Regularidad de las álgebras envolventes cuantizadas

J. Gómez-Torrecillas
Universidad de Granada

Resumen

Para un álgebra R multi-filtrada se muestra que, bajo condiciones favorables sobre el álgebra multi-graduada asociada $G(R)$, es posible levantar condiciones homológicas como la regularidad en el sentido de Auslander o la propiedad de Cohen-Macaulay de $G(R)$ a R. Como aplicación, obtenemos que las $\mathbb{C}(q)$–álgebras envolventes cuantizadas $U_q(C)$ definidas por DeConcini y Procesi en [2] son regulares Auslander y Cohen-Macaulay. Para obtener estos resultados, se desarrolla una técnica de multi-filtración para las llamadas extensiones acotadas y un método de re-filtración, en combinación con resultados de McConnell y Stafford ([10]) y DeConcini y Procesi (loc. cit.).

Palabras clave: MULTI-FILTRACIÓN, ANILLO REGULAR AUSLANDER, ÁLGEBRA COHEN-MACAULAY, ÁLGEBRA ENVOLVENTE CUANTIZADA, DIMENSIÓN DE GELFAND-KIRILLOV

1 Propiedades de regularidad de álgebras no conmutativas

La presente nota es un resumen de [4]. Una versión completa, con demostraciones, puede encontrarse en http://www.ugr.es/~torrecil/UqC.html. Comienzo recordando, para conveniencia del lector, algunas nociones. Mis referencias fundamentales aquí son [1] y [9].

Sea R un anillo noetheriano y M un módulo (por la izquierda o por la derecha) finitamente generado sobre R. El *número grado* de M se define como

$$j_A(M) = \inf\{\, i \mid \operatorname{Ext}^i_R(M,R) \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Diremos, por otra parte, que M satisface la *condición de Auslander* si para todo $i \geqslant 0$ y todo submódulo N de $\operatorname{Ext}^i_R(M,R)$, se tiene que $j_R(N) \geqslant i$. Cuando la dimensión global homológica de R sea finita y todo módulo finitamente generado satisfaga la condición de Auslander, diremos que R es *regular Auslander*.

Si ahora el anillo R es un álgebra finitamente generada sobre un cuerpo $\mathbf{k}$, podemos definir la dimensión de Gelfand-Kirillov de cada módulo (ver [8] para un extenso estudio de esta dimensión). El álgebra R se llama *Cohen-Macaulay* si

$$\operatorname{GKdim}(M) + j_R(M) = \operatorname{GKdim}(R)$$

para todo R–módulo finitamente generado.

La propiedad Cohen-Macaulay, en conjunción con la regularidad, es interesante porque, en su presencia, es posible estudiar la catenaridad de algunas álgebras cuantizadas (ver [7]) o la estructura del último punto de la resolución inyectiva minimal de los módulos regulares ${}_RR$ y R_R (ver [5]).

2 Álgebras y módulos multi-filtrados

En este trabajo $\mathbb{N}^n$ denotará el monoide libre conmutativo con n generadores $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$. Los elementos de $\mathbb{N}^n$, que llamaremos usualmente *multi-índices*, estarán representados por vectores $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con componentes enteras no negativas, siendo la operación del monoide la adición usual de vectores. De esta forma, los generadores $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ son los vectores de la base canónica. Aunque haremos uso de monoides de diferentes dimensiones, la notación para sus generadores no variará, ya que el contexto no deja dudas en cada caso.

Una relación de orden total $\preceq$ en $\mathbb{N}^n$ es un *orden admisible* si $\alpha+\gamma \preceq \beta+\gamma$, siempre que $\alpha \preceq \beta$ para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ y $0 \preceq \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. Una observación fundamental es que, por el Lema de Dickson, todo orden admisible hace de $\mathbb{N}^n$ un conjunto bien ordenado. Aunque el único orden admisible sobre $\mathbb{N}$ es el usual, la abundancia de órdenes admisibles par $n > 1$ está garantizada por el hecho de que hay una cantidad no numerable de ellos.

A partir de este momento, K designará un anillo conmutativo y $\mathbf{k}$ un cuerpo (conmutativo).

