La Raíz cuadrada de 2 no es racional

03/02/2007

$\sqrt{2}$ es la medida exacta de la diagonal de un cuadrado cuyo lado midiera 1. Dicho número no puede ser un número racional. Hallaremos la certeza de ello razonando por *reducción al absurdo*.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional: $\sqrt{2} = p/q$, donde p y q son números enteros. Aunque pueden ser tan grandes como queramos, podemos exigir desde luego que no tengan factores comunes. En particular estaremos exigiendo que p y q no sean ambos pares, es decir, múltiplos enteros de 2.

Si, como hemos supuesto, $\sqrt{2} = p/q$, entonces $2 = p^2/q^2$. Multiplicando la igualdad por q^2 llegamos a:

$$2q^2 = p^2 \tag{1}$$

De ello se deduce claramente que p^2 es un número par; pero el cuadrado de cualquier número impar es también impar. Por lo tanto, también p debe ser par. Así pues, existirá algún número entero s tal que $p = 2s$. Sustituyendo este valor de p en la ecuación (1) obtenemos:

$$2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2 \tag{2}$$

Dividiendo ambos miembros de (2) por 2, obtenemos:

$$q^2 = 2s^2$$

Por lo tanto q^2 es también un número par y se deduce por el mismo argumento utilizado con p que q es un número par. Pero si p y q son ambos pares, estaremos en contradicción con nuestro supuesto inicial. Como la exigencia de que la fracción p/q sea irreducible, es decir, que no haya factores en común entre los de p y los de q, es viable; la conclusión es que el supuesto inicial es imposible. Así, $\sqrt{2}$ no puede ser una fracción. De hecho, $\sqrt{2} = 1,4142135....$

Los pitagóricos conocieron este hecho y, por alguna razón, se sintieron obligados a ocultarlo.