EACA 99, Tenerife, 8-11 septiembre 1999

¿ Cuándo un álgebra finitamente generada es de tipo Poincaré–Birkhoff–Witt?

José L. Bueso
Dpto. de Álgebra, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, E18071 Granada
jbueso@ugr.es

J. Gómez-Torrecillas
Dpto. de Álgebra, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, E18071 Granada
torrecil@ugr.es

F. J. Lobillo
Dpto. de Álgebra, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, E18071 Granada
jlobillo@ugr.es

Abstract

A PBW algebra R over a field $\mathbf{k}$ can be understood as the associative algebra generated by finitely many elements $x_1, \ldots, x_n$ subjected to the relations

$$Q = \{x_j x_i = q_{ji} x_i x_j + p_{ji} \qquad (1 \leq i < j \leq n)\}, \tag{1}$$

where each p_{ji} is a finite $\mathbf{k}$–linear combination of standard monomials $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, and each q_{ji} is a non-zero scalar in the field $\mathbf{k}$. The algebra is required to satisfy the following two conditions.

1. There is an admissible order $\preceq$ on $\mathbb{N}^n$ such that $\exp(p_{ji}) \prec \epsilon_i + \epsilon_j$ for every $1 \leq i < j \leq n$.
2. The standard monomials x^α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ form a basis of R as a $\mathbf{k}$-vector space.

The aim of this paper is to provide algorithms to check in a effective way both conditions and, hence, to decide whether a give algebra satisfying relations like (1) is a PBW algebra.

Introducción

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo conmutativo. Uno de los teoremas más celebrados en el campo de la Teoría de Anillos (en conexión con las álgebras de Lie) es el llamado Teorema de Poincaré–Birkhoff–Witt. Dicho teorema establece que los elementos del álgebra envolvente $U(L)$ de un álgebra de Lie L con $\mathbf{k}$-base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ se escriben como polinomios conmutativos en las variables $x_1, \ldots, x_n$, es decir, el conjunto $\{x^\alpha \; ; \; \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ forma una base de $U(L)$ como espacio vectorial.

Aparte de otros ejemplos clásicos como las extensiones de Ore, en los últimos años numerosos matemáticos han buscado teoremas del tipo Poincaré–Birkhoff–Witt para distintas álgebras surgidas dentro de la física-matemática, los llamados grupos cuánticos. Entre estos destacamos dos familias importantes desde el punto de vista de los teoremas de tipo PBW: los anillos de coordenadas cuánticos (que son extensiones iteradas de Ore de un anillo de polinomios conmutativos) y las álgebras envolventes cuánticas.

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo sobre el que construimos el álgebra libre asociativa $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Un monomio en $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ se dice estándar si es de la forma $\lambda x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ con $\lambda \in \mathbf{k}$. Los conjuntos de relaciones que nos interesan pueden recogerse dentro del siguiente esquema

$$Q = \{x_j x_i - q_{ji} x_i x_j - p_{ji} \ ; \ 1 \leq i < j \leq n\} \tag{2}$$

con $q_{ji} \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$ y p_{ji} un polinomio estándar. Estas relaciones reciben el nombre de *relaciones cuánticas*. Sea $R = \mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I_Q$, donde I_Q es el ideal bilátero generado por Q. R se dice álgebra de tipo PBW si existe un orden admisible $\preceq$ sobre $\mathbb{N}^n$ tal que $\alpha \prec \epsilon_i + \epsilon_j$ para todo $\alpha \in \mathcal{N}(p_{ji})$ (en cuyo caso las relaciones reciben el nombre de *relaciones cuánticas acotadas*), y los monomios estándar forman una $\mathbf{k}$-base de R (véase [BCGL98, Lob98, KRW90, Kre92]). En este trabajo proporcionamos un algoritmo para decidir si unas relaciones dadas confieren a R estructura de álgebra de tipo PBW.

