

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Ecuaciones Funcionales

ESTUDIO CUALITATIVO DEL RANGO DE OPERADORES  
DIFERENCIALES ELIPTICOS SEMILINEALES

Rafael Ortega Rios

Tesis Doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1984



Tesis doctoral dirigida por el Prof. R. Kannan, de la Universidad de Texas (Arlington), y por el Prof. Antonio Cañada Villar, de la Universidad de Granada. Fue leída el 19 - de Diciembre de 1.984, ante el tribunal formado por los profesores: Cañada Villar, Díaz Díaz, Guzmán - Ozámiz, Kannan y Martínez Amores. Obtuvo la calificación de Sobresaliente cum laude.



INDICE	<u>pag.</u>
Introducción	1
CAPITULO 1: Preliminares	11
1.1. El Problema Lineal	11
1.2. El Problema No-Lineal	15
1.3. Sub-soluciones y Super-soluciones	17
CAPITULO 2: El Caso Acotado	22
2.1. Resultados Generales	22
2.2. El primer valor propio	35
2.3. Soluciones periódicas de la ecuación del péndulo forzado	46
CAPITULO 3: El Caso No Acotado	55
3.1. Cotas a priori para el caso ordinario	57
3.2. Cotas a priori para ecuaciones en derivadas parciales	65
3.3. El rango del operador $\Delta + \lambda_1 I + g$ con $g$ superlineal (I)	72
3.4. El rango del operador $\Delta + \lambda_1 I + g$ con $g$ superlineal (II)	77
3.5. Algunos ejemplos	83
CAPITULO 4: Comentarios finales y problemas abiertos	87
REFERENCIAS	90



## INTRODUCCION

El estudio de problemas de contorno para ecuaciones diferenciales no lineales, aparte de su interés matemático intrínseco, surge motivado por sus aplicaciones en diversas ramas científicas. En general, un problema de contorno consiste en estudiar las soluciones de una ecuación diferencial que satisfacen ciertas condiciones prescritas en la frontera de su dominio de definición.

Un ejemplo clásico es el problema de las oscilaciones periódicas de un péndulo simple sin rozamiento. En concreto, y si se supone que una fuerza externa  $p(t)$  actúa sobre el sistema, se tiene la ecuación diferencial ordinaria.

$$x''(t) + \frac{g}{l} \operatorname{sen} x(t) = p(t), \quad t \in (0, T), \quad T > 0,$$

junto con condiciones de periodicidad

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T).$$

Algunas notas acerca de la importancia que ha tenido este problema en el desarrollo del Análisis No Lineal pueden verse en [M3].

En un contexto diferente, un problema de índole geométrica aparece al intentar describir la clase de funciones curvatura que una variedad admite. Para una variedad bi-dimensional, compacta sin borde, si  $k$  es la curvatura gaussiana para una estructura métrica fijada  $(M, g)$ , la cuestión de determinar si una función  $K$  puede ser la curvatura gaussiana para una métrica puntualmente conforme a  $g$  conduce a la ecuación elíptica sobre la variedad

$$\Delta u = k - K e^{2u},$$

donde  $\Delta$  es el operador de Laplace para la métrica  $g$ . En este caso no hay condición de frontera al no tener borde la -

variedad (ver [KW2] para más detalles y [Ni] para algunos casos en dimensiones superiores).

También, en algunos problemas de Química y Física - Atómica aparecen ecuaciones del tipo

$$\Delta u + g(u) = f \quad \text{en } \Omega ,$$

junto con la condición

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

donde  $g$  es una función de crecimiento rápido (por ejemplo,  $g(u) = u e^u$ ),  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Omega$  designa en todo lo que sigue un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  con frontera  $\partial\Omega$  (ver [FK] )

El tratamiento matemático de problemas como los anteriores presenta numerosas dificultades, debidas sobre todo al carácter global del problema y a que con frecuencia se trata de ecuaciones no lineales. Esto hace que la teoría de problemas de contorno haya tenido una influencia importante en otras disciplinas de la matemática. Como ejemplos de lo que venimos diciendo se puede pensar en el inicio de la Teoría de Series de Fourier a raíz del estudio de la Ecuación del Calor, o bien en la relación que existió entre el desarrollo inicial de la Teoría Espectral y las Ecuaciones Integrales y Problemas de Sturm-Liouville.

En esta memoria nos centraremos en diversos problemas no lineales para los que la parte lineal de la ecuación venga dada por un operador diferencial uniformemente elíptico de segundo orden. Un ejemplo de este tipo de operadores es el operador de Laplace.

Al realizar un estudio del problema no lineal se hace imprescindible el conocimiento detallado del problema lineal, pues este último ha de ser modelo y herramienta básica del caso más general. Son bien conocidos los siguientes



resultados acerca del problema lineal homogéneo

$$(L_h) \quad \Delta u + \lambda u = 0 \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Existe una sucesión de valores propios  $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $\lambda_n > 0$ ,  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , tal que  $(L_h)$  admite solución no trivial si y sólo si  $\lambda = \lambda_n$  para algún  $n \geq 1$ .

Para el problema lineal no homogéneo

$$(L) \quad \Delta u + \lambda u = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

con  $f$  y  $\Omega$  satisfaciendo ciertas condiciones de regularidad, se tiene la siguiente Alternativa de Fredholm:

- i) Si  $\lambda$  no es un valor propio entonces siempre existe una única solución de  $(L)$ .
- ii) Si  $\lambda = \lambda_n$  para algún  $n \geq 1$  existe solución de  $(L)$  - cuando y sólo cuando  $f$  sea ortogonal en  $L^2(\Omega)$  a las soluciones de  $(L_h)$  para  $\lambda = \lambda_n$ .

Lo anterior puede ser descrito en términos de operadores definiendo

$$\Delta + \lambda I : X \rightarrow Y, \quad u \mapsto \Delta u + \lambda u,$$

donde  $X$  e  $Y$  son espacios apropiados. (Por ejemplo  $X = C_0^{2,p}(\bar{\Omega})$ ,  $Y = C^{0,p}(\bar{\Omega})$ , si se trata de soluciones clásicas). Se obtiene de lo anterior,

- i) Si  $\lambda$  no es un valor propio  $R(\Delta + \lambda I) = Y$
- ii) Si  $\lambda = \lambda_n$  para algún  $n \geq 1$

$$R(\Delta + \lambda_n I) = [\text{Ker}(\Delta + \lambda_n I)]^{\perp} \cap Y,$$

donde  $R(\Delta + \lambda I)$  notará el rango o imagen del operador  $\Delta + \lambda I$ .

Se obtienen resultados similares cuando se sustituye la condición en la frontera de tipo Dirichlet por una de tipo Neumann (ver Sección 1.1. de esta memoria).

Los métodos aplicados para el estudio de problemas no lineales han sido muy diversos. Un primer avance importante fue el conseguido por Schauder como aplicación del teorema de punto fijo que lleva su nombre. Schauder probó la existencia de al menos una solución para el problema

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}), & (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

bajo la hipótesis básica de que  $f$  fuese continua y acotada. Su método consistía en transformar el problema en una ecuación integro-diferencial de la forma

$$u(x, y) = \int_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) d\xi d\eta$$

donde  $G$  es la función de Green para  $\Omega$ . (ver [Di]).

Resultados similares pueden ser obtenidos para dominios acotados  $\Omega$  en dimensiones superiores y una parte lineal de la forma  $\Delta u + \lambda u$ , donde  $\lambda$  no es un valor propio.

De este modo, y al menos para el caso en que el término no lineal es acotado, la dificultad se centraba en aquellos problemas que presentaban una parte lineal de la forma  $\Delta u + \lambda_n u$  para algún valor propio  $\lambda_n$ . Esta situación se engloba en la categoría más general de los llamados Problemas en Resonancia.

Los problemas en Resonancia son aquellos que, en forma abstracta, pueden ser representados por ecuaciones de la forma

$$Lu + Nu = 0,$$

donde  $L$  es un operador lineal y  $N$  un operador no lineal definidos entre espacios de Banach y donde el núcleo del operador  $L$  es no trivial. Los primeros trabajos en esta línea son debidos a Lyapunov y Schmidt, quienes hacían uso del

Teorema de la Función Implícita para hacer un estudio local de la ecuación. Posteriormente Cesari utilizó métodos globales junto con las ideas de Liapunov y Schmidt para estudiar dichos Problemas. Esto dió lugar al conocido Método Alternativa. (ver [C] y [GM] para más detalles así como para algunos trabajos posteriores).

Siguiendo en este orden de ideas Landesman y Lazer probaron en 1970 [LL] un notable resultado para el problema

$$(N) \quad \Delta u + \lambda_n u + g(u) = f(x) \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

donde  $\lambda = \lambda_n$  para  $n \geq 1$  era un valor propio,

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua y acotada y } f \in L^2(\Omega).$$

Dicho resultado permite en ciertos casos caracterizar el rango del operador no lineal

$$\Delta + \lambda_n I + g: X \rightarrow Y, \quad u \mapsto \Delta u + \lambda_n u + g(u),$$

dando lugar a un análogo de la Alternativa de Fredholm para algunos operadores no lineales. (ver Corolario 2.1. y ejemplos 2.2. y 2.3. de esta memoria).

Dos suposiciones eran básicas en [LL]:

i)  $g$  es acotada.

ii)  $g(-\infty) < g(u) < g(+\infty) \quad \forall u \in \mathbb{R}$  [ resp  $g(+\infty) < g(u) < g(-\infty) \quad \forall u \in \mathbb{R}$  ],

$$\text{donde } g(\pm\infty) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} g(u)$$

En este trabajo nos proponemos el estudio del rango del operador  $\Delta + \lambda I + g$ , para condiciones de frontera de tipo Dirichlet o Neumann, cuando una de las suposiciones i), ii), o ambas, no se verifican.

Como ya se ha indicado, es habitual definir un problema en resonancia como aquel en que la parte lineal no es invertible. Esta definición es bastante natural cuando la -

no-linealidad es acotada (en nuestro caso cuando se verifica i)), ya que al tratarse de una perturbación "pequeña" - del operador lineal, el carácter de éste se conserva y la suma de ambos operadores seguirá siendo sobreyectiva si el problema es no resonante. Técnicamente, estas ideas se traducen en la posibilidad de aplicar el Teorema de Punto Fijo de Schauder. Si se suprime i) puede ocurrir que la perturbación  $g$  sea lo "bastante fuerte" como para cambiar por completo el carácter del problema lineal. De este modo ocurre que para ciertas  $g$  superlineales el operador  $\Delta + \lambda I + g$  no es sobreyectivo en parámetros  $\lambda$  que no son valores propios, por el contrario, se encuentran no-linealidades para las que el operador  $\Delta + \lambda_n I + g$  es sobreyectivo. (ver Capítulo 3 de este trabajo).

Nos ha parecido entonces conveniente comenzar nuestro estudio determinando el conjunto  $\Lambda_g$ , formado por los parámetros  $\lambda$  para los que el operador no es sobreyectivo. (Hay que notar que, tanto en el caso lineal como en el acotado,  $\Lambda_g$  coincide con la sucesión de valores propios).

El siguiente paso será tratar de dar la máxima información posible (cualitativa y cuantitativa cuando sea posible) del rango de  $\Delta + \lambda I + g$  para  $\lambda \in \Lambda_g$ .

Al eliminar la hipótesis ii) surgen dificultades de otro orden. Con objeto de simplificar la situación suponemos por el momento que i) se verifica y  $\lambda_n$  es un valor propio simple del problema lineal, con función propia asociada  $\phi_n$ ,  $\|\phi_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

Notando por  $P$  la proyección ortogonal sobre  $\text{Ker}(\Delta + \lambda_n I)$  cada función  $f \in Y$  se descompone en la forma

$$f = f_0 \phi_n + f_1, \quad f_0 \in R, \quad f_1 \perp \phi_n, \quad \text{donde}$$

$$f_0 = \int_{\Omega} f \phi_n, \quad f_1 = (I - P)f.$$

El rango del operador lineal puede ser expresado en la forma

$$R(\Delta + \lambda_n I) = \{f \in Y: f = f_0 \phi_n + f_1, f_0 \in R, f_1 \perp \phi_n, f_0 = 0\},$$

y se trata por tanto de un hiperplano cerrado en  $Y$  con ecuación  $f_0 = 0$ .

Para una función  $g$  no lineal que verifique i) y ii) se sigue de los resultados de Landesman y Lazer que

$$R(\Delta + \lambda_n I + g) = \{f \in Y: f = f_0 \phi_n + f_1, f_0 \in R, f_1 \perp \phi_n, f_0 \in (v_-, v_+)\}$$

donde

$$v_+ = g(+\infty) \int_{\Omega} \phi_n^+ - g(-\infty) \int_{\Omega} \phi_n^-, \quad v_- = g(-\infty) \int_{\Omega} \phi_n^+ - g(+\infty) \int_{\Omega} \phi_n^-$$

El rango es ahora un abierto en  $Y$  que viene dado por la relación  $f_0 \in v$ , donde  $v = (v_-, v_+) \subset R$ , en la misma forma en que  $f_0 = 0$  determinaba el rango del operador lineal. Además, la forma geométrica de  $R(\Delta + \lambda_n I + g)$  es particularmente sencilla, pues se trata de una franja en  $\text{Ker}(\Delta + \lambda_n I) \otimes \langle \phi_n \rangle^{\perp}$ . Cuando se suprime ii), se puede esperar que el rango sea más complicado y que la "ecuación" que lo define también dependa de  $f_1$ . Es decir, cabe pensar en una relación del tipo  $f_0 \in v(f_1)$  donde  $v(f_1)$  es un conjunto en  $R$  que depende de  $f_1$  y

$$R(\Delta + \lambda_n I + g) = \{f \in Y: f = f_0 \phi_n + f_1, f_0 \in R, f_1 \perp \phi_n, f_0 \in v(f_1)\}.$$

(Ver Sección 2.1. para detalles). La determinación explícita de  $v(f_1)$  no parece posible en general y ello induce a pensar en realizar un estudio cuantitativo que permita dar aproximaciones de  $v(f_1)$ . Dicho estudio depende fuertemente de la naturaleza particular de  $g$  y se dan algunos ejemplos en esta memoria. (Ver especialmente Ejemplo 2.4 y Teorema 2.7). Una dirección distinta consiste en realizar un estudio de naturaleza cualitativa del rango, determinando propiedades de  $v(f_1)$ .

Propiedades significativas son el posible carácter de conexidad de  $v(f_1)$ , el carácter cerrado o abierto de  $v(f_1)$ , la continuidad del funcional  $f_1 + v(f_1), \dots$ . El estudio de dichas propiedades nos irá permitiendo a lo largo de la memoria extraer nueva información acerca del rango de  $\Delta + \lambda_1 I + g$ .

En el Capítulo 1 se exponen algunos preliminares necesarios para el desarrollo de la memoria. En la Sección 1.1 se da un breve resumen de ciertos aspectos de la teoría lineal de ecuaciones elípticas. En la Sección 1.2. se esbozan las líneas generales del Método Alternativa adaptado al caso que nos ocupa. En la Sección 1.3. se expone el método de sub y super-soluciones y se presentan algunos resultados relacionados con el mismo. (ver en particular [AAM] y [F1]).

El Capítulo 2 se ocupa del caso en que  $g$  es acotada. Se obtienen en primer lugar, Sección 2.1., resultados de carácter general para los que las herramientas básicas son el Método Alternativa y el grado de Leray-Schauder. En particular se da una nueva prueba de algunos resultados de Ambrosetti y Mancini [AM I]. Posteriormente, Sección 2.2., se particulariza al primer valor propio. En este caso, y debido a que la función propia es no negativa, es posible usar la técnica de sub y super-soluciones para obtener resultados más precisos. Se acaba el capítulo aplicando las ideas anteriores a la ecuación del péndulo, Sección 2.3. En esta Sección se obtienen mejoras substanciales de algunos resultados de Castro [Ca] y Mawhin [M3]; así como otros resultados originales.

El Capítulo 3 trata de ciertas clases de términos  $g$  que son no acotados, y se trata de obtener para ellos resultados en la línea de lo hecho en el Capítulo 2. Un problema básico para este caso es el de la obtención de cotas a priori

ri para las posibles soluciones. Esto se consigue por diversos métodos, distinguiendo los casos de ecuaciones ordinarias y en derivadas parciales. En la Sección 3.1. se obtienen cotas a priori para ecuaciones ordinarias que permiten extender resultados previos de Ward en [W1]. En la Sección 3.2. se hace algo similar para ecuaciones en derivadas parciales y se obtienen resultados de existencia que mejoran los de [W3]. En las Secciones 3.3 y 3.4 se estudia el rango del operador  $\Delta + \lambda_1 I + g$  bajo dos tipos de hipótesis. En la Sección 3.3. el método de truncatura y los resultados del Capítulo 2. son básicos. En la Sección 3.4. se combinan las cotas a priori con sub y super-soluciones para obtener algunas mejoras sobre los resultados en [D1] y [BL]. La Sección 3.5 presenta ejemplos de lo tratado.

En el capítulo 4 se dan algunas líneas de continuación de este trabajo.

Antes de dar por acabada esta introducción quiero manifestar mi profundo agradecimiento y amistad al Prof. R. Kannan, director de esta memoria. Sus enseñanzas y ayuda no sólo me han permitido realizar este trabajo sino que han influido decisivamente en mi formación científica.

Mi gratitud al Prof. Antonio Cañada Villar, también director de esta memoria, con quien me inicié en el trabajo de investigación. Al Prof. Pedro Martínez Amores por su estímulo y ayuda constantes y al resto de mis compañeros del Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Granada; en especial a la Srta. Paqui Cano que mecanografió este trabajo.

Este trabajo fue realizado en su mayor parte durante una estancia en la Universidad de Texas en Arlington, gracias a una beca concedida por el Comité Conjunto Hispano-Norteamer

ricano para Asuntos Educativos y Culturales. Al Departamento de Matemáticas de esta Universidad debo agradecerle la ayuda que en todo momento se me prestó.



CAPITULO 1: Preliminares

1.1. El Problema Lineal

Sea  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , con frontera regular que denotaremos  $\partial\Omega$  y tal que el principio del máximo es válido (ver [PW] y [ADN] para las condiciones concretas sobre  $\Omega$  ).

Se considera el problema de contorno

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda u = f & \text{en } \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$  es el operador de Laplace,

$\lambda$  un parámetro real y  $f$  es una función definida en  $\bar{\Omega}$  cuya clase se precisará más adelante.  $B$  denota una condición de frontera de uno de los dos tipos siguientes:

(a)  $Bu = u$  en  $\partial\Omega$  (Dirichlet)

(b)  $Bu = \frac{\partial u}{\partial \eta}$  en  $\partial\Omega$  (Neumann);  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  representa la derivada en la dirección normal exterior a  $\partial\Omega$ .

Con objeto de precisar la clase de  $f$  introduciremos algunos espacios de funciones con sus correspondientes normas.

$C^k(\bar{\Omega})$ , funciones de clase  $k$  en  $\bar{\Omega}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ; con la norma de la convergencia uniforme de la función y sus derivadas hasta el orden  $k$ ,

$$\|u\|_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{\bar{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|, \text{ donde } \frac{\partial}{\partial x_j} = \partial_j,$$

$$\partial = (\partial_1, \dots, \partial_N), \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N} \text{ para un multiíndice } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N).$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|.$$

$C^{k,\mu}(\bar{\Omega})$ , espacio de Hölder de funciones de clase  $k$  en  $\bar{\Omega}$  para las que la siguiente norma es finita

$$|u|_{k,\mu} = |u|_k + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y \in \bar{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\mu}, \quad 0 < \mu < 1$$

$W^{k,p}(\Omega)$ , espacio de Sobolev obtenido como completación de  $C^\infty(\bar{\Omega})$  para la norma

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_p, \quad \text{donde } \|\cdot\|_p \text{ denota la norma usual en el espacio de Lebesgue } L^p(\Omega), \quad 1 < p < \infty.$$

Debido a que en este trabajo nos centraremos en la existencia de soluciones clásicas supondremos que  $f \in C^0(\bar{\Omega})$  para  $N=1$ ; con lo que toda posible solución de (1.1) pertenece a  $C^2(\bar{\Omega})$ . En el caso  $N \geq 2$  es sabido que la suposición anterior no garantiza el carácter clásico de la solución. Debido a ello, para  $N \geq 2$ , supondremos que  $f \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$  para algún  $\mu$  comprendido entre 0 y 1 que permanecerá fijo. Bajo esta condición toda posible solución de (1.1) está en  $C^{2,\mu}(\bar{\Omega})$  y es por tanto una solución en el sentido clásico.

Es bien conocido que el problema (1.1) admite una sucesión de valores propios

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow +\infty,$$

todos ellos con multiplicidad finita y funciones propias asociadas  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ , que forman un sistema ortonormal y completo de  $L^2(\Omega)$ .

La teoría de Krein-Rutman [KR] garantiza que el primer valor propio es simple y la primera función propia puede ser escogida positiva en  $\Omega$ . Para el problema de Dirichlet  $\lambda_1$  es positivo. Para el problema de

Neumann  $\lambda_1 = 0$  con  $\phi_1$  constante en  $\Omega$ .

La Alternativa de Fredholm establece que si  $\lambda$  no es un valor propio el problema (1.1) tiene una única solución para cualquier  $f$ , y si  $\lambda = \lambda_n$  con

$\lambda_{n-1} < \lambda_n = \dots = \lambda_{n+k} < \lambda_{n+k+1}$  entonces el problema (1.1) tiene solución si y sólo si  $f$  es ortogonal a

$\phi_n, \phi_{n+1}, \dots, \phi_{n+k}$  en  $L^2(\Omega)$ . (Es decir,

$$(1.2) \quad \int_{\Omega} f \phi_n = \int_{\Omega} f \phi_{n+1} = \dots = \int_{\Omega} f \phi_{n+k} = 0)$$

En general, si  $u$  es una solución de (1.1) se tienen las estimaciones

$$(1.3) \quad |u|_{2,\mu} \leq C \|f\|_{0,\mu} + C |u|_{0,\mu},$$

$$(1.4) \quad \|u\|_{2,p} \leq C \|f\|_p + C \|u\|_p,$$

con  $C$  independiente de  $u$  y  $f$ . (Ver [ADN]).

(En el caso  $N=1$  se tiene también

$$(1.5) \quad |u|_2 \leq C \|f\|_0 + C |u|_0)$$

De la Alternativa de Fredholm y de (1.3) y (1.5) se sigue que cuando  $\lambda$  no es un valor propio el operador

$\Delta + \lambda I : X_B \rightarrow Y, u \mapsto \Delta u + \lambda u$  es un homeomorfismo lineal

Aquí,

$$X_B := \{u \in C^{2,\mu}(\bar{\Omega}) [ C^2(\bar{\Omega}) \text{ si } N=1 ] : Bu = 0 \text{ en } \partial\Omega \}$$

$$Y := C^{0,\mu}(\bar{\Omega}) [ C^0(\bar{\Omega}) \text{ si } N=1 ],$$

y notaremos por  $(\Delta + \lambda I)^{-1}$  a la inversa de  $\Delta + \lambda I$ ,

En el caso en que  $\lambda = \lambda_n$  es un valor propio con  $\lambda_{n-1} < \lambda_n = \dots = \lambda_{n+k} < \lambda_{n+k+1}$ , y definiendo  $\Delta + \lambda_n I$  en

la misma forma se tiene que es una aplicación de Fredholm

de índice cero con

$\text{Ker}(\Delta + \lambda_n I)$  engendrado por  $\phi_n, \dots, \phi_{n+k}$

$R(\Delta + \lambda_n I)$  dado por la clase de funciones en  $Y$  que verifican (1.2).

Considerando la proyección ortogonal sobre  $\text{Ker}(\Delta + \lambda_n I)$  dada por  $Pu = \sum_{i=0}^k (u, \phi_{n+i})_{L^2} \phi_{n+i}$ , con  $(\cdot, \cdot)_{L^2}$  el producto escalar en  $L^2(\Omega)$ , se puede definir - un "inversa generalizada" de  $\Delta + \lambda_n I$  (ver [C], [Lo]) que seguiremos notando por  $(\Delta + \lambda_n I)^{-1}$ , y viene dada por

$(\Delta + \lambda_n I)^{-1}: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}_B, f \rightarrow u$  con  $u$  única solución de (1.1) en  $\tilde{X}_B$ , donde

$$\tilde{X}_B = X_B \cap \text{Ker } P, \quad \tilde{Y} = Y \cap \text{Ker } P.$$

Otra vez de (1.3) o (1.5) se sigue la continuidad de  $(\Delta + \lambda_n I)^{-1}$ .

Se tienen las relaciones

$$(\Delta + \lambda_n I)(\Delta + \lambda_n I)^{-1}f = f \quad f \in \tilde{Y},$$

$$(\Delta + \lambda_n I)^{-1}(\Delta + \lambda_n I)u = u - Pu \quad u \in X_B$$

Las consideraciones anteriores son válidas en general para un operador  $A$  uniformemente elíptico de segundo orden de la forma

$$Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

con  $a_{ij}$  y  $b_i$  suficientemente regulares y

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^N \xi_i^2, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, \quad x \in \bar{\Omega}$$

donde  $\mu > 0$  es una constante independiente de  $x$  (ver [S], [PW]).

