución real $X \equiv \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right) \neq \bar{0}$ tal que $CX = \bar{0}$. Dada una $X \neq \bar{0}$ verificando esta ecuación, obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0 = X^tCX = X^t(A - a\mathbf{I}_n)^t(A - a\mathbf{I}_n)X + b^2X^tX &= \\ = ((A - a\mathbf{I}_n)X)^t((A - a\mathbf{I}_n)X) + b^2X^tX &= Y^tY + b^2X^tX \end{aligned}$$

siendo $Y = (A - a\mathbf{I}_n)X$.

Pero cualquier matriz $Y \equiv \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{smallmatrix}\right)$ verifica que $Y^t\,Y = \sum_{i=1}^n (y_i)^2 \geq 0$; y en particular, como $X \neq \bar{0}$, se verifica $X^t\,X > 0$. Así que necesariamente $b = 0$. Es decir, que las raíces $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ de $p(\lambda)$ no tienen "parte imaginaria" y, por tanto, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$: las n raíces son reales. $\square$

Corolario 3.32. *Sea* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial euclídeo, con* $\dim \mathbf{V} = n$. *Un endomorfismo autoadjunto respecto a* $\mathbf{g}$ *tiene* n *valores propios (reales), contando cada uno tantas veces como indique su multiplicidad aritmética.*

Demostración. Es inmediato como consecuencia de la existencia de bases ortonormales y de las proposiciones 3.30 y 3.31. $\square$

Es decir, que un endomorfismo autoadjunto verifica la condición (a) para ser diagonalizable que establecía el *Teorema fundamental de la diagonalización de endomorfismos* (Teor. 1.20 del Tema 1). Después del siguiente lema y el posterior teorema, veremos que necesariamente también se verifica la condición (b).

Dado un subespacio $\mathbf{U}$ de $\mathbf{V}$, vimos en el Lema 3.2 que $(\mathbf{U}, \mathbf{g}_{\mathbf{U}})$ es también un espacio vectorial euclídeo. Recordemos asimismo que, dados $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ y un subespacio $\mathbf{U}$ invariante por f, se obtiene el endomorfismo $f_{\mathbf{U}} \in \operatorname{End} \mathbf{U}$, dado por $f_{\mathbf{U}}(\bar{v}) := f(\bar{v}),\ \forall\, \bar{v} \in \mathbf{U}$.

Lema 3.33. *Sea* $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ *un endomorfismo autoadjunto respecto a* $\mathbf{g}$. *Si* $\mathbf{U}$ *es un subespacio invariante por* f *entonces:*

(a) $f_{\mathbf{U}}$ *es un endomorfismo autoadjunto respecto a* $\mathbf{g}_{\mathbf{U}}$.

(b) $\mathbf{U}^{\perp}$ *es también un subespacio invariante por* f.

Demostración. (a) Trivialmente, si f verifica la propiedad (3.16) sobre los vectores de $\mathbf{V}$, entonces $f_{\mathbf{U}}$ la verifica también sobre los vectores de $\mathbf{U}$. Luego $f_{\mathbf{U}}$ es autoadjunto.

(b) Dado $\bar{v} \in \mathbf{U}^{\perp}$, se tiene que $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0,\ \forall \bar{u} \in \mathbf{U}$. Por definición, si $\mathbf{U}$ es invariante entonces $f(\bar{u}) \in \mathbf{U},\ \forall \bar{u} \in \mathbf{U}$; luego, usando que f es autoadjunto, queda:

$$0 = \mathbf{g}(f(\bar{u}), \bar{v}) = \mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{v})),\ \forall\, \bar{u} \in \mathbf{U};$$

lo que implica que $f(\bar{v}) \in \mathbf{U}^{\perp}$. Concluimos que $\mathbf{U}^{\perp}$ es invariante por f. $\square$

Teorema 3.34. *Todo endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *es diagonalizable.*

Demostración. Sea $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$, autoadjunto respecto a $\mathbf{g}$. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ todos los distintos valores propios de f; consideremos $\mathbf{W} := \mathbf{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_{\lambda_r}$, siendo $\mathbf{V}_{\lambda_j}$ el subespacio propio correspondiente al autovalor λ_j (que la suma es directa es consecuencia de la Prop 1.11). Por el Teorema 1.13, para probar el resultado basta ver que $\mathbf{W} = \mathbf{V}$.

Procedamos por reducción al absurdo: Supongamos que $\mathbf{W} \neq \mathbf{V}$. Por el Lema 3.24, obtendremos que $\mathbf{W}^{\perp} \neq \{\bar{0}\}$. Como, por construcción, $\mathbf{W}$ contiene todos los vectores propios de f, en $\mathbf{W}^{\perp}$ no puede haber ningún vector propio de f.

Por otra parte, si $\bar{u} \in \mathbf{W}$, se escribirá $\bar{u} = \bar{u}_1 + \cdots + \bar{u}_r \in \mathbf{W}$, con $\bar{u}_j \in \mathbf{V}_{\lambda_j}$, y entonces

$$\begin{aligned} f(\bar{u}) &= f(\bar{u}_1 + \cdots + \bar{u}_r) = f(\bar{u}_1) + \cdots + f(\bar{u}_r) \\ &= \lambda_1 \bar{u}_1 + \cdots + \lambda_r \bar{u}_r \in \mathbf{W}. \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{W}$ es un subespacio invariante por f. Ahora, por el Lema 3.33(b), como f es autoadjunto respecto a $\mathbf{g}$ entonces $\mathbf{W}^{\perp}$ es también subespacio invariante por f. Aplicando a $\mathbf{W}^{\perp}$ el Lema 3.33(a) queda que $f_{\mathbf{W}^{\perp}}$ es un endomorfismo autoadjunto respecto a $\mathbf{g}_{\mathbf{W}^{\perp}}$. Como $\mathbf{W}^{\perp} \neq \{\bar{0}\}$, por el Corolario 3.32, existirá algún valor propio λ de $f_{\mathbf{W}^{\perp}}$ y, por tanto, algún vector propio $\bar{v} \in \mathbf{W}^{\perp}$ tal que $f_{\mathbf{W}^{\perp}}(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$. Pero, como $f_{\mathbf{W}^{\perp}}(\bar{v}) := f(\bar{v})$, tendríamos que $\bar{v}$ pertenece a $\mathbf{W}^{\perp}$ y es vector propio de f. Llegamos así a una contradicción. Luego $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ y concluimos que f es diagonalizable. $\square$

3.3. Diagonalización ortogonal de las matrices simétricas

Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo, con $\dim \mathbf{V} = n$. Hemos visto que, por la Prop. 3.30, si $\mathcal{B}$ es una base ortonormal y f es un endomorfismo autoadjunto entonces $M(f, \mathcal{B}) \equiv A$ es una matriz simétrica. Probaremos en esta sección en primer lugar, que podemos encontrar otra base ortonormal $\mathcal{C}$, formada por vectores propios de f. Deduciremos entonces que $M(f, \mathcal{C}) \equiv D$ no es solo una matriz simétrica sino que es una matriz diagonal.

Recordemos que, por la Prop. 3.8, si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases ortonormales, la matriz de cambio de base $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \equiv P$ es una *matriz ortogonal*, es decir, $P \in \mathbf{O}_n$; lo que significa, por definición, que $P^t = P^{-1}$. De esta manera, por la fórmula (1.2) del Tema 1 sobre el cambio de base para un endomorfismo, queda $M(f, \mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathcal{C}}\ M(f, \mathcal{B})\ \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$, o equivalentemente:

$$D = P^t A P = P^{-1} A P.$$

Se obtiene, pues, que una matriz simétrica es diagonalizable usando como matriz regular de cambio de base una matriz ortogonal $P \in \mathbf{O}_n$. Esto se expresa diciendo que se ha obtenido una *diagonalización ortogonal* de A. Con ello, se consigue que, simultáneamente, A sea semejante a D y A sea congruente con D (ver Def. 2.3).

Proposición 3.35. *Si f es un endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ entonces:*

(a) *Dos vectores propios de f de valores propios distintos son ortogonales entre sí. Por tanto, dos subespacio propios de f de valores propios distintos son ortogonales.*

(b) $\mathbf{V}$ *admite una base ortonormal de vectores propios de f.*

Demostración. (a) Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$, con $f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$ y $f(\bar{v}) = \beta \bar{v}$. Usando que f es autoadjunto, queda

$$(\lambda - \beta)\, \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{g}(\lambda \bar{u}, \bar{v}) - \mathbf{g}(\bar{u}, \beta \bar{v}) = \mathbf{g}(f(\bar{u}), \bar{v}) - \mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{v})) = 0;$$

y si suponemos $\lambda \neq \beta$, implica que $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = 0$.