Este algoritmo propuesto permite como consecuencia aplicar el cálculo de la dimensión de Gelfand–Kirillov presentado en [BGL98a] a cualquier módulo finitamente generado sobre cualquier álgebra de tipo PBW, ya que los órdenes utilizados son siempre del tipo requerido en [BGL98a]

1 El algoritmo

Necesitamos constestar a dos preguntas. Dada R definida mediante las relaciones Q en (2)

1. ¿Existe un orden admisible $\preceq$ en $\mathbb{N}^n$ tal que para todo $1 \leq i < j \leq n$ y todo $\alpha \in \mathcal{N}(p_{ji})$ $\alpha \prec \epsilon_i + \epsilon_j$?, es decir, ¿son las relaciones Q de (2) acotadas?
2. ¿Son los monomios estándar una $\mathbf{k}$-base para R?

1.1 El orden

La siguiente proposición permite responder a la existencia de dicho orden utilizando métodos de programación lineal. Para cada $1 \leq i < j \leq n$, sea $C_{ji} = \mathcal{N}(p_{ji}) - \epsilon_i - \epsilon_j$; llamemos $C = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} C_{ji} \setminus \{0\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{l} \textbf{minimize } f(\omega) = \omega_1 + \cdots + \omega_s \\ \textbf{with the constraints} \\ \Phi \equiv \begin{cases} \omega_i \geq 1 & (i = 1, \ldots s) \\ \langle \omega, -\alpha_j \rangle \geq 1 & (j = 1, \ldots, m) \end{cases} \end{array} \tag{3}$$

Proposición 1.1 ([BGL99a, Proposition 0.1]). *El conjunto de relaciones Q en* (2) *son acotadas si y sólo si el problema de programación lineal* (3) *tiene solución. Además, para cada solución ω de* (3), *el orden*

$$\alpha \preceq_\omega \beta \iff \begin{cases} \langle \omega, \alpha \rangle < \langle \omega, \beta \rangle & o \\ \langle \omega, \alpha \rangle = \langle \omega, \beta \rangle \quad y \quad \alpha \leq_{lex} \beta \end{cases}$$

proporciona una acotación para Q

De hecho, cualquier elemento de Φ da una acotación para Q.

1.2 Ejemplo

Ejemplo 1.2. Usaremos el algoritmo del simplex tal como viene implementado en MAPLE para calcular uno de los vectores

$$\omega = (e_1, e_{12}, e_{122}, e_2, k_1, k_2, l_1, l_2, f_2, f_{122}, f_{12}, f_1)$$

descritos en la Proposición 1.1 para el álgebra $U_q(B_2)$ con respecto a los generadores de Lusztig $E_1, E_{12}, E_{122}, E_2, K_1, K_2, K_1^{-1}, K_2^{-1}, F_2, F_{122}, F_{12}, F_1$.

$$\textbf{minimize} f(\omega) = e_1 + e_{12} + e_{122} + e_2 + k_1 + k_2 + l_1 + l_2 + f_2 + f_{122} + f_{12} + f_1$$