En general todos los resultados de esta memoria son válidos para este planteamiento más general y se ha escogido el Laplaciano por simplicidad en la exposición.

### 1.2. El Problema No-Lineal

Se considera el problema no lineal

$$(1.6) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda u + g(x,u) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde  $g: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x,u) \mapsto g(x,u)$  es una función continua que, si  $N \geq 2$ , verificará además:

- (i)  $g(\cdot, u): \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mu$ -Hölder continua de forma uniforme para  $u$  en subconjuntos acotados de  $\mathbb{R}$ . Es decir, para cada  $k > 0$  existe  $C > 0$  tal que

$$|g(x,u) - g(y,u)| \leq C |x-y|^\mu, \quad \text{para } x, y \in \bar{\Omega}, |u| \leq k.$$

- (ii)  $g(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente lipschitziana de forma uniforme para  $x \in \bar{\Omega}$ . Es decir, para cada  $k > 0$  existe  $C > 0$  tal que

$$|g(x,u) - g(x,v)| \leq C |u - v|, \quad \text{para } x \in \bar{\Omega}, |u|, |v| \leq k.$$

Las anteriores hipótesis, que se supondrán a lo largo de toda la memoria, garantizan la regularidad de la solución.

Definiendo el operador no lineal

$$\Delta + \lambda I + g: X_B \rightarrow Y, \quad u \mapsto \Delta u + \lambda u + g(\cdot, u(\cdot)),$$

La existencia de soluciones de (1.6) se reduce a la existencia de solución de la ecuación de operadores

$$(\Delta + \lambda I + g)u = f, \quad u \in X_B$$

y la clase de funciones  $f$  en  $Y$  para las que (1.6) tiene al menos una solución coincide con el rango de  $\Delta + \lambda I + g$ , que notamos  $R(\Delta + \lambda I + g)$ .

Estudiamos ahora la reducción de (1.6) a un problema de puntos fijos. Para ello sea  $E$  el siguiente espacio

$E := \{ u \in C^1(\bar{\Omega}) : u = 0 \text{ en } \partial\Omega \}$ ,  $\|u\|_E := \|u\|_1$ , para el problema de Dirichlet.

$E := C^0(\bar{\Omega})$   
 $\|u\|_E := \|u\|_0$ , para el problema de Neumann.

Distinguiremos dos casos:

(a) Caso no resonante:  $\lambda$  no es un valor propio.

Utilizando el hecho de que  $(\Delta + \lambda I)$  es invertible, (1.6) es equivalente a

$$u + Tu = 0, u \in E,$$

donde

$$(1.7) \quad T: E \rightarrow E, u \rightarrow (\Delta + \lambda I)^{-1} [g(\cdot, u(\cdot)) - f]$$

Se comprueba que  $T$  es continuo y compacto.

(b) Caso resonante:  $\lambda$  es un valor propio.

$$\lambda = \lambda_n, \lambda_{n-1} < \lambda_n = \dots = \lambda_{n+k} < \lambda_{n+k-1}$$

Siguiendo las líneas generales del método alternativa (ver Cesari [C]) (1.6) se transforma en un sistema equivalente de la forma

$$(1.8) \quad u - Pu + Ku = 0,$$

$$(1.9) \quad Pg(\cdot, u(\cdot)) = Pf, u \in E,$$

donde  $K: E \rightarrow E, u \rightarrow (\Delta + \lambda_n I)^{-1} (I-P)[g(\cdot, u(\cdot)) - f]$

La ecuación (1.8) recibe el nombre de ecuación auxiliar y (1.9) es la ecuación de bifurcación.

El operador  $K$  es continuo y compacto y, si se define

$$(1.10) \quad T: E \rightarrow E, u \rightarrow -Pu + Ku + Pg(\cdot, u(\cdot)) - Pf$$

el sistema (1.8) - (1.9) es equivalente a

$$u + Tu = 0, u \in E$$

De nuevo T es continuo y compacto.

1.3. Sub-soluciones y Super-soluciones

Se considera el problema

$$(1.11) \quad \begin{cases} \Delta u + g(x,u) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definición 1.1. Sea  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ . Se dice que u es una sub-solución de (1.11) si se verifica

$$\Delta u + g(x,u) \geq f(x), x \in \Omega, Bu \leq 0 \text{ en } \partial\Omega$$

Análogamente se dice que u es una super-solución de (1.11) si se verifica

$$\Delta u + g(x,u) \leq f(x), x \in \Omega, Bu \geq 0 \text{ en } \partial\Omega$$

Teorema 1.1. Sean  $\underline{u}$  y  $\bar{u}$  sub-solución y super-solución de (1.11) respectivamente cumpliendo  $\underline{u}(x) \leq \bar{u}(x), x \in \Omega$ .

Entonces (1.11) admite al menos una solución u verificando

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x), x \in \Omega.$$

(Para una demostración ver [Sa]).

El teorema anterior tiene numerosas aplicaciones en la teoría de existencia de soluciones de (1.11). Sin embargo, la condición  $\underline{u} \leq \bar{u}$  hace que la técnica de sub-soluciones y super-soluciones no se pueda aplicar en algunos casos, (ver ejemplo 3.2 de esta memoria). El siguiente teorema permite eliminar la condición  $\underline{u} \leq \bar{u}$  en ciertos casos.

Teorema 1.2. ([AAM]) Sea el problema

$$(1.12) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g(x,u) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $g$  es acotada.

(Si (1.12) admite sub-solución y super-solución (no necesariamente ordenadas), entonces (1.12) admite al menos una solución.

Finalizaremos este Capítulo con un resultado que relaciona la teoría de sub y super-soluciones con lo expuesto en la Sección anterior. Estudiamos en primer lugar el problema de Dirichlet

$$(1.13) \quad \begin{cases} \Delta u + g(x,u) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Diremos que  $u$  es una sub-solución estricta de (1.13) (resp. super-solución estricta) si se verifica

$$\Delta u + g(x,u) > f(x) \quad (\text{resp } < f(x)), \quad x \in \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Teorema 1.3. Sean  $\underline{u}$  y  $\bar{u}$  sub-solución y super-solución estrictas de (1.12) y supongamos que  $\underline{u}(x) < \bar{u}(x)$ ,  $x \in \Omega$ . Entonces existe un abierto acotado  $\theta$  de  $\mathbb{E}$  tal que

$$\deg(I + T, \theta, 0) = 1$$

donde  $T$  es el operador dado por (1.7) asociado al problema (1.12) y  $\deg(.,.,.)$  es el grado de Leray-Schauder para perturbaciones compactas de la identidad (ver [ LLo ] ).

Demostración. Definimos la función modificada de  $g$

$$F(x,u) = g(x, e(x,u)) - r(x,u), \quad (x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$$

donde

$$e(x,u) = \max\{ \underline{u}(x), \min\{ u, \bar{u}(x) \} \}$$

$$r(x,u) = \begin{cases} \frac{u - \bar{u}(x)}{1+u^2}, & u > \bar{u}(x) \\ 0, & \underline{u}(x) \leq u \leq \bar{u}(x) \\ u - \underline{u}(x)/1+u^2, & u < \underline{u}(x) \end{cases}$$



La función  $F$  verifica las condiciones (i) y (ii) de la Sección 1.2.

Consideramos el problema auxiliar

$$(1.14) \quad \begin{cases} \Delta u + F(x, u) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Probaremos en primer lugar que si  $u$  es una solución de (1.14) entonces

$$\underline{u}(x) < u(x) < \bar{u}(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} < \frac{\partial u}{\partial \eta} < \frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta} \quad \text{en } \partial\Omega$$

Para ello, sea  $\psi = u - \underline{u}$  y supongamos que  $\psi$  no es estrictamente positiva en el interior. Entonces

$$\min_{\bar{\Omega}} \psi(x) = \psi(x_0) \quad \text{con } x_0 \in \Omega \quad \text{y} \quad \psi(x_0) \leq 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi(x_0) &= \Delta u(x_0) - \Delta \underline{u}(x_0) < -F(x_0, u(x_0)) + g(x_0, \underline{u}(x_0)) = \\ &= \frac{\psi(x_0)}{1 + u(x_0)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Puesto que  $x_0$  es interior a  $\Omega$  se puede tomar una bola pequeña centrada en  $x_0$  e incluida en  $\Omega$  sobre la que se tenga  $\Delta \psi \leq 0$ . En dicha bola el mínimo es alcanzado en el interior y, puesto que  $\psi$  no es constante, se contradice el principio del máximo. Por tanto,  $\underline{u}(x) < u(x)$ ,  $x \in \Omega$ . De modo similar se prueba  $u(x) < \bar{u}(x)$ ,  $x \in \Omega$ . Sea  $\lambda > 0$  tal que  $g(x, u) - \lambda u$  es decreciente en  $u$  en el intervalo  $|u| \leq \max[|\underline{u}|_0, |\bar{u}|_0]$ . Entonces

$$\Delta \psi(x) - \lambda \psi(x) \leq [g(x, u(x)) - \lambda u(x)] - [g(x, \underline{u}(x)) - \lambda \underline{u}(x)] \leq 0, \quad x \in \Omega.$$

De otro lado  $\psi > 0$  en  $\Omega$  y  $\psi = 0$  en  $\partial\Omega$ . El principio de módulo máximo en la frontera implica que  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} < 0$  en  $\partial\Omega$ .

De los teoremas de embebimiento de Sobolev

([Ad]) se sigue que si  $p > N$ ,  $W^{2,p}(\Omega) \subset C$  con inclusión -

continua. Si  $M$  es una cota para  $|F|$ , toda solución de (1.14) verifica

$$\|u\|_{\mathbb{E}} \leq k \|u\|_{2,p} \leq k' [\|F\|_p + \|f\|_p] \leq k' [M|\Omega|^{1/p} + \|f\|_p] < R$$

Por tanto, toda solución  $u$  de (1.14) está en el abierto acotado de  $\mathbb{E}$

$$\theta := \{u \in \mathbb{E} : \underline{u}(x) < u(x) < \bar{u}(x), x \in \Omega, \|u\|_{\mathbb{E}} < R\}.$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} < \frac{\partial u}{\partial \eta} < \frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta} \quad \text{en } \partial\Omega,$$

De ser  $F$  acotada se sigue que  $I + T_F$  es homotópico a la identidad en bolas suficientemente grandes  $\mathbb{E}$  con centro en el origen. (Aquí  $T_F$  denota el operador dado por (1.7) asociado a (1.14)). La propiedad de aditividad del grado garantiza que  $\deg(I + T_F, \theta, 0) = 1$ , pero  $T_F = T$  en  $\theta$  lo que concluye la prueba.

Observación Un resultado similar puede verse en [F1], si bien la demostración parece menos directa.

Para el problema de Neumann

$$(1.15) \quad \begin{cases} \Delta u + g(x,u) = f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

diremos que  $u$  es una sub-solución estricta de (1.15) (resp. super-solución estricta) si se verifica

$$\Delta u + g(x,u) > f(x) \quad (\text{resp } < f(x)), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Teorema 1.4. Sean  $\underline{u}$  y  $\bar{u}$  sub-solución y super-solución estrictas de (1.15) y supongamos que  $\underline{u}(x) < \bar{u}(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ . Entonces existe un abierto acotado  $\theta$  de  $\mathbb{E}$  tal que

$$\deg(I + T, \theta, 0) = 1,$$

donde  $T$  es el operador dado por (1.10) asociado al problema (1.15).

La demostración sigue los mismos pasos que en el caso del problema de Dirichlet, con

$$\theta := \{u \in \Xi : \underline{u}(x) < u(x) < \bar{u}(x) \quad x \in \bar{\Omega}, |u|_{\Xi} < R\} .$$

La única diferencia substancial es la prueba de que  $I + T_F$  es homotópico a  $I$  debido a que se trata de un problema - resonante. Se sigue de la demostración del teorema principal en [M2] aplicado a  $F$ .

CAPITULO 2: El Caso Acotado

Consideramos el problema

$$(2.1) \begin{cases} \Delta u + \lambda u + g(x,u) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

bajo la hipótesis

(H-2.1) g es acotada. Es decir, existe  $M \geq 0$  tal que

$$|g(x,u)| \leq M \text{ para cada } (x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Como en la introducción definimos el conjunto

$$\Lambda_g : = \{ \lambda \in \mathbb{R} : R(\Delta + \lambda I + g) \neq Y \}$$

Se sigue sin dificultad que, por ser  $g$  acotada  $\Lambda_g$  coincide con el espectro de  $-\Delta$  (ver teorema 2.1.). Entonces el caso de interés es el caso resonante en el que  $\lambda$  es un valor propio. Los resultados de Landesman y Lazer [LL] proporcionan una caracterización exacta del rango del operador  $\Delta + \lambda_n I + g$  para una clase particular de términos no lineales. Para una  $g$  cualquiera no parece posible obtener resultados tan concretos sino de un carácter más cualitativo. Dichos resultados serán refinados en el caso del primer valor propio. Debido a su especial significación finalizaremos el capítulo aplicando estas ideas a la existencia de soluciones periódicas de la ecuación del péndulo forzado.

2.1. Resultados Generales

Teorema 2.1. Sea  $g$  verificando (H-2.1.). Entonces

$$\Lambda_g = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \}$$

Demostración. Si  $\lambda$  no es un valor propio se sigue de la Sección 1.2. y del teorema de punto fijo de Schauder que el problema (2.1) tiene al menos una solución para cualquier  $f \in Y$  (ver por ejemplo [Fu2]), por tanto  $\lambda \in \Lambda_g$ .

Si  $\lambda = \lambda_n$  y  $\phi_n$  una función propia asociada, de la Alternativa de Fredholm se sigue que si (2.1) tiene una solución  $u$  entonces

$$\int_{\Omega} [g(x, u(x)) - f(x)] \phi_n(x) dx = 0$$

De donde

$$\left| \int_{\Omega} f(x) \phi_n(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |g(x, u(x))| |\phi_n(x)| dx \leq M \|\phi_n\|_1$$

Así la existencia de solución para (2.1) implica una restricción sobre  $f$  que hace que  $R(\Delta + \lambda_n I + g) \neq Y$ .

Con objeto de estudiar  $R(\Delta + \lambda_n I + g)$  consideramos el problema

$$(2.2) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda_n u + g(x, u) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

e introducimos alguna notación que se mantendrá a lo largo de esta sección.

Suponemos  $\lambda_{n-1} < \lambda_n = \dots = \lambda_{n+k} < \lambda_{n+k+1}$ . Entonces  $\phi_n, \dots, \phi_{n+k}$  es una base ortonormal de  $\text{Ker}(\Delta + \lambda_n I)$ . Sea  $\phi = (\phi_n, \dots, \phi_{n+k})$  y para cada  $\mu \in \mathbb{R}^{k+1}$ ,  $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_k)$ ,

$$\mu \cdot \phi := \sum_{i=0}^k \mu_i \phi_{n+i}.$$

La aplicación  $\mu \rightarrow \mu \cdot \phi$  establece un isomorfismo de  $\mathbb{R}^{k+1}$  en  $\text{Ker}(\Delta + \lambda_n I)$ .

Generalmente condiciones de existencia para (2.2) son obtenidas a partir del comportamiento asintótico de  $g$ . Definimos, para  $x \in \bar{\Omega}$

$$\bar{g}(x, +\infty) := \limsup_{u \rightarrow +\infty} g(x, u), \quad \underline{g}(x, -\infty) := \liminf_{u \rightarrow -\infty} g(x, u),$$

$$\bar{g}(x) := \sup \{g(x, u) : u \in \mathbb{R}\}, \quad \underline{g}(x) := \inf \{g(x, u) : u \in \mathbb{R}\}.$$

(Las funciones que se han definido son medibles y acotadas si  $g$  verifica (H-2.1)).

En  $\mathbb{R}^{k+1}$  notaremos  $(\cdot, \cdot)$  y  $|\cdot|$  al producto y la norma euclídeos. Sobre la esfera  $S^k = \{\mu \in \mathbb{R}^{k+1} : |\mu| = 1\}$  definimos las funciones

$$F_1(\mu) := \int_{\Omega} [ \underline{g}(x, +\infty) (\mu \phi)^+(x) - \bar{g}(x, -\infty) (\mu \phi)^-(x) ] dx,$$

$$F_2(\mu) := \int_{\Omega} [ \bar{g}(x, +\infty) (\mu \phi)^+(x) - \underline{g}(x, -\infty) (\mu \phi)^-(x) ] dx,$$

$$G_1(\mu) := \int_{\Omega} [ \bar{g}(x) (\mu \phi)^+(x) - \underline{g}(x) (\mu \phi)^-(x) ] dx,$$

$$G_2(\mu) := \int_{\Omega} [ \underline{g}(x) (\mu \phi)^+(x) - \bar{g}(x) (\mu \phi)^-(x) ] dx,$$

donde  $\phi^+ = \max[\phi, 0]$ ,  $\phi^- = \max[-\phi, 0]$ .

Teorema 2.2. Sea  $g$  verificando (H-2.1).

(i) Si  $\int_{\Omega} f(x) \mu \cdot \phi(x) dx < F_1(\mu)$  [resp  $> F_2(\mu)$ ]  $\forall \mu \in S^k$ , entonces (2.2) tiene al menos una solución.

(ii) Si  $\int_{\Omega} f(x) \mu \cdot \phi(x) dx > G_1(\mu)$  o  $< G_2(\mu)$  para algún  $\mu \in S^k$  entonces (2.2) no tiene solución.

Demostración. Ver [N], [AMII] o [BN].

Nota. En general, para un valor propio múltiple las condiciones anteriores no son fáciles de concretar. (Ver [L Le] para algunos casos). Si el valor propio es simple y  $g$  verifica una condición adicional se tienen los clásicos resultados de Landesman y Lazer.

Corolario 2.1 (Landesman y Lazer [LL])

Suponemos que  $\lambda_n$  es un valor propio simple.

$g$  verifica (H-2.1) y existen los límites  $g(x, \pm\infty) := \lim_{u \rightarrow \pm\infty} g(x, u)$  tales que

$$(2.3) \quad g(x, -\infty) < g(x, u) < g(x, +\infty) \quad \forall (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$$

$$[ \text{resp: } g(x, +\infty) < g(x, u) < g(x, -\infty) ] .$$

Entonces (2.2) tiene al menos una solución si y sólo si

$$\begin{aligned} F_1(-1) &= \int_{\Omega} g(x, -\infty) \phi_n^+(x) dx - \int_{\Omega} g(x, +\infty) \phi_n^-(x) dx < \\ (LL) \quad &< \int_{\Omega} f(x) \phi_n(x) dx < \int_{\Omega} g(x, +\infty) \phi_n^+(x) dx - \int_{\Omega} g(x, -\infty) \phi_n^-(x) dx = F_1(1) \\ &(\text{res } F_2(1) < \int_{\Omega} f(x) \phi_n(x) dx < F_2(-1)) . \end{aligned}$$

Este resultado apareció por primera vez en [LL] para el caso de soluciones débiles del problema de Dirichlet. Extensiones en diferentes direcciones se pueden ver en [BN], [Fu3], [ALP], [CK1], [CK2], [AAM], [M1], ...

Bajo las anteriores condiciones el rango de  $\Delta + \lambda_n I + g$  está completamente determinado como

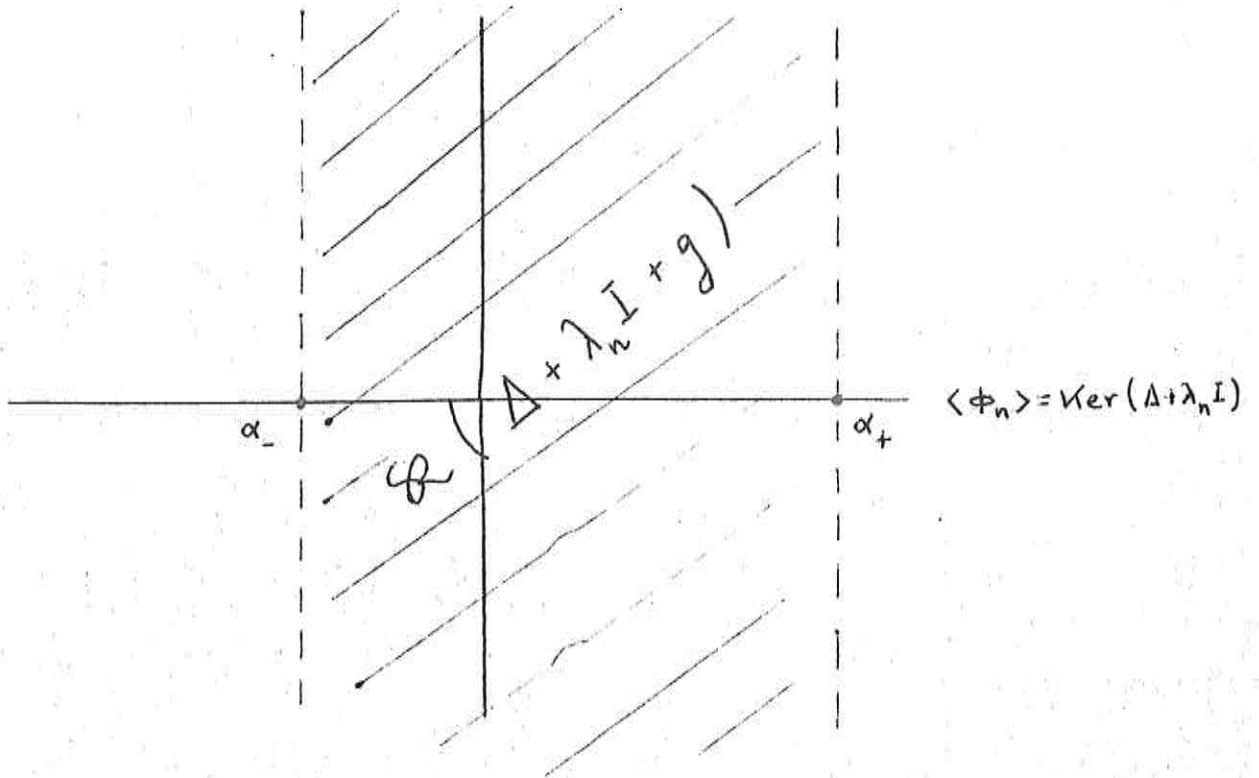
$$R(\Delta + \lambda_n I + g) = \{ f \in Y : \alpha_- < \int_{\Omega} f \phi_n < \alpha_+ \}$$

$$\text{con } \alpha_- = F_1(-1), \alpha_+ = F_1(1) \text{ o } \alpha_- = F_1(1), \alpha_+ = F_1(-1).$$

Se puede ver este conjunto como una banda infinita en el espacio  $Y$  con respecto a la descomposición

$$Y = \tilde{Y} \oplus \langle \phi_n \rangle, \quad \tilde{Y} = \{ f \in Y : f \perp \phi_n \} .$$

$$\tilde{Y} = \mathcal{Q}(\Delta + \lambda_n I)$$



Desde un punto de vista analítico, puesto que  $(\phi_k)_{k=1}^{\infty}$  forma un sistema ortonormal y completo de  $L^2(\Omega)$ , cada  $f$  descomponen en  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \phi_k$  con  $f_k = (f, \phi_k)_{L^2}$ . Identificando  $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^2$ , la condición (LL), con respecto a  $f$ , sólo depende de la coordenada  $f_n$ .

En el caso general no cabe esperar que la forma del rango sea tan sencilla, dicho de otro modo, que las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de solución de (2.2) sólo dependan de una coordenada de  $f$ .

Damos a continuación un ejemplo que ilustra la situación cuando  $g$  no verifica (2.3).

Ejemplo 2.1. Sea el problema de Neumann

$$(2.4) \begin{cases} u'' + \sin u = f_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} + f_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x, & x \in (0, \pi), \\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

En este caso  $\lambda_k = (k-1)^2, k \geq 1, \phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \phi_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos[(k-1)x]$  si  $k \geq 2$ . Entonces  $f(x) = f_1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} + f_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x = f_1 \phi_1(x) + f_2 \phi_2(x)$ .



Se tiene el siguiente resultado (que será probado en un ambiente más general en la Sección 2.3):

Para cada  $f_2 \in \mathbb{R}$  existe  $\gamma(f_2) \geq 0$  tal que (2.4) tiene al menos una solución si y sólo si  $|f_1| \leq \gamma(f_2)$ .