(b) Sea $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}_r$ la descomposición de $\mathbf{V}$ en suma directa de subespacios propios de f. Cada $\mathbf{V}_j$ es un espacio vectorial euclídeo con la métrica $\mathbf{g}_{\mathbf{V}_j}$; por tanto, admite una base ortonormal, que estará formada por vectores unitarios y ortogonales entre sí para $\mathbf{g}$. Uniendo estas bases obtenemos una base de $\mathbf{V}$ de vectores propios de f, que, por el apartado (a), es base ortonormal de $\mathbf{V}$ respecto a $\mathbf{g}$. □

Por ganar en perspectiva, damos el resultado equivalente a la Proposición 3.35(a), para el caso de las matrices simétricas, demostrándolo en lenguaje matricial.

Proposición 3.36. *Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz simétrica y sean X e Y dos matrices columna de vectores propios de A, correspondientes a valores propios distintos. Entonces $X^tY = 0$.*

Demostración. Tenemos que $AX = \lambda X$ y $AY = \mu Y$, con $\lambda \neq \mu$. Multiplicando la primera ecuación por la izquierda por Y^t y trasponiendo queda

$$(Y^tAX)^t = (\lambda Y^tX)^t \quad \Leftrightarrow \quad X^tA^tY = \lambda X^tY;$$

y multiplicando la segunda ecuación por la izquierda por X^t queda

$$X^tAY = \mu X^tY.$$

Como $A = A^t$, queda

$$\lambda X^tY = \mu X^tY \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - \mu)X^tY = 0;$$

Como $\lambda \neq \mu$ se sigue que $X^tY = 0$. □

Como sabemos del Tema 1, f es diagonalizable si y sólo si $A = M(f, \mathcal{B})$ lo es. Se podrá, pues, afirmar que toda matriz real simétrica es diagonalizable si y solo si todo endomorfismo autoadjunto respecto a una métrica euclídea cualquiera es diagonalizable.

Probaremos que esto es lo que sucede: que cualquier matriz simétrica es diagonalizable; además probaremos que en el proceso de su diagonalización se puede utilizar una matriz regular P del grupo ortogonal $\mathbf{O}_n$.

Teorema 3.37. *Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Si A es una matriz simétrica entonces existe una matriz regular P, con $P^{-1} = P^t$, tal que $D = P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.*

Demostración. Sean $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo, con $\dim \mathbf{V} = n$, y $\mathcal{B}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}$. Consideremos el único $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ tal que $M(f, \mathcal{B}) = A$. Entonces, por la Prop. 3.30, f es autoadjunto respecto a $\mathbf{g}$. Ahora, por la Prop. 3.35(b), existe una base ortonormal de vectores propios de f, llamémosla $\mathcal{C}$; y por tanto, $M(f, \mathcal{C}) \equiv D$ es diagonal.

Por la fórmula (1.2) del Tema 1, del cambio de base para un endomorfismo, queda

$$D = M(f, \mathcal{C}) = \mathcal{B}_{\mathcal{C}} \; M(f, \mathcal{B}) \; \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$$

Como $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ son bases ortonormales de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, por la Prop. 3.8, $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \in \mathbf{O}_n$ y el resultado queda probado. $\square$

Este importante resultado me dice que una matriz real simétrica A tiene n valores propios reales, contando cada uno tantas veces como indique su multiplicidad, y que A es semejante a la matriz diagonal D constituida con sus valores propios.

Por otro lado, como consecuencia de que A es una matriz simétrica, A puede considerarse la matriz asociada a una métrica $\mathbf{h}$ en cierta base. El teorema me dice entonces que la matriz diagonal D, al ser congruente con A, es la matriz asociada a la métrica $\mathbf{h}$ en alguna base; es decir vuelve a ofrecerse un resultado que ya demostramos de otra manera en el Tema 2 (ver Prop. 2.18):

Corolario 3.38. *Sea $\mathbf{h}$ una métrica de $\mathbf{V}$. Existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ tal que $M(\mathbf{h}, \mathcal{B})$ es una matriz diagonal.*

Ya vimos en el final del Tema 2 que la afirmación de este corolario puede mejorarse, pues se puede encontrar una base de tal forma que la matriz asociada a la métrica $\mathbf{h}$ sea una matriz diagonal que sólo llena la diagonal principal con -1, 1 o ceros.

3.4. Isometrías lineales. Resultados de clasificación

Una *isometría lineal* entre dos espacios vectoriales métricos es un isomorfismo que verifica que el valor de la métrica del espacio inicial sobre cada par de vectores se *conserva igual* al valor de la métrica del espacio final sobre las imágenes de dicho par de vectores. Si existe una isometría lineal entre dos espacios vectoriales métricos, ambos espacios pueden considerarse equivalentes, tanto desde el punto de vista vectorial, como desde el punto de vista propiamente métrico (de la medida de distancias y ángulos).

Aunque en esta última sección nos ocuparemos de los espacios métricos euclídeos, principalmente, damos aquí la definición de isometría lineal para espacios métricos en general:

Definición 3.17. Una *isometría lineal* (o simplemente *isometría*) *entre dos espacios vectoriales métricos* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ y $(\mathbf{W}, \mathbf{h})$ se define como un isomorfismo $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ que *conserva las métricas*, es decir, que verifica:

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{h}(f(\bar{u}), f(\bar{v})), \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V} \tag{3.19}$$

Si existe una isometría lineal entre $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ y $(\mathbf{W}, \mathbf{h})$ decimos que son *espacios isométricos.*

Se deja como ejercicio la demostración del siguiente resultado:

Proposición 3.39. *La composición de isometrías es una isometría y la inversa de una isometría es una isometría.*

Veamos una condición necesaria y suficiente para que un isomorfismo sea isometría:

Proposición 3.40. *Un isomorfismo* $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *entre* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *y* $(\mathbf{W}, \mathbf{h})$ *es una isometría si y solo si* f conserva las formas cuadráticas*, es decir, si se verifica:*

$$F_{\mathbf{g}}(\bar{u}) = F_{\mathbf{h}}(f(\bar{u})),\ \forall\, \bar{u} \in \mathbf{V} \tag{3.20}$$

Demostración. $\Rightarrow$) Por ser f una isometría se verifica, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{V}$,

$$F_{\mathbf{g}}(\bar{u}) := \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) = \mathbf{h}(f(\bar{u}), f(\bar{u})) =: F_{\mathbf{h}}(f(\bar{u})).$$

$\Leftarrow$) Por hipótesis, f es un isomorfismo. Por la Prop. 2.13(b) se obtiene que, $\forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) &= \tfrac{1}{2}(F_{\mathbf{g}}(\bar{u}+\bar{v}) - F_{\mathbf{g}}(\bar{u}) - F_{\mathbf{g}}(\bar{v})) = \text{ (por (3.20))} \\ &= \tfrac{1}{2}(F_{\mathbf{h}}(f(\bar{u}+\bar{v})) - F_{\mathbf{h}}(f(\bar{u})) - F_{\mathbf{h}}(f(\bar{v}))) = \text{(porque } f \text{ es lineal)} \\ &= \tfrac{1}{2}(F_{\mathbf{h}}(f(\bar{u}) + f(\bar{v})) - F_{\mathbf{h}}(f(\bar{u})) - F_{\mathbf{h}}(f(\bar{v}))) = \mathbf{h}(f(\bar{u}), f(\bar{v})), \end{aligned}$$

luego f conserva las métricas y, por tanto, es una isometría. $\square$

Se sigue fácilmente que una isometría conserva también la signatura de las métricas (ver Def. 2.13).

Como prueba de la fuerza que tiene la condición (3.19), damos el siguiente resultado sobre las condiciones suficientes para que una aplicación sea una isometría, en el caso de métricas no degeneradas.

Proposición 3.41. *Sean dos espacios vectoriales métricos* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *y* $(\mathbf{W}, \mathbf{h})$*, con* $\mathbf{g}$ *y* $\mathbf{h}$ *métricas no degeneradas. Si* $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *es una aplicación sobreyectiva que verifica:*

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{h}(f(\bar{u}), f(\bar{v})), \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$$

entonces f *es una isometría.*

Demostración. Se trata de probar que, bajo las hipótesis de la proposición, f es lineal e inyectiva. Probemos que f es lineal: $\forall\, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbf{V}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(f(\bar{u}+\bar{v}), f(\bar{w})) &= \mathbf{g}(\bar{u}+\bar{v}, \bar{w}) = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{w}) + \mathbf{g}(\bar{v}, \bar{w}) \\ &= \mathbf{h}(f(\bar{u}), f(\bar{w})) + \mathbf{h}(f(\bar{v}), f(\bar{w})) \\ &= \mathbf{h}(f(\bar{u}) + f(\bar{v}), f(\bar{w})) \end{aligned}$$

de aquí que, como f es sobreyectiva, resulta cierta la igualdad:

$$\mathbf{h}(f(\bar{u}+\bar{v}), \bar{u}') = \mathbf{h}(f(\bar{u}) + f(\bar{v}), \bar{u}'), \quad \forall\, \bar{u}' \in \mathbf{W};$$

y entonces, como $\mathbf{h}$ es no degenerada (ver Def. 2.11.A), se obtiene:

$$f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}).$$

Igualmente, se prueba que $\mathbf{h}(f(k\bar{u}), \bar{u}') = \mathbf{h}(kf(\bar{u}), \bar{u}')$, $\forall\, \bar{u}' \in \mathbf{W}$; y de nuevo, por ser $\mathbf{h}$ no degenerada: $f(k\bar{u}) = kf(\bar{u})$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$. Concluimos que f es lineal.

