UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática Aplicada

Estabilidad de oscilaciones periódicas en una ecuación de Newton no autónoma

Memoria para optar al grado de Doctor en
Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada

Vº Bº del Director | El doctorando

Fdo.: Rafael Ortega | Fdo.: Daniel Núñez

A mis padres,
a Ruby y Stephanie.

Índice general

Introducción

Esta memoria estuvo concebida inicialmente como una continuación natural de los trabajos del profesor Rafael Ortega en [**50**],[**51**] y [**52**]. A finales del invierno del 96 en mi primera visita a España, acordamos trabajar en estos problemas y casi sin darme cuenta en pleno Diciembre sostenía en mis manos un libro o debería decir el libro, que ponía: "Lectures on Celestial Mechanics". ¡Que Dios me auxilie!, dije entonces. En todo este tiempo he sido auxiliado bastante, sobre todo por el profesor Ortega quien pacientemente me ha internado en los senderos de la investigación en un área que ha conseguido enamorar mis sentidos matemáticos: la estabilidad en sistemas hamiltonianos.

Esta memoria trata sobre el problema de estabilidad de Lyapunov en ecuaciones diferenciales Newtonianas no autónomas, es decir, ecuaciones de la forma

$$\ddot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}(t,x), x \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

donde V es una función continua, infinitamente diferenciable en la variable x y T-periódica en la variable independiente. De modo que el contexto de nuestro trabajo se sitúa en los sistemas hamiltonianos periódicos con un grado de libertad también llamados sistemas con 1 grado y medio de libertad.

El problema de estabilidad estará siempre referido a un equilibrio o a una solución T-periódica φ de (0.1). El estudio de la dinámica alrededor de φ es con frecuencia abordado por medio de la transformación de Poincaré o transformación de períodos P de la solución φ. Esta transformación es un difeomorfismo local del plano que conserva el área debido al carácter hamiltoniano de la ecuación y tiene como punto fijo a la condición inicial (x_0, y_0) de φ. En particular la estabilidad de φ es equivalente a la estabilidad de P en (x_0, y_0) como sistema dinámico discreto.

Es un hecho conocido que los métodos clásicos de Lyapunov no funcionan en este ámbito cuando la solución es estable, porque por un lado los multiplicadores característicos asociados a φ siempre están en una zona neutral para la estabilidad, la circunferencia unidad, y por otra parte, genéricamente la dinámica cerca de φ resulta tan compleja que no puede soportar funciones de Lyapunov.

El estudio de la estabilidad se ve entonces conducido por ciertas técnicas que tienen en cuenta el efecto de los términos no lineales en la estabilidad. A grosso modo podemos decir que este conglomerado de técnicas forma parte de lo que hoy conocemos como Teoría KAM. Dos resultados fundamentales podemos citar aquí:

i) La reducción a Forma Normal de Birkhoff (que simplifica los términos no lineales de P),

ii) El Teorema Twist de Moser que se aplica a la forma Normal de P para conseguir curvas cerradas e invariantes rodeando todo entorno del punto fijo y asegurando de este modo la estabilidad.

Esta memoria no habla sobre resultados teóricos nuevos en teoría KAM, sino más bien sobre resultados de estabilidad para la ecuación (0.1) que muestran una manera no clásica de aplicar el Teorema Twist de Moser. Y digo no clásica porque no presupone en modo alguno que nuestras ecuaciones estén próximas a una ecuación autónoma[1]. Es decir, los resultados de esta memoria permiten tratar con problemas no locales.

En este trabajo combinaremos ciertos métodos globales de existencia del Análisis No Lineal (métodos de Sub y Super soluciones) con la teoría KAM para conseguir soluciones periódicas estables, y en este sentido puede decirse también que la metodología es de tipo global. Nuestro método sigue las líneas de [**50, 51, 52**] donde el autor combina también herramientas globales (como el grado topológico, teoremas variacionales, principio del máximo, etc) con la teoría KAM.

Resumiendo, el estudio de la estabilidad no lineal puede ser descrito por el siguiente esquema:

Ecuación diferencial $\mapsto$ Difeomorfismo (P) $\mapsto$ Dinámica

El último paso de la cadena es la dinámica que requiere pasar por el eslabón intermedio del difeomorfismo P. Este eslabón no es conocido explícitamente y existen dos caminos para llegar hasta él:

i) El método del pequeño parámetro (via jets). Nos permite conocer aproximadamente a P a través de un desarrollo en el parámetro con coeficientes calculados a partir de la ecuación autónoma (que se supone conocida).

[1]Siendo más explícito, la metodología local es la siguiente:

Bajo la cobertura de un pequeño parámetro , es posible (bajo ciertas hipótesis) continuar equilibrios en soluciones periódicas, partiendo de una ecuación autónoma conocida. La estabilidad de estas últimas se decide entonces con la información de la ecuación. autónoma. Lo crucial aquí es que una vez que las hipótesis del teorema de Moser se verifiquen para la ecuación autónoma (parámetro nulo) entonces persistirán para valores pequeños del parámetro. Este procedimiento es conocido como método del pequeño parámetro. Por ejemplo así estudiaron Arnold y Moser (con hipótesis más finas) la estabilidad de ciertas soluciones periódicas distinguidas en el problema restringido de 3-cuerpos.

ii) Métodos globales (Análisis No Lineal: grado topológico, métodos variacionales, sub y supersoluciones, ...etc). Estos métodos proveen globalmente una solución periódica φ que nos permite conocer P aproximadamente en términos de las ecuaciones variacionales de φ. Más precisamente, la ecuación (0.1) puede escribirse (trasladando φ al origen) como una ecuación del siguiente tipo

$$\ddot{x} + a(t)x + b(t)x^2 + c(t)x^3 + \cdots = 0 \tag{0.2}$$

donde $a, b, c, \ldots$ son funciones continuas y T-periódicas dadas por las derivadas de orden $1, 2, 3, \ldots$ de la ecuación (0.1) en φ. Los jets de P siempre pueden expresarse en términos de $b, c, \ldots$ y las soluciones de la ecuación linealizada.

Finalmente para llegar al último eslabón de la cadena, se procede a estudiar las condiciones del Teorema Twist que serán expresadas en términos de $a, b, c, \ldots$ [2] Es este punto precisamente el que contiene la mayor dificultad del trabajo. Para explicarlo mejor debo hablar primero de las condiciones del Teorema Twist.

La Forma Normal de Birkhoff se aplica cuando la condición inicial (x_0, y_0) de φ es un punto fijo elíptico sin resonancias fuertes, es decir, los multiplicadores característicos λ, $\overline{\lambda}$ satisfacen: $|\lambda| = 1$ y $\lambda^k \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$. En estas condiciones es posible reducir $P = P(z)$ por un cambio simpléctico de variables $z = \Psi(\xi)$ a la forma siguiente (Birkhoff):

$$N(\xi) = R[\omega + \beta|\xi|^2]\xi + O(|\xi|^4), \xi \to 0,$$

para cierto número real β, $\lambda = e^{i\theta}$ y donde $R[\theta]$ denota la rotación de ángulo θ.

El Teorema Twist de Moser establece que en las condiciones anteriores si $\beta \neq 0$ entonces $\xi = 0$ (y por lo tanto φ) es estable.

El coeficiente β se denomina coeficiente twist y depende del 3-jet de P, es decir, depende de a, b y c.

Cuando aplicamos el primer procedimiento, β será una función regular en el parámetro y puede calcularse explícitamente hasta un orden dado del parámetro (en términos de los jets de P). Entonces se procede a examinar las regiones del parámetro que hacen estas estimaciones de β positivas o negativas.

El caso más simple ocurre cuando $P'(0)$ está en forma canónica, es decir, es una rotación. En este caso podemos usar una fórmula calculable para β ([**52**, Proposiciones 2.4 y 4.4]) en términos de b, c y las soluciones de la ecuación linealizada (el caso general puede reducirse a éste por medio de algunas técnicas, véase la introducción al capítulo 1). Entonces fijando adecuadamente los signos de b y c y controlando el crecimiento de las soluciones de la ecuación lineal $\ddot{x} + a(t)x = 0$, es

[2] En esta memoria sólo consideraremos la tercera aproximación.

posible determinar el signo de β via el principio del máximo [3](véase [**50, 52**]).

En muchos problemas interesantes los coeficientes b y c cambian el signo y esta metodología tiene serias limitaciones. En esta memoria avanzamos en esta dirección elaborando un criterio de estabilidad para el equilibrio de una ecuación de la forma (0.2) cuando los coeficientes b y c cambian el signo (capítulo 3). El criterio de estabilidad (al igual que en [**50, 52**]) es realmente un conjunto finito de relaciones entre los coeficientes de la forma

$$\Phi_i(a, b, c) < 0,$$

donde los

$$\Phi_i : C(\mathbb{T})^3 \to \mathbb{R},$$

son ciertos funcionales. Esto nos recuerda el criterio de estabilidad de Lyapunov ([**31**, sección 2.6]) para una ecuación lineal de la forma

$$\ddot{x} + Q(t)x = 0, \tag{0.3}$$

donde Q es una función T-periódica y continua (o continua a trozos). En este caso los funcionales son

$$\Phi_1(Q) = -\min_t Q(t), \quad \Phi_2(Q) = -4 + T\int_0^T Q(t)dt.$$

La filosofía de Lyapunov era obtener un criterio general que pudiera aplicarse sin tener un conocimiento muy preciso de Q. En contraste a esta situación tenemos el análisis local de ecuaciones de Hill que precisa de un pequeño parámetro, como en la ecuación de Mathieu, que puede verse como una pequeña pertubación de un oscilador lineal con frecuencia ω,

$$\ddot{x} + \omega^2(1 + \epsilon\cos t)x = 0, \ \epsilon \ll 1. \tag{0.4}$$

Una cuestión clásica es la determinación de regiones de estabilidad en los parámetros (ω, ϵ). El estudio se reduce a un cálculo del discriminante cuando $\epsilon = 0$. Resultados globales en este contexto son dados en [**12**].

Encontramos aquí un paralelismo entre estas dos últimas técnicas para la estabilidad lineal y las dos metodologías descritas anteriormente para la estabilidad no lineal. ¡En realidad las últimas son descendientes directas de las primeras!.

Mientras que en la ecuación de Mathieu (y en general en familias de ecuaciones lineales con un número finito de parámetros) se puede ser muy fino con las estimaciones, no ocurre así cuando se aplica el criterio de Lyapunov a situaciones concretas; sin embargo este último tiene la ventaja de la generalidad. De hecho citando a Magnus y Winkler [**31**, sección 2.6]:

[3]Vemos en este punto el uso de otra herramienta global.

"Liapunoff's theorem is the earliest example of a type of result which guarantees stability of the solutions of Hill's equation without involving data which can be derived only by actually solving the equation ".