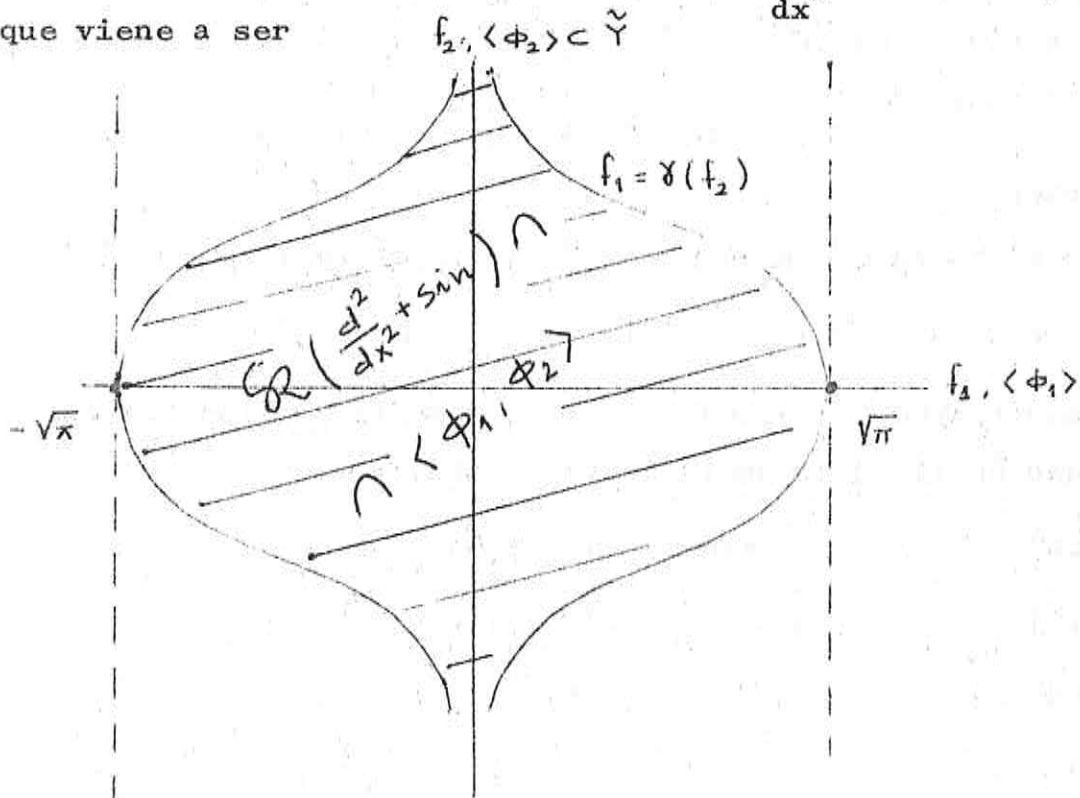
Además se verifica

(i)  $\gamma(0) = \sqrt{\pi}$ ,  $0 \leq \gamma(f_2) < \sqrt{\pi}$  si  $f_2 \neq 0$ .

(ii)  $\gamma(f_2) = \gamma(-f_2)$

(iii)  $\lim_{|f_2| \rightarrow \infty} \gamma(f_2) = 0$

La existencia de solución para (2.4) es por tanto función de los 2 parámetros  $f_1$  y  $f_2$  a diferencia de lo que ocurría antes. En el espacio  $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle$  de parámetros  $f_1, f_2$  se puede hacer un esquema del aspecto de  $\mathbb{R}(\frac{d^2}{dx^2} + \sin) \cap \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$ , que viene a ser



El ejemplo sugiere que  $R(\Delta + \lambda_n I + g)$  debiera ser expresado analíticamente como una relación entre  $f_n$  y el resto de las coordenadas de  $f$ . (En el ejemplo,  $|f_1| \leq \gamma(f_2)$  o  $f_1 \in [-\gamma(f_2), \gamma(f_2)]$ ). El siguiente teorema formaliza estas ideas.

Descomponemos cada función  $f \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}) [C^0(\bar{\Omega})]$  si  $N=1$  en la forma

$$f = p \phi + \tilde{f}, \text{ con } p \in \mathbb{R}^{k+1}, \phi = (\phi_n, \dots, \phi_{n+k}), \tilde{f} \perp \text{Ker}(\Delta + \lambda_n I).$$

Reescribimos (2.2) en la forma paramétrica,

$$(2.5) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda_n u + g(x, u) = p \phi(x) + \tilde{f}(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 2.3. Sea  $g$  verificando (H-2.1). Entonces, para cada  $\tilde{f} \in Y$ ,  $f \perp \text{Ker}(\Delta + \lambda_n I)$  existe un conjunto acotado y no vacío  $v(\tilde{f}) \subset \mathbb{R}^{k+1}$  tal que (2.5) tiene al menos una solución si y sólo si  $p \in v(\tilde{f})$ .

Además,

$$\{ p \in \mathbb{R}^{k+1} : (p, \mu) < F_1(\mu), \mu \in S^k \text{ o } (p, \mu) > F_2(\mu), \mu \in S^k \} \subset v(\tilde{f}) \subset \{ p \in \mathbb{R}^{k+1} : G_2(\mu) \leq (p, \mu) \leq G_1(\mu), \mu \in S^k \}$$

Demostración. Siguiendo las líneas de la Sección 1.2., la ecuación (2.5) es equivalente al sistema

$$(2.6) \quad u_1 + K(u_0 \phi + u_1) = 0,$$

$$(2.7) \quad P g(\cdot, u_0 \phi(\cdot) + u_1(\cdot)) = p \phi,$$

donde  $u = u_0 \phi + u_1 \in \Xi$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$ ,  $u_1 \perp \text{Ker}(\Delta + \lambda_n I)$  y

$$K(u_0 \phi + u_1) = (\Delta + \lambda_n I)^{-1} (I - P) [g(\cdot, u_0 \phi(\cdot) + u_1(\cdot)) - \tilde{f}].$$

Sea  $\Sigma = \{ u \in \Xi : u = u_0 \phi + u_1 \text{ es solución de (2.6)} \}$ .

El teorema de punto fijo de Schauder implica la existencia de al menos una solución  $u_1$  para cada  $u_0$  fijo. Por tanto

$\Sigma$  es no vacío.

Definiendo  $\Gamma: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ ,

$$\Gamma(u) = \left( \int_{\Omega} g(x, u(x)) \phi_n(x) dx, \dots, \int_{\Omega} g(x, u(x)) \phi_{n+k}(x) dx \right)$$

es claro que (2.6) - (2.7) es equivalente a

$$\Gamma(u) = p, \quad u \in \Sigma.$$

Definiendo  $v(\tilde{f}) = \Gamma(\Sigma)$ , (2.5) tiene solución si y sólo si  $p \in v(\tilde{f})$ . El hecho de que  $v(\tilde{f})$  es acotado y las inclusiones que siguen son una consecuencia del teorema 2.2.

Por supuesto el anterior teorema da una información muy escasa, ya que no hay un método de determinar  $v(\tilde{f})$  en general. El estudio posterior del conjunto  $v(\tilde{f})$  tiene dos líneas básicas. De un lado un estudio cualitativo determinando propiedades topológicas de  $v(\tilde{f})$  tales como conexión, compacidad, ... . También  $\tilde{f} \rightarrow v(\tilde{f})$  puede ser visto como un funcional del que se puede estudiar la continuidad. Todo ello puede ser utilizado para dar un diseño aproximado de  $R(\Delta + \lambda_n I + g)$ . De otro lado un estudio cuantitativo que permita establecer la existencia de solución para (2.5) en ciertos casos. Este último aspecto depende esencialmente de las propiedades particulares de  $g$ . Consideraremos el primer aspecto en lo que queda de Capítulo, si bien se obtendrán algunas estimaciones cuantitativas.

Imponiendo la siguiente hipótesis adicional sobre  $g$  podemos obtener mayor información.

(H-2.2)  $\underline{g} \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  y existen  $\mu_+, \mu_- \in \mathbb{R}$  tales que

$$\lambda_{n-1} - \lambda_n < \mu_- \leq \underline{g}_u(x, u) \leq \mu_+ < \lambda_{n+k+1} - \lambda_n \quad \forall (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

La condición anterior fue usada por Ambrosetti y Mancini en [AM 1] y [AM 2] y, en esencia, garantiza que la ecuación auxiliar es únicamente soluble en  $u_1$  para cada  $u_0$ .

Proposición 2.1. (AM 1] [AM 2] )

Sea  $g$  verificando (H-2.1) y (H-2.2). Entonces el conjunto  $v(\tilde{f}) \subset \mathbb{R}^{k+1}$  dado por el teorema 2.3. es conexo para cualquier  $\tilde{f} \in Y$ ,  $\tilde{f} \perp \text{Ker}(\Delta + \lambda_n I)$ .

En el caso en que (H-2.2) no se verifica no se sabe si  $v(\tilde{f})$  es conexo o no cuando  $\lambda_n$  no es el primer valor propio. Este problema abierto es mencionado por Dancer en [D 1].

Con objeto de estudiar la dependencia de  $v(\tilde{f})$  respecto de  $\tilde{f}$  consideramos el funcional

$\bar{v} : \tilde{f} \rightarrow \overline{v(\tilde{f})}$  de  $\tilde{Y}$  en  $F(\mathbb{R}^{k+1})$ , donde  $\bar{\quad}$  denota la clausura en  $\mathbb{R}^{k+1}$  y  $F(\mathbb{R}^{k+1})$  es la clase de subconjuntos cerrados y acotados de  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Para estudiar la continuidad de  $\bar{v}$  consideramos en  $F(\mathbb{R}^{k+1})$  la topología inducida por la métrica de Hausdorff; viene dada por

$$h(A, B) = \max(\rho(A, B), \rho(B, A)), \quad A, B \in F(\mathbb{R}^{k+1}),$$

$$\text{y } \rho(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) .$$

Hay que notar que si  $\lambda_n$  es simple y en las hipótesis de la proposición 2.1 el conjunto  $\bar{v}(\tilde{f})$  se reduce a un intervalo compacto y por tanto está determinado por los números  $v_+(\tilde{f})$  y  $v_-(\tilde{f})$  extremos superior e inferior de dicho intervalo. La continuidad de  $\bar{v}$  de  $\tilde{Y}$  en  $F(\mathbb{R}^1)$  es equivalente a la continuidad de  $v_+$  y  $v_-$  de  $\tilde{Y}$  en  $\mathbb{R}$ .

La continuidad de  $\bar{v}(\cdot)$  puede ser vista como un teorema de perturbación para el problema (2.5). Esto se debe a que si  $p_0 \in \text{int } v(\tilde{f}_0)$ , la continuidad de  $\bar{v}$  garantiza la existencia de solución de (2.5) para cualquier  $p$  y  $\tilde{f}$  próximos a  $p_0$  y  $\tilde{f}_0$ .

Proposición 2.2 Sea  $g$  verificando (H-2.1) y (H-2.2). Entonces  $\bar{v} : \bar{Y} \rightarrow F(R^{k+1})$ ,  $\bar{f} \rightarrow \bar{v}(\bar{f})$  es continuo.

Demostración. Sea  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \tilde{Y}$  y, dado  $u_0 \in R^{k+1}$ ,  $u_1, u_2 \in E$ ,  $u_1, u_2 \perp \text{Ker}(\Delta + \lambda_n I)$  tales que  $u_0 \phi + u_1, u_0 \phi + u_2$  son soluciones de las ecuaciones auxiliares respectivas

$$u_1 + (\Delta + \lambda_n I)^{-1} (I-P) [g(\cdot, u_0 \phi(\cdot) + u_1(\cdot)) - \tilde{f}_1] = 0,$$

$$u_2 + (\Delta + \lambda_n I)^{-1} (I-P) [g(\cdot, u_0 \phi(\cdot) + u_2(\cdot)) - \tilde{f}_2] = 0.$$

Entonces,

$$(2.8) \quad \Delta(u_1 - u_2) + \lambda_n (u_1 - u_2) + (I-P) [g(\cdot, u_0 \phi + u_1) - g(\cdot, u_0 \phi + u_2)] = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$$

$$B(u_1 - u_2) = 0 \text{ en } \mathfrak{M}.$$

Sea  $P_1$  la proyección ortogonal sobre  $\bigoplus_{j < n} \text{Ker}(\Delta + \lambda_j I)$  y  $P_2$  la proyección ortogonal sobre  $\bigoplus_{j > n+k} \text{Ker}(\Delta + \lambda_j I)$ .

En  $L^2(\Omega)$  se tienen las igualdades

$$u_i = \sum_{j < n} u_{j,i} \phi_j + \sum_{j > n+k} u_{j,i} \phi_j = P_1 u_i + P_2 u_i, \quad u_{j,i} = (u_i, \phi_j)_{L^2}$$

$$\Delta u_i = - \sum_{j < n} \lambda_j u_{j,i} \phi_j + \sum_{j > n+k} \lambda_j u_{j,i} \phi_j, \text{ de donde}$$

$$(\Delta u_i + \lambda_n u_i, P_1 u_i)_{L^2} = \sum_{j < n} (\lambda_n - \lambda_j) u_{j,i}^2 \geq (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \|P_1 u_i\|_2^2$$

$$(\Delta u_i + \lambda_n u_i, P_2 u_i)_{L^2} = \sum_{j > n+k} (\lambda_n - \lambda_j) u_{j,i}^2 \leq (\lambda_n - \lambda_{n+k+1}) \|P_2 u_i\|_2^2.$$

Sea  $\gamma \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\mu_- \leq \gamma \leq \mu_+$  tal que

$$g(x, u_0 \phi(x) + u_1(x)) - g(x, u_0 \phi(x) + u_2(x)) = \gamma(x) (u_1(x) - u_2(x))$$

para cada  $x \in \bar{\Omega}$ . (Es posible por (H-2.2)).

Multiplicando en (2.8) por  $P_1(u_1 - u_2)$  se tiene

$$0 = ((\Delta + \lambda_n I)(u_1 - u_2), P_1(u_1 - u_2))_{L^2} + ((I-P)\gamma(u_1 - u_2), P_1(u_1 - u_2))_{L^2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + (\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2, P_1(u_1 - u_2))_{L^2} = ((\lambda + \lambda_{n-1})(u_1 - u_2), P_1(u_1 - u_2))_{L^2} + \\
 & + (\gamma(u_1 - u_2), P_1(u_1 - u_2))_{L^2} + (\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2, P_1(u_1 - u_2))_{L^2} \geq \\
 & \geq (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-1}) \|P_1(u_1 - u_2)\|_2^2 + (\gamma P_1(u_1 - u_2), P_1(u_1 - u_2))_{L^2} + \\
 & + (\gamma \frac{P}{2}(u_1 - u_2), P_1(u_1 - u_2))_{L^2} + (\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2, P_1(u_1 - u_2))_{L^2} \geq \\
 & \geq (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-1} + \mu_-) \|P_1(u_1 - u_2)\|_2^2 + (\gamma P_2(u_1 - u_2), P_1(u_1 - u_2))_{L^2} \\
 & + (\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2, P_1(u_1 - u_2))_{L^2}.
 \end{aligned}$$

Análogamente, multiplicando en (2.8) por  $P_2(u_1 - u_2)$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 0 & \leq (\lambda_{n+k+1} - \lambda_{n+k+1} + \mu_+) \|P_2(u_1 - u_2)\|_2^2 + (\gamma P_1(u_1 - u_2), P_2(u_1 - u_2))_{L^2} \\
 & + (\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2, P_2(u_1 - u_2))_{L^2}
 \end{aligned}$$

y restando ambas desigualdades,

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_{n+k+1} - \lambda_{n-1} - \mu_+) \|P_2(u_1 - u_2)\|_2^2 + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-1} + \mu_-) \|P_1(u_1 - u_2)\|_2^2 \leq \\
 & \leq (\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2, -P_1(u_1 - u_2) + P_2(u_1 - u_2))_{L^2}, \text{ de donde}
 \end{aligned}$$

$$\|u_1 - u_2\|_2 \leq \alpha^{-1} \|\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2\|_2 \text{ con}$$

$$\alpha = \min(\lambda_{n+k+1} - \lambda_{n-1} - \mu_+, \lambda_{n-1} - \lambda_{n-1} + \mu_-) > 0.$$

(En particular, si  $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$  se obtiene la unicidad de solución para la ecuación auxiliar).

Sea  $p \in v(\tilde{f}_1)$  y  $u = u_0 \phi + u_1$  solución de (2.5) para  $p$  y  $\tilde{f}_1$ .

Sea  $u_2$  tal que  $v = u_0 \phi + u_2$  sea solución de la ecuación auxiliar para  $\tilde{f}_2$ .

Entonces  $p' = \Gamma(v) \in v(\tilde{f}_2)$  y

$$|p-p'| = |\Gamma(u) - \Gamma(v)| \leq \max(|\mu_+|, |\mu_-|) \left[ \sum_{i=0}^k \left( \int_{\Omega} |u_1(x) - u_2(x)| |\phi_{n+i}(x)| dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \max(|\mu_+|, |\mu_-|) k^{\frac{1}{2}} \alpha^{-1} \|\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2\|_2.$$

Entonces

$$h(\bar{v}(\tilde{f}_1), \bar{v}(\tilde{f}_2)) \leq \max(|\mu_+|, |\mu_-|) k^{\frac{1}{2}} \alpha^{-1} \|\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2\|_2.$$

Observaciones. 1. La demostración anterior adapta ideas del caso no resonante ([LL2] [O1]) a un caso resonante.

2. De la demostración se sigue un resultado más fuerte que el del teorema,  $\bar{v}$  es  $L^2$ -continuo.

3. El mismo procedimiento permite obtener la proposición 2.1. teniendo en cuenta la unicidad de solución de la ecuación auxiliar junto con el Lema 1.2. de [AAM] o Lema 1 de [Sh]. La demostración es distinta a la de [AM1] y [AM2] donde se usan técnicas de inversión global de operadores.

Corolario 2.1. Sea  $g$  verificando (H-2.1). Entonces

$$R(\Delta + \lambda_n I + g) = \{\mu\phi + \tilde{f} : \mu \in \mathbb{R}^k, \tilde{f} \in Y, \tilde{f} \perp \phi, \mu \in v(\tilde{f})\}$$

$$\overline{R(\Delta + \lambda_n I + g)} = \{\mu\phi + \tilde{f} : \mu \in \mathbb{R}^k, \tilde{f} \in \tilde{Y}, \tilde{f} \perp \phi, \mu \in \overline{v(\tilde{f})}\}$$

donde  $\bar{\cdot}$  denota clausura en  $Y$  y  $\mathbb{R}^k$  respectivamente.

Notas. 1. Hay que notar que en el corolario anterior se consideran operadores que no verifican la relación de Brezis y Nirenberg [BN],  $R(L+N) \neq R(L) + R(N)$ .

2. Del corolario 2.1. se sigue que  $R(\Delta + \lambda_n I + g)$  es cerrado si y sólo si  $v(\tilde{f})$  es cerrado para cada  $\tilde{f} \in \tilde{Y}$ . Este resultado es probado en [St]. Condiciones para que el rango sea cerrado se pueden ver en [FH].

Finalizamos esta Sección con dos ejemplos que muestran las diferencias entre el caso en que se verifica la condición -

(2.3) y el caso general.

Ejemplo 2.2. Sea el problema de Dirichlet

$$(2.9) \quad \begin{cases} u'' + \lambda u + \arctg u = f(x), & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

El problema lineal

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

tiene valores propios  $\lambda_n = n^2$  con funciones propias asociadas

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \quad n \geq 1.$$

La función  $g(u) = \arctg u$  tiene límites en infinito,  $g(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ ,  $g(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$  y se verifica (2.3). Entonces,

(i) Si  $\lambda \neq n^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (2.9) tiene al menos una solución para cualquier  $f \in C^0(\bar{\Omega})$ .

(ii) Si  $\lambda = n^2$  (2.9) tiene solución si y sólo si

$$\left| \int_0^\pi f(x) \sin nx dx \right| < \pi.$$

El anterior resultado puede ser entendido como una alternativa de Fredholm para el problema no lineal (2.9)

Ejemplo 2.3. Sea el problema de Neumann

$$(2.10) \quad \begin{cases} u'' + \lambda u + \frac{u}{1+u^2} = f(x), & x \in (0, \pi) \\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

El problema lineal

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & x \in (0, \pi), \\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$



tiene valores propios  $\lambda_n = (n-1)^2$ , con funciones propias asociadas

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos[(n-1)x], n \geq 2.$$

La función  $g(u) = \frac{u}{1+u^2}$  tiene límites en  $\infty$ ,  $g(+\infty) = g(-\infty) = 0$

y por tanto no se verifica (2.3). Se tiene

$$g'(u) = \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} \text{ y } |g'(u)| \leq 1 \text{ } u \in \mathbb{R}. \text{ Se verifica (H-2.2) y}$$

se obtiene el siguiente resultado

(i) Si  $\lambda \neq (n-1)^2$ ,  $n=1,2,\dots$  (2.10) tiene al menos una solución para cualquier  $f \in C^0(\bar{\Omega})$ .

(ii) Si  $\lambda = (n-1)^2$  existe funcionales continuos

$$v_{+,n}, v_{-,n} : \tilde{C}_n[0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ donde } \tilde{C}_n[0,\pi] = C^0[0,\pi] \cap$$

$\cap$  {funciones ortogonales a  $\phi_n$ }, tales que si  $f = \mu \phi_n + \tilde{f}_0$ ,  $\tilde{f}_0 \perp \phi_n$ , (2.10) tiene solución si y solo si

$$v_{+,n}(f) \geq \mu \geq v_{-,n}(f).$$

Además se puede probar  $v_{+,n} \geq 0 \geq v_{-,n}$ . (Ver [AMI], [D2] o [FN] para más detalles. ver tambien el ejemplo 2.4. de esta memoria para algunas estimaciones de  $v_+$  y  $v_-$ ).

## 2.2. El primer valor propio

Consideramos el problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g(x,u) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

En este caso  $\lambda_1$  es simple y la función propia asociada se notará  $\phi$ . Para el problema de Neumann  $\lambda_1 = 0$  y  $\phi = |\Omega|^{-\frac{1}{2}}$  en  $\bar{\Omega}$ . Para el problema de Dirichlet  $\lambda_1 > 0$  y  $\phi$  es positiva en  $\Omega$ . Además  $\frac{\partial \phi}{\partial n} < 0$  en  $\partial\Omega$ . (Ver [PW]). De esta propiedad se -

puede deducir la siguiente desigualdad que se usará a menudo,

$$(2.11) \quad |u(x)| \leq c |u|_{\Xi} \phi(x), \quad x \in \Omega, \quad \text{donde } u \in \Xi$$

y  $c > 0$  es una constante independiente de  $u$ .

Cada función  $f \in Y$  descompone en la forma

$$f = \mu \phi + \tilde{f}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f} \perp \phi.$$

Reescribiendo el problema en forma paramétrica se tiene

$$(2.12) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g(x, u) = \mu \phi(x) + \tilde{f}(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 2.5. Sea  $g$  verificando (H-2.1). Entonces, para cada  $\tilde{f} \in Y$ ,  $\tilde{f} \perp \phi$ , existen números reales  $v_+(\tilde{f}), v_-(\tilde{f}), v_+(\tilde{f}) \geq v_-(\tilde{f})$ , tales que

- (i) Si  $\mu \in ]v_-(\tilde{f}), v_+(\tilde{f})[$  entonces (2.12) tiene al menos una solución.
- (ii) Si  $\mu \notin [v_-(\tilde{f}), v_+(\tilde{f})]$  entonces (2.12) no tiene solución.

Además se tienen las estimaciones

$$\int_{\Omega} \underline{g}(x) \phi(x) dx \leq v_-(\tilde{f}) \leq v_+(\tilde{f}) \leq \int_{\Omega} \overline{g}(x) \phi(x) dx,$$

y si  $\int_{\Omega} \underline{g}(x, -\infty) \phi(x) dx < \int_{\Omega} \underline{g}(x, +\infty) \phi(x) dx$   
 [ resp.  $\int_{\Omega} \underline{g}(x, +\infty) \phi(x) dx < \int_{\Omega} \underline{g}(x, -\infty) \phi(x) dx ]$

entonces

$$v_+(\tilde{f}) \geq \int_{\Omega} \underline{g}(x, +\infty) \phi(x) dx > \int_{\Omega} \underline{g}(x, -\infty) \phi(x) dx \geq v_-(\tilde{f})$$

[ resp.  $v_+(\tilde{f}) \geq \int_{\Omega} \underline{g}(x, -\infty) \phi(x) dx > \int_{\Omega} \underline{g}(x, +\infty) \phi(x) dx \geq v_-(\tilde{f}) ]$

Finalmente, si  $v_-(\tilde{f}) = v_+(\tilde{f})$  entonces (2.12) tiene solución si y sólo si  $\mu = v_-(\tilde{f}) = v_+(\tilde{f})$ .

Notas. 1. El conjunto  $v(\tilde{f})$  obtenido en el teorema 2.3. - viene dado a partir del teorema anterior en la forma

$\bar{v}(\tilde{f}) = [v_-(\tilde{f}), v_+(\tilde{f})]$ . Por tanto, el resultado de la proposición 2.1. es válido sin suponer (H-2.2) cuando se trata del primer valor propio.

