

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática Aplicada

ESTUDIO CUALITATIVO
DE ECUACIONES DIFERENCIALES
CON TÉRMINO NO LINEAL SINGULAR

TESIS DOCTORAL
Pedro José Torres Villarroya

Granada, 1998

Índice

Capítulo 1. Introducción.	5
Capítulo 2. Dinámica de una ecuación de Liénard con término no lineal monótono.	15
2.1 Preliminares.	15
2.2 Comparación de soluciones.	16
2.3 Convergencia de las soluciones acotadas.	18
2.4 Geometría del conjunto de soluciones acotadas en el futuro.	21
2.5 Un caso particular: ecuación con una singularidad atractiva.	28
2.5.1 Caso disipativo.	34
2.5.2 Caso conservativo.	38
Capítulo 3. Soluciones acotadas en ecuaciones singulares de tipo repulsivo.	41
3.1 Soluciones acotadas en el futuro.	42
3.2 Soluciones acotadas en toda la recta real.	47
3.3 Notas y posibles extensiones.	51
Capítulo 4. Movimiento periódico de un sistema de varias partículas con carga eléctrica.	53
4.1 Movimiento periódico de dos partículas cargadas.	53
4.2 Movimiento periódico de tres partículas con carga del mismo signo.	55
Capítulo 5. Movimiento periódico en presencia de rozamiento no lineal y fricción seca.	63
5.1 La ecuación no singular.	64

5.2	Ecuaciones con singularidades atractivas.	67
5.2.1	Caso de una singularidad.	67
5.2.2	Caso de dos singularidades.	69
5.2.3	Unicidad.	69
5.3	Fricción seca.	70
5.3.1	Fricción seca en la ecuación no singular.	71
5.3.2	Fricción seca en la ecuación singular.	73
5.3.3	Unicidad y estabilidad.	75
5.3.4	Otros modelos de fricción seca.	76
5.4	Algunos resultados adicionales.	80
5.4.1	Un resultado de tipo Landesman-Lazer.	80
5.4.2	No-linealidades oscilatorio-expansivas.	81
5.4.3	Otros ejemplos.	83

Capítulo 6. Multiplicidad de soluciones periódicas para una ecuación de tipo Rayleigh. 85

6.1	$W^{2,1}$ -sub y supersoluciones estrictas.	86
6.2	Fuerzas restauradoras acotadas.	89
6.3	Fuerzas restauradoras acotadas inferiormente.	94

Capítulo 1

Introducción.

El propósito de esta Tesis es el estudio de algunos aspectos cualitativos de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias con una clara interpretación física por medio de herramientas de la Topología adaptadas al Análisis No Lineal. Básicamente, puede decirse que el nexo común entre dichas ecuaciones lo constituye la presencia de algún tipo de “singularidad”, entendiendo como tal la existencia de alguna discontinuidad en el término no lineal, ya sea ésta esencial o de salto.

Como es bien sabido, el uso sistemático de las ecuaciones diferenciales para el estudio de fenómenos físicos comienza en los siglos XVII-XVIII paralelamente a la creación y desarrollo del Cálculo Infinitesimal. Fue clave la publicación en 1687 de los “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” de Isaac Newton, donde se formula la ley que rige el movimiento de una partícula sometida a un campo de fuerzas, universalmente conocida como Segunda Ley de Newton. En un principio se prestó mayor atención a los procesos conservativos, es decir, aquellos donde la energía se mantiene constante, debido a la relevancia de algunos problemas planteados en Mecánica Celeste, que aún en nuestros días presentan grandes incógnitas. La base de estos problemas es la Ley de Gravitación de Newton, que establece que dos cuerpos se atraen entre sí con una fuerza que es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. La fuerza gravitacional es el ejemplo clásico de singularidad, puesto que no está definida en cero y tiende a infinito conforme los cuerpos se aproximan.

Como ejemplo simple de aplicación de estas leyes, consideremos en un espacio 1-dimensional una masa fija en el origen y una partícula de masa unitaria moviéndose a su derecha. Si además consideramos una fuerza externa $p(t)$ actuando sobre la partícula, tenemos una E.D.O. escalar de segundo orden que se puede escribir como

$$x''(t) + \frac{1}{x^\alpha} = p(t). \quad (1.1)$$

Esta ecuación también rige el movimiento de una partícula con carga eléctrica bajo la influencia del campo eléctrico generado por una partícula de carga contraria situada en el origen. Si en cambio estas partículas cargadas son del mismo signo, la fuerza ejercida entre las partículas es repulsiva y la ecuación correspondiente es

$$x''(t) - \frac{1}{x^\alpha} = p(t). \quad (1.2)$$

Se dice que la ecuación (1.1) (resp. (1.2)) presenta una singularidad atractiva (resp. repulsiva) en el origen.

Lógicamente, la naturaleza de la fuerza externa $p(t)$ determinará la dinámica de la ecuación. Cuando $p(t)$ es periódica, cabe citar el artículo pionero de Lazer y Solimini [53], donde se prueban condiciones necesarias y suficientes para la existencia de solución periódica. Este resultado fue la primera motivación para nuestras investigaciones y, como veremos más adelante, los primeros capítulos de esta Tesis están dedicados al estudio de este tipo de no-linealidades.

Por otra parte, los fenómenos disipativos, donde hay algún tipo de pérdida de energía, no tardaron en despertar el interés de la comunidad científica, y de hecho ya el libro II de los Principia de Newton está dedicado enteramente a Mecánica disipativa. En los siglos XVIII-XIX, a través de la Revolución Industrial, se produjo un desarrollo tecnológico sin precedentes, lo que conllevó la invención y perfeccionamiento de gran variedad de maquinaria pesada. Como es bien sabido, en toda máquina se produce una pérdida de energía que se traduce en calor. En buena parte de los casos, esta disminución de energía es debida al rozamiento, y así cobró gran importancia el entender de que manera se produce, es decir, las leyes del rozamiento, así como sus diversos tipos.

Un primer ejemplo de ecuación disipativa es

$$x''(t) + cx'(t) \pm \frac{1}{x^\alpha} = p(t),$$

donde el término $cx'(t)$ (con $c > 0$) representa una fuerza de rozamiento de la partícula con el medio, que como hemos dicho es la forma más frecuente de pérdida de energía. Sin embargo, en la práctica se observan formas de rozamiento más complicadas, por lo general no lineales, de las que hablaremos posteriormente con más detalle. Los dos últimos capítulos de la Tesis están dedicados a ecuaciones con fricción no lineal.

Con respecto a los argumentos utilizados en esta Tesis, hay que decir que son

fundamentalmente de carácter topológico. El uso de la Geometría en el estudio de las ecuaciones diferenciales es muy antiguo y puede verse ya en los trabajos originales de Newton, que de hecho escribía en un estilo eminentemente geométrico, pero fue en el siglo XIX, con el desarrollo de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, cuando los métodos geométricos adquirieron una importancia creciente. Sin duda alguna, cabe destacar a Henri Poincaré (1854-1912) como el pionero y principal impulsor del estudio cualitativo, en contraposición al estudio cuantitativo seguido hasta entonces. De entre todas sus aportaciones en este campo, únicamente destacaremos su idea de considerar una solución de una ecuación diferencial no como función de la variable tiempo, sino como función de sus condiciones iniciales. Por ejemplo, esto permite formular el problema de la existencia de soluciones periódicas como un problema de punto fijo de un cierto homeomorfismo finito-dimensional, la llamada aplicación de Poincaré. Esta formulación tiene la ventaja inmediata de la gran cantidad de herramientas disponibles actualmente para el estudio de homeomorfismos sobre espacios de dimensión finita. En nuestro caso, se usarán el grado de Brouwer y la teoría de homeomorfismos libres. Por otra parte, el estudio detallado de la aplicación de Poincaré nos permite conocer la dinámica completa de la ecuación, no sólo la mera existencia de soluciones periódicas.

Bajo ciertas condiciones, una formulación alternativa del problema periódico consiste en buscar puntos fijos de cierto funcional definido en el espacio de Banach de las funciones periódicas. A diferencia de la aplicación de Poincaré, este funcional es conocido explícitamente, con la desventaja de que ya no está definido en un espacio de dimensión finita y de que no da información acerca de la estabilidad de la ecuación. Para su estudio se usa habitualmente el grado de Leray-Schauder, que es la versión infinito-dimensional del grado de Brouwer. Recomendamos [57] o [79] para un desarrollo completo de la teoría del grado topológico en las dos versiones mencionadas.

Pasamos a continuación a describir los resultados obtenidos.

En el Capítulo 2 se exponen los resultados conseguidos en [12, 58]. Consideramos la ecuación escalar de Liénard periódica,

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) + g(x(t)) = p(t)$$

donde f se interpreta como un rozamiento, p es una fuerza externa periódica y g

es la fuerza central, que se supone estrictamente decreciente. En estas condiciones, una solución $x(t)$ de esta ecuación define la trayectoria a lo largo de una recta de una partícula sometida a estas fuerzas.

Nuestro resultado principal proporciona, bajo condiciones de existencia de solución periódica, una descripción del conjunto de condiciones iniciales de la variedad estable como el grafo de una aplicación estrictamente decreciente. Para la demostración, es fundamental un resultado de convergencia de tipo Massera que demostraremos recurriendo a la teoría de homeomorfismos libres desarrollada en [8, 9], lo cual nos permite eliminar algunas condiciones de tipo técnico consideradas en [58].

Dedicamos una Sección aparte al estudio particular de un caso de especial interés, como son las singularidades atractivas. Como ya hemos dicho, el “caso modelo” de no-linealidad con singularidad atractiva es $g(x) = x^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$. Se consigue una descripción bastante completa de la dinámica global de la ecuación.

En el Capítulo 3 centraremos nuestra atención en la ecuación de Duffing con una singularidad de tipo repulsivo. El conocimiento que poseemos en la actualidad de la ecuación forzada de tipo Duffing

$$x''(t) + cx'(t) + g(x(t)) = p(t),$$

donde p y g son funciones continuas definidas en \mathbb{R} y p es T -periódica, se debe en gran parte a los avances experimentados en los años sesenta. En especial, las aportaciones de Lazer fueron fundamentales. En su artículo [52], se prueba la existencia de al menos una solución T -periódica bajo condiciones que incluyen

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} g(x) < \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt < \liminf_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

En la literatura afín, esta condición se conoce como de tipo Landesman-Lazer.

Cuando p es acotada pero no periódica, no existen soluciones periódicas, pero aún es posible estudiar la existencia de soluciones acotadas (junto con su derivada). En este sentido, Ahmad probó en [1] la existencia de soluciones acotadas cuando c es positivo y p es una función acotada y continua con un cierto valor medio generalizado bajo condiciones de tipo Landesman-Lazer. Además, se demostraron propiedades sobre la totalidad de soluciones definidas en $[t_0, +\infty)$ (con $t_0 \in \mathbb{R}$ cualquiera), a saber: todas ellas están acotadas en este intervalo. Atendiendo al

significado físico de t como la variable tiempo y siguiendo con la terminología del Capítulo 2, diremos que tales funciones son acotadas en el futuro.

Recientemente, haciendo uso del método de las funciones guía, los resultados de Ahmad han sido parcialmente extendidos por Ortega en [74] a algunos casos en los que p no es necesariamente acotada. En concreto, se supone que p puede descomponerse como $p = p^* + p^{**}$, donde p^* tiene primitiva acotada y p^{**} es acotada y continua verificando que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) < \inf p^{**} \leq \sup p^{**} < \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

con al menos uno de estos límites finito.

Sin embargo, es interesante señalar que los artículos mencionados previamente no consideran la posibilidad de que g no esté definida en toda la recta real. Nuestro propósito es obtener resultados similares para ecuaciones con una no-linealidad singular de tipo repulsivo, es decir, del tipo

$$x''(t) + cx'(t) - \frac{1}{x^\alpha} = p(t),$$

donde c es positiva, p es continua y $\alpha > 0$. Los resultados serán publicados en [84].

Esta ecuación tiene una clara interpretación física en términos de dinámica de cargas eléctricas, de la que ya hemos hablado con anterioridad. Otro posible modelo físico es el movimiento de un pistón sometido a una fuerza externa $p(t)$ dentro de un cilindro cerrado en un extremo conteniendo en su interior un gas perfecto, que ejerce una fuerza expansiva $g(x)$. Por otra parte, otras clases de ecuaciones como la ecuación de Forbat pueden ser reducidas a la anterior por medio de un cambio de variables adecuado, como se indica en [64].

En el Capítulo 4 se recogen los resultados obtenidos en [86], artículo en el que se plantea el estudio de un sistema de ecuaciones singulares cuya motivación es de nuevo la dinámica de partículas con carga eléctrica. En el Capítulo anterior, se observó cómo la ecuación considerada describía el movimiento de una carga eléctrica dentro del campo eléctrico generado por otra partícula del mismo signo. En este sentido, podemos citar un trabajo previo de Fonda, Manásevich y Zanolin [31] donde se estudia el comportamiento de una partícula cargada forzada periódicamente moviéndose en una línea dentro del campo generado por una o dos

partículas fijas del mismo signo. El modelo correspondiente es una E.D.O. con una o dos singularidades, y por medio de la teoría de puntos críticos y del teorema de Poincaré-Birkhoff, los autores obtuvieron resultados sobre la existencia y multiplicidad de soluciones periódicas y subarmónicas.

Ahora bien, si nos planteamos el considerar todas las partículas forzadas pero no fijas, es necesario estudiar un sistema de dos o tres E.D.O. de segundo orden. Para este caso, damos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones periódicas.

El método de demostración sigue dos ideas clave: en primer lugar, se realiza un cambio de variables, bastante conocido en otros contextos como el problema de los n cuerpos, que hace posible reducir una dimensión el sistema, estudiando únicamente la distancia entre partículas. Entonces, el caso de dos partículas se reduce a una sola ecuación singular, ya estudiada, mientras que en el caso de tres partículas se llega a un sistema de dos ecuaciones con una singularidad en el origen, que puede ser resuelto via cotas a priori y grado topológico.

Existe una literatura realmente extensa acerca de sistemas con singularidades, en su mayor parte considerando una estructura potencial (citamos los trabajos clásicos de Gordon [36, 37] donde se empiezan a utilizar técnicas variacionales, y más recientemente [30],[39] o [81], donde se usan métodos más cercanos a los nuestros) o también, aunque en menor número, con estructura hamiltoniana [77]. Sin embargo, hay que resaltar que nuestro modelo no se adapta a ninguna de estas dos posibilidades.

En el Capítulo 5 nos ocupamos de ciertas ecuaciones diferenciales en las cuales aparece un término no lineal respecto de la velocidad, que puede interpretarse como una fricción no lineal.

El rozamiento o fricción puede definirse como una fuerza de resistencia que previene o dificulta cualquier movimiento. Se comprueba de forma empírica que si las superficies en contacto están lo bastante lubricadas el rozamiento es lineal, es decir, directamente proporcional a la velocidad relativa de las superficies. Sin embargo, en diversas aplicaciones prácticas a la Mecánica, ingeniería o circuitos eléctricos el rozamiento es no lineal (véanse [10, 67, 70, 25]).

Desde el punto de vista matemático, un rozamiento no lineal se expresa mediante una no-linealidad dependiente de la derivada de la solución. En este contexto cabría citar artículos ya clásicos como [54, 33, 87].

La Física nos proporciona interesantes ejemplos de rozamiento no lineal, como

el rozamiento producido por el movimiento de un cuerpo inmerso en un fluido con un alto número de Reynolds: la fuerza de rozamiento es proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo, o sea, $c|x'(t)|x'(t)$, donde c es una constante positiva. Este es también el efecto de la fricción del aire en la caída libre de cuerpos, un fenómeno ya expuesto por Newton en el citado segundo libro de los Principia (véase por ejemplo [19]). De igual modo, el rozamiento cuadrático aparece en el estudio del problema de las vibraciones de un cable suspendido (véase [89] y sus referencias). Por otra parte, en la ecuación clásica de Rayleigh de la teoría de circuitos aparece un término que depende del cubo de la derivada.

Sin embargo, quizás el ejemplo más interesante de rozamiento no lineal lo constituya la fricción seca, también llamada fricción de Coulomb en honor a Charles Coulomb (1736-1806), que estudió experimentalmente sus propiedades con todo detalle en 1785 [18], aunque el fenómeno ya era conocido desde los tiempos de Leonardo da Vinci. La fricción seca se produce entre superficies de contacto sin lubricación y es debida básicamente a la existencia de irregularidades microscópicas en las superficies. Las leyes empíricas que la rigen son

- es independiente del área de contacto de las superficies.
- es proporcional a la fuerza normal entre las superficies.
- la constante de proporcionalidad depende de la naturaleza de las superficies y de su estado.

Matemáticamente, la forma más simple de modelar la fricción seca es mediante un término proporcional al signo de la derivada, lo cual nos lleva a considerar una inclusión diferencial, tal como se muestra en [22]. Existe una teoría general para inclusiones diferenciales que generaliza muchas de las herramientas básicas del Análisis No Lineal clásico, como puede verse en [6, 21, 34, 29]. En particular, la fricción seca ha sido un tema de interés general en las últimas dos centurias, pudiéndose citar gran cantidad de artículos clásicos [7, 24, 76, 78, 91]. Actualmente se sigue investigando en muy variadas direcciones, véanse [22, 23, 26, 50, 51, 28, 48, 49, 83] como una pequeña selección, y sus aplicaciones van desde teoría de control a modelización de seismos o avalanchas.

El método que se ha adoptado para el estudio de la fricción seca consiste básicamente en aproximar la inclusión diferencial mediante una sucesión de ecuaciones diferenciales en las que se demuestra la existencia de solución periódica, estudiando posteriormente la convergencia de esta sucesión de soluciones a una

solución de la inclusión diferencial. Esta idea ha sido extensamente utilizada en la literatura para abordar problemas muy diversos (véase por ejemplo [68] y sus referencias). Siguiendo la terminología de Deimling [22], llamaremos a este método aproximantes de Yosida, por analogía a las usadas originalmente en teoría de semi-grupos de operadores (véase por ejemplo [88, Chapter XIV,6]).

En nuestro caso, la idea consiste en la combinación de este método con técnicas topológicas para ecuaciones diferenciales como el método de sub y supersoluciones y la teoría del grado topológico. Los resultados se recogen en [85].

Finalmente, el Capítulo 6 estudia la existencia y multiplicidad de soluciones periódicas para la ecuación de Rayleigh generalizada

$$x''(t) + f(x'(t)) + g(t, x, x') = \bar{p},$$

dependiendo del parámetro \bar{p} y siendo f una función continua. El conjunto de parámetros “admisibles” para la existencia de soluciones periódicas resulta ser un intervalo que puede ser acotado o no. Los resultados obtenidos se recogen en [41], y son aplicables a ecuaciones con fricción seca.

Hay una gran variedad de resultados en esta línea, empezando con el clásico problema de Ambrosetti-Prodi [5], el cual ha dado lugar a multitud de variantes (véanse por ejemplo [27, 17] y sus referencias). Otras situaciones parecidas aparecen cuando se consideran no-linealidades periódicas (véase por ejemplo [62, 45]) o en el caso del problema de Dirichlet, no-linealidades únicamente dependientes de la derivada [40]. Nuestra meta es estudiar situaciones en las que se presente el mismo comportamiento para la ecuación de Rayleigh, que posee una bibliografía menos extensa en este aspecto, basándonos en sub y supersoluciones y grado topológico.

Una de las mayores dificultades que se presentan es al considerar condiciones de Carathéodory en la no-linealidad g . Esto nos llevó a desarrollar un resultado que relaciona la existencia de sub y supersoluciones en versión débil con el grado de cierto operador. Este resultado no parece clásico en el ambiente de funciones de Carathéodory. Para una elegante exposición del desarrollo histórico del método de las sub y supersoluciones puede consultarse [17].

Establecemos a continuación una lista de las notaciones fundamentales usadas en esta memoria.

- “c.p.t.” es la abreviatura de “casi para todo”.
- \mathbb{R} es el conjunto de números reales.
 \mathbb{R}^+ es el conjunto de números reales positivos.
 \mathbb{R}_+ es el conjunto de los números reales no negativos.
- $B(x, R)$ o $B_R(x)$ es la bola abierta de centro x y radio R .
- $C^p(I)$ es el conjunto de funciones $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuas con p-ésima derivada continua.
- $L^p(I) := \{x : I \rightarrow \mathbb{R} : \int_I |x(t)|^p dt < +\infty\}$ siendo $1 \leq p < +\infty$.
- $L^\infty(I) := \{x : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ acotadas c.p.t. } t \in I\}$.
- $\|x\|_p := (\int_I |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$.
- Una función $g : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *función de Carathéodory* si :
 $g(\cdot, x, y)$ es medible para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y
 $g(t, \cdot, \cdot)$ es continua c.p.t. $t \in [0, T]$.
- Una función $g(t, x, y)$ se dice una *L^1 -función de Carathéodory* si es una función de Carathéodory y para todo $R > 0$ existe $h \in L^1(0, T)$ tal que $|g(t, x, y)| \leq h(t)$ p.c.t. $t \in [0, T], \forall x, y \in B(0, R)$.
- $\|x\|_\infty = \text{essup } \{|x(t)| : t \in I\}$.
- $W^{p,q}(I) := \{x \in C^{p-1}(I) : x^{(p)} \in L^q(I)\}$.
- $H^2(I) := W^{2,2}(I)$.
- $\mathcal{D}_-, \mathcal{D}_+, \mathcal{D}^-, \mathcal{D}^+$ son las derivadas de Dini.
- Se hará uso del proyector

$$P : L^2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto Px = \frac{1}{T} \int_0^T x dt. \quad (1.3)$$

Dada una función x definimos su *valor medio* como $\bar{x} = Px$ y su *oscilación* como $\tilde{x} = (I - P)x$.

- Si \mathcal{F} es un espacio de funciones dado, designamos por $\tilde{\mathcal{F}}$ el subespacio de las funciones con valor medio nulo.

Capítulo 2

Dinámica de una ecuación de Liénard con término no lineal monótono.

En este Capítulo, pretendemos realizar un estudio exhaustivo de la ecuación escalar de Liénard

$$x'' + f(x)x' + g(x) = p(t), \quad (2.1)$$

donde $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ son funciones localmente lipschitzianas, o cualquier otra condición que garantice la unicidad de solución del problema de valores iniciales (P.V.I.). A lo largo de todo el Capítulo, suponemos las siguientes hipótesis,

- (i) g es estrictamente decreciente.
- (ii) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.
- (iii) La función $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y periódica con periodo mínimo $T > 0$.

Estamos interesados especialmente en el caso $(a, b) \neq \mathbb{R}$, ya que esto nos permite considerar términos singulares como $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$, al cual dedicaremos una atención especial en la Sección 2.5.

2.1 Preliminares.

Los resultados que se exponen a continuación se deben a Brown y están demostrados en los artículos [8, 9]. Con anterioridad, estos resultados han sido utilizados para obtener “dinámica trivial” (véase [11] para una definición formal) en diferentes contextos (en [11] se estudia un sistema de tres especies en competición y en [75] la estabilidad de soluciones periódicas mediante la tercera aproximación). En nuestro caso, serán una herramienta clave para probar un resultado de convergencia de tipo Massera en la Sección 2.3. El índice considerado es el relativo al

grado de Brouwer usual.

Definición 2.1. *Sea M una variedad conexa de dimensión 2. Un homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ se dice libre si y sólo si para todo disco $D \subset M$ tal que $f(D) \cap D = \emptyset$ se cumple que*

$$f^p(D) \cap f^q(D) = \emptyset, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}, p \neq q.$$

Dado un homeomorfismo f , denotamos por F el conjunto de sus puntos fijos.

Proposición 2.1. (Lemma 3.1 [9]) *Sea $f : M \rightarrow M$ un homeomorfismo libre siendo M una variedad compacta de dimensión 2. Entonces, si F es totalmente desconexo, para todo $x \in M$ existen $\alpha(x), \omega(x) \in F$ tales que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \omega(x), \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x) = \alpha(x).$$

Teorema 2.1. (Theorem 5.7 [9]) *Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que preserva la orientación con un único punto fijo (x_T, v_T) tal que*

$$\text{ind}(f, (x_T, v_T)) \neq 1.$$

Entonces, f es libre.

2.2 Comparación de soluciones.

El siguiente Teorema muestra un cierto tipo de “orden” en las soluciones de la ecuación (2.1) que será fundamental en lo sucesivo. Denotamos por $x(t; t_0, x_0, v_0)$ la única solución de (2.1) con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = v_0$, y por (w^-, w^+) su intervalo maximal de definición.

Teorema 2.2. *Sean $x(t) = x(t; t_0, x_0, v_0), y(t) = x(t; t_0, x_1, v_1)$ soluciones distintas de la ecuación (2.1). Si $x_0 \leq x_1$ y $\int_{x_0}^{x_1} f(s) ds \geq v_0 - v_1$, entonces*

$$x(t) < y(t), \quad t_0 < t < \min_{i=0,1} w^+(t_0, x_i, v_i).$$

Demostración. Razonando por reducción al absurdo, si la conclusión no es cierta debería existir un primer t_1 después de t_0 tal que $x(t_1) = y(t_1)$. Si llamamos $z(t) = y(t) - x(t)$, entonces $z(t) > 0, t \in (t_0, t_1)$ y $z(t_1) = 0$. Restando las ecuaciones respectivas y usando la monotonía de g ,

$$z''(t) + f(y(t))y'(t) - f(x(t))x'(t) > 0, \quad t \in (t_0, t_1).$$

Si integramos sobre (t_0, t_1) obtenemos

$$z'(t_1) - v_1 + v_0 + \int_{x_1}^{y(t_1)} f(s)ds - \int_{x_0}^{x(t_1)} f(s)ds > 0.$$

Así pues,

$$z'(t_1) > v_1 - v_0 - \int_{x_1}^{y(t_1)} f(s)ds + \int_{x_0}^{x(t_1)} f(s)ds = v_1 - v_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(s)ds \geq 0,$$

lo cual no es posible.

Como consecuencia directa de este resultado tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 2.1. *Toda pareja de soluciones de (2.1) tiene a lo más un punto en común, i.e., siendo $x(t)$ e $y(t)$ soluciones distintas de (2.1), existe a lo más un t^* tal que*

$$x(t^*) = y(t^*).$$

Demostración. Inmediata.