Definición 1 *Una* $(\mathbb{N}^n, \preceq)$–filtración *sobre una K–álgebra R es una familia de K–submódulos $F(R) = \{F_\alpha(R) \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ de R satisfaciendo los siguientes axiomas:*
1. Si $\alpha \preceq \beta$, entonces $F_\alpha(R) \subseteq F_\beta(R)$.
2. Para cualesquiera $\gamma, \delta \in \mathbb{N}^n$, se tiene $F_\gamma(R)F_\delta(R) \subseteq F_{\gamma+\delta}(R)$.
3. $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^n} F_\alpha(R) = R$.
4. $1 \in F_0(R)$.

Cuando $n = 1$, la anterior definición coincide, exactamente, con la definición usual de filtración positiva. Al igual que en el caso de filtraciones, tenemos la noción de módulos multi-filtrado.

Definición 2 *Supongamos dada una $(\mathbb{N}^n, \preceq)$–filtración $F(R)$ sobre R y sea M un R–módulo por la izquierda. Una $(\mathbb{N}^n, \preceq)$–filtración $F(M)$ sobre M es una familia $F(M) = \{F_\alpha(M) \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ de K–submódulos de M satisfaciendo las siguientes condiciones:*
1. Si $\alpha \preceq \beta$, entonces $F_\alpha(M) \subseteq F_\beta(M)$.
2. Para cualesquiera $\gamma, \delta \in \mathbb{N}^n$, se tiene que $F_\gamma(R)F_\delta(M) \subseteq F_{\gamma+\delta}(M)$.
3. $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^n} F_\alpha(M) = M$.

La noción de álgebra y módulo graduado asociado a los respectivos objetos filtrados será fundamental para nosotros. La construcción es bastante natural si escribimos para cada $\gamma \in \mathbb{N}^n$,

$$F_\gamma^-(M) = \bigcup_{\gamma' \prec \gamma} F_{\gamma'}(M)$$

para un módulo multi-filtrado M (entendemos que $F_0^-(M) = \{0\}$). Consideremos el K–módulo

$$G_\gamma(M) = \frac{F_\gamma(M)}{F_\gamma^-(M)}$$

y definamos el K–módulo $\mathbb{N}^n$–graduado

$$G(M) = \oplus_{\gamma \in \mathbb{N}^n} G_\gamma(M)$$

Para $r + F_\gamma^-(R) \in G_\gamma(R)$ y $m + F_\delta^-(M) \in G_\delta(M)$, definamos

$$(r + F_\gamma^-(R))(m + F_\delta^-(M)) = rm + F_{\gamma+\delta}^-(M)$$

Si $M = R$, entonces tenemos un producto en $G(R)$ que lo hace un álgebra $\mathbb{N}^n$–graduada sobre K. Además, $G(M)$ se convierte así en un $G(R)$–módulo por la izquierda $\mathbb{N}^n$–graduado. Llamaremos a $G(R)$ (resp. a $G(M)$), *álgebra (resp. módulo) graduado asociado.* Cuando sea necesario, subrayaremos la dependencia de esta construcción con respecto de la multi-filtración usando la notación $G^F(R)$ o $G^F(M)$.

Íntimamente ligado a la noción de módulo graduado asociado se encuentra el concepto de multi-grado de un elemento de M. Concretamente, dado $m \in M$, llamamos *multi-grado* de $0 \neq m \in M$, notación $\mathrm{mdeg}_F(m)$, al mínimo (con respecto de $\preceq$) de los multi-índices $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tales que $m \in F_\alpha(M)$. Es de reseñar que $m + F^-_{\mathrm{mdeg}_F(m)}(M)$ es un elemento homogéneo de grado $\mathrm{mdeg}_F(m)$ de $G(M)$.

El primer resultado esperanzador sobre la utilidad del método de las multi-filtraciones es el siguiente (ver [3, Theorem 1.5] para su (sencilla) demostración).

Teorema 3 *(Teorema de la Base de Hilbert) Sea R un anillo multi-filtrado tal que $G(R)$ es noetheriano por la izquierda. Entonces R es noetheriano por la izquierda.*

Otro resultado motivador para intentar dotar de multi-filtraciones a las álgebras de manera que el álgebra multi-graduada asociada sea sencilla es el siguiente (ver [3, Theorem 2.8]).