2. En el caso lineal, cuando  $g$  es idénticamente cero, la alternativa de Fredholm indica que  $v_+ = v_- = 0$ . Entonces la desigualdad  $v_- \leq v_+$  no es estricta en general.

El siguiente Corolario expresa el resultado anterior en términos del rango.

Corolario 2.3. Sea  $g$  verificando (H-2.1). Entonces existen funcionales  $v_+, v_- : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\{ \mu \phi + \tilde{f} : \tilde{f} \in \tilde{Y}; \mu \in \mathbb{R}, v_-(\tilde{f}) < \mu < v_+(\tilde{f}) \} \subset$$

$$\subset \mathbb{R}(\Delta + \lambda_1 I + g) \subset \{ \mu \phi + \tilde{f} : \tilde{f} \in \tilde{Y}, \mu \in \mathbb{R}, v_-(\tilde{f}) \leq \mu \leq v_+(\tilde{f}) \}.$$

Demostración del teorema 2.5. Del teorema 2.3. se sabe que existe algún  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que (2.12) tiene solución para dicho  $\mu$ . Definimos  $v_+(\tilde{f}) = \text{Sup } A(\tilde{f})$ ,  $v_-(\tilde{f}) = \text{Inf } A(\tilde{f})$ , donde  $A(\tilde{f}) = \{ \mu \in \mathbb{R} : (2.12) \text{ tiene al menos una solución} \}$ .

Se sigue de la definición de  $v_+$  y  $v_-$  que (ii) es cierto.

Sea  $\mu_0 \in ]v_-(\tilde{f}), v_+(\tilde{f})[$ , entonces existen  $u_1$  y  $u_2$  soluciones de (2.12) para  $\mu_1$  y  $\mu_2$  con  $\mu_1 < \mu_0 < \mu_2$ .

Puesto que  $\phi$  es no negativa

$$\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 + g(x, u_1) = \mu_1 \phi(x) + \tilde{f}(x) \leq \mu_0 \phi(x) + \tilde{f}(x); x \in \Omega$$

y  $u_1$  es una super-solución de (2.12) para  $\mu_0$ .

Análogamente se comprueba que  $u_2$  es una sub-solución.

Aplicando el teorema 1.2. se tiene que (2.12) tiene al menos una solución para  $\mu = \mu_0$ .

Si  $v_+(\tilde{f}) = v_-(\tilde{f}) = \mu$ , puesto  $A(\tilde{f})$  no es vacío, necesariamente se tiene  $A(\tilde{f}) = \{\mu\}$ .

Las estimaciones para  $v_{\pm}$  son un caso particular de las dadas en el teorema 2.3.

Pasamos a estudiar la continuidad de los funcionales  $v_{\pm} : \tilde{Y} \rightarrow R, \tilde{f} \rightarrow v_{\pm}(\tilde{f})$ , dados por el teorema anterior.

Proposición 2.6. Sea  $g$  verificando (H-2.1). Entonces  $v_+$  es semicontinuo inferiormente y  $v_-$  es semicontinuo superiormente.

Corolario 2.4. Sea  $g$  verificando (H-2.1). Entonces

$\text{int } R(\Delta + \lambda_1 I + g) = \{\mu\phi + \tilde{f} : \tilde{f} \in \tilde{Y}, \mu \in R, v_-(\tilde{f}) < \mu < v_+(\tilde{f})\}$ , donde  $\text{int}$  denota el interior de un conjunto en  $Y$ .

Demostración de la proposición 2.6. Nos centraremos en  $v_+$  puesto que la otra prueba es similar. Sea  $\tilde{f} \in \tilde{Y}$  y  $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$  en  $\tilde{Y}$  y la ecuación auxiliar asociada a (2.12).

$$(2.13) \quad u_1 + (\Delta + \lambda_1 I)^{-1} (I-P) g(\cdot, u_0\phi + u_1) = (\Delta + \lambda_1 I)^{-1} \tilde{f}.$$

Definimos  $\Sigma = \{u = u_0\phi + u_1 : u \text{ es solución de (2.13)}\}$

Distinguiremos dos casos:

(i)  $\forall \epsilon > 0 \exists R_\epsilon \geq 0$ :  $\int_{\Omega} g(x, u(x)) \phi(x) dx \geq v_+(\tilde{f}) - \epsilon$   
para cada  $u \in \Sigma$ ,  $u = u_0\phi + u_1$ ,  $u_0 \geq R_\epsilon$ .

(ii) Existe una sucesión  $(u_n)$ ,  $u_n \in \Sigma$ ,  $u_n = u_{n,0}\phi + u_{n,1}$ ,  $u_{n,0} \rightarrow +\infty$   
y  $\int_{\Omega} g(x, u_n(x)) \phi(x) dx \leq \mu_0$  para algún  $\mu_0 < v_+(\tilde{f})$   
independiente de  $n$ .

Caso (i) Sea  $\epsilon > 0$  y  $(\tilde{f}_k)$  una parcial de  $(\tilde{f}_n)$  tal que  $v_+(\tilde{f}_k) \rightarrow \alpha$ . Por el teorema de punto fijo de Schauder se sabe que existe  $R_\epsilon\phi + v_k$  solución de

$$v_k + (\Delta + \lambda_1 I)^{-1} (I-P) g(\cdot, R_\epsilon\phi + v_k) = (\Delta + \lambda_1 I)^{-1} \tilde{f}_k.$$

Por un argumento de compacidad se puede extraer una parcial, que seguiremos notando  $v_k$ , tal que  $v_k \rightarrow v$  en  $\bar{E}$ .

Entonces  $R_\epsilon \phi + v \in \Sigma$  y

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{k \rightarrow \infty} v_+(f_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x, R_\epsilon \phi(x) + v_k(x)) \phi(x) dx = \\ &= \int_{\Omega} g(x, R_\epsilon \phi(x) + v(x)) \phi(x) dx \geq v_+(f) - \epsilon \text{ por (i)}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\liminf_{k \rightarrow \infty} v_+(f_k) \geq v_+(f)$ .

Caso (ii) Sea  $\epsilon > 0$  tal que  $\mu_0 < v_+(f) - \epsilon$ . El teorema 2.5. garantiza la existencia de u solución de (2.12) para

$$\mu = v_+(f) - \epsilon/2.$$

De (ii) se sigue que  $u_n$  es solución de (2.12) para

$$\mu = \int_{\Omega} g(x, u_n(x)) \phi(x) dx. \text{ Entonces } u \text{ es sub-solución estricta y } u_n \text{ super-solución estricta de (2.12) para}$$

$\mu = v_+(f) - \epsilon$ . Puesto que  $u_{n,0} \rightarrow +\infty$  y teniendo en cuenta (2.11) para el problema de Dirichlet se puede encontrar

un  $n$  tal que  $u_n > u$ . En las notaciones de los teoremas 1.3 y

1.4. se tiene que  $\deg(I+T, \theta, 0) = 1$  donde  $\theta \subset \bar{E}$  es un abierto acotado y  $T$  es el operador abstracto asociado a (2.12) -

para  $\mu = v_+(f) - \epsilon$ . (véase sección 1.3). De la continuidad

del grado se sigue que existe  $\eta > 0$  tal que si  $\|Tx - T_1x\|_{\bar{E}} \leq \eta$ ,  $x \in \theta$

y  $T_1$  es un operador compacto de  $\bar{E}$  en  $\bar{E}$  entonces  $\deg(I+T_1, \theta, 0) = 1$

Sea  $T_n$  el operador abstracto asociado a (2.12) para

$\mu = v_+(f) - \epsilon$  y  $f = f_n$ , es claro que  $T_n \rightarrow T$  uniformemente

y existe  $n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow \deg(I+T_n, \theta, 0) = 1$ . Se deduce que

$$v_+(f_n) \geq v_+(f) - \epsilon \text{ para } n \geq n_0.$$

Con objeto de probar la continuidad de  $v_+$  y  $v_-$  consideramos una hipótesis adicional.

(H-2.3) Existen los límites de  $g$  en infinito

$$\text{Es decir, } \lim_{u \rightarrow \pm \infty} g(x, u) = g(x, \pm \infty), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

(H-2.4.)  $\underline{g} \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ ,  $\underline{g}_u$  es acotada y  $\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \underline{g}_u(x, u) \leq \mu < \lambda_2 - \lambda_1$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$ .

Proposición 2.7. Sea  $g$  verificando (H-2.1) y (H-2.3) o (H-2.4). Entonces  $v_+$  y  $v_-$  son continuos de  $Y$  en  $\mathbb{R}$ .

Notas. 1. Dancer [D 2] enuncia sin prueba el anterior resultado cuando  $g(x, +\infty) = g(x, -\infty) = 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ . Por tanto, la proposición anterior puede ser considerada como una extensión de dicho resultado.

2. La condición (H-2.2) para  $n=1$  es menos general que (H-2.4) y la proposición 2.2 es mejorada para el primer valor propio.

3. No sabemos si la condición (H-2.1) es suficiente para garantizar la continuidad de  $v_+$  y  $v_-$ .

Corolario 2.5. Sea  $g$  verificando (H-2.1) y (H-2.3) ó (H-2.4). Entonces

$$\overline{R(\Delta + \lambda_1 I + g)} = \{ \mu \phi + \tilde{f} : \tilde{f} \in \tilde{Y}, \mu \in \mathbb{R}, v_-(\tilde{f}) \leq \mu \leq v_+(\tilde{f}) \}.$$

Aquí  $\bar{\phantom{x}}$  designa la clausura de un conjunto en  $Y$ .

Demostración de la proposición 2.7 (i) Suponemos que  $g$  verifica (H-2.1) y (H-2.3).

Lema Para cada  $\tilde{f} \in \tilde{Y}$ ,

$$v_+(\tilde{f}) \geq \max \left[ \int_{\Omega} g(x, +\infty) \phi(x) dx, \int_{\Omega} g(x, -\infty) \phi(x) dx \right]$$

$$v_-(\tilde{f}) \leq \min \left[ \int_{\Omega} g(x, +\infty) \phi(x) dx, \int_{\Omega} g(x, -\infty) \phi(x) dx \right]$$

Demostración del lema. En las notaciones de la demostración de la proposición 2.6. sean  $u_n, v_n \in \Sigma$ ,  $u_{n,0} \rightarrow +\infty$ ,  $v_{n,0} \rightarrow -\infty$ . Puesto que  $|u_{n,1}|_{\Sigma}$ ,  $|v_{n,1}|_{\Sigma}$  está uniformemente acotado  $u_n \rightarrow +\infty$ ,  $v_n \rightarrow -\infty$  casi en todo punto de  $\Omega$ .

El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue garantiza

$$v_+(f) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x, u_n(x)) \phi(x) dx = \int_{\Omega} g(x, +\infty) \phi(x) dx$$

$$v_+(f) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x, v_n(x)) \phi(x) dx = \int_{\Omega} g(x, -\infty) \phi(x) dx.$$

Análogamente se prueba la desigualdad para  $v_-$ .

Para probar que  $v_+$  es continuo basta probar, después de la proposición 2.6., que es semicontinuo superiormente. Sea  $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$  en  $\tilde{Y}$  y  $(\tilde{f}_k)$  una parcial tal que  $v_+(\tilde{f}_k) \rightarrow \alpha$ . Sea  $u_k$  solución de (2.12) con  $\mu = \mu_k \geq v_+(\tilde{f}_n) - \varepsilon_k$  y  $\tilde{f}_k = \tilde{f}$  para  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ . Si existe una parcial  $(u_k)$  tal que  $|u_{k,0}|$  es acotada se extrae por compacidad una nueva parcial  $u_{k_n} \rightarrow u$  en  $\Xi$  y  $u$  es solución de (2.12) para  $\mu = \alpha$ . Por tanto  $v_+(f) \geq \alpha$ . Si  $|u_{k,0}| \rightarrow \infty$  se puede suponer que  $u_{k,0} \rightarrow \infty$  o  $u_{k,0} \rightarrow -\infty$  (extrayendo una parcial si es preciso). Entonces

$$\alpha = \lim \int_{\Omega} g(x, u_k(x)) \phi(x) dx = \int_{\Omega} g(x, +\infty) \phi(x) dx$$

$$\text{o } \int_{\Omega} g(x, -\infty) \phi(x) dx$$

y por el lema  $\alpha \leq v_+(f)$ . Así se tiene

$$\limsup v_+(\tilde{f}_n) \leq v_+(\tilde{f}).$$

(ii) Suponemos que  $g$  verifica (H-2.1) y (H-2.4).

De nuevo sea  $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$  en  $\tilde{Y}$  y  $(\tilde{f}_k)$  una parcial tal que  $v_+(\tilde{f}_k) \rightarrow \alpha$ . Sea  $u_k$  en las mismas condiciones que en (i) y, tras tazonamientos similares, nos reducimos al caso en que  $u_{k,0} \rightarrow \infty$ . Sean  $v_{k,1}$  soluciones de (2.13) para  $u_0 = u_{k,0}$  y sea  $R > 0$  tal que

$$g_u(x, u) \leq \mu_1 \quad \text{si } |u| \geq R, \quad x \in \bar{\Omega} \text{ con } \mu_1 < \lambda_2 - \lambda_1.$$

Razonando como se hizo en la prueba de la proposición 2.2. se tiene

$$|(\tilde{f} - \tilde{f}_k, u_{k,1} - v_{k,1})_{L^2}| \geq (\lambda_2 - \lambda_1) \|u_{k,1} - v_{k,1}\|_2^2 + \\ + \int_{\Omega} [g(x, u_{k,0} \phi + u_{k,1}) - g(x, u_{k,0} \phi + v_{k,1})] (u_{k,1}(x) - v_{k,1}(x)) dx$$

Sea  $\Omega_k = \{x \in \Omega: u_{k,0} \phi + u_{k,1} \geq R \text{ y } u_{k,0} \phi + v_{k,1} \geq R\}$  ;

entonces,

$$\|\tilde{f} - \tilde{f}_k\|_2 \|u_{k,1} - v_{k,1}\|_2 \geq (\lambda_2 - \lambda_1) \|u_{k,1} - v_{k,1}\|_2^2 - \mu_1 \int_{\Omega_k} |u_{k,1} - v_{k,1}|^2 - \int_{\Omega - \Omega_k} 2M |u_{k,1} - v_{k,1}|,$$

donde M es una cota de g. De la anterior desigualdad se sigue

$$\|\tilde{f} - \tilde{f}_k\|_2 \geq (\lambda_2 - \lambda_1 - \mu_1) \|u_{k,1} - v_{k,1}\|_2 - 2M |\Omega - \Omega_k|^{\frac{1}{2}}$$

Puesto que  $u_{k,0} \rightarrow \infty$  y  $|u_{k,1}|_{\bar{\Omega}}$  es equiacotado se tiene, usando (2.11) que  $|\Omega - \Omega_k| \rightarrow 0$  si  $k \rightarrow \infty$ .

Entonces

$$| \int_{\Omega} [g(x, u_{k,0} \phi + u_{k,1}) - g(x, u_{k,0} \phi + v_{k,1})] \phi | \leq \\ \leq M' \|u_{k,1} - v_{k,1}\|_2 \leq M' (\lambda_2 - \lambda_1 - \mu_1)^{\frac{1}{2}} [\|\tilde{f} - \tilde{f}_k\|_2 + 2M |\Omega - \Omega_k|^{\frac{1}{2}}]$$

donde M' es una cota de  $g_u$ .

Finalmente,

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} v_+(f_k) - \epsilon_k \leq \liminf \int_{\Omega} g(x, u_{k,0} \phi + u_{k,1}) \phi \\ = \liminf \int_{\Omega} g(x, u_{k,0} \phi + v_{k,1}) \phi \leq v_+(f).$$

Finalizamos esta Sección con un ejemplo que muestra como obtener estimaciones numérica de los funcionales  $v_+$  y  $v_-$  supuesto que se tenga una información completa del problema lineal.



Ejemplo 2.4. Sea el problema

$$(2.14) \begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + \frac{u}{1+u} = \nu \phi(x) + \tilde{f}(x), & x \in \Omega, \tilde{f} \perp \phi \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Kazdan y Warner consideraron (2.14) en [KW] y probaron la existencia de números  $t_- < 0 < t_+$  tales que (2.14) tiene solución si  $t_- < \mu < t_+$  y no tiene solución si  $\mu > t_+$  o  $\mu < t_-$ . Además  $|t_{\pm}| < \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi$ . Veremos como a partir de los teoremas anteriores se pueden mejorar dicho resultado.

Proposición 2.8. Existen funcionales continuos

$v_+, v_- : C^{0,\mu}(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $C^{0,\mu}(\bar{\Omega}) = C^{0,\mu}(\bar{\Omega}) \cap \{\text{funciones ortogonales a } \phi\}$ , (Si  $N=1$ ,  $v_+, v_- : C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ ) tales que

- (2.14) tiene al menos una solución si  $v_-(\tilde{f}) \leq \mu \leq v_+(\tilde{f})$
- (2.14) no tiene solución si  $\mu > v_+(\tilde{f})$  o  $\mu < v_-(\tilde{f})$ .

Sean

$$\phi_+(\tilde{f}) = \sup_{\rho \in \mathbb{R}} \left[ \inf_{\Omega} \frac{1}{\phi(x)} \frac{\rho \phi(x) + \phi(\tilde{f})(x)}{1 + [\rho \phi(x) + \phi(\tilde{f})(x)]^2} \right]$$

$$\phi_-(\tilde{f}) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} \left[ \sup_{\Omega} \frac{1}{\phi(x)} \frac{\rho \phi(x) + \phi(\tilde{f})(x)}{1 + [\rho \phi(x) + \phi(\tilde{f})(x)]^2} \right]$$

donde  $u = \phi(\tilde{f})$  es la única solución del problema lineal

$$\Delta u + \lambda_1 u = \tilde{f}, \quad u \perp \phi, \quad Bu = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Se tiene,  $\phi_+(\tilde{f})$  y  $\phi_-(\tilde{f})$  están bien definidos y

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi \leq v_-(\tilde{f}) \leq \phi_-(\tilde{f}) < 0 < \phi_+(\tilde{f}) \leq v_+(\tilde{f}) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi.$$

(La igualdad  $|v_{\pm}(\tilde{f})| = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi$  dándose si y sólo si  $\tilde{f} = 0$  y se trata del problema de Neumann).

Además,  $R(\Delta + \lambda_1 I + \frac{u}{1+u^2})$  es cerrado y si

$\tilde{f} \perp \phi$  entonces  $\tilde{f}$  es interior a  $R(\Delta + \lambda_1 I + \frac{u}{1+u^2})$ .

Notas.1. Los funcionales  $\phi_+$  y  $\phi_-$  permiten dar criterios concretos para la existencia de solución de (2.14). Por ejemplo, para el problema

$$(2.15) \quad \begin{cases} u'' + \frac{u}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu - \cos x, & x \in (0, \pi), \\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = -\cos x \text{ y } \phi(\tilde{f})(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi].$$

$$\phi_+(\tilde{f}) = \sup_{\rho \in \mathbb{R}} \psi_1(\rho) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \phi_-(\tilde{f}) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} \psi_2(\rho) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \text{ con}$$

$$\psi_1(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho / \sqrt{\pi} + 1}{1 + [\rho / \sqrt{\pi} + 1]^2}, & \rho \geq \sqrt{2\pi} \\ \frac{\rho / \sqrt{\pi} - 1}{1 + [\rho / \sqrt{\pi} - 1]^2}, & 0 \leq \rho \leq \sqrt{2\pi} \\ -1/2, & 0 \geq \rho \geq -2\sqrt{\pi} \\ \frac{\rho / \sqrt{\pi} + 1}{1 + [\rho / \sqrt{\pi} + 1]^2}, & \rho \leq -2\sqrt{\pi} \end{cases}$$

$$\psi_2(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho / \sqrt{\pi} - 1}{1 + [\rho / \sqrt{\pi} - 1]^2}, & \rho \geq 2\sqrt{\pi} \\ 1/2, & 0 \geq \rho \geq -\sqrt{2\pi} \\ \frac{\rho / \sqrt{\pi} + 1}{1 + [\rho / \sqrt{\pi} + 1]^2}, & 0 \geq \rho \geq -\sqrt{2\pi} \\ \frac{\rho / \sqrt{\pi} - 1}{1 + [\rho / \sqrt{\pi} - 1]^2}, & \rho \leq -\sqrt{2\pi} \end{cases}$$

Entonces (2.15) tiene al menos una solución si  $|\mu| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. Resultados concernientes a la existencia de dos soluciones para (2.14) se pueden encontrar en [AM][FH] cuando se supone (H-2.2), lo que en este caso implica una restricción sobre el dominio.

3. Algunas estimaciones numérica para (2.14) se pueden ver en [K O1].

Demostración de la Proposición 2.8. Puesto que  $\frac{u}{1+u^2}$  verifica (H-2.1) y (H-2.3) se pueden aplicar el teorema 2.5 y la proposición 2.7.

Para el problema de Neumann  $\phi_+$  y  $\phi_-$  están obviamente bien definidas. Para el problema de Dirichlet se sigue de (2.11). Probaremos ahora que  $\phi_+$  es estrictamente positivo. Sea  $k > 0$  tal que  $|\phi(\tilde{f})(x)| \leq k\phi(x)$  y  $\rho > k$ , entonces

$$\frac{1}{\phi(x)} \frac{\rho\phi(x) + \phi(\tilde{f})(x)}{1 + [\rho\phi(x) + \phi(\tilde{f})(x)]^2} \geq \frac{(\rho - k)}{1 + [(\rho - k)\phi(x)]^2} \geq \alpha$$

para algún  $\alpha > 0$  y  $x \in \Omega$ .

Si  $\mu < \phi_+(\tilde{f})$  existe  $\rho \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\rho\phi(x) + \phi(\tilde{f})(x)}{1 + [\rho\phi(x) + \phi(\tilde{f})(x)]^2} \geq \mu\phi(x) \text{ para cada } x \in \Omega.$$

Entonces  $\rho\phi + \phi(\tilde{f})$  es una sub-solución de (2.14).

De modo similar se prueba que  $\phi_- < 0$  y que si  $\mu > \phi_-(\tilde{f})$ , existe una super-solución de la forma  $\rho\phi + \phi(\tilde{f})$ .

Usando el teorema 1.2 se tiene

$$v_-(\tilde{f}) \leq \phi_-(\tilde{f}) < 0 < \phi_+(\tilde{f}) \leq v_+(\tilde{f}).$$

Sea (2.14) para  $\mu = v_+(\tilde{f})$  y  $u_n$  solución de (2.14) para

$\mu = \nu_+ (\tilde{f}) - \epsilon_n$  con  $\epsilon_n \downarrow 0$ . Entonces  $|u_n|_{2,\mu}$  es acotada y se puede extraer una parcial convergente en  $\mathbb{E}$  cuyo límite es solución de (2.14) para  $\mu = \nu_+ (\tilde{f})$ . (Si  $|u_n|_{2,\mu}$  no fuese acotada, puesto que  $|u_{n,1}|_{2,\mu}$  lo es se tendría que  $|u_{n,0}|_{2,\mu}$ , ó una parcial, tiende a  $+\infty$ , y por tanto  $|u_n(x)|_{+\infty}$ , con lo que

$$\nu_+ (\tilde{f}) = \lim_n \int_{\Omega} \frac{u_n}{1+u_n^2} \phi = 0 \text{ lo que contradice } \nu_+ (\tilde{f}) > 0.$$

Las consecuencias acerca del rango se deducen de los corolarios 2.4 y 2.5.

### 2.3. Soluciones periódicas de la ecuación del péndulo forzado.

Estudiamos en esta sección la existencia de soluciones  $2\pi$ -periódicas de la ecuación del péndulo simple cuando una fuerza externa,  $f(t)$ , actúa sobre el sistema. Es decir, consideramos el problema

$$(2.16) \quad \begin{cases} x''(t) + a \sin x(t) = f(t), & t \in (0, 2\pi), \\ x(0) = x(2\pi), & x'(0) = x'(2\pi) \end{cases}$$

donde  $a > 0$  y  $f \in L^1(0, 2\pi)$ .

Para un resumen de la importancia que (2.16) ha tenido en el desarrollo del análisis no-lineal se puede ver [M3].

Sea  $Pf := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$  para cada  $f \in L^1(0, 2\pi)$  y

$\tilde{L} := \{f \in L^1(0, 2\pi) : Pf = 0\}$  de forma que  $L^1(0, 2\pi) = \tilde{L} \oplus \mathbb{R}$ ,

$\tilde{C} = \{x \in C[0, 2\pi] : Px = 0\}$  con  $C[0, 2\pi] = \tilde{C} \oplus \mathbb{R}$ .