with the constraints

$$\begin{aligned} e_1 &\geq 1, & k_1 &\geq 1, & f_2 &\geq 1 \\ e_{12} &\geq 1, & k_2 &\geq 1, & f_{122} &\geq 1 \\ e_{122} &\geq 1, & l_1 &\geq 1, & f_{12} &\geq 1 \\ e_2 &\geq 1, & l_2 &\geq 1, & f_1 &\geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 - e_{12} &\geq 1, & f_1 + f_2 - f_{12} &\geq 1 \\ e_{12} + e_2 - e_{122} &\geq 1, & f_{12} + f_2 - f_{122} &\geq 1 \\ e_1 + e_{122} - 2e_{12} &\geq 1, & f_1 + f_{122} - 2f_{12} &\geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 + f_1 - k_1 &\geq 1, & e_1 + f_1 - l_1 &\geq 1 \\ e_1 + f_{12} - k_1 - f_2 &\geq 1, & e_1 + f_{12} - l_1 - f_2 &\geq 1 \\ e_1 + f_{122} - k_1 - 2f_2 &\geq 1, & e_1 + f_{122} - l_1 - 2f_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e_{12} + f_1 - e_2 - k_1 &\geq 1 \\
e_{12} + f_1 - e_2 - l_1 &\geq 1 \\
e_{12} + f_{12} - k_1 - k_2 &\geq 1 \\
e_{12} + f_{12} - l_1 - l_2 &\geq 1 \\
e_{12} + f_{122} - e_1 - k_2 - f_2 - f_1 &\geq 1 \\
e_{12} + f_{122} - k_1 - k_2 - f_2 &\geq 1 \\
e_{12} + f_{122} - k_2 - l_1 - f_2 &\geq 1 \\
e_{12} + f_{122} - e_1 - k_2 - f_{12} &\geq 1 \\
e_{12} + f_{122} - e_1 - k_2 - 2l_1 - f_2 - f_1 &\geq 1 \\
e_{12} + f_{122} - k_2 - l_1 - f_2 &\geq 1 \\
e_{12} + f_{122} - k_2 - 3l_1 - f_2 &\geq 1 \\
e_{12} + f_{122} - e_1 - k_2 - 2l_1 - f_{12} &\geq 1 \\
e_{12} + f_2 - e_1 - k_2 &\geq 1 \\
e_{12} + f_2 - e_1 - l_2 &\geq 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{122} + f_1 - 2e_2 - k_1 &\geq 1 \\
e_{122} + f_1 - 2e_2 - l_1 &\geq 1 \\
e_{122} + f_{12} - e_1 - e_2 - 2k_1 - k_2 - f_1 &\geq 1 \\
e_{122} + f_{12} - e_{12} - 2k_1 - k_2 - f_1 &\geq 1 \\
e_{122} + f_{12} - e_2 - 3k_1 - k_2 &\geq 1 \\
e_{122} + f_{12} - e_2 - k_1 - k_2 &\geq 1 \\
e_{122} + f_{12} - e_1 - e_2 - l_2 - f_1 &\geq 1 \\
e_{122} + f_{12} - e_{12} - l_2 - f_1 &\geq 1 \\
e_{122} + f_{12} - e_2 - k_1 - l_2 &\geq 1 \\
e_{122} + f_{12} - e_2 - l_1 - l_2 &\geq 1 \\
e_{122} + f_{122} - k_1 - 2k_2 &\geq 1 \\
e_{122} + f_{122} - l_1 - 2l_2 &\geq 1 \\
e_{122} + f_2 - e_{12} - k_2 &\geq 1 \\
e_{122} + f_2 - e_1 - e_2 - k_2 &\geq 1 \\
e_{122} + f_2 - e_{12} - l_2 &\geq 1 \\
e_{122} + f_2 - e_1 - e_2 - l_2 &\geq 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_2 + f_{12} - k_2 - f_1 &\geq 1, & e_2 + f_{122} - k_2 - f_{12} &\geq 1 \\
e_2 + f_{12} - l_2 - f_1 &\geq 1, & e_2 + f_{122} - l_2 - f_{12} &\geq 1 \\
e_2 + f_2 - k_2 &\geq 1, & e_2 + f_{122} - k_2 - f_2 - f_1 &\geq 1 \\
e_2 + f_2 - l_2 &\geq 1, & e_2 + f_{122} - l_2 - f_2 - f_1 &\geq 1
\end{aligned}
$$

El mínimo se encuentra en:

$$e_1 = 4, e_{12} = 9, e_{122} = 15, e_2 = 7, k_1 = 1, k_2 = 1,$$
$$l_1 = 1, l_2 = 1, f_2 = 2, f_{122} = 2, f_{12} = 1, f_1 = 1$$

De este modo, obtenemos el vector de pesos

$$\omega = (4, 9, 15, 7, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1)$$

1.3 La base

La existencia del orden anterior permite utilizar el Lema del Diamante [Ber78, Theorem 1.2] para responder a la existencia de la base. Necesitamos unas definiciones adicionales.

Para cada monomio $M = \lambda x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ en el álgebra libre definimos su multigrado como $\mathrm{mdeg}(M) = \alpha \in \mathbb{N}^n$ donde α_i indica el número de apariciones de x_i en M, y su índice de desorden $\nu(M)$ como el número de pares (i_k, i_l) con $i_k > i_l$ y $k < l$. Nótese que $\nu(M) = 0$ si y sólo si M es estándar.