Teorema 4 *Sea M un módulo por la izquierda multi-filtrado sobre un álgebra multi-filtrada R. Supongamos que $G(R)$ es un álgebra finitamente generada y que $G(M)$ es un $G(R)$–módulo por la izquierda finitamente generado. Entonces*

$$\mathrm{GKdim}({}_RM) \geqslant \mathrm{GKdim}({}_{G(R)}G(M))$$

Si, además, las mullti-filtraciones son finito-dimensionales, entonces

$$\mathrm{GKdim}({}_RM) = \mathrm{GKdim}({}_{G(R)}G(M))$$

Este último resultado es fundamental para obtener la exactitud de la dimensión de Gelfand-Kirillov en una amplia clase de álgebras (ver [3, Theorem 2.10]).

3 Multi-filtraciones y extensiones acotadas

Consideremos monoides ordenados $(\mathbb{N}^m, \preceq_1)$, $(\mathbb{N}^s, \preceq_2)$ y $(\mathbb{N}^n, \preceq)$, con $\preceq_1, \preceq_2$ y $\preceq$ órdenes admisibles, y morfismos de monoides ordenados $\varphi : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ y $\psi : \mathbb{N}^s \to \mathbb{N}^n$. Sea $A \subseteq B$ una extensión de K–álgebras, para K un anillo conmutativo verificando las siguientes condiciones:

(EA1) La K–álgebra A está dotada de una $(\mathbb{N}^m, \preceq_1)$–filtración $F = \{F_\alpha(A) \mid \alpha \in \mathbb{N}^m\}$.

(EA2) La K–álgebra B está generada por A junto con una cantidad finita de elementos $x_1, \ldots, x_s \in B$.

(EA3) Para cada $i = 1, \ldots, s$ y cada $\alpha \in \mathbb{N}^m$ se tiene que

$$x_i F_\alpha(A) \subseteq F_\alpha(A) x_i + \sum_{\varphi(\gamma_1)+\psi(\gamma_2) \prec \varphi(\alpha)+\psi(\epsilon_i)} F_{\gamma_1}(A) \mathbf{x}^{\gamma_2}$$

(EA4) Para cada $1 \leqslant i < j \leqslant s$ existe $q_{ji} \in F_0(A)$ tal que

$$x_j x_i - q_{ji} x_i x_j \in \sum_{\varphi(\gamma_1)+\psi(\gamma_2) \prec \psi(\epsilon_i+\epsilon_j)} F_{\gamma_1}(A) \mathbf{x}^{\gamma_2}$$

Definición 5 *Diremos que la B es una* extensión (φ, ψ)–acotada por la izquierda *del álgebra multi-filtrada A cuando las condiciones (EA1), (EA2), (EA3) y (EA4) son satisfechas.*

En la Definición 5 se admite el caso $m = 0$, entendiendo que $\mathbb{N}^0$ es el semigrupo trivial y la filtración sobre A es trivial (si se quiere, A no se supone en tal caso dotado de filtración alguna). En tal caso, $\varphi = 0$. Destacaremos dos casos particulares de extensiones $(0, \psi)$–acotadas por la izquierda.

Definición 6 *Cuando $m = 0$ y $s = n$ en la Definición 5, $\psi = Id_{\mathbb{N}^n}$ y $\preceq_2 = \preceq$, entonces la extensión B se llamará una* extensión $\preceq$–acotada por la izquierda *de A. Las condiciones (EA3) y (EA4) se escriben entonces como*

1. Para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene que

$$x_i A \subseteq A x_i + \sum_{\gamma \prec \epsilon_i} A \mathbf{x}^\gamma$$

2. Para cada $1 \leqslant i < j \leqslant n$ existe $q_{ji} \in A$ tal que

$$x_j x_i - q_{ji} x_i x_j \in \sum_{\gamma \prec \epsilon_i + \epsilon_j} A \mathbf{x}^\gamma$$

En el caso de que $q_{ji} \in U(A)$, el grupo de unidades de A, para todo $1 \leqslant i < j \leqslant s$, diremos que B es una extensión cuántica *$\preceq$–acotada de A. Observemos que si $A \subseteq Cen(B)$ (por ejemplo, si $A = K$), entonces la única condición relevante es la segunda.*