Para cada  $\tilde{f} \in \tilde{L}$  sea  $y = H\tilde{f}$  la única solución (en el sentido de Caratheodory) del problema lineal

$$y''(t) = \tilde{f}(t), \quad t \in (0, 2\pi), \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi), \quad Py = 0.$$

Entonces (2.16) es equivalente a

$$(2.17) \quad \tilde{x} + H(I-P) a \sin(\rho + \tilde{x}) = H(I-P) f,$$

$$(2.18) \quad P a \sin(\rho + \tilde{x}) = P f, \quad (\tilde{x}, \rho) \in \tilde{C} \oplus \mathbb{R},$$

Lo que muestra el parecido formal del problema (2.16) con el problema de Neumann en el primer valor propio. Descomponemos la fuerza  $f(t)$  en la forma

$$f = \mu + \tilde{f}, \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} \text{ y } \tilde{f} \in \tilde{L}.$$

Se tiene el siguiente

Teorema 2.6. Existen funcionales continuos  $v_+, v_- : \tilde{L} \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que  $v_- \leq 0 \leq v_+$  y si  $f = \mu + \tilde{f}$  entonces,

(i) (2.16) tiene al menos una solución si  $v_-(\tilde{f}) \leq \mu \leq v_+(\tilde{f})$ .

(ii) (2.16) no tiene solución si  $\mu > v_+(\tilde{f})$  o  $\mu < v_-(\tilde{f})$ .

Además,  $|v_{\pm}| \leq a$  con igualdad si y sólo si  $f$  es constante.

Demostración. La prueba de la existencia de  $v_+$  y  $v_-$  tales que (2.16) tiene solución si  $\mu \in ]v_-(\tilde{f}), v_+(\tilde{f})[$  y no tiene solución si  $\mu \notin [v_-(\tilde{f}), v_+(\tilde{f})]$  es análoga a la del teorema 2.5. Para probar que (2.16) tiene solución si  $\mu = v_{\pm}(\tilde{f})$  consideremos por ejemplo  $v_+(\tilde{f})$ . Sean  $\mu_n \rightarrow v_+(\tilde{f})$  y  $\mu_n \in v(\tilde{f})$ , donde  $v(\tilde{f})$  está dado por el teorema 2.3. Sean  $x_n$  soluciones de (2.16) con  $f = \mu_n + \tilde{f}$ . Debido a la periodicidad de  $\sin x$ , si  $x$  es una solución de la ecuación del péndulo entonces también lo es  $x + 2k\pi$  con  $k$  un entero. Se puede suponer por tanto que

$$x_n = \rho_n + \tilde{x}_n \quad \text{con } \rho_n \in [0, 2\pi] \text{ y } \tilde{x}_n \in \tilde{C}.$$

Por la compacidad de  $H : \tilde{L} \rightarrow \tilde{C}$  y debido a que  $a \sin(\rho_n + \tilde{x}_n)$  es uniformemente acotado se sigue de (2.17) que se puede extraer una parcial convergente  $\rho_k \rightarrow \rho_0, \tilde{x}_k \rightarrow \tilde{x}_0$  en  $\tilde{C}$

y es claro que  $x = \rho_0 + \tilde{x}_0$  es una solución de (2.16) para  $f = v_+(f) + f$ .

Si (2.16) tiene solución  $x$  para  $f = f + \mu$ , integrando la ecuación entre 0 y  $2\pi$  se tiene

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \sin x(t) dt, \text{ de donde } |\mu| \leq a \text{ y por tanto}$$

$|v_+(f)| \leq a$ . Si  $|\mu| = a$  entonces  $x$  ha de ser constante de donde  $f$  es nula.

La demostración de la proposición 2.6. se puede adaptar para probar que  $v_+$  es semicontinuo inferiormente y  $v_-$  semicontinuo superiormente, de  $L$  en  $R$ . Probamos que  $v_+$  es semicontinuo superiormente. Sea  $f_n \rightarrow f$  en  $L$  y  $f_k$  una parcial tal que  $v_+(f_k) \rightarrow \mu_0$ . Sean  $x_k$  soluciones de (2.16) para  $f = v_+(f_k) + f_k$  que, razonando como antes, se pueden suponer convergente a una función  $x$  que será solución de (2.16) para  $f = \mu_0 + f$ . Entonces  $\mu_0 \leq v_+(f)$  y  $\limsup v_+(f_n) \leq v_+(f)$ . La desigualdad  $v_- \leq 0 \leq v_+$  es una consecuencia del siguiente resultado ([H.], [D2], [M3]).

Si  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$  entonces (2.16) tiene al menos una solución.

Notas. 1. La continuidad de  $v_+$  y  $v_-$  puede ser probada cuando se considera en  $\tilde{L}$  la norma  $\|\tilde{f}\| = \|H\tilde{f}\|_0$  en lugar de la norma  $L^1$ . (ver [K05], [02]).

2. Castro [Ca.] probó el anterior resultado en el caso en que  $a < 1$ , donde los funcionales  $v_+$  y  $v_-$  eran continuos para la topología débil de  $L^2$ . Teniendo en cuenta la nota 1. es claro que nuestro resultado generaliza el de Castro al caso en que  $a$  es arbitraria.

Mawhin [M3] probó el teorema anterior exceptuando la continuidad de  $v_+$  y  $v_-$ .

3. Castro planteó en [Ca] el problema de determinar si la desigualdad  $v_-(\tilde{f}) < 0 < v_+(\tilde{f})$  se mantiene para cualquier  $\tilde{f} \in \tilde{L}$ . En [MW] Mawhin y Willen probaron que esto es cierto al menos sobre un conjunto denso y abierto de  $\tilde{L}$ . Daremos una demostración distinta a la dada en [MW] como aplicación del teorema anterior.

Corolario 2.6. El conjunto

$$D = \{\tilde{f} \in \tilde{L} : v_-(\tilde{f}) < 0 < v_+(\tilde{f})\} \text{ es denso y abierto en } \tilde{L}.$$

Demostración. Sean  $D_+ = \{\tilde{f} \in \tilde{L} : v_+(\tilde{f}) > 0\}$  y

$$D_- = \{\tilde{f} \in \tilde{L} : v_-(\tilde{f}) < 0\}. \text{ Entonces } D = D_+ \cap D_-,$$

$D_+ = v_+(0, +\infty)$ ,  $D_- = v_-(-\infty, 0)$ . Por tanto,  $D_+$ ,  $D_-$  y  $D$  son abiertos en  $L$ . Basta ahora probar que  $D_+$  y  $D_-$  son densos, pues entonces su intersección también lo será.

Sea  $X = \{x \in W^{2,1}(0, 2\pi) : x(0) = x(2\pi), x'(0) = x'(2\pi)\}$  con la norma  $\|x\|_X = \|x\|_0 + \|x'\|_0 + \|x''\|_1$ .

Necesitamos el siguiente Lema:

"Para cada  $x \in X$  con  $\int_0^{2\pi} \sin x(t) dt = 0$  existe una sucesión  $x_n \rightarrow x$  en  $X$  tal que  $\int_0^{2\pi} \sin x_n(t) dt > 0$  (resp  $< 0$ ) para todo  $n$ ".

Sea el funcional  $\Gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \int_0^{2\pi} \sin x(t) dt$  con derivada de Fréchet  $\Gamma'(x) y = \int_0^{2\pi} \cos x(t) y(t) dt$ ,  $y \in X$ .

Entonces,  $x$  no puede ser un extremo de  $\Gamma$  ya que no es un punto crítico.

Probamos, por ejemplo,  $D_+$  es denso.

Sea  $\tilde{f} \in \tilde{L}$  y  $x$  una solución  $2\pi$ -periódica de  $x''(t) + a \sin x(t) = \tilde{f}(t)$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ . Se tiene  $\int_0^{2\pi} \sin x(t) dt = 0$  y sea  $x_n \rightarrow x$  en  $X$  con  $\int_0^{2\pi} \sin x_n(t) dt > 0$ .

Definiendo  $\tilde{f}_n = x_n'' + a \sin x_n - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \sin x_n(t) dt$ ,  
 se tiene  $v_+(\tilde{f}_n) > 0$  y es claro que  $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$  en  $\tilde{L}$ .

Un problema básico para (2.16) es obtener estimaciones concretas de  $v_+$  y  $v_-$  que garanticen la existencia de solución periódica cuando  $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ . Diversas estimaciones se pueden ver en [Dr 1], [K0], [M3]. Dichas estimaciones sólo son válidas si  $a$  y  $f$  son pequeños.

En [K0] obtuvimos estimaciones que mejoraban las anteriores para  $a$  arbitrario si  $f$  era "pequeña". Obtendremos ahora estimaciones de  $v_+$  y  $v_-$  para  $a$  y  $f$  no necesariamente pequeños.

Para cada  $n \geq 1$  sea

$$X_n = \{a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + a_k^* \sin kt) : a_0, a_k, a_k^* \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n\}$$

y sean

$$v_+^{(n)}(\tilde{f}) = \sup_{\psi \in X_n} \min_{t \in [0, 2\pi]} [\psi''(t) + a \sin(\psi(t) + H\tilde{f}(t))]$$

$$v_-^{(n)}(\tilde{f}) = \inf_{\psi \in X_n} \max_{t \in [0, 2\pi]} [\psi''(t) + a \sin(\psi(t) + H\tilde{f}(t))]$$

para cada  $\tilde{f} \in \tilde{L}$ .

Teorema 2.7. Para cada  $\tilde{f} \in \tilde{L}$  se tiene

$$v_+^{(n)}(\tilde{f}) + v_+^{(n)}(\tilde{f}), \quad v_-^{(n)}(\tilde{f}) + v_-^{(n)}(\tilde{f}).$$

Nota. El problema de calcular  $v_{\pm}^{(n)}(\tilde{f})$  es un problema en dimensión finita, si bien no parece fácil evaluarlos explícitamente.

Demostración. Es claro que  $v_+^{(n)}(\tilde{f})$  es una sucesión no decreciente y  $v_-^{(n)}(\tilde{f})$  no creciente. Probaremos que



$v_+^{(n)}(f) + v_+(f)$ , pues el otro caso es similar. La desigualdad  $v_+^{(n)}(\tilde{f}) \leq v_+(\tilde{f})$  es inmediata. Sea  $x$  solución  $2\pi$ -periódica de  $x'' + a \operatorname{sen} x = v_+(\tilde{f}) + \tilde{f}(t)$  y  $\psi = x - H\tilde{f}$ , entonces  $\psi$  verifica la ecuación

$$\psi'' + a \operatorname{sen}(\psi + H\tilde{f}(t)) = v_+(\tilde{f}).$$

Puesto que  $H\tilde{f} \in C^1[0, 2\pi]$ ,  $\psi'' \in C^1[0, 2\pi]$  y

$$\psi(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kt + a_k^* \sin kt]$$

$$\psi''(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 [a_k \cos kt + a_k^* \sin kt]$$

uniformemente en  $[0, 2\pi]$ , con

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) \cos kt \, dt, \quad a_k^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) \sin kt \, dt, \quad k \geq 1$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) \, dt.$$

Dado  $\epsilon > 0$  sea  $n \geq 1$  tal que

$$a \left| \sum_{k > n} [a_k \cos kt + a_k^* \sin kt] \right| +$$

$$+ \left| \sum_{k > n} k^2 [a_k \cos kt + a_k^* \sin kt] \right| < \epsilon, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{y } \psi_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kt + a_k^* \sin kt]$$

$$\psi_n''(t) + a \operatorname{sen}(\psi_n(t) + H\tilde{f}(t)) \geq$$

$$\geq \psi_n''(t) + a \operatorname{sen}(\psi(t) + H\tilde{f}(t)) - |\psi''(t) - \psi_n''(t)| -$$

$$- a |\operatorname{sen}(\psi(t) + H\tilde{f}(t)) - \operatorname{sen}(\psi_n(t) + H\tilde{f}(t))| \geq$$

$$v_+(\tilde{f}) - [|\psi''(t) - \psi_n''(t)| + a |\psi(t) - \psi_n(t)|] \geq$$

$$\geq v_+(\tilde{f}) - \epsilon, \quad \text{y por definición } v_+^{(n)}(\tilde{f}) \geq v_+(\tilde{f}) - \epsilon$$

Finalizamos este capítulo con un estudio del comportamiento asintótico de los funcionales  $v_+$  y  $v_-$ . Para ello, sea

$$L_0 = \{ \tilde{f} \in \tilde{L} : \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} v_+(\lambda \tilde{f}) = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} v_-(\lambda \tilde{f}) = 0 \}$$

Teorema 2.8.  $L_0$  es de segunda categoría en  $\tilde{L} \subset L^1(0, 2\pi)$  y contiene a los polinomios trigonométricos no nulos y que están en  $\tilde{L}$ .

Para la demostración necesitaremos una extensión del Lema de Riemann-Lebesgue.

Lema. Sea  $\psi \in W^{2,1}(a, b)$ , se verifica  $\text{meas} \{ t \in [a, b] : \psi'(t) = 0 \} = 0$ . Sea  $\{\theta_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  una familia de funciones en  $W^{1,1}(a, b)$  y tales que  $\|\theta_\lambda\|_1 \leq M$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , para algún  $M > 0$  independiente de  $\lambda$  y sea  $\alpha \in L^1(a, b)$ . Entonces

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b \alpha(t) \sin(\lambda \psi(t) + \theta_\lambda(t)) dt = 0.$$

Demostración. Sea  $I(\lambda) = \int_a^b \sin(\lambda \psi(t) + \theta_\lambda(t)) dt$ , probaremos que  $I(\lambda) \rightarrow 0$  si  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , con lo que la tesis del teorema se sigue sin dificultad teniendo en cuenta que las funciones escalonadas son densas en  $L^1(a, b)$ .

Dado  $\epsilon > 0$  y ya que el conjunto  $\{t \in [a, b] : \psi'(t) = 0\}$  es compacto y de medida cero existen  $a \leq a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n \leq b$  tales que  $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \geq b - a - \frac{\epsilon}{2}$  y  $\psi'(t) \neq 0$  para cada  $t \in \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]$ .

Sea  $\mu > 0$  tal que  $|\psi'| \geq \mu$  en  $\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]$ . Se tiene

$$|I(\lambda)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} 1 dt + \frac{\epsilon}{2}.$$

De otro lado

$$\int_{a_i}^{b_i} \exp[i(\lambda \psi(t) + \theta_\lambda(t))] dt = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \exp[i(\lambda s + \theta_\lambda(\psi^{-1}(s)))] \frac{ds}{\psi'(\psi^{-1}(s))} =$$

(donde  $\alpha_i = \psi(a_i)$ ,  $\beta_i = \psi(b_i)$ ).

$$= \frac{\exp [i(\lambda \beta_i + \theta_\lambda (b_i))]}{i \lambda \psi'(b_i)} - \frac{\exp [i(\lambda \alpha_i + \theta_\lambda (a_i))]}{i \lambda \psi'(a_i)} - \\ - \frac{1}{i \lambda} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \exp [i(\lambda s + \theta_\lambda (\psi^{-1}(s)))] \left\{ \frac{i \theta_\lambda' (\psi^{-1}(s))}{\psi'(\psi^{-1}(s))^2} - \frac{\psi''(\psi^{-1}(s))}{\psi'(\psi^{-1}(s))^3} \right\} ds$$

Entonces

$$\left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \sin (\lambda \psi(t) + \theta_\lambda (t)) dt \right| \leq \left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \exp [i(\lambda \psi(t) + \theta_\lambda (t))] dt \right| < \\ < \frac{2}{|\lambda| \mu} + \frac{1}{|\lambda| \mu} \int_{a_i}^{b_i} |\theta_\lambda'(t)| dt + \frac{1}{|\lambda| \mu} \int_{a_i}^{b_i} |\psi''(t)| dt$$

y si  $|\lambda| > \frac{2}{\epsilon} \left[ \frac{2n}{\mu} + \frac{M}{\mu} + \frac{\|\psi''\|}{\mu} \right]$ ,  $|I(\lambda)| < \epsilon$ .

Nota. Un resultado relacionado se puede ver en [D2].

Demostración del teorema 2.8. Probaremos que la clase de funciones  $\tilde{f} \in \tilde{L}$  para las que  $\text{meas} \{t \in (0, 2\pi) : \tilde{f}(t) = 0\} = 0$  está incluida en  $L_0$ . Se puede entonces probar que dicha clase es de 2ª categoría en  $\tilde{L}$ .

Sea  $\tilde{f}$  en estas condiciones, entonces

$$\text{meas} \{t \in [0, 2\pi] : (H\tilde{f})'(t) = 0\} = 0$$

Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  sea  $x_\lambda$  solución  $2\pi$ -periódica de

$$x_\lambda'' + a \sin x_\lambda = v_+(\lambda \tilde{f}) + \lambda \tilde{f}(t),$$

y  $\theta_\lambda = x_\lambda - \lambda H\tilde{f}$ . Se verifica

$$\theta_\lambda'' + a \sin (\lambda H\tilde{f}(t) + \theta_\lambda) = v_+(\lambda \tilde{f})$$

y es claro que  $\|\theta_\lambda\|_1$  está acotada independientemente de  $\lambda$ .

$$v_+(\lambda \tilde{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \sin (\lambda H\tilde{f}(t) + \theta_\lambda(t)) dt,$$

y aplicando el Lema anterior

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} v_+(\lambda \tilde{f}) = 0$$

Notas. 1. Se prueba sin dificultad que  $v_+(\tilde{f}) = -v_-(\tilde{f})$  -  
utilizando el hecho de que  $\sin x$  es impar. Si  $\tilde{f}$  es impar  
se prueba también que  $v_+(\tilde{f}) = v_+(-\tilde{f})$ , de forma que lo es-  
tablecido en el ejemplo 2.1. queda justificado.

2. Se pueden obtener resultados acerca de la existencia de  
más de una solución  $2\pi$ -periódica (ver [MW] y [FM]).

CAPITULO 3: El Caso no acotado

De nuevo comenzamos con el problema

$$(3.1) \begin{cases} \Delta u + \lambda u + g(x, u) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde la principal diferencia respecto del anterior capítulo es que ahora  $g$  no es acotada.

El conjunto  $\Lambda_g = \{\lambda \in \mathbb{R} : R(\Delta + \lambda I + g) \neq Y\}$  no presenta una forma tan simple como en el caso acotado (ver proposición 2.1) y puede tener distintas configuraciones dependiendo de  $g$ . La razón es que ahora la no-linealidad es lo bastante fuerte para perturbar el carácter resonante o no resonante del problema lineal.

El siguiente ejemplo muestra algunas de ellas

Ejemplo 3.1. Se considera

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u + g_i(u) = f(x), & x \in \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

con  $g_1(u) = -u^3$ ,  $g_2(u) = -e^u$ ,  $g_3(u) = |u|u^+$ ,  $g_4(u) = u^2$

Entonces,

$$\Lambda_{g_1} = \emptyset, \Lambda_{g_2} = [0, +\infty), \Lambda_{g_3} \subset (-\infty, 0], \Lambda_{g_4} = \mathbb{R}.$$

(Las demostraciones para los casos  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $g_4$  se irán viendo a lo largo del Capítulo. La demostración para  $g_3$  es bien conocida, ver por ejemplo [BN]).

En todo lo que sigue supondremos que  $g$  es acotada superior o inferiormente y super-lineal en alguna dirección, de forma que la no-linealidad  $g_1$  no entrará en consideración y se tendrá siempre que  $\lambda_1 \in \Lambda_g$ . Para fijar ideas y, suponiendo

do que  $g = g(u)$  con límites propios (finitos o infinitos)  $g(+\infty)$  y  $g(-\infty)$ , distinguiremos los siguientes casos:

- (i)  $g(+\infty) < g(-\infty)$ , por ejemplo  $g_2$ . Este caso ha sido ampliamente estudiado para  $\lambda < \lambda_1$ . (ver Kazdan y Warner [K W], Brezis y Nirenberg [BN], McKenna y Rauch [Mc R] y Figueiredo y Gossez [FG]). Los métodos básicos para su estudio han sido sub y super-soluciones, cotas a priori basadas en la monotonía de la parte lineal y operadores monótonos. Si  $\lambda > \lambda_1$  se puede reducir al caso (iii) de los que se están enumerando.
- (ii)  $g(-\infty) < g(+\infty)$ , por ejemplo  $g_3$ . Este caso presenta mayores dificultades ya que los métodos anteriores no son aplicables. La mayor dificultad se presenta al hallar cotas para las posibles soluciones. Ha sido estudiado en algunos casos por Ward [W 1], [W 2] y [W 3].
- (iii)  $g(+\infty) = g(-\infty)$ , por ejemplo  $g_4$ . Esta condición contiene en particular las clásicas de Ambrosetti y Prodi [AP] y ha sido estudiado por Dancer [D 1], Berestycki y Lions [BL] y Figueiredo [F 2].

El carácter superlineal de  $g$  hace que el primer valor propio juegue un papel muy importante para las no-linealidades que estudiaremos. En las secciones 1 y 2 establecemos cotas a priori para ecuaciones ordinarias y parciales respectivamente con vistas al caso (ii). Se obtienen también resultados de existencia para el primer valor propio que tienen interés en sí mismos y serán usados en lo sucesivo. En la sección 3 se estudia el rango del operador no-lineal, en la línea de lo hecho en el Capítulo 2, para no-linealidades del tipo (ii). En la Sección 4 se estudia el caso (iii) y se hacen algunas aportaciones a lo ya conocido en la literatura. En la Sección 5 se muestran algunos ejemplos de inte-

res que engloban las diferentes situaciones.

1. Cotas a priori para el caso ordinario

Empezamos con un ejemplo que se puede considerar - prototipo de lo que se va a tratar en esta sección y a la vez muestra que la técnica de sub y super- soluciones no es aplicable.

Ejemplo 3.2. Sea el problema de Dirichlet unidimensional

$$\begin{cases} u'' + u + e^u = f(x), & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Sean  $u_+, u_- \in C^2[0, \pi]$  super y sub-soluciones tales que  $u_+ \geq u_-$ .

Definamos  $\psi = u_+ - u_-$ , entonces

$$\psi'' + \psi + e^{u_+} - e^{u_-} = u_+'' + u_+ + e^{u_+} - (u_-'' + u_- + e^{u_-}) \leq f(x) - f(x) = 0$$

Multiplicando la anterior desigualdad por  $\sin x$  e integrando entre 0 y  $\pi$  se tiene

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_0^\pi (\psi''(x) + \psi(x)) \sin x \, dx + \int_0^\pi (e^{u_+(x)} - e^{u_-(x)}) \sin x \, dx \\ &= \psi(0) + \psi(\pi) + \int_0^\pi (e^{u_+(x)} - e^{u_-(x)}) \sin x \, dx, \end{aligned}$$

entonces  $u_+(0) = u_-(0) = u_+(\pi) = u_-(\pi) = 0$  y

$e^{u_+} = e^{u_-}$ , por tanto  $u_+ \equiv u_-$  y se trata de una solución.

De esta forma, hallar un par ordenado de super o sub-solución implica hallar una solución del problema.

Hay que notar que en este caso  $\lambda_1 = 1$  y  $\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$ .

Más en general estudiaremos el problema de contorno

$$(3.2) \quad \begin{cases} u'' + \lambda_1 u + g(x, u) = f(x), & x \in (a, b), \\ Bu(a) = Bu(b) = 0, \end{cases}$$

donde  $a < b$ ,  $g: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, u) \rightarrow g(x, u)$  es continua y  $f \in C^0([a, b])$ .

Para el problema de Dirichlet,  $Bu = u$ ,  $\lambda_1 = \pi^2 (b-a)^{-2}$  y

$$\phi_1(x) = \sqrt{2} (b-a)^{-\frac{1}{2}} \sin[\pi (b-a)^{-1}(x-a)], \quad x \in [a, b].$$

Para el problema de Neumann,  $Bu = u'$ ,  $\lambda_1 = 0$  y  $\phi_1(x) = (b-a)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $x \in [a, b]$ .

Con objeto de establecer cotas a priori necesitamos algunos resultados de regularidad para el problema lineal. Para cada  $f$  continua en  $[a, b]$  se define la norma

$$\|f\|_{\phi_1} := \int_a^b |f(x)| \phi_1(x) dx,$$

donde se entenderá que  $\phi_1$  se corresponde con la función propia del problema del que se esté hablando.

Lema 3.1. Existe  $k > 0$  tal que

$$\|u_1\|_0 \leq k \|u_1'' + \lambda_1 u_1\|_{\phi_1} \quad \text{para cada } u_1 \in C^2[a, b],$$

$$Bu_1(a) = Bu_1(b) = 0, \quad \int_a^b u_1 \phi_1 = 0.$$

Demostración.

Mediante un cambio de variable afín se puede reducir al caso en que  $[a, b] = [0, \pi]$ .

Definimos  $f = u_1'' + \lambda_1 u_1$  entonces

$$u_1(x) = \int_0^\pi G(x, s) f(s) ds, \quad x \in [0, \pi], \quad \text{donde}$$

para el problema de Dirichlet

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (x \cos x \sin s - (\pi - s) \cos s \sin x), & 0 \leq x < s \leq \pi \\ \frac{1}{\pi} (s \cos s \sin x - (\pi - x) \cos x \sin s), & 0 \leq s < x < \pi \end{cases}$$

y para el problema de Neumann



$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{\pi - s}{\pi}, & 0 \leq x < s \leq \pi \\ (x - s) + \frac{\pi - s}{\pi}, & 0 \leq s < x \leq \pi \end{cases}$$

Se comprueba que  $|G(x, s)| \leq k \phi_1(s)$   $(x, s) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ , donde  $k > 0$  es una constante fija.