Proposición 1.3. *Sea $\preceq$ un orden admisible en $\mathbb{N}^n$. Entonces el orden total $\leq$ definido sobre $\langle X \rangle$ por*

$$M_1 \leq M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{mdeg}(M_1) \prec \mathrm{mdeg}(M_2) & o \\ \mathrm{mdeg}(M_1) = \mathrm{mdeg}(M_2) \quad y \quad \nu(M_1) \leq \nu(M_2) & \end{cases}$$

es un orden de monoide sobre $\langle X \rangle$. Además, $\langle X \rangle$ está bien ordenado con este orden.

Para compatibilizar la notación con [Ber78] llamamos para $1 \leq i < j \leq n$:

$$w_{ji} = x_j x_i$$
$$f_{ji} = q_{ji} x_i x_j + p_{ji}$$

Nótese que el índice de desorden en los monomios de f_{ji} es 0, y además $\nu(w_{ji}) = 1$ para $1 \leq i < j \leq n$

Referimos a [Ber78] para definiciones adicionales. Los algoritmos 1 y 2 presentan un método estandar de reducción módulo Q.

Por último el Lema del Diamante de Bergman [Ber78, Theorem 1.2] junto al algoritmo 2 proporcionan el algoritmo 3 para resolver el problema planteado inicialmente.

2 Ejemplos

Ejemplo 2.1. Sea $\underline{q} = (q_{ij})$ una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbf{k}$ multiplicativamente antisimétrica, es decir, todas sus entradas son no nulas y $q_{ji} = q_{ij}^{-1}$ para cada $1 \leq i, j \leq n$ (en particular $q_{ii} = 1$ para cada i). El álgebra de coordenadas cuánticas del espacio afín

Algorithm 1 Función red_Q

INPUT: $M = \lambda x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ un monomio

OUTPUT: $p = \text{red}_Q(M)$ una reducción bajo Q de M.

$k := 1$
while $k < r$ and $i_k \leq i_{k+1}$ **do**
  $k := k + 1$
$\{k$ contiene el primer índice tal que $i_k > i_{k+1}\}$
$A := \lambda x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}}$
$B := x_{i_{k+1}} \cdots x_{i_r}$
if $k = r$ **then** $\{M$ ya está en forma reducida; además $M = Ax_{i_r}\}$
  $p := Ax_{i_r}$
else
  $p := Af_{i_{k+1}i_k}B$

Algorithm 2 Función stred_Q

INPUT: p un polinomio no estándar

OUTPUT: $q = \text{stred}_Q(p)$, una reducción estándar bajo Q de p

$q = 0$
while $p = 0$ **do**
  if $\text{lm}(p) = \text{red}_Q(\text{lm}(p))$ **then** $\{\text{lm}(p)$ es estándar$\}$
    $p := p - \text{lm}(p)$
    $q := q + \text{lm}(p)$
  else $\{\text{lm}(p)$ no es estándar$\}$
    $p := p - \text{lm}(p) + \text{red}_Q(\text{lm}(p))$

Algorithm 3 Poincaré–Birkhoff–Witt

INPUT: Q, un sistema de relaciones (2) en $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$

OUTPUT: Detecta si el álgebra $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I_Q$ es de tipo Poincaré–Birkhoff–Witt.

if el problema (3) tiene solución **then**
  if para todo $1 \leq i < j < k \leq n$ $\text{stred}_Q(x_k f_{ji}) = \text{stred}_Q(f_{kj} x_i)$ **then**
    $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I_Q$ es de tipo Poincaré–Birkhoff–Witt.
  else
    $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I_Q$ no es de tipo Poincaré–Birkhoff–Witt con respecto a dichas variables.
else
  $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I_Q$ no es de tipo Poincaré–Birkhoff–Witt con respecto a dichas variables.

