Inducción

trabajo colectivo

ETSIIT

22 de febrero de 2011

1. inducción
   - término general
   - propiedades generales

Tabla de Contenidos

Inducción

Clave: A veces se nos pide calcular el término general de la suma de los n primeros términos de una sucesión.

Podemos usar las órdenes `sum` y `simpsum`, por separado o combinadas.

Como ejemplo:

- Se nos podría pedir el término general en función de n de la sucesión: $1, 1+2, 1+2+3, \ldots, 1+2+3+\cdots+n, \ldots$
- Conjeturaríamos que la respuesta es $\left\{\frac{n^2+n}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$
- y pasaríamos a demostrar por inducción que estamos en lo cierto.

Inducción

Clave: A veces se nos pide calcular el término general de la suma de los n primeros términos de una sucesión.

Podemos usar las órdenes `sum` y `simpsum`, por separado o combinadas.

Como ejemplo:

- Se nos podría pedir el término general en función de n de la sucesión: $1, 1+2, 1+2+3, \ldots, 1+2+3+\cdots+n, \ldots$
- Conjeturaríamos que la respuesta es $\left\{\frac{n^2+n}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$
- y pasaríamos a demostrar por inducción que estamos en lo cierto.

Inducción

Clave: A veces se nos pide calcular el término general de la suma de los n primeros términos de una sucesión.

Podemos usar las órdenes `sum` y `simpsum`, por separado o combinadas.

Como ejemplo:

- Se nos podría pedir el término general en función de n de la sucesión: $1, 1+2, 1+2+3, \ldots, 1+2+3+\cdots+n, \ldots$
- Conjeturaríamos que la respuesta es $\left\{\frac{n^2+n}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$
- y pasaríamos a demostrar por inducción que estamos en lo cierto.

Inducción

Clave: A veces se nos pide calcular el término general de la suma de los n primeros términos de una sucesión.

Podemos usar las órdenes `sum` y `simpsum`, por separado o combinadas.

Como ejemplo:

- Se nos podría pedir el término general en función de n de la sucesión: $1, 1+2,\ 1+2+3, \ldots, 1+2+3+\cdots+n, \ldots$
- Conjeturaríamos que la respuesta es $\left\{\frac{n^2+n}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$
- y pasaríamos a demostrar por inducción que estamos en lo cierto.

Inducción

Considerar el siguiente diálogo:

- $(\%\mathrm{ixx})\ \mathrm{sum}(\mathrm{i},\mathrm{i},1,\mathrm{n});$
  $(\%\mathrm{oxx})\ \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{i}$
- $(\%\mathrm{ixx})\ \mathrm{sum}(\mathrm{i},\mathrm{i},1,\mathrm{n}),\ \mathrm{simpsum};$
  $(\%\mathrm{oxx})\ \frac{\mathrm{n}^2+\mathrm{n}}{2}$
- Ejercicio: repetir todo lo anterior para:
  1. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$
  2. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$
  3. $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)$
  4. $\sum_{i=1}^{n} (1/2^i)$

Inducción

Considerar el siguiente diálogo:

- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n);$
  (%oxx) $\sum_{i=1}^{n} i$
- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n), \ \mathrm{simpsum};$
  (%oxx) $\frac{n^2+n}{2}$
- Ejercicio: repetir todo lo anterior para:
  1. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$
  2. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$
  3. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$
  4. $\sum_{i=1}^{n}(1/2^i)$

Inducción

Considerar el siguiente diálogo:

- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n);$
  (%oxx) $\sum_{i=1}^{n} i$
- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n),\ \mathrm{simpsum};$
  (%oxx) $\frac{n^2+n}{2}$
- Ejercicio: repetir todo lo anterior para:
  1. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$
  2. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$
  3. $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1)$
  4. $\sum_{i=1}^{n}(1/2^i)$

Inducción

Considerar el siguiente diálogo:

- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n);$
  (%oxx) $\sum_{i=1}^{n} i$
- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n),\ \mathrm{simpsum};$
  (%oxx) $\frac{n^2+n}{2}$
- Ejercicio: repetir todo lo anterior para:
  1. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$
  2. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$
  3. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$
  4. $\sum_{i=1}^{n}(1/2^i)$

Inducción

Considerar el siguiente diálogo:

- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n);$
  (%oxx) $\sum_{i=1}^{n} i$
- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n),\ \mathrm{simpsum};$
  (%oxx) $\frac{n^2+n}{2}$
- Ejercicio: repetir todo lo anterior para:
  1. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$
  2. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$
  3. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$
  4. $\sum_{i=1}^{n}(1/2^i)$

Inducción

Considerar el siguiente diálogo:

- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n);$
  (%oxx) $\sum_{i=1}^{n} i$
- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n),\ \mathrm{simpsum};$
  (%oxx) $\frac{n^2+n}{2}$
- Ejercicio: repetir todo lo anterior para:
  1. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$
  2. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$
  3. $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$
  4. $\sum_{i=1}^{n} (1/2^i)$

Inducción

Considerar el siguiente diálogo:

- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n);$
  (%oxx) $\sum_{i=1}^{n} i$
- (%ixx) $\mathrm{sum}(i, i, 1, n), \ \mathrm{simpsum};$
  (%oxx) $\frac{n^2+n}{2}$
- Ejercicio: repetir todo lo anterior para:
  1. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$
  2. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$
  3. $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1)$
  4. $\sum_{i=1}^{n}(1/2^i)$

Inducción

Clave: Lo dicho no es suficiente a veces.

Pues es necesario cargar previamente un paquete.

Considerar el siguiente diálogo:

- $(\%ixx)\ sum(1/((2*i-1)*(2*i+1)), i, 1, n),\ simpsum;$
  $(\%oxx)\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$
- $(\%ixx)$ load (simplify_sum)
  $(\%\ oxx)$ –cierto mensaje de advertencia sobre lcm–
  $(\%ixx)$ simplify_sum(%)
  $(\%oxx)\ \frac{n}{2n+1}$

Inducción

Clave: Lo dicho no es suficiente a veces.

Pues es necesario cargar previamente un paquete.

Considerar el siguiente diálogo:

- (%ixx) $\mathrm{sum}(1/((2*\mathrm{i}-1)*(2*\mathrm{i}+1)),\mathrm{i},1,\mathrm{n}),\ \mathrm{simpsum};$
  (%oxx) $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{(2\mathrm{i}-1)(2\mathrm{i}+1)}$
- (%ixx) load (simplify_sum)
  (% oxx) –cierto mensaje de advertencia sobre lcm–
  (%ixx) simplify_sum(%)
  (%oxx) $\frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}+1}$

Inducción

Clave: Lo dicho no es suficiente a veces.

Pues es necesario cargar previamente un paquete.

Considerar el siguiente diálogo:

- (%ixx) $\mathrm{sum}(1/((2*\mathrm{i}-1)*(2*\mathrm{i}+1)),\mathrm{i},1,\mathrm{n}),\ \mathrm{simpsum};$
  (%oxx) $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{(2\mathrm{i}-1)(2\mathrm{i}+1)}$
- (%ixx) load (simplify_sum)
  (% oxx) –cierto mensaje de advertencia sobre lcm–
  (%ixx) simplify_sum(%)
  (%oxx) $\frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}+1}$

Inducción

Clave: También se pide a veces demostrar que una propiedad vale para todo número natural.

Podemos usar la orden `sec_a:makelist`.

Como ejemplo:

- Se nos podría preguntar si $7^n - 1$ es múltiplo de 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Nada sustituye a la demostración, pero podemos hacer un tanteo que nos guíe en la respuesta.
- si la afirmación es cierta para suficientes números naturales n, podemos pensar en demostrar el hecho para todo n por inducción.

Inducción

Clave: También se pide a veces demostrar que una propiedad vale para todo número natural.

Podemos usar la orden `sec_a:makelist`.

Como ejemplo:

- Se nos podría preguntar si $7^n - 1$ es múltiplo de 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Nada sustituye a la demostración, pero podemos hacer un tanteo que nos guíe en la respuesta.
- si la afirmación es cierta para suficientes números naturales n, podemos pensar en demostrar el hecho para todo n por inducción.

Inducción

Clave: También se pide a veces demostrar que una propiedad vale para todo número natural.

Podemos usar la orden `sec_a:makelist`.