En esta memoria se pretende dar criterios de estabilidad para las ecuaciones diferenciales no lineales (0.2) siguiendo el marco filosófico de Lyapunov. Esto nos lega más generalidad aunque va a pasar algo similar al caso lineal: la otra metodología generalmente resulta más fina para las estimaciones en un problema específico [4].

Otro aspecto importante de este marco filosófico es la cuestión de la optimalidad de los criterios. Esto significa qua las desigualdades en los funcionales que definen el criterio son las mejores posibles, es decir, son óptimas. Por ejemplo el criterio de Lyapunov es óptimo, en el sentido de que para cualquier $\epsilon > 0$ existe una función Q_0 continua a trozos, positiva y T-periódica satisfaciendo

$$T \int_0^T Q_0(t)dt - 4 < \epsilon,$$

y tal que $x \equiv 0$ es inestable para $\ddot{x} + Q_0(t)x = 0$ ([**28**]).

En [**63**] se definen los L-criterios o criterios óptimos para sistemas lineales periódicos. Una cuestión natural es si los criterios de estabilidad para la ecuación (0.2) dados en esta memoria son L-criterios. La obtención de L-criterios en el caso no lineal es un asunto tremendamente difícil. De hecho nuestros criterios están lejos de ser óptimos como se discutirá en el capítulo 3 de esta memoria. Lo ideal (aunque muy lejano todavía) sería conseguir un criterio de estabilidad óptimo para la clase de ecuaciones (0.2), tanto cuando los signos de b y c son fijos como cuando son variables. ¡Resultados de este tipo serían excelentes!.

Una vez aclarados la mayoría de los fundamentos y la naturaleza de nuestra metodología, es el momento propicio para describir los resultados fundamentales de esta memoria.

El segundo capítulo lo he colocado allí por razones cronológicas. Al inicio de nuestra investigación comenzamos a considerar las posibles extensiones de los resultados en [**52, 50**] que son de tipo elíptico. Al poco tiempo por motivos que no merece la pena explicar ahora, dejamos aparcado este asunto y preferimos abordar entonces un caso parabólico que quedó pendiente en [**51**]. En este artículo el autor considera una ecuación de Hill no lineal y periódica de la forma

$$\ddot{x} + a(t)x + c(t)x^{2n+1} + \cdots = 0, \tag{0.5}$$

donde c no cambia de signo y no es idénticamente nula. Esta ecuación admite el equilibrio $x \equiv 0$. El criterio de estabilidad en [**51**] es el

[4] En un problema concreto con parámetro se conoce la ecuación autónoma de modo que se puede ser tan preciso como se quiera en el desarrollo de los jets que involucran los coeficientes twist.

siguiente:

$$\ddot{y} + a(t)y = 0 \text{ estable } \implies x \equiv 0 \text{ estable.}$$

Este resultado tiene consecuencias inmediatas para la estabilidad del equilibrio en dos problemas importantes:

(i) El péndulo de longitud variable.
(ii) El problema de Sitnikov (un problema super-restringido de 3 cuerpos que modela el movimiento de un asteroide en presencia de estrellas dobles).

Surge naturalmente la siguiente pregunta, ¿Es posible que el equilibrio $x \equiv 0$ de (0.5) sea estable siendo $\ddot{y} + a(t)y = 0$ inestable?. La respuesta es afirmativa y un ejemplo de esta situación fue dado por B. Liu [**29**] cuando $a \equiv 0$. B. Liu establece que el equilibrio es estable si $\int_0^T c > 0$ e inestable si $\int_0^T c < 0$.

Nos propusimos entonces estudiar el caso general cuando a no era idénticamente nula.

Cuando $x \equiv 0$ es estable y la ecuación linealizada es inestable, la única posibilidad para los multiplicadores característicos λ_1, λ_2 es $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ con la matriz de monodromía de la ecuación lineal conjugada a la matriz

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Este caso es llamado caso parabólico no-semisimple o simplemente caso parabólico inestable (p.i).

Echando mano de un resultado de C. Simó [**61**] sobre puntos fijos p.i pudimos establecer y demostrar el resultado central del capítulo (Teorema 2.19). Este teorema es establecido a través de dos números σ, ν que son asociados a la ecuación lineal y que son invariantes simplécticos. Se supone que $x \equiv 0$ es p.i. y que el coeficiente c no cambia el signo. El resultado es el siguiente:

$$x \equiv 0 \text{ es estable} \Leftrightarrow \sigma\nu \operatorname{sign} c \geq 0.$$

Este resultado establece que la linealización decide la estabilidad pero con una información más fina que la mera forma canónica de Jordan, es decir, con una información simpléctica.

Este teorema cierra definitivamente el problema de estabilidad del equilibrio en el péndulo de longitud variable y en el problema de Sitnikov (Corolarios 2.20 y 2.21). De hecho conseguimos caracterizar la estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$ de estos dos problemas juntando el teorema 2.19 con el teorema principal de [**51**]. Los resultados son también no locales puesto que sólo se exigen condiciones sobre el signo de c y no sobre su tamaño.

Cabe destacar algunos procedimientos esenciales del capítulo 2.

En primer lugar la forma normal que empleamos cerca de un punto fijo p.i. de una transformación F no es la forma normal de Simó [**61**].

Alternativamente incluimos a F en un flujo hamiltoniano de un cierto hamiltoniano H periódico y proponemos una reducción de H a forma normal, es decir, reducimos a una parte autónoma H_0 más un resto no autónomo. El hamiltoniano H_0 es más simple que el hamiltoniano interpolante (autónomo) empleado por Simó en [**61**] lo que proporciona una geometría más simple y conveniente para preparar la aplicación del Teorema Twist de Moser[5].

El criterio de estabilidad queda expresado en términos del coeficiente no lineal α de la forma normal H_0. El coeficiente α puede calcularse a partir del primer jet no nulo de F (véase (2.39)) y es invariante frente a ciertos cambios de coordenadas simplécticos.

El criterio de estabilidad obtenido es equivalente al de Simó [**61**] con la diferencia que este último sólo trata el caso analítico. Finalmente el criterio es empleado (junto con sus corolarios) para demostrar el resultado central del capítulo 2 (Teorema 2.19).

En realidad si sólo se está interesado en resultados para la ecuación (0.5), el proceso de reducción anterior puede aplicarse directamente al hamiltoniano de esta ecuación e implementar así una demostración directa del Teorema 2.19 que es independiente del resultado en [**61**]. Sin embargo no he procedido de este modo porque quiero enfatizar las conexiones entre la estabilidad de los equilibrios y los puntos fijos, además de dar el justo valor que el resultado fundamental [**61**] tiene en la teoría.

A propósito, cuando me encontraba estudiando [**61**] me percaté que los cálculos y estimaciones eran bastante largos, de hecho nunca llegué a terminarlos, debo confesarlo. Entonces nos planteamos que tal vez sería mejor buscar una forma normal geométricamente (aunque no algebraicamente) más sencilla. Un curso dictado por el profesor Ortega en El Escorial en el verano del 97, me dió la idea. En este curso se exponían algunas aplicaciones del teorema twist a perturbaciones de ecuaciones de Duffing, resultando muy cómodas las estimaciones porque se trataba de flujos. Entonces me dije ¿por qué no incluir a F en un flujo hamiltoniano y reducir el hamiltoniano interpolante de F a una ecuación de Duffing perturbada?[6]. Efectivamente esto hicimos y por medio de una versión apropiada del teorema de diferenciabilidad de parámetros !las estimaciones salieron casi gratuitas!. No interpreto esto como un triunfo, sino más bien como ¡un ardid desesperado para salir del agujero!. Bueno, finalmente salí de el. Luego miraba las demostraciones y me parecían muy elegantes.....bueno......¡sólo vana autocompensación psicológica!.

[5]Sin embargo a nivel de las transformaciones, la forma normal de Simó es algebraicamente más simple que la nuestra y estuvo inspirada por ciertos esquemas finitos en diferencias.

[6]Estas ideas también se vieron reforzadas por [**10**]

De todos modos el método me permitió también extender los resultados a ciertas ecuaciones reversibles en la línea de [**30**], aunque esto no será tratado aquí.

Para concluir esta introducción quisiera también comentar mis experiencias con respecto al último capítulo de la memoria.

Comenzamos a estudiar los casos elípticos partiendo de un ejemplo módelico: la ecuación del péndulo forzado periódicamente por una fuerza externa T-periódica p de valor medio cero

$$\ddot{x} + a \sin x = p(t).$$

Esta ecuación ha sido muy importante en la evolución del Análisis No Lineal. En este modelo por diferentes métodos se deduce la existencia de una solución T-periódica φ. Cuando p es una función impar sospechábamos que algunos términos del coeficiente twist de φ se anulaban, pero esta suposición era falsa. Descartamos la hipótesis de imparidad y nos dispusimos a buscar el método más adecuado de existencia que nos permitiera estudiar la no nulidad del coeficiente twist.

Por otra parte, como el coeficiente b de la ecuación (0.2) asociada a φ cambia el signo, este problema nos llevaba naturalmente a considerar extensiones de los resultados en [**50, 52**]. El proceso investigativo se cristalizó en los teoremas 3.22 y 3.23.

Decidimos emplear el método de Sub y Super Soluciones para problemas periódicos de segundo orden. La versión más clásica de este método conduce típicamente a soluciones periódicas inestables [**16**], sin embargo el método de sub y super soluciones con orden invertido, es decir, cuando la sub-solución está por encima de la super solución, nos permite en muchos casos “pillar” la solución estable. Esto nos llevó a elaborar un resultado más general que conecta el método de sub y super soluciones con orden inverso y la estabilidad (Teorema 3.24). Este resultado es una consecuencia de nuestro primer teorema de estabilidad para la ecuación (0.2) (Teorema 3.22). Aplicando este resultado al péndulo forzado encontramos un intervalo preciso en el parámetro a para la estabilidad.

Clásicamente la ecuación del péndulo forzado se estudia con un pequeño parámetro δ multiplicando a p, de modo que $\delta = 0$ corresponde a un péndulo libre. Entonces para valores pequeños de δ el equilibrio $x \equiv 0$ del péndulo libre se continúa en una oscilación periódica pequeña que con el auxilio del Teorema de Moser puede probarse que es estable. Los argumentos de este capítulo pueden emplearse también para precisar un intervalo de estabilidad de δ que dependerá obviamente de a.

El profesor Pedro Torres se interesó por estos resultados y me sugirió la posibilidad de aplicarlos para estudiar la estabilidad en un modelo de satélites artificiales moviéndose en una órbita circular polar terrestre [**65**]. Este modelo es periódico, tiene un parámetro α y presenta algunas simetrías de tipo impar.