n–dimensional, o también llamada *espacio afín cuántico*, $\mathcal{O}_{\underline{q}}(\mathrm{k}^n)$ es la k–álgebra generada por $x_1, \ldots, x_n$ con relaciones

$$Q = \{x_j x_i = q_{ji} x_i x_j, \quad j > i\} \tag{4}$$

Sea $\preceq$ cualquier orden admisible sobre $\mathbb{N}^n$. Veamos que $(Q, \preceq)$ proporciona un sistema de reducciones de tipo PBW. Para cada $1 \leq i < j < k \leq n$ calculamos $\mathrm{stred}_Q(x_k(q_{ji}x_ix_j))$ como sigue.

$$x_k(q_{ji}x_ix_j) \to_Q q_{ji}q_{ki}x_ix_kx_jq_{ji}q_{ki}q_{kj}x_ix_jx_k$$

Análogamente, $\mathrm{stred}_Q((q_{kj}x_jx_k)x_i)$ vale

$$(q_{kj}x_jx_k)x_i \to_Q q_{kj}q_{ki}x_jx_ix_k \to_Q q_{kj}q_{ki}q_{ji}x_ix_jx_k$$

Por consiguiente, $\mathrm{stred}_Q(x_k(q_{ji}x_ix_j)) = \mathrm{stred}_Q((q_{kj}x_jx_k)x_i)$.

Ejemplo 2.2 (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt). Sea $(\mathfrak{g}, [-,-])$ una **k**–álgebra de Lie finito dimensional con base $x_1, \ldots, x_n$. Sea $U(\mathfrak{g})$ la k–álgebra generada por $x_1, \ldots, x_n$ con relaciones $Q = \{x_jx_i = x_ix_j + [x_j, x_i] : 1 \leq i < j \leq n\}$. Entonces $U(\mathfrak{g}) = \mathrm{k}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I_Q$ es una PBW algebra con respecto al orden lexicográfico graduado $\leq_{deglex}$.

Para comprobar la afirmación anterior, si $[x_l, x_m] = \sum_{h=1}^n a_h^{lm} x_h$ para cualesquiera $l < m$, las reducciones estándar para $i < j < k$ son

$$\begin{aligned}\mathrm{stred}_Q(x_k(x_ix_j + [x_i, x_j]) = x_ix_jx_k &\\ + \sum_{l=1}^{i-1} a_l^{jk} x_lx_i + \sum_{l=1}^{i-1} a_l^{jk}[x_l, x_i] + \sum_{l=i}^{n} a_l^{jk} x_ix_l &\\ + \sum_{l=1}^{j-1} a_l^{ik} x_lx_j + \sum_{l=j}^{n} a_l^{ik} x_jx_l + \sum_{l=j}^{n} a_l^{ik}[x_j, x_l] &\\ + \sum_{l=1}^{k-1} a_l^{ij} x_lx_k + \sum_{l=1}^{k-1} a_l^{ij}[x_l, x_k] + \sum_{l=k}^{n} a_l^{ij} x_kx_l &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{stred}_Q((x_jx_k + [x_j, x_k])x_i) = x_ix_jx_k &\\ + \sum_{l=1}^{i-1} a_l^{jk} x_lx_i + \sum_{l=i}^{n} a_l^{jk} x_ix_l + \sum_{l=i}^{n} a_l^{jk}[x_i, x_l] &\\ + \sum_{l=1}^{j-1} a_l^{ik} x_lx_j + \sum_{l=1}^{j-1} a_l^{ik}[x_l, x_j] + \sum_{l=j}^{n} a_l^{ik} x_jx_l &\\ + \sum_{l=1}^{k-1} a_l^{ij} x_lx_k + \sum_{l=k}^{n} a_l^{ij} x_kx_l + \sum_{l=k}^{n} a_l^{ij}[x_k, x_l] &\end{aligned}$$

Si restamos ambas reducciones obtenemos la expresion

$$\sum_{l=1}^{n} a_l^{jk}[x_l, x_i] - \sum_{l=1}^{n} a_l^{ik}[x_l, x_j] + \sum_{l=1}^{n} a_l^{ij}[x_l, x_k],$$

que vale cero por la identidad de Jacobi.