Corolario 2.2. *Existe a lo más una solución T -periódica de (2.1).*

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que x_1 y x_2 son dos soluciones T -periódicas distintas de (2.1). Por el Corolario previo $x_1(t) \neq x_2(t)$ para todo $t \in [0, T]$ y podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x_1(t) < x_2(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Ahora bien, si restamos las ecuaciones respectivas y tenemos en cuenta que g es estrictamente decreciente,

$$x_1''(t) - x_2''(t) + f(x_1(t))x_1'(t) - f(x_2(t))x_2'(t) > 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

y la contradicción se obtiene con una simple integración sobre $[0, T]$.

2.3 Convergencia de las soluciones acotadas.

El resultado principal de este apartado establece que si existe una solución T -periódica, ésta es única y atrae al resto de soluciones acotadas. De acuerdo con el significado físico de t como la variable tiempo, establecemos la siguiente definición.

Definición 2.2. Una función $x : (w^-, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice acotada en el futuro si existen r, s y t_0 tales que

$$a < r \leq x(t) \leq s < b, \quad \forall t > t_0.$$

Lema 2.1. Sea $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que preserva la orientación con un único punto fijo (x_T, v_T) tal que $\text{ind}(P, (x_T, v_T)) \neq 1$. Entonces, para todo $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ se verifica una de las siguientes opciones

- i) $P^n(x_0, v_0) \rightarrow (x_T, v_T)$ cuando $n \rightarrow +\infty$
- ii) $\|P^n(x_0, v_0)\| \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

Demostración. El Teorema 2.1 nos asegura que P es libre. Si extendemos P a un homeomorfismo entre esferas de Riemann S^2 definiendo $P(\infty) = \infty$, esta extensión, llamémosla \tilde{P} , sigue siendo un homeomorfismo libre. En efecto, si D es un disco de S^2 tal que $\tilde{P}(D) \cap D = \emptyset$, entonces necesariamente $\infty \notin D$, y como sabemos que P es libre,

$$\tilde{P}^p(D) \cap \tilde{P}^q(D) = \emptyset, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}, p \neq q.$$

Para terminar, sólo hay que aplicar la Proposición 2.1 puesto que S^2 es una variedad compacta.

En el siguiente Lema, establecemos ciertas hipótesis especiales que nos permiten obtener un resultado intermedio al Teorema principal.

Lema 2.2. Suponemos que $a = -\infty, b = +\infty, f$ acotada, $g(-\infty) = +\infty, g(+\infty) = -\infty$ y existen constantes $c, d > 0$ tales que

$$|g(x)| \leq c + d|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bajo estas hipótesis, si $x(t)$ es una solución acotada en el futuro de (2.1) entonces la derivada $x'(t)$ es también acotada en el futuro.

Demostración. En primer lugar, las condiciones sobre f y g aseguran que las soluciones de (2.1) están definidas en todo \mathbb{R} .

Por definición, existen r, s tales que

$$r \leq x(t) \leq s, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si fijamos n_0 tal que $n_0T > t_0$ y aplicamos el Teorema del Valor Medio en el intervalo $(nT, (n+1)T)$ con $n \geq n_0$, se obtiene $t_n \in (nT, (n+1)T)$ tal que

$$x'(t_n) = \frac{x((n+1)T) - x(nT)}{T},$$

luego

$$|x'(t_n)| \leq \frac{s-r}{T}$$

para todo $n \geq n_0$. Probemos que $x'(t)$ está acotada en el intervalo $[n_0T, +\infty)$. Sea $t \geq n_0T$ y n_1 tal que $n_1T \leq t \leq (n_1+1)T$. Por la unicidad de solución del P.V.I.,

$$x(t) = x(t; t_{n_1}, x(t_{n_1}), x'(t_{n_1})),$$

y puesto que la ecuación es periódica y sus soluciones están definidas en todo \mathbb{R} ,

$$x(t) = x(t - n_1T; t_{n_1} - n_1T, x(t_{n_1}), x'(t_{n_1})),$$

y del mismo modo

$$x'(t) = x'(t - n_1T; t_{n_1} - n_1T, x(t_{n_1}), x'(t_{n_1})).$$

En consecuencia,

$$x'(t) \in \{x'(s; s_0, x_0, v_0) : s \in [0, T], s_0 \in [0, T], x_0 \in [r, s], v_0 \in [\frac{r-s}{T}, \frac{s-r}{T}]\},$$

que es un conjunto compacto que no depende de n_1 .

Proposición 2.2. *Bajo las hipótesis del Lema 2.2, toda solución acotada en el futuro tiende a la única solución T -periódica.*

Demostración. Considerando P como la aplicación de Poincaré, vamos a comprobar que se verifican las condiciones del Lema 2.1. En primer lugar, las condiciones sobre f y g implican que P es un homeomorfismo definido en todo \mathbb{R}^2 que conserva la orientación.

Por otra parte, si se toman $\alpha < \beta$ tales que $g(\alpha) > p(t) > g(\beta)$ para todo t , entonces $x_1(t) \equiv \alpha$ y $x_2(t) \equiv \beta$ es una pareja ordenada de sub y super-soluciones estrictas clásicas, con lo cual existe una solución T -periódica que es única por el Corolario 2.2. Además, es un hecho bien conocido (véase por ejemplo Proposition 2.1 en [92]) que el método de las sub y supersoluciones proporciona una solución T -periódica tal que si es aislada (como en este caso) tiene índice -1. Ahora, el Lema 2.1 implica que toda solución con $|x(t)| + |x'(t)|$ acotado en el futuro tiende a la solución periódica, y finalmente el Lema 2.2 acaba la demostración.

Finalmente, probamos el resultado principal mediante un sencillo argumento de truncatura.

Teorema 2.3. *Si existe una solución acotada en el futuro entonces existe exactamente una solución T -periódica, a la cual tienden todas las soluciones acotadas en el futuro.*

Demostración. Sea $x(t)$ una solución acotada en el futuro, y sean r, s tales que

$$r \leq x(t) \leq s \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.2)$$

Sean \hat{f} y \hat{g} extensiones de $f|_{[r,s]}$ y $g|_{[r,s]}$ verificando las condiciones del Lema 2.2. Entonces, $x(t)$ es una solución de la ecuación extendida

$$x'' + \hat{f}(x)x' + \hat{g}(x) = p(t), \quad (2.3)$$

en $[t_0, +\infty)$, luego por la Proposición 2.2 $x(t)$ tiende a cierta solución T -periódica $x_T(t)$ de la ecuación (2.3). Ahora bien, considerando (2.2) se deduce con facilidad que $x_T(t)$ también verifica $r \leq x_T(t) \leq s$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego x_T es solución T -periódica de (2.1), y es única por el Corolario 2.2.

En definitiva, hemos probado que toda solución acotada en el futuro de (2.1) tiende a la solución periódica, lo que termina la demostración.

Hay que observar que este resultado de convergencia fue probado en [58] para el caso particular de la ecuación de Liénard con una singularidad atractiva, que se

estudiará con detalle en la Sección 2.5. Sin embargo, la demostración hacía uso de un resultado de convergencia debido a R.A. Smith [80], lo que obligaba a imponer hipótesis adicionales sobre la función de rozamiento f en base a que cierta matriz fuera definida negativa (véase también [72]). Concretamente, se imponía que $f \equiv 0$ o bien que existían m, M tales que $0 < m < f(x) < M$ y $M \leq \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}m$. Ahora se ha probado que mediante el uso de la teoría de homeomorfismos libres podemos reducir las hipótesis a la simple no negatividad de la función f .

2.4 Geometría del conjunto de soluciones acotadas en el futuro.

El propósito de este apartado es describir la geometría del conjunto de condiciones iniciales de las soluciones acotadas en el futuro, que vamos a denotar por

$$W_s^{t_0} := \{(x, v) : x(t; t_0, x, v) \text{ es acotada en el futuro}\}.$$

Evidentemente, esta notación no es gratuita. Como ya hemos visto en la Sección anterior, este conjunto corresponde a las condiciones iniciales de la llamada variedad estable global. Si suponemos mayor regularidad en los coeficientes, la existencia de la variedad estable global puede establecerse a partir de resultados generales sobre soluciones hiperbólicas, en el sentido de que los multiplicadores de Floquet tienen módulo distinto de 1. Sin embargo, nuestros argumentos permiten evitar hipótesis de regularidad adicionales.

Proposición 2.3. *Sean $(x_1, v_1), (x_2, v_2) \in W_s^{t_0}$. Entonces,*

$$x_1 < x_2 \iff v_1 > v_2.$$

Demostración. Sea $x_1(t) = x(t; t_0, x_1, v_1)$ y $x_2(t) = x(t; t_0, x_2, v_2)$. Supongamos que $x_1 < x_2$. Si por reducción al absurdo suponemos que $v_1 \leq v_2$, entonces $x_1(t) < x_2(t)$ para todo $t > t_0$ por el Teorema 2.2. Además, por el Teorema 2.3 ambas soluciones tienden a la periódica, luego $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) - x_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1'(t) - x_2'(t) = 0$. Si restamos las ecuaciones respectivas e integramos

sobre (t_0, t) , tomando por ejemplo $t > t_0 + T$, se obtiene que

$$x_2'(t) - x_1'(t) - (v_2 - v_1) + \int_{x_2}^{x_2(t)} f(s)ds - \int_{x_1}^{x_1(t)} f(s)ds = \int_{t_0}^t [g(x_1(s)) - g(x_2(s))]ds > \epsilon := \int_{t_0}^{t_0+T} [g(x_1(s)) - g(x_2(s))]ds > 0.$$

como consecuencia de la monotonía de g .

Teniendo en cuenta que

$$\int_{x_2}^{x_2(t)} f(s)ds - \int_{x_1}^{x_1(t)} f(s)ds = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(s)ds - \int_{x_1}^{x_2} f(s)ds,$$

entonces

$$x_2'(t) - x_1'(t) - (v_2 - v_1) + \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(s)ds - \int_{x_1}^{x_2} f(s)ds \geq \epsilon.$$

Finalmente tomamos límites cuando $t \rightarrow +\infty$. Si tenemos presente que f es continua y por tanto está acotada en un entorno del rango de la solución periódica (es decir, el conjunto $\{x_T(t) / t \in [0, T]\}$), entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} f(s)ds = 0$$

y en definitiva

$$v_2 - v_1 < - \int_{x_1}^{x_2} f(s)ds \leq 0,$$

contradiciendo la hipótesis inicial. Por tanto la implicación directa está probada, y la inversa se prueba mediante un argumento completamente análogo.

Teniendo en cuenta que este resultado es independiente del tiempo inicial t_0 considerado, una consecuencia inmediata de este resultado es la siguiente.

Corolario 2.3. *Todo par de soluciones acotadas en el futuro de (2.1) no tiene ningún punto en común, o sea, $x_1(t) \neq x_2(t)$ para todo t en el intervalo común de definición.*

Seguidamente, describimos el conjunto $W_s^{t_0}$ en un caso especial.

Lema 2.3. *Bajo las condiciones del Lema 2.2, existen $-\infty \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq +\infty$ y una función estrictamente decreciente $\varphi : (\tilde{a}, \tilde{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que*

$$W_s^{t_0} = \{(x, \varphi(x)) : x \in (\tilde{a}, \tilde{b})\}.$$

Demostración. Definamos

$$D^+ = \{(x_0, v_0) : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0, v_0) = +\infty\}$$

y

$$D^- = \{(x_0, v_0) : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0, v_0) = -\infty\}.$$

Dividimos la demostración en varios pasos.

- *Paso 1:* D^+ y D^- son conjuntos conexos. Por el Teorema 2.2, D^+ tiene la siguiente propiedad,

$$(P_1) \text{ "Si } (x, v) \in D^+ \text{ y } \tilde{x} \geq x, \tilde{v} \geq v \text{ entonces } (\tilde{x}, \tilde{v}) \in D^+."$$

luego D^+ es un conexo de \mathbb{R}^2 .

Igualmente, D^- verifica la propiedad simétrica,

$$(P_2) \text{ "Si } (x, v) \in D^- \text{ y } \tilde{x} \leq x, \tilde{v} \leq v \text{ entonces } (\tilde{x}, \tilde{v}) \in D^-"$$

luego D^- es conexo.

- *Paso 2:* $\mathbb{R}^2 = D^+ \cup D^- \cup W_s^{t_0}$. Las hipótesis del Lema 2.2 garantizan la existencia de dos números $\alpha < \beta$ tales que

$$g(\alpha) > p(t) > g(\beta), \quad \forall t \in [0, T].$$

Usando el carácter de decrecimiento de g se comprueba fácilmente que si $x(t) > \beta$ y $x'(t) = 0$ entonces $x''(t) > 0$, lo cual implica que los máximos relativos de toda solución de (2.1) son menores que β . Análogamente, los mínimos relativos de toda solución de (2.1) son mayores que α . En otras palabras, existe una región de "confinamiento" para las soluciones oscilatorias (ver figura 2.1). En particular, las soluciones no acotadas en el futuro no son oscilatorias. En adelante, nos referiremos a esta propiedad como la *propiedad de no-oscilación*.

Figura 2.1. Región de oscilaciones

Sea $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ que no pertenece a $W_s^{t_0}$, entonces por el Teorema 2.3, la solución correspondiente es no acotada, y por la propiedad de no-oscilación $(x_0, v_0) \in D^+ \cup D^-$.

- *Paso 3: D^+ y D^- son abiertos.* Sea $(x_0, v_0) \in D^+$. Fijemos t_1 de modo que $x(t_1; t_0, x_0, v_0) > \beta$ y $x'(t_1; t_0, x_0, v_0) > 0$. Por dependencia continua, existe una bola abierta $B_R(x_0, v_0)$ tal que $x(t_1; t_0, x_1, v_1) > \beta$ y $x'(t_1; t_0, x_1, v_1) > 0$ para todo $(x_1, v_1) \in B_R(x_0, v_0)$. En esta situación, la propiedad de no-oscilación junto con el Teorema 2.3 nos garantizan que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_1, v_1) = +\infty,$$

con lo cual $B_R(x_0, v_0) \subset D^+$ y D^+ es abierto. La demostración para D^- es totalmente análoga.

- *Paso 4: Conclusión.* Teniendo en cuenta los Pasos 2 y 3 y las propiedades

(P_1) - (P_2) , es evidente que

$$\tilde{I} = \{x \in \mathbb{R} : \exists v^- < v^+ \text{ con } (x, v^+) \in D^+, (x, v^-) \in D^-\}$$

es un intervalo abierto (\tilde{a}, \tilde{b}) con $-\infty \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq +\infty$.

Además, para todo $x \in \tilde{I}$ existe v tal que $(x, v) \in W_s^{t_0}$, y por el Corolario 2.3 esta v es única. Definimos $\varphi(x) := v$.

Figura 2.2.

Por construcción,

$$\{(x, \varphi(x)) : x \in \tilde{I}\} \subset W_s^{t_0}.$$

Probemos la inclusión inversa. Sea $(x, v) \in W_s^{t_0}$; por los pasos previos y la Proposición 2.3, tenemos que $(x, \tilde{v}) \in D^+ \cup D^-$ para todo $\tilde{v} \neq v$. Además, por

las propiedades (P_1) y (P_2) , $(x, \tilde{v}) \in D^+$ si $\tilde{v} > v$ y $(x, \tilde{v}) \in D^-$ si $\tilde{v} < v$. En consecuencia, $x \in \tilde{I}$ y $v = \varphi(x)$.

En resumen, se ha probado la existencia de una función $\varphi : (\tilde{a}, \tilde{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que su gráfica es $W_s^{t_0}$. Esta función es estrictamente decreciente por la Proposición 2.3 y su gráfica $W_s^{t_0} = \mathbb{R}^2 \setminus D^+ \cup D^-$ es cerrada, lo cual implica la continuidad de φ .

Finalmente, consideramos el caso más general.

Teorema 2.4. *Se suponen condiciones para la existencia de solución periódica de la ecuación de Liénard (2.1). Entonces, existe un intervalo abierto no vacío $I \subset (a, b)$ y una función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente decreciente tal que*

$$W_s^{t_0} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}.$$

Demostración. Por el Corolario 2.2, la solución T -periódica es única, llamémosla $x_T(t)$. Dados (r, s) tales que

$$r < x_T(t) < s, \quad t \in [0, T], \quad (2.4)$$

definimos

$$W_s^{t_0}(r, s) = \{(x, v) \in W_s^{t_0} : r < x(t; t_0, x, v) < s, \forall t \geq t_0\}.$$

Claramente, este conjunto es no vacío por (2.4). La clave de la demostración es el siguiente Lema.

Lema 2.4. *Existen un subintervalo abierto $\tilde{I} \subset (a, b)$ y una función $\psi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente decreciente tal que*

$$W_s^{t_0}(r, s) = \{(x, \psi(x)) / x \in \tilde{I}\}.$$

Por medio de este Lema, la demostración del Teorema es rápida. Se consideran dos sucesiones $r_n \rightarrow a$ y $s_n \rightarrow b$, $a < r_n < s_n < b$ de manera que (2.4) se verifica para (r_n, s_n) y se aplica el citado Lema, obteniendo para todo n una $\psi_n : \tilde{I}_n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$W_s^{t_0}(r_n, s_n) = \{(x, \psi_n(x)) / x \in \tilde{I}_n\}.$$

Dado que

$$W_s^{t_0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_s^{t_0}(r_n, s_n),$$

la demostración se acaba definiendo

$$I := \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{I}_n$$

y

$$\psi(x) := \psi_n(x), \quad \forall x \in \tilde{I}_n.$$

Sólo nos resta probar el Lema 2.4.

Demostración del Lema 2.4. Empezamos haciendo notar que $W_s^{t_0}(r, s)$ sólo depende de los valores de f y g sobre $[r, s]$, luego podemos considerar extensiones \hat{f} y \hat{g} de $f|_{[r,s]}$ y $g|_{[r,s]}$ que cumplan las hipótesis del Lema 2.2, y aplicar el Lema 2.3 para obtener una función $\hat{\varphi} : (\hat{a}, \hat{b}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\hat{W}_s^{t_0}$ (el conjunto de soluciones acotadas en el futuro para la ecuación modificada (2.3)) puede expresarse como

$$\hat{W}_s^{t_0} = \{(x, \hat{\varphi}(x)) : x \in (\hat{a}, \hat{b})\}.$$

Por el Corolario 2.3, el conjunto de soluciones acotadas en el futuro está ordenado, lo cual implica que

$$\tilde{I} = \{x : r < \hat{x}(t; t_0, x, v) < s, \forall t \geq t_0\}$$

es un intervalo (\hat{x} designa la solución general para la ecuación modificada (2.3)). Si se demuestra que el intervalo \tilde{I} es abierto, entonces

$$W_s^{t_0}(r, s) = \{(x, \hat{\varphi}(x)) : x \in \tilde{I}\},$$

luego la demostración se acaba una vez se pruebe que \tilde{I} es abierto.

Sea $x \in \tilde{I}$ y $\hat{a} < x_1 < x < x_2 < \hat{b}$. Por construcción existe t^* tal que

$$r < \hat{x}(t; t_0, x_1, \hat{\varphi}(x_1)) < \hat{x}(t; t_0, x_2, \hat{\varphi}(x_2)) < s,$$

para todo $t \geq t^*$. Por el Corolario 2.3 las soluciones acotadas en el futuro están ordenadas, luego para todo $y \in (x_1, x_2)$ y $t \geq t^*$

$$r < \hat{x}(t; t_0, y, \hat{\varphi}(y)) < s. \quad (2.5)$$

Ahora, por la continuidad de $\hat{\varphi}$ y la dependencia continua de las soluciones respecto a las condiciones iniciales, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|y - x| < \varepsilon$ entonces (2.5) se cumple para todo $t_0 \leq t \leq t^*$.

En consecuencia, si $|y - x| < \varepsilon$ y $y \in (x_1, x_2)$ se tiene (2.5) para todo $t \geq t_0$ y por tanto $y \in \tilde{I}$, luego \tilde{I} es abierto.

Observaciones. Mediante pequeñas modificaciones se obtienen idénticos resultados “en el pasado”, es decir, una descripción de la variedad inestable. En particular, la existencia de una solución tal que

$$a < r \leq x(t) \leq s < b, \quad \forall t < t_0$$

para ciertas constantes a, b (esta clase de solución puede llamarse acotada en el pasado) implica la existencia de exactamente una solución T -periódica. Además, toda solución acotada en el pasado procede de la periódica, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t) - x_T(t)| + |x'(t) - x'_T(t)| = 0,$$

dado que los argumentos usados son completamente reversibles (la idea clave era el carácter libre de la aplicación de Poincaré y por definición P es libre si y sólo si P^{-1} lo es).

Del mismo modo, el conjunto de condiciones iniciales de las soluciones acotadas en el pasado puede ser descrito de forma similar al Teorema 2.4, siendo en este caso estrictamente creciente la función que la define. Por supuesto, el único punto de intersección de estas dos gráficas es la condición inicial de la solución periódica, lo cual implica evidentemente la ausencia de puntos homoclínicos.

Por otra parte, es interesante resaltar que el cambio de variables $\tau = -t$ nos lleva a una ecuación de Liénard (2.1) con término de rozamiento negativo. Teniendo en cuenta lo ya mencionado, se concluye que los mismos resultados se verifican cuando el término de rozamiento no cambia de signo. No obstante, en el segundo caso la ecuación no parece tener un significado mecánico claro.

2.5 Un caso particular: ecuación con una singularidad atractiva.

En esta Sección haremos un estudio detallado de un caso particular de la ecuación de Liénard. Vamos a considerar $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ estrictamente decreciente y tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0. \quad (2.6)$$

En este contexto, hay una extensa lista de artículos publicados relacionados con el problema de Dirichlet para ecuaciones singulares, conocido como problema

de Emdem-Fowler, véanse por ejemplo [46, 47, 82, 42, 43, 55, 56] y sus referencias. En cambio, el interés por el problema periódico ha sido más reciente. El artículo pionero fue [53], donde para $f \equiv 0$ se probó por medio del método de sub y supersoluciones que una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución T -periódica positiva es que el valor medio $\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$ sea positivo. Posteriormente, este resultado fue extendido en [38] para la ecuación de Liénard con $f \geq 0$ arbitraria. En adelante, suponemos que $\bar{p} > 0$.

El estudio de la estabilidad se puede hacer directamente por medio de las propiedades del grado topológico, pues es bien conocido que el método de las sub y supersoluciones proporciona soluciones inestables (véase [73]).

En la Sección anterior, dimos una descripción general del conjunto $W_s^{t_0}$ de condiciones iniciales de las soluciones acotadas en el futuro como el grafo de una función estrictamente decreciente $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ con I un intervalo abierto no vacío de \mathbb{R}^+ . Seguidamente obtendremos información más detallada acerca de la dinámica general de la ecuación.

Lema 2.5. *Existe $\delta > 0$ tal que todo mínimo relativo de una solución de (2.1) es mayor que δ .*

Demostración. Sea $\delta = g^{-1}(\|p\|_\infty)$. Por la monotonía de g , si $x(t) < \delta$ entonces $g(x(t)) > \|p\|_\infty$, con lo cual $x''(t) + f(x(t))x'(t) < 0$, lo que imposibilita la existencia de un mínimo relativo en t .

Definimos los conjuntos

$$D^+ = \{(x_0, v_0) : \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0, v_0) = +\infty\}$$

y

$$D^- = \{(x_0, v_0) : w^+(x_0, v_0) < +\infty, \lim_{t \rightarrow w^+} x(t; t_0, x_0, v_0) = 0\}$$

de los que haremos un estudio detallado. Dada la similitud, hemos adoptado la misma notación empleada en el Lema 2.3, aunque la situación es obviamente diferente.

Proposición 2.4.

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = D^+ \cup W_s^{t_0} \cup D^-.$$

Demostración. Sea $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \setminus W_s^{t_0}$. Por brevedad, identificaremos $x(t) \equiv x(t; t_0, x_0, v_0)$. Probar el resultado equivale a demostrar que

- 1) $w^+(x_0, v_0) = +\infty \Rightarrow \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$
- 2) $w^+(x_0, v_0) < +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow w^+} x(t) = 0$.

Si $(x_0, v_0) \notin W_s^{t_0}$, por la propia definición de $W_s^{t_0}$ existe una sucesión $\{t_n\} \rightarrow w^+$ tal que una de las siguientes opciones se cumple

- i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = 0$
- ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = +\infty$.

Por el Lema 2.5, i) es equivalente a $\lim_{t \rightarrow w^+} x(t) = 0$. Probemos la implicación 1), para lo cual suponemos que $w^+ = +\infty$. Si i) se verificara, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x''(t) = 0$ y tomando límites en la ecuación tendríamos una contradicción. Por tanto se cumple ii) y la primera implicación está probada.

Supongamos ahora que $w^+ < +\infty$. Si se verificara ii) la solución tendría una asíntota vertical, con lo cual $\lim_{t \rightarrow w^+} x'(t) = \lim_{t \rightarrow w^+} x''(t) = +\infty$ y tomando límites la contradicción es obvia. Por tanto, $\lim_{t \rightarrow w^+} x(t) = 0$.

Proposición 2.5. D^- es un conjunto abierto.

Demostración. Directa a partir del teorema de dependencia continua de las soluciones respecto de las condiciones iniciales y del Lema 2.5.

En la siguiente Proposición, se obtiene una mayor información sobre D^+ imponiendo una hipótesis adicional sobre el término de rozamiento.

Proposición 2.6. Supongamos que $f \equiv 0$ o bien que $\int_{\alpha}^{+\infty} f(s)ds = +\infty$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Entonces,

$$D^+ = \{(x_0, v_0) : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0, v_0) = +\infty\}.$$

Demostración. Sólo hay que probar que si $\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$, entonces este límite superior es de hecho el límite. Siendo x_T la única solución periódica y $z(t) = x(t) - x_T(t)$, se deduce del Corolario 2.1 que existe cierto \tilde{t} tal que $z(t) > 0$ para todo $t > \tilde{t}$. Por otra parte, es claro que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ equivale a $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = +\infty$. Si esto no es cierto, entonces existirán sucesiones $\{z(t_n)\}$ y $\{z(\tau_n)\}$ de máximos y mínimos de z respectivamente tales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z(t_n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} z(\tau_n) = K < +\infty$$

con $t_n < \tau_n < t_{n+1}$ para cada n . Como g es estrictamente decreciente, entonces

$$z''(t) + f(x(t))x'(t) - f(x_T(t))x'_T(t) = g(x_T(t)) - g(x(t)) > 0, \quad \forall t > \tilde{t},$$

e integrando sobre (t_n, τ_n) se tiene

$$\int_{x(t_n)}^{x(\tau_n)} f(s)ds - \int_{x_T(t_n)}^{x_T(\tau_n)} f(s)ds = \int_{x_T(\tau_n)}^{x(\tau_n)} f(s)ds - \int_{x_T(t_n)}^{x(t_n)} f(s)ds > 0.$$

Si $f \equiv 0$ la contradicción es obvia, mientras que si $\int_{\alpha}^{+\infty} f(s)ds = +\infty$ la contradicción se sigue de un simple paso al límite.