Como ejemplo:

- Se nos podría preguntar si $7^n - 1$ es múltiplo de 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Nada sustituye a la demostración, pero podemos hacer un tanteo que nos guíe en la respuesta.
- si la afirmación es cierta para suficientes números naturales n, podemos pensar en demostrar el hecho para todo n por inducción.

Inducción

Clave: También se pide a veces demostrar que una propiedad vale para todo número natural.

Podemos usar la orden `sec_a:makelist`.

Como ejemplo:

- Se nos podría preguntar si $7^n - 1$ es múltiplo de 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Nada sustituye a la demostración, pero podemos hacer un tanteo que nos guíe en la respuesta.
- si la afirmación es cierta para suficientes números naturales n, podemos pensar en demostrar el hecho para todo n por inducción.

Inducción

Considerar lo siguiente:

- (%ixx) sec_a : makelist$((7^n - 1)/6, n, 0, 30)$;
  (%oxx)[0, 1, 8, 57, 400, 2801, 19608, 137257, 960800, 6725601, 47079208, 329554457, 2306881200, 16148168401, 113037178808, 791260251657, 5538821761600, 38771752331201, 271402266318408, 1899815864228857, 13298711049602000, 93090977347214001, 651636841430498008, 4561457890013486057, 31930205230094402400, 223511436610660816801, 1564580056274625717608, 10952060393922380023257, 76664422757456660162800, 536650959302196621139601, 3756556715115376347977208]

Inducción

Considerar lo siguiente:

- Al ser la anterior una lista de enteros, cabría conjeturar que puede valer la propiedad para todo n.
- Al ser entero el primer número de la lista, el resultado vale para el valor 0 de n.
- Se tiene:
  $(\%ixx)\ \mathrm{rat}(7^{(n+1)} - 1 - (7^n - 1));$
  $(\%oxx)/R/\ 6 * 7^n$
- y, claro, si a y $b - a$ son múltiplos de k entonces b lo es.

Inducción

Considerar lo siguiente:

- Al ser la anterior una lista de enteros, cabría conjeturar que puede valer la propiedad para todo n.
- Al ser entero el primer número de la lista, el resultado vale para el valor 0 de n.
- Se tiene:
  $(\%\mathrm{ixx})\ \mathrm{rat}(7^{(n+1)} - 1 - (7^n - 1));$
  $(\%\mathrm{oxx})/R/\ 6 * 7^n$
- y, claro, si a y $b - a$ son múltiplos de k entonces b lo es.

Inducción

Considerar lo siguiente:

- Al ser la anterior una lista de enteros, cabría conjeturar que puede valer la propiedad para todo *n*.
- Al ser entero el primer número de la lista, el resultado vale para el valor 0 de *n*.
- Se tiene:
  $(\%ixx)\ \mathrm{rat}(7^{(n+1)} - 1 - (7^n - 1));$
  $(\%oxx)/R/\ 6 * 7^n$
- y, claro, si a y $b - a$ son múltiplos de k entonces b lo es.

Inducción

Considerar lo siguiente:

- Al ser la anterior una lista de enteros, cabría conjeturar que puede valer la propiedad para todo n.
- Al ser entero el primer número de la lista, el resultado vale para el valor 0 de n.
- Se tiene:
  $(\%\mathrm{ixx})\ \mathrm{rat}(7^{(n+1)} - 1 - (7^n - 1));$
  $(\%\mathrm{oxx})/\mathrm{R}/\ 6 * 7^n$
- y, claro, si a y $b - a$ son múltiplos de k entonces b lo es.

Inducción

Así pues:

- 0 es múltiplo de 6
- y de suponer que $7^n - 1$ es múltiplo de 6, el sistema nos informa que $7^{n+1} - 1$ también lo es.
- Conclusión: por el principio de inducción $7^n - 1$ es múltiplo de 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Inducción

Así pues:

- 0 es múltiplo de 6
- y de suponer que $7^n - 1$ es múltiplo de 6, el sistema nos informa que $7^{n+1} - 1$ también lo es.
- Conclusión: por el principio de inducción $7^n - 1$ es múltiplo de 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Inducción

Así pues:

- 0 es múltiplo de 6
- y de suponer que $7^n - 1$ es múltiplo de 6, el sistema nos informa que $7^{n+1} - 1$ también lo es.
- Conclusión: por el principio de inducción $7^n - 1$ es múltiplo de 6, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio

Ejercicio: Demuestre por inducción,

ayudándose del sistema, que para todo $n \in \mathbb{N}$:

- $7^{2n} + 16n - 1$ es múltiplo de 64 y que
- $2^n \geq 2n + 1$.