En [**65**] los autores por métodos monótonos obtienen la existencia de soluciones periódicas impares elípticas para $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Nuestra aportación es que estas soluciones son realmente estables si $\alpha \leq \frac{1}{18}$. ([**47**])

El problema de existencia en este modelo puede ser tratado como un problema de Dirichlet en medio período. Entonces usamos aquí el clásico método de sub y super soluciones para un problema de Dirichlet para encontrar soluciones periódicas impares. Análogamente al teorema 3.25 encontramos un resultado más general que conecta el método de "sub y super soluciones Dirichlet" con la estabilidad (Teorema 3.26).

Estas ideas permiten tratar también con modelos más generales que incorporan el parámetro de excentricidad (las órbitas no son circulares), como por ejemplo el estudiado en [**55, 33**]. La ecuación diferencial en [**55**] no es del tipo (0.1) pero puede reducirse a esta forma por un cambio adecuado en la variable independiente. Estas cuestiones no serán tratadas en esta memoria.

Esta memoria está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 exponemos las herramientas KAM que serán empleadas en el resto de la memoria con el objeto de situar al lector en el contexto y dificultades básicas de los problemas que serán estudiados. Básicamente aquí reúno algunas observaciones y ejemplos claves que he ido guardando en mi experiencia personal durante esta investigación y que aunque sencillas serán muy útiles para abordar la lectura de la memoria.

En el capítulo 2 estudiamos los problemas parabólicos ya descritos.

En el tercer capítulo se estudiarán los problemas elípticos. Las demostraciones de los resultados ejes, teoremas 3.22 y 3.23, se posponen para el final del capítulo.

Finalmente, en el capítulo 4 esbozamos algunas líneas de trabajo que han surgido como continuación de los resultados de esta memoria.

Inicio cada capítulo con una introducción y siempre emplearemos el símbolo "$\Box$"para indicar el final de una demostración.

No quiero dejar esta introducción sin expresar mi más profundo agradecimiento al profesor Ortega por ser un guía, un consejero y un amigo en estos años de mi estancia en este país. Su influencia ha sido decisiva para dejar el tímido gateo y comenzar a caminar con pasos modestos pero seguros en el apasionante mundo de la investigación. Esta memoria representa el fruto de este aprendizaje y la he escrito con mucho placer.

Confieso que mucho ha cambiado en mí desde que llegué, sobre todo porque me he habituado a pensar sobre ejemplos, a guiarme por modelos mecánicos, a no divagar tanto en cuestiones formales, en fin creo que soy ahora menos Bourbakista que antes.

También quiero agradecer al profesor Pedro Torres por llamar mi atención sobre los modelos de satélites, por sus sugerencias y por animarse a escribir un trabajo con este servidor.

CAPíTULO 1

Preliminares

1.1. Introduccción

Después de mucho cavilar, he decidido al fin incluir este capítulo de preliminares. A decir verdad, para el lector especializado la omisión de este capítulo no supondría ningún problema a la hora de abordar la lectura de este trabajo. Sin embargo lejos de cualquier pretensión de elaborar una memoria autocontenida, he decidido incluirlo por dos razones. En primer lugar, porque se exponen muy sucintamente algunos resultados fundamentales de la teoría K.A.M. discreta que serán usados indefectiblemente en el resto de la memoria, creando un eje teórico necesario para apreciar las dificultades básicas de los problemas que serán objeto de estudio. En segundo lugar, desearía que para el lector interesado y sin ninguna experiencia en el área, el presente capítulo proporcione un primer contacto de motivación con las técnicas de investigación de la misma.

Puede decirse que la Mecánica del siglo XX arranca con los trabajos de Poincaré. Su interés por el muy difícil problema de n cuerpos y especialmente por el problema restringido de tres cuerpos, le condujo a formular hermosos resultados de profunda naturaleza topológica y de no pocas repercusiones en Mecánica Celeste. La original idea de hacer secciones transversales al flujo en una variedad de nivel de energía, le llevó a considerar el estudio de la dinámica de homeomorfismos entre abiertos del plano que conservaban el área. Posteriormente Birkhoff puso rigor al trabajo de Poincaré y estudió en abstracto la dinámica de estas transformaciones. Las tres secciones siguientes recogen una pequeña parte de éstas y otras contribuciones que serán nuestras herramientas fundamentales.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 1.2 se exponen algunas nociones fundamentales sobre la estabilidad de puntos fijos de transformaciones en el plano que conservan el área. Se introduce también la notación compleja, muy útil en el contexto simpléctico y se define el espacio de gérmenes de transformaciones simplécticas que será usado repetidamente en el resto de la memoria. Tres ejemplos paradigmáticos son introducidos: el grupo lineal simpléctico y la tradicional clasificación dentro de éste; las transformaciones twist con 1 o más coeficientes y finalmente las transformaciones de Poincaré de sistemas Hamiltonianos periódicos planos, que constituyen el mecanismo de ida y vuelta entre la dinámica continua y la dinámica abstracta de transformaciones. Concretamente se establece la técnica de interpolación local hamiltoniana que será usada en el capítulo 2 de esta memoria. Al final de esta sección se discuten las dificultades básicas que surgen al aplicar los métodos clásicos de Lyapunov para el estudio de la estabilidad en el ambiente simpléctico.

En la sección 1.3 se estudia la forma normal de Birkhoff cerca de un punto fijo elíptico y se establece el celebrado teorema de estabilidad de los puntos fijos elípticos de tipo general. También se establece en esta sección una fórmula calculable del primer coeficiente de Birkhoff (coeficiente twist) en términos del 3-jet de la transformación. Esta fórmula será sumamente útil en el capítulo 3 de esta memoria para conseguir criterios de estabilidad en ecuaciones de Newton no autónomas. Seguidamente se describen algunos resultados de estabilidad para puntos fijos parabólicos debidos a C. Simó, D. Ahoronov y U. Elias y las relaciones entre los mismos. Personalmente considero que estos resultados son un punto de partida obligado para el estudio de los problemas resonantes y degenerados en sistemas hamiltonianos con grado y medio y 2 grados de libertad, así que he creído pertinente comentarlos aquí (el teorema de estabilidad de Simó para puntos fijos parabólicos no semi-simples será reobtenido de modo independiente y aplicado a una ecuación de Hill no lineal en el capítulo 2 de esta memoria).

La sección 1.4 está dedicada a establecer la versión precisa del célebre Teorema de la Curva Invariante de Moser o Teorema del Pequeño Twist que emplearemos en el resto de la memoria. Las difeomorfismos sobre anillos del cilindro aparecen aquí de modo natural cuando nos aproximamos al problema de estabilidad de un punto fijo elíptico de tipo general. Acompañamos también este resultado con una versión del teorema de diferenciabilidad respecto de parámetros (Proposición 1.8) que permite a menudo una aplicación bastante ágil del Teorema del Pequeño Twist tanto en problemas de estabilidad como en problemas de acotación de soluciones. Concretamente esta versión se empleará en la demostración del Teorema 2.15.

Finalmente la sección 1.5 introduce al lector en el problema de la estabilidad de soluciones periódicas elípticas en una ecuación de Newton no autónoma, vislumbrando algunas estrategias básicas de la metodología que se empleará en el capítulo 3 de esta memoria. Se aprovecha aquí la ocasión para introducir una de las nociones claves de este trabajo: las soluciones periódicas de tipo twist que son el análogo de los puntos fijos elípticos de tipo general. En esta sección se describe también el clásico método del pequeño parámetro, enfatizando que los resultados de esta memoria no suponen de ningún modo “estar cerca” de una ecuación autónoma.

Aunque no soy amigo de los prolegómenos en trabajos de investigación, espero sinceramente que la inclusión de un capítulo como éste, ayude al lector interesado y no especializado ante la paciente tarea de leer una memoria no exenta de veredas referenciales, y al lector especializado a una lectura más cómoda y conveniente.

1.2. Transformaciones que conservan el área

Sea X un espacio topológico y Ω, Ω_1 subconjuntos abiertos de X. Considérese un homeomorfismo $F : \Omega \to \Omega_1$ con un punto fijo $p \in \Omega \cap \Omega_1$.

Diremos que p es estable en el futuro en el sentido de Lyapunov si dado un entorno $\mathcal{V}$ de p, existe otro entorno $\mathcal{U}$ de p tal que las imágenes sucesivas $F^n(\mathcal{U})$ están bien definidas $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ e incluidas en $\mathcal{V}$. La noción de estable en el pasado se define de modo análogo substituyendo $\mathbb{Z}^+$ por $\mathbb{Z}^-$. El punto fijo p se dirá estable si es a la vez estable en el futuro y en el pasado. En esta memoria un punto fijo que no es estable será llamado inestable.

Dado un subconjunto A de Ω diremos que es positivamente invariante para F si $F(A) \subseteq A$. Un subconjunto A de Ω_1 se dirá negativamente invariante si es positivamente invariante para F^{-1}. Un subconjunto A de $\Omega \cap \Omega_1$ se dirá invariante si es positiva y negativamente invariante, es decir si $F(A) = A$. Es posible verificar que el tipo de estabilidad del punto fijo p está caracterizada en cada caso por la existencia de un sistema de entornos de p que son positivamente invariantes, negativamente invariantes o invariantes respectivamente. De esta suerte resulta claro que el concepto de estabilidad introducido es un invariante topológico, es decir que si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo sobre otro espacio topológico Y, entonces p es estable para F si y sólo si $q = h(p)$ es estable para $h \circ F \circ h^{-1} : h(\Omega) \to h(\Omega_1)$.

En esta memoria sólo nos limitaremos a estudiar el problema de la estabilidad en el plano; así que supondremos de ahora en adelante que $X = \mathbb{R}^2$. En este caso cada elemento de la base de entornos invariantes puede tomarse simplemente conexo mediante el proceso de rellenar agujeros (véase [**60**, sec. 25]). Para ser precisos, a cada entorno invariante $\mathcal{U}$ le asociamos el conjunto $\widehat{\mathcal{U}}$ obtenido al añadir a $\mathcal{U}$ las regiones interiores $R_i(\Gamma)$ de todas las curvas de Jordan Γ contenidas en $\mathcal{U}$. El conjunto $\widehat{\mathcal{U}}$ resulta un entorno invariante de p en virtud de que los homeomorfismos respetan los interiores de las curvas de Jordan i.e. $R_i(F(\Gamma)) = F(R_i(\Gamma))$. No es difícil ver que $\widehat{\mathcal{U}}$ es simplemente conexo (véase por ejemplo [**53**] para una demostración de esto).

En conclusión, la estabilidad de un punto fijo p de una transformación del plano, es equivalente a la existencia de un sistema de entornos abiertos en p invariantes y simplemente conexos.