Definición 7 *Si tomamos $m = 0$ y $n = 1$ en la Definición 5, entonces ψ proporciona el vector $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_s) \in \mathbb{N}^s$ dado por $w_i = \psi(\epsilon_i)$ para $i = 1, \dots s$. En tal caso, $\varphi = \langle \mathbf{w}, - \rangle$, donde $\langle -, - \rangle$ denota el producto escalar usual, y, para un monomio estándar $\mathbf{x}^\gamma$, $\psi(\gamma) = \langle \mathbf{w}, \gamma \rangle = w_1\gamma_1 + \dots + w_s\gamma_s$ es su grado total $\mathbf{w}$–ponderado. Las condiciones (EA3) y (EA4) se escriben entonces como*
1. Para cada $i = 1, \dots, s$ se tiene que

$$x_i A \subseteq A x_i + \sum_{\langle \mathbf{w}, \gamma \rangle < w_i} A \mathbf{x}^\gamma$$

2. Para cada $1 \leqslant i < j \leqslant s$ existe $q_{ji} \in A$ tal que

$$x_j x_i - q_{ji} x_i x_j \in \sum_{\langle \mathbf{w}, \gamma \rangle < w_i + w_j} A \mathbf{x}^\gamma$$

Observemos que el papel del orden $\preceq_2$ se torna, en este caso, un tanto irrelevante puesto que, dado cualquier $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^s$, siempre podemos escoger $\preceq_2 = \preceq_{\mathbf{w}}$ y $\psi = \langle \mathbf{w}, - \rangle$. En este caso diremos que B es una extensión $\mathbf{w}$–acotada por la izquierda *de A.*

Nuestro primer objetivo es demostrar la siguiente proposición.

Proposición 8 *Sea $A \subseteq B$ una extensión (φ, ψ)–acotada. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definamos el K–submódulo de B*

$$\mathfrak{F}_\alpha(B) = \sum_{\varphi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2) \preceq \alpha} F_{\alpha_1}(A) \mathbf{x}^{\alpha_2}$$

Entonces $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_\alpha(B) \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ es una $(\mathbb{N}^n, \preceq)$–filtración sobre B.

La clave para la demostración de la Proposición 8 reside en un lema técnico. Introducimos para ello el orden admisible $\preceq'$ sobre $\mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^n$ proporcionado por la siguiente definición

$$(\lambda, \nu) \preceq' (\lambda', \nu') \Leftrightarrow \begin{cases} \nu \prec \nu' \\ \text{o} \\ \nu = \nu' \qquad \text{y} \qquad \lambda \preceq_2 \lambda' \end{cases} \tag{1}$$

para $(\lambda, \nu), (\lambda', \nu') \in \mathbb{N}^s \times \mathbb{N}^n$.
La notación a^β indicará un elemento de A que pertenece a $F_\beta(A)$, para $\beta \in \mathbb{N}^m$.

Lema 9 *Dados $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^s$ escribamos $\alpha = \varphi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2)$ y $\beta = \varphi(\beta_1) + \psi(\beta_2)$. Para cualesquiera elementos*

$$r = r^{\alpha_1} \mathbf{x}^{\alpha_2} + \sum_{(\mu_2, \varphi(\mu_1) + \psi(\mu_2)) \prec' (\alpha_2, \alpha)} r^{\mu_1} \mathbf{x}^{\mu_2}$$

y

$$s = s^{\beta_1} \mathbf{x}^{\beta_2} + \sum_{(\nu_2, \varphi(\nu_1) + \psi(\nu_2)) \prec' (\beta_2, \beta)} s^{\nu_1} \mathbf{x}^{\nu_2}$$

entonces

$$rs = t^{\alpha_1+\beta_1}\mathbf{x}^{\alpha_2+\beta_2} + \sum_{(\omega_2,\varphi(\omega_1)+\psi(\omega_2))\prec'(\alpha_2+\beta_2,\alpha+\beta)} t^{\omega_1}\mathbf{x}^{\omega_2}.$$