Ejercicio

Ejercicio: Demuestre por inducción,

ayudándose del sistema, que para todo $n \in \mathbb{N}$:

- $7^{2n} + 16n - 1$ es múltiplo de 64 y que
- $2^n \geq 2n + 1$.

Ejercicio

Ejercicio: Demuestre por inducción,

ayudándose del sistema, que para todo $n \in \mathbb{N}$:

- $7^{2n} + 16n - 1$ es múltiplo de 64 y que
- $2^n \geq 2n + 1$.

Argumento directo

Clave: A veces cabe un razonamiento directo.

En este caso nos serviremos de la orden `divide` para conjeturar que $a^{2n} - b^{2n}$ es divisible por $a + b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos:

- $\%ixx\ \mathrm{divide}(a^2 - b^2, a + b)$
  $\%oxx\ [a - b, 0]$
- $\%ixx\ \mathrm{divide}(a^4 - b^4, a + b)$
  $\%oxx\ [-b^3 + ab^2 - a^2b + a^3, 0]$

Argumento directo

Clave: A veces cabe un razonamiento directo.

En este caso nos serviremos de la orden `divide` para conjeturar que $a^{2n} - b^{2n}$ es divisible por $a + b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos:

- $\%\mathrm{ixx}\ \mathrm{divide}(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2, \mathrm{a} + \mathrm{b})$
  $\%\mathrm{oxx}\ [\mathrm{a} - \mathrm{b}, 0]$
- $\%\mathrm{ixx}\ \mathrm{divide}(\mathrm{a}^4 - \mathrm{b}^4, \mathrm{a} + \mathrm{b})$
  $\%\mathrm{oxx}\ [-\mathrm{b}^3 + \mathrm{ab}^2 - \mathrm{a}^2\mathrm{b} + \mathrm{a}^3, 0]$

Argumento directo

Clave: A veces cabe un razonamiento directo.

En este caso nos serviremos de la orden `divide` para conjeturar que $a^{2n} - b^{2n}$ es divisible por $a + b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos:

- $\%\mathrm{ixx}\ \mathrm{divide}(a^2 - b^2, a + b)$
  $\%\mathrm{oxx}\ [a - b, 0]$
- $\%\mathrm{ixx}\ \mathrm{divide}(a^4 - b^4, a + b)$
  $\%\mathrm{oxx}\ [-b^3 + ab^2 - a^2b + a^3, 0]$

Argumento directo

Así pues:

- $\%ixx\ \mathrm{divide}(a^6 - b^6, a + b)$
  $\%oxx\ [-b^5 + ab^4 - a^2b^3 + a^3b^2 - a^4b + a^5, 0]$
- Y conjeturamos entonces que:

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(-b^{2n-1} + ab^{2n-2} - \cdots - a^{2n-2} + a^{2n-1}) \quad (1)$$

- Ejercicio: Demostrar la igualdad (1).

Argumento directo

Así pues:

- $\%ixx\ \mathrm{divide}(a^6 - b^6, a + b)$
  $\%oxx\ [-b^5 + ab^4 - a^2b^3 + a^3b^2 - a^4b + a^5, 0]$
- Y conjeturamos entonces que:

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(-b^{2n-1} + ab^{2n-2} - \cdots - a^{2n-2} + a^{2n-1}) \quad (1)$$

- Ejercicio: Demostrar la igualdad (1).

Argumento directo

Así pues:

- $\%ixx\ \mathrm{divide}(a^6 - b^6, a + b)$
  $\%oxx\ [-b^5 + ab^4 - a^2b^3 + a^3b^2 - a^4b + a^5, 0]$
- Y conjeturamos entonces que:

$$a^{2n} - b^{2n} = (a+b)(-b^{2n-1} + ab^{2n-2} - \cdots - a^{2n-2} + a^{2n-1}) \quad (1)$$

- Ejercicio: Demostrar la igualdad (1).