Nótese que la frontera de cada uno de estos entornos es también un conjunto invariante. Birkhoff llamaba "curva" a la frontera de un dominio simplemente conexo y en este sentido decía que un punto fijo estable esta rodeado por “curvas” invariantes. La frontera de un dominio simplemente conexo puede ser muy complicada (véase la teoría de Caratheodory de los puntos frontera de un dominio [**35, 58**]) y sólo será una curva de Jordan si los puntos frontera son simples (véase [**58**, cap. 14] para definiciones y resultados). Un resultado de Birkhoff establece que bajo algunas condiciones geométricas que son naturales en Mecánica, estos conjuntos son efectivamente curvas de Jordan ([**40**, sección E, cap. X]). Sin embargo, existen ejemplos excepcionales como en [**21**], donde se muestra un difeomorfismo del plano que conserva el área y que tiene un sistema de entornos abiertos simplemente conexos e invariantes con frontera un pseudocírculo.

En la práctica, para probar que p es estable, será suficiente mostrar que todo entorno de p contiene una curva de Jordan Γ que verifica:

(i) $p \in R_i(\Gamma)$,
(ii) $F(\Gamma) = \Gamma$.

Como la estabilidad es invariante por conjugaciones y en particular por traslaciones, supondremos de ahora en adelante que $p = 0$. También resulta más conveniente representar $F(\xi)$, $\xi = (x, y)$ en las variables complejas z, $\overline{z}$ identificando

$$\xi \leftrightarrow z = x + iy, \;\; F(\xi) \leftrightarrow F(z, \overline{z}).$$

Cuando F es regular, esto proporciona una expresión más sintética para los desarrollos de Taylor alrededor del punto fijo $z = 0$ mediante las derivaciones formales

$$F_z = \frac{1}{2}(F_x - iF_y), \;\; F_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(F_x + iF_y). \tag{1.6}$$

Las derivaciones de orden superior $\frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \overline{z}^j} F$ se definen recursivamente aplicando (1.6). Si F es de clase C^n, entonces F posee el siguiente desarrollo en notación compleja

$$F(z, \overline{z}) = \sum_{m=1,\ldots,n} \; \sum_{i=0,\ldots,m} a_{mi} z^{m-i} \overline{z}^i + O(|z|^{n+1}), \; z \to 0$$

donde

$$a_{mi} = \frac{1}{i!(m-i)!} \frac{\partial^m F}{\partial z^{m-i} \partial \overline{z}^i}(0).$$

El polinomio de arriba coincide con el desarrollo n-ésimo de Taylor de F alrededor de $z = 0$.

El teorema de Liouville nos dice que los homeomorfismos del flujo de un sistema hamiltoniano deben conservar la medida de Lebesgue. En el caso de sistemas con 1 grado y medio de libertad (i.e. periódicos con 1 grado de libertad) esto significa simplemente que los homeomorfismos del flujo conservan el área y la orientación. Birkhoff estudió sistemáticamente la dinámica de estas transformaciones y especialmente el problema de la estabilidad de un punto fijo ([**11**]).

Diremos que F conserva el área si preserva la orientación de $\mathbb{R}^2$ y para todo subconjunto medible A de Ω se tiene que $F(A)$ es medible y $\nu(F(A)) = \nu(A)$. Aquí ν denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. Cuando F es diferenciable esta definición es equivalente a la condición

$$\det F'(z) = 1,\ \forall z \in \Omega.$$

Para una transformación que conserva el área, todas las definiciones de estabilidad dadas al principio de esta sección son equivalentes. Esta afirmación es una clara consecuencia del siguiente resultado aplicado a F y F^{-1}:

Si G es un homeomorfismo que preserva área y $\mathcal{U}$ es un abierto de medida finita tal que $G(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ entonces $G(\mathbf{int}\,\overline{\mathcal{U}}) = \mathbf{int}\,\overline{\mathcal{U}}$.

Para probar este resultado será suficiente demostrar que $G(\overline{\mathcal{U}}) = \overline{\mathcal{U}}$, en virtud de que G es un homeomorfismo y conmuta con el operador **int**. Nótese primero que $G(\overline{\mathcal{U}}) \subseteq \overline{\mathcal{U}}$ pues G es un homeomorfismo. Si fuera $\mathcal{U} \setminus G(\overline{\mathcal{U}}) \neq \varnothing$ entonces $\nu(\mathcal{U} \setminus G(\overline{\mathcal{U}})) > 0$ por ser un conjunto abierto. De la aditividad de la medida se tiene que

$$\nu(G(\overline{\mathcal{U}})) = \nu(\overline{\mathcal{U}}) = \nu(\overline{\mathcal{U}} \setminus G(\overline{\mathcal{U}})) + \nu(G(\overline{\mathcal{U}})),$$

lo que nos conduce a una contradicción. Luego $\mathcal{U} \subseteq G(\overline{\mathcal{U}})$ y esto finaliza la prueba de la afirmación.

El estudio de la estabilidad sólo involucra el comportamiento de F en un entorno de $z = 0$. De este modo para cada $m = 1, 2, \cdots, \infty, \omega$, introducimos la clase $\mathcal{A}^m$ de los gérmenes en cero de transformaciones

$$F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ z \mapsto F(z, \overline{z})$$

definidas en algún entorno abierto U de $0 \in \mathbb{R}^2$ (el conjunto U depende de F) y tal que

(i) $F(0) = 0$
(ii) $F \in C^m(U, \mathbb{R}^2)$
(iii) $|F_z|^2 - |F_{\overline{z}}|^2 = 1$ en todos los puntos de U.

La condición (iii) expresa la propiedad de conservar el área escrita en notación compleja. A la aplicaciones en $\mathcal{A}^m$ se les suele llamar canónicas o simplécticas porque conservan la forma simpléctica natural de $\mathbb{R}^2$, a saber, la forma $dx \wedge dy$.

EJEMPLO 1.1. El grupo Simpléctico $Sp(\mathbb{R}^2)$.
Las aplicaciones lineales simplécticas

$$Sp(\mathbb{R}^2) = \{A \in Gl(\mathbb{R}^2) : \det A = 1\}$$

constituyen la clase más simple de transformaciones en $\mathcal{A}^m$. Este conjunto puede identificarse con las polinomios de primer grado

$$F(z, \overline{z}) = az + b\overline{z} :\ |a|^2 - |b|^2 = 1;$$

y puede demostrarse fácilmente que $Sp(\mathbb{R}^2)$ es una variedad diferenciable 3-dimensional que con el producto habitual pasa a ser un grupo de Lie.

Como ejemplo tómese la rotación de ángulo θ en sentido contrario a las agujas del reloj, $R_\lambda(z) = \lambda z$ con $\lambda = \exp i\theta$. Observe que $R_\lambda \in \mathcal{A}^\omega$ y es estable en $z = 0$ puesto que las circunferencias $|z| = constante$ son curvas cerradas e invariantes de la aplicación.

¿Qué podemos decir de la estabilidad de una A general en el grupo simpléctico?. Como los autovalores λ_1, λ_2 de A satisfacen $\lambda_1\lambda_2 = 1$, sólo se pueden presentar tres casos:

- A es hiperbólica: $\lambda_i \in \mathbb{R}, |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$
- A es parabólica : $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$
- A es eliptíca : $|\lambda_i| = 1, \lambda_i \neq \pm 1$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

La matriz A es conjugada por un cambio lineal de variables a su forma canónica de Jordan $\mathcal{N}$. En el caso hiperbólico, $\mathcal{N}$ es la matriz diagonal $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, que es evidentemente inestable. Por otra parte en el caso parabólico pueden darse dos posibilidades:
i) $\mathcal{N} = \pm I$ que es estable ó
ii) $\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ que es inestable.

Finalmente en el caso elíptico puede tomarse indistintamente $\mathcal{N} = R_\lambda$ ó $R_{\overline{\lambda}}$; sin embargo A será conjugada en el grupo simpléctico a sólo una de estas dos rotaciones. En efecto, la identidad $B^{-1}R_\lambda B = R_{\overline{\lambda}}$ implica que $\det B < 0$. En consecuencia, toda aplicación elíptica en $Sp(\mathbb{R}^2)$ es estable y su conjunto de curvas cerradas e invariantes está formado por elipses concéntricas que folian el plano y tienen la misma frecuencia de rotación bajo A. Esta relación constante entre la amplitud y la frecuencia es un hecho característico del caso lineal. El siguiente ejemplo nos muestra la situación típica de una relación biunívoca amplitud-frecuencia.

Ejemplo 1.2. Una aplicación Twist.

Dados ω, β números reales con $\beta \neq 0$, definimos $T_{\omega,\beta}$ por la fórmula

$$T_{\omega,\beta}(z, \overline{z}) = \exp[i(\omega + \beta|z|^2)]z, \; z \in \mathbb{C} \tag{1.7}$$

Un cálculo sencillo muestra que $|\partial_z T_{\omega,\beta}|^2 - |\partial_{\overline{z}} T_{\omega,\beta}|^2 = 1$, luego $T_{\omega,\beta} \in \mathcal{A}^\omega$.

La transformación $T_{\omega,\beta}$ es un ejemplo de las llamadas transformaciones twist. Es evidente que las circunferencias $C_r : \frac{1}{2}|z|^2 = r$ son curvas invariantes de la aplicación twist, por lo que $z = 0$ es un punto fijo estable de $T_{\omega,\beta}$. Por otra parte, la restricción de $T_{\omega,\beta}$ sobre cada circunferencia C_r es la rotación de ángulo $\alpha(r) = \omega + 2\beta r$. Nótese que el ángulo de rotación α es una función estrictamente monótona de la amplitud r puesto que $\beta \neq 0$. Por ejemplo, si $\beta > 0$ entonces las circunferencias van rotando en sentido antihorario con mayor rapidez a medida que nos alejamos del origen. En virtud de la variación de α con r, es inmediato comprobar la existencia de puntos periódicos de período arbitrario para $T_{\omega,\beta}$. Esto ocurre cuando α pasa por valores racionales.

Si α pasa por valores irracionales, encontramos una dinámica de tipo irracional sobre la circunferencia invariante correspondiente, es decir, las órbitas llenan densamente la circunferencia invariante.

Sea $H(z,\overline{z}) = \frac{1}{2}\omega|z|^2 + \frac{1}{4}\beta|z|^4$ y consideremos el sistema Hamiltoniano asociado, que en forma compleja puede escribirse como

$$\dot{z} = 2iH_{\overline{z}}(z,\overline{z}). \tag{1.8}$$

Es inmediato verificar directamente que

$$\phi(t,z,\overline{z}) = \exp[it(\omega + \beta|z|^2)]z$$

es la solución general de (1.8). Entonces $T_{\omega,\beta}$ se realiza como la aplicación a tiempo $t = 1$ del flujo del sistema Hamiltoniano (1.8).