Ejemplo 2.3. El lgebra de Weyl cúntica 2-dimensional $A_2^{\overline{q},\Lambda}(k)$, $\overline{q} = (q_1, q_2)$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda^{-1} & 1 \end{bmatrix}$. Este lgebra es de la forma

$$A_2^{\overline{q},\Delta}(\mathbf{k}) \cong \mathbf{k}\langle x_1, x_2, y_1, y_2\rangle / I_Q,$$

con relaciones

$$Q = \begin{cases} x_1y_1 = q_1y_1x_1 + 1 \\ y_2y_1 = \lambda^{-1}y_1y_2 \\ y_2x_1 = \lambda x_1y_2 \\ x_2y_1 = \lambda q_1y_1x_2 \\ x_2x_1 = \lambda^{-1}q_1^{-1}x_1x_2 \\ x_2y_2 = 1 + (q_1 - 1)y_1x_1 + q_2y_2x_2 \end{cases}$$

Tomemos el orden lexicográfico graduado con el siguiente orden en las variables: $y_1 \prec x_1 \prec y_2 \prec x_2$. Esto nos lleva a tener que realizar cuatro reducciones:

1. $y_2 \succ x_1 \succ y_1$
2. $x_2 \succ x_1 \succ y_1$
3. $x_2 \succ y_2 \succ y_1$
4. $x_2 \succ y_2 \succ x_1$

1)

$$\begin{aligned} y_2(q_1y_1x_1 + 1) &= q_1(y_2y_1)x_1 + y_2 \\ &\to_Q q_1\lambda^{-1}y_1(y_2x_1) + y_2 \\ &\to_Q q_1\lambda^{-1}y_1(\lambda x_1y_2) + y_2 \\ &= q_1y_1x_1y_2 + y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda x_1y_2)y_1 &\to_Q \lambda x_1\lambda^{-1}y_1y_2 \\ &= (x_1y_1)y_2 \\ &\to_Q (q_1y_1x_1 + 1)y_2 \\ &= q_1y_1x_1y_2 + y_2 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
x_2(q_1y_1x_1+1) &= q_1(x_2y_1)x_1 + x_2\\
&\rightarrow_Q q_1(\lambda q_1y_1x_2)x_1 + x_2\\
&\rightarrow_Q q_1^2\lambda\lambda^{-1}q_1^{-1}y_1x_1x_2 + x_2\\
&= q_1y_1x_1x_2 + x_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda^{-1}q_1^{-1}x_1x_2)y_1 &\rightarrow_Q \lambda^{-1}q_1^{-1}x_1\lambda q_1y_1x_2\\
&= (x_1y_1)x_2\\
&\rightarrow_Q (q_1y_1x_1+1)x_2\\
&= q_1y_1x_1x_2 + x_2
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
x_2(\lambda x_1y_2) &\rightarrow_Q \lambda\lambda^{-1}q_1^{-1}x_1(x_2y_2)\\
&\rightarrow_Q q_1^{-1}x_1(1+q_2y_2x_2+(q_1-1)y_1x_1)\\
&= q_1^{-1}x_1 + q_1^{-1}q_2x_1y_2x_2 + q_1^{-1}(q_1-1)x_1y_1x_1\\
&\rightarrow_Q q_1^{-1}x_1 + q_1^{-1}q_2x_1y_2x_2 + q_1^{-1}(q_1-1)(q_1y_1x_1+1)x_1\\
&= q_1^{-1}x_1 + q_1^{-1}q_2x_1y_2x_2 + (q_1-1)y_1x_1^2 + q_1^{-1}(q_1-1)x_1\\
&= q_1^{-1}q_2x_1y_2x_2 + (q_1-1)y_1x_1^2 + x_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+q_2y_2x_2+(q_1-1)y_1x_1)x_1 &= x_1 + q_2y_2x_2x_1 + (q_1-1)y_1x_1^2\\
&\rightarrow_Q x_1 + \lambda^{-1}q_1^{-1}q_2y_2x_1x_2 + (q_1-1)y_1x_1^2\\
&\rightarrow_Q x_1 + q_1^{-1}q_2x_1y_2x_2 + (q_1-1)y_1x_1^2
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
(1+(q_1-1)y_1x_1+q_2y_2x_2)x_1 &= x_1 + (q_1-1)y_1x_1^2 + q_2y_2x_2x_1\\
&\rightarrow_Q x_1 + (q_1-1)y_1x_1^2 + q_2y_2(\lambda^{-1}q_1^{-1}x_1x_2)\\
&= x_1 + (q_1-1)y_1x_1^2 + q_1^{-1}q_2\lambda^{-1}y_2x_1x_2\\
&\rightarrow_Q x_1 + (q_1-1)y_1x_1^2 + q_1^{-1}q_2\lambda^{-1}(\lambda x_1y_2)x_2\\
&= x_1 + (q_1-1)y_1x_1^2 + q_1^{-1}q_2x_1y_2x_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_2(\lambda x_1 y_2) &= \lambda x_2 x_1 y_2 \\
&\rightarrow_Q \lambda(\lambda^{-1} q_1^{-1} x_1 x_2) y_2 \\
&= q_1^{-1} x_1 x_2 y_2 \\
&= q_1^{-1} x_1 (1 + (q_1 - 1) y_1 x_1 + q_2 y_2 x_2) \\
&\rightarrow_Q q_1^{-1} x_1 + (1 - q_1^{-1}) x_1 y_1 x_1 + q_1^{-1} q_2 x_1 y_2 x_2) \\
&= q_1^{-1} x_1 + (1 - q_1^{-1})(1 + q_1 y_1 x_1) x_1 + q_1^{-1} q_2 x_1 y_2 x_2 \\
&= x_1 + (q_1 - 1) y_1 x_1^2 + q_1^{-1} q_2 x_1 y_2 x_2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $A_2^{\bar{q},\Lambda}(k)$ también es un álgebra de tipo PBW.