Observación. la hipótesis sobre la integral de f mencionada en esta Proposición se cumple en particular si $\exists m > 0$ tal que $f(s) > m$ para todo s , que es la situación considerada en [58].

Seguidamente nos proponemos estudiar con detalle la función estrictamente decreciente φ cuyo grafo se identifica con $W_s^{t_0}$. Para ello precisamos una serie de lemas de comparación. Recordemos que la función f está definida sólo para valores positivos, lo cual implica que las soluciones que alcanzan el cero en tiempo finito no son prolongables.

Lema 2.6. *Consideremos la ecuación*

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) = p(t)$$

siendo $p(t) < 0$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces todas las soluciones tienen a lo más un máximo. Además, toda solución con velocidad inicial positiva posee exactamente un máximo, y se cumple que $w^+ < +\infty$ y $\lim_{t \rightarrow w^+} x(t) = 0$.

Demostración. Trivial.

Lema 2.7. *Consideremos una condición inicial (x_0, v_0) con $v_0 > 0$. Sea $x(t)$ la solución del P.V.I. para la ecuación (2.1) y $\tilde{x}(t)$ la solución del P.V.I. para la ecuación auxiliar*

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) + K = \tilde{p}(t) \tag{2.7}$$

siendo $K > \max\{\|\tilde{p}\|_\infty, g(x_0)\}$. Si t_M es el punto (único) donde $\tilde{x}(t)$ alcanza su máximo, entonces

$$\tilde{x}(t) < x(t) \quad \forall t_0 < t < t_M.$$

Demostración. Sea $z(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$. Entonces, por las condiciones impuestas a K , z tiene un mínimo relativo en t_0 . Por otra parte, $\tilde{x}(t) > \tilde{x}(t_0) = x_0$ para todo $t_0 < t < t_M$.

Si el resultado no es cierto, entonces existe un primer t_1 tal que $z(t_1) = 0$ y $z(t) > 0 \quad \forall t_0 < t < t_1$. Restando las dos ecuaciones, por la monotonía de g y las condiciones impuestas a K , se llega a

$$z''(t) + f(x(t))x'(t) - f(\tilde{x}(t))\tilde{x}'(t) = K - g(x(t)) + \bar{p} > 0 \quad \forall t_0 < t < t_1$$

ya que $g(x(t)) < g(\tilde{x}(t)) < g(x_0) < K$ y $\bar{p} > 0$. Finalmente, la contradicción aparece integrando en (t_0, t_1) .

Lema 2.8. Sea $x_0 > 0$. Para todo $R > 0$, existe $v > 0$ tal que la solución $x(t; t_0, x_0, v)$ del P.V.I. para (2.7) alcanza su máximo por encima de R .

Demostración. Por comodidad, sea $x(t) \equiv x(t; t_0, x_0, v)$. Integrando (2.7) sucesivamente en (t_0, t) se obtiene

$$x'(t) - v + \int_{x_0}^{x(t)} f(s)ds + K(t - t_0) = \int_{t_0}^t \tilde{p}(s)ds \quad (2.8)$$

$$x(t) - x_0 - v(t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^{x(s)} f(\tau)d\tau ds + K \frac{(t - t_0)^2}{2} = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \tilde{p}(\tau)d\tau ds \quad (2.9)$$

Si en t_M se alcanza el máximo, de (2.8) se deduce que

$$v = K(t_M - t_0) + \int_{x_0}^{x(t_M)} f(s)ds - \int_{t_0}^{t_M} \tilde{p}(s)ds,$$

luego si tomamos v lo bastante grande, es decir, si hacemos $v \rightarrow +\infty$, entonces o bien $x(t_M) \rightarrow +\infty$ y terminamos, o bien $t_M \rightarrow +\infty$. En este segundo caso, sustituyendo en (2.9) se tiene que

$$x(t_M) - x_0 - K \frac{(t_M - t_0)^2}{2} - (t_M - t_0) \int_{x_0}^{x(t_M)} f(s)ds + (t_M - t_0) \int_{t_0}^{t_M} \tilde{p}(s)ds + \int_{t_0}^{t_M} \int_{x_0}^{x(s)} f(\tau)d\tau ds = \int_{t_0}^{t_M} \int_{t_0}^s \tilde{p}(\tau)d\tau ds,$$

luego

$$x(t_M) - x_0 - K \frac{(t_M - t_0)^2}{2} > \int_{t_0}^{t_M} \int_{t_0}^s \tilde{p}(\tau) d\tau ds - (t_M - t_0) \int_{t_0}^{t_M} \tilde{p}(s) ds.$$

Al ser \tilde{p} de valor medio cero, el segundo miembro de esta desigualdad es acotado, y como $t_M \rightarrow +\infty$ entonces $x(t_M) \rightarrow +\infty$, concluyendo la demostración.

Lema 2.9. *Consideremos la ecuación*

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) = p(t) \quad (2.10)$$

donde se mantienen las hipótesis ya establecidas sobre f y p . Sea $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe v y $t_1 > t_0$ tal que

$$x(t_1; t_0, x_0, v) < \epsilon.$$

Demostración. Sea $P := \max\{\int_0^t p(s) ds : t \in [t_0, t_0 + T]\}$. Tomamos como velocidad inicial

$$v < \frac{\epsilon - x_0}{T} - \int_{\epsilon}^{x_0} f(s) ds - P.$$

Por reducción al absurdo, vamos a suponer que $x(t) \geq \epsilon$ para todo $t > t_0$. Integrando la ecuación en (t_0, t) obtenemos

$$x'(t) - v + \int_{x_0}^{x(t)} f(s) ds = \int_{t_0}^t \tilde{p}(s) ds,$$

con lo cual, para todo $t \in [t_0, t_0 + T]$ se tiene

$$x'(t) = v + \int_{x(t)}^{x_0} f(s) ds + \int_{t_0}^t \tilde{p}(s) ds < \frac{\epsilon - x_0}{T} - \int_{\epsilon}^{x(t)} f(s) ds + \int_{t_0}^t \tilde{p}(s) ds - P < \frac{\epsilon - x_0}{T}.$$

Ahora, integrando en $[t_0, t_0 + T]$ se obtiene $x(t_0 + T) < \epsilon$, lo que prueba el resultado.

Lema 2.10. *Consideremos cierta condición inicial (x_0, v) . Sea $x(t)$ la solución del P.V.I. para (2.1) y $\hat{x}(t)$ la solución de P.V.I. para la ecuación auxiliar (2.10). Entonces, $x(t) < \hat{x}(t)$ para todo $t > t_0$ donde ambas soluciones estén definidas.*

Demostración. Sea $z(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Restando las ecuaciones

$$z''(t) + f(x(t))x'(t) - f(\hat{x}(t))\hat{x}'(t) + g(x(t)) = 0.$$

La función $z(t)$ tiene un máximo relativo en t_0 pues $z'(t_0) = 0$ y $z''(t_0) = -g(x_0) < 0$. Si el resultado no es cierto, entonces existirá un t_1 tal que $z(t_1) = 0$ y $z(t) < 0$ para todo $t_0 < t < t_1$, y se llega a la contradicción acostumbrada integrando la ecuación anterior entre t_0 y t_1 .

Una vez establecidos esta serie de Lemas distinguimos dos casos fundamentales.

2.5.1 Caso disipativo.

Suponemos que

$$\exists m, s_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tales que } f(s) > m \quad \forall s > s_0. \quad (2.11)$$

Lema 2.11. *Si $w^+ = +\infty$, entonces existe $C > 0$ tal que*

$$|x'(t)| < C \quad \forall t > t_0.$$

Demostración. En caso contrario, existe $\{t_n\} \rightarrow +\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'(t_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$). Por la Proposición 2.6 sabemos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$, luego tomando límites en la ecuación, la condición (2.11) hace que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x''(t_n) = -\infty$ (resp. $+\infty$). Ahora, por la continuidad de x' es fácil deducir la existencia de una sucesión $\{\tau_n\}$ tal que $x''(\tau_n) = 0$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} x'(\tau_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$), lo cual es imposible.

Proposición 2.7. *D^+ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $(x_0, v_0) \in D^+$ y sea C dado por el Lema 2.11. En virtud de la hipótesis (2.11), podemos fijar $R > 0$ tal que $\int_{x_0}^R f(s)ds > v_0 - C - 1$. A continuación, fijamos un entero n para el cual $x(t_0 + nT; t_0, x_0, v_0) > R$ y $|x'(t_0 + nT; t_0, x_0, v_0)| < C + 1$. Por dependencia continua, existe $\rho > 0$ tal que $x(t_0 + nT; t_0, x_1, v_1) > R$ y $|x'(t_0 + nT; t_0, x_1, v_1)| < C + 1$ para todo $(x_1, v_1) \in B_\rho(x_0, v_0)$. Si definimos $x_1(t) := x(t + nT; t_0, x_1, v_1)$, es claramente solución de (2.1) y además

$$\int_{x_0}^{x_1(t_0)} f(s)ds \geq \int_{x_0}^R f(s)ds > v_0 - C - 1 > v_0 - x_1'(t_0),$$

luego aplicando el Teorema 2.2 y la Proposición 2.6, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = +\infty$ y en definitiva $B_\rho(x_0, v_0) \subset D^+$.

Teorema 2.5. *Existe $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente decreciente tal que*

$$W_s^{t_0} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}.$$

Además, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$.

Demostración. En el Teorema 2.4 se estableció la existencia de un intervalo abierto no vacío $I \subset \mathbb{R}^+$ y una función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente decreciente tal que $W_s^{t_0} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$. Dividimos la demostración del Teorema en dos partes:

A - Intervalo de definición de φ . Demostremos que $I = \mathbb{R}^+$. Como D^+ y D^- son conjuntos abiertos, basta probar que dado un $x_0 \in \mathbb{R}^+$ existen $v_1 < v_2$ tales que $(x_0, v_1) \in D^-$ y $(x_0, v_2) \in D^+$.

Distinguiremos dos casos: si $x_0 \leq x_T$, basta tomar $v_1 < v_T$ y entonces $(x_0, v_1) \in D^-$ por el Teorema 2.2 y la Proposición 2.3. Por otra parte, v_2 nos lo proporciona el Lema 2.8 tomando $R = \|x_T(t)\|_\infty$. El Lema 2.7 nos garantiza que $x(t; t_0, x_0, v_2)$ toma valores por encima de la solución periódica, luego debe cortarla, y por tanto el Teorema 2.2 junto con otras consideraciones ya conocidas implica que $(x_0, v_2) \in D^+$.

Por otra parte, si $x_0 > x_T$ entonces $(x_0, v_2) \in D^+$ para todo $v_2 > v_T$, mientras que v_1 nos lo proporciona el Lema 2.9 tomando $\epsilon := \delta$ (ya definido en el Lema 2.5). El Lema 2.10 nos asegura que la solución toma valores por debajo de δ , luego $(x_0, v_1) \in D^-$ por el Lema 2.5.

B - Límite en $+\infty$ de φ . Veamos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$. Basta probar que para todo $v \in \mathbb{R}^+$ existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $(x_0, v) \in D^+$. Para ello se toma x_0 tal que $\int_{x_T}^{x_0} f(s) ds > v_T - v$ (lo cual es posible por (2.11)), y el Teorema 2.2 junto con argumentos ya usuales implica que $(x_0, v) \in D^+$.

Finalmente, establecemos dos resultados sobre el comportamiento asintótico de φ en cero.

Teorema 2.6. *Si $\int_0^1 g(s) ds = +\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$.*

Demostración. Basta probar que para todo $v \in \mathbb{R}$ existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $(x_0, v) \in D^-$. De hecho probaremos que si

$$\int_{x_0}^{\delta} g(s)ds > \|p\|_{\infty}\delta + \frac{v^2}{2} \quad (2.12)$$

entonces $(x_0, v) \in D^-$, donde δ viene dado por el Lema 2.5. Si $v < 0$ esto es inmediato por el Lema 2.5 ya que $x_0 < \delta$. Si por el contrario $v \geq 0$ y $(x_0, v) \notin D^-$, entonces existiría $t_1 > t_0$ tal que $x(t_1) = \delta$, $x(t) < \delta$ y $x'(t) \geq 0$ para todo $t_0 < t < t_1$. Por tanto,

$$f(x(t))x'(t) = p(t) - g(x(t)) - x''(t) \geq 0 \quad \forall t \in (t_0, t_1),$$

con lo cual $x''(t) + g(x(t)) \leq \|p\|_{\infty}$ para todo $t_0 < t < t_1$. Multiplicando por x' e integrando en (t_0, t_1) se tiene

$$\int_{x_0}^{\delta} g(s)ds \leq \|p\|_{\infty}(\delta - x_0) + \frac{v^2}{2} < \|p\|_{\infty}\delta + \frac{v^2}{2}$$

contradiciendo la hipótesis. Ahora, dada $v \in \mathbb{R}$, la condición $\int_0^1 g(s)ds = +\infty$ permite tomar un x_0 que cumpla (2.12), y por tanto $(x_0, v) \in D^-$.

Observación. La condición sobre la integral de la g es muy habitual en la literatura sobre ecuaciones singulares. Significa que el potencial en la singularidad es lo bastante fuerte como para “absorber” a la partícula si esta está lo bastante cerca, no importa la velocidad con la que parta. Aparecerá de nuevo en el siguiente Capítulo. Si esta condición no se verifica, es decir, si el potencial en la singularidad es finito, entonces existirá una “velocidad crítica” o de escape a partir de la cual todas las soluciones escapan de la singularidad, no importa lo cerca que estén de la misma. Ésta es en efecto la interpretación del último Teorema, para cuya demostración precisaremos de un lema previo.

Lema 2.12. *Si $w^- > -\infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow w^-} x'(t) > 0$ y si $\int_0^1 g(s)ds < +\infty$ entonces este límite es finito.*

Demostración. Por paso al contrarrecíproco, supongamos que $\lim_{t \rightarrow w^-} x'(t) = +\infty$. Entonces existe t_1 tal que $x'(t_1) > 1$ para todo $t \in (w^-, t_1)$ y en consecuencia

$$x''(t) + f(x(t))x'(t) = p(t) - g(x(t)) > p(t) - g(x(t))x'(t)$$

Figura 2.3. Estructura del semiplano de condiciones iniciales.

en dicho intervalo. Integrando sobre $(w^- + \epsilon, t_1)$

$$x'(t_1) - x'(w^- + \epsilon) + \int_{x(w^- + \epsilon)}^{x(t_1)} f(s) ds > -\|p\|_\infty t_1 - \int_{x(w^- + \epsilon)}^{x(t_1)} g(s) ds,$$

con lo cual, pasando al límite en ϵ , si $\lim_{t \rightarrow w^-} x'(t) = +\infty$ entonces $\int_0^1 g(s) ds = +\infty$, probando el Lema.

Teorema 2.7. *Si $\int_0^1 g(s) ds < +\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) < +\infty$.*

Demostración. Para simplificar la escritura, vamos a considerar como tiempo inicial $t_0 = 0$. Si (x_T, v_T) son las condiciones iniciales de la solución T -periódica $x_T(t)$, evidentemente $\varphi(x_T) = v_T$. Para todo $x_0 < x_T$, por el Corolario 2.3 se tiene que $x(t; x_0, \varphi(x_0)) < x_T(t)$ en el intervalo común de definición. Además por la no existencia de puntos homoclínicos (véanse las observaciones de la subsección anterior) se deduce que $w^-(x_0, \varphi(x_0)) > -\infty$ y $\lim_{t \rightarrow w^-} x(t; x_0, \varphi(x_0)) = 0$.

Por el Teorema de Continuación, se tiene que

$$\limsup_{x \rightarrow x_T^-} w^-(x, \varphi(x)) = w^-(x_T, v_T) = -\infty.$$

Por tanto, existe x_0 tal que $w^-(x_0, \varphi(x_0)) = -KT$ con K un entero dado. Ahora, tomando una sucesión $\{x_n\}$ tendiendo a x_0 por la izquierda (es decir, $x_n < x_0$ para todo n), se tiene que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} w^-(x_n, \varphi(x_n)) \leq -KT.$$

De este modo, $x(t - KT; x_n, \varphi(x_n))$ es también una solución que tiende a la T -periódica, luego sus condiciones iniciales pertenecen a W_s^0 , o lo que es igual, sus condiciones iniciales son $(x(-KT; x_n, \varphi(x_n)), \varphi(x(-KT; x_n, \varphi(x_n))))$. Finalmente, si hacemos tender n a $+\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(-KT; x_n, \varphi(x_n)) = x(-KT; x_0, \varphi(x_0)) = 0$$

luego por el Lema 2.12,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x(-KT; x_n, \varphi(x_n))) = x'(-KT; x_0, \varphi(x_0)) =: v_c < +\infty,$$

y usando la monotonía de φ , se concluye que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = v_c < +\infty$.

2.5.2 Caso conservativo.

En este caso, suponemos que no existe rozamiento, es decir, que $f \equiv 0$. De este modo, la ecuación considerada es simplemente

$$x''(t) + g(x(t)) = p(t), \quad (2.13)$$

con las suposiciones sobre g y p ya establecidas anteriormente.

Lema 2.13. *Si $w^+ = +\infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = +\infty$.*

Demostración. Sea R tal que $g(x) < \frac{\bar{p}}{2}$ para todo $x > R$. Entonces, por la Proposición 2.6 existe t_1 tal que $x(t) > R$ para todo $t > t_1$. Por lo tanto

$$x''(t) = \bar{p} - g(x(t)) + \tilde{p}(t) > \frac{\bar{p}}{2} + \tilde{p}(t) \quad \forall t > t_1.$$

Figura 2.4. Velocidad de escape bajo potencial finito.

Integrando

$$x'(t) - x'(t_1) > \frac{\bar{p}}{2}(t - t_1) + \int_{t_1}^t \tilde{p}(s)ds,$$

y como $\int_{t_1}^t \tilde{p}(s)ds$ es acotado, al tomar límites cuando $t \rightarrow +\infty$ demostramos el Lema.

Proposición 2.8. D^+ es un conjunto abierto.

Demostración. Sea $(x_0, v_0) \in D^+$. Usando el Lema precedente es posible fijar t_1 tal que $x(t; t_0, x_0, v_0) > R$ y $x'(t; t_0, x_0, v_0) > \|\tilde{p}\|_1$ para todo $t \geq t_1$. Por dependencia continua, existe $\rho > 0$ tal que dado $(x_1, v_1) \in B_\rho(x_0, v_0)$, entonces $x(t_1; t_0, x_1, v_1) > R$ y $x'(t_1; t_0, x_1, v_1) > \|\tilde{p}\|_1$.

Para mayor comodidad, identifiquemos $x_1(t) \equiv x(t; t_0, x_1, v_1)$, y vamos a probar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = +\infty$. En caso contrario, $x'(t_M) = 0$ para un primer $t_M > t_1$,

y de nuevo

$$x''(t) > \frac{\bar{p}}{2} + \tilde{p}(t) \quad \forall t \in (t_1, t_M).$$

Ahora, integrando en (t_1, t_M) tenemos

$$-x'(t_1) > \frac{\bar{p}}{2}(t_M - t_1) + \int_{t_1}^{t_M} \tilde{p}(s) ds > -\|\tilde{p}\|_1,$$

lo cual es una contradicción. Así pues, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = +\infty$ y en definitiva $B_\rho(x_0, v_0) \subset D^+$.

Teorema 2.8. *Existe $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente decreciente tal que*

$$W_s^{t_0} = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}.$$

Demostración. Análoga a la primera parte del Teorema 2.5

Finalmente, el estudio asintótico en 0 se realiza mediante los mismos argumentos usados en el caso disipativo.

Teorema 2.9. *Si $\int_0^1 g(s) ds = +\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$.*

Teorema 2.10. *Si $\int_0^1 g(s) ds < +\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) < +\infty$.*

Capítulo 3

Soluciones acotadas en ecuaciones singulares de tipo repulsivo.

Nuestro propósito en este Capítulo es el estudio de ecuaciones con una no-linealidad singular de tipo repulsivo, es decir, de la forma

$$x''(t) + cx'(t) - g(x(t)) = p(t), \quad (3.1)$$

donde c es positiva, p es continua y $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad (3.2)$$

y

$$\int_0^1 g(s) ds = +\infty. \quad (3.3)$$

Si p es T -periódica, es conocido que una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución T -periódica de (3.1) es que el valor medio \bar{p} sea negativo (ver [53, 38]). Nuestro propósito es obtener un resultado análogo sobre la existencia de soluciones acotadas cuando p es una función continua y acotada con un cierto valor medio generalizado.

Nótese que en el “caso modelo” $g(x) = x^{-\alpha}$, la condición (3.3), que se conoce como “condición fuerte”, se cumple si y sólo si $\alpha \geq 1$. Esta hipótesis es esencial puesto que en caso contrario se pueden contruir ejemplos de funciones T -periódicas p con valor medio negativo y tal que no existan soluciones T -periódicas de (3.1) (véase el ejemplo dado en [53]).

Usando los resultados de [1], probaremos que si p es una función acotada con valor medio generalizado negativo, entonces el par formado por cualquier solución de (3.1) y su derivada permanece en un conjunto compacto de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Además,

probaremos que cualquier solución está definida en todo \mathbb{R} . En particular, en el caso periódico se deduce fácilmente la existencia de solución periódica.

Por otra parte, demostraremos resultados sobre la existencia de solución acotada en toda la recta real, así como estabilidad global de dicha solución para un coeficiente de rozamiento c suficientemente grande.

Finalmente, se aplicarán los resultados de [74] para obtener condiciones que aseguren la existencia de solución acotada cuando p es solamente continua y acotada inferiormente.

A modo de aclaración, hay que decir que puesto que solamente se requiere continuidad en g , el problema de valores iniciales para (3.1) no tiene en general una única solución, pero esto no será un problema en las demostraciones.

3.1 Soluciones acotadas en el futuro.

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ el tiempo inicial, fijo pero arbitrario. En adelante, suponemos que $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es continua y verifica (3.2) y (3.3). En esta Sección, p es una función acotada y continua con valor medio generalizado negativo, esto es,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} p(t) dt = p_0 < 0 \quad (3.4)$$

uniformemente con respecto a $a \in \mathbb{R}$. Además, sea $c > 0$.

Proposición 3.1. *Considérese la ecuación (3.1) con las hipótesis establecidas. Entonces, si se define el conjunto*

$$\mathcal{A} = \{x \in C^2([t_0, +\infty)) : \exists m, M, D > 0 \text{ tal que} \\ m < x(t) < M, |x'(t)| < D \forall t \geq t_0\},$$

cualquier solución $x(t)$ de (3.1) pertenece a \mathcal{A} .

Demostración. Probemos primero que $w^+ = +\infty$. Si $w^+ < +\infty$, usando el Teorema de Prolongación, dos opciones son posibles. La primera es que $\lim_{t \rightarrow w^+} x(t) = \lim_{t \rightarrow w^+} x'(t) = \lim_{t \rightarrow w^+} x''(t) = +\infty$, pero tomando límites en la ecuación se tiene

una contradicción. La segunda es que $\lim_{t \rightarrow w^+} x(t) = 0$. En tal caso, tomando límites en (3.1) una de las siguientes alternativas se verifica:

$$i) \lim_{t \rightarrow w^+} x'(t) = +\infty, \text{ pero entonces } \lim_{t \rightarrow w^+} x(t) = +\infty,$$

ó

$$ii) \lim_{t \rightarrow w^+} x''(t) = +\infty, \text{ pero entonces } \lim_{t \rightarrow w^+} x'(t) = +\infty,$$

contradiciendo el hecho de que $x(t)$ tiende a cero en ambos casos. Así pues, queda probado que $w^+ = +\infty$.

Visto esto, si una solución $x(t)$ no pertenece a \mathcal{A} , se tienen las siguientes alternativas:

$$i) \text{ Existe } \{t_n\} \rightarrow +\infty \text{ tal que } x(t_n) \rightarrow 0$$

ó

$$ii) \text{ Existe } \{\tau_n\} \rightarrow +\infty \text{ tal que } x(\tau_n) \rightarrow +\infty$$

ó

$$iii) \text{ Existe } \{\zeta_n\} \rightarrow +\infty \text{ tal que } |x'(\zeta_n)| \rightarrow +\infty.$$

Ahora bien, probaremos que $iii) \Rightarrow i)$. En efecto, si $i)$ no se verifica existirá un $\epsilon_1 > 0$ tal que $x(t) > \epsilon_1$ si $t > t_0$. Pero ahora, para cualquier $\epsilon > 0$ menor que ϵ_1 se define la función

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } x > \epsilon \\ g(\epsilon) & \text{if } x \leq \epsilon \end{cases}.$$

y consideramos la ecuación

$$x''(t) + cx'(t) - g_\epsilon(x(t)) = p(t).$$

Esta ecuación está en las hipótesis del Teorema 2.1 de [1], de donde se deduce que hay una cota uniforme de $x'(t)$, contradiciendo $iii)$. Del mismo modo se demuestra que $ii) \Rightarrow i)$.

Para terminar la demostración, suponemos que se cumple $i)$ y llegamos a una contradicción. Tomando límites en la ecuación, se comprueba que no hay límite de $x(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$, luego en consecuencia existen dos sucesiones $\{\bar{t}_n\}, \{\bar{\tau}_n\} \rightarrow +\infty$ tales que $x(\bar{\tau}_n)$ son máximos y $x(\bar{t}_n)$ son mínimos intercalados, con

$$\{x(\bar{t}_n)\} \rightarrow 0, \quad \{x(\bar{\tau}_n)\} \rightarrow K > 0 \quad (3.5)$$

cuando $n \rightarrow +\infty$.