Se obtienen comportamientos similares sustituyendo en la definición (1.7) el argumento $\omega + \beta|z|^2$ por $\alpha(|z|^2)$, donde $\alpha = \alpha(r)$, $r \geq 0$ es una función estrictamente monótona en un entorno de $r = 0$. Por ejemplo, tomando $\alpha(r) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \beta_i r^i$ con $q \in \mathbb{N}$ y $\beta_i \in \mathbb{R}$ no todos nulos[1], obtenemos la siguiente transformación twist que incluye a (1.7):

$$T_{\omega,\beta_1,\ldots,\beta_q}(z,\overline{z}) = \exp i(\omega + \sum_{i=1}^{q} \beta_i |z|^{2i})z,\ z \in \mathbb{C} \tag{1.9}$$

Como antes, esta transformación es estable en $z = 0$, de hecho esta transformación es un prototipo de las transformaciones estables como veremos más adelante. Lo que se pretende es reducir por cambios canónicos de variables una transformación simpléctica a la forma (1.9) o al menos a una perturbación de esta en un entorno del origen (véase la próxima sección).

Ejemplo 1.3. Aplicaciones de Poincaré.

Los sistema Hamiltonianos son el ambiente natural donde surgen las aplicaciones que conservan área. Sea $H \in C^{0,\infty}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \Omega)$, donde Ω es un abierto del plano que contiene al origen. Esta notación significa que H es una función a valores reales, continua y T-periódica en la primera variable e infinitamente diferenciable en las restantes. Considérese el sistema Hamiltoniano de ecuaciones

$$\dot{z} = J\nabla_z H(t,z), \tag{1.10}$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supóngase que $z \equiv 0$ es una posición de equilibrio del sistema (1.10). Denotemos por $\phi = \phi(t,z)$ a la solución general de (1.10). Por el teorema de dependencia continua respecto de condiciones iniciales, se sabe que la aplicación $z \mapsto \phi_t(z) = \phi(t,z)$ está bien definida en un entorno del origen, para cada $0 < t \leq T$. La transformación $P = \phi_T$ es

[1] Esta función es monótona en un entorno de $r = 0$.

llamada la aplicación de periodos o aplicación de Poincaré asociada a (1.10). Como $z \equiv 0$ es un equilibrio entonces $P(0) = 0$. El teorema de Liouville nos dice que $P \in \mathcal{A}^\infty$ y la estabilidad del punto fijo $z = 0$ es equivalente a la estabilidad del equilibrio de (1.10).

Recíprocamente, dada $F \in \mathcal{A}^\infty$, es posible encontrar un Hamiltoniano T-periódico H tal que $F = \phi_T$. Este es el conocido problema local de interpolación Hamiltoniana. Este problema es equivalente a la existencia de una isotopía de transformaciones en $\mathcal{A}^\infty$ conectando F con la transformación identidad I (veáse [**40**, cap. V]). El hamiltoniano H es llamado el hamiltoniano interpolante de F.

Lo anterior muestra una equivalencia local entre la dinámica de flujos Hamiltonianos y la dinámica discreta de transformaciones que conservan el área, lo cual permite tratar un problema desde el punto de vista que resulte más conveniente. El salto a un lenguaje de flujos para tratar un problema discreto, permite en algunos casos ahorrar muchos cálculos y estimaciones. Por ejemplo, en el capítulo 3 utilizaremos el lenguaje de los flujos para demostrar un teorema de C. Simó sobre puntos fijos parabólicos ([**62**]).

Para finalizar esta sección, expondremos las dificultades que surgen al aplicar los resultados clásicos de Lyapunov, en el estudio de la estabilidad de puntos fijos de transformaciónes que conservan el área.

Dada $F \in \mathcal{A}^m$ se tiene que $F'(0) \in Sp(\mathbb{R}^2)$ y por lo visto en el ejemplo 1.1, el radio espectral de $F'(0)$ es igual a 1 en los casos elíptico y parabólico y mayor que 1 en el caso hiperbólico . Del primer método de Lyapunov se infiere que $z = 0$ es inestable si $F'(0)$ es hiperbólica, mientras que en los casos elíptico y parabólico el primer método de Lyapunov no decide la estabilidad. En conclusión, el problema de la estabilidad de un punto fijo elíptico o parabólico tiene carácter no lineal y es necesario tener en cuenta el efecto de los términos no lineales.

Sea $F : \Omega \to \Omega_1$ un homeomorfismo con $F(0) = 0$ y $V : \Omega \cup \Omega_1 \to \mathbb{R}$ una función continua y no constante. Se dice que V es una integral primera de F si

$$V(F(x)) = V(x), \, \forall x \in \Omega.$$

Se dice que V es una función de Lyapunov si

(i) $V(x) > 0 \; \forall x \in \Omega - \{0\}, \; V(0) = 0$
(ii) $V(F(x)) \leq V(x), \, \forall x \in \Omega.$

El segundo método de Lyapunov establece que si existe una función de Lyapunov entonces el equilibrio $z = 0$ es estable. En particular si F admite una integral que satisface (i) entonces $z = 0$ es estable. Un ejemplo es la aplicación twist $T_{\omega,\beta}$, que tiene por integral primera al Hamiltoniano $H(z) = \frac{1}{2}\omega|z|^2 + \frac{1}{4}\beta|z|^4$ (véase ejemplo 1.2).

Puede demostrarse que si $F \in \mathcal{A}^m$ es estable en $z = 0$ entonces toda función de Lyapunov es una integral primera. En efecto, como $z = 0$ es estable podemos tomar un entorno abierto $\mathcal{U}$ de 0 tal que $F(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. El teorema de recurrencia de Poincaré establece que para casi todo punto $x \in \mathcal{U}$, existe una sucesión parcial de enteros positivos $n_k \to \infty$ tal que $F^{n_k}(x) \to x$, $k \to \infty$. Entonces si V es una función de Lyapunov se tiene que

$$V(x) \geq V(F^n(x)) \searrow L,\ n \to \infty,$$

para algún número real L. Por otra parte

$$V(F^{n_k}(x)) \searrow V(x),\ k \to \infty,$$

así que

$$V(F^n(x)) = V(x),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En conclusión, la igualdad $V(F(x)) = F(x)$ es válida casi por doquier en $\mathcal{U}$. Como V es continua la igualdad es válida en todos los puntos de $\mathcal{U}$.

Este resultado tiene el valor de mostrar que el segundo método de Lyapunov no puede ser empleado para un difeomorfismo génerico que conserva el área, en virtud de que generalmente no existen integrales primeras definidas positivas en torno a un punto fijo estable. En efecto, genéricamente ocurre la siguiente situación cuando $z = 0$ es estable ([**11**, pág. 231], véase también el trabajo más reciente de Mather [**37**]):

El origen está rodeado por un conjunto Cantoriano de curvas de Jordan invariantes $\Gamma_i \to 0$ y la dinámica en cada Γ_i es conjugada a una rotación irracional sobre la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$. Esto implica que todas las órbitas en Γ_i son densas. De este modo cualquier integral primera debe ser a la fuerza constante sobre cada Γ_i. En las regiones comprendidas entre dos curvas invariantes consecutivas (llamadas zonas de inestabilidad por Birkhoff) aparecen puntos x tal que su órbita “conecta ” estas fronteras, es decir que los conjuntos alfa limite $L_\alpha(x)$ y omega limite $L_\omega(x)$ intersectan a la primera y segunda curva respectivamente. En consecuencia, si existiese una integral primera verificando (i) en la definición anterior, tomaría el valor cero en cada Γ_i, lo cual es absurdo.

1.3. La Forma Normal cerca de un punto fijo elíptico

La teoría de formas normales puede verse como el ánalogo no lineal de las formas canónicas de Jordan. Esta teoría ha sido intensa y ampliamente estudiada tanto para campos como para transformaciones en dimensiones más altas y con más grados de libertad (véase por ejemplo [**40, 60, 11, 9**]). Poincaré ya empleaba este método para simplificar algunos sistemas hamiltonianos en sus estudios sobre el problema de n-cuerpos ([**56**]). Siguiendo las ideas de Poincaré, Birkhoff desarrolló un método formal para reducción a forma normal en torno a puntos fijos y posiciones de equilibrio ([**11**]).

Sea F en $\mathcal{A}^m$ con $m \geq 3$. El punto fijo $z = 0$ es llamado elíptico si $F'(0)$ es elíptica (veáse el ejemplo 1.1).

La idea de Birkhoff era reducir F a través de cambios canónicos formales de variables[2] a una transformación twist de la forma (1.9), pues la dinámica de estas últimas era en cierto sentido el prototipo de las situaciones mecánicas integrables. El hecho general es que las series formales que definen estos cambios de variable divergen, y en general no es posible tal reducción. La razón de fondo es que sólo un número limitado de ejemplos son integrables en mecánica. Sin embargo, es posible alcanzar un contacto de orden superior con los prototipos "integrables" (1.9). Este es el fin de la teoría de formas normales en torno a un punto fijo elíptico.

Como ya se ha discutido anteriormente, la estabilidad de un punto fijo elíptico es neutral al aplicar linealización, por lo que se hace necesario tener en cuenta los términos no lineales en el desarrollo de Taylor alrededor de $z = 0$.

Por lo visto en la sección anterior, existe un cambio lineal simpléctico de variables Q tal que

$$Q^{-1} \circ F \circ Q\,(z, \overline{z}) = \lambda z + \cdots\ ,$$

donde λ es uno de los autovalores de $F'(0)$. Bajo ciertas condiciones de "no resonancia" sobre λ, que precisaremos más tarde, los términos no lineales hasta el orden m en el desarrollo anterior, pueden reducirse a la forma más simple posible mediante cambios canónicos de variables. La idea básica es eliminar progresivamente "la mayor cantidad permitida" de términos en los polinomios homogéneos de grado $k = 2, \ldots, m$ del desarrollo de Taylor, a través de un sucesión finita de cambios canónicos de variables. El polinomio obtenido al final del proceso es lo que se conoce como la forma normal de Birkhoff.

El éxito de este proceso de reducción depende fuertemente de algunas propiedades aritméticas del multiplicador λ. En efecto, empleando el método desarrollado en [**60**, Sección 23], puede demostrarse que si para algún $l \in \mathbb{N} : 3 \leq l \leq m$ se verifican las siguientes condiciones de no resonancia

$$\lambda^s \neq 1,\ \ s = 1, \ldots l + 1, \tag{1.11}$$

entonces existe un cambio simpléctico y analítico de variables Ψ tal que

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi = \lambda(z + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i z^{i+1} \overline{z}^i) + O(|z|^{l+1}),\ \ z \to 0 \tag{1.12}$$

donde $q = [\frac{l-1}{2}]$, $\gamma_1, \ldots \gamma_q \in \mathbb{C}$ y $\gamma_1 = i\beta$ con $\beta \in \mathbb{R}$.