Entonces,

$$\begin{aligned} |u_1(x)| &\leq \int_0^\pi |G(x, s)| |f(s)| ds \leq \\ &\leq k \int_0^\pi |f(s)| \phi_1(s) ds = k \|f\|_{\phi_1}, \end{aligned}$$

lo que prueba el Lema.

En este Capítulo la hipótesis básica será,

(H-3.1)  $g$  es acotada superior o inferiormente

Es decir,

$$\begin{aligned} \text{Sup } \{g(x, u) : (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}\} &< \infty \\ \text{o} \\ \text{Inf } \{g(x, u) : (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}\} &> -\infty \end{aligned}$$

(Observese que las funciones  $g_2, g_3$  y  $g_4$  del ejemplo 3.1. Satisfacen esta hipótesis).

Lema 3.2. Sea  $g$  verificando (H-3.1). Entonces existe  $C > 0$  tal que si  $u$  es solución de (3.2), con  $u = u_0 \phi_1 + u_1$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_1 \perp \phi_1$ , se tiene

$$\|u_1\|_0 \leq C.$$

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que  $g$  es acotada inferiormente y sea  $M_1$  tal que  $g(x, u) \geq M_1$  si  $(x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ . Se verifica

$$|g(x, u)| \leq g(x, u) + 2 |M_1|, \quad (x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}.$$

Sea una solución de (3.2), puesto que  $\phi_1$  es no negativa, - de la anterior expresión se obtiene

$$\int_a^b |g(x,u)(x)| \phi_1(x) dx \leq \int_a^b g(x,u(x)) \phi_1(x) dx + 2|M_1| \int_a^b \phi_1(x) dx$$

De otro lado, la alternativa de Fredholm, implica que

$$\int_a^b g(x,u(x)) \phi_1(x) dx = \int_a^b f(x) \phi_1(x) dx.$$

Por tanto,

$$\|g(\cdot, u(\cdot))\|_{\phi_1} \leq \int_a^b f(x) \phi_1(x) dx + 2|M_1| \int_a^b \phi_1(x) dx,$$

y aplicando el lema 3.1.

$$\begin{aligned} |u_1|_{0^-} &\leq k [\|g(\cdot, u(\cdot))\|_{\phi_1} + \|f\|_{\phi_1}] \leq \\ &\leq k \left[ \int_a^b f \phi_1 + \|f\|_{\phi_1} + 2|M_1| \|\phi_1\|_{\phi_1} \right] = : C. \end{aligned}$$

Los anteriores lemas permiten establecer un primer resultado de existencia para (3.2).

**Teorema 3.1.** Sea  $g$  verificando las siguientes hipótesis

- (i)  $g(x,u) \geq 0 \quad (x,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ .
- (ii) Existen  $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\rho_1 \neq \rho_2$  y  $\delta > 0$  tales que

$$\int_a^b g(x, \rho_1 \phi_1(x) + v(x)) \phi_1(x) dx \leq \int_a^b f(x) \phi_1(x) dx \leq \int_a^b g(x, \rho_2 \phi_1(x) + v(x)) \phi_1(x) dx$$

para cada  $v \in C[a,b]$ ,  $|v|_0 < \delta$ .

Entonces, si  $2k \int_a^b f^+(x) \phi_1(x) dx < \delta$ ,

el problema (3.2) tiene al menos una solución.

(k es la constante dada por el lema 3.1).

Demostración. Usaremos un argumento de homotopía combinado con la existencia de cotas a priori.

Suponemos  $\rho_1 < \rho_2$  y definimos los operadores

$$F : C[a,b] \rightarrow C[a,b], u \mapsto u_1 + Hg(\cdot, u(\cdot)) - Hf + P[g(\cdot, u(\cdot)) - f],$$

similar a  $I+T$  en (1.10), donde

$$Pu = \left( \int_a^b u \phi_1 \right) \phi_1 = u_0 \phi_1, u_1 = (I-P)u, Hf = u \text{ con } u$$

única solución de  $u'' + \lambda_1 u = (I-P)f, u \perp \phi_1, Bu(a) = Bu(b) = 0.$

$$\phi : C[a,b] \rightarrow C[a,b], u \mapsto u_1 - \epsilon (u_0 - \rho^*) \phi_1, \text{ donde}$$

$$\rho^* = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \text{ y } \epsilon > 0 \text{ tal que } k(2 \int_a^b f^+(x) \phi_1(x) dx + \epsilon (\rho_2 - \rho_1)) < \delta$$

Hallar una solución de (3.2) es equivalente a hallar un cero de F. Tanto F como  $\phi$  son perturbaciones compactas de la identidad y estamos en condiciones de aplicar la teoría de grado de Leray-Schauder.

$$\text{Sea } G = \{u \in C[a,b] : u = \rho \phi_1 + u_1, \rho \in \mathbb{R}, u_1 \perp \phi_1, \rho_1 < \rho < \rho_2, |u_1|_0 < \delta\}$$

La única solución de  $\phi u = 0$  es  $\rho^* \phi_1 \in G$  y es claro que  $d(\phi, G, 0) \neq 0.$

Se define la homotopía dada por la ecuación

$$(3.3) \quad \gamma Fu + (1-\gamma) \phi u = 0, \gamma \in [0,1]$$

y suponemos que (3.3) no tiene soluciones en  $\partial G$  para  $\lambda = 1$  pues en otro caso el teorema estaría probado.

Sea  $(\gamma, u) \in (0,1) \times \partial G$  una solución de (3.3), entonces se tiene

(i)  $|u_1|_0 = \delta$ ,  $u_0 \in [\rho_1, \rho_2]$  o

(ii)  $|u_1|_0 < \delta$ ,  $u = \rho_i$  para  $i = 1, 2$

Además  $(\gamma, u)$  verifica

(3.4)  $u_1'' + \lambda_1 u_1 + \gamma g(x, u) - (1-\gamma) \varepsilon (u_0 - \rho) \phi_1(x) = \gamma f(x), x \in (a, b),$   
 $Bu(a) = Bu(b) = 0.$

Puesto que  $\gamma g$  es no negativo, repitiendo el argumento del lema 3.2. se tiene

$$|u_1|_0 \leq k \left[ \int_a^b f \phi_1 + \|f\| \phi_1 + 2\varepsilon |u_0 - \rho| \right] \leq$$

$$\leq k \left[ 2 \int_a^b f^+ \phi_1 + \varepsilon (\rho_2 - \rho_1) \right] < \delta, \text{ ya que } \rho \in [\rho_1, \rho_2].$$

La posibilidad (i) queda por tanto descartada.

Supongamos entonces que  $u_0 = \rho_1, |u_1|_0 < \delta$

(el caso  $u_0 = \rho_2$  es similar). Por la hipótesis (ii)

$$\int_a^b g(x, u(x)) \phi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \phi(x) dx$$

y de (3.4)

$$\gamma \int_a^b g(x, u(x)) \phi(x) dx + (1-\gamma) \varepsilon \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \right) = \gamma \int_a^b f(x) \phi(x) dx,$$

lo que combinado conduce a una solución de (3.3) en  $\partial G$  y  $\deg(F, G, 0) = \deg(\phi, G, 0) \neq 0$ , lo que prueba el resultado.

Nota. La hipótesis (i) puede ser sustituida por

(i')  $g(x, u) \leq 0$   $(x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ ,

cambiando también la última desigualdad de (ii) a

$$2k \int_a^b f^-(x) \phi(x) dx < \delta.$$

Como consecuencia del anterior teorema se pueden obtener - condiciones de existencia en términos del comportamiento asintótico de  $g$  similares al corolario 2.1.

Corolario 3.1. Sea  $g$  verificando

(i) Existen constantes  $\delta_+$  y  $\delta_-$  tales que

$$|g(x,u)| \leq \delta_- , \quad x \in [a,b], \quad u \leq 0,$$

$$|g(x,u)| \geq \delta_+ , \quad x \in [a,b], \quad u \geq 0.$$

(ii)  $\int_a^b g(x, -\infty) \phi_1(x) dx < \int_a^b f(x) \phi_1(x) dx < \int_a^{b^*} g(x, +\infty) \phi_1(x) dx,$

$$\text{donde } g(x, -\infty) = \limsup_{u \rightarrow -\infty} g(x,u),$$

$$g(x, +\infty) = \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(x,u), \quad x \in [a,b],$$

y  $\int^*$  denota la integral superior de una función acotada inferiormente.

Entonces (3.2) tiene al menos una solución.

Demostración. No es restrictivo suponer  $g \geq 0$ .

Sea  $\delta > 2k \int_a^b f^+ \phi_1$ . Si (3.2) no tuviese solución por el teorema 3.1. se tendría una sucesión

$\rho_n \rightarrow +\infty$  (resp  $-\infty$ ) y  $v_n \in C[a,b]$ ,  $|v_n| \leq \delta$  tales que

$$\int_a^b g(x, \rho_n \phi_1(x) + v_n(x)) \phi_1(x) dx \leq \int_a^b f(x) \phi_1(x) dx$$

$$(\text{resp } \geq \int_a^b f(x) \phi_1(x) dx).$$

Como  $\phi_1 > 0$  en  $(a,b)$ ,  $\rho_n \phi_1 + v_n \rightarrow +\infty$  (resp  $-\infty$ ) a.e.  $[a,b]$ .

Aplicando el Lema de Fatou (lo que es posible por (i)),

$$\int_a^b f(x) \phi_1(x) dx \geq \liminf^* \int_a^b g(x, \rho_n \phi_1(x) + v_n(x)) \phi_1(x) dx \geq$$

$$\geq \int_a^b g(x, +\infty) \phi_1(x) dx,$$

$$(\text{resp } \int_a^b f(x) \phi_1(x) dx \leq \limsup \int_a^b g(x, \rho_n \phi_1(x) + v_n(x)) \phi_1(x) dx \leq$$

$$\leq \int_a^b g(x, -\infty) \phi_1(x) dx),$$

Lo que contradice (ii).

### Comentarios y ejemplos

1. El Corolario 5.1. con condiciones de contorno periódicas fue probado por Ward [W1]. Las condiciones de periodicidad tienen un comportamiento muy similar a las de tipo Neumann. No obstante, como el propio Ward hace notar en [W3], la extensión al problema de Dirichlet no parecía inmediata. Conseguimos dicha extensión gracias a la definición de una norma asociada al problema,  $\|\cdot\|_{\phi_1}$ , y al resultado de regularidad que da el lema 3.1.

2. El teorema 3.1. constituye una extensión propia de los resultados antes mencionados incluso en el caso del problema de Neumann. Esto es debido a que la condición (ii) en el teorema 3.1. es más general que una condición de tipo asintótico.

3. En [AS] Aguinaldo y Schmitt probaron que el problema  $u'' + u = \alpha u'' + p(t)$ ,  $u(0) = 0 = u(\pi)$ , con  $\alpha > 0$  tiene al menos una solución si y sólo si  $\int_0^\pi p(t) \sin t dt \geq 0$ , lo que había sido conjeturado por Fučik en [Fu 1].

El método utilizado por dichos autores está ligado a propiedades muy específicas de la función  $\alpha u''$ . Dicho resultado se sigue del teorema 3.1.

4. Retomamos ahora el ejemplo 3.2.

$$u'' + u + e^u = f(x), \quad x \in (0, \pi), \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Multiplicando por  $\sin x$  e integrando se sigue que una condición necesaria para la existencia de solución es

$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx > 0$ . Se tiene  $g(+\infty) = +\infty$ ,  $g(-\infty) = 0$  y el corolario 3.1 garantiza que esta condición es también suficiente.

5. Un ejemplo en el que el corolario 3.1. no es aplicable - pero sí lo es el teorema 3.1. es el siguiente:

$$u'' + e^u |\sin(u^{\frac{1}{2}})| = f(x), \quad x \in (0, \pi), \quad u'(0) = u'(\pi) = 0.$$

Se tiene  $g(+\infty) = 0 = g(-\infty)$ . Por el teorema 3.1. este problema tiene solución si y sólo si

$$\int_0^\pi f(x) \, dx > 0 \quad \text{ó} \quad f = 0.$$

6. Los resultados anteriores aparecen en [K01] y [K02]. Algunos resultados relacionados se pueden ver en [W1], [W3], [CaM] y [Ca0].

## 2. Cotas a priori para ecuaciones en derivadas parciales

Una extensión inmediata de los resultados de la Sección anterior al caso de derivadas parciales no es posible. Esto se debe a que el análogo del Lema 3.1. en dimensiones superiores no es cierto (ver [Sta]).

Para obtener cotas a priori necesitaremos, además de (H-3.1.), una hipótesis adicional de tipo crecimiento polinomio para  $g$ .

(H-3.2) Existen  $\alpha, \beta \geq 0$  y  $\sigma < \sigma(B, N)$  tales que

$$\underline{|g(x, u)| \leq \alpha + \beta |u|^\sigma \text{ para cada } (x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R},}$$

donde,

$$\sigma(B;N) = \begin{cases} \frac{N}{N-1}, & \text{si } N \geq 2 \text{ y } B \text{ representa condiciones de Dirichlet.} \\ +\infty, & \text{si } N=2 \text{ y } B \text{ representa condiciones de Neumann.} \\ \frac{N}{N-2}, & \text{si } N > 2 \text{ y } B \text{ representa condiciones de Neumann.} \end{cases}$$

Los resultados de Pohozaev [P] prueban que una condición del tipo (H-3.2) es "casi-necesaria" para obtener cotas para las soluciones. No obstante, el coeficiente  $\sigma(B;N)$  es más restrictivo que el coeficiente crítico  $\frac{N+2}{N-2}$ .

Empezamos con el problema de Dirichlet

$$(3.5) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g(x,u) = f(x), & x \in \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geq 2, \\ u = 0 & \text{en } \partial \Omega, \end{cases}$$

donde  $g$  verifica las condiciones (i) y (ii) de la sección 1.2.

**Lema 3.3** Sea  $g$  verificando (H-3.1) y (H-3.2). Entonces existen  $C_1, C_2 \geq 0$  y  $\mu \in [0,1)$  tales que si  $u$  es una solución de (3.5) se tiene

$$\|u\|_1 \leq C_1 + C_2 \|u\|_0^\mu, \quad \text{con } u = u_0 \phi + u_1, \quad u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_1 \perp \phi.$$

**Demostración.** No es restrictivo, por (H-3.1), suponer que  $g$  es no negativa ó no positiva. En lo que sigue  $g$  será no negativa y se puede suponer  $\sigma \geq 1$ . Sea  $\beta^* > 0$  tal que  $\alpha + \beta |u|^\sigma \leq \beta^* |u|^\sigma$  para cada  $u \geq 1$ . Se define  $\tilde{g}: \bar{\Omega} \times [-1,1] \rightarrow [0,1]$  por  $\tilde{g}(x,u) = g(x,u) \beta^* |u|^\sigma$ . Entonces existe una extensión continua  $\tilde{g}: \bar{\Omega} \times [-1,1] \rightarrow [0,1]$ . Sea  $g_1: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por



$$g_1(x, u) = \begin{cases} g(x, u) & |u| \geq 1 \\ \beta^* |u|^\sigma \tilde{g}(x, u), & |u| < 1 \end{cases}$$

Es claro que  $g_1$  es no negativa y satisface  $g_1(x, u) \leq \beta^* |u|^\sigma$  para  $(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Se nota  $g_2$  a la función  $g - g_1$  y por la construcción anterior  $|g_2(x, u)| \leq C$ ,  $(x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  para algún  $C > 0$ .

Sea  $p > N$  tal que  $\sigma < \frac{p}{p-1}$ , lo que es posible por

(H-3.2). Los teoremas de inmersión de Sobolev (ver [Ad]) garantizan que  $W^{2,p}(\Omega)$  está inmerso en  $C^1(\bar{\Omega})$  con inclusión continua, y por tanto, existe  $k_1 > 0$  tal que  $|u|_1 \leq k_1 \|u\|_{2,p}$  para cada  $u \in W^{2,p}(\Omega)$ . De las estimaciones en el Capítulo 1 se sigue que existe  $k_2 > 0$  tal que

$$\|u_1\|_{2,p} \leq k_2 [\|g(\cdot, u(\cdot))\|_p + \|f\|_p], \quad \text{donde } u = u_0 \phi + u_1,$$

con  $u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_1 \perp \phi$

$$\begin{aligned} \|g(\cdot, u(\cdot))\|_p &\leq \|g_1(\cdot, u(\cdot))\|_p + \|g_2(\cdot, u(\cdot))\|_p \leq \\ &\leq \|g_1(\cdot, u(\cdot))\|_p + C |\Omega|^{1/p}, \end{aligned}$$

donde  $|\Omega|$  es la medida de  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} \|g_1(\cdot, u(\cdot))\|_p^p &= \int_{\Omega} |g_1(x, u(x))|^p dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} (\beta^*)^{p-1} |u|^{\sigma(p-1)} |g_1| dx, \end{aligned}$$

utilizando (2.11) y puesto que  $\sigma(p-1) > 1$ ,

$$\frac{|u(x)|^{\sigma(p-1)}}{\phi(x)} \leq c |u|_1^{\sigma(p-1)}, \quad x \in \Omega,$$

de donde

$$\|g_1(\cdot, u(\cdot))\|_p^p \leq (\beta^*)^{p-1} c |u|_1^{\sigma(p-1)} \int_{\Omega} |g_1| \phi dx.$$

Puesto que  $u$  es una solución de (3.5) se tendrá

$$\int_{\Omega} g_1 \phi + \int_{\Omega} g_2 \phi = \int_{\Omega} g \phi, \text{ y como } g_1 \geq 0$$

$$\int_{\Omega} |g_1| \phi \, dx \leq \int_{\Omega} g_1 \phi + C \|\phi\|_1.$$

Resumiendo, existen  $k_3, k_4 > 0$  tales que

$$\|g(\cdot, u(\cdot))\|_p \leq k_3 \|u\|_1^{\sigma(p-1)p^{-1}} + k_4 \text{ y}$$

$$\|u\|_1 \leq k_2 [k_3 \|u\|_1^{\sigma(p-1)p^{-1}} + k_4 + \|f\|_p]$$

Puesto que  $\|u\|_1 \leq \|u_0\|_1 + \|u_1\|_1$  y  $\sigma(p-1)p^{-1} < 1$  se obtiene fácilmente la relación que se quería.

Obtendremos un resultado similar para el problema de Neumann

$$(3.6) \quad \begin{cases} \Delta u + g(x, u) = f(x), & x \in \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{en } \partial \Omega. \end{cases}$$

**Lema 3.4.** Sea  $g$  verificando (H-3.1) y (H-3.2). Entonces existen  $C_1, C_2 \geq 0$  y  $\mu \in [0, 1)$  tales que si  $u$  es una solución de (3.6) se tiene

$$\|u\|_1 \leq C_1 + C_2 \|u_0\|_1^{\mu}, \text{ con } u = u_0 \phi + u_1, u_0 \in \mathbb{R}, u_1 \perp \phi.$$

**Demostración.** De nuevo suponemos que  $g$  es no negativa y sea  $p > \frac{N}{2}$  tal que  $\sigma < \frac{p}{p-1}$ . Se sabe que existe  $k_1 > 0$  tal que

$$\|u_1\|_{2,p} \leq k_1 [\|g(\cdot, u(\cdot))\|_p + \|f\|_p],$$

además  $W^{2,p}(\Omega)$  está inmerso en  $C^0(\Omega)$  y

$$\|u\|_0 \leq k_2 \|u\|_{2,p} \text{ para cada } u \in W^{2,p}(\Omega).$$

$$\begin{aligned} \|g(\cdot, u(\cdot))\|_p^p &= \int_{\Omega} |g(x, u(x))|^p \, dx \leq \int_{\Omega} (\alpha |u(x)|^{\sigma} + \beta)^{p-1} g(x, u(x)) \, dx \\ &\leq (\alpha \|u\|_0^{\sigma} + \beta)^{p-1} \int_{\Omega} |g(x, u(x))| \, dx. \end{aligned}$$

Puesto que  $u$  es solución y  $g \geq 0$

$$\int_{\Omega} g(x, u(x)) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \, dx,$$

Combinando las anteriores expresiones se tiene

$$\|u_1\|_0 \leq k_3 (\alpha \|u_0\|_0^\sigma + \beta) (p-1)p^{-1} + k_4$$

de donde, puesto que  $\sigma(p-1)p^{-1} < 1$ , se sigue lo que queriamos demostrar.

Como en la sección anterior se pueden utilizar estos resultados para obtener un teorema de existencia.

Teorema 3.2. Sea  $g$  verificando (H-3.1) y (H-3.2) y supongamos que además se verifica la siguiente hipótesis

(i) Existe  $\rho > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} g(x, u_+(x)) \phi(x) dx \leq \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x, u_-(x)) \phi(x) dx$$

para cada  $u_+, u_- \in \Xi$  con  $u_+(x) \geq \rho \phi(x)$ ,  $u_-(x) \leq \rho \phi(x)$ ,  $x \in \Omega$ .

Entonces, el problema

$$(43.7) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g(x, u) = f(x), & x \in \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial \Omega. \end{cases}$$

tiene al menos una solución.

*Demostración.* Usamos de nuevo métodos de homotopía.

Sea  $F: \Xi \rightarrow \Xi$ ,  $F(u) = u - Pu - (\Delta + \lambda_1, I)^{-1} [(I-P)g(\cdot, u(\cdot)) - f] + P(g(\cdot, u(\cdot)) - f)$

$\phi: \Xi \rightarrow \Xi$ ,

$$\phi(u) = u_1 + \phi(u), \quad \phi(u) = \begin{cases} \phi & \text{si } u_0 \geq 1 \\ u_0 & \text{si } u_0 < 1 \\ -\phi & \text{si } u_0 \leq -1 \end{cases}$$

donde  $u = u_0 \phi + u_1$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_1 \perp \phi$

El problema (3.7) es equivalente a hallar un cero de  $F$ .

Tanto  $F$  como  $\phi$  son perturbaciones compactas de la identidad y estudiamos la familia de ecuaciones.

$$(3.8) \quad \gamma F(u) + (1 - \gamma) \phi(u) = 0, \quad \gamma \in \gamma [0, 1]$$

Para  $\gamma = 0$  el único cero de  $\phi(u)$  es el origen y es claro - que  $d(\phi, B_{\Xi}(R), 0) \neq 0$  donde  $B(R)$  denota la bola abierta en  $\Xi$  centrada en el origen y con radio  $R > 0$ .

Para  $\gamma \in (0, 1)$ , si  $u$  es una solución de (3.8) y siguiendo el mismo proceso que en los Lemas 3.3 y 3.4 se tiene que existen  $C_1, C_2 \geq 0$  y  $\mu \in [0, 1)$  (independientes de  $u$  y  $\gamma$ ) tales que

$$(3.9) \quad |u_1|_{\Xi} \leq C_1 + C_2 |u_0|^{\mu}.$$

Sean  $r > 0$  y  $\epsilon \in (0, 1)$  tales que

$$r(1 - \epsilon c) > \rho \quad \text{y} \quad C_1 + C_2 r^{\mu} < \epsilon r,$$

donde  $c > 0$  es tal que

$$|u(x)| \leq c |u|_{\Xi} \phi(x), \quad x \in \Omega.$$

Sea

$$G = \{ u \in \Xi : u = u_0 \phi + u_1, |u_0| < r, |u_1|_{\Xi} < r \}$$

y supongamos que existe  $(u, \gamma) \in G \times (0, 1)$  solución de (3.8).

Entonces, o bien  $|u_1|_{\Xi} = r$  ó  $|u_0| = r$

Si  $|u_1|_{\Xi} = r$ , por las anteriores desigualdades

$$r \leq C_1 + C_2 |u_0|^{\mu} \leq C_1 + C_2 r^{\mu} < \epsilon r,$$

lo que es una contradicción.

Si  $|u_0| = r$ , de (3.9)  $|u_1|_{\Xi} \leq C_1 + C_2 r^{\mu} < \epsilon r$  y

$$|u_1(x)| \leq \epsilon r \phi(x), \quad x \in \Omega.$$

Para el caso  $u_0 = r$

$$u(x) = u_0 \phi(x) + u_1(x) \geq (1 - \epsilon c) r \phi(x) \geq \rho \phi(x)$$

y por (i)

$$\int_{\Omega} g(x, u(x)) \phi(x) dx \geq \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx$$

Puesto que  $u$  es una solución de (3.8), tenemos

$$\gamma \left[ \int_{\Omega} [g(x, u(x)) - f(x)] \phi(x) dx \right] = (1 - \gamma) \phi > 0,$$

lo que supone una contradicción.

De la misma forma se prueba que  $u_0$  no puede ser  $-r$ . Por tanto, la ecuación (3.8) tiene al menos una solución en para  $\gamma = 1$ .