Ahora conseguimos una cota inferior para la derivada de $x(t)$ cuando $t > \bar{\tau}_0$. Como $p(t)$ es acotada, existe $P > 0$ tal que $|p(t)| < P$. Al ser g positiva,

$$x''(t) + cx'(t) = g(x(t)) + p(t) > -P.$$

Multiplicando por e^{ct} e integrando en $[\bar{\tau}_0, t]$ se obtiene

$$x'(t)e^{ct} > -\frac{P}{c}[e^{ct} - e^{c\bar{\tau}_0}] > -\frac{P}{c}e^{ct},$$

con lo cual

$$x'(t) > -\frac{P}{c}, \quad \forall t > \bar{\tau}_0. \quad (3.6)$$

Por la hipótesis (3.2), existe $R > 0$ tal que $g(x) > P$ para todo $x < R$. Teniendo en cuenta (3.5), existe cierto n_0 tal que $x(\bar{t}_n) < R$ siempre que $n \geq n_0$. Además, cualquier máximo de $x(t)$ es mayor que R . De esta forma, es posible tomar una sucesión $\{s_n\}_{n \geq n_0}$ tal que $s_n < \bar{t}_n$, $x(s_n) = R$ y $x'(t) < 0$ para todo $t \in]s_n, \bar{t}_n[$. Entonces $g(x(t)) > P$ para todo $t \in]s_n, \bar{t}_n[$. Considerando además (3.6), se tiene que

$$x''(t) > g(x(t)) - P - cx'(t) > [g(x(t)) - P][-\frac{c}{P}x'(t)] - cx'(t) = -\frac{c}{P}g(x(t))x'(t)$$

para todo $t \in]s_n, \bar{t}_n[$. Integrando sobre este intervalo,

$$-x'(s_n) > \frac{c}{P} \int_{x(\bar{t}_n)}^R g(s) ds,$$

y pasando al límite cuando $n \rightarrow +\infty$ obtenemos la contradicción buscada, pues el primer miembro está acotado, mientras que el segundo tiende a $+\infty$ por la hipótesis (3.3).

Proposición 3.2. *En las hipótesis previas, si definimos el conjunto*

$$\mathcal{B} = \{x \in C^2(\mathbb{R}) : \exists m > 0 \text{ tal que } x(t) > m \forall t \in \mathbb{R}\},$$

cualquier solución de (3.1) pertenece a \mathcal{B} .

Demostración. Por la Proposición anterior, es suficiente probar el resultado para $t < t_0$. Si invertimos la “dirección del tiempo” haciendo el cambio de variables $\tau = -t$, la ecuación (3.1) pasa a ser

$$x''(\tau) - cx'(\tau) - g(x(\tau)) = p(\tau) \quad (3.7)$$

Por lo tanto, debe probarse que para cualquier solución $x(\tau)$ de (3.7), existe $m > 0$ tal que $x(\tau) > m$ para todo $\tau \geq t_0$. Si tal m no existe, supongamos que $\lim_{\tau \rightarrow w^+} x(\tau) = 0$. Por argumentos parecidos a los usados en la demostración de la Proposición 3.1, se obtiene $\lim_{\tau \rightarrow w^+} x'(\tau) = -\infty$, pero entonces $w^+ < +\infty$ y podemos integrar (3.7) en el intervalo $[t_0, w^+ - \epsilon]$, resultando

$$x'(w^+ - \epsilon) - x'(t_0) - c[x(w^+ - \epsilon) - x(t_0)] - \int_{t_0}^{w^+ - \epsilon} g(x(\tau))d\tau = \int_{t_0}^{w^+ - \epsilon} p(\tau)d\tau.$$

Tomando límites cuando ϵ tiende a cero, el primer miembro de esta igualdad tiende a $-\infty$, mientras que el segundo no lo hace, luego tenemos una contradicción. Por tanto, existen dos sucesiones $\{t_n\}, \{\tau_n\} \rightarrow w^+$ tal que $x(\tau_n)$ son máximos y $x(t_n)$ mínimos intercalados, cumpliendo que

$$\{x(t_n)\} \rightarrow 0, \quad \{x(\tau_n)\} \rightarrow K > 0$$

cuando $n \rightarrow +\infty$. En este punto, solamente hay que seguir los mismos razonamientos de la demostración anterior, llegando a una contradicción.

Para terminar, sólo hay que verificar que cualquier solución $x(\tau)$ de (3.7) está definida en $(-\infty, +\infty)$. Supongamos que el intervalo maximal de definición de $x(\tau)$ es (w^-, w^+) . Sabemos por la Proposición 1 que $w^- = -\infty$. Además, está probado que existe $m > 0$ tal que $x(\tau) > m$ para todo τ , de lo cual se sigue inmediatamente que existe $G > 0$ tal que $g(x(\tau)) < G$. Así pues,

$$x''(\tau) - cx'(\tau) < P + G.$$

Multiplicando por $e^{-c\tau}$ e integrando en $[t_0, \tau]$ se tiene

$$x'(\tau)e^{-c\tau} - x'(t_0)e^{-ct_0} < \frac{P + G}{c}e^{-ct_0}$$

y

$$x'(\tau) < \left\{ \frac{P + G}{c} + x'(t_0) \right\} e^{c(\tau - t_0)}$$

luego si w^+ es finito, entonces $x'(\tau)$ estaría mayorada, lo cual es contradictorio.

Observación. Nótese que la demostración de este resultado es válida sólo suponiendo p acotada y continua y $c \neq 0$, en virtud del cambio $\tau = -t$.

Teorema 3.1. *Considérese la ecuación (3.1) con $c \neq 0$ junto con las hipótesis (3.2) y (3.3). Sea $p(t)$ una función T -periódica y continua con valor medio $\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt < 0$. Entonces, cualquier solución de (3.1) pertenece a $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Además, (3.1) tiene al menos una solución T -periódica.*

Demostración. Para $c > 0$, el teorema es una consecuencia directa de las Proposiciones 3.1 y 3.2 y el segundo teorema de Massera (véase [59]). Para $c < 0$, sólo tenemos que efectuar el cambio $\tau = -t$.

Es conocido que, cuando p es periódica, la condición $\bar{p} < 0$ es necesaria y suficiente para la existencia de solución periódica. En la Proposición 3.1 hemos probado que $p_0 < 0$ es condición suficiente para que toda solución pertenezca a \mathcal{A} . A continuación probaremos que es también condición necesaria.

Proposición 3.3. *Considérese la ecuación (3.1) con las hipótesis de la Proposición 3.1, y $p_0 \geq 0$. Entonces cualquier solución $x(t)$ de (3.1) está definida en $(-\infty, +\infty)$ y es no acotada en $[t_0, +\infty)$. Si además $p_0 > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$.*

Demostración. Por la Proposición 3.2 y la observación dada al final de la demostración, cualquier solución de (3.1) está definida en $(-\infty, +\infty)$. Integrando la ecuación en $[t_0, t]$ se tiene

$$x'(t) + cx(t) = x'(t_0) + cx(t_0) + \int_{t_0}^t g(x(s))ds + \int_{t_0}^t p(s)ds. \quad (3.8)$$

Si $p_0 > 0$ entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t p(s)ds = +\infty$, luego tomando límites en (3.8) tenemos $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x'(t) + cx(t)] = +\infty$, y la tesis de la Proposición se cumple.

Si por el contrario $p_0 = 0$ entonces de la definición se obtiene que el crecimiento de $\int_{t_0}^t p(s)ds$ es sublineal, o sea, para todo $K > 0$ existe $t_K > 0$ tal que si $t > t_K$ entonces

$$\left| \int_{t_0}^t p(s)ds \right| < K |t - t_0|. \quad (3.9)$$

Ahora bien, si $x(t)$ es acotada, existirá un $\epsilon > 0$ tal que $g(x(t)) > \epsilon$ para todo t . Tomando $K = \frac{\epsilon}{2}$ en (3.9), de (3.8) tenemos que para t lo bastante grande

$$\begin{aligned} x'(t) + cx(t) &> x'(t_0) + cx(t_0) + |t - t_0|\epsilon - |t - t_0|\frac{\epsilon}{2} = \\ &= |t - t_0|\frac{\epsilon}{2} + x'(t_0) + cx(t_0), \end{aligned}$$

y tomando límites cuando $t \rightarrow +\infty$, obtenemos una contradicción.

3.2 Soluciones acotadas en toda la recta real.

Como ya sabemos, cuando p no es periódica, la ecuación (3.1) no puede tener soluciones periódicas; en cambio, se plantea la pregunta de si existen o no soluciones acotadas. Se entiende que $x(t)$ es una solución acotada si $x(t)$ y $x'(t)$ son acotadas en \mathbb{R} .

Teorema 3.2. *Consideremos la ecuación (3.1) con las hipótesis de la Proposición 3.1. Sea ξ_0 un número positivo tal que $g(\xi_0) = -p_0$ y supongamos que g es estrictamente decreciente en ξ_0 . Entonces, para todo $\epsilon > 0$ con $\epsilon < \xi_0$, existe $c_\epsilon > 0$ tal que dado $c \geq c_\epsilon$, la ecuación (3.1) tiene una solución que verifica*

$$|x(t) - \xi_0| < \xi_0 - \epsilon, |x'(t)| < \xi_0 - \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. La demostración se obtiene usando la función truncada g_ϵ y aplicando el Teorema 5.2 de [1] con $\alpha = \xi_0 - \epsilon$. La solución obtenida es mayor que ϵ y por tanto es una solución de (3.1).

Corolario 3.1. *Consideremos la ecuación (3.1) con las hipótesis de la Proposición 3.1. Si además g es de clase C^1 y estrictamente decreciente, entonces existe c^* tal que dado $c \geq c^*$, existe una única solución acotada de (3.1) que es globalmente asintóticamente estable.*

Demostración. Puesto que g es estrictamente decreciente, trivialmente existe un ξ_0 en las condiciones del Teorema 3.2. Ahora, sólo hay que tomar $\epsilon \rightarrow \xi_0$ y aplicar el Teorema 1.2 de [2] para la ecuación correspondiente.

Hay que resaltar que la hipótesis clave en estos dos últimos resultados es que el coeficiente de rozamiento c sea bastante alto. Sin embargo, esta hipótesis puede ser eliminada, asumiendo una condición más restrictiva para g . En lo siguiente, sea P tal que $|p(t)| \leq P$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema 3.1. *Dada $x(t)$ una solución acotada de (3.1) en $(-\infty, +\infty)$, se tiene que*

$$x'(t) > -\frac{P}{c}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Efectuando el cambio $\tau = -t$, se obtiene

$$x''(\tau) - cx'(\tau) - g(x(\tau)) = p(\tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Vamos a probar que $x'(\tau) < \frac{P}{c}$ para todo τ . En efecto, de no ser cierto existiría τ_0 tal que $x'(\tau_0) \geq \frac{P}{c} > 0$, luego

$$x''(\tau_0) = cx'(\tau_0) + g(x(\tau_0)) + p(\tau_0) > 0.$$

De esta forma, $x(\tau)$ es una función creciente y convexa para todo $\tau > \tau_0$, luego sería no acotada contradiciendo la hipótesis. Una vez hecho esto, sólo hay que deshacer el cambio.

Proposición 3.4. *Sea $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua cumpliendo las hipótesis (3.2) y (3.3). Suponemos además que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon g(2\epsilon) > \frac{P^2}{c^2} \quad (3.10)$$

y sea $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon[g(2\epsilon) - P] > \frac{P^2}{c^2}, \quad (3.11)$$

y

$$g(x) > P, \quad \forall 0 < x < 2\epsilon. \quad (3.12)$$

Bajo estas hipótesis, ϵ es una cota inferior de cualquier solución acotada de (3.1) en $(-\infty, +\infty)$.

Demostración. Es fácil ver que si la conclusión no es cierta, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x(t_0) = \min x(t) < \epsilon$; de no ser así, un simple paso al límite en la ecuación nos lleva a contradicción. Tomemos $t_1 < t_0$ tal que $x(t_1) = 2\epsilon$ y $x'(t) \leq 0$ para todo $t \in (t_1, t_0)$. Si tal t_1 no existe, entonces debería existir un máximo $x(t_M)$ por debajo de 2ϵ , pero por la ecuación y la hipótesis (3.12) tendríamos

$$x''(t_M) = g(x(t_M)) + p(t) > g(2\epsilon) - P > 0,$$

lo cual no es posible.

Ahora, el Teorema del Valor Medio nos proporciona un $\xi \in (t_1, t_0)$ tal que

$$\begin{aligned} x'(t_0) - x'(t_1) &= x''(\xi)(t_0 - t_1) = \\ &= [-cx'(\xi) + g(x(\xi)) + p(\xi)](t_0 - t_1) > [g(2\epsilon) - P](t_0 - t_1), \end{aligned}$$

y aplicando el Lema 3.1 se tiene que

$$t_0 - t_1 < \frac{P}{c[g(2\epsilon) - P]}.$$

Una nueva aplicación del Teorema del Valor Medio nos da

$$x(t_0) - x(t_1) = x'(\xi)(t_0 - t_1) > x'(\xi) \frac{P}{c[g(2\epsilon) - P]} > \frac{-P^2}{c^2[g(2\epsilon) - P]}.$$

En consecuencia,

$$\epsilon > x(t_0) > \frac{-P^2}{c^2[g(2\epsilon) - P]} + 2\epsilon,$$

esto es,

$$\frac{P^2}{c^2[g(2\epsilon) - P]} > \epsilon,$$

contradiciendo la hipótesis (3.11).

Observación. Claramente, toda no-linealidad que verifique (3.10) permite seleccionar un ϵ que cumpla (3.11) y (3.12). La hipótesis (3.10) se cumple por ejemplo si $g(x) = x^{-\alpha}$ con $\alpha > 1$ o si $\alpha = 1$ y $\sqrt{2}P < c$.

Usando de nuevo la misma función empleada en la Proposición 3.1 y aplicando los resultados de [1], se puede probar el siguiente Teorema.

Teorema 3.3. *Consideremos la ecuación (3.1) con las hipótesis de la Proposición 3.1 y (3.10). Entonces, existe una solución acotada en toda la recta real.*

Corolario 3.2. *Consideremos la ecuación (3.1) con las hipótesis de la Proposición 3.1, y supongamos además que g es de clase C^1 y estrictamente decreciente verificando que*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon g(2\epsilon) = K > 0.$$

Sea $\epsilon^* = g_x^{-1}(-\frac{\epsilon^2}{4})$ y P^* cumpliendo las siguientes condiciones

$$P^* < \sqrt{Kc},$$

$$\epsilon^* g(2\epsilon^*) > P^* \left[\frac{P^*}{c^2} + \epsilon^* \right]$$

y

$$g(x) > P^*, \quad 0 < x < 2\epsilon^*.$$

Entonces, para todo $p(t)$ tal que $|p(t)| \leq P^*$, existe una solución acotada en toda la recta real que es globalmente asintóticamente estable.

Demostración. Por la Proposición 3.4, existe una solución acotada en toda la recta real y ϵ^* es una cota inferior. Ahora, la demostración se concluye con una linealización de la ecuación para aplicar después los resultados de [2].

Es importante observar que las demostraciones del Lema 3.1 y la Proposición 3.4 son válidas suponiendo que p es sólo continua y acotada inferiormente. Esto nos va a permitir establecer el siguiente Teorema mediante una aplicación directa del Teorema 2.1 de [74]. Siguiendo la notación de dicho artículo, vamos a denotar por BC el conjunto de funciones acotadas y continuas, y por C_0 el conjunto de funciones continuas con primitiva acotada.

Teorema 3.4. *Sea p una función continua, acotada inferiormente por $-P$ y tal que $p = p^* + p^{**}$ con $p^* \in C_0$ y $p^{**} \in BC$ y negativa. Entonces, si g satisface (3.2), (3.3) y (3.10), la ecuación (3.1) tiene al menos una solución acotada en toda la recta real.*

3.3 Notas y posibles extensiones.

- El resultado de existencia de solución periódica ya había sido obtenido previamente por Lazer-Solimini para el caso conservativo en [53] y por Habets-Sanchez en [38] para el caso con rozamiento, usando un método diferente que incluye cotas a priori y grado topológico. Estos artículos fueron el punto de partida y la principal motivación del presente estudio.
- Si no se verifica la condición (3.3), es sencillo probar siguiendo los argumentos de [53] que existen ejemplos de funciones periódicas $p(t)$ con valor medio negativo para las cuales no existen soluciones acotadas.
- Para el caso conservativo ($c = 0$), la Proposición 3.2 puede probarse usando técnicas similares, pero la cuestión de si la Proposición 3.1 es cierta en general parece un problema abierto.
- Todos los resultados presentados en este Capítulo son ciertos si p es sólo acotada y consideramos soluciones en el sentido débil de Carathéodory, es decir, en $W^{2,\infty}((t_0, +\infty))$ ó $W^{2,\infty}(\mathbb{R})$.
- En vista de la observación que sigue al Teorema 3.1 en [1], la Proposición 3.1 se cumple si cambiamos la hipótesis (3.4) por

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = p_0 < 0.$$

No obstante, (3.4) es fundamental para el Teorema 3.2.

Capítulo 4

Movimiento periódico de un sistema de varias partículas con carga eléctrica.

En este Capítulo pretendemos obtener condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones periódicas de un sistema formado por dos o tres partículas con carga eléctrica con un grado de libertad perturbadas periódicamente.

4.1 Movimiento periódico de dos partículas cargadas.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{cases} x'' = -Ag(y-x) + h(t) \\ y'' = Ag(y-x) + p(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

donde h, p son funciones T -periódicas, $A \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad (4.2)$$

Buscamos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones T -periódicas en el espacio de configuración $\Sigma = \{(x, y) : x < y\}$.

Como ya hemos visto en los capítulos anteriores, el ejemplo típico de esta clase de no-linealidad es $g(x) = \frac{1}{x^2}$. En tal caso, el sistema (4.1) gobierna el movimiento de dos partículas de masa unitaria con posición x, y en la recta real, cargas q_1, q_2 y fuerzas T -periódicas externas $h(t), p(t)$ actuando sobre cada partícula. Entonces, $A = Kq_1q_2$ (donde K es la constante de Coulomb) y dependiendo de su signo tenemos dos situaciones diferentes que serán estudiadas en los dos teoremas siguientes. En el primero se consideran cargas de signo contrario ($A < 0$), mientras

que en el segundo las cargas son del mismo signo ($A > 0$). La situación se ilustra en la Figura 4.1.

Figura 4.1. Movimiento periódico de dos partículas.

Teorema 4.1. *Sea $A < 0$ y g verificando (4.2). Entonces, una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución T -periódica del sistema (4.1) es que*

$$\bar{h} < 0, \quad \bar{h} + \bar{p} = 0.$$

Demostración. Integrando la primera ecuación del sistema sobre un periodo se obtiene que $\bar{h} < 0$, mientras que si sumamos las dos ecuaciones e integramos de nuevo obtenemos $\bar{h} + \bar{p} = 0$, luego la necesidad es clara.

Para la suficiencia, efectuamos el cambio de variables

$$s(t) = x(t) + y(t),$$

$$d(t) = y(t) - x(t)$$

con lo que obtenemos el siguiente sistema desacoplado equivalente

$$s''(t) = h(t) + p(t) \tag{4.3}$$

$$d''(t) = 2Ag(d(t)) + p(t) - h(t) \tag{4.4}$$

Claramente, la ecuación (4.3) tiene una solución T -periódica si y sólo si $\bar{h} + \bar{p} = 0$, mientras que (4.4) ya ha sido extensamente considerada en esta memoria, pues es el caso de la ecuación escalar con una singularidad atractiva (ver Sección 2.5). Sabemos por tanto que (4.4) tiene una solución T -periódica si y sólo si $\bar{p} - \bar{h} > 0$, pero como $\bar{h} + \bar{p} = 0$, entonces $\bar{p} = -\bar{h} > 0$ y en efecto $\bar{p} - \bar{h} = -2\bar{h} > 0$.

Usando el mismo argumento, se prueba el siguiente resultado cuando la singularidad es de tipo repulsivo.

Teorema 4.2. *Sea $A > 0$ y g verificando (4.2) y además*

$$\int_0^1 g(s) ds = +\infty. \quad (4.5)$$

Entonces, una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución T -periódica del sistema (4.1) es que

$$\bar{h} > 0, \quad \bar{h} + \bar{p} = 0.$$

Observación. En [31] se prueba la existencia de una sucesión de soluciones subarmónicas de (4.4) con periodos minimales tendiendo a infinito bajo condiciones de existencia solución periódica. Observando el cambio de variables efectuado, tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 4.1. *Bajo las hipótesis del Teorema 4.2, el sistema (4.1) tiene una sucesión de soluciones subarmónicas con periodo minimal tendiendo a infinito.*

4.2 Movimiento periódico de tres partículas con carga del mismo signo.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{cases} x_1'' = -Ag(x_2 - x_1) - Bg(x_3 - x_1) + h(t) \\ x_2'' = Ag(x_2 - x_1) - Cg(x_3 - x_2) + k(t) \\ x_3'' = Bg(x_3 - x_1) + Cg(x_3 - x_2) + p(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

donde A, B, C son constantes positivas, h, k, p son funciones continuas y T -periódicas y $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua que verifica las hipótesis (4.2) y (4.5). Buscamos soluciones T -periódicas en el espacio de configuración

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 < x_2 < x_3\}.$$

En el “caso modelo” $g(x) = \frac{1}{x^2}$, este sistema gobierna el movimiento de tres partículas de masa unitaria en las posiciones x_1, x_2, x_3 de la recta real, con cargas q_1, q_2, q_3 del mismo signo y perturbadas periódicamente por fuerzas externas $h(t), k(t), p(t)$. En tal caso, $A = Kq_1q_2, B = Kq_1q_3$ y $C = Kq_2q_3$.

Es fácil verificar que una condición necesaria para la existencia de soluciones T -periódicas es que

$$\bar{h} > 0 > \bar{p}, \quad \bar{h} + \bar{k} + \bar{p} = 0. \quad (4.7)$$

Nuestro objetivo es probar que esta condición es también suficiente.

Figura 4.2. Movimiento periódico de tres partículas.

Efectuando el cambio de variables

$$\begin{aligned} s(t) &= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ u(t) &= x_2(t) - x_1(t) \\ v(t) &= x_3(t) - x_2(t), \end{aligned}$$

obtenemos el sistema equivalente

$$s''(t) = h(t) + k(t) + p(t)$$

$$\begin{cases} u''(t) = 2Ag(u) + Bg(u+v) - Cg(v) + k(t) - h(t) \\ v''(t) = 2Cg(v) + Bg(u+v) - Ag(u) + p(t) - k(t). \end{cases} \quad (4.8)$$

Nótese que la primera ecuación es independiente del resto del sistema y que posee una solución T -periódica si y sólo si $\bar{h} + \bar{k} + \bar{p} = 0$, luego nos queda probar la existencia de una solución T -periódica (u, v) del sistema (4.8).

Considérese la siguiente homotopía,

$$\begin{cases} u''(t) = 2Ag(u) + \lambda Bg(u+v) - Cg(v) + k_\lambda(t) - h_\lambda(t) \\ v''(t) = 2Cg(v) + \lambda Bg(u+v) - Ag(u) + p_\lambda(t) - k_\lambda(t) \end{cases} \quad (4.9)$$

con $h_\lambda(t) = \bar{h} + \lambda\tilde{h}(t), k_\lambda(t) = \bar{k} + \lambda\tilde{k}(t), p_\lambda(t) = \bar{p} + \lambda\tilde{p}(t)$ y $\lambda \in [0, 1]$.

En el siguiente Lema, denotamos por deg_B el grado de Brouwer usual.

Lema 4.1. *Sea $F : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como*

$$F(u, v) = (2Ag(u) - Cg(v) + \bar{k} - \bar{h}, 2Cg(v) - Ag(u) + \bar{p} - \bar{k}).$$

Supongamos que existe un conjunto compacto $K \subset (\mathbb{R}^+)^2$ tal que $(u(t), v(t)) \in K$, $t \in [0, T]$, para toda solución T -periódica (u, v) de (4.9), $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces, si

$$\deg_B(F, \Omega, 0) \neq 0$$

para algún conjunto abierto y acotado Ω conteniendo K , existe al menos una solución T -periódica de (4.8).

El resultado anterior es una consecuencia directa del Teorema 2 establecido en [15]. Para aplicarlo, vamos a probar la existencia de cotas a priori de toda solución T -periódica de (4.9), para seguidamente computar el grado.

Proposición 4.1. *Bajo las condiciones (4.2), (4.5) y (4.7), existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\epsilon < u(t) < \frac{1}{\epsilon}, \quad \epsilon < v(t) < \frac{1}{\epsilon} \quad \forall t \in [0, T],$$

para toda solución T -periódica (u, v) del sistema homotópico (4.9).

Demostración. Comenzamos integrando ambas ecuaciones sobre un periodo,

$$2A \int_0^T g(u)dt + \lambda B \int_0^T g(u+v)dt - C \int_0^T g(v)dt + \bar{k}T - \bar{h}T = 0, \quad (4.10)$$

$$2C \int_0^T g(v)dt + \lambda B \int_0^T g(u+v)dt - A \int_0^T g(u)dt + \bar{p}T - \bar{k}T = 0. \quad (4.11)$$

Si multiplicamos (4.10) por 2 y la sumamos a (4.11), se obtiene

$$3A \int_0^T g(u)dt + 3\lambda B \int_0^T g(u+v)dt + (\bar{p} + \bar{k} - 2\bar{h})T = 0,$$

pero $\bar{p} + \bar{k} = -\bar{h}$, luego

$$A \int_0^T g(u)dt + \lambda B \int_0^T g(u+v)dt = \bar{h}T > 0. \quad (4.12)$$

Un argumento análogo lleva a

$$C \int_0^T g(v)dt + \lambda B \int_0^T g(u + v)dt = -\bar{p}T > 0. \quad (4.13)$$

Ahora, usamos la hipótesis (4.2) para fijar $\psi_1 > 0$ tal que

$$g(x) < \frac{\bar{h}}{2(A+B)}, \quad \forall x > \psi_1.$$

Nótese que esto es posible pues $\bar{h}, A, B > 0$. Por otra parte, si $u(t) > \psi_1$ para todo $t \in [0, T]$, entonces

$$Ag(u(t)) + \lambda Bg(u(t) + v(t)) < \frac{A\bar{h}}{2(A+B)} + \frac{\lambda B\bar{h}}{2(A+B)} \leq \bar{h} \quad t \in [0, T],$$

e integrando se llega a una contradicción con (4.12). Por tanto, existe t_1 tal que $u(t_1) \leq \psi_1$.