Para ver que f es inyectiva, si $\bar{u} \in \ker f$ obtenemos que, $\forall\, \bar{v} \in \mathbf{V}$,

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{h}(f(\bar{u}), f(\bar{v})) = \mathbf{h}(\bar{0}, f(\bar{v})) = 0$$

y como $\mathbf{g}$ es no degenerada, $\bar{u} = \bar{0}$; por tanto, $\ker f = \{\bar{0}\}$ y entonces f es inyectiva. □

Isometrías entre espacios vectoriales euclídeos

A partir de ahora nos ocuparemos solamente de las isometrías entre espacios vectoriales euclídeos, que es el objetivo final de este curso, aunque algunos de los resultados que demos siguen siendo válidos, o fácilmente adaptables, para métricas más generales.

Veamos primero algunas propiedades de las isometrías entre espacios euclídeos.

Proposición 3.42. *Sean* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *y* $(\mathbf{W}, \mathbf{h})$ *espacios vectoriales euclídeos. Un isomorfismo* $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *es una isometría si y sólo si* f conserva las normas*, es decir, si se verifica:*

$$\|\bar{u}\|_{\mathbf{g}} = \|f(\bar{u})\|_{\mathbf{h}},\ \forall\, \bar{u} \in \mathbf{V} \tag{3.21}$$

Demostración. Aunque es un corolario de la Prop.3.40, pues la forma cuadrática asociada y la norma elevada al cuadrado son iguales en el caso euclídeo, volvemos a hacer la demostración para afianzar el concepto de norma euclídea y su uso.

$\Rightarrow$) Por ser f una isometría se verifica, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) = \mathbf{h}(f(\bar{u}), f(\bar{u}))$; tomando la raíz cuadrada positiva en ambos miembros, se obtiene la igualdad entre las normas.

$\Leftarrow$) Como f es lineal y conserva las normas, por la Prop. 2.13(b), se verifica:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\bar u,\bar v) &= \tfrac{1}{2}(\|\bar u+\bar v\|_{\mathbf{g}}^2 - \|\bar u\|_{\mathbf{g}}^2 - \|\bar v\|_{\mathbf{g}}^2) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\|f(\bar u+\bar u)\|_{\mathbf{h}}^2 - \|f(\bar u)\|_{\mathbf{h}}^2 - \|f(\bar v)\|_{\mathbf{h}}^2) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\|f(\bar u)+f(\bar u)\|_{\mathbf{h}}^2 - \|f(\bar u)\|_{\mathbf{h}}^2 - \|f(\bar v)\|_{\mathbf{h}}^2) = \mathbf{h}(f(\bar u),f(\bar v)),\end{aligned}$$

y ya que f es un isomorfismo, el resultado queda probado. □

Las isometrías conservan el ángulo entre dos vectores (Def. 3.3) en el siguiente sentido:

Proposición 3.43. *Sean* $(\mathbf{V},\mathbf{g})$ *y* $(\mathbf{W},\mathbf{h})$ *dos espacios vectoriales euclídeos y* $f\colon \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ *una isometría. Entonces* f conserva los ángulos (no orientados)*; es decir, se verifica:*

$$\widehat{\bar u,\bar v} = \widehat{f(\bar u),f(\bar v)}, \quad \forall\, \bar u,\bar v\in\mathbf{V}$$

donde el primero es el ángulo en $(\mathbf{V},\mathbf{g})$ *y el segundo es el ángulo en* $(\mathbf{W},\mathbf{h})$*.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la Def. 3.3 y de que una isometría conserva las métricas y las normas. □

Recordad que una base ortonormal es una base de vectores unitarios y ortogonales dos a dos. Caractericemos las isometrías por su actuación sobre las bases ortonormales.

Proposición 3.44. *Sean* $(\mathbf{V},\mathbf{g})$ *y* $(\mathbf{W},\mathbf{h})$ *dos espacios vectoriales euclídeos,* $f\colon \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ *una aplicación lineal y* $\mathcal{B}=(\bar b_1,\dots,\bar b_n)$ *una base ortonormal de* $\mathbf{V}$*. Se verifica que* f *es una isometría si y solo si* $\mathcal{C}=\big(f(\bar b_1),\dots,f(\bar b_n)\big)$ *es una base ortonormal de* $\mathbf{W}$*.*

Demostración. La parte directa ($\Rightarrow$) se sigue inmediatamente de la Def. 3.4 y de que una isometría conserva las métricas y las normas. Para demostrar el recíproco, es claro que f es un isomorfismo pues la imagen de una base, $\mathcal{B}$, nos da una base, $\mathcal{C}$; luego, basta ver que f conserva las normas. Como $\mathcal{B}$

es una base ortonormal, si $\bar{u} = x_1\bar{b}_1 + \cdots + x_n\bar{b}_n$ entonces, por la fórmula (3.7) (anterior a Ejem. 3.3), queda $\|\bar{u}\| = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Ahora, puesto que f es lineal, se sigue que $f(\bar{u}) = x_1 f(\bar{b}_1) + \cdots + x_n f(\bar{b}_n)$; y como $\mathcal{C}$ es base ortonormal se obtiene, también por (3.7), que $\|f(\bar{u})\| = x_1^2 + \cdots + x_n^2$; o sea que $\|f(\bar{u})\| = \|\bar{u}\|$. $\square$

Recordemos que dos espacios vectoriales son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión. En particular, si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial real de dimensión n entonces es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. El siguiente resultado continúa en esta línea, cuando se introduce la métrica.

Teorema 3.45. *Todo espacio vectorial euclídeo* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$*, con* $\dim \mathbf{V} = n$*, es isométrico a* $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_0)$*, siendo* $\mathbf{g}_0$ *la métrica euclídea estándar.*

Demostración. Dada una base ortonormal $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$ de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ (la cual siempre existe por la Prop. 3.6), definimos el isomorfismo $\iota_{\mathcal{B}} : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$ determinado por las condiciones $\iota_{\mathcal{B}}(\bar{b}_1) = \bar{e}_1, \ldots, \iota_{\mathcal{B}}(\bar{b}_n) = \bar{e}_n$, siendo $\mathcal{B}_0 = (\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$. Como $\mathcal{B}_0$ es una base ortonormal para la métrica euclídea estándar (ver Ejem. 3.3.1), la Proposición 3.44 nos dice que $\iota_{\mathcal{B}}$ es una isometría. $\square$

Probad que la aplicación $\iota_{\mathcal{B}} : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^n$, determinada según la demostración anterior, es la misma que la $\iota_{\mathcal{B}}$ dada en el apartado “Coordenadas en un espacio vectorial” del Tema 0: *Preliminares y notaciones.*

Daros cuenta que aunque $\mathbf{V}$ y $\mathbb{R}^n$ son isométricos, la isometría que hemos obtenido depende de la base ortonormal elegida en $\mathbf{V}$ y que, por este procedimiento, cada base nos daría una isometría posiblemente diferente.

Corolario 3.46. *Dos espacios vectoriales euclídeos son isométricos si y solo si tienen igual dimensión.*

Demostración. Dos espacios vectoriales que tienen distinta dimensión no pueden ser isomorfos, luego no pueden ser isométricos. Si, por el contrario, dos espacios vectoriales euclídeos tienen dimensión igual a n, entonces, por el anterior teorema, los dos son isométricos a $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_0)$. Como la composición de isometrías es una isometría y la inversa de una isometría también es isometría (Prop. 3.39), resulta inmediato que se puede construir una isometría entre ambos espacios. □

Isometrías de un espacio vectorial euclídeo.

Nos centraremos a partir ahora en las isometrías lineales de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ en sí mismo. Adaptemos, pues, la Definición 3.17 a este caso:

Definición 3.18. Una *isometría lineal de un espacio vectorial euclídeo* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ (o simplemente, *isometría de* $\mathbf{V}$) es un automorfismo $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ que *conserva la métrica*, es decir, que verifica:

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \mathbf{g}(f(\bar{u}), f(\bar{v})), \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}. \tag{3.22}$$

Denotamos al conjunto de las isometrías de $\mathbf{V}$ por $\mathbf{O}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$.

Por lo visto previamente, dado un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, una isometría de $\mathbf{V}$ se caracteriza por conservar la norma (o la correspondiente forma cuadrática); también conserva el ángulo (no orientado). Las isometrías de $\mathbf{V}$ se caracterizan también porque son los endomorfismos que aplican bases ortonormales en bases ortonormales.