Una vez dotada la K–álgebra B de la multi-filtración $\mathfrak{F}$, vamos a estudiar la relación de su álgebra graduada asociada $G^{\mathfrak{F}}(B)$ con $G^F(A)$. Para ello, supondremos que el homomorfismo de monoides ordenados $\varphi : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ es una aplicación inyectiva. Esto permite demostrar que $F^-_\alpha(A) \subseteq \mathfrak{F}^-_{\varphi(\alpha)}(B)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$. De aquí, la aplicación $f : G^F(A) \to G^{\mathfrak{F}}(B)$ definida sobre componentes homogéneas por

$$f(a + F^-_\alpha(A)) = a + \mathfrak{F}^-_{\varphi(\alpha)}(B) \qquad (a + F^-_\alpha(A) \in G^F_\alpha(R))$$

es un homomorfismo φ–graduado de K–álgebras. Por tanto, la imagen de f es una subálgebra $\mathbb{N}^n$–graduada de $G^{\mathfrak{F}}(B)$, que denotaremos por $G(A)$, donde, para cada $\beta \in \mathbb{N}^n$, la componente β–homogénea viene dada por

$$G_\beta(A) = \begin{cases} \frac{F_\alpha(A)+\mathfrak{F}^-_\beta(B)}{\mathfrak{F}^-_\beta(B)} & \text{si } \beta = \varphi(\alpha) \\ 0 & \text{si } \beta \notin \varphi(\mathbb{N}^m) \end{cases}$$

Teorema 10 *La K–álgebra $G^{\mathfrak{F}}(B)$ está generada por $G(A)$ y los elementos homogéneos $y_1, \ldots, y_s$, donde $y_i = x_i + \mathfrak{F}^-_{\psi(\epsilon_i)}(B)$ para $i = 1, \ldots, s$. Además, se verifican los siguientes enunciados:*
1. $G^{\mathfrak{F}}_\alpha(B) = \sum_{\varphi(\alpha_1)+\psi(\alpha_2)=\alpha} G_{\varphi(\alpha_1)}(A)\mathbf{y}^{\alpha_2} \qquad (\alpha \in \mathbb{N}^n)$,
2. $y_i G_{\varphi(\gamma)}(A) \subseteq G_{\varphi(\gamma)}(A) y_i \qquad (\gamma \in \mathbb{N}^m, i = 1, \ldots, s)$,
3. $y_j y_i = q_{ji} y_i y_j \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant s)$.

Teorema 11 *Sea B una extensión (φ, ψ)–acotada de A. Entonces ${}_AB$ es libre con base $\{\mathbf{x}^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^s\}$ si, y sólo si, $f : G^F(A) \to G^{\mathfrak{F}}(B)$ es inyectivo y ${}_{G^F(A)}G^{\mathfrak{F}}(B)$ es libre con base $\{\mathbf{y}^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^s\}$. En tal caso, $G^{\mathfrak{F}}(B)$ es una extensión iterada de Ore*

$$G^{\mathfrak{F}}(B) = G^F(A)[y_1; \sigma_1] \cdots [y_s; \sigma_s]$$

donde los endomorfismos σ_i $(i = 1, \ldots, s)$ verifican que $\sigma_i(G^F_\gamma(A)) \subseteq G^F_\gamma(A)$ para todo $\gamma \in \mathbb{N}^m$ y $\sigma_j(y_i) = q_{ji} y_i$ para $1 \leqslant i < j \leqslant s$.

4 Re-filtración y regularidad de los grupos cuánticos.

Los métodos expuestos en las anteriores secciones permiten obtener la regularidad de Auslander y la propiedad de Cohen-Macaulay para anillos multi-filtrados con multi-graduados asociados adecuados. Los resultados de esta sección aparecerán publicados en [6]. Comenzamos con un teorema de re-filtración.

Teorema 12 *Sea R una K–álgebra dotada de una $(\mathbb{N}^n, \preceq)$–filtración*

$$F = \{F_\alpha(R) \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\},$$

donde $\preceq$ es un orden admisible cualquiera sobre $\mathbb{N}^n$. Supongamos que el álgebra $\mathbb{N}^n$–graduada asociada es una extensión iterada de Ore

$$G^F(R) = \Lambda[y_1;\sigma_1]\dots[y_s;\sigma_s]$$

donde $y_1,\dots,y_s$ son elementos homogéneos. Supongamos que

(a) $\Lambda = F_0(R)$ es noetheriano por la izquierda;