Seguidamente, fijemos $\psi_2 < \psi_1$ tal que

$$g(x) > \frac{\bar{h}}{A}, \quad \forall x < \psi_2.$$

Si $u(t) < \psi_2$ para todo $t \in [0, T]$, entonces

$$Ag(u(t)) + \lambda Bg(u(t) + v(t)) > Ag(u(t)) \geq \bar{h} \quad t \in [0, T],$$

e integrando se llega a una nueva contradicción con (4.12); en consecuencia, existe t_2 tal que $u(t_2) \geq \psi_2$. Finalmente, usando la continuidad de u , concluimos que existe $\hat{t} \in [0, T]$ tal que

$$\psi_2 < u(\hat{t}) < \psi_1.$$

Un argumento completamente simétrico proporciona ψ_3, ψ_4 no dependientes de (u, v) tales que existe $\hat{t} \in [0, T]$ con

$$\psi_4 < v(\hat{t}) < \psi_3.$$

Volvamos nuestra atención a (4.12) y (4.13). Se tiene que

$$A \int_0^T g(u)dt < \bar{h}T, \quad \lambda B \int_0^T g(u + v)dt < \bar{h}T, \quad C \int_0^T g(v)dt < -\bar{p}T. \quad (4.14)$$

Por tanto, tomando valores absolutos en el sistema (4.9) e integrando en $[0, T]$ obtenemos

$$\|u''\|_1 \leq 4\bar{h}T - \bar{p}T + |\bar{k}|T + \|\tilde{k}\|_1 + \|\tilde{h}\|_1 =: M_1$$

y

$$\|v''\|_1 \leq -3\bar{p}T + \bar{h}T + |\bar{k}|T + \|\tilde{p}\|_1 + \|\tilde{k}\|_1 =: M_2.$$

Si $u(t_*) = \min\{u(t) : t \in [0, T]\}$,

$$|u'(t)| = \left| \int_{t_*}^t u''(s)ds \right| \leq \int_{t_*}^t |u''(s)|ds \leq \|u''\|_1 \leq M_1,$$

luego $\|u'\|_\infty \leq M_1$, y por el mismo razonamiento $\|v'\|_\infty \leq M_2$. Consecuentemente,

$$u(t) - u(\tilde{t}) = \int_{\tilde{t}}^t u'(s)ds \leq \int_{\tilde{t}}^t |u'(s)|ds \leq T\|u'\|_\infty \leq TM_1,$$

$$v(t) - v(\hat{t}) = \int_{\hat{t}}^t v'(s)ds \leq \int_{\hat{t}}^t |v'(s)|ds \leq T\|v'\|_\infty \leq TM_2$$

para todo $t \in [0, T]$, y finalmente concluimos que

$$u(t) \leq TM_1 + u(\tilde{t}) < TM_1 + \psi_1,$$

$$v(t) \leq TM_2 + v(\hat{t}) < TM_2 + \psi_3$$

para todo $t \in [0, T]$.

Ahora, vamos a establecer cotas a priori por debajo. Definimos

$$w_1(t) = \lambda Bg(u(t) + v(t)) - Cg(v(t)) + k_\lambda(t) - h_\lambda(t).$$

Esta función está acotada en la norma de $L^1(0, T)$ por las estimaciones (4.14). De hecho,

$$\|w_1\|_1 \leq 2\bar{h}T - \bar{p}T + |k|T + \|\tilde{k}\|_1 + \|\tilde{h}\|_1 =: W_1.$$

Si multiplicamos la primera ecuación del sistema por u' e integramos en $[\tilde{t}, t]$, tenemos

$$\frac{u'(t)^2}{2} - \frac{u'(\tilde{t})^2}{2} - 2A \int_{\tilde{t}}^t g(u(s))u'(s)ds = \int_{\tilde{t}}^t w_1(s)u'(s)ds$$

y entonces

$$2A \int_{u(t)}^{u(\tilde{t})} g(s)ds \leq \int_{\tilde{t}}^t |w_1(s)u'(s)|ds + \frac{u'(\tilde{t})^2}{2} \leq \|w_1\|_1 \|u'\|_\infty + \frac{M_1^2}{2} \leq W_1 M_1 + \frac{M_1^2}{2}.$$

Por la hipótesis (4.5), se puede tomar $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$\int_{\epsilon_1}^{\psi_2} g(s)ds \geq \frac{1}{2A}(W_1M_1 + \frac{M_1^2}{2}).$$

Entonces,

$$\int_{u(t)}^{u(\tilde{t})} g(s)ds \leq \int_{\epsilon_1}^{\psi_2} g(s)ds$$

y como $u(\tilde{t}) > \psi_2$, concluimos que

$$u(t) > \epsilon_1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Podemos aplicar a v análogos razonamientos definiendo

$$w_2(t) = \lambda Bg(u(t) + v(t)) - Ag(u(t)) + p_\lambda(t) - k_\lambda(t),$$

con lo que encontramos $\epsilon_2 > 0$ tal que

$$v(t) > \epsilon_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

En definitiva, la demostración se cierra tomando

$$\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \frac{1}{TM_1 + \psi_1}, \frac{1}{TM_2 + \psi_3}\}.$$

Observación. Nótese que la presencia de cotas a priori es una diferencia notable con la situación presentada en [31].

Por último, probamos nuestro resultado de existencia computando el grado.

Teorema 4.3. *Las condiciones $\bar{h} > 0 > \bar{p}$, $\bar{h} + \bar{k} + \bar{p} = 0$ son necesarias y suficientes para la existencia de una solución T -periódica del sistema (4.6).*

Demostración. Por el Lema 4.1 y la Proposición anterior, basta con probar que

$$\deg_B(F, \Omega, 0) \neq 0$$

siendo $F : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(u, v) = (2Ag(u) - Cg(v) + \bar{k} - \bar{h}, 2Cg(v) - Ag(u) + \bar{p} - \bar{k})$$

y Ω un abierto acotado que contiene a

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \epsilon < u(t) < \frac{1}{\epsilon}, \epsilon < v(t) < \frac{1}{\epsilon}\}$$

A tal fin, efectuamos una homotopía convexa entre F y cierta $F_0 : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F_0(u, v) = (2Ag_0(u) - Cg_0(v) + \bar{k} - \bar{h}, 2Cg_0(v) - Ag_0(u) + \bar{p} - \bar{k}),$$

donde $g_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua estrictamente decreciente que cumple (4.2) y tal que

$$g_0(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (4.15)$$

Entonces, los grados de F y F_0 tienen el mismo valor (tomando si es necesario un Ω más grande) si encontramos cotas a priori para las soluciones de

$$\lambda F(u, v) + (1 - \lambda)F_0(u, v) = 0, \quad \lambda \in [0, 1],$$

es decir,

$$\begin{cases} 2A(\lambda g(u) + (1 - \lambda)g_0(u)) - C(\lambda g(v) + (1 - \lambda)g_0(v)) + \bar{k} - \bar{h} = 0 \\ 2C(\lambda g(v) + (1 - \lambda)g_0(v)) - A(\lambda g(u) + (1 - \lambda)g_0(u)) + \bar{p} - \bar{k} = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Si se suman estas ecuaciones,

$$A(\lambda g(u) + (1 - \lambda)g_0(u)) + C(\lambda g(v) + (1 - \lambda)g_0(v)) + \bar{p} + \bar{h} = 0$$

luego

$$\lambda g(u) + (1 - \lambda)g_0(u) < \frac{\bar{h} - \bar{p}}{A}$$

y usando (4.15),

$$g_0(u) < \frac{\bar{h} - \bar{p}}{A}.$$

Pero g_0 es estrictamente decreciente y verifica (4.2), luego existe la inversa g_0^{-1} y

$$u > g_0^{-1}\left(\frac{\bar{h} - \bar{p}}{A}\right).$$

Por otra parte, si multiplicamos por 2 la primera ecuación de (4.16) y la sumamos a la segunda,

$$3A(\lambda g(u) + (1 - \lambda)g_0(u)) = 3\bar{h},$$

o sea,

$$g_0(u) + \lambda(g(u) - g_0(u)) = \frac{\bar{h}}{A}.$$

Por tanto, $g(u) > \frac{\bar{h}}{A} > 0$, y usando (4.2) se concluye que existe $M > 0$ tal que $u < M$.

Por medio de argumentos simétricos, es fácil obtener cotas a priori para v . Así pues,

$$\deg_B(F, \Omega, 0) = \deg_B(F_0, \Omega, 0).$$

Finalmente, constatamos que este último grado es distinto de cero usando el Teorema de Multiplicación para el grado de Brouwer (ver Theorem 2.3.1 en [57]). En efecto, si definimos las funciones $G_0 : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow (\mathbb{R}^+)^2$, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mediante $G_0(x, y) = (g_0(x), g_0(y))$ y $T(x, y) = (2Ax - Cy + \bar{k} - \bar{h}, -Ax + 2Cy + \bar{p} - \bar{k})$ respectivamente, entonces $F_0 = T \circ G_0$. Claramente, G_0 es una aplicación biyectiva por serlo g_0 , y del mismo modo, T es biyectiva pues

$$\det \begin{pmatrix} 2A & -C \\ -A & 2C \end{pmatrix} = AC \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Llamemos $(p_1, p_2) = T^{-1}(0, 0)$. Ahora, una simple aplicación del Teorema de Multiplicación implica

$$\deg_B(F_0, \Omega, 0) = \deg_B(T \circ G_0, \Omega, 0) = \deg_B(T, G_0(\Omega), 0) \deg_B(G_0, \Omega, (p_1, p_2)).$$

Claramente, $\deg_B(T, G_0(\Omega), 0) \neq 0$ por definición de grado, mientras que

$$\deg_B(G_0, \Omega, (p_1, p_2)) = \deg_B(g_0, (\epsilon, \frac{1}{\epsilon}), p_1) \deg_B(g_0, (\epsilon, \frac{1}{\epsilon}), p_2) = 1,$$

con lo que se concluye la demostración.

Para terminar, es interesante observar que todos los resultados de este Capítulo (excepto la observación del Teorema 4.2) siguen verificándose si añadimos un “término de rozamiento” de la forma cx_i con c constante.

Capítulo 5

Movimiento periódico en presencia de rozamiento no lineal y fricción seca.

En los artículos [13] y [65] se ha considerado una clase de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden donde la no-linealidad depende sólo de la derivada,

$$x''(t) + f(x'(t)) = p(t), \quad t \in [0, T]$$

con distintas condiciones de contorno (Dirichlet, Neumann o periódicas).

Nuestro propósito en este Capítulo es el estudio de la existencia y unicidad de soluciones periódicas de tres clases de ecuaciones diferenciales ordinarias escalares en las que la no-linealidad depende tanto de la solución como de su derivada. La primera extiende en cierto sentido los resultados obtenidos en [65] para la ecuación escalar periódica. Como consecuencia, se obtienen resultados de existencia sobre la ecuación del péndulo con rozamiento no lineal. El péndulo es el paradigma de problema no lineal y, desde los tiempos de Galileo, ha dado lugar a multitud de problemas y controversias, a partir de los cuales se han producido grandes avances en el Análisis No Lineal cuya importancia excede con mucho la simplicidad del modelo. Para conocer con detalle el desarrollo histórico del problema puede consultarse [63].

La segunda ecuación que consideramos presenta una singularidad atractiva, conectando de este modo con el Capítulo 2. Finalmente, se estudia el caso de dos singularidades. La idea clave de las demostraciones es usar la información obtenida en [65] junto con el método de sub y supersoluciones. Además, se prueba un resultado de unicidad en la línea del Capítulo 2.

Por otra parte, una de nuestras mayores motivaciones a la hora de abordar este tipo de ecuaciones fue el estudio de la fricción seca, por lo que la Sección 5.3 se dedica enteramente a su estudio. En las demostraciones se usa fundamental-

mente un método de aproximación mediante funciones univaluadas, junto con la obtención de cotas a priori para las soluciones.

5.1 La ecuación no singular.

Consideremos la siguiente ecuación

$$x''(t) + F(x(t), x'(t)) = \bar{p} + \tilde{p}(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.1)$$

siendo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $\tilde{p} \in \widetilde{L}^2(0, T)$. Estamos interesados en la existencia de soluciones T -periódicas, entendiéndose por tal una función $x \in H^2(0, T)$ que verifica la ecuación y tal que $x(0) = x(T)$, $x'(0) = x'(T)$.

Definición 5.1. *Se dice que la ecuación (5.1) satisface una condición de Bernstein-Nagumo si la existencia de una cota a priori para las soluciones T -periódicas de (5.1) implica una cota a priori para sus derivadas.*

Algunas condiciones de Bernstein-Nagumo específicas son las siguientes

- $F(x, y) = f(y) + g(x)$.
- Dado $p \in [1, +\infty]$, sea $q \in [1, \infty]$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $|x| \leq C$ para cierto C , entonces existen $\psi \in L^p(0, T)$ y $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que $|F(x, y) - \bar{p} - \tilde{p}(t)| \leq \psi(t)k(|y|)$ para todo $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, cumpliéndose que

$$\int_0^{+\infty} \frac{s^{\frac{1}{q}}}{k(s)} ds = +\infty$$

(ésta es una generalización de la condición clásica de Nagumo establecida en [69], véanse [20, 60] para más detalles).

- $F(x, y)$ es Lipschitz-continua en la segunda variable, es decir, existe $L > 0$ tal que

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

(véase [38]).

Tanto en la presente Sección como en la siguiente, suponemos que se verifica una condición de Bernstein-Nagumo sobre la ecuación considerada, ya sea alguna de las anteriores o cualquier otra.

El siguiente Teorema será el resultado central de esta Sección.

Teorema 5.1. *Supongamos que existe una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \gamma < \delta \leq +\infty$ tales que*

$$F(x, y) \geq f(y), \quad \forall x \in]\alpha, \beta] \quad (5.2)$$

$$F(x, y) \leq f(y), \quad \forall x \in [\gamma, \delta[\quad (5.3)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Sea $K \leq \min\{\beta - \alpha, \delta - \gamma\}$. Entonces, para todo $\tilde{p} \in \widetilde{L}^2(I)$ con $\|\tilde{p}\|_2 \leq \frac{6\sqrt{5}}{T\sqrt{T}}K$, existe $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación (5.1) tiene al menos una solución T -periódica para todo valor medio \bar{p} tal que

$$\inf_{s \in [\gamma, \delta - K[} \left\{ \max_{\substack{x \in [s, s+K] \\ |y| \leq \frac{\sqrt{15}K}{T}}} \{F(x, y) - f(y)\} \right\} < \bar{p} - \bar{p}_0 < \sup_{s \in]\alpha, \beta - K]} \left\{ \min_{\substack{x \in [s, s+K] \\ |y| \leq \frac{\sqrt{15}K}{T}}} \{F(x, y) - f(y)\} \right\}.$$

Además, si este ínfimo (resp. supremo) es un mínimo (resp. máximo), entonces la desigualdad respectiva no es estricta.

Demostración. Considerando la ecuación

$$x''(t) + f(x'(t)) = \bar{p}_0 + \tilde{p}(t), \quad (5.4)$$

los resultados de [65] establecen la existencia de un $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ tal que (5.4) tiene una familia de soluciones T -periódicas $u + C$, con $C \in \mathbb{R}$. Ahora, multiplicando (5.4) por u'' e integrando en un periodo, se deduce que $\|u''\|_2 \leq \|\tilde{p}\|_2$.

A continuación, usamos la siguiente versión de la desigualdad de Sobolev

$$\|u'\|_\infty \leq \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{3}} \|u''\|_2,$$

demostrada por ejemplo en la página 207 de [79]. Así, se tiene que

$$\|u'\|_\infty \leq \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{3}} \|\tilde{p}\|_2 \leq \frac{\sqrt{15}K}{T}.$$

Por otra parte, reproduciendo la demostración de la anterior desigualdad en la Proposición 2.7 del citado libro (con $m=0$) pero considerando \mathcal{H} como el operador de doble integración de valor medio cero, y usando que $\sum_{s=1}^{+\infty} s^{-4} = \frac{\pi^4}{90}$, se deduce fácilmente la siguiente desigualdad de tipo Sobolev

$$\|\tilde{u}\|_{\infty} \leq \frac{T\sqrt{T}}{12\sqrt{5}} \|u''\|_2.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$|u(t_1) - u(t_0)| \leq 2\|\tilde{u}\|_{\infty} \leq \frac{T\sqrt{T}}{6\sqrt{5}} \|\tilde{p}\|_2 \leq K$$

para cualesquiera $t_0, t_1 \in [0, T]$. En consecuencia, la condición impuesta sobre \bar{p} permite tomar $C_1 \leq C_2$ tales que $x_1(t) = u(t) + C_1 \in [\alpha, \beta]$ (o $] \alpha, \beta]$ si $\alpha = -\infty$) y $x_2(t) = u(t) + C_2 \in [\gamma, \delta]$ (o $[\gamma, \delta[$ si $\delta = +\infty$) es una pareja de sub y supersoluciones ordenadas de (5.1), lo cual junto con la condición de Bernstein-Nagumo impuesta en la ecuación implica la existencia de una solución T -periódica entre ellas.

Observación 1. Si $\alpha = -\infty$ y $\delta = +\infty$, no hay condición alguna sobre la norma de \tilde{p} . Algunos ejemplos de F y f verificando las hipótesis (5.2) – (5.3) son

- i) $F(x, y) = f(y) + g(x)$, donde $xg(x) \leq 0$ para todo $|x| > R$.
- ii) $F(x, y) = h(x)f(y)$, donde f es positivo (resp. negativo) y h está mayorado (resp. minorado) para $x > R$ y minorado (resp. mayorado) para $x < -R$.
- iii) $F(x, y) = h(x)f(y) + g(x)$, con h, f y g como antes.

Observación 2. De la demostración se deduce que el conjunto de valores medios \bar{p} para los cuales la ecuación (5.4) tiene una solución T -periódica está incluido en el conjunto de \bar{p} para los que (5.1) tiene una solución T -periódica.

Como consecuencia directa de este Teorema tenemos el siguiente resultado sobre la ecuación del péndulo con fricción no lineal.

Corolario 5.1. *Sea la ecuación*

$$x''(t) + f(x'(t)) + a \operatorname{sen}(x(t)) = \bar{p} + \tilde{p}(t), \quad (5.5)$$

donde f es una función continua. Sea $0 < K \leq \pi$. Entonces, para todo $\tilde{p}(t) \in \widetilde{L}^2(0, T)$ tal que $\|\tilde{p}\|_2 \leq \frac{6\sqrt{5}}{T\sqrt{T}}K$, existe $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ independiente de a , tal que la ecuación (5.5) tiene una solución T -periódica para todo $\bar{p} \in [\bar{p}_0 - a \operatorname{sen}(\frac{\pi-K}{2}), \bar{p}_0 + a \operatorname{sen}(\frac{\pi-K}{2})]$.

En particular, si se considera fricción lineal, entonces $\bar{p}_0 = 0$, y en consecuencia,

Corolario 5.2. *Sea*

$$x''(t) + cx'(t) + a \operatorname{sen}(x(t)) = \bar{p} + \tilde{p}(t) \quad (5.6)$$

con $c \in \mathbb{R}$. Sea $0 < K \leq \pi$. Entonces, para todo $\tilde{p}(t) \in \widetilde{L}^2(0, T)$ con $\|\tilde{p}\|_2 \leq \frac{6\sqrt{5}}{T\sqrt{T}}K$, la ecuación (5.6) tiene una solución T -periódica para todo \bar{p} tal que $|\bar{p}| \leq a \operatorname{sen}(\frac{\pi-K}{2})$.

Hay que resaltar que resultados similares han sido obtenidos en las referencias [32, 61, 62, 66, 90] para el péndulo con rozamiento lineal, y también en [44, 71] para el caso conservativo ($c = 0$).

5.2 Ecuaciones con singularidades atractivas.

5.2.1 Caso de una singularidad.

Considérese la siguiente ecuación

$$x''(t) + F(x(t), x'(t)) = \bar{p} + \tilde{p}(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.7)$$

donde $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que posee una singularidad atractiva en el origen, es decir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x, 0) = +\infty.$$

Obsérvese que este tipo de no-linealidad generaliza la considerada en la Sección 2.5. Nuestro objetivo es buscar condiciones suficientes para la existencia de soluciones T -periódicas positivas.

Teorema 5.2. *En las condiciones previas, sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que existen $0 < \alpha < \beta \leq +\infty$ de forma que*

$$F(x, y) \leq f(y), \quad \forall x \in [\alpha, \beta[\quad (5.8)$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Entonces, para toda función $\tilde{p} \in \widetilde{L}^2(0, T)$ acotada superiormente y tal que $\|\tilde{p}\|_2 \leq \frac{6\sqrt{5}(\beta-\alpha)}{T\sqrt{T}}$, existe \bar{p}_0 tal que (5.7) tiene una solución T -periódica para todo $\bar{p} \geq \bar{p}_0$.

Demostración. Es conocido por [65] que dado $\tilde{p} \in \widetilde{L}^2(0, T)$ existe \bar{p}_0 tal que la ecuación

$$x''(t) + f(x'(t)) = \bar{p}_0 + \tilde{p}(t)$$

tiene una familia de soluciones T -periódicas $u + C$, con $C \in \mathbb{R}$. Además, como en la demostración del Teorema 5.1, se tiene que

$$|u(t_1) - u(t_0)| \leq \frac{T\sqrt{T}}{6\sqrt{5}} \|\tilde{p}\|_2 \leq \beta - \alpha$$

para cualesquiera $t_0, t_1 \in [0, T]$. Por tanto, si se toma C de forma que $u(t) + C \in [\alpha, \beta[$ para todo $t \in [0, T]$, entonces

$$u''(t) + F(u(t) + C, u'(t)) \leq u''(t) + f(u'(t)) = \bar{p}_0 + \tilde{p} \leq \bar{p} + \tilde{p}(t),$$

con lo que $u + C$ es una supersolución, mientras que si fijamos $\epsilon > 0$ tal que

$$F(\epsilon, 0) > \sup\{\bar{p} + \tilde{p}(t)\} \quad (5.9)$$

y $\epsilon < \alpha$, entonces ϵ es una subsolución ordenada.

Observación. De nuevo, si $\beta = +\infty$ no hay restricción sobre $\|\tilde{p}\|_2$. Algunos casos particulares son

i) $F(x, y) = f(y) + g(x)$, donde

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

(por ejemplo, el "caso modelo" $g(x) = x^{-a}$, con $a > 0$).

ii) $F(x, y) = \varphi(x)y + g(x)$, donde g es como antes y además existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq \varphi(x) \leq M$ para todo $x > R$. Entonces,

$$\varphi(x)y \leq f(y) = \begin{cases} My & \text{si } y > 0 \\ my & \text{si } y \leq 0 \end{cases} \quad \text{para todo } x > R,$$

y claramente f es continua, luego se verifica (5.9) y de esta forma extendemos los resultados de existencia para el caso lineal [38, 53].

5.2.2 Caso de dos singularidades.

Consideremos la ecuación

$$x''(t) + F(x(t), x'(t)) = p(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.10)$$

donde $F : (0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x, 0) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x, 0) &= -\infty \end{aligned}$$

Se dice que la ecuación (5.10) tiene dos singularidades atractivas en 0 y 1, y buscamos soluciones T -periódicas entre 0 y 1. Como interpretación física puede pensarse en un par de partículas cargadas del mismo signo fijas en 0 y 1, y una tercera partícula de signo opuesto moviéndose entre ellas.

Como es usual, suponemos que se cumple una condición de Bernstein-Nagumo.

Teorema 5.3. *En las condiciones previas, la ecuación (5.10) tiene una solución T -periódica para todo $p \in L^\infty(0, T)$.*

Demostración. Basta fijar $\epsilon_1 < \epsilon_2$ tales que

$$F(\epsilon_1, 0) \geq \|p\|_\infty, \quad F(\epsilon_2, 0) \leq \|p\|_\infty,$$

y ϵ_1, ϵ_2 es una pareja de sub y supersoluciones ordenadas.

Evidentemente, la localización de las singularidades en 0 y 1 no es en absoluto restrictiva. Por otra parte, es interesante observar que la hipótesis de acotación sobre p puede ser eliminada si se considera un concepto más amplio de solución, expuesto en [38] bajo el nombre de solución generalizada, y consistente en permitir que las soluciones puedan tener colisiones con la singularidad en un conjunto de medida cero.

5.2.3 Unicidad.

Para finalizar la Sección, establecemos un resultado de unicidad en la línea de los resultados del Capítulo 2.

Proposición 5.1. *Si F es estrictamente decreciente en la primera variable, las ecuaciones (5.1), (5.7) y (5.10) tienen a lo más una solución T -periódica.*

Demostración. Supongamos que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones T -periódicas distintas, con $x_1(t_0) > x_2(t_0)$ para algún $t_0 \in [0, T]$. Entonces, $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ es una función T -periódica, luego $z(t)$ tiene un máximo positivo, llamémosle $z(t_M)$; así, $x_1(t_M) > x_2(t_M)$ y $x'_1(t_M) = x'_2(t_M)$, luego en consecuencia,

$$0 \geq z''(t_M) = F(x_2(t_M), x'_1(t_M)) - F(x_1(t_M), x'_1(t_M)) > 0,$$

lo cual es imposible.

5.3 Fricción seca.

Consideremos la siguiente ecuación

$$x''(t) + \mu \operatorname{sgn}(x'(t)) + g(x(t)) = p(t), \quad t \in [0, T], \quad (5.11)$$

donde $\mu > 0$ es el llamado coeficiente cinético de fricción. Esta ecuación debe ser entendida como la inclusión diferencial

$$-x''(t) - g(x(t)) + p(t) \in \mu \operatorname{Sgn}(x'(t)) \quad \text{c.p.t. } t \in [0, T],$$

siendo

$$\operatorname{Sgn}(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Equivalentemente, una función T -periódica $x(t)$ será una solución de (5.11) si existe una selección medible $s(t) \in \operatorname{Sgn}(x'(t))$ que verifique la ecuación $x''(t) + \mu s(t) + g(x(t)) = p(t)$ c.p.t. $t \in [0, T]$.

Esta formulación permite que las soluciones sean constantes durante un cierto intervalo de tiempo, lo que usualmente se llama una “zona muerta”. Evidentemente esto concuerda con el modelo físico de fricción seca. De hecho, en ciertos casos se presentan soluciones constantes, también llamadas estacionarias, aun en el caso en que la fuerza externa $p(t)$ no sea constante. Si $x(t) \equiv c$ es una solución estacionaria, la selección medible debe ser $s(t) = \frac{p(t) - g(c)}{\mu} \in [-1, 1]$. A partir de este hecho es posible describir el conjunto de soluciones estacionarias.