Recordemos como los automorfismos de un espacio vectorial adquieren la estructura algebraica de *grupo*. Dado un espacio vectorial $\mathbf{V}$, el conjunto $\operatorname{Aut}\mathbf{V}$ *forma un grupo con la operación composición de aplicaciones.* En efecto, si $f, h \in \operatorname{Aut}\mathbf{V}$ entonces $f \circ h$, $\mathbf{I}_{\mathbf{V}}$, $f^{-1} \in \operatorname{Aut}\mathbf{V}$ y las propiedades de grupo se prueban fácilmente. Además, fijada una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$, con $\dim \mathbf{V} = n$, la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Aut}\mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbf{Gl}(n, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & M(f, \mathcal{B}) \end{array} \tag{3.23}$$

es un isomorfismo de grupos. En efecto: basta notar que esta aplicación es biyectiva y que se cumple (lo cual es fácil de probar):

$$M(f \circ h, \mathcal{B}) = M(f, \mathcal{B})\, M(h, \mathcal{B}) \quad \text{y} \quad M(f^{-1}, \mathcal{B}) = M(f, \mathcal{B})^{-1}.$$

Proposición 3.47. *Sea* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial euclídeo con* $\dim \mathbf{V} = n$ *y sea* $\mathcal{B}$ *una base ortonormal de* $\mathbf{V}$*. Se verifica:*

(a) *El conjunto* $\mathbf{O}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *de isometrías de* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *es un subgrupo de* $\operatorname{Aut} \mathbf{V}$*.*

(b) *La aplicación* $f \mapsto M(f, \mathcal{B})$ *establece un isomorfismo de grupos entre* $\mathbf{O}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *y el grupo ortogonal* $\mathbf{O}_n$*.*

Demostración. Para probar (a), basta ver que si h y f conservan la métrica entonces $f \circ h$ y f^{-1} también la conservan. En efecto, dados $\bar{u}, \bar{w} \in \mathbf{V}$,

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{w}) = \mathbf{g}\big(h(\bar{u}), h(\bar{w})\big) = \mathbf{g}\big(f(h(\bar{u})), f(h(\bar{w}))\big) = \mathbf{g}\big((f \circ h)(\bar{u}), (f \circ h)(\bar{w})\big);$$

y ahora, llamando $f(\bar{u}') = \bar{u}$ y $f(\bar{w}') = \bar{w}$, tenemos que

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{w}) = \mathbf{g}\big(f(\bar{u}'), f(\bar{w}')\big) = \mathbf{g}(\bar{u}', \bar{w}') = \mathbf{g}\big(f^{-1}(\bar{u}), f^{-1}(\bar{w})\big).$$

Demostremos (b). Como la aplicación (3.23) es un isomorfismo de grupos, si la restringimos a un subgrupo seguirá siendo un isomorfismo sobre su imagen. Probaremos que la aplicación $\Phi \colon \mathbf{O}(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \to \mathbf{Gl}(n, \mathbb{R})$, $f \mapsto M(f, \mathcal{B})$, tiene por imagen, precisamente, a $\mathbf{O}_n$ y habremos terminado.

Sea $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ una base ortonormal de $\mathbf{V}$. Probemos que $\operatorname{im}(\Phi) \subset \mathbf{O}_n$: Si $f \in \mathbf{O}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ entonces $\mathcal{C} = (f(\bar{b}_1), \dots, f(\bar{b}_n))$ es también base ortonormal, y resulta evidente que $M(f, \mathcal{B}) = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$; luego, por la Prop. 3.8, $M(f, \mathcal{B}) \in \mathbf{O}_n$. Probemos ahora que $\mathbf{O}_n \subset \operatorname{im}(\Phi)$: Dado $A \in \mathbf{O}_n$, existirá $f \in \operatorname{Aut} \mathbf{V}$ tal que $A = M(f, \mathcal{B})$, y existirá cierta base $\mathcal{D}$ tal que $A = \mathcal{D}_{\mathcal{B}}$; como $\mathcal{B}$ es ortonormal y $A \in \mathbf{O}_n$, por la Prop. 3.8, $\mathcal{D}$ es también base ortonormal. Luego, f aplica la base ortonormal $\mathcal{B}$ en la base ortonormal $\mathcal{D}$ y, por tanto, $f \in \mathbf{O}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. Luego $\operatorname{im}(\Phi) = \mathbf{O}_n$, como queríamos demostrar. $\square$

Como se hizo en el apartado “Las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$” del Tema 0: *Preliminares y notaciones*, identificando cada matriz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, se obtiene:

Corolario 3.48. *El grupo de isometrías del espacio vectorial euclídeo estándar* $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_0)$ (ver Ejem. 3.1.1) *se identifica con el grupo ortogonal* $\mathbf{O}_n$*. Dicho de otra manera:* $A \in \mathbf{O}_n$ *si y solo si* A *es una isometría de* $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_0)$*.*

Demostración. Si una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la identificamos con la aplicación $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \mapsto A\bar{x}$, entonces la imagen por A de $\bar{x} \equiv (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector $\bar{y} \equiv (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Entonces $A = M(A, \mathcal{B}_0)$. El resultado se obtiene, pues, como corolario de la Prop. 3.47(b).

También es interesante que veamos esta otra demostración más directa: Si $A \in \mathbf{O}_n$ entonces, $\forall\, \bar{x}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{g}_0(A\bar{x}, A\bar{z}) = (A\bar{x})^t(A\bar{z}) = \bar{x}^t A^t A\bar{z} = \bar{x}^t \mathbf{I}_n \bar{z} = \mathbf{g}_0(\bar{x}, \bar{z});$$

luego A es una isometría. Ahora, si A es una isometría, por la anterior cadena de igualdades, debe ser $\bar{x}^t A^t A\bar{z} = \bar{x}^t \mathbf{I}_n \bar{z}$, $\forall\, \bar{x}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$, lo que implica que $A^t A = \mathbf{I}_n$, y entonces $A \in \mathbf{O}_n$. □

Lema 3.49. *Sea f una isometría de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. Se verifica:*

(a) $|\det(f)| = 1$.

(b) *Los posibles valores propios de f son 1 y -1.*

Demostración. (a) Si $\mathcal{B}$ es base ortonormal, por Prop. 3.47, $M(f, \mathcal{B}) \in \mathbf{O}_n$; y sabemos que las matrices del grupo ortogonal tienen determinante 1 o -1 (lo cual se deduce de la igualdad $P^t P = \mathbf{I}_n$).

(b) Si $\bar{u}$ es un vector propio de f correspondiente a un valor propio λ, se tiene que

$$\mathbf{g}(f(\bar{u}), f(\bar{u})) = \mathbf{g}(\lambda\bar{u}, \lambda\bar{u}) = \lambda^2 \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) = \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}),$$

donde la última igualdad se da porque, por hipótesis, f es una isometría (fórmula (3.22)). Como $\bar{u} \neq \bar{0}$, ya que es un vector propio, se tiene que $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u}) > 0$ (ver (3.1)) y, dividiendo por $\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{u})$ en la última igualdad queda $\lambda^2 = 1$; de aquí que los posibles valores propios de f sean 1 o -1. □

Como anunciamos en el apartado "Nota sobre estructuras geométricas en un espacio vectorial" del Tema 3, las isometrías lineales de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ son los automorfismos de $\mathbf{V}$ que conservan la $\mathbf{O}_n$-*estructura vectorial* equivalente a la métrica euclídea $\mathbf{g}$ (ver Def. 3.6 y Prop. 3.12).

Si elegimos ahora una orientación $\mathcal{O}$ (ver Def. 3.7) de las dos posibles que tiene $\mathbf{V}$, el que $f \in \operatorname{Aut}\mathbf{V}$ *conserve la orientación* depende sólo de que $\det(f) > 0$, y no de la orientación elegida. En efecto, si $f \in \operatorname{Aut}\mathbf{V}$ entonces la imagen por f de una base $\mathcal{B}$ es otra base $\mathcal{C}$, que verifica claramente: $M(f, \mathcal{B}) = \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$. Entonces $\det(f) = \det\big(M(f, \mathcal{B})\big) = \det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}})$; luego, $\det(f) > 0$ si y solo si $\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}) > 0$ si y solo si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ pertenecen a la misma orientación. En cambio, si $\det(f) < 0$ entonces el automorfismo f *cambia la orientación* de las bases.

Definición 3.19. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo. Decimos que f es una *rotación* o *isometría positiva* de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ si f es una isometría tal que $\det(f) = 1$. Si $\det(f) = -1$ diremos que f es una *isometría negativa*.

Por lo dicho anteriormente y el Lema 3.49(a), las rotaciones son las isometrías que conservan la orientación; y las isometrías negativas son las que cambian la orientación.

Isometrías del plano euclídeo.

Una recta vectorial euclídea, $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ con $\dim \mathbf{V} = 1$, tiene solo dos isometrías: $\mathbf{I}_{\mathbf{V}}$ y $-\mathbf{I}_{\mathbf{V}}$ (¡probadlo!). En un plano vectorial euclídeo hay dos tipos de isometrías, según el signo de su determinante; estudiemos primero las rotaciones.