Una propiedad central del l-jet anterior es que conmuta con rotaciones. De hecho, todo polinomio en $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ de grado l que conmuta con rotaciones y que es el l-jet de una transformación que conserva el área tiene la forma anterior.

[2] Es decir, series formales en las variables cumpliendo la condición simpléctica. El problema posterior consistía en investigar la convergencia de estas series.

También puede demostrarse la siguiente propiedad clave:
Si para otra transformación $\Psi' \in \mathcal{A}^\omega$ tenemos que

$$\Psi'^{-1} \circ F \circ \Psi'(z, \overline{z}) = \lambda(z + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i' z^{i+1}\overline{z}^i) + O(|z|^{l+1})$$

entonces $\gamma_i' = \gamma_i \ \forall i$.

Esta propiedad expresa la unicidad de los coeficientes de la forma normal frente a cambios simplécticos de variables. El polinomio en (1.12) lo llamaremos la forma normal de Birkhoff de grado l.

Veamos ahora la relación que existe entre la forma normal (1.12) y las transformaciones twist. En primer lugar nótese que las transformaciones twist $T_{\theta,\beta_1,\ldots,\beta_q}$ dadas por (1.9) conmutan con rotaciones, en consecuencia su l-jet tiene también la forma (1.12) para ciertos $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ determinados en función de los β_i. Puede demostrarse que la relación entre los γ_i y los β_i es inversible. Esto implica que también tenemos la situación recíproca, i.e. la forma normal de Birkhoff de F de grado l es el l-jet de la aplicación twist $T_{\theta,\beta_1,\ldots,\beta_q}$ dada por (1.9) para ciertos números reales $\theta, \beta_1, \ldots, \beta_q$ con $\lambda = e^{i\theta}$ y $\gamma_1 = i\beta_1$. En conclusión, $\exists \Psi \in \mathcal{A}^\omega$ tal que

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi = T_{\omega,\beta_1,\ldots,\beta_q} + O(|z|^{l+1}),\ z \to 0, \tag{1.13}$$

y esto dice que F puede reducirse cerca del origen a una perturbación de una aplicación twist, siempre que λ satisfaga las condiciones de no resonancia (1.11) para algún $l \in \mathbb{N} : 3 \leq l \leq m$.

La reducción (1.13) es conocida clásicamente como la Forma Normal de Birkhoff (aunque nosotros acuñabamos este nombre para referirnos a su l-jet).

Los coeficientes β_i son llamados coeficientes twist o coeficientes de Birkhoff y heredan también la propiedad de unicidad. Escribiremos $\beta_i = \beta_i(F)$ para indicar la dependencia con F.

En esta memoria sólo emplearemos la Forma Normal de Birkhoff de grado 3. A continuación se establece la versión particular del resultado de Birkhoff para $l = 3$.

Proposición 1.4. *Sea $F \in \mathcal{A}^3$ tal que $F'(0)$ es conjugada en el grupo simpléctico a R_λ, $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq \pm 1$. Si $\lambda^n \neq 1$ para $n = 3, 4$ entonces existe $\Phi \in \mathcal{A}^\omega$ tal que*

$$\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi(z, \overline{z}) = \lambda(z + i\beta z^2 \overline{z} + \cdots), \tag{1.14}$$

donde los puntos suspensivos indican un término de orden $O(|z|^4)$, cuando $z \to 0$ y $\beta = \beta(F)$ es un número real. Más aún si $\Psi \in \mathcal{A}^\infty$ entonces

$$\beta(\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi) = \beta(F). \tag{1.15}$$

Esta proposición es establecida en [**60**, sección 23]. Véase también [**44, 7, 8**]. Para una demostración de (1.15) puede verse [**34**].

Birkhoff llamaba a un punto fijo elíptico sin resonancias hasta un orden dado[3] (en nuestro caso $\lambda^n \neq 1,\ n = 3, 4$) y tal que no todos los coeficientes twist $\beta_i(F)$ son nulos, un punto fijo elíptico de tipo general y llegó a formular aunque sin demostrarlo que todo punto fijo elíptico de tipo general es estable ([**11**]). Hubo que esperar hasta los años 60 para una demostración completa de este resultado a cargo de J. Moser. Para ello Moser utiliza su célebre Teorema de la Curva Invariante el cual requería un gran número de derivadas para F ([**42**]). También casi al mismo tiempo Arnold consigue una demostración en el caso analítico suponiendo que no existen resonancias de ningún orden [**6**]. Más tarde Russmann relaja el grado de diferenciabilidad a clase C^5 ([**59**]) y posteriormente Hermann afina la clase de diferenciabilidad a $C^{3,\alpha}$ ([**22**]).

Enunciaremos a continuación el resultado fundamental de estabilidad de un punto fijo elíptico de tipo general ([**44**, Teorema 2.13])

TEOREMA 1.5. *Sea $F \in \mathcal{A}^4$ en las condiciones de la proposición 1.4. Entonces $z = 0$ es estable si*

$$\beta(F) \neq 0 \tag{1.16}$$

NOTA 1.1. El coeficiente β depende de los términos de F hasta el tercer orden, así que este teorema puede ser considerado como un método de la tercera aproximación en teoría de la estabilidad.

NOTA 1.2. En [**5**] se exhibe un difeomorfismo $F \in \mathcal{A}^\infty$ del disco unidad $|z| \leq 1$ en sí mismo, con $\beta(F) = 0$ y tal que $z = 0$ es elíptico e inestable[4]. Esto muestra que una condición como (1.16) es de hecho necesaria para la estabilidad. Por otra parte, no resulta difícil construir ejemplos de puntos fijos elípticos inestables con λ raíz n-ésima de la unidad para cualquier $n \in \mathbb{N}$, mostrando que el resto de las condiciones del teorema anterior son también necesarias. Por ejemplo, tómese el hamiltoniano $H(z, \overline{z}) = z^n + \overline{z}^n,\ n \geq 3$ y sea $F = R_\lambda \circ P$ con $\lambda = \exp \frac{2\pi i}{n}$ y P la aplicación de Poincaré del sistema hamiltoniano correspondiente. Entonces

$$F(z, \overline{z}) = \lambda(z + 2inH_{\overline{z}}) + \cdots .$$

Aplicando [**51**, Proposición 4.1] a F^n resulta que F es inestable en $z = 0$. Ejemplos más complicados se construyen en [**60**].

Cuando $F'(0)$ está en forma canónica es posible obtener una fórmula calculable para el coeficiente twist $\beta(F)$ ([**15, 52**]). La siguiente proposición se empleará en el capítulo 3 de esta memoria.

[3]En realidad Birkhoff eliminaba todas las resonancias posibles

[4]F se construye ergódica, es decir, que carece de subconjuntos invariantes no triviales de medida positiva

PROPOSICIÓN 1.6. *En las condiciones de la proposición 1.4, supóngase que F tiene el siguiente desarrollo de Taylor*

$$F(z, \overline{z}) = \lambda z + F_2(z, \overline{z}) + F_3(z, \overline{z}) + \cdots$$

con

$$\lambda = e^{-i\theta}, \qquad F_2(z, \overline{z}) = Az^2 + Bz\overline{z} + C\overline{z}^2,$$

$$F_3(z, \overline{z}) = Mz^3 + Nz^2\overline{z} + Pz\overline{z}^2 + Q\overline{z}^3.$$

Entonces se verifica la siguiente fórmula

$$\beta = \Im(\overline{\lambda}N) + \frac{3\sin\theta}{1-\cos\theta}|A|^2 + \frac{\sin 3\theta}{1-\cos 3\theta}|C|^2. \tag{1.17}$$

NOTA 1.3. Esta proposición es establecida en [**15**] y una demostración puede verse en [**50**]. Una fórmula similar es obtenida en [**23**] para difeomorfismos arbitrarios del plano en el contexto de las bifurcaciones de Hopf. También Moeckel en [**41**] obtiene una fórmula para el coeficiente twist de una aplicación simpléctica, pero supone adicionalmente que $|A| = |C|$, condición que verifican los polinomios simplécticos de segundo grado pero no un difeomorfismo simpléctico genérico.

El teorema de estabilidad 1.5 se deriva a partir del célebre Teorema Twist de Moser que veremos en la próxima sección. Cuando las condiciones de no resonancia en el teorema 1.5 no se verifican entonces el Teorema Twist de Moser no puede aplicarse directamente a menos que dispongamos de alguna forma normal adecuada. El estudio de formas normales en presencia de resonancias fuertes constituye también un capítulo más o menos clásico desde los trabajos de Birkhoff y pueden encontrarse por ejemplo en [**40**, capítulo VII] y [**39, 38**] (véase también el artículo más reciente [**14**]). La forma normal empleada conduce a un criterio de estabilidad en cada caso ([**39, 52**]). En [**52**] el autor en un intento de resumir estos criterios comete un error. En la proposición 2.1 afirma que cuando el multiplicador de $F'(0)$ es $\lambda = \pm\exp(2\pi i/3)$ entonces la transformación puede reducirse a la siguiente forma normal mediante un cambio canónico de coordenadas

$$N(z, \overline{z}) = \lambda[z + l\overline{z}^2 + i\beta|z|^2 z + \cdots],$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ y $l \in \mathbb{C}$. Luego, en la proposición 2.2 el autor elabora un criterio de estabilidad en términos de los números β y l. Un estudio más cercano al proceso de reducción muestra que esto es sólo posible si $F_{\overline{z}\,\overline{z}}(0) = 0$ y en tal caso $l = 0$ en la fórmula anterior. En general tal reducción sería posible si no se le impone al cambio de coordenadas que sea simpléctico. Si el cambio de coordenadas es canónico entonces N preserva área y de aquí es inmediato verificar que $l = 0$. Esto tiene fácil arreglo escribiendo el criterio de estabilidad (inestabilidad) de la siguiente manera:

i) Si $F_{\bar{z}\bar{z}}(0) = 0$ y $\beta \neq 0$ entonces $z = 0$ es estable
ii) Si $F_{\bar{z}\bar{z}}(0) \neq 0$ entonces $z = 0$ es inestable.

La afirmación (i) es consecuencia del Teorema Twist de Moser (la demostración es la misma que en el caso sin resonancias: Teorema 1.5). La afirmación (ii) es una clara consecuencia de un criterio de inestabilidad formulado en [**60**, sección 25] o se puede deducir directamente a partir un criterio de inestabilidad de Levi-Civita [**27**].