Proposición 5.2. *Una condición necesaria para la existencia de soluciones estacionarias de (5.11) es que $p \in L^\infty(0, T)$. En tal caso, el conjunto de soluciones estacionarias es*

$$\Upsilon = \{c \in \mathbb{R} : \max_{t \in [0, T]} p(t) - \mu \leq g(c) \leq \min_{t \in [0, T]} p(t) + \mu\}.$$

Demostración. Sabemos que la selección medible para una solución estacionaria $x(t) \equiv c$ es $-1 \leq \frac{p(t)-g(c)}{\mu} \leq 1$, de donde $-\mu \leq p(t) - g(c) \leq \mu$. Por tanto es evidente que una condición necesaria es que $p \in L^\infty(0, T)$. Además, debe cumplirse que $p(t) - \mu < g(c) < p(t) + \mu$, de donde es inmediato que el conjunto de soluciones estacionarias es el descrito.

En consecuencia, para que $\Upsilon \neq \emptyset$ es condición necesaria que

$$\max_{t \in [0, T]} p(t) - \min_{t \in [0, T]} p(t) \leq 2\mu,$$

es decir, un coeficiente de fricción elevado, lo que efectivamente concuerda con la intuición. Sin embargo, es interesante estudiar la existencia de soluciones T -periódicas con μ y p arbitrarios, problema que abordaremos en las siguientes subsecciones.

5.3.1 Fricción seca en la ecuación no singular.

Consideremos la ecuación (5.11) con $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$g(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in]\alpha, \beta] \quad (5.12)$$

$$g(x) \leq 0, \text{ para todo } x \in [\gamma, \delta[. \quad (5.13)$$

para ciertos $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \gamma < \delta \leq +\infty$. Vamos a usar la información de la Sección anterior para establecer el siguiente resultado.

Teorema 5.4. *Para todo $\tilde{p} \in \widetilde{L}^2(0, T)$ con $\|\tilde{p}\|_2 \leq \frac{6\sqrt{5}}{T\sqrt{T}} \min\{\beta - \alpha, \delta - \gamma\}$, existe $\bar{p} \in [-\mu, \mu]$ tal que (5.11) tiene una solución T -periódica.*

Demostración. Vamos a aproximar la ecuación multivaluada (5.11) mediante una sucesión de ecuaciones univaluadas. Definimos la siguiente sucesión de fun-

ciones continuas,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \frac{1}{n} \\ nx & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ -1 & \text{si } x < -\frac{1}{n} \end{cases}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Si se considera la sucesión de ecuaciones

$$x''(t) + \mu f_n(x'(t)) + g(x(t)) = \bar{p} + \tilde{p}(t), \quad t \in [0, T], \quad (5.14)$$

se sabe por el Teorema 5.1 que para cada n existe \bar{p}_n tal que (5.14) tiene una solución T -periódica $x_n(t)$. A continuación demostraremos que esta sucesión de soluciones de (5.14) converge a una solución T -periódica de (5.11), para lo cual es necesario encontrar cotas uniformes para x_n y sus derivadas.

Usando los resultados de [65], para cada n existe \bar{p}_n tal que la ecuación

$$x''(t) + \mu f_n(x'(t)) = \bar{p}_n + \tilde{p}(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.15)$$

tiene una familia uniparamétrica de soluciones T -periódicas. Por conveniencia, sea u_n el elemento de esta familia tal que $\min_{t \in [0, T]} u_n(t) = 0$. Integrando (5.15) sobre un periodo, se obtiene que $|\bar{p}_n| < \mu$. Además, los mismos razonamientos usados en el Teorema 5.1 llevan a

$$\|u_n\|_\infty \leq \frac{T\sqrt{T}}{6\sqrt{5}} \|\tilde{p}\|_2.$$

Por tanto, tomando $C_1 = \beta - \frac{T\sqrt{T}}{6\sqrt{5}} \|\tilde{p}\|_2$ y $C_2 = \gamma$, es fácil deducir que $u_n + C_1$ y $u_n + C_2$ son respectivamente una sub y una supersolución ordenadas de la ecuación (5.14), luego existirá una solución T -periódica $x_n(t)$ de (5.14) que cumple

$$C_1 \leq u_n(t) + C_1 \leq x_n(t) \leq u_n(t) + C_2 \leq \frac{T\sqrt{T}}{6\sqrt{5}} \|\tilde{p}\|_2 + C_2 =: C_3, \quad t \in [0, T],$$

De esta forma, hemos conseguido cotas C_1, C_3 para la sucesión $\{x_n(t)\}$ que no dependen de n . Veamos ahora la manera de conseguir también cotas para las derivadas

Sea $G := \max\{|g(x)| : x \in [C_1, C_3]\}$. Multiplicando (5.14) por $x_n''(t)$ e integrando en un periodo se tiene

$$\|x_n''\|_2^2 = \int_0^T \tilde{p}(t)x_n''(t)dt - \int_0^T g(x_n(t))x_n''(t)dt \leq (\|\tilde{p}\|_2 + G\sqrt{T})\|x''\|_2,$$

luego $\|x_n''\|_2 \leq (\|\tilde{p}\|_2 + G\sqrt{T})$, y en consecuencia

$$\|x_n'\|_\infty \leq \sqrt{T}\|x_n''\|_2 \leq \sqrt{T}(\|\tilde{p}\|_2 + G\sqrt{T}).$$

Estas cotas nos permiten usar el Teorema de Ascoli-Arzelá, que afirma que existe una subsucesión de $\{x_n\}$, que representamos nuevamente por $\{x_n\}$, que converge a cierta $x_0(t)$ uniformemente en C^1 . Evidentemente, esta $x_0(t)$ es T -periódica por serlo las x_n . Además, tomando una nueva subsucesión si es necesario, existe $\bar{p} \in [-\mu, \mu]$ tal que $\bar{p}_n \rightarrow \bar{p}$. Tomando límites en (5.14),

$$-x_0''(t) - g(x_0(t)) + \bar{p} + \tilde{p}(t) = \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n'(t)) \in \mu \operatorname{Sgn}(x_0'(t)), \quad t \in [0, T],$$

con lo cual $x_0(t)$ es una solución T -periódica de (5.11).

Como consecuencia inmediata de este Teorema podemos establecer el siguiente Corolario sobre la ecuación del péndulo con fricción seca.

Corolario 5.3. *Sea la ecuación*

$$x''(t) + \mu \operatorname{sgn}(x'(t)) + a \operatorname{sen}(x(t)) = p(t). \quad (5.16)$$

Entonces, para todo $\tilde{p}(t) \in \widetilde{L}^2(0, T)$ con $\|\tilde{p}\|_2 \leq \frac{6\sqrt{5}}{T\sqrt{T}}\pi$, existe $\bar{p} \in [-\mu, \mu]$ independiente de a tal que la ecuación (5.16) tiene una solución T -periódica.

Observación. Es posible, siguiendo la estrategia del Teorema 5.1, conseguir un intervalo completo de valores medios “admisibles”, para los cuales hay solución T -periódica. Sin embargo, hemos optado por la anterior presentación en aras de la claridad. Por otra parte, nuestro método permite considerar ecuaciones como

$$x''(t) + f(x'(t)) + \mu \operatorname{sgn}(x'(t)) + g(x(t)) = p(t), \quad t \in [0, T],$$

con f continua. Por ejemplo, si $f(x') = cx'$ con c constante, el Teorema 5.4 sigue verificándose sin ninguna modificación.

5.3.2 Fricción seca en la ecuación singular.

Sea la ecuación (5.11) pero siendo ahora $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con una singularidad atractiva en el origen, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

y tal que existen $0 < \alpha < \beta \leq +\infty$ y $K \in \mathbb{R}$ de manera que $g(x) \leq K$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$.

Teorema 5.5. *Con las hipótesis previas, para todo $\tilde{p}(t) \in \widetilde{L^2}(0, T)$ acotada superiormente y tal que $\|\tilde{p}\|_2 \leq \frac{6\sqrt{5}}{T\sqrt{T}}(\beta - \alpha)$, existe $\bar{p}_0 \in [-\mu + K, \mu + K]$ tal que la ecuación (5.11) tiene una solución T -periódica para todo $\bar{p} \geq \bar{p}_0$.*

Demostración. Usamos de nuevo las ecuaciones

$$x''(t) + \mu f_n(x'(t)) + g(x(t)) = \bar{p} + \tilde{p}(t), \quad t \in [0, T], \quad (5.17)$$

que ya definimos en la demostración del Teorema 5.4. De [65], tenemos que para cada n existe \bar{p}_n tal que la ecuación

$$x''(t) + \mu f_n(x'(t)) + K = \bar{p}_n + \tilde{p}(t) \quad (5.18)$$

tiene una familia uniparamétrica de soluciones T -periódicas. Sea u_n el miembro de esta familia tal que $\min_{t \in [0, T]} u_n(t) = \alpha$. Un uso adecuado de las desigualdades de tipo Sobolev, tal como se hizo en la demostración del Teorema 5.1, prueba que $\max_{t \in [0, T]} u_n(t) < \beta$. Por tanto, si consideramos $\bar{p} \geq \bar{p}_n$,

$$u_n''(t) + \mu f_n(u_n'(t)) + g(u_n(t)) - \bar{p} \leq u_n''(t) + \mu f_n(u_n'(t)) + K - \bar{p}_n = \tilde{p}(t), \quad t \in [0, T],$$

por lo que u_n es una supersolución de (5.17), y por otra parte la existencia de una subsolución ordenada es trivial por el carácter singular de g , ya que \tilde{p} es acotada superiormente. Por tanto, la ecuación (5.17) tiene una solución T -periódica para todo $\bar{p} \geq \bar{p}_n$.

Por otro lado, integrando (5.18) en un periodo se obtiene que $\bar{p}_n \in [-\mu + K, \mu + K]$, con lo cual, tomando si es necesario una subsucesión, $\{\bar{p}_n\} \rightarrow \bar{p}_1 \in [-\mu + K, \mu + K]$, y claramente (5.17) tiene una solución T -periódica para todo $\bar{p} > \bar{p}_1$, para n bastante grande. Si $\bar{p}_1 = \mu + K$, entonces existe solución T -periódica de (5.17) para todo $\bar{p} \geq \bar{p}_1$ y podemos fijar $\bar{p}_0 := \bar{p}_1$. Si por el contrario $\bar{p}_1 < \mu + K$, basta tomar por ejemplo $\bar{p}_0 := \frac{\bar{p}_1 + \mu + K}{2}$. Para finalizar, mediante las mismas técnicas usadas en la Subsección anterior, es fácil encontrar cotas uniformes para la sucesión de soluciones de (5.17), y una aplicación del teorema de Ascoli-Arzelá cierra la demostración.

Como en la Sección 5.2, si $\beta = +\infty$ no hay restricciones sobre $\|\tilde{p}\|_2$, como por ejemplo $g(x) = x^{-a}$, con $a > 0$. Por otra parte, usando el Teorema anterior con K, α, β adecuados es fácil probar el siguiente Corolario.

Corolario 5.4. *Sea $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$. Entonces, para todo $\tilde{p}(t) \in \widetilde{L}^2(0, T)$ acotada superiormente, existe $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación (5.11) tiene una solución T -periódica para todo $\bar{p} \geq \bar{p}_0$.*

5.3.3 Unicidad y estabilidad.

En presencia de fricción seca es posible la existencia de un intervalo de soluciones estacionarias, luego en general no hay unicidad incluso suponiendo g estrictamente decreciente. No obstante, puede probarse lo siguiente.

Teorema 5.6. *Sea la ecuación (5.11) con g estrictamente decreciente. Entonces, si existen soluciones estacionarias, éstas son las únicas soluciones T -periódicas. Si no existen soluciones estacionarias, existe a lo más una solución T -periódica, que es inestable.*

Demostración. Supóngase que $x_1(t), x_2(t)$ son soluciones T -periódicas distintas, una de ellas no estacionaria. Sea $z(t) := x_1(t) - x_2(t)$ y $z(t_1) = \max_{t \in [0, T]} z(t)$. No es restrictivo suponer que $z(t_1) > 0$. Restando las ecuaciones respectivas y teniendo en cuenta que g es estrictamente decreciente, se tiene que

$$\operatorname{sgn}(x_1'(t_1)) - \operatorname{sgn}(x_2'(t_1)) > 0,$$

luego $x_1'(t_1) \geq 0$ y $x_2'(t_1) \leq 0$, pero además $z'(t_1) = x_1'(t_1) - x_2'(t_1) = 0$ por ser el máximo. Por lo tanto, $x_1'(t_1) = 0$ y $x_2'(t_1) = 0$.

De aquí, y usando que al menos una de las soluciones no es estacionaria, se deduce que existe $t_2 > t_1$ tal que para todo $t \in]t_1, t_2[$, $z(t) > 0$, $z'(t) < 0$ y o bien $x_1'(t) < 0$ o bien $x_2'(t) > 0$. En consecuencia,

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sgn}(x_1'(t)) dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sgn}(x_2'(t)) dt,$$

lo cual es una contradicción, pues se puede obtener la desigualdad estricta inversa restando las ecuaciones e integrando en $[t_1, t_2]$. De este modo hemos probado la unicidad.

Para la estabilidad, siendo $x_T(t)$ la única solución T -periódica, veamos que es inestable. Sea $x_1(t)$ una solución con condiciones iniciales $x_1(0) > x_T(0)$, $x'_1(0) = x'_T(0) > 0$ (si esta última condición sobre x'_T no se cumpliera, bastaría realizar una traslación del tiempo inicial). Nótese que para todo $z(t) = x_1(t) - x_T(t) > 0$ se obtiene de (5.11) que

$$z''(t) + \mu \operatorname{sgn} x'_1(t) - \mu \operatorname{sgn} x'_T(t) = g(x_T(t)) - g(x_1(t)) > 0, \quad (5.19)$$

luego la función $z(t)$ tiene un mínimo en 0.

Finalmente, probaremos que $z(t)$ es una función estrictamente creciente para todo $t > 0$ donde esté definida. Si esto fuera falso, existiría $z(t_1)$ máximo local de z con $t_1 > 0$. Usando (5.19), $\operatorname{sgn} x'_1(t_1) > \operatorname{sgn} x'_T(t_1)$, con lo cual $x'_1(t_1) \geq 0$ y $x'_T(t_1) \leq 0$. Ahora bien, si alguna de estas desigualdades fuese estricta, entonces tendríamos $z'(t_1) > 0$, luego se deduce que $x'_1(t_1) = 0 = x'_T(t_1)$. Ahora, sea $t_2 > t_1$ tal que $x'_1(t) < 0$ para todo $t \in]t_1, t_2[$ o $x'_T(t) > 0$ para todo $t \in]t_1, t_2[$; una de estas opciones se verifica necesariamente ya que $z(t_1)$ es un máximo (cabe la posibilidad de una “zona muerta” en la solución, o sea, un intervalo en el que la derivada de $z(t)$ se anule, pero en tal caso tomamos como t_1 el extremo de este intervalo). Entonces,

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sgn}(x'_1(t)) dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sgn}(x'_T(t)) dt,$$

Pero si se integra (5.11) obtenemos la desigualdad inversa.

En definitiva, $z(t)$ no presenta máximos para $t > 0$. Sea (w^-, w^+) el intervalo maximal de existencia para $x_1(t)$. Si $w^+ < +\infty$, entonces $\lim_{t \rightarrow w^+} z(t) = +\infty$. Si en cambio $w^+ = +\infty$, se prueba que nuevamente $\lim_{t \rightarrow w^+} z(t) = +\infty$. De hecho, si $z(t) \rightarrow K > 0$ con $K < +\infty$, entonces por ser z estrictamente creciente existe t_3 tal que $z''(t) < 0$ para todo $t > t_3$. En consecuencia, de (5.11) se tiene que $\operatorname{sgn}(x'_1(t)) > \operatorname{sgn}(x'_T(t))$ para todo $t > t_3$, luego $x'_T(t) \leq 0$ para todo $t > t_3$, lo cual es absurdo puesto que x_t es T -periódica y no estacionaria. Con esto queda probada la inestabilidad de x_T .

5.3.4 Otros modelos de fricción seca.

Experimentalmente puede comprobarse que en general la fuerza ejercida por fricción seca es mayor cuando no hay movimiento relativo. A modo intuitivo, es más fácil mantener el movimiento de un cuerpo sobre una superficie no lubricada que hacerle arrancar. Esto significa que hay que distinguir entre fricción estática

y fricción cinética. A cada una le corresponderá un coeficiente de fricción distinto, que llamaremos μ_s y μ_d respectivamente. Por regla general, $\mu_d < \mu_s$, aunque dependiendo de la naturaleza de las superficies en contacto, se dan casos en los que son iguales.

De esta forma, un modelo más realista para la fricción seca lo constituiría la siguiente inclusión diferencial

$$-x''(t) - g(x(t)) + p(t) \in F(x'(t)) \quad \text{c.p.t. } t \in [0, T],$$

siendo F la función multivaluada

$$F(x) = \begin{cases} -\mu_d & \text{si } x < 0 \\ [-\mu_s, \mu_s] & \text{si } x = 0 \\ \mu_d & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

cuyo grafo viene representado por la figura 5.1.

A nuestros efectos, pueden demostrarse resultados completamente análogos a los ya establecidos en esta Sección, ya que podemos considerar aproximantes de tipo Yosida adecuados (ver figura 5.2).

Cabe la posibilidad incluso de considerar otras leyes de fricción más complejas, como [48] (ver también [70]), que presenta un crecimiento cuadrático en la derivada y cuyo grafo es reproducido en la figura 5.3. También en [26] se estudia una situación parecida, con una ley de fricción asintóticamente lineal. Finalmente, ciertos modelos sísmicos como el de Burridge-Knopoff (véase [16] y sus referencias) introducen una ley de fricción estrictamente decreciente con respecto a la velocidad, como la representada en la figura 5.4, que es debida a la interacción entre las placas tectónicas.

De cualquier forma, se ha demostrado que el fenómeno de la fricción seca es en muchos casos extremadamente complejo, dependiendo estrechamente de procesos elásticos, plásticos y químicos a diversas escalas de longitud y tiempo, no existiendo actualmente un modelo totalmente satisfactorio.

Figura 5.1. Grafo de la función multivaluada F .

Figura 5.2. Aproximantes de tipo Yosida para F .

Figura 5.3.

Figura 5.4.

5.4 Algunos resultados adicionales.

En la presente Sección emplearemos las técnicas anteriormente desarrolladas para abordar algunas situaciones de especial interés. En adelante, consideraremos la ecuación

$$x''(t) + f(x'(t)) + g(x(t)) = \bar{p} + \tilde{p}(t), \quad (5.20)$$

donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, $\tilde{p}(t) \in \widetilde{L}^2(0, T)$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en casi todo punto, permitiéndose discontinuidades de salto (como en el caso de la fricción seca), en cuyo caso la ecuación se entiende como una inclusión diferencial.

5.4.1 Un resultado de tipo Landesman-Lazer.

Teorema 5.7. *Supongamos que*

$$g(+\infty) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} g(x) < \liminf_{x \rightarrow -\infty} g(x) = g(-\infty) \quad (5.21)$$

Entonces, existe $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación (5.20) tiene una solución T -periódica para todo \bar{p} tal que

$$g(+\infty) < \bar{p} - \bar{p}_0 < g(-\infty).$$

Demostración. Supongamos primero que f es continua en todo \mathbb{R} . Como ya es sabido, existe \bar{p}_0 tal que la ecuación $x''(t) + f(x'(t)) = \bar{p}_0 + \tilde{p}(t)$ tiene una familia de soluciones T -periódicas $x_0 + C$. Para C_1 bastante grande se tiene que $g(x_0(t) + C_1) < \bar{p} - \bar{p}_0$, lo cual implica que $x_0(t) + C_1$ es una supersolución de (5.20). De igual manera se obtiene una subsolución $x_0(t) + C_2$ para un $C_2 < C_1$ adecuado, con lo que tenemos un par de sub y supersoluciones ordenadas y por tanto una solución T -periódica entre ellas.

Por otra parte, si f presenta algún tipo de discontinuidad se recurre al argumento ya conocido de la Sección anterior: aproximantes de Yosida, cotas a priori y aplicación del Teorema de Ascoli-Arzelá.

Observación. Si se considera el caso lineal $f(y) = cy$ con c constante, entonces $\bar{p}_0 = 0$, luego este resultado es una extensión del resultado clásico a ecuaciones con rozamiento no lineal. Además, g puede ser no acotada (o sea, $g(-\infty) = +\infty$ y (o) $g(+\infty) = -\infty$), luego mejoramos el Corolario 2 de [44] en dos direcciones. No obstante, si la desigualdad (5.21) se invierte no parece fácil probar un resultado similar, y en cualquier caso se necesitarían técnicas diferentes.

No obstante, si aparece una igualdad en (5.21), podemos establecer el siguiente resultado. A partir de ahora no insistiremos más en el caso de que f presente alguna discontinuidad de salto, pues la estrategia a seguir usando las aproximantes de Yosida es ya conocida.

Teorema 5.8. *Sea $K = \frac{T\sqrt{T}}{6\sqrt{5}}\|\tilde{p}\|_2$. Supongamos que $g(-\infty) = g(+\infty) = L$. Si*

$$x(g(x) - L) \leq 0, \quad \forall |x| > R \quad (5.22)$$

para cierto $R > 0$, entonces existe $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación (5.20) tiene una solución T -periódica para todo \bar{p} tal que

$$\inf_{s \in [R, +\infty[} \left\{ \max_{x \in [s, s+K]} \{g(x)\} \right\} < \bar{p} - \bar{p}_0 < \sup_{s \in]-\infty, -R]} \left\{ \min_{x \in [s, s+K]} \{g(x)\} \right\}.$$

Si este ínfimo (resp. supremo) es un mínimo (resp. máximo), entonces la desigualdad respectiva no es estricta. Además, si la desigualdad (5.22) es estricta, este intervalo de valores medios “admisibles” es no degenerado

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 5.1. Con respecto a la última afirmación, nótese que la condición (5.22) implica

$$\inf_{s \in [R, +\infty[} \left\{ \max_{x \in [s, s+K]} \{g(x)\} \right\} \leq L \leq \sup_{s \in]-\infty, -R]} \left\{ \min_{x \in [s, s+K]} \{g(x)\} \right\}$$

y que estas desigualdades son estrictas si (5.22) es estricta.

Este Teorema es aplicable a $g(x) = \frac{-x}{1+x^2}$, un interesante ejemplo que ya ha sido estudiado en [44] para el caso sin rozamiento.

5.4.2 No-linealidades oscilatorio-expansivas.

En [35] se propone la siguiente no-linealidad

$$g_0(x) = \begin{cases} \sin(\sqrt{\ln x}) & x \geq 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ -g_0(-x) & x < 0 \end{cases}$$

para un problema elíptico, como un ejemplo de las llamadas “funciones expansivas”, definidas en el artículo mencionado. Vamos a establecer una nueva definición que también incluye el ejemplo anterior y que es más adecuada a nuestro método.

Definición 5.2. *Decimos que una función continua y no constante g es oscilatorio-expansiva si para cada $s \in \mathbb{R}$ tal que $\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) < s < \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x)$, existe una sucesión $\{a_n\}$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{a_{n+1} - a_n\} = +\infty$ y algún entero positivo n_0 tal que*

$$\min_{x \in [a_{2n}, a_{2n+1}]} g(x) \geq s \geq \max_{x \in [a_{2n+1}, a_{2n+2}]} g(x)$$

para todo $n \geq n_0$.

Esta definición generaliza en diversos aspectos el concepto de función expansiva. En efecto, una función expansiva debe ser acotada e impar, hipótesis no requeridas en nuestra definición. Otro hecho remarcable es que la hipótesis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = +\infty$, supuesta en la definición de función expansiva, implica que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{a_{n+1} - a_n\} = +\infty$, pero el recíproco no es cierto, luego en este aspecto tenemos una definición más débil.

Por otra parte, si g es oscilatorio-expansiva, $-g$ también lo es, lo cual no es cierto en el caso de funciones expansivas.

Sin embargo, $g(x) = x$ es expansiva pero no oscilatorio-expansiva, por lo que las definiciones son independientes. Es fácil probar la siguiente Proposición.

Proposición 5.3. *Si g y $-g$ son funciones expansivas, entonces g es también oscilatorio-expansiva.*

Con respecto a la existencia de soluciones periódicas, tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 5.9. *Sea g una no-linealidad oscilatorio-expansiva. Entonces, existe $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación (5.20) tiene un número infinito de soluciones T -periódicas para cada \bar{p} tal que*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) < \bar{p} - \bar{p}_0 < \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x).$$

Demostración. De nuevo, \bar{p}_0 es el valor medio para el que $x''(t) + f(x'(t)) = \bar{p}_0 + \tilde{p}(t)$ tiene una familia de soluciones T -periódicas $x_0 + C$. Si $\{a_n\}$ es la sucesión que nos da la definición de función oscilatorio-expansiva para $s = \bar{p} - \bar{p}_0$, entonces para todo n podemos tomar constantes adecuadas de forma que $x_0 + C_{1n} \in [a_{2n}, a_{2n+1}]$ y $x_0 + C_{2n} \in [a_{2n+1}, a_{2n+2}]$ sean una pareja de sub y supersoluciones de (5.20). De esta forma, existe una sucesión $x_n \in [a_{2n}, a_{2n+2}]$ de soluciones T -periódicas de (5.20).

Como caso particular, si g_0 es la función definida al principio, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.5. *Existe un $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación (5.20) con $g \equiv g_0$ tiene un número infinito de soluciones T -periódicas para cada \bar{p} tal que $|\bar{p} - \bar{p}_0| < 1$.*

Otra consecuencia directa del Teorema 5.9 es que dada una no-linealidad oscilatorio-expansiva tal que $\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) = -\infty$ y $\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) = +\infty$ (como por ejemplo, $g(x) = xg_0(x)$), la ecuación (5.20) tiene un número infinito de soluciones T -periódicas para cualquier valor medio.

5.4.3 Otros ejemplos.

La hipótesis (5.22) considerada en la Subsección 5.4.1 aparece con bastante frecuencia en la literatura. No obstante, aun cuando (5.22) no se verifica es posible en muchos casos obtener cierta información, como demuestran los siguientes ejemplos. Fijamos de nuevo la constante $K = \frac{T\sqrt{T}}{6\sqrt{5}} \|\tilde{p}\|_2$.