Proposición 3.50. *Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un plano vectorial euclídeo. Dada una rotación f, para cualquier base ortonormal $\mathcal{B}$ se verifica:*

$$(3.24) \qquad M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \textit{para cierto } \theta \in [0, 2\pi).$$

Si elegimos la orientación $\mathcal{O}$, que declara a $\mathcal{B}$ de orientación positiva, entonces θ es el ángulo orientado de $\bar{u}$ a $f(\bar{u})$, es decir, $\theta = \widehat{\bar{u}, f(\bar{u})}^{\mathcal{O}}, \forall\, \bar{u} \neq \bar{0}$ (según la Def. 3.11).

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal. Por la Proposición 3.47, como f es una isometría, se verificará:

$$M(f,\mathcal{B}) \equiv \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_2 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$$

Estas tres ecuaciones nos dicen que $\big((a,b),(c,d)\big)$ es una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, \mathbf{g}_0)$, lo cual ya se sabía por el Lema 3.7. Pero también podemos deducir de las tres ecuaciones que los vectores (a,b) y $(d,-c)$ son unitarios y linealmente dependientes, lo que implica que $(a,b)=(d,-c)$; pues la otra posibilidad, $(a,b)=(-d,c)$, hace que $\det(f)=-1$, lo que contradice la hipótesis de que f es una rotación. Además, de $a^2+b^2=1$ deducimos que existe un único $\theta \in [0,2\pi)$ tal que $a=\cos\theta$ y $b=\operatorname{sen}\theta$. Queda así probada (3.24).

Para la segunda parte, por la Def. 3.11, tenemos que probar que: dado $\bar{u} \neq \bar{0}$,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{u}))}{\|\bar{u}\|\,\|f(\bar{u})\|} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, f(\bar{u}))}{\|\bar{u}\|\,\|f(\bar{u})\|}.$$

Como f conserva la norma, por ser una isometría, solo hay que probar que:

$$\|\bar{u}\|^2\cos\theta = \mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{u})) \quad \text{y} \quad \|\bar{u}\|^2\operatorname{sen}\theta = \det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, f(\bar{u})).$$

Sea $\mathcal{B}$ una base ortonormal de orientación positiva. Llamando $\bar{u}_{\mathcal{B}} = (x,y)$ nos queda:

$$f(\bar{u})_{\mathcal{B}} = M(f,\mathcal{B})\,\bar{u}_{\mathcal{B}} = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta\,,\, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta).$$

Usando que $\mathcal{B}$ es base ortonormal, calculemos:

$$\mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{u})) = (x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = (x^2+y^2)\cos\theta.$$

Como $\mathcal{B}$ es ortonormal y define la orientación $\mathcal{O}$, entonces $\mathcal{B} \in \boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}$ (ver la demostración de la Prop. 3.17); ahora, por la Prop. 3.18, podemos calcular:

$$\det_{\boldsymbol{w}_{\mathbf{g}}^{\mathcal{O}}}(\bar{u}, f(\bar{u})) = \begin{vmatrix} x & x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ y & x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{vmatrix} = (x^2+y^2)\operatorname{sen}\theta.$$

Como $\mathcal{B}$ es ortonormal, $\|\bar{u}\|^2 = \|\bar{u}_{\mathcal{B}}\|^2_{\mathbf{g}_0} = x^2 + y^2$, y el resultado queda probado. $\square$

Llamamos a θ *el ángulo de la rotación f según la orientación $\mathcal{O}$*. Probad que el ángulo de la rotación f según la orientación opuesta (ver Prop. 3.13) es $2\pi - \theta$, si $\theta \neq 0$.

Probad que una rotación en el plano no tiene valores propios, salvo para $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$.

Veamos ahora que las isometrías negativas del plano vectorial euclídeo son las simetrías ortogonales respecto a rectas vectoriales (también llamadas *simetrías axiales*).

Proposición 3.51. *Sea* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un plano vectorial euclídeo. Dada una isometría negativa f, existe una única recta vectorial $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ tal que $f = \mathbf{s}^{\mathbf{U}}$; esto es, f es la simetría ortogonal respecto a la recta vectorial* $\mathbf{U}$ (según Def. 3.15). *Por ello, existe una base ortonormal $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)$, con $\bar{b}_1 \in \mathbf{U}$, tal que* $M(f, \mathcal{B}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Demostración. Por la Prop. 1.18, el polinomio característico de un endomorfismo f en dimensión 2 es igual a $p(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D$, con $T = \mathrm{tr}(f)$ y $D = \det(f)$. En este caso, queda el polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda - 1$, cuyo discriminante es $T^2 + 4 > 0$; por tanto, $p(\lambda)$ tiene dos raíces distintas, que son 1 y -1 necesariamente, por el Lema 3.49(b); es decir, f tiene dos valores propios simples, 1 y -1. Por tanto, f es diagonalizable y los subespacios propios correspondientes verifican (ver Teor. 1.13) $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_{-1}$. Si tomamos $\mathbf{U} = \mathbf{V}_1$, observamos que $\mathbf{U}^\perp = \mathbf{V}_{-1}$; en efecto, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{U}$ y $\forall\, \bar{w} \in \mathbf{V}_{-1}$,

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{w}) = \mathbf{g}(f(\bar{u}), f(\bar{w})) = \mathbf{g}(\bar{u}, -\bar{w}) = -\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{w}), \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{w}) = 0.$$

La igualdad entre f y $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ se sigue de la definición de $\mathbf{s}^{\mathbf{U}}$ (Def. 3.15) y de que si $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$, con $\bar{u} \in \mathbf{V}_1$ y $\bar{w} \in \mathbf{V}_{-1}$, entonces $f(\bar{v}) = f(\bar{u} + \bar{w}) = f(\bar{u}) + f(\bar{w}) = \bar{u} - \bar{w}$.

Por último, tomando una base $\mathcal{C} = (\bar{u}, \bar{w})$ de vectores propios de f, con $\bar{u} \in \mathbf{V}_1 = \mathbf{U}$ y $\bar{w} \in \mathbf{V}_{-1}$, la base $\mathcal{B} := (\bar{b}_1 := \frac{1}{\|\bar{u}\|}\bar{u}\,,\ \bar{b}_2 := \frac{1}{\|\bar{w}\|}\bar{w})$ es ortonormal y cumple las condiciones. $\square$

Ejemplos 3.5. 1. Consideremos $(\mathbb{R}^2, \mathbf{g}_0, \mathcal{O}_0)$, el plano vectorial euclídeo estándar orientado por $\mathcal{O}_0 = [\mathcal{B}_0]_{\mathbf{Gl}_2^+}$. La rotación de ángulo $5\pi/3$ es la aplicación $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x', y')$, dada por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} & \cos\frac{5\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. En $(\mathbb{R}^2, \mathbf{g}_0)$, consideremos la isometría $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x', y')$, dada por la simetría respecto a la recta vectorial $\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{(1,1)\})$. Sea la base ortonormal $\mathcal{B} = \big((\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\big)$, con $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbf{U}$, y llamemos (s,t) y (s',t') a las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ de (x,y) y (x',y'), respectivamente. Entonces f viene dada, en la base $\mathcal{B}$, por:

$$\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}; \text{ y en la base } \mathcal{B}_0 \text{ por: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Clasificación de las isometrías de un espacio vectorial euclídeo.

En los teoremas de clasificación de aplicaciones lineales juegan un papel muy destacado los subespacios invariantes (definición dada al final del apartado “Sobre aplicaciones lineales” del Tema 0: *Preliminares y notaciones*). Por ejemplo, para clasificar los endomorfismos usando valores propios, son necesarios los subespacios propios, que son subespacios invariantes: los vectores propios de $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$, para un valor propio λ, verifican $f(\bar{u}) = \lambda\bar{u}$, luego $f(\mathbf{V}_\lambda) \subset \mathbf{V}_\lambda$.

Destaquemos las siguientes propiedades, que podéis probar como ejercicio, de los subespacios invariantes por f:

(A) Si $\mathbf{U}$ es invariante por f, un vector propio de $f_{\mathbf{U}} \in \operatorname{End}\mathbf{U}$ lo es de f.

(B) Si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{W}$ son invariantes por f, también lo son $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ y $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

(C) $\mathbf{U}$ es invariante por f si y solo si, para una base $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$ de $\mathbf{U}$, $f(\bar{b}_1), \dots, f(\bar{b}_k) \in \mathbf{U}$.

El siguiente lema descompone un endomorfismo de un espacio vectorial en producto de endomorfismos cuando el espacio es suma directa se subespacios invariantes. Este resultado, interesante en sí mismo, lo usaremos posteriormente.