(b) para cada $1 \leqslant i < j \leqslant s$ existe $q_{ji} \in \Lambda$ tal que $y_i y_i = q_{ji} y_i y_j$;

(c) $F_\alpha(R)$ es un Λ–módulo por la izquierda finitamente generado para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Entonces R puede ser dotada de una $\mathbb{N}$–filtración $\{R_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con R_n verificando

1. *$R_0 = \Lambda$;*
2. *R_n es un Λ–módulo por la izquierda finitamente generado para todo $n \in \mathbb{N}$;*
3. *$gr(R) \cong \Lambda[y_1;\sigma_1]\dots[y_s;\sigma_s]$.*

Corolario 13 *Supongamos que R está en las condiciones del Teorema 12. Supongamos, además, que q_{ji} es una unidad para $1 \leqslant i < j \leqslant s$ y que σ_i es un automorfismo sobre Λ para $i = 1,\dots,s$. Si Λ es regular Auslander entonces R es regular Auslander.*

El resultado principal de esta sección es:

Teorema 14 *Sea R una $\mathbf{k}$–álgebra dotada de una $(\mathbb{N}^n,\preceq)$–filtración $\mathcal{F} = \{F_\alpha(R) \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ verificando las hipótesis del Teorema 12. Supongamos, además, que*

1. *Los escalares q_{ji} son unidades y los endomorfismos $\sigma_i : \Lambda \to \Lambda$ son automorfismos.*
2. *Λ está generado por elementos $z_1,\dots,z_t$ tales que la filtración estándar Λ_n obtenida al asignar grado 1 a cada z_i satisface que $gr(\Lambda) = \oplus_{n\geqslant 0}\Lambda_n/\Lambda_{n-1}$ es un álgebra finitamente presentada y noetheriana.*
3. *$\sigma_i(\Lambda_1) \subseteq \Lambda_1$, para $i = 1,\dots,s$.*
4. *$gr(\Lambda)$ o bien $\Lambda[y_1;\sigma_1]\cdots[y_s;\sigma_s]$ es un álgebra regular Auslander y Cohen-Macaulay.*

Entonces R es un álgebra regular Auslander y Cohen-Macaulay.

Como consecuencia del anterior Teorema, en combinación con resultados de McConnell y Stafford ([10]) y DeConcini y Procesi ([2]), obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 15 *El álgebra envolvente cuantizada $U_q(C)$ sobre $\mathbb{C}(q)$ de una matriz de Cartan C es regular Auslander y Cohen-Macaulay.*

Referencias

[1] J.-E. Björk, *The Auslander condition on noetherian rings*, Sém. d'Algèbre P. Dubreil et M.-P. Malliavin 1987–1988 (M.-P. Malliavin, ed.), Lecture Notes in Mathematics, no. 1404, Springer-Verlag, 1989, pp. 137–173.

[2] C. De Concini and C. Procesi, *Quantum groups*, D-Modules, Representation Theory and Quantum groups (G. Zampieri and A. D'Agnolo, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1565, Springer, 1993, pp. 31–140.

[3] J. Gómez-Torrecillas, *Gelfand–Kirillov dimension of multi-filtered algebras.*, P. Edinburgh Math. Soc (1999), 155–168.

[4] ———, *Re-filtración y propiedades de regularidad de anillos multi-filtrados*, Universidad de Granada, septiembre 2000.

[5] J. Gómez-Torrecillas, P. Jara, and L. Merino, *Locally finite representations of algebras*, Commun. Algebra **24(14)** (1996), 4581–4601.

[6] J. Gómez-Torrecillas and F. J. Lobillo, *Auslander Regular and Cohen-Macaulay Quantum Groups*, Algebras and Representation Theory, to appear.

[7] K. R. Goodearl and T. H. Lenagan, *Catenarity in quantum algebras*, J. Pure Appl. Algebra **111** (1996), 123–142.

[8] G.R. Krause and T.H. Lenagan, *Growth of algebras and Gelfand–Kirillov dimension*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 22, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2000.

[9] T. Levasseur, *Some properties of noncommutative regular graded rings*, Glasgow Math. J. (1992), 277–300.

[10] J.C. McConnell and J.T. Stafford, *Gelfand-Kirillov dimension and associated graded modules*, J. Algebra **125** (1989), 197–214.