- **Ejemplo 1 ([4], ejemplo 6.6).** *Sea $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Entonces, existe $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación (5.20) tiene una solución T -periódica para todo \bar{p} tal que*

$$\bar{p}_0 < \bar{p} \leq \bar{p}_0 + \frac{4}{4 + K^2}.$$

- **Ejemplo 2 ([44]).** *Sea $g(x) = -e^{-x^2}$. Entonces, existe $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación (5.20) tiene una solución T -periódica para todo \bar{p} tal que*

$$\bar{p}_0 - e^{-\frac{K^2}{4}} \leq \bar{p} < \bar{p}_0.$$

- **Ejemplo 3** ([14], [44]). Sea $g(x) = -xe^x$ y supongamos $K > 0$. Entonces, existe $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación (5.20) tiene una solución T -periódica para todo \bar{p} tal que

$$\bar{p} \leq \bar{p}_0 + g\left(\frac{Ke^K}{1 - e^K}\right).$$

Capítulo 6

Multiplicidad de soluciones periódicas para una ecuación de tipo Rayleigh.

En este Capítulo vamos a considerar el problema periódico para la ecuación de tipo Rayleigh

$$\begin{aligned}x'' + f(x') + g(t, x, x') &= \bar{p}, \\x(0) = x(T), \quad x'(0) &= x'(T).\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde f es continua y g es una función de Carathéodory. Recordemos que en la ecuación clásica de Rayleigh g sólo dependía de x . Ahora, al considerar una no-linealidad de Carathéodory, buscamos soluciones débiles en $W^{2,1}(0, T)$. Nuestro propósito es estudiar la estructura del conjunto de “valores medios” \bar{p} para los cuales existen al menos una o al menos dos soluciones del problema (6.1) en dos situaciones distintas, que describimos a continuación.

En la Sección 6.2, consideramos una fuerza restauradora $g(t, x, x')$ uniformemente acotada por una función $L^2(0, T)$. En este caso, el conjunto de valores medios \bar{p} admisibles es un intervalo I . Esto incluye no-linealidades periódicas en la variable x . En el caso de la ecuación del péndulo conseguimos una estimación de dicho intervalo. Además, se prueba la existencia de dos soluciones en el interior de I .

Por otra parte, la Sección 6.3 se dedica a fuerzas restauradoras acotadas inferiormente. Se establecen resultados de tipo Ambrosetti-Prodi similares a los obtenidos en [27]. En concreto, la condición habitual

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(t, x, y) = +\infty,$$

uniformemente en t e y , es reemplazada por la condición de que $g(t, x, y)$ pueda ser descompuesta en $\bar{g}(x) + h(t, x, y)$, donde $\bar{g}(x)$ verifica tal límite cuando $|x| \rightarrow \infty$ y

$h(t, x, y)$ es acotada por una función de $L^2(0, T)$. En las demostraciones es fundamental la Subsección 6.1, que relaciona la existencia de $W^{2,1}$ -sub y supersoluciones estrictas con el grado de Leary-Schauder, que denotamos por \deg .

6.1 $W^{2,1}$ -sub y supersoluciones estrictas.

Sea el problema periódico

$$\begin{aligned} x'' + F(t, x, x') &= 0, \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) &= x'(T). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Establecemos una serie de definiciones básicas.

Definiciones. Una función $\alpha \in C([0, T])$ se dice $W^{2,1}$ -*subsolución estricta* de (6.2) si no es una solución en $[0, T]$ y su extensión periódica en \mathbb{R} , definida por $\alpha(t) = \alpha(t + T)$, es continua y verifica que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, o bien $\mathcal{D}_-\alpha(t_0) < \mathcal{D}^+\alpha(t_0)$, o bien existe un intervalo abierto I_0 y $\epsilon_0 > 0$ tal que $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ y p.c.t. $t \in I_0$, para todo u tal que $\alpha(t) \leq u \leq \alpha(t) + \epsilon_0$, y todo v tal que $\alpha'(t) - \epsilon_0 \leq v \leq \alpha'(t) + \epsilon_0$, se tiene que

$$\alpha''(t) + F(t, u, v) \geq 0.$$

Análogamente, una función $\beta \in C([0, T])$ es una $W^{2,1}$ -*supersolución estricta* de (6.2) si no es una solución en $[0, T]$ y su extensión periódica en \mathbb{R} , definida por $\beta(t) = \beta(t + T)$, es continua y verifica que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, o bien $\mathcal{D}^-\beta(t_0) > \mathcal{D}_+\beta(t_0)$, o bien existe un intervalo abierto I_0 y $\epsilon_0 > 0$ tal que $t_0 \in I_0$, $\beta \in W^{2,1}(I_0)$ y, p.c.t. $t \in I_0$, para todo u tal que $\beta(t) - \epsilon_0 \leq u \leq \beta(t)$, y todo v tal que $\beta'(t) - \epsilon_0 \leq v \leq \beta'(t) + \epsilon_0$, se tiene que

$$\beta''(t) + F(t, u, v) \leq 0.$$

Esta definición generaliza el concepto clásico de sub y supersolución, permitiendo un cierto número de “esquinas”.

A continuación, escribiremos el problema (6.2) de forma que sus soluciones sean los puntos fijos de cierto operador funcional. Definimos el operador

$$\mathcal{T} = K_1 N, \quad (6.3)$$

donde

$$K_1 : L^1(0, T) \rightarrow C^1[0, T] \quad (6.4)$$

es el operador de Green correspondiente al problema periódico para la ecuación $x'' - x + f = 0$, y $N : C^1[0, T] \rightarrow L^1(0, T)$ es el operador de Nemytskii definido como $Nx = F(\cdot, x, x') + x$. De esta manera, el problema (6.2) es equivalente al problema de punto fijo

$$x = \mathcal{T}x,$$

donde es fácil verificar que el operador \mathcal{T} es completamente continuo.

Teorema 6.1. *Sea $F : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función L^1 -Carathéodory. Suponemos que*

(i) *existen $W^{2,1}$ -sub y supersoluciones estrictas α y β de (6.2) tal que $\alpha < \beta$ en $[0, T]$,*

(ii) *existe $R > \max\{\|\alpha'\|_\infty, \|\beta'\|_\infty\}$ tal que cualquier solución x de $x'' + F(t, x, x') = 0$, $x'(t_0) = 0$, con $t_0 \in [0, T]$ y $\alpha < x < \beta$, verifica*

$$\|x'\|_\infty < R. \quad (6.5)$$

Entonces,

$$\deg(I - \mathcal{T}, \Omega, 0) = 1, \quad (6.6)$$

siendo $\Omega := \{x \in C^1[0, T] \mid \alpha < x < \beta, |x'| < R\}$.

Demostración. Consideremos el problema modificado

$$\begin{aligned} x'' - x + \hat{F}(t, x, x') + \delta(\alpha(t), x, \beta(t)) &= 0, \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde $\hat{F}(t, x, y) := F(t, \delta(\alpha(t), x, \beta(t)), \delta(-R, y, R))$ y

$$\delta(A, u, B) := \begin{cases} A & \text{if } u \leq A, \\ u & \text{if } A \leq u < B, \\ B & \text{if } B \leq u. \end{cases} \quad (6.8)$$

Dividimos la demostración en tres pasos.

- 1) *Toda solución x de (6.7) verifica $\alpha(t) < x(t) < \beta(t)$ en $[0, T]$.* Supongamos por el contrario que

$$\min_{t \in [0, T]} (x(t) - \alpha(t)) = x(t_0) - \alpha(t_0) \leq 0$$

para algún $t_0 \in [0, T]$. Entonces, $x'(t_0) - \mathcal{D}_-\alpha(t_0) \leq x'(t_0) - \mathcal{D}^+\alpha(t_0)$ y por definición de $W^{2,1}$ -subsolución estricta $\mathcal{D}_-\alpha(t_0) = \mathcal{D}^+\alpha(t_0) = x'(t_0)$. Ahora, consideramos los I_0 y $\epsilon_0 > 0$ de la definición lo bastante pequeños para que

$$\begin{aligned} \alpha(t) &\leq \delta(\alpha(t), x(t), \beta(t)) \leq \alpha(t) + \epsilon_0, \\ -R &\leq \alpha'(t) - \epsilon_0 \leq x'(t) \leq \alpha'(t) + \epsilon_0 \leq R \end{aligned}$$

para todo $t \in I_0$.

De esta forma, p.c.t. $t \in]t_1, t_0[$

$$\alpha''(t) + \hat{F}(t, x(t), x'(t)) = \alpha''(t) + F(t, \delta(\alpha(t), x(t), \beta(t)), x'(t)) \geq 0.$$

Teniendo en cuenta que α no es solución, es posible tomar t_0 de forma que para algún $t_1 > t_0$, $t_1 \in I_0$, se tenga $x'(t_1) - \alpha'(t_1) > 0$, con lo que se llega a la siguiente contradicción

$$\begin{aligned} 0 < x'(t_1) - \alpha'(t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} (x''(s) - \alpha''(s)) ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} [-\hat{F}(s, x(s), x'(s)) + x - \delta(\alpha(t), x, \beta(t)) - \alpha''(s)] ds \leq 0. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $x(t) < \beta(t)$ para todo $t \in [0, T]$.

- 2) *Toda solución x de (6.7) verifica que $|x'(t)| < R$ para todo $[0, T]$.* En otro caso, existirá una solución x de (6.7) y ciertos $t_0 \in [0, T]$ y $t_1 \in [0, T]$, $t_1 > t_0$, tales que $x'(t_0) = 0$, $|x'(t_1)| = R$ y para todo $t \in [t_0, t_1]$, $|x'(t)| \leq R$, $\alpha(t) < x(t) < \beta(t)$. En consecuencia x verifica $x'' + F(t, x, x') = 0$ en $[t_0, t_1]$ contradiciendo la hipótesis (ii).
- 3) $\deg(I - \mathcal{T}, \Omega, 0) = 1$. Consideremos el operador $\hat{\mathcal{T}} = K_1 \hat{N}$, donde

$$(\hat{N}x)(t) = \hat{F}(t, x(t), x'(t)) + \delta(\alpha(t), x, \beta(t)).$$

Es claro que $\hat{\mathcal{T}}$ es acotado, lo que implica que dado $\hat{R} > 0$ bastante grande y $\lambda \in [0, 1]$,

$$\deg(I - \hat{\mathcal{T}}, B(0, \hat{R}), 0) = \deg(I - \lambda \hat{\mathcal{T}}, B(0, \hat{R}), 0) = \deg(I, B(0, \hat{R}), 0) = 1.$$

Además $\Omega \subset B(0, \hat{R})$ si se toma \hat{R} suficientemente grande, y de los pasos 1 y 2 junto con la propiedad de excisión del grado se deduce que

$$\deg(I - \hat{\mathcal{T}}, B(0, \hat{R}), 0) = \deg(I - \hat{\mathcal{T}}, \Omega, 0) = \deg(I - \mathcal{T}, \Omega, 0) = 1,$$

lo que concluye la demostración.

6.2 Fuerzas restauradoras acotadas.

En la presente Sección estudiaremos no-linealidades acotadas por alguna función $h \in L^2(0, T)$. El siguiente resultado describe la estructura del conjunto de \bar{p} para los que el problema periódico (6.1) tiene solución.

Teorema 6.2. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $g : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Carathéodory tal que*

$$|g(t, x, y)| \leq h(t), \quad p.c.t. \ t \in [0, T], \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

con $h \in L^2(0, T)$ dada. Entonces, existe un intervalo $[a, b]$ no vacío tal que

- (i) si $\bar{p} \notin [a, b]$, el problema (6.1) no tiene solución,
- (ii) si $\bar{p} \in (a, b)$, el problema (6.1) tiene al menos una solución.

Demostración. Sea \mathcal{M} el conjunto de \bar{p} para los cuales (6.1) tiene solución. Dividiremos la demostración en cinco puntos.

- 1) Sea $R > \sqrt{T} \|h\|_2$. Entonces toda solución x de (6.1) verifica

$$\|x'\|_\infty < R. \quad (6.9)$$

Multiplicando la ecuación por x'' e integrando en $[0, T]$,

$$\|x''\|_2^2 \leq - \int_0^T g(t, x, x') x'' dt \leq \|h\|_2 \|x''\|_2. \quad (6.10)$$

Por tanto,

$$\|x''\|_2 \leq \|h\|_2$$

y si tomamos t_0 tal que $x'(t_0) = 0$, entonces

$$|x'(t)| = \left| \int_{t_0}^t x''(s) ds \right| \leq \sqrt{T} \|x''\|_2 \leq \sqrt{T} \|h\|_2 < R.$$

- 2) *Un problema modificado.* Consideremos la función

$$\hat{f}(y) := f(\delta(-R, y, R)),$$

con $\delta(A, y, B)$ definida por (6.8). Usando el mismo argumento del punto 1, cualquier solución x de

$$\begin{aligned} x'' + \hat{f}(x') + g(t, x, x') &= \bar{p}, \\ x(0) = x(T), x'(0) &= x'(T). \end{aligned} \quad (6.11)$$

es también solución de (6.1). Por lo tanto, x es solución de (6.1) si y sólo si es solución de (6.11).

- 3) \mathcal{M} es no vacío. Sean el espacio

$$\tilde{X} := \{x \in H^2(0, T) : x(0) = x(T), x'(0) = x'(T), \int_0^T x dt = 0\},$$

Sea $\hat{\mathcal{T}} = K(I - P)\hat{N}$, donde $K : \tilde{L}^2(0, T) \rightarrow \tilde{X}$ es el operador inverso compacto de $L : \tilde{X} \rightarrow \tilde{L}^2(0, T)$, $Lx = -x''$, P es la proyección (1.3) y

$$\hat{N} : C^1[0, T] \rightarrow L^2(0, T), x \mapsto \hat{N}x = \hat{f}(x') + g(\cdot, x, x').$$

El operador $\hat{\mathcal{T}}$ es acotado y completamente continuo, luego el Teorema del Punto Fijo de Schauder nos garantiza la existencia de una solución para $x = \hat{\mathcal{T}}x$. Pero esta última ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned} -x'' &= \hat{f}(x') + g(t, x, x') - P(\hat{f}(x') + g(\cdot, x, x')) \\ x(0) &= x(T), x'(0) = x'(T), \end{aligned}$$

lo que prueba que $\bar{p} := P(\hat{f}(x') + g(\cdot, x, x')) \in \mathcal{M}$.

- 4) \mathcal{M} es un conjunto acotado. Integrando directamente (6.11) sobre un periodo se tiene que

$$|\bar{p}| \leq \|\hat{f}\|_\infty + \frac{\|h\|_2}{\sqrt{T}}.$$

- 5) \mathcal{M} es un intervalo. Sean $\bar{p}_1, \bar{p}_2 \in \mathcal{M}$ con $\bar{p}_1 < \bar{p}_2$ y sean x_1, x_2 las soluciones de (6.1) correspondientes. Dado $\bar{p}_0 \in (\bar{p}_1, \bar{p}_2)$, las funciones x_1 y x_2 son respectivamente sub y supersoluciones de (6.11), puesto que

$$x_1'' + \hat{f}(x_1') + g(t, x_1, x_1') - \bar{p}_0 = \bar{p}_1 - \bar{p}_0 < 0$$

y

$$x_2'' + \hat{f}(x_2') + g(t, x_2, x_2') - \bar{p}_0 = \bar{p}_2 - \bar{p}_0 > 0.$$

En consecuencia, una sencilla generalización del Teorema 5.1 de [17] (véase también [3]) demuestra que (6.11), y por tanto (6.1), tiene una solución para \bar{p}_0 .

Observación 1. El Teorema 6.2 no puede mejorarse, como prueba el ejemplo

$$\begin{aligned} x'' + cx' + \arctan x &= \bar{p}, \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) &= x'(T), \end{aligned}$$

con $c \neq 0$. Multiplicando la ecuación por x' e integrando sobre un periodo se obtiene $\|x'\|_2^2 = 0$, lo que implica que las posibles soluciones son constantes, es decir, $x(t) \equiv \tan \bar{p}$. En conclusión, este problema posee exactamente una solución para $\bar{p} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y no tiene solución para $\bar{p} \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Observación 2. Si g es continua y acotada, los puntos 2, 3 y 4 de la anterior demostración son consecuencia de [13, Proposition 2.1].

En el caso particular de que $g(t, x, y)$ sea periódica en x , el Teorema anterior puede ser mejorado sustancialmente, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 6.3. *Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verifican las hipótesis del Teorema 6.2 y además*

(a) *Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y c.p.t. $t \in [0, T]$ se cumple que*

$$g(t, x, y) = g(t, x + 2\pi, y).$$

(b) Para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y c.p.t. $t_0 \in [0, T]$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| < \delta, |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(t, x, y) - g(t, x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Entonces, entonces existe un intervalo cerrado $[a, b]$ tal que

- (i) si $\bar{p} \notin [a, b]$, el problema (6.1) no tiene solución,
- (ii) si $\bar{p} \in [a, b]$, el problema (6.1) tiene al menos una solución,
- (iii) si $\bar{p} \in (a, b)$, el problema (6.1) tiene al menos dos soluciones que no difieren en un múltiplo de 2π .

Demostración. Por el Teorema 6.2, el conjunto \mathcal{M} de \bar{p} tales que (6.1) tiene al menos una solución es un intervalo acotado, esto es, $\text{cl}\mathcal{M} = [a, b]$.

Dividimos la demostración en tres etapas.

- 1) \mathcal{M} es cerrado. Sea $\{p_n\}$ una sucesión de puntos de \mathcal{M} convergente a cierto p , y sea $\{x_n\}$ la sucesión de soluciones de (6.1) correspondiente. Por el carácter periódico de g en x , podemos suponer (sumando un múltiplo de 2π a x_n si es necesario) que $x_n(0) \in [0, 2\pi]$. Teniendo en cuenta la acotación (6.9) se tiene que

$$|x_n(t)| = |x_n(0) + \int_0^t x_n'(s) ds| \leq 2\pi + RT$$

lo cual, junto con (6.10), prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en $H^2(0, T)$. Como $H^2(0, T)$ está compactamente embebido en $C^1(0, T)$, existe una sub-sucesión convergente a cierta $u \in C^1(0, T)$. Finalmente, tomando $\bar{p} = p_n$ en (6.1), un simple paso al límite prueba que u es solución de (6.1) con $\bar{p} = p$.

- 2) *Existencia de $W^{2,1}$ -sub y supersoluciones estrictas de (6.11) para $\bar{p} \in (a, b)$.* Consideremos el problema modificado (6.11), donde $R > 0$ se define en (6.9). Sean x_a y x_b las soluciones de (6.1) con $\bar{p} = a$ y $\bar{p} = b$ respectivamente. Como g es periódica, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha := x_b < \beta := x_a + 2k\pi$ y para algún $t_* \in [0, T]$,

$$\alpha(t_*) + 2\pi \geq \beta(t_*). \quad (6.12)$$

Vamos a probar que para cualquier $\bar{p} < b$ la función α es una $W^{2,1}$ -subsolución estricta. Dado $t_0 \in [0, T]$, la continuidad de f junto con la hipótesis (b) permiten tomar un abierto I_0 y $\epsilon_0 > 0$ de manera que $t_0 \in I_0$ y p.c.t. $t \in I_0$, para

todo u tal que $\alpha(t) \leq u \leq \alpha(t) + \epsilon_0$, y todo v tal que $\alpha'(t) - \epsilon_0 \leq v \leq \alpha'(t) + \epsilon_0$, se cumpla

$$|\hat{f}(v) - \hat{f}(\alpha'(t))| \leq \frac{b - \bar{p}}{2}, \quad |g(t, u, v) - g(t, \alpha(t), \alpha'(t))| \leq \frac{b - \bar{p}}{2}.$$

De aquí se sigue sin dificultad que para tales t, u y v

$$\begin{aligned} \alpha''(t) + \hat{f}(v) + g(t, u, v) &= b + (\hat{f}(v) - \hat{f}(\alpha'(t))) + (g(t, u, v) - g(t, \alpha(t), \alpha'(t))) \\ &\geq b - (b - \bar{p}) = \bar{p}. \end{aligned}$$

Por la periodicidad es claro que también $\alpha(t) + 2\pi$ es una $W^{2,1}$ -subsolución estricta de (6.11) si $\bar{p} < b$, y de forma análoga se demuestra que $\beta(t)$ y $\beta(t) + 2\pi$ son $W^{2,1}$ -supersoluciones estrictas si $\bar{p} > a$.

- 3) Si $\bar{p} \in (a, b)$, el problema (6.1) tiene al menos dos soluciones que no difieren en un múltiplo de 2π . Definamos los conjuntos

$$\Omega_1 := \{x \in C^1[0, T] : \alpha(t) < x(t) < \beta(t), |x'(t)| < R, \forall t \in [0, T]\},$$

$$\Omega_2 := \{x \in C^1[0, T] : \alpha(t) + 2\pi < x(t) < \beta(t) + 2\pi, |x'(t)| < R, \forall t \in [0, T]\},$$

y

$$\Omega_3 := \{x \in C^1[0, T] : \alpha(t) < x(t) < \beta(t) + 2\pi, |x'(t)| < R, \forall t \in [0, T]\}.$$

Sea $\mathcal{T}x := K_1Nx$, donde K_1 viene definido por (6.4) y $Nx = \bar{p} - \hat{f}(x') - g(\cdot, x, x') - x$. Aplicando el Teorema 6.1,

$$\deg(I - \mathcal{T}, \Omega_1, 0) = \deg(I - \mathcal{T}, \Omega_2, 0) = \deg(I - \mathcal{T}, \Omega_3, 0) = 1,$$

y por la propiedad de excisión del grado

$$\deg(I - \mathcal{T}, \Omega_3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2), 0) = -1.$$

Por tanto, existen dos soluciones $x_1 \in \Omega_1$ y $x_2 \in \Omega_3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ del problema (6.11). Pero este problema es equivalente a (6.1) en cada uno de los conjuntos Ω_i , luego x_1 y x_2 son de hecho soluciones de (6.1). Nótese además que $x_1 - 2n\pi \notin \Omega_3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ cualquiera sea $n = 1, 2, \dots$ ya que por (6.12),

$$x_1(t_*) - 2n\pi < \beta(t_*) - 2n\pi \leq \alpha(t_*) - 2(n-1)\pi \leq \alpha(t_*).$$

De igual manera $x_1 + 2n\pi$ con $n = 1, 2, \dots$ no puede pertenecer a $\Omega_3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ ya que $x_1 + 2n\pi > \alpha + 2\pi$. En consecuencia, $x_2 \in \Omega_3 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ no es un 2π -múltiplo de x_1 .

El ejemplo clásico de ecuación diferencial con no-linealidad periódica es la ecuación del péndulo forzado

$$x''(t) + f(x'(t)) + a \operatorname{sen} x(t) = \bar{p} + \tilde{p}(t).$$

Recuérdese que en el Capítulo 5 se obtuvieron ciertas estimaciones cuantitativas sobre el conjunto \mathcal{M} de valores medios \bar{p} admisibles para la ecuación del péndulo en los Corolarios 5.1 y 5.2. Ahora esta información puede completarse con el Teorema 6.3 para obtener resultados de multiplicidad.

6.3 Fuerzas restauradoras acotadas inferiormente.

Esta Sección la dedicamos al estudio del número de soluciones T -periódicas de una ecuación de Rayleigh generalizada en ciertos casos donde la no-linealidad es no acotada.

Cosideremos el problema periódico

$$\begin{aligned} x'' + f(x') + g(x) &= \bar{p} + h(t, x, x'), \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) &= x'(T). \end{aligned} \tag{6.13}$$

El resultado principal es de los llamados de tipo Ambrosetti-Prodi.

Teorema 6.4. *Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y $h : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Carathéodory tal que c.p.t. $t_0 \in [0, T]$ y para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$|t - t_0| < \delta, |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \Rightarrow |h(t, x, y) - h(t, x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Se asumen las siguientes hipótesis

(A) *Existen $d \geq c > 0$ y $\rho \geq 0$ tales que*

$$c \leq \frac{f(y)}{|y|^\rho y} \leq d$$

para todo $y \in \mathbb{R}$.

(B) Existe $k_1 \in L^2(0, T)$ tal que

$$|h(t, x, y)| \leq k_1(t)$$

p.c.t. $t \in [0, T]$ y todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(C) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$.

Bajo estas condiciones, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

(i) Si $\bar{p} < a$, el problema (6.13) no tiene solución.

(ii) Si $\bar{p} = a$, el problema (6.13) tiene al menos una solución.

(iii) Si $\bar{p} > a$, el problema (6.13) tiene al menos dos soluciones.

Observación. El modelo típico de acuación que satisface las hipótesis anteriores es

$$x'' + c|x'|^\rho x' + x^2 = \bar{p} + h(t)$$

con $h \in L^2(0, T)$ y $\rho \geq 0$.

Demostración. Estructuramos la demostración en cinco etapas.