Lema 3.52. *Sea* $f \in \operatorname{End}\mathbf{V}$*, con* $\dim \mathbf{V} = n$*. Si existen* $\mathbf{U}$ *y* $\mathbf{W}$*, subespacios invariantes por* f*, tales que* $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$*, podemos definir* $f_{\mathbf{U},\mathbf{I}}$*,* $f_{\mathbf{I},\mathbf{W}} \in \operatorname{End}\mathbf{V}$ *por:* $\forall\, \bar{v} \in \mathbf{V}$*,*

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{U},\mathbf{I}}(\bar{v}) &:= f(\bar{u}) + \bar{w}, \\ f_{\mathbf{I},\mathbf{W}}(\bar{v}) &:= \bar{u} + f(\bar{w}), \end{aligned} \qquad \textit{siendo } \bar{v} = \bar{u} + \bar{w}, \ \textit{con } \bar{u} \in \mathbf{U} \ \textit{y } \bar{w} \in \mathbf{W}. \tag{3.25}$$

Entonces se verifica:

(a) $f = f_{\mathbf{U},\mathbf{I}} \circ f_{\mathbf{I},\mathbf{W}} = f_{\mathbf{I},\mathbf{W}} \circ f_{\mathbf{U},\mathbf{I}}$.

(b) *Si* $\mathcal{B} = \big(\mathcal{B}_{\mathbf{U}}, \mathcal{B}_{\mathbf{W}}\big)$ *es una base de* $\mathbf{V}$*, donde sus primeros* k *vectores forman una base* $\mathcal{B}_{\mathbf{U}}$ *de* $\mathbf{U}$ *y sus últimos* $n-k$ *vectores forman una base* $\mathcal{B}_{\mathbf{W}}$ *de* $\mathbf{W}$*, entonces*

$$M(f_{\mathbf{U},\mathbf{I}}, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} M(f_{\mathbf{U}}, \mathcal{B}_{\mathbf{U}}) & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{I}_{n-k} \end{array}\right),$$

$$M(f_{\mathbf{I},\mathbf{W}}, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_k & 0 \\ \hline 0 & M(f_{\mathbf{W}}, \mathcal{B}_{\mathbf{W}}) \end{array}\right),$$

$$M(f, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} M(f_{\mathbf{U}}, \mathcal{B}_{\mathbf{U}}) & 0 \\ \hline 0 & M(f_{\mathbf{W}}, \mathcal{B}_{\mathbf{W}}) \end{array}\right).$$

Demostración. (a) Al ser $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$, la descomposición de un vector de $\mathbf{V}$ en suma de uno de $\mathbf{U}$ y otro de $\mathbf{V}$ es única; luego, por (3.25) y por la invariancia de $\mathbf{W}$, se prueba que

$$(f_{\mathbf{U},\mathbf{I}} \circ f_{\mathbf{I},\mathbf{W}})(\bar{v}) = f_{\mathbf{U},\mathbf{I}}(\bar{u} + f(\bar{w})) = f(\bar{u}) + f(\bar{w}) = f(\bar{v});$$

igual se prueba, por (3.25) y por la invariancia de $\mathbf{U}$, que $(f_{\mathbf{I},\mathbf{W}} \circ f_{\mathbf{U},\mathbf{I}})(\bar{v}) = f(\bar{v})$, $\forall\, \bar{v} \in \mathbf{V}$.

(b) Tomando $\mathcal{B}_{\mathbf{U}} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$, $\mathcal{B}_{\mathbf{W}} = (\bar{b}_{k+1}, \dots, \bar{b}_n)$ y, por tanto, $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$, es fácil comprobar que las matrices $M(f_{\mathbf{U},\mathbf{I}}, \mathcal{B})$ y $M(f_{\mathbf{I},\mathbf{W}}, \mathcal{B})$ son como se afirma. La matriz $M(f, \mathcal{B})$ se obtiene de (a), con la fórmula del producto de matrices por "cajas". □

En un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, recordemos (Lema 3.33) que si $\mathbf{U}$ es un subespacio invariante por un endomorfismo autoadjunto, f, entonces también $\mathbf{U}^{\perp}$ es invariante por f y, además, el endomorfismo $f_{\mathbf{U}} \in \operatorname{End} \mathbf{U}$ es también autoadjunto.

Lema 3.53. *Sean* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial euclídeo y* f *una isometría. Si* $\mathbf{U}$ *es un subespacio invariante por* f *entonces se verifica que:*

(a) $f_{\mathbf{U}}$ *es una isometría de* $(\mathbf{U}, \mathbf{g}_{\mathbf{U}})$ (ver Def. 2.6)*.*

(b) $\mathbf{U}^{\perp}$ *es invariante por* f*.*

(c) $f + f^{-1}$ *es un endomorfismo autoadjunto respecto a* $\mathbf{g}$*.*

Demostración. (a) Si $\mathbf{U}$ es invariante, $f(\mathbf{U}) \subset \mathbf{U}$; además, como f es un isomorfismo, $f(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$; luego, $f_{\mathbf{U}} \in \operatorname{Aut} \mathbf{U}$. Como f es isometría entonces $f_{\mathbf{U}}$ conserva la métrica $\mathbf{g}_{\mathbf{U}}$.

(b) Tomemos $\bar{w} \in \mathbf{U}^{\perp}$, lo que significa que $\mathbf{g}(\bar{v}, \bar{w}) = 0$, $\forall\, \bar{v} \in \mathbf{U}$; como f es isometría se tiene que $\mathbf{g}(f(\bar{v}), f(\bar{w})) = 0$, $\forall\, \bar{v} \in \mathbf{U}$; y como $f(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$, llegamos a que $\mathbf{g}(\bar{u}, f(\bar{w})) = 0$, $\forall\, \bar{u} \in \mathbf{U}$, demostrándose así que $f(\bar{w}) \in \mathbf{U}^{\perp}$.

(c) Probemos que $f + f^{-1}$ cumple la condición de la Def. 3.16 para ser autoadjunto:

$$\begin{aligned} &\mathbf{g}\big((f + f^{-1})(\bar{u}), \bar{v}\big) = \mathbf{g}(f(\bar{u}) + f^{-1}(\bar{u}), \bar{v}) = \mathbf{g}(f(\bar{u}), \bar{v}) + \mathbf{g}(f^{-1}(\bar{u}), \bar{v}) \overset{(*)}{=} \\ &= \mathbf{g}\big(\bar{u}, f^{-1}(\bar{v})\big) + \mathbf{g}\big(\bar{u}, f(\bar{v})\big) = \mathbf{g}\big(\bar{u}, f^{-1}(\bar{v}) + f(\bar{v})\big) = \mathbf{g}\big(\bar{u}, (f + f^{-1})(\bar{v})\big), \end{aligned}$$

donde para el paso $(*)$ se ha aplicado la fórmula (3.22) al primer sumando para la isometría f^{-1}, y al segundo sumando para la isometría f. □

Demos ahora el teorema de clasificación de isometrías en toda su generalidad para espacios vectoriales euclídeos de dimensión finita.

Teorema 3.54. *Sea* $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ *un espacio vectorial euclídeo, con* $\dim \mathbf{V} = n$. *Dada una isometría* $f \in \mathbf{O}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, *existen una base ortonormal* $\mathcal{B}$ *y números enteros*: p, q, $r \geq 0$, *con* $p + q + 2r = n$, *de tal forma que se verifica*:

$$M(f, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{I}_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{I}_q & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R(\theta_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & R(\theta_r) \end{array}\right), \tag{3.26}$$

con $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ *para ciertos* $\theta_i \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Demostración. Dada una isometría $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, definamos $\mathbf{V}_1 := \{\bar{u} \in \mathbf{V} : f(\bar{u}) = \bar{u}\}$ y $\mathbf{V}_{-1} := \{\bar{u} \in \mathbf{V} : f(\bar{u}) = -\bar{u}\}$, que son los únicos subespacios propios que puede tener una isometría f, según el Lema 3.49(b). En el caso de que 1 (ó -1) no fuera un valor propio de f entonces sería $\mathbf{V}_1 = \{\bar{0}\}$ (ó $\mathbf{V}_{-1} = \{\bar{0}\}$), y correspondería a $p = 0$ (o a $q = 0$).

Sea $\mathbf{U} := \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_{-1}$, que es una suma directa según el Corolario 1.12. Como $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_{-1}$ son subespacios invariantes por f, también lo es $\mathbf{U}$; y por el Lema 3.53(b), $\mathbf{U}^\perp$ es invariante por f, al tratarse de una isometría. Por tanto, $f_{\mathbf{U}^\perp} \in \operatorname{Aut} \mathbf{U}^\perp$ está bien definido, es isometría y no tiene vectores propios, ya que los vectores propios de f pertenecen a $\mathbf{U}$, y $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{\bar{0}\}$ (Lema 3.24).

Si fuese $\mathbf{U}^\perp = \{\bar{0}\}$ entonces $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_{-1}$, y sería $r = 0$; y habríamos terminado, pues tomando una base $\mathcal{C}$ de $\mathbf{V}$, formada uniendo una base de $\mathbf{V}_1$ y una de $\mathbf{V}_{-1}$, y aplicando Gram-Schmidt a $\mathcal{C}$ (Teor. 3.22), obtenemos una base en las condiciones del teorema (probadlo usando que $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_{-1}$ son ortogonales, como se obtuvo en la demostración de la Prop. 3.51).