Ejercicio

Ejercicio: Hacer como ejercicio, ayudándose del sistema o no, lo propuesto a continuación:

- Hallar el menor entero positivo n_0 para el cual $2^n \leq n!$ (¿existirá?). Tomando ese n_0 como base, demostrar por inducción que la desigualdad es cierta para todo $n \geq n_0$.
- Hallar el valor apropiado de n_0 como base de la inducción en los casos siguientes y demostrar que el enunciado es cierto para todo $n \geq n_0$:

Ejercicio

Ejercicio: Hacer como ejercicio, ayudándose del sistema o no, lo propuesto a continuación:

- Hallar el menor entero positivo n_0 para el cual $2^n \leq n!$ (¿existirá?). Tomando ese n_0 como base, demostrar por inducción que la desigualdad es cierta para todo $n \geq n_0$.
- Hallar el valor apropiado de n_0 como base de la inducción en los casos siguientes y demostrar que el enunciado es cierto para todo $n \geq n_0$:
  1. $0 \leq n^2 + 6n + 8$
  2. $256n^2 \leq n^3$

Ejercicio

Ejercicio: Hacer como ejercicio, ayudándose del sistema o no, lo propuesto a continuación:

- Hallar el menor entero positivo n_0 para el cual $2^n \leq n!$ (¿existirá?). Tomando ese n_0 como base, demostrar por inducción que la desigualdad es cierta para todo $n \geq n_0$.
- Hallar el valor apropiado de n_0 como base de la inducción en los casos siguientes y demostrar que el enunciado es cierto para todo $n \geq n_0$:
  1. $0 \leq n^2 + 6n + 8$
  2. $256n^2 \leq n^3$

Ejercicio

Ejercicio: Hacer como ejercicio, ayudándose del sistema o no, lo propuesto a continuación:

- Hallar el menor entero positivo n_0 para el cual $2^n \leq n!$ (¿existirá?). Tomando ese n_0 como base, demostrar por inducción que la desigualdad es cierta para todo $n \geq n_0$.
- Hallar el valor apropiado de n_0 como base de la inducción en los casos siguientes y demostrar que el enunciado es cierto para todo $n \geq n_0$:
  1. $0 \leq n^2 + 6n + 8$
  2. $256n^2 \leq n^3$

Ejercicio

Ejercicio: Hacer como ejercicio, ayudándose del sistema o no, lo propuesto a continuación:

- Hallar el menor entero positivo n_0 para el cual $2^n \leq n!$ (¿existirá?). Tomando ese n_0 como base, demostrar por inducción que la desigualdad es cierta para todo $n \geq n_0$.
- Hallar el valor apropiado de n_0 como base de la inducción en los casos siguientes y demostrar que el enunciado es cierto para todo $n \geq n_0$:
  1. $0 \leq n^2 + 6n + 8$
  2. $256n^2 \leq n^3$

Argumento directo

Así pues:

- Comprobar que el polinomio $p(x) = x^2 + x + 41$ produce números primos cuando x es un número natural comprendido entre 1 y 30. Puedes usar la orden `factor` que nos da la descomposición en primos de un número natural. ¿Es cierto que $n^2 + n + 41$ es primo para todo número natural n tal que $1 < n$?
- El monje francés Marin Mersenne afirmó en 1644 que los números de la forma $2^n - 1$ son primos para los valores 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 y 257 y no lo son para el resto de números menores que 257. Comprobarlo. ¿Es cierto que los números de la forma $2^p - 1$ son primos para todo número primo p?

Argumento directo

Así pues:

- Comprobar que el polinomio $p(x) = x^2 + x + 41$ produce números primos cuando x es un número natural comprendido entre 1 y 30. Puedes usar la orden `factor` que nos da la descomposición en primos de un número natural. ¿Es cierto que $n^2 + n + 41$ es primo para todo número natural n tal que $1 < n$?
- El monje francés Marin Mersenne afirmó en 1644 que los números de la forma $2^n - 1$ son primos para los valores 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 y 257 y no lo son para el resto de números menores que 257. Comprobarlo. ¿Es cierto que los números de la forma $2^p - 1$ son primos para todo número primo p?

Argumento directo

- Para saber más de los números de Mersenne, consultar la bibliografia y visitar: `primes.utm.edu/glossary/xpage/MersennesConjeture.html`