Referencias

[Ber78] G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Advances in Math. 29 (1978), 178–218.

[BCGL98] J. L. Bueso, F. J. Castro, J. Gómez Torrecillas, and F. J. Lobillo, *An introduction to effective calculus in quantum groups*, Rings, Hopf algebras and Brauer groups. (S. Caenepeel and A. Verschoren, eds.), Marcel Dekker, 1998, pp. 55–83.

[BGL98a] J. L. Bueso, J. Gómez Torrecillas, and F. J. Lobillo, *Effective computation of the Gelfand-Kirillov-dimension for modules over Poincaré-Birkhoff-Witt algebras with non quadratic relations.*, Proceedings of EACA-98, Universidad Complutense and Universidad de Alcalá, 1998.

[BGL98a] J. L. Bueso, J. Gómez Torrecillas, and F. J. Lobillo (1998). Homological computations in PBW modules. to appear in Algebras and Representation Theory

[BGL99a] J. L. Bueso, J. Gómez Torrecillas, and F. J. Lobillo (1999). Re-filtering and exactness of the Gelfand-Kirillov dimension. preprint 1999.

[BGL99b] J. L. Bueso, J. Gómez Torrecillas, and F. J. Lobillo (1999). Computing the Gelfand-Kirillov dimension II. preprint 1999.

[BGL99c] J. L. Bueso, J. Gómez Torrecillas, and F. J. Lobillo (1999). Dimensión de Gelfand-Kirillov y Polinomio de Hilbert-Samuel de Grupos Cuánticos: Métodos Algorítmicos preprint 1999.

[Bir37] G. Birkhoff, *Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices*, Ann. of Math. (1937), no. 38, 526–532.

[Kre92] H. Kredel, *Solvable polynomial rings.*, Ph.D. thesis, Universität Passau, 1992.

[KRW90] A. Kandri-Rody and V. Weispfenning, *Non-commutative Gröbner bases in algebras of solvable type*, J. Symb. Comput. 9/1 (1990), 1–26.

[Lob98] F. J. Lobillo, *Métodos algebraicos y efectivos en grupos cuánticos.*, Ph.D. thesis, Universidad de Granada, Febrero 1998.

[Mor94] Mora, T. (1994). An introduction to commutative and non–commutative Gröbner bases. *Theoret. Comput. Sci.* , 134:131–173.