Supongamos $\mathbf{U}^\perp \neq \{\bar{0}\}$ y definamos $h := f_{\mathbf{U}^\perp} + f_{\mathbf{U}^\perp}^{-1} \in \operatorname{End} \mathbf{U}^\perp$. Por el Lema 3.53(c), h es un endomorfismo autoadjunto; por tanto, h es diagonalizable. Sea $\bar{w} \in \mathbf{U}^\perp$ un vector propio de h, es decir, $h(\bar{w}) = \lambda\bar{w} = f(\bar{w}) + f^{-1}(\bar{w})$; aplicando f a la última igualdad, y despejando, queda $f(f(\bar{w})) = \lambda f(\bar{w}) - \bar{w}$, lo que implica que $\mathbf{W} := \mathbf{L}(\{\bar{w}, f(\bar{w})\})$ es un subespacio invariante por f. Además, $\dim \mathbf{W} = 2$; pues si $\dim \mathbf{W} = 1$ entonces $\bar{w}$ sería un vector propio de f en $\mathbf{U}^{\perp}$ y no en $\mathbf{U}$. Así (ver Lema 3.2), $(\mathbf{W}, \mathbf{g_W})$ es un plano vectorial euclídeo y, por el Lema 3.53(a), $f_{\mathbf{W}}$ es una isometría sin vectores propios. Necesariamente, por las Props. 3.50 y 3.51, $f_{\mathbf{W}}$ es una rotación de ángulo $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Llamemos $\mathbf{U}' := \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$, que es una suma directa pues $\mathbf{W} \subset \mathbf{U}^{\perp}$. Si fuese $\mathbf{U}'^{\perp} = \{\bar{0}\}$ entonces $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$, y sería $r = 1$; y habríamos acabado, pues tomando una base ortonormal de $\mathbf{U}$, se amplia a una una base ortonormal de $\mathbf{V}$ (según Cor. 3.23) y se obtiene una base en las condiciones del teorema (¡probadlo!). Si suponemos que $\mathbf{U}'^{\perp} \neq \{\bar{0}\}$, con los mismos pasos que en el párrafo precedente, encontraremos otro plano vectorial euclídeo, $\mathbf{W}' \subset \mathbf{U}'^{\perp}$, invariante por f y tal que $f_{\mathbf{W}'}$ es una rotación sin valores propios. Si fuese $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}'$ entonces sería el caso $r = 2$ y llegaríamos, como antes, a una base ortonormal en las condiciones del teorema.

Este proceso se repite hasta obtener una descomposición de $\mathbf{V}$ en suma directa de subespacios invariantes por f, ortogonales dos a dos, quedando:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_{-1} \oplus \mathbf{W}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{W}^{(r)}.$$

Uniendo ordenadamente los vectores de una base ortonormal de cada subespacio, se obtiene una base ortonormal de $\mathbf{V}$ que cumple las condiciones del teorema. □

Isometrías del espacio euclídeo tridimensional.

En este apartado, $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ es un espacio vectorial euclídeo, con $\dim \mathbf{V} = 3$. Para este caso, resulta instructivo analizar directamente la clasificación de las isometrías. Luego, compararemos el resultado con la aplicación del Teorema 3.54 a la dimensión $n = 3$.

Si f es una isometría de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, como $\mathbf{V}$ es de dimensión impar, f tendrá al menos un valor propio que será 1 ó -1 (Lema 3.49(b)); por tanto, habrá al menos una recta vectorial $\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{\bar{u}\})$ invariante por f, generada por un vector propio $\bar{u}$, perteneciente a $\mathbf{V}_1$ o a $\mathbf{V}_{-1}$. El plano vectorial $\mathbf{U}^\perp$, perpendicular a dicha recta, también es invariante por f (Lema 3.53(b)). Como $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp$ (Lema 3.24) podemos expresar la isometría f como la composición de dos isometrías (siguiendo el Lema 3.52 —que es aplicable no solo a endomorfismos de $\mathbf{V}$ sino también a isometrías de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$—):

$$f = f_{\mathbf{U},\mathbf{I}} \circ f_{\mathbf{I},\mathbf{U}^\perp} = f_{\mathbf{I},\mathbf{U}^\perp} \circ f_{\mathbf{U},\mathbf{I}}. \tag{3.27}$$

Se pueden dar los siguientes casos:

(A) Si $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}_1$ entonces $f_{\mathbf{U},\mathbf{I}} = \mathbf{I}_\mathbf{V}$

(B) Si $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}_{-1}$ entonces $f_{\mathbf{U},\mathbf{I}}$ es una *simetría ortogonal respecto al plano* $\mathbf{U}^\perp$ (Def. 3.15).

A esta última isometría se le llama también una *reflexión*. En general, se define una *reflexión* como una simetría ortogonal respecto a un *hiperplano*.

Por otra parte, $f_{\mathbf{I},\mathbf{U}^\perp}$ tiene dos posibilidades, según que $f_{\mathbf{U}^\perp}$ corresponda a una rotación (Def. 3.19) o a una isometría negativa del plano vectorial euclídeo $(\mathbf{U}^\perp, \mathbf{g}_{\mathbf{U}^\perp})$:

(C) Si $f_{\mathbf{I},\mathbf{U}^\perp}$ es una rotación decimos que $f_{\mathbf{I},\mathbf{U}^\perp}$ es un *giro alrededor del eje* $\mathbf{U}$; pues, en este caso, $f_{\mathbf{U}^\perp}$ es una rotación en un plano (ver Prop. 3.50), mientras que los vectores de la recta $\mathbf{U}$ permanecen fijos por $f_{\mathbf{I},\mathbf{U}^\perp}$.

(D) Si $f_{\mathbf{I},\mathbf{U}^\perp}$ es una isometría negativa entonces $f_{\mathbf{I},\mathbf{U}^\perp}$ es una *simetría ortogonal respecto al plano* $\mathbf{V}_1$ (*reflexión*); pues en este caso $f_{\mathbf{U}^\perp}$ es una isometría negativa en un plano y entonces (ver Prop. 3.51) existe una recta de vectores fijos $\mathbf{W} \subset \mathbf{U}^\perp$, verificándose que $\mathbf{V}_1 = \mathbf{U} \cup \mathbf{W}$.

Desde este análisis, siguiendo la fórmula (3.27), podemos interpretar una rotación de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ bien como un giro alrededor de un eje (caso A con C) o bien como una composición de dos reflexiones (caso B con D) —probad que en $\mathbb{R}^3$ la composición de dos reflexiones es igual que un giro alrededor de un eje—; y una isometría negativa de $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, o bien es una reflexión (caso A con

D), o bien es la composición de una reflexión con un giro alrededor de un eje (caso B con C).

Veamos que esta clasificación está de acuerdo con el teorema general de clasificación de isometrías. Según el Teorema 3.54, para $n = 3$, tenemos:

(I) Si f es una rotación, los casos pueden ser: $(p = 3, q = 0, s = 0)$, $(p = 1, q = 2, s = 0)$ y $(p = 1, q = 0, s = 1)$, todos los cuales se pueden interpretar como un giro alrededor de un eje. El caso $(p = 3, q = 0, s = 0)$ es la identidad en $\mathbf{V}$, que trivialmente es un giro de 0 grados alrededor de cualquier eje. El caso $(p = 1, q = 2, s = 0)$ es un giro de ángulo π alrededor del eje $\mathbf{V}_1$; se le llama también una *simetría axial respecto al eje* $\mathbf{V}_1$, pues es una simetría ortogonal respecto a la recta $\mathbf{V}_1$.

(II) Si f es una isometría negativa, los casos son: $(p = 2, q = 1, s = 0)$ que es una reflexión, y $(p = 0, q = 3, s = 0)$ o $(p = 0, q = 1, s = 1)$ que ambos son la composición de una reflexión y un giro. El caso $(p = 0, q = 3, s = 0)$ es $-\mathbf{I}_{\mathbf{V}}$; es la llamada *simetría central*, que se puede obtener, si se quiere, como resultado de una reflexión respecto a cualquier plano elegido, compuesta con un giro de ángulo π alrededor del eje perpendicular a ese plano.

Ejemplos 3.6. Sea $(\mathbb{R}^3, \mathbf{g}_0, \mathcal{O}_0)$ el espacio vectorial euclídeo orientado con $\mathcal{O}_0 := [\mathcal{B}_0]_{\mathbf{Gl}_3^+}$ (Def. 3.7) —la base estándar $\mathcal{B}_0$ es de orientación positiva—.

1. La isometría $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x', y', z')$, que es un giro de ángulo $4\pi/3$ alrededor del eje OY, viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & 0 & -\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} & 0 & \cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

En el plano $\Pi = \{(x, y, z) : y = 0\}$, $4\pi/3$ es el ángulo de la rotación f_Π según la orientación $\mathcal{O} = \big[\big((1,0,0),(0,0,1)\big)\big]_{\mathbf{Gl}_2^+}$.