Nota. El teorema anterior es también válido si la desigualdad que aparece en (i) se invierte.

A continuación obtenemos, como consecuencia del Teorema 3.2., condiciones de tipo asintótico para la existencia de solución de (3.7).

Corolario 3.2. Sea  $g$  verificando (H-3.2) y tal que existen  $\delta_+$ ,  $\delta_- \in \mathbb{R}$  con  $g(x, u) \geq \delta_+$  si  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $u \geq 0$ .  
 $|g(x, u)| \leq \delta_-$  si  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $u \leq 0$ .

y sean  $g(x, +\infty)$ ,  $g(x, -\infty)$  como en la sección 2.1.

Se supone que

$$(3.10) \quad \int_{\Omega} g(x, +\infty) \phi(x) dx < \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx < \int_{\Omega} g(x, -\infty) \phi(x) dx,$$

entonces el problema (3.7) tiene al menos una solución.

Demostración. Si no se verificase la hipótesis (i) del teorema 3.2 existiría una sucesión  $\{u_n\} \in \mathbb{E}$  tal que  $u_n(x) \geq n \phi(x)$ ,  $x \in \Omega$  (resp  $u_n(x) \leq -n \phi(x)$ ) con

$$\int_{\Omega} g(x, u_n(x)) \phi(x) dx < \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx \quad (\text{resp } \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx).$$

Aplicando el Lema de Fatou se obtiene una contradicción con (3.10).

Notas y ejemplos

1. El Corolario 3.2. fue probado por Ward [W2] para el problema de Neumann. Ward utilizó estimaciones en  $L^1$  para obtener las cotas a priori y necesitaba imponer la hipótesis adicional

(C3)  $g$  tiende a ser no decreciente: existen  $\gamma \in L^1(\Omega)$  y  $M \geq 0$  tales que  $g(x, u_1) < g(x, u_2) + \gamma(x)$  a.e.  $\Omega$  si  $u_2 - u_1 \geq M$ . Nuestro método de prueba es distinto y no necesitamos (C3). Como ejemplo, el problema

$$\Delta u = u^- |\sin u| - f(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en } \partial \Omega$$

no verifica (C3), pero aplicando el teorema 3.2 se sigue que tiene al menos una solución si  $\int_{\Omega} f = 0$ .

2. De nuevo en [W2] se hace notar que la extensión al problema de Dirichlet no es inmediata. El Corolario 3.2. unifica ambos problemas, Dirichlet y Neumann. Como un ejemplo,

$$\Delta u + \lambda_1 u + |u|^{p-1} u^+ = f(x), \quad x \in \Omega, \quad Bu = 0 \text{ en } \partial \Omega,$$

donde  $p$  cumple las restricciones de (H-3.2) tiene solución si y sólo si  $\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx \geq 0$ .

3. Sería interesante sustituir la hipótesis (H-3.2) por un crecimiento polinómico menor que el exponente crítico. Para ello se podrían quizás usar los resultados de Figueiredo, P.L. Lions y Nussbaum [FLN] acerca de la existencia de soluciones positivas.

4. El Teorema 3.1. aparece en [K03].

3.3. El rango del operador  $\Delta + \lambda_1 I + g$  con  $g$  superlineal (I)

Sea  $g: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, u) \rightarrow g(x, u)$  verificando la hipótesis (H-3.2) si  $N \geq 2$  y además

$i_1)$   $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(x,u) = +\infty$  uniformemente en  $x \in \bar{\Omega}$ .

$ii_1)$  Existe  $M > 0$  tal que  $|g(x,u)| \leq M$  si  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $u \leq 0$ .

Estamos interesados en hacer un estudio similar al de la sección 2.2 bajo las suposiciones anteriores. Para ello, dado  $\tilde{f} \in \tilde{Y}$ , sea el problema paramétrico

$$(3.11) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g(x,u) = \mu \phi(x) + \tilde{f}(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial \Omega. \end{cases}$$

Probaremos el siguiente resultado.

Teorema 3.3. Sea  $g$  verificando (H-3.2) y  $i_1)$ ,  $ii_1)$

Entonces existe un funcional  $v: Y \rightarrow \mathbb{R}$  semicontinuo superiormente tal que

$i)$  Si  $\mu > v(\tilde{f})$ , (3.11) tiene al menos una solución.

$ii)$  Si  $\mu < v(\tilde{f})$ , (3.11) no tiene solución.

Además,

$$\int_{\Omega} g(x, -\infty) \phi(x) dx \geq v(\tilde{f}) \geq \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx$$

para cada  $\tilde{f} \in \tilde{Y}$ .

Imponiendo una condición adicional el teorema puede ser refinado.

$iii_1)$  Existe el límite de  $g$  en  $-\infty$ ,  $g(x, -\infty) = \lim_{u \rightarrow -\infty} g(x,u)$

$iv_1)$   $g \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  y  $\limsup_{u \rightarrow -\infty} g_u(x,u) \leq \mu < \lambda_2 - \lambda_1$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$

Corolario 3.3. En las condiciones del teorema 3.3., si  $g$  verifica  $iii_1)$  ó  $iv_1)$  el funcional  $v$  es continuo y se tiene

$$\text{int } R(\Delta + \lambda_1 I + g) = \{ \mu \phi + \tilde{f} : \mu \in \mathbb{R}, \tilde{f} \in \tilde{Y}, \mu > v(\tilde{f}) \}$$

$$\overline{R(\Delta + \lambda_1 I + g)} = \{ \mu \phi + \tilde{f} : \mu \in \mathbb{R}, \tilde{f} \in \tilde{Y}, \mu \geq v(\tilde{f}) \},$$

donde el anterior y la clausura se entienden en  $Y$ .

Damos ahora un ejemplo que muestra como se puede obtener información cuantitativa del Teorema 3.3.

Ejemplo 3.3. Sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(u) = \begin{cases} au & \text{si } u \geq 0 \\ a \sin u & \text{si } u \leq 0 \end{cases} \quad \text{con } 0 < a < \lambda_2 - \lambda_1,$$

y estudiamos el problema de Neumann

$$(3.12) \quad \begin{cases} \Delta u + g(u) = f(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{en } \partial \Omega. \end{cases}$$

Resultados de Castro [Ca] implican que el problema

$\Delta u + a \sin u = f(x)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$  en  $\partial \Omega$ , admite solución si  $\int_{\Omega} f = 0$ .  
Trasladando dicha solución al semieje negativo (sumando términos de la forma  $2k\pi$ ) se obtiene una solución de (3.12). -  
En nuestro caso, el teorema 3.3 garantiza la existencia de solución para (3.12) si  $\int_{\Omega} f \geq 0$ .

Además hay que hacer notar que, puesto que  $\bar{g}(x, -\infty) = a$ , los resultados de Ward [W3] ó de la sección 3.2 de esta memoria afirman que existe solución si

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f > a.$$

Para la demostración del teorema usaremos un método de truncatura. Sea  $g_n: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n=1,2,\dots$ , dada por

$$g_n(x,u) = \begin{cases} g(x,u) & \text{si } u \leq n \\ g(x,n) & \text{si } u > n, \end{cases}$$

y adoptamos la convención  $g_{\infty} = g$ .

Es claro que las  $g_n$  verifican las condiciones generales i) y ii) de la sección 1.2.



Denotamos por  $S_n(f)$  el conjunto de soluciones de

$$\Delta u + \lambda_1 u + g_n(x, u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad Bu = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

Lema 3.5. Dado  $R \geq 0$  existe  $n_0 \geq 1$  tal que

$$S_n(f) = S_{n_0}(f) \quad \text{para cada } n \geq n_0 \text{ y } f \in Y, \|f\|_Y \leq R.$$

*Demostración.* Basta probar que existen  $n_0$  y  $M$  tales que

$$u(x) \leq M, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \text{si } u \in \bigcup_{n \geq n_0} S_n(f), \quad \|f\|_Y \leq R.$$

Si no fuera cierto existirían sucesiones  $(u_n)$  y  $(f_n)$  con

$$u_n \in \bigcup_{k \geq n} S_k(f_n), \quad \max_{\bar{\Omega}} u_n(x) \rightarrow +\infty, \quad \|f_n\|_Y \leq R.$$

De las demostraciones de los lemas 3.2., 3.3. y 3.4 se sigue que existen  $C_1, C_2 \geq 0$  y  $\phi \in (0, 1)$  tales que

$$\begin{aligned} |u_1|_{\bar{\Omega}} &\leq C_1 + C_2 |u_0|_{\bar{\Omega}}^\mu \quad \text{para cada } u = u_0 \phi + u_1, \\ u &\in \bigcup_{n=1} S_n(f) \quad \text{para algùn } \|f\|_Y \leq R. \end{aligned}$$

Aplicando (2.11) y lo anterior

$$\begin{aligned} u_n(x) &\leq [u_{on} + C(C_1 + C_2 |u_{on}|^\mu)] \phi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u_n &= u_{on} \phi + u_{1n}. \end{aligned}$$

Por tanto  $u_{on} \rightarrow +\infty$  y puesto que

$$u_n(x) \geq [u_{on} - C(C_1 + C_2 |u_{on}|^\mu)] \phi(x), \quad x \in \bar{\Omega}$$

se tiene que  $u_n(x) \rightarrow +\infty$  a.e.  $x \in \Omega$

Sea  $k_n \geq n$  tal que  $u_n \in S_{k_n}(f_n)$ , entonces

$$\int_{\Omega} g_{k_n}(x, u_n(x)) \phi(x) dx = \int_{\Omega} f_n(x) \phi(x) dx \leq R \|\phi\|_1,$$

pero aplicando el lema de Fatou

$$\int_{\Omega} g_{k_n}(x, u_n(x)) \phi(x) dx \rightarrow +\infty \quad \text{si } n \rightarrow \infty,$$

lo que lleva a una contradicción.

Demostración del teorema 3.3. Suponemos que

$\int_{\Omega} \bar{g}(x, -\infty) \phi(x) dx > \int_{\Omega} \underline{g}(x) \phi(x) dx$  pues en otro caso el resultado estaría probado con  $v = \int_{\Omega} \underline{g}(x) \phi(x) dx$  aplicando los corolarios 3.1 y 3.2.

Sea  $f_0 \in \tilde{Y}$ ,  $R > |f_0|_Y + \max \left[ \left| \int_{\Omega} \bar{g}(x, -\infty) \phi(x) dx \right|, \left| \int_{\Omega} \underline{g}(x) \phi(x) dx \right| \right]$  y  $n \geq n_0$  tal que

$$\int_{\Omega} g(x, n) \phi(x) dx > \int_{\Omega} \bar{g}(x, -\infty) \phi(x) dx,$$

donde  $n_0$  está dado por el lema anterior.

Si  $\mu < \int_{\Omega} \underline{g}(x) \phi(x) dx$  es claro que (3.11) no tiene solución y si  $\mu > \int_{\Omega} \bar{g}(x, -\infty) \phi(x) dx$  existe al menos una solución (corolarios 3.1 y 3.2).

Por la forma de escoger R y el lema 3.5. se sigue que para  $\mu \in \left[ \int_{\Omega} \underline{g}(x) \phi(x) dx, \int_{\Omega} \bar{g}(x, -\infty) \phi(x) dx \right]$  y  $|\tilde{f} - \tilde{f}_0|_Y < \max \left[ \left| \int_{\Omega} \bar{g}(x, -\infty) \phi(x) dx \right|, \left| \int_{\Omega} \underline{g}(x) \phi(x) dx \right| \right]$ ,

(3.11) es equivalente a

$$(3.12) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g_n(x, u) = \mu \phi(x) + \tilde{f}(x), & x \in \Omega. \\ Bu = 0 & \text{en } \partial \Omega. \end{cases}$$

Como  $g_n$  es acotada y

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g_n(x, +\infty) \phi(x) dx &= \int_{\Omega} g(x, n) \phi(x) dx > \\ &> \int_{\Omega} \bar{g}_n(x, -\infty) \phi(x) dx \end{aligned}$$

Por los resultados de la sección 2.2 existe  $v_{-,n}: \tilde{Y} \rightarrow R$  semicontinuo superiormente tal que  $v_{-,n} \leq \int_{\Omega} \bar{g}(x, -\infty) \phi(x) dx$  y (3.12) tiene solución si  $\mu > v_{-,n}(\tilde{f})$  y no tiene solución si  $\mu < v_{-,n}(\tilde{f})$ , de donde se sigue la demostración del teorema.

La demostración del Corolario es inmediata a partir de lo anterior y la sección 2.2.

3.4. El rango del operador  $\Delta + \lambda_1 I + g$  con  $g$  superlineal (II)

Discutimos ahora el caso correspondiente a (iii) en la introducción del Capítulo.

Sea  $g: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, u) \rightarrow g(x, u)$  verificando

$i_2)$   $\lim_{|u| \rightarrow \infty} g(x, u) = +\infty$  uniformemente en  $x \in \bar{\Omega}$ ,

$ii_2)$   $\lim_{u \rightarrow -\infty} [g(x, u) + \lambda_1 u] = +\infty$  uniformemente en  $x \in \bar{\Omega}$ ,

y la siguiente hipótesis de crecimiento polinómico para  $N \geq 2$

$iii_2)$  Existen  $\gamma, \beta \geq 0$  tales que

$$|g(x, u)| \leq \gamma u^\sigma + \beta, \text{ para } x \in \bar{\Omega} \text{ y } u \geq 0,$$

donde

$$\sigma < \frac{N+1}{N-1} \text{ si se trata del problema de Dirichlet,}$$

$$\sigma < \frac{N}{N-2} \text{ si se trata del problema de Neumann.}$$

Estudiamos el problema

$$(3.14) \begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g(x, u) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lema 3.6. Toda posible solución  $u$  de (3.14) satisface

$$\|u\|_{\infty} \leq \rho \|f\|_Y$$

donde  $\rho$  es una función no-decreciente (dependiendo sólo de  $g$ ).

Demostración. A lo largo de la demostración  $C$  denotará cualquier constante independiente de  $u$ .

Empezaremos con el problema de Dirichlet para  $N \geq 2$ . Para ello usaremos un método debido a Brezis y Turner [BT]. Sea  $u$  solución de (3.14), entonces  $u$  se puede descomponer en la forma  $u = u_0 \phi + u_1$  donde  $u_1$  es ortogonal a  $\phi$ . Aplicando el principio del máximo y teniendo en cuenta  $i_2$  y  $ii_2)$  se deduce que

$$u(x) \geq C, \quad x \in \Omega$$

y

$$(3.15) \quad |g(x, u(x))| \leq \gamma |u(x)|^\sigma + \beta^*, \quad x \in \Omega$$

donde  $\beta^* = \beta + \max\{|g(x, u)| : C \leq u \leq 0, x \in \bar{\Omega}\}$

Entonces, de (3.14) y la desigualdad de Garding, existe  $C > 0$  tal que

$$(3.16) \quad \|u_1\|_{1,2}^2 \leq C \left[ \int_{\Omega} g(x, u) u_1 dx - \int_{\Omega} f u_1 dx \right].$$

También

$$\int_{\Omega} g(x, u) u_1 dx = \int_{\Omega} g^\mu g^{1-\mu} u_1 dx$$

donde  $\mu \in (0, 1)$  se escogerá más tarde. Entonces

$$(3.17) \quad \int_{\Omega} g(x, u) u_1 dx \leq \left[ \int_{\Omega} |g|^\phi dx \right]^\mu \left[ \int_{\Omega} \frac{|g| |u_1|^{1/1-\mu}}{\phi^{1-\mu}} dx \right]^{1-\mu}$$

Además, como  $\underline{g} = \inf\{g(x, u) : x \in \bar{\Omega}, u \in \mathbb{R}\} > -\infty$ , se tiene

$$\int_{\Omega} |g|^\phi dx \leq \int_{\Omega} g^\phi dx + 2 |\underline{g}| \int_{\Omega} \phi dx.$$

Puesto que  $u$  es una solución de (3.14),  $\int_{\Omega} g \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx$ .

Por tanto

$$\int_{\Omega} |g|^\phi dx \leq \int_{\Omega} f \phi dx + 2 |\underline{g}| \int_{\Omega} \phi dx \leq C^{1/\mu}.$$

De (3.17),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x, u) u_1 dx &\leq C \left[ \int_{\Omega} \frac{|g| |u_1|^{1/1-\mu}}{\phi^{1-\mu}} dx \right]^{1-\mu} \\ &\leq C \left[ \int_{\Omega} \frac{(\gamma |u|^\sigma + \beta) |u_1|}{\phi^{1-\mu}} dx \right]^{1-\mu} \\ &\leq \left[ \gamma \int_{\Omega} \frac{|u|^\sigma |u_1|^{1/1-\mu}}{\phi^{1-\mu}} dx + \beta^* \int_{\Omega} \frac{|u_1|^{1/1-\mu}}{\phi^{1-\mu}} dx \right]^{1-\mu} \end{aligned}$$

Tomamos  $\mu = \frac{2}{N+1}$  y sea  $k(\sigma)$  una constante tal que

$$|u|^\sigma = |u_0|^\sigma + |u_1|^\sigma \leq k(\sigma) [ |u_0|^\sigma + |u_1|^\sigma ].$$

Usaremos la siguiente desigualdad (ver [BT], [LM])

$$\left\| \frac{v}{\phi^\tau} \right\|_q \leq C \|v\|_{1,2}$$

para  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$   $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1-\tau}{N}$  se tiene

$$\int_{\Omega} g(x, u) u_1 dx \leq C \left[ \|u_0\|_{1,2}^{\sigma(\frac{N-1}{N+1})} \|u_1\|_{1,2} + \|u_1\|_{1,2}^{\sigma(\frac{N-1}{N+1}) + 1} \right]$$

De (3.17) concluimos que

$$\|u_1\|_{1,2} \leq C \left[ \|u_0\|_{1,2}^{\sigma(\frac{N-1}{N+1})} + \|u_1\|_{1,2}^{\sigma(\frac{N-1}{N+1}) + 1} \right].$$

De donde existen constantes C y D verificando

$$(3.18) \quad \|u_1\|_{1,2} \leq C \|u_0\|_{1,2}^\lambda + D, \quad \lambda < 1$$

Debido a que u es una solución se tiene

$$\int_{\Omega} g(x, u_0 \phi + u_1) \phi dx \leq \int_{\Omega} f \phi dx$$

lo que, en conjunción con (3.18) y  $i_2$ ), permite deducir la existencia de una cota de la forma

$$\|u\|_{1,2} \leq \tilde{\rho} \left( \|f\|_0 \right)$$

Un argumento de regularidad finaliza la demostración.

En el caso del problema de Neumann o  $N=1$  se usan los lemas 3.4 y 3.2.

Nota. El anterior método para obtener cotas a priori proporciona un mejor crecimiento polinómico que el lema 3.3. Sin embargo la estimación de  $u_1$  se hace en términos de la norma en  $W^{1,2}(\Omega)$ , lo que no parece permitir condiciones como las que aparecen en el teorema 3.2.

Enunciamos ahora el teorema básico de esta Sección.

Teorema 3.4. Sea  $g$  verificando  $i_2$ ),  $ii_2$ ) y si  $N \geq 2$ ,  $iii_2$ ). Entonces existe un funcional continuo

$v : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que el problema no lineal

$$(3.19) \quad \begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g(x, u) = \mu \phi(x) + \hat{f}(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial \Omega \end{cases}$$

- a) no tiene solución si  $\mu < v(\hat{f})$ .
- b) tiene al menos una solución si  $\mu = v(\hat{f})$ .
- c) tiene al menos dos soluciones si  $\mu > v(\hat{f})$ .

Notas. 1. El resultado anterior sigue la línea iniciada por Ambrosetti y Prodi en [AP], quienes probaron bajo condiciones más concretas sobre  $g$  la existencia de  $C^1$ -variedad de codimensión 1,  $M$ , tal que  $C^0, \mu(\bar{\Omega}) - M$  quedaba dividido exactamente en dos regiones conexas en una de las cuales no había solución y en la otra exactamente dos.

2. Posteriormente, Dancer [D1] probó, para el problema de Dirichlet un resultado similar al del teorema 3.4. donde las hipótesis  $i_2$  y  $ii_2$ ) eran sustituidas por la hipótesis:

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable con continuidad y los límites (posiblemente infinitos)  $\mu = \lim_{y \rightarrow \infty} y^{-1} g(y)$  y  $\nu = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^{-1} g(y)$  verifican  $-\infty \leq \nu < \lambda_1 < \mu \leq \infty$ .

Berestycki y P.L. Lions [BL] estudiaron el problema de Neumann

$$-\Delta u = g(x, u) + f(x) \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ en } \partial \Omega \text{ con la hipótesis}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{g(x, t)}{t} < 0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(x, t)}{t} \text{ uniformemente en } x \in \bar{\Omega},$$

y es claro que dicha hipótesis es más restrictiva que  $i_2$ ) y  $ii_2$ ).

3. Se tienen resultados similares para las hipótesis

$$i_2) \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} g(x, u) = -\infty \text{ uniformemente en } x \in \bar{\Omega}.$$

$$ii_2) \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} [g(x, u) + \lambda_1 u] = -\infty \text{ uniformemente, en } x \in \bar{\Omega}.$$

Si  $N \geq 2$

$$iii_2) \quad |g(x, u)| \leq \gamma |u|^\sigma + \beta, \text{ para } x \in \bar{\Omega}, \quad u \leq 0$$

y  $\sigma$  en las condiciones de  $iii_2$ ).

4. Otros resultados relacionados se pueden ver en [Hel], [Dr2] y [F2].

Corolario 3.4. Sea  $g$  verificando  $i_2)$ ,  $ii_2)$  y, si  $N \geq 2$ ,  $iii_2)$ . Entonces  $R(\Delta + \lambda_1 I + g)$  es cerrado y viene dado por

$$R(\Delta + \lambda_1 I + g) = \{ \mu \phi + \tilde{f} : \mu \in \mathbb{R}, \tilde{f} \in \tilde{Y}, \mu \geq v(\tilde{f}) \}$$

Además,  $\text{int } R(\Delta + \lambda_1 I + g) = \{ \mu \phi + \tilde{f} : \mu \in \mathbb{R}, \tilde{f} \in \tilde{Y}, \mu > v(\tilde{f}) \}$

Demostración del teorema 3.4. Para cada  $\tilde{f} \in \tilde{Y}$  sea

$$A(\tilde{f}) = \{ \mu \in \mathbb{R} : \text{existe solución de (3.19)} \}$$

y  $g = \inf \{ g(x, u) : x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \}$ .

Multiplicando en (3.19) por  $\phi$  e integrando se tiene

$$A(\tilde{f}) \subset [g, +\infty).$$

Lema I. Si  $\mu \in A(\tilde{f})$ , entonces  $[\mu, \infty) \subset A(\tilde{f})$ .

Demostración. Lo probamos usando el método de super y sub soluciones. Para cada  $v \geq \mu$  se sigue de

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda_1 u &= \tilde{f}(x) - g(x, u) + \mu \phi(x) \leq \\ &\leq \tilde{f}(x) - g(x, u) + v \phi(x) \end{aligned}$$

que una solución  $u$  correspondiente al problema para  $\mu$  es una super-solución del problema para  $v$ . Una sub-solución constante y menor que se construye sin dificultad.

Lema II.  $A(\tilde{f})$  es cerrado y no vacío.

Demostración. Sea  $\mu_n \rightarrow \mu$ ,  $\mu_n \in A(\tilde{f}_n)$  y  $u_n$  soluciones de (3.19) para  $\mu_n$ . Del lema 3.6. se obtiene la acotación uniforme de  $|u_n|$ , y por compacidad se puede obtener una solución  $u$  de (3.19) para  $\mu$ . Por tanto  $\mu \in A(\tilde{f})$  y  $A(\tilde{f})$  es cerrado.

Para probar  $A(\tilde{f}) \neq \emptyset$  sea  $v$  la única solución de

$$\Delta v + \lambda_1 v = f - g_1(x, 0) \text{ en } \Omega, \quad Bu = 0 \text{ en } \partial\Omega, \quad v \perp \phi,$$

donde  $g(x, 0) = g_1(x, 0) + g_0 \phi$  con  $g_1$  ortogonal a  $\phi$

Sea  $\mu_0 = \text{Sup} \left\{ \frac{g(x, v(x)) - g(x, 0)}{\phi(x)} : x \in \Omega \right\}$ . Dicho número

es finito por verificar  $g$  las condiciones generales i) y ii) de la Sección 1.2. y la desigualdad (2.11)  $v$  puede ser vista como una super-solución de (3.19) para  $\mu = \mu_0 + g_0$ . Razonando como en el Lema I se obtiene  $\mu_0 + g_0 \in A(\tilde{f})$ .

Los lemas anteriores nos permiten definir el funcional

$v : Y \rightarrow R, \quad v(f) = \min A(f)$ . Se obtiene que (3.19) tiene solución si y sólo si  $\mu \geq v(f)$ .