Por otra parte, el caso parabólico o degenerado merece especial atención. Recordemos que $z = 0$ es un punto fijo parabólico si $F'(0)$ es una matriz parabólica. En tal caso los multiplicadores son raíces dobles $\lambda = \pm 1$. Pueden darse 2 casos:

i) Caso parabólico diagonal o estable (p.e.): La forma canónica real de Jordan de $F'(0)$ es $\pm I$.
ii) Caso parabólico no-diagonal o inestable (p.i) : La forma canónica real de Jordan de $F'(0)$ es

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

El caso $\lambda = -1$ se reduce al caso $\lambda = 1$ considerando F^2. A principios del siglo XX, ya Levi-Civita [**27**] estudió estos casos obteniendo algunos criterios de inestabilidad. También en [**32**] aparecen criterios de inestabilidad para un difeomorfismo F que no necesariamente conserva el área. Estos criterios son extendidos en [**62**] para F simpléctica. Los criterios de estabilidad aparecen mucho después en los 80's con los trabajos de C. Simó [**61, 62**] y de D. Aharonov y U. Elias [**1**].

Los resultados en [**62, 1**] se refieren al caso p.e. y son muy útiles a la hora de estudiar un caso elíptico resonante, i.e., $\lambda^k = 1$, $\lambda \neq \pm 1$, pues simplemente se aplican los criterios a la transformación F^k. En [**61**] el autor estudia el caso p.i. e implementa una forma normal que está inspirada en ciertos esquemas en diferencias. La estabilidad se decide por el término dominante de esta forma normal ((véase el Teorema de [**61**]).

Simó caracteriza la estabilidad de $z = 0$ en términos de la función generatriz de F en el caso p.e. y en términos de la función generatriz de la forma normal de F en el caso p.i.. Más precisamente, $z = 0$ es estable si y sólo si la función generatriz con la parte que genera la identidad suprimida tiene un extremo estricto en $z = 0$. En el caso p.i. esta condición es equivalente a las condiciones impuestas en [**61**] sobre el término dominante de la forma normal de Simó.

En [**1**] los autores emplean las mismas ideas de [**62**], pero con la diferencia que el hamiltoniano autónomo que interpola a F hasta cierto orden no es la propia función generatriz, sino un hamiltoniano más explícito en términos del primer jet no lineal de F. De este modo las condiciones de estabilidad pueden verificarse fácilmente en la práctica[5].

Quisiera resaltar también que en [**40**, capítulo VII, sección E.5] el autor emplea el método de las transformadas de Lie, para reducir el hamiltoniano interpolante de F, a un hamiltoniano con parte autónoma correspondiendo a una ecuación de Duffing de la forma

$$\ddot{x} + g(x) = 0,$$

con $g(0) = g'(0) = 0$. Precisamente usando esta reducción es posible demostrar de forma independiente el teorema de estabilidad de Simó para puntos fijos p.i. mencionado antes ([**61**]). Esto se hará en el capítulo 2 de esta memoria donde se implementará una forma normal para el hamiltoniano interpolante con una g bastante simple.

1.4. El Teorema de la Curva Invariante

El teorema de la Curva Invariante también llamado teorema del pequeño twist de Moser, está referido a difeomorfismos sobre regiones anulares y fué diseñado por Moser para probar la estabilidad de los puntos fijos elípticos de tipo general (véase en particular [**43**]).

En esta sección $\mathbb{T}$ denotará el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Las coordenadas más naturales para las transformaciones twist (1.9) son las coordenadas polares y de hecho resultan muy convenientes al estudiar perturbaciones de la forma (1.13). Introducimos en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ coordenadas polares canónicas por:

$$x = (2r)^{\frac{1}{2}} \cos\theta,\ y = (2r)^{\frac{1}{2}} \sin\theta,\ \theta \equiv \theta + 2\pi,\ r > 0.$$

Este cambio de variables puede verse como una transformación

$$\Psi : C_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\},$$

donde $C_+ = \mathbb{T} \times (0, +\infty)$ es el semicilindro. De hecho Ψ es un difeomorfismo simpléctico.

Las transformaciones twist $T_{\omega,\beta}$ definidas en el ejemplo 1.2 quedan expresadas en estas variables de una forma muy simple

$$T_{\omega,\beta} : \qquad \theta_1 = \theta + \omega + \beta r, \qquad r_1 = r. \tag{1.18}$$

La transformación anterior es de hecho un difeomorfismo del semicilindro C_+ en sí mismo que preserva el elemento de área $d\theta \wedge dr$.

Consideremos $F \in \mathcal{A}^4$ con $z = 0$ elíptico y sin resonancias fuertes. Recordemos que F salvo un cambio canónico de coordenadas puede ponerse en la forma (1.13) con $l = 3$ y $q = 1$. Así en coordenadas polares canónicas la forma normal de Birkhoff de F puede expresarse como una perturbación de (1.18)

$$M : \theta_1 = \theta + \omega + \beta r + \cdots,\ r_1 = r + \cdots, \tag{1.19}$$

[5]Véase [**51**] para una aplicación de estos resultados a ecuaciones de Hill no lineales

donde los puntos suspensivos indican términos de orden $O(r^2), r \to 0$, $\beta = \beta(F)$ es el primer coeficiente de Birkhoff y ω es un argumento del multiplicador característico λ.

Para demostrar la estabilidad del origen cuando $\beta \neq 0$, deberán buscarse curvas invariantes para F en cada anillo $\epsilon < r < 2\epsilon$ con $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Haciendo el cambio de escala $r = \epsilon\rho,\ \rho \in [1,2]$, la transformación anterior se reduce a una familia de difeomorfismos sobre el cilindro, dependiendo de un parámetro pequeño y definidas sobre el anillo fijo $1 \leq \rho \leq 2$:

$$M_\epsilon : \theta_1 = \theta + \omega + \epsilon\beta\rho + O(\epsilon^2),\ \ \rho_1 = \rho + O(\epsilon^2). \tag{1.20}$$

Entonces el problema de estabilidad se reduce a buscar curvas invariantes de la transformación anterior en el anillo $1 \leq \rho \leq 2$ para ϵ pequeño. Naturalmente, estas curvas invariantes deben tener una propiedad topológica especial: no pueden ser nulo-homotópicas en el cilindro.

La transformación (1.20) con términos de error suprimidos es lo que se conoce como un "pequeño twist" y tiene todas las circunferencias $\rho = const.$ como curvas invariantes. El teorema del pequeño twist de Moser da condiciones sobre la clase donde se perturba, para garantizar la persistencia de algunas de estas circunferencias invariantes cuando ϵ es suficientemente pequeño. Las curvas invariantes que sobreviven estarán próximas a circunferencias. Existen varias versiones de este teorema, la versión original puede verse en [**43, 42, 44**]. Nosotros daremos aquí una versión que es muy cómoda para las aplicaciones y que emplearemos en el capítulo 2 de esta memoria, pero antes haremos una pocas definiciones.

Sea $C = \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ el cilindro con coordenadas $(\bar{\theta}, r),\ \bar{\theta} = \theta + \mathbb{Z},\ \theta \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}$. Considérese $A = \mathbb{T} \times [1,2]$ y una transformación $M : A \subset C \to C,\ \ (\bar{\theta}, r) \mapsto (\bar{\theta}_1, r_1)$.

Una curva invariante de M es una curva de Jordan $\Gamma \subset A$ que es homotópica a las circunferencias $r = constante$ y verifica $M(\Gamma) = \Gamma$.

Decimos que M tiene la propiedad de la intersección (p.i) si $M(\Gamma) \cap \Gamma \neq \emptyset$ para toda curva de Jordan $\Gamma \subset A$ que es homotópica a $r = constante$.

Nótese que la propiedad de intersección es invariante por conjugaciones topólogicas.

NOTA 1.4. No es difícil verificar (usando el hecho que (1.19) conserva el área y deja invariante la circunferencia $r = 0$) que (1.19) tiene la p.i. en cualquier anillo de C_+. Entonces debido a la invariancia topológica de la p.i. la transformación (1.20) tendrá también la p.i. en el anillo A para ϵ pequeño.

TEOREMA 1.7. *Sea $\kappa \neq 0$ un número real. Entonces existe un $\epsilon > 0$, dependiente de κ, tal que una transformación $M : A \subset C \to C$ tiene curvas invariantes si satisface las siguientes condiciones*

- *M tiene la propiedad de la intersección*
- *el levantamiento de M puede expresarse en la forma*
$$\theta_1 = \theta + \omega + \delta(\kappa r + \varphi_1(\theta, r)), \quad r_1 = r + \delta\varphi_2(\theta, r)$$
para algún $\delta \in (0, 1)$, $\omega \in \mathbb{R}$ y φ_1, $\varphi_2 \in C^4(A)$.
- $||\varphi_1||_{C^4(A)} + ||\varphi_2||_{C^4(A)} < \epsilon$.

La demostración de este teorema sigue las líneas del trabajo de Hermann en [**22**].

El teorema del pequeño twist es una poderosa herramienta no sólo en lo que compete a problemas de estabilidad sino también en problemas de acotación de soluciones ([**18**]). Una vez que el problema ha sido preparado (en las coordenadas adecuadas) para aplicar el teorema 1.7, un paso crucial es la estimación de los restos en clase C^4. Esto casi siempre conlleva una gran cantidad de cálculos, pero si la transformación se incluye en un flujo hamiltoniano puede obtenerse casi gratuitamente la estimación de los restos vía una versión apropiada del teorema de diferenciabilidad respecto de parámetros. Esta metodología ha sido introducida por Ortega en [**54**]. Véase también [**46, 26**].

Para finalizar esta sección estableceremos la versión del teorema de diferenciabilidad respecto de parámetros que usaremos en el segundo capítulo de la presente memoria.

Para establecer el resultado de forma sencilla introduciremos la siguiente notación. Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^N$ y Δ un número positivo. Dada una función $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t, x, \delta)$, donde $t \in [0, 1]$, $x \in \mathcal{D}$, $\delta \in [0, \Delta]$, decimos que

$$\mathcal{F} \in C^{m,k,r}([0, 1] \times \mathcal{D} \times [0, \Delta])$$

si las derivadas parciales $\partial^\alpha \mathcal{F}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_1 \leq m$, $|\alpha_2| \leq k$, $\alpha_3 \leq r$, existen (con valor independiente del orden de derivación) y son continuas en $(t, x, \delta) \in [0, 1] \times \mathcal{D} \times [0, \Delta]$.