- 1) Dado \bar{p}_0 existen $R_0 > 0$ y $R_1 > 0$ tales que toda solución $x(t)$ de (6.13) con $\bar{p} \leq \bar{p}_0$ verifica

$$\|x\|_\infty \leq R_0, \quad \|x'\|_\infty \leq R_1. \quad (6.14)$$

Si multiplicamos la ecuación (6.13) por x' e integramos sobre un periodo, por medio de la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\begin{aligned} c\|x'\|_{\rho+2}^{\rho+2} &\leq \int_0^T f(x')x' dt = \int_0^T h(t, x, x')x' dt \\ &\leq \int_0^T |k_1 x'| dt \leq \|k_1\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|x'\|_{\rho+2}, \end{aligned}$$

de donde

$$\|x'\|_{\rho+2} \leq \left(\frac{1}{c} \|k_1\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \right)^{\frac{1}{\rho+1}} =: K_1.$$

Sea $K_2 := \frac{1}{T}(\bar{p}_0 T + \|k_1\|_2 \sqrt{T} + dK_1^{\rho+1} T^{\frac{1}{\rho+2}})$. Por la hipótesis (C), existe $\nu > 0$ tal que $g(x) > K_2$ para todo $|x| > \nu$. Si $x(t)$ es solución del problema

(6.13), integrando directamente se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^T g(x) dt &= \bar{p}T + \int_0^T [h(t, x, x') - f(x')] dt \\ &\leq \bar{p}_0T + \|k_1\|_2\sqrt{T} + d \int_0^T |x'|^{\rho+1} dt \\ &\leq \bar{p}_0T + \|k_1\|_2\sqrt{T} + dK_1^{\rho+1}T^{\frac{1}{\rho+2}} = K_2T. \end{aligned}$$

En consecuencia, para toda solución $x(t)$ de (6.13) existe $t_0 \in [0, T]$ tal que $|x(t_0)| \leq \nu$. Por tanto,

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + \int_0^T |x'(t)| dt \leq \nu + K_1T^{\frac{\rho+1}{\rho+2}} =: R_0.$$

Sea $G := \max\{g(x) : |x| \leq R_0\}$. Ahora, multiplicando (6.13) por $x''(t)$, integrando sobre un periodo y teniendo en cuenta la cota obtenida sobre $x(t)$, se obtiene

$$\|x''\|_2^2 = \int_0^T [h(t, x, x') - g(x)]x'' dt \leq (\|k_1\|_2 + G\sqrt{T})\|x''\|_2.$$

Por tanto, $\|x''\|_2$ está acotada por $\|k_1\|_2 + G\sqrt{T}$, y como existe t_0 tal que $x'(t_0) = 0$ se deduce que

$$|x'(t)| \leq \int_{t_0}^t |x''| ds \leq \|x''\|_2\sqrt{T} \leq (\|k_1\|_2 + G\sqrt{T})\sqrt{T} =: R_1.$$

- 2) *El problema (6.13) tiene una solución para p_0 suficientemente grande.* Consideremos la ecuación

$$x'' + f(x') + k_1(t) = \bar{p}_1. \quad (6.15)$$

Es conocido (véase [65]) que existe \bar{p}_1 de forma que la ecuación (6.15) tiene una familia uniparamétrica de soluciones T -periódicas $u + C$ con $C \in \mathbb{R}$. Si u_0 es el elemento de esta familia que cumple que $\bar{u}_0 = 0$, por medio de las desigualdades de tipo Sobolev usadas en la demostración del Teorema 5.1, se obtiene

$$\|u_0\|_\infty \leq \frac{T\sqrt{T}}{12\sqrt{5}}\|k_1\|_2.$$

Sea $\bar{p} > \bar{p}_1 + \max\{g(x) : |x| \leq \frac{T\sqrt{T}}{12\sqrt{5}}\|k_1\|_2\}$. Vamos a probar que $u_0(t)$ es una supersolución de (6.13). En efecto,

$$\begin{aligned} u_0'' + f(u_0') + g(u_0) - h(t, u_0, u_0') \\ \leq u_0'' + f(u_0') + g(u_0) + k_1(t) = \bar{p}_1 + g(u_0) < \bar{p}. \end{aligned}$$

Análogamente, es posible obtener una subsolución ordenada considerando la ecuación

$$x'' + f(x') - k_1(t) = \bar{p}_2. \quad (6.16)$$

Sabemos que existe \bar{p}_2 tal que la ecuación (6.16) posee una familia de soluciones T -periódicas $u + C$, con $C \in \mathbb{R}$. Sea $u_1 := u - C$ con C lo suficientemente grande para que $u_1(t) < u_0(t)$ para todo $t \in [0, T]$ y $g(u_1) + \bar{p}_2 > \bar{p}$ (lo cual es posible por la condición (C)). Entonces,

$$\begin{aligned} u_1'' + f(u_1') + g(u_1) - h(t, u_1, u_1') \\ \geq u_1'' + f(u_1') + g(u_1) - k_1(t) = \bar{p}_2 + g(u_1) > \bar{p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, u_1 es una subsolución de (6.13) y además $u_1(t) < u_0(t)$ p.c.t. $t \in [0, T]$, por lo que teniendo en cuenta el paso 1 de la demostración, la afirmación está probada.

- 3) *El conjunto \mathcal{M} de todos los \bar{p} tales que (6.13) tiene una solución está acotado inferiormente.*

Por el paso 2, \mathcal{M} es no vacío. Sea $\bar{p}_0 \in \mathcal{M}$ y sea $x(t)$ una solución de (6.13) para $\bar{p} \leq \bar{p}_0$. Usando el paso 1, integrando directamente (6.13) sobre un periodo obtenemos la condición necesaria

$$\bar{p} \geq GT - \bar{k}_1 - \max\{|f(y)| : |y| \leq R_1\}.$$

- 4) *Para todo $\bar{p}_0 \in \mathcal{M}$, el conjunto $\mathcal{M} \cap]-\infty, \bar{p}_0]$ es un intervalo cerrado y acotado.*

Definamos las funciones

$$\hat{f}(y) := f(\delta(-R_1, y, R_1)),$$

y

$$\hat{g}(x) := g(\delta(-R_0, x, R_0))$$

donde $\delta(A, u, B)$ está definida en (6.8) y R_0, R_1 vienen del punto 1. Repitiendo la demostración del punto 1 para la ecuación modificada

$$\begin{aligned} x'' + \hat{f}(x') + \hat{g}(x) &= \bar{p} + h(t, x, x'), \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) &= x'(T), \end{aligned} \quad (6.17)$$

está claro que $x(t)$ es solución de (6.13) con $\bar{p} \leq \bar{p}_0$ si y sólo si es solución de (6.17).

Ahora, en el problema modificado las no-linealidades son acotadas, luego los argumentos usados en los Teoremas 6.2 y 6.3 son válidos de nuevo, probando que $\mathcal{M} \cap]-\infty, \bar{p}_0]$ es un intervalo cerrado. Finalmente, el paso 3 demuestra que $\mathcal{M} \cap]-\infty, \bar{p}_0] = [a, \bar{p}_0]$ para cierto a .

- 5) Si $\bar{p} \in \text{int}\mathcal{M}$, el problema (6.13) tiene al menos dos soluciones.

Sea $\bar{p}_1, \bar{p}_2 \in \mathcal{M}$ tales que $\bar{p}_1 < p < \bar{p}_2$. Usando el mismo argumento del punto 2 de la demostración del Teorema 6.3 se prueba que la solución de (6.13) con $\bar{p} = \bar{p}_1$ es una $W^{2,1}$ -supersolución estricta, que llamaremos $\beta(t)$. De la misma forma, obtenemos una $W^{2,1}$ -subsolución estricta ordenada $\alpha(t)$. Escribiendo el problema (6.13) como un problema de punto fijo $x = \mathcal{T}x$, se tiene que por el Teorema 6.1

$$\deg(I - \mathcal{T}, \Omega, 0) = 1,$$

siendo $\Omega = \{x \in C^1[0, T] : \alpha < x < \beta, |x'| < R_1\}$. Además, se puede fijar $R > 0$ lo bastante grande para que $\Omega \subset B(0, R)$ y para todo $\bar{p} \leq \bar{p}_2$ el problema (6.13) no tenga solución en la frontera de $B(0, R) \subset C^1[0, T]$, por el punto 1. De este modo, si consideramos el valor medio \bar{p} como un parámetro, la propiedad de conservación del grado por homotopía nos garantiza que $\deg(I - \mathcal{T}, B(0, R), 0)$ es constante para todo $\bar{p} \leq \bar{p}_2$. Ahora bien, por el punto 3 sabemos que no existe solución si $\bar{p} < GT - \bar{k}_1 - \max\{|f(y)| : |y| \leq R_1\}$, y en consecuencia

$$\deg(I - \mathcal{T}, B(0, R), 0) = 0,$$

y ahora la existencia de una segunda solución en $B(0, R) \setminus \Omega$ se deduce como consecuencia de la propiedad de excisión del grado.

El Teorema 6.4 se puede aplicar directamente al problema

$$\begin{aligned} x'' + f(x') + g(x) &= \bar{p} + h(t, x, x'), \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) &= x'(T). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Sin embargo, la condición (A) sobre la función de rozamiento f es en cierto modo bastante restrictiva. Es posible considerar una hipótesis más débil si imponemos sobre g una acotación uniforme para su derivada. De forma más precisa, establecemos el siguiente resultado.

Corolario 6.1. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ clase C^1 y $h : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Carathéodory en las condiciones del Teorema 6.4. Además, se asumen las siguientes hipótesis*

(A') *Existen $c > 0$ y $\rho \geq 0$ tales que $f(y)y \geq c|y|^{\rho+2}$ para todo $y \in \mathbb{R}$.*

(B') $G := \sup\{|g'(x)| : x \in \mathbb{R}\} < +\infty$.

(C') $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$.

Entonces, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

(i) *si $\bar{p} < a$, el problema (6.18) no tiene solución.*

(ii) *si $\bar{p} = a$, el problema (6.18) tiene al menos una solución.*

(iii) *si $\bar{p} > a$, el problema (6.18) tiene al menos dos soluciones.*

Demostración. La idea clave es establecer una cota a priori para la derivada de las soluciones de (6.18).

Multiplicando (6.18) por $x'(t)$ e integrando sobre un periodo, se obtiene

$$\begin{aligned} c\|x'\|_{\rho+2}^{\rho+2} &\leq \int_0^T f(x')x' dt = \int_0^T h(t, x, x')x' dt \\ &\leq \int_0^T |k_1 x'| dt \leq \|k_1\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|x'\|_{\rho+2}, \end{aligned}$$

de donde

$$\|x'\|_{\rho+2} \leq \sqrt[\rho+1]{\frac{\|k_1\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}}{c}} =: K_1.$$

Por otra parte, multiplicando por x'' e integrando sobre un periodo se tiene

$$\|x''\|_2^2 + \int_0^T g(x)x'' dt = \int_0^T h(t, x, x')x'' dt;$$

pero una simple integración por partes nos da $\int_0^T g(x)x''dt = -\int_0^T g'(x)(x')^2dt$, con lo cual

$$\begin{aligned} \|x''\|_2^2 &\leq \|k_1\|_2 \|x''\|_2 + \left| \int_0^T g'(x)(x')^2 dt \right| \\ &\leq \|k_1\|_2 \|x''\|_2 + G \|x'\|_2 \leq \|k_1\|_2 \|x''\|_2 + GK_1 T^{\frac{\rho}{2(\rho+2)}}. \end{aligned}$$

Este último término es lineal, luego existe $K_2 > 0$ tal que $\|x''\|_2 \leq K_2$, y en definitiva $\|x'\|_\infty \leq \sqrt{T}K_2 =: K_3$.

Con esta cota, se define la función truncada

$$\hat{f}(y) := f(\delta(-K_3, y, K_3)),$$

y el problema (6.18) es equivalente al problema modificado

$$\begin{aligned} x'' + \hat{f}(x') + g(x) &= \bar{p} + h(t, x, x'), \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) &= x'(T) \end{aligned} \tag{6.19}$$

que corresponde al caso con “fricción acotada”, al que podemos aplicar directamente el Teorema 6.4.

Observaciones finales.

- Las condiciones (A) y (A') del Teorema 6.4 y el Corolario 6.1 respectivamente cubren casos de gran interés para las aplicaciones, como el rozamiento cuadrático $f(y) = |y|y$, del que ya se ha hablado. En términos vulgares, puede decirse que la hipótesis (A') es “la mitad” que la hipótesis (A), y su principal ventaja es que podemos añadir un nuevo término de rozamiento $f_0(y)$ con la única condición de que $f_0(y)y \geq 0$ para todo y , lo que significa simplemente que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento.
- Es posible sin gran esfuerzo establecer versiones “duales” de los resultados de esta Sección considerando no-linealidades acotadas superiormente.
- Los resultados de este Capítulo se extienden sin ninguna dificultad a ecuaciones con una fuerza de rozamiento discontinua como la fricción seca. En efecto, basta considerar la ecuación como una inclusión diferencial y las cotas a priori sobre las soluciones obtenidas en las demostraciones nos garantizan la convergencia de la sucesión de soluciones obtenidas por el método clásico de las aproximantes de Yosida.

Bibliografía

- [1] S. AHMAD [1991], *A nonstandard resonance problem for ordinary differential equations*, Trans. Am. Math. Soc., **323**, 857-875.
- [2] J.M. ALONSO; R. ORTEGA [1995], *Boundedness and global asymptotic stability of a forced oscillator*, Nonlinear Anal. T.M.A., **25**, 297-309.
- [3] H. AMANN, A. AMBROSETTI AND G. MANCINI [1978], *Elliptic equations with noninvertible Fredholm linear part and bounded nonlinearities*, Math. Z., **158**, 179-194.
- [4] A. AMBROSETTI; G. MANCINI [1978], *Existence and multiplicity results for nonlinear elliptic problems with linear part at resonance*, J. Diff. Equ., **28**, 220-245.
- [5] A. AMBROSETTI; G. PRODI [1972], *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Mat. Pure Appl. **93**, 231-247.
- [6] J.P. AUBIN; A. CELLINA [1984], *Differential inclusions*, Springer-Verlag, New York-Tokio.
- [7] H. BEGHIN [1923], *Sur certains problemes de frottement*, Nouvelle Ann. Math. **2**, 305-312.
- [8] M. BROWN [1984], *A new proof of Brouwer's Lemma on translation arcs*, Houston J. Math., **10**, 35-41.
- [9] M. BROWN [1985], *Homeomorphisms of two-dimensional manifolds*, Houston J. of Math., **11**, 455-469.
- [10] N. BUTENIN; Y. NEIMARK; N. FUFÁEV [1990], *Introducción a la teoría de osciladores no lineales*, Mir, Moscú.
- [11] J. CAMPOS; R. ORTEGA; A. TINEO [1997], *Homeomorphisms of the disk with trivial dynamics and extinction of competitive systems*, J. Diff. Equ., **138**, 157-170.
- [12] J. CAMPOS; P.J. TORRES , *On the structure of the set of bounded solutions on a periodic Liénard equation*, sometido a publicación.

- [13] A. CAÑADA; P. DRABEK [1996], *On semilinear problems with nonlinearities depending only on derivatives*, SIAM J. Math. Anal., **27**, 543-557.
- [14] A. CAÑADA; P. MARTINEZ-AMORES [1983], *Periodic solutions of nonlinear vector ordinary differential equations of higher order at resonance*, Nonlinear Anal. T.M.A., **7**, 747-761.
- [15] A. CAPIETTO; J. MAWHIN ; F. ZANOLIN [1992], *Continuation theorems for periodic perturbations of autonomous systems*, Trans. Amer. Math. Soc., **329**, 41-72.
- [16] J.M. CARLSON; J.S. LANGER [1989], *Properties of earthquakes generated by fault dynamics*, Phys. Rev. Lett., **62**, 2632-2635.
- [17] C. DE COSTER; P. HABETS [1996], *Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and recent results*, in Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations, ed. F. Zanolin, CISM-ICMS **371**, Springer Verlag, New York.
- [18] CH. COULOMB [1785], *Theorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs particules*, Acad. Roy. Sci. Memo. Math. Phys., **10**.
- [19] S. CHANDRASEKHAR [1995], *Newton's Principia for the common reader*, Clarendon Press, Oxford.
- [20] M. CHERPION; C. DE COSTER; P. HABETS [1997], *Monotone iterative methods for boundary value problems*, prepublication.
- [21] K. DEIMLING [1992], *Multivalued differential equations*, de Gruiter.
- [22] K. DEIMLING [1994], *Resonance and Coulomb friction*, Diff. and Int. Equ., **7**, 759-765.
- [23] K. DEIMLING, P. SZILAGYI [1994], *Periodic solutions of dry friction problems*, Z. Angew. Math. Phys., **45**, 53-60.
- [24] E. DELASSUS [1920], *Considérations sur le frottement de glissement*, Nouvelle Ann. Math 4ème Sér., **20**, 485-496.
- [25] DEN HARTOG [1996], *Mechanical Vibrations*, Dover, New York.
- [26] F.J. ELMER [1997], *Nonlinear dynamics of dry friction*, J. Phys. A: Math. Gen., **30**, 6057-6063.
- [27] C. FABRY, J. MAWHIN AND M.N. NKASHAMA [1986], *A multiplicity result for periodic solutions of forced nonlinear second order differential equations*, Bull. London Math. Soc., **18**, 173-180.
- [28] M. FEČKAN [1996], *Bifurcation from homoclinic to periodic solutions in ordinary differential equations with multivalued perturbations*, J. Diff. Equ., **130**, 415-450.

- [29] A.F. FILIPPOV [1988], *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Kluwer Ac. Pub., London.
- [30] A. FONDA [1995], *Periodic solutions for a conservative system of differential equations with a singularity of repulsive type*, Nonlinear Anal. T.M.A., **24**, 667-676.
- [31] A. FONDA; R. MANÁSEVICH ; F. ZANOLIN [1993], *Subharmonic solutions for some second-order differential equations with singularities*, SIAM J. Math. Anal., **24**, n. 5, 1294-1311.
- [32] G. FOURNIER; J. MAWHIN [1985], *On periodic solutions of forced pendulum-like equations*, J. Diff. Equ., **68**, 381-395.
- [33] P.O. FREDERICKSON; A.C. LAZER [1969], *Necessary and sufficient damping in a second order oscillator*, J. Diff. Equ., **5**, 262-270.
- [34] M. FRIGON [1994], *Théorèmes d'existence de solutions d'inclusions différentielles*, in "Topological Methods in Differential Equations and Inclusions". N.A.T.O. ASI Series 6. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [35] S. FUČIK; M. KRBEČ [1977], *Boundary value problems with bounded nonlinearity and general null-space of the linear part*, Math. Z., **155**, 129-138.
- [36] W.B. GORDON [1975], *Conservative dynamical systems involving strong forces*, Trans. Amer. Math. Soc., **204**, 113-135.
- [37] W.B. GORDON [1977], *A minimizing property of keplerian orbits*, Amer. J. Math., **99**, 961-971.
- [38] P. HABETS; L. SANCHEZ [1990], *Periodic solutions of some Liénard equations with singularities*, Proc. Amer. Math. Soc., **109**, 1035-1044.
- [39] P. HABETS ; L. SANCHEZ [1990], *Periodic solutions of dissipative dynamical systems with singular potentials*, Diff. and Int. Equ., **3**, n. 6, 1139-1149.
- [40] P. HABETS ; L. SANCHEZ [1997], *A two-point problem with nonlinearity depending only of the derivative*, to appear in SIAM J. Math. Anal.
- [41] P. HABETS ; P.J. TORRES [1997], *Some multiplicity results for periodic solutions of a Rayleigh differential equation*, sometido a publicación.
- [42] P. HABETS ; F. ZANOLIN [1994], *Upper and lower solutions for a generalized Emden-Fowler equation*, J. Math. Anal. Appl., **181**, 684-700.
- [43] P. HABETS ; F. ZANOLIN [1995], *Positive solutions for a class of singular boundary value problems*, Bolletino U.M.I., **7**, n. 6, 273-286.
- [44] R. KANNAN; R. ORTEGA [1985], *Periodic solutions of pendulum-type equations*, J. Diff. Equ., **59**, 123-144.

- [45] R. KANNAN, R. ORTEGA [1986], *An asymptotic result in forced oscillations of pendulum type equations*, *Applicable Analysis*, **22**, 45-53.
- [46] I.T. KIGURADZE [1968], *Some singular boundary value problems for ordinary nonlinear second order differential equations*, *Differentsial'nye Uravneniya*, **4**, 1753-1773.
- [47] I.T. KIGURADZE [1970], *On a singular boundary value problem*, *J. Math. Anal. Appl.*, **30**, 475-489.
- [48] M. KUNZE; T. KÜPPER [1997], *Qualitative bifurcation analysis of a non-smooth friction-oscillator model*, *Z. Angew. Math. Phys.*, **48**, 87-101.
- [49] M. KUNZE; B. MICHAELI, *On the rigorous applicability of Osedelec's Ergodic Theorem to obtain Lyapunov exponents for non-smooth dynamical systems*, to appear in 2nd Marrakesh International Conference on Differential Equations.
- [50] M. LAGHDIR; M.D.P. MONTEIRO MARQUES [1995], *Dynamics of a particle with damping, friction and percussional effects*, *J. Math. Anal. Appl.*, **196**, 902-920.
- [51] M. LAGHDIR; M.D.P. MONTEIRO MARQUES [1995], *Motion of a particle submitted to dry friction and to normal percussions*, *Portugaliae Mathematica*, **52**, 227-239.
- [52] A.C. LAZER [1968], *On Schauder's fixed point theorem and forced second order nonlinear oscillations*, *J. Math. Anal. Appl.*, **21**, 421-425.
- [53] A.C. LAZER; S. SOLIMINI [1987], *On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **99**, 109-114.
- [54] N. LEVINSON [1944], *Transformation theory of non-linear differential equations of the second order*, *Annals of Mathematics*, **45**, 723-737.
- [55] A.G. LOMTATIDZE [1987], *Positive solutions of boundary value problems for second order ordinary differential equations with singular points*, *Differentsial'nye Uravneniya*, **23**, 1685-1692.
- [56] A.G. LOMTATIDZE [1996], *Oscillation and nonoscillation of Emden-Fowler type equation of second order*, *Archivum Mathematicum*, **32**, 181-193.
- [57] N.G. LLOYD [1978], *Degree theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [58] P. MARTÍNEZ-AMORES; P. J. TORRES [1996], *Dynamics of a periodic differential equation with a singular nonlinearity of attractive type*, *J. Math. Anal. Appl.*, **202**, 1027-1039.
- [59] J. L. MASSERA [1950], *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*, *Duke Math. J.*, **17**, 457-475

- [60] J. MAWHIN [1979], *The Bernstein-Nagumo problem and two-point boundary value problems for ordinary differential equations*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **30**, 709-740.
- [61] J. MAWHIN [1982], *Periodic solutions of forced pendulum-like equations*, in Ordinary and Partial Differential Equations, Dundee, Everitt and Sleeman ed., Lecture Notes in Math. **964**, Springer, Berlin, 458-476.
- [62] J. MAWHIN [1987], *Recent results on periodic solutions of the forced pendulum equation*, Red. Ist. Matem. Univ. Trieste, **19**, 119-129.
- [63] J. MAWHIN [1988], *The forced pendulum: A paradigm for nonlinear analysis and dynamical systems*, Expo. Math., **6**, 271-287.
- [64] J. MAWHIN [1991], *Topological degree and boundary value problems for nonlinear Differential equations*, Lectures Notes in Math., **1537**, 74-143.
- [65] J. MAWHIN [1994], *Some remarks on semilinear problems at resonance where the nonlinearity depends only on the derivatives*, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, **2**, 61-69.
- [66] J. MAWHIN; M. WILLEM [1984], *Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations*, J. Diff. Equ., **52**, 264-287.
- [67] N. MINORSKI [1974], *Nonlinear Oscillations*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York.
- [68] M.D.P. MONTEIRO MARQUES [1993], *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems*, Birkhäuser, Berlin.
- [69] M. NAGUMO [1937], *Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$* , Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **19**, 861-866.
- [70] A.H. NAYFEH; D.T. MOOK [1979], *Nonlinear Oscillations*, J. Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto.
- [71] R. ORTEGA [1984], *Estudio cualitativo de operadores diferenciales elípticos semilineales*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- [72] R. ORTEGA [1990], *Topological degree and stability of periodic solutions for certain differential equations*, J. London Math. Soc., **42**, 505-516.
- [73] R. ORTEGA [1994], *Some applications of the topological degree to stability theory*, in "Topological Methods in Differential Equations and Inclusions". N.A.T.O. ASI Series 6. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [74] R. ORTEGA [1995], *A boundedness result of Landesman-Lazer type*, Diff. and Int. Equ., **8**, 729-734.

- [75] R. ORTEGA [1996], *Periodic Solutions of a Newtonian Equation: Stability by the Third Approximation*, J. Diff. Equ., **128**, 491-518.
- [76] P. PAINLEVÉ [1905], *Sur les lois du frottement de glissement*, C. R. Acad. Sci. Paris, **140**, 702-707.
- [77] M.A. DEL PINO; R.F. MANÁSEVICH [1995], *T-periodic solutions for a second order system with singular nonlinearity*, Diff. and Int. Equ., **8**, n. 7, 1873-1883.
- [78] R. REISSING [1953], *Über die Differentialgleichung $\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2D\frac{dx}{d\tau} + \mu \operatorname{sgn} \frac{dx}{d\tau} + x = \Phi(\nu\tau)$, wo $\Phi(\nu\tau + 2\pi) = \Phi(\nu\tau)$ ist*, Abhandlungen de Deutschen Akademie der Wissenschaften **1**.
- [79] N. ROUCHE; J. MAWHIN [1980], *Ordinary differential equations. Stability and Periodic Solutions*, Pitman, Boston.
- [80] R.A. SMITH [1986], *Massera's convergence theorem for periodic nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. and Appl., **120**, 679-708.
- [81] S. SOLIMINI [1990], *On forced dynamical systems with a singularity of repulsive type*, Nonlinear Anal. T.M.A., **14**, 489-500.
- [82] S.D. TALIAFERRO [1979], *A nonlinear singular boundary value problem*, Nonlinear Anal. T.M.A., **3**, 897-904.
- [83] D. TATARU [1989], *Stabilizing second order differential equations*, Diff. and Int. Equ., **2**, 132-143.
- [84] P.J. TORRES [1997], *Bounded solutions in singular equations of repulsive type*, aceptado en Nonlinear Anal. T.M.A.
- [85] P.J. TORRES [1997], *Periodic solutions of some differential equations with nonlinear damping*, aceptado en Diff. and Int. Equ.
- [86] P.J. TORRES; F. ZANOLIN [1997], *Periodic motion of a system of two or three charged particles*, sometido a publicación.
- [87] W.R. UTZ [1976], *Periodic solutions of second order differential equations with nonlinear, nondifferentiable damping*, SIAM J. Math. Anal., **31**, n. 3, 504-510.
- [88] K. YOSIDA [1974], *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, fourth ed.
- [89] F. ZANOLIN [1981], *Periodic solutions for second order differential systems with damping*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **65**, 223-234.
- [90] F. ZANOLIN [1982], *Remarks on multiple solutions for nonlinear ordinary differential equations of Liénard type*, Boll. Un. Mat. Ital., **6**, 1-B, 683-698.

- [91] N.A. ZELEZCOV [1962], *The method of point transformation and the problem of the forced vibrations of an oscillator with "combined friction"*, Translation A.M.S., **Serie 1, vol. 4**, 159-204.
- [92] A. ZITAN; R. ORTEGA [1994], *Existence of asymptotically stable periodic solutions of a forced equation of Liénard type*, Nonlinear Anal. T.M.A., **22**, 993-1003.