### III. Multiplicidad de soluciones

En primer lugar observamos que si  $\mu > v(f)$ , entonces una solución (3.19) para  $\mu = v(f)$  es una super-solución estricta para (3.19) con  $\mu = \mu$ . Como se observó antes una sub-solución estricta se construye fácilmente. Aplicando el teorema 1.3. se tiene que  $\text{deg}(I+T, \theta, 0) = 1$ , en las notaciones de la sección 1.3. Por las cotas a priori del lema 3.6. se tiene que existe una bola abierta  $B \subset E$  y tal que  $\theta \subset B$  y en  $\partial B$  no hay solución de

$\Delta u + \lambda_1 u + g(x, u) = \mu \phi(x) + f(x)$  en  $\Omega, \quad Bu = 0$  en  $\partial\Omega,$   
para  $\mu \in [v(f), \mu_1]$ . La propiedad de invarianza del grado por homotopía hace que  $\text{deg}(I+T, B, 0) = 0$ .

La propiedad de escisión del grado implica la existencia de una segunda solución de (3.19) para  $\mu = \mu_1$ .

IV. Continuidad de  $v$ . Sea  $f_n \rightarrow f$  en  $Y$ . La acotación uniforme de  $v(f_n)$  se sigue de la demostración del lema II. Sea  $f_k$  una parcial para la que  $v(f_k) \rightarrow \alpha$  y  $u_k$  solución de (3.19) para  $f = f_k, \mu = v(f_k)$ . Como  $u_k$  se puede extraer una



parcial convergente, pasando al límite, y se deduce  $\liminf v(f_n) \geq v(f)$ .

Si  $\mu > v(f)$ , sea  $\theta$  tal que  $\deg(I+T, \theta, 0) \neq 0$ . Para  $n$  suficientemente grande,  $\deg(I+T_n, \theta, 0) \neq 0$ , lo que implica  $\limsup v(\tilde{f}_n) \leq \mu$  para cada  $\mu > v(\tilde{f})$ .

Nota Resultados relacionados con las Secciones 3.3. y 3.4. se pueden ver en [K04].

### 3.5. Algunos ejemplos

Consideramos ahora algunos ejemplos que ilustran los resultados de las secciones anteriores.

(i) Sea el problema

$$(3.20) \begin{cases} \Delta u + \lambda u = e^u + f(x), & x \in \Omega, \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si  $\lambda < \lambda_1$  utilizando la teoría de operadores monótonos o el método de sub y super-soluciones (ver [BN], [KW]) se puede probar que (3.20) tiene una única solución para cualquier  $f \in Y$ . De forma que  $R(\Delta + \lambda I - e^u) = Y$  si  $\lambda < \lambda_1$ .

Si  $\lambda = \lambda_1$  de nuevo usando los métodos antes citados se puede probar que existe solución de (3.20) si y sólo si

$$\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx < 0,$$

donde  $\phi$  es la función propia asociada a  $\lambda_1$ .

Además dicha solución es única. Se tiene

$$R(\Delta + \lambda_1 I - e^u) = \{ f \in Y : \int_{\Omega} f \phi > 0 \},$$

y el rango es abierto en  $Y$ .

Si  $\lambda > \lambda_1$  reescribimos el problema en la forma

$$\Delta u + \lambda_1 u + (\lambda - \lambda_1) u - e^u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad Bu = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

La función  $g(u) = (\lambda - \lambda_1)u - e^u$  está en las condiciones de la sección 3.4. pues verifica  $i_2)$ ,  $ii_2)$  y  $iii_2)$ . Entonces existe un funcional continuo

$$v: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f} \rightarrow v(\tilde{f})$$

tal que (3.20) tiene solución para  $f = \mu\phi + \tilde{f}$ ,  $\tilde{f} \in \tilde{Y}$ , si y sólo si  $v(\tilde{f}) \geq \mu$ . Además, si  $v(\tilde{f}) > \mu$  existen al menos dos soluciones. Puesto que  $\max_{n \in \mathbb{R}} g(u) = (\lambda - \lambda_1) \left[ \ln(\lambda - \lambda_1) - 1 \right]$  se tiene

$$v \leq (\lambda - \lambda_1) \left[ \ln(\lambda - \lambda_1) - 1 \right] \phi$$

Entonces  $R(\Delta + \lambda I - e^u) = \{f \in Y : f = \tilde{f} + \mu\phi, \mu \in \mathbb{R}, \mu \leq v(\tilde{f})\}$ , y el rango es cerrado.

El estudio del problema (3.20) fue propuesto por Fučík en [Fu2] McKenna [Mc] estudió el problema para  $\lambda = \lambda_2$  y condiciones en la frontera tipo Neumann. Sin embargo, en se indica que el método usado no es extensible a  $\lambda = \lambda_n$  con  $n > 2$ . Otros resultados relacionados se pueden ver en Drábek .

ii) Estudiamos el problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u + g(u) = f(x), & x \in \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

donde  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \rightarrow g(u)$  es una función de clase uno verificando

$$- \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{g(u)}{u} = +\infty$$

$$- \lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = g(-\infty) \in \mathbb{R}$$

- Si  $N \geq 2$  existen  $\alpha, \beta > 0$  tales que

$$|g(u)| \leq \alpha + \beta |u|^\sigma, \quad u \in \mathbb{R}, \text{ con } \sigma < N(N-2)^{-1}.$$

Si  $\lambda < 0$  sea  $g(u) = \lambda u + g(u)$ , entonces  $g$  verifica las condiciones de la sección 3.4.  $i_2)$ ,  $ii_2)$  y  $iii_2)$ . Por

tanto existe un funcional continuo

$$v : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f} \rightarrow v(\tilde{f}) \quad \text{tal que}$$

$$R(\Delta + \lambda I + g) = \{f \in Y : f = \mu \phi + \tilde{f}, \mu \geq v(\tilde{f})\}$$

y el rango es entonces cerrado.

Si  $\lambda = 0$  y  $g(u) > g(-\infty)$  y  $\in \mathbb{R}$ , por los resultados de las secciones 3.1. y 3.2.

$$R(\Delta + g) = \{f \in Y : \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f > g(-\infty)\}$$

y el rango es abierto.

En general, si  $\lambda = 0$ , por los resultados de la sección 3.3, se tiene que existe un funcional continuo

$$v : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f} \rightarrow v(\tilde{f}), \quad \text{con } v \leq g(-\infty) \left( \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \phi \right)$$

y tal que

$$\text{int } R(\Delta + g) = \{f \in Y : f = \mu \phi + \tilde{f}, \mu \geq v(\tilde{f})\}$$

$$\overline{R(\Delta + g)} = \{f \in Y : f = \mu \phi + \tilde{f}, \mu \geq v(\tilde{f})\}$$

Si  $\lambda > 0$  no sabemos en general que ocurre. Para el problema en ordinarias

$$u'' + \lambda u + g(u) = f(x), \quad x \in (0, \pi), \quad u'(0) = u'(\pi) = 0,$$

bajo las mismas suposiciones sobre  $g$ , se puede probar que existe  $\lambda_0 > 0$  tal que si  $0 < \lambda < \lambda_0$  entonces existe solución para toda  $f$  (ver [W1] y [CM]). Por tanto,

$$\Lambda_g \supset (-\infty, 0] \text{ pero } 0 \in \partial \Lambda_g \text{ en este caso.}$$

iii) Suponemos  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y sea el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u + u^2 = f(x), & x \in \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial \Omega \end{cases}$$

Reescribimos el problema en la forma

$$\Delta u + \lambda_1 u + (\lambda - \lambda_1)u + u^2 = f(x), \quad u = 0 \text{ en } \partial \Omega.$$

La función  $g(u) = (\lambda - \lambda_1)u + u^2$  está en las condiciones de la Sección 3.4. y por tanto existe un funcional continuo  $v: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f} \rightarrow v(\tilde{f})$  tal que

$$R(\Delta + \lambda I + g) = \{f \in Y : f = \tilde{f} + \mu\phi, \mu \geq v(\tilde{f})\},$$

el rango es ahora cerrado para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

En todos los casos anteriores, utilizando ideas similares a las del ejemplo 2.4. se pueden obtener estimaciones de los funcionales.

Capítulo IV. Comentarios finales y problemas abiertos.

Daremos en este Capítulo algunas líneas de continuación del trabajo presentado.

1. En el estudio que se ha hecho del rango del operador

$\Delta + \lambda_n I + g$  para  $g$  acotada (Capítulo 2) hay todavía serias limitaciones. Los resultados más exactos se han obtenido para el primer valor propio (Sección 2.2).

Una cuestión básica es determinar si son ciertos resultados similares para el resto de los valores propios. En la Sección 2.1. se vió que, cuando  $g$  verifica la hipótesis adicional (H.2.2.), el conjunto  $v(\tilde{f})$  es conexo y varía continuamente con  $f$ . ¿Son ciertos estos resultados cuando (H.2.2.) no se verifica?. En concreto, y en las notaciones del Capítulo 2, dado el problema

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_n u + g(u) = \mu \phi(x) + \tilde{f}(x), & x \in \Omega, \tilde{f} \perp \phi \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

se trata de determinar si el conjunto de parámetros para las que hay solución es conexo. Obviamente, si la respuesta es afirmativa, los métodos de esta memoria no pueden ser usados debido a que la función  $\phi$  cambia el signo en  $\Omega$ .

La resolución del problema anterior sería de gran ayuda para el estudio de no-linealidades que se anulan en infinito; es decir  $\lim_{|u| \rightarrow \infty} g(u) = 0$ . Este último problema ha recibido una gran atención en la literatura (ver por ejemplo [KW][AMI], [D2], ...).

Otra posibilidad es tratar de extender los resultados de la Sección 2.2 al caso en que se tratan sistemas y no ecuaciones escalares. Un caso concreto es el proble

ma

$$\Delta u + g(u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial \Omega,$$

donde  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es acotada y suficientemente regular. Esta extensión no es trivial ya que se presentan problemas relacionados con la geometría de  $\mathbb{R}^n$  que son de un carácter nuevo. Por ejemplo, una condición necesaria para la existencia de solución es

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx \in \overline{\text{co}}(g(\mathbb{R}^n)),$$

donde  $\overline{\text{co}}$  denota la envolvente cerrado-convexa de un conjunto en  $\mathbb{R}^n$ . De hecho, puede ocurrir que exista solución para funciones  $f$  tales que su valor medio no está en  $g(\mathbb{R}^n)$  si  $n > 1$ , lo que es imposible si  $n = 1$ .

2. En el trabajo original de Abrosetti y Prodi [AP], y bajo ciertas condiciones de convexidad y salto del primer valor propio para  $g$ , se establecía que para el problema

$$(1) \quad \Delta u + g(u) = f \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial \Omega,$$

existe una  $C^1$ -variedad  $M$  en  $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ , cerrada, conexa y de codimensión 1, y tal que  $C^{0,\mu}(\overline{\Omega}) - M$  tiene dos componentes conexas  $A_1$  y  $A_2$  verificándose

- a) Si  $f \in A_1$  entonces (1) no tiene solución.  
 b) Si  $f \in A_2$  entonces (1) tiene exactamente dos soluciones.

Además, si  $f \in M$  hay exactamente una solución.

En las sucesivas extensiones de este resultado, como por ejemplo [KW], [D1] o la Sección 3.3. de esta memoria, el conjunto  $M$  tiene una representación analítica de la forma  $\mu = \nu(\tilde{f})$ . Se sabe que el funcional  $\nu$  es continuo. Con objeto de lograr un mayor paralelismo con el resultado original, sería interesante estudiar la regularidad de  $\nu$  y concluir que  $M$  sigue siendo una  $C^1$ -variedad.

Por otra parte, y si bien los resultados en APl fueron presentados para el operador de Laplace, sus técnicas se extienden sin dificultad a operadores lineales de un carácter muy general. Los trabajos posteriores dependen esencialmente del Principio del Máximo, lo que hace que el método no se pueda extender a operadores de más alto orden. Sería por tanto interesante obtener resultados similares a los de la Sección 3.3 sin hacer uso del método de sub y super-soluciones.

3. Las conclusiones de la Sección 3.4 sugieren que el resultado de Amann, Ambrosetti y Mancini dado por el Teorema 1.2. de esta memoria puede ser extendido al caso en que es posible probar un resultado del tipo:

"Sea  $g$  acotada superior o inferiormente y sometida a un cierto crecimiento polinómico. Entonces la existencia de sub-solución y super-solución (no necesariamente ordenadas) para el problema

$$\Delta u + \lambda_1 u + g(x,u) = f \quad \text{en } \Omega, \quad Bu = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

implica la existencia de solución".

Si ello fuera cierto, los resultados de la Sección 3.4. serían una consecuencia inmediata de este teorema.

4. Los resultados de existencia de las Secciones 3.1 y 3.2 pueden ser extendidos de forma casi automática al caso de ecuaciones parabólicas. Sin embargo, sería de interés estudiar el problema  $u_t - u_{xx} = g(u) - f$  con condiciones de contorno Dirichlet, pues quizás se obtuvieron resultados muy próximos a los de la Sección 3.2 para ecuaciones ordinarias.

Otro problema, ya indicado, es alcanzar el coeficiente crítico en la Sección 3.2.

REFERENCIAS

- [ A d ] ADAMS, R.A. Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.
- [ A D N ] AGMON, S.; DOUGLIS, A. y NIREMBERG, L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I. Comm. pure appl. Math. 12 (1959), 623-727.
- [ A S ] AGUINALDO, L. y SCHMITT, K. On the Boundary Value Problem  $u'' + u = \alpha u + p(t)$ ,  $u(0) = 0 = u(\pi)$ . Proc. of the Am. Math. Soc. 68, 1 (1978), 64-68.
- [ A L P ] AHMAD, S., LAZER, A.C. y PAUL, J.L. Elementary critical point theory and perturbations of elliptic Boundary Value Problems. Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 933-944.
- [ A A M ] AMANN, H.; AMBROSETTI, A. y MANCINI, G. Elliptic Equations with Noninvertible Fredholm Linear Part and Bounded Nonlinearities. Math. Z. 158 (1978), 179-194.
- [ Am ] AMANN, H. A multiplicity theorem for a class of elliptic boundary value problems. Nonl. Part. Diff. Equs. and their Apps. Collège de France. Vol I. Ed. Pitman. 1980.
- [ AP ] AMBROSETTI, A. y PRODI, G. On the Inversion of Some Differentiable Mappings with Singularities between Banach Spaces. Annli di Mat. Pura ed Appl. Ser. IV, 93 (1972), 231-247.
- [ A M I ] AMBROSETTI, A. y MANCINI, G. Existence and multiplicity results for nonlinear elliptic problems with linear part at resonance. J. Diff. Equations 28, (1978), 220-245.
- [ A M II ] AMBROSETTI, A. y MANCINI, G. Theorems of existence and multiplicity for nonlinear elliptic problems with noninvertible linear part. Ann. Scuola norm. Sup. Pisa, Sci. fis. mat. III, 5, (1978), 15-28.



- [ B L ] BERESTYCKI, H. y LIONS, P.L. Sharp existence results for a class of semilinear elliptic problems. University of Wisconsin, Madison, MRC Technical Summary Report // 2111 (1980).
- [ B T ] BREZIS, H. y TURNER, R.E.L. On a Class of Superlinear Elliptic Problems. Comm. in P.D.E., 2, (1977), 601-614.
- [ B N ] BREZIS, H. y NIREMBERG, L. Characterizations of the Ranges of Some Nonlinear Operators and Applications to Boundary Value Problems. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, V. (1978), 225-326.
- [ Ca M ] CAÑADA, A. y MARTINEZ-AMORES, P. Periodic solutions of Nonlinear vector ordinary differential equations of higher order at resonance. Nonlinear Anal. 7 (1983), 747-761.
- [ Ca O ] CAÑADA y ORTEGA, R. Existence theorems for equations in normed spaces and boundary value problems for nonlinear vector ordinary differential equations. Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh, 97A, (1984).
- [ Ca ] CASTRO, A. Periodic solutions of the forced pendulum equation. En Differential Equations, editado por S. Ahmad M. Keener y A. Lazer, Academic Press, New York (1980).
- [ C ] CESARI, L. Functional Analysis, nonlinear differential equations, and the alternative method. En Nonlinear Functional Analysis and Differential Equations. Editado por L. Cesari, R. Kannan y J.D. Schuur, M. Dekker Inc. (1976), 1-197.
- [ C K 1 ] CESARI, L. y KANNAN, R. An abstract theorem at resonance Proc. Amer. Math. Soc. 63 (1977), 221-225.
- [ C K 2 ] CESARI, L. y KANNAN, R. Solutions of nonlinear hyperbolic equations at resonance. Nonlinear Analysis, 6 (1982), 751-805.

- [ D 1 ] DANCER, E.N. On the ranges of certain weakly nonlinear elliptic partial differential equations. *J. Math. Pure et Appl.*, 57 (1978), 351-366.
- [ D 2 ] DANCER, E.N. On the Use of Asymptotics in Nonlinear - Boundary Value Problems, *Annali di Mat. Pura ed Appl.* (1982) 167-185.
- [ Di ] DIEUDONNE, J. *History of Functional Analysis*. North-Holland (1981).
- [ Dr 1 ] DRABEK, P. Remarks on multiple periodic solutions of - nonlinear ordinary differential equations. *Comun. Math. Univ. Carolinae*, 21,1, (1980), 155-160.
- [ Dr 2 ] DRABEK, P. Solvability of the Superlinear Elliptic - Boundary Value Problem. *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 22, 1, (1981), 27-35.
- [ F G ] FIGUEIREDO, D.G. y GOSSEZ. Nonlinear Perturbations of a Linear Elliptic Problem Near Its First Eigenvalue. *J. - Differential Equations*, 30 (1978), 1-19.
- [ F N ] FIGUEIREDO, D.G. y NI, W. Perturbations of second order linear elliptic problems by nonlinearities without - Landesman-Lazer Condition. *Nonl. Anal.* 3, 5 (1979), 295-307.
- [ F L N ] FIGUEIREDO, D.G.; LIONS, P.L. y NUSSBAUM, R.D. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. *J. Math. pures et appl.* 61 (1982), - 41-63.
- [ F 1 ] FIGUEIREDO, D.G. Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems. *En Lecture Notes in Mathematics 957*, Springer Verlag, (1982), 34-87.
- [ F 2 ] FIGUEIREDO, D.G. On the Superlinear Ambrosetti-Prodi - Problem. *Nonl. Anal.* 8,6 (1984), 655-665.
- [ F K ] FUCIK, S. y KUFNER, A. *Nonlinear Differential Equations*. Elsevier, 1980.

- [ FM ] FOURNIER G. y MAWHIN, J. On periodic solutions of forced pendulum-like equations. Séminaire de Mathématique. Univ. Cath. de Louvain (1984) X-1-15.
- [ Fu 1 ] FUCIK, S. Boundary value problems with jumping nonlinearities. Casopis Pěst Mat (1976), 69-87.
- [ Fu 2 ] FUCIK, S. Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems. D. Reidel Publ. Co., 1980.
- [ FH ] FUCIK, S. y HESS, P. Nonlinear Perturbations of Linear Operators having Nullspace with strong unique continuation property. Nonl. Anal. 3.2 (1979), 271-277.
- [ GM ] GAINES, R.E. y MAWHIN, J. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Lectures Notes in Math. vol. 568, Springer (1977).
- [ H ] HAMEL, G. Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden. Math. Ann. 86 (1922), 1-13.
- [ He ] HESS, P. On a Nonlinear Elliptic Boundary Value Problem of the Ambrosetti-Prodi Type. Bolletino. U.M.I. (5) 17-A (1980), 187-192.
- [ KO 1 ] KANNAN, R. y ORTEGA, R. Periodic solutions of pendulum-type equations. Aceptado en Journal of Differential Equations.
- [ KO 2 ] KANNAN, R. y ORTEGA, R. Existence of solutions of  $x'' + x + g(x) = p(t)$ ,  $x(0) = 0 = x(\pi)$ . Sometido para publicación.
- [ KO 3 ] KANNAN, R. ORTEGA, R. Landesman-Lazer Conditions for problems with "one-side unbounded" nonlinearities. Aceptado en Nonlinear Analysis.
- [ KO 4 ] KANNAN, R. ORTEGA, R. Superlinear Elliptic Boundary Value Problems. Aceptado en Checoslovak Math. Jour.
- [ KO 5 ] KANNAN, R. ORTEGA, R. On the range of pendulum-like operators. En preparación.

- [ KW ] KAZDAN, J.L. y WARNER, F.W. Remarks on some quasilinear elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.* 28, (1975), 567-597.
- [ KW 2] KAZDAN, J.L. y WARNER, F.W. Curvature functions for compact 2-manifolds. *Ann. of Math.* 99 (1974), 14-47.
- [ Ko] KONECNY, M. Remarks on periodic solvability of nonlinear ordinary differential equations. *Comm. Math. Univ. Carolinae* 18 (1977), 547-562.
- [ KR] KREIN, M. y RUTMAN, M. Linear operators leaving invariant a cone in a Banach Space. *Amer. Math. Soc. Transl., Ser.* 1, 10 (1962), 199-325.
- [ L L] LANDESMAN, E.M. y LAZER, A.C. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance. *J. Math. Mech.* 19, (1970), 609-623.
- [ L L 2] LANDESMAN, E.M. y LAZER, A.C. Linear eigenvalues and a nonlinear boundary value problem. *Pacific J. Math.* 33 (1970), 311-323.
- [ L Le] LAZER, A.C. y LEACH, D.E. On a nonlinear two-point boundary value problem. *J. Math. Anal. Appl.* 26 (1969), 20-27.
- [ L M] LIONS, J.L. u MAGENES, G. *Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol. 1.* Springer, Berlin (1970)
- [ L Lo] LLOYD, N.G. *Degree theory.* Cambridge University Press. (1978).
- [ Lo] LOUD, W.W. Some Examples of Generalized Green's Functions and Generalized Green's Matrices. *Siam Review*, (1970), 194 - 210.
- [ M 1] MAWHIN, J. Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces. *J. Differential Equations*, 12 (1972), 610-636.

- [ M 2 ] MAWHIN, J. Problèmes aux limites du type de Neumann pour certaines équations différentielles ou aux dérivées partielles non linéaires. En Equations Différentielles et fonctionnelles non linéaires. Editado por Janssens, Mawhin y Rouch. Hermann (1973), 123-134.
- [ M 3 ] MAWHIN, J. Periodic oscillations of forced pendulum-like equations. Seminaire de Mathématique, U.C.L. (1982), II-1-22.
- [ MW ] MAWHIN, J. y WILLEM, M. Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations. J. Diff. Eqs. 52 (1984), 264-287.
- [ Mc R ] Mc KENNA, P.J. y RAUCH, J. Strongly nonlinear perturbations of elliptic boundary value problems with kernel. Jour. Diff. Eqs. 28, (1978), 253-265.
- [ Mc ] Mc KENNA, P.J. On a superlinear elliptic boundary value problem at resonance. Proc. of the Am. Math. Soc. 74,2 (1979), 259-265.
- [ Ni ] NI, W-M. On the Elliptic Equations  $\Delta u + k(x)u^{(n+2)/(n-2)} = 0$ , its Generalizations, and Applications in Geometry. Indiana Univ. Maths. Jour. 31, 4 (1982), 493-529.
- [ N ] NIREMBERG, L. Topics in Nonlinear Functional Analysis. New York University, 1974.
- [ O 1 ] ORTEGA, R. Condiciones de resonancia y no resonancia para la existencia de soluciones periódicas de una ecuación de Lienard.
- [ O 2 ] ORTEGA, R. Existencia de soluciones periódicas de la ecuación del péndulo. A aparecer en Actas C.E.D.Y.A.
- [ P ] POHOZAEV, S.I. Eigenfunctions of the equation  $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ . Doklady, 165, 1 (1965), 1408-1411.
- [ P W ] PROTTER, M.H. y WEINBERGER, H.F. Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Englewood Cliff, 1967.

- [ Sa ] SATTINGER, D.H. Topics in stability and bifurcation - theory. Lecture Notes in Maths. 309. Springer-Verlag, 1973.
- [ Sh ] SHAW, H.A nonlinear elliptic boundary value problem at resonance. J. Differential Equations 26 (1977), 335-346.
- [ S ] SMOLLER, J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag, 1983.
- [ Sta ] STAMPACCHIA, G. Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane. Ann. Mat. Pura Appl. 4, 51 (1960), 1-37.
- [ St ] STORK, W. Perturbation by vanishing nonlinearities. Nonl. Anal. 7, 7 (1983) 739-746.
- [ W1 ] WARD, J.R. Asymptotic conditions for periodic solutions of ordinary differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 81, 3 (1981), 415-420.
- [ W2 ] WARD, J.R. Existence for a class of semilinear problems at resonance. J. Diff. Equns. 45 (1982), 156-167.
- [ W3 ] WARD, J.R. Perturbations with some superlinear growth for a class of second order elliptic boundary value problems. J. Nonl. Anal. 6 (1982), 367-374.