2. La simetría axial respecto al eje $\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{(0,1,1)\})$, expresada en la base ortonormal $\mathcal{B} = \big((0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (1,0,0)\big)$ es la función $f(r,s,t) = (r', s', t')$, dada por:

$$\begin{pmatrix} r' \\ s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \text{; y en } \mathcal{B}_0 \text{ es: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. Una reflexión de $\mathbb{R}^3$ respecto al plano $\Pi \equiv y + z = 0$, expresada en la base ortonormal $\mathcal{C} = \big((0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (1,0,0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\big)$ es la función $f(r,s,t) = (r', s', t')$, dada por:

$$\begin{pmatrix} r' \\ s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \text{; y en } \mathcal{B}_0 \text{ es: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3.5. Ejercicios del Tema 3.

1. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo. Probad que se verifica:

$$\mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \tfrac{1}{2}(\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 - \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2), \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}.$$

2. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo. Probad el *teorema del coseno* que afirma:

$$\|\bar{u} - \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\,\cos\widehat{\bar{u},\bar{v}}\,, \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}.$$

   Deducir lo que sería el *teorema de Pitágoras*: Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son ortogonales entonces

$$\|\bar{u} - \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2.$$

   Describid gráficamente ambos resultados para $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea estándar.

3. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo. Probad que se verifica la llamada *identidad del paralelogramo*:

$$2(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) = \|\bar{u} + \bar{v}\|^2 + \|\bar{u} - \bar{v}\|^2, \quad \forall\, \bar{u},\, \bar{v} \in \mathbf{V}.$$

Describid gráficamente dicho resultado para $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea estándar.

4. En el espacio vectorial euclídeo $(\mathcal{M}_2, \mathbf{g})$ de las matrices reales cuadradas de orden 2, con la métrica $\mathbf{g}(A, B) = \mathrm{tr}(A^t\, B)$, hallar:

   a. El ángulo que forman $\widehat{C,D}$, con $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $D = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

   b. Una base del subespacio $A^{\perp}$, siendo $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

   c. Una base ortonormal del subespacio $\mathbf{U}^{\perp}$, siendo:

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}\big(\big\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big\}\big).$$

5. Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal de $(\mathcal{P}_2, \mathbf{g})$ a partir de la base usual $\mathcal{B}_\circ = (1, x, x^2)$, siendo:

$$\mathbf{g}(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

6. En $\mathbb{R}^3$ con la métrica estándar, hallar una base ortonormal por el proceso de Gram-Schmidt a partir de la base

$$\mathcal{B} = \big((1, -1, 0), (0, 2, -1), (3, 1, 1)\big).$$

7. Sean $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathbf{U}$ un subespacio vectorial. Probad los siguientes apartados:

   a. $(\mathbf{U}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{U}$,

   b. $\mathbf{p}^{\mathbf{U}} + \mathbf{p}^{\mathbf{U}^{\perp}} = \mathbf{I}_{\mathbf{V}}$,

   c. $2\mathbf{p}^{\mathbf{U}} - \mathbf{s}^{\mathbf{U}} = \mathbf{I}_{\mathbf{V}}$.

   d. $\mathbf{p}^{\mathbf{U}}$ es autoadjunto.

8. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo. Si $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$ es una base ortonormal de un subespacio $\mathbf{U}$ y $(\bar{b}_{k+1}, \dots, \bar{b}_n)$ es una base ortonormal de $\mathbf{U}^\perp$. Probad que $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ es una base de vectores propios de la proyección $\mathbf{p}^\mathbf{U}$ y de la simetría $\mathbf{s}^\mathbf{U}$. Hallad $M(\mathbf{p}^\mathbf{U}, \mathcal{B})$ y $M(\mathbf{s}^\mathbf{U}, \mathcal{B})$.

9. Considerad $(\mathbb{R}^3, \mathbf{g})$ con la métrica euclídea cuya matriz en la base estándar es

$$M(\mathbf{g}, \mathcal{B}_\circ) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a. Halla una base ortonormal de $\mathbf{U}^\perp$, siendo

$$\mathbf{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

   b. Halla la proyección ortogonal del vector $(2, 1, 0)$ sobre el plano $\mathbf{U}$.

   c. Halla la matriz de la simetría ortogonal $\mathbf{s}^\mathbf{U}$ en alguna base de $\mathbb{R}^3$.

10. Sean $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo, $f, h \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ y $k \in \mathbb{R}$. En cuanto al endomorfismo adjunto, probar que:

   a. $(f + h)^\dagger = f^\dagger + h^\dagger$,

   b. $(kf)^\dagger = k\, f^\dagger$,

   c. $(f \circ h)^\dagger = f^\dagger \circ h^\dagger$,

   d. $(f^\dagger)^\dagger = f$,

   e. $\mathbf{I}_\mathbf{V}^\dagger = \mathbf{I}_\mathbf{V}$,

   f. $f \circ f^\dagger$ es autoadjunto.

11. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo. Probar que si f es un un endomorfismo autoadjunto y $f \circ f = f$ entonces f es la proyección ortogonal sobre $\mathbf{U} = \operatorname{im} f$.

12. En $\mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea estándar, consideremos la aplicación lineal

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, 2x + y).$$

¿Existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ respecto a la cual la matriz de f es diagonal? En caso afirmativo, calcula una de esas bases.

13. Sean $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$ una base ortonormal. Sea $f \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ con $M(f, \mathcal{B}) = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = \mathbf{g}(f(\bar{b}_i), \bar{b}_j)$. Probar que f es autoadjunto.

14. Sea $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ un espacio vectorial euclídeo y sean $f, h \in \operatorname{End} \mathbf{V}$ autoadjuntos. Probar que $f \circ h$ es autoadjunto si y solo si $f \circ h = h \circ f$.

15. En un espacio vectorial euclídeo orientado $(\mathbf{V}, \mathbf{g}, \mathcal{O})$ de dimensión 3, consideramos la operación *producto vectorial* (ver Def. 3.12) descrita por la aplicación:

$$\times : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \quad (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \bar{u} \times \bar{v}.$$

Probar los siguientes apartados:

   a. La aplicación "$\times$" es bilineal y antisimétrica.

   b. Los vectores $\bar{u}$ y $\bar{u} \times \bar{v}$ son ortogonales.

   c. Los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes si y solo si $\bar{u} \times \bar{v} = 0$.

   d. Si $\bar{u} \times \bar{v} \neq 0$, la terna $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v})$ es una base de $\mathbf{V}$ de orientación positiva.

16. En un espacio vectorial euclídeo orientado $(\mathbf{V}, \mathbf{g}, \mathcal{O})$ de dimensión 3, sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$ dos vectores linealmente independientes.

   a. Aplicar el procedimiento de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{C} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v})$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ de orientación positiva.

   b. Calcular la matriz de cambio de base $M(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \equiv \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$.

   c. Usar la fórmula (3.12) y el determinante $\det(\mathcal{C}_{\mathcal{B}})$ para probar que

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - \mathbf{g}(\bar{u}, \bar{v})^2.$$

   d. Si $\widehat{\bar{u}, \bar{v}} \in [0, \pi]$ es el *ángulo entre* $\bar{u}$ y $\bar{v}$, según Def. 3.3, probar, usando (c), que

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\| \operatorname{sen} \widehat{\bar{u}, \bar{v}}\,.$$

Bibliografía

ARVESÚ, J., ÁLVAREZ, R. Y MARCELLÁN, F.: *Álgebra lineal y aplicaciones.* Ed. Síntesis, 1999.

ARVESÚ, J., ÁLVAREZ, R. Y MARCELLÁN, F.: *Problemas resueltos de Álgebra lineal.* Ed. Thomson, 2004.

BURGOS, J.: Álgebra lineal. MacGraw-Hill, 1993.

CASTELLET, M. Y LLERENA, I.: *Álgebra lineal y Geometría.* Ed. Reverté, 1981.

GREUB, W.: *Linear Algebra.* Springer-Verlag, 1981.

MERINO, L. Y SANTOS, E.: *Álgebra lineal con métodos elementales.* Ed. Thomson, 2006.

RAYA, A., RIDER, A. Y RUBIO, R.: *Álgebra lineal y Geometría.* Ed. Reverté, 2007.

ROJO, J. Y MARTÍN, I.: *Ejercicios y problemas de Álgebra lineal.* MacGraw-Hill, 1994.

ROMERO, A.: *Álgebra lineal y Geometría I.* Ed. La Madraza, 1991.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA:

BERGER, M.: *Geometry I, II.* Springer Verlag, 1987.

COXETER, H. S. M.: *Introduction to Geometry.* John Wiley, 1969.

GODEMENT, R.: *Álgebra.* Ed. Tecnos, 1971.

WOLFRAM, S.: *Mathematica, a system for doing Mathematics by computer.* Addison-Wesley, 1991.

Índice