Considérese una ecuación diferencial general dependiendo de un parámetro de la forma

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{F}(t, z, \delta), \tag{1.21}$$

donde la función $\mathcal{F} : [0, 1] \times \mathcal{D} \times [0, \Delta] \to \mathbb{R}^N$, $(t, z, \delta) \mapsto \mathcal{F}(t, z, \delta)$ es de clase $C^{0,k+1,0} \cap C^{0,k,1}$ en $[0, 1] \times \mathcal{D} \times [0, \Delta]$ para algún $k \geq 0$. La solución de (1.21) que satisface $z(0) = z_0$ será denotada por $z(t; z_0, \delta)$. De la teoría general de ecuaciones diferenciales uno sabe que la solución general $z(t; z_0, \delta)$ está definida en algún intervalo máximal $t \in [0, \omega(z_0, \delta))$ con $\omega(z_0, \delta) \leq 1$. Más aún, ω es semicontinua inferiormente y z pertenece a $C^{1,k+1,0} \cap C^{1,k,1}$ en $\{(t, z_0, \delta) \in [0, 1] \times \mathcal{D} \times [0, \Delta] : t < \omega(z_0, \delta)\}$.

El siguiente resultado es una consecuencia de este hecho.

PROPOSICIÓN 1.8. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathcal{D}$ tal que para todo $z_0 \in K$ y $\delta \in [0, \Delta]$ la solución $z(t; z_0, \delta)$ está bien definida en $[0, 1]$. Entonces, para cada $(t; z_0, \delta) \in [0, 1] \times K \times [0, \Delta]$, se tiene el siguiente desarrollo,*

$$z(t; z_0, \delta) = z(t; z_0, 0) + \frac{\partial z}{\partial \delta}(t; z_0, 0)\delta + \mathcal{R}(t; z_0, \delta)\delta$$

donde el resto $\mathcal{R}$ satisface $\lim_{\delta \to 0} ||\mathcal{R}(t; \cdot, \delta)||_{C^k(K)} = 0$, uniformemente en $t \in [0, 1]$.

Este resultado ya ha sido empleado en [**54**]. Es una consecuencia de la regularidad de z y la identidad

$$z(t; z_0, \delta) = z(t; z_0, 0) + \frac{\partial z}{\partial \delta}(t; z_0, 0)\delta + \delta \int_0^1 \{\frac{\partial z}{\partial \delta}(t; z_0, s\delta) - \frac{\partial z}{\partial \delta}(t; z_0, 0)\} ds.$$

1.5. Ecuaciones de Newton Periódicas

Los resultados de las secciones anteriores constituyen una potente herramienta para el estudio de la estabilidad en sistemas hamiltonianos periódicos con un grado de libertad. Concretamente estaremos interesados en ecuaciones de tipo Newton de la forma

$$\ddot{x} + f(t, x) = 0, \tag{1.22}$$

donde f es periódica en el tiempo (T es el período) y x es una variable real. Supondremos que f es de clase $C^{0,4}$, es decir, continua y de clase C^4 respecto de la variable x.

En esta sección denotaremos el grupo cociente $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ por $\mathbb{T}$.

El problema de existencia de soluciones T-periódicas en la ecuación anterior, es clásicamente abordado por diversos métodos topológicos y variacionales que se encuentran entroncados en el llamado Análisis No Lineal. Una cuestión importante es el estudio de las propiedades de estabilidad de las soluciones obtenidas por estos métodos.

Sea φ una solución T-periódica de (1.22).

Después de trasladar φ al origen por medio del cambio de variables $y = x - \varphi$, la ecuación (1.22) queda expresada en la forma

$$\ddot{y} + a(t)y + b(t)y^2 + c(t)y^3 + r(t, y) = 0, \tag{1.23}$$

donde los nuevos términos corresponden al desarrollo de Taylor hasta el tercer de orden de $y \mapsto f(t, y + \varphi(t))$ cerca de $y = 0$. Las funciones a, b, c son continuas y T-periódicas y el resto $r \in C^{0,4}(\mathbb{T} \times (-\epsilon, \epsilon)), \epsilon > 0$ verifica

$$\frac{\partial^k r}{\partial x^k}(t, 0) = 0, \qquad k = 0, \ldots 3, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

La ecuación variacional de φ es

$$\ddot{x} + a(t)x = 0. \tag{1.24}$$

Sea P la transformación de Poincaré de (1.23) (véase el ejemplo 1.3). Llamaremos a P la transformación de Poincaré de φ. Recordemos que $P \in \mathcal{A}^4$.

Los multiplicadores de Floquet de (1.24) coinciden con los valores propios de $P'(0)$.

Definición 1.9. Diremos que φ es elíptica si $z = 0$ es un punto fijo elíptico de P. Si además $z = 0$ no tiene resonancias de orden n diremos que φ es una solución n-elemental.

Recordemos que P es estable en $z = 0$ si y sólo el equilibrio $y \equiv 0$ es estable si y sólo si φ es estable. Entonces la estabilidad de una solución elíptica φ tiene carácter no lineal, es decir, la linealización (1.24) no determina la estabilidad. Por este motivo hemos reescrito la ecuación en la forma (1.23) porque la estabilidad de φ es decidida genéricamente por la tercera aproximación.

Supóngase que φ es elíptica y 4-elemental. Entonces está definido el primer coeficiente de Birkhoff $\beta = \beta(P)$. Del teorema 1.5 se tiene que si $\beta \neq 0$ entonces φ es estable.

La siguiente definición jugará un papel esencial en el resto de esta memoria.

Definición 1.10. Una solución T-periódica φ de (1.22) se dice de tipo twist si es elíptica, 4-elemental y $\beta(P) \neq 0$.

Obviamente las definiciones anteriores incluyen el caso cuando φ es un equilibrio de (1.22). En estas situaciones hablaremos de equilibrios elípticos, 4-elementales, de tipo twist, etc.

De acuerdo con las observaciones anteriores se tiene que todo equilibrio o toda solución periódica de tipo twist es estable. La dinámica cerca de una solución periódica φ de tipo twist es muy rica y ha sido parcialmente entendida a partir de la teoría KAM(véase por ejemplo [**8**, capítulo 4] y [**60**, sección 34]). Del teorema del punto fijo de Poincaré-Birkhoff puede deducirse la existencia de subarmónicos de orden n con $n \to \infty$ en todo entorno de una solución de tipo twist. También abundan las soluciones cuasiperiódicas y otros movimientos recurrentes en torno de ésta (véase [**60**], [**8**], [**36**]).

En resumen, cuando uno quiere estudiar la estabilidad de una solución periódica de un problema particular, se deben verificar dos cosas: la ausencia de resonancias fuertes y la no nulidad del coeficiente twist asociado.

Este procedimiento ha sido clásicamente empleado en el estudio de pequeñas perturbaciones de una ecuación autónoma. Para ilustrar esta situación considérese la ecuación

$$\ddot{x} + a_\epsilon(t)x + b_\epsilon(t)x^2 + c_\epsilon(t)x^3 + \cdots = 0$$

donde a_ϵ, b_ϵ y c_ϵ son funciones continuas que dependen continuamente de ϵ y son constantes para $\epsilon = 0$. Esta ecuación admite el equilibrio

$x \equiv 0$ y se supone que para $\epsilon = 0$ este equilibrio es elíptico y no tiene resonancias fuertes (esto persistirá para pequeños valores de ϵ). Entonces $\beta = \beta(\epsilon)$ es continua con respecto de ϵ y es calculable para $\epsilon = 0$. Si $\beta(0) \neq 0$ entonces es claro que el equilibrio es estable para pequeños valores de ϵ. Este es el llamado método del pequeño parámetro.

Los problemas que estudiaremos en el capítulo 3 son de naturaleza elíptica y serán tratados sin usar el método del pequeño parámetro. La estrategia a seguir descansa fuertemente en la fórmula general (1.17) para el coeficiente twist, tomando como F a la transformación de Poincaré P de una solución periódica φ o de un equilibrio. Como puede apreciarse a primera vista, esto exige que la matriz de monodromía $P'(0)$ de (1.24) sea una rotación y lamentablemente este no es el caso general. Sin embargo, es posible introducir un cambio de variables en la variable independiente de (1.22) de modo que la ecuación resultante tenga la propiedad deseada. A continuación describiremos esta técnica de reducción.

Definición 1.11. Sea $\Psi = \phi_1 + i\phi_2$ la solución compleja de (1.24) que satisface $\Psi(0) = 1$; $\dot{\Psi}(0) = i$. Decimos que la ecuación (1.24) es R-elíptica si existe $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $|\lambda| = 1$, tal que

$$\Psi(t+T) = \bar{\lambda}\Psi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

La condición de R-elipticidad es equivalente a decir que la matriz de monodromía

$$\begin{pmatrix} \phi_1(T) & \phi_2(T) \\ \phi_1'(T) & \phi_2'(T) \end{pmatrix}.$$

es una rotación (distinta de $\pm I$). En tal caso λ y $\overline{\lambda}$ son los multiplicadores característicos de (1.24).

Para cada par de números reales t_0 y $\alpha > 0$ introducimos el siguiente cambio de variables

$$\xi = x, \qquad \tau = \frac{t - t_0}{\alpha^2}. \tag{1.25}$$

Este cambio de variables transforma (1.22) en una nueva ecuación periódica del mismo tipo

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \alpha^4 f(\alpha^2\tau + t_0, \xi) = 0 \tag{1.26}$$

y la solución periódica φ pasa a ser $\varphi^\star(\tau) = \varphi(\alpha^2\tau + t_0)$ con período $T^\star = T/\alpha^2$.

Sea $P^\star$ la transformación de Poincaré de $\varphi^\star$. No es difícil ver que P y $P^\star$ son conjugadas por una transformación simpléctica con multiplicador [6]([**40**, cap. IV]). Esto implica que los multiplicadores característicos se conservan y se verifica la siguiente relación (véase [**52**, sección 3])

[6]Es decir, su jacobiano es una función constante $\mu > 0$.

$$\text{sign } \beta(P^\star) = \text{sign } \beta(P). \tag{1.27}$$

Entonces una solución de tipo twist permanece así después de una traslación y un cambio de escala en la variable independiente.

De [**50**, Prop. 7] se deduce que si φ es elíptica entonces existen t_0 y $\alpha > 0$ tal que el cambio de variables (1.25) transforma (1.24) en una ecuación similar que es R-elíptica[7] ([**52**, Lema 4.1]). De este modo podemos emplear la fórmula (1.17) para $P^\star$ y estudiar su no nulidad.

Nótese que la relación (1.27) justifica la reducción del estudio de la estabilidad al caso R-elíptico.

En el caso R-elíptico, se obtienen fórmulas para los coeficientes del 3-jet de P que intervienen en (1.17) ([**52**, Proposición 4.4]). Estas fórmulas involucran los coeficientes no lineales b, c y las soluciones de la ecuación linealizada (1.24), lo que naturalmente permite dar criterios de estabilidad en términos de la tercera aproximación [**50, 52**]. Los criterios de Ortega están fundamentados en el principio del máximo y por eso el autor siempre supone signos fijos para b y c. Para ser más preciso, la fórmula para $\Im(\overline{\lambda}N)$ (véase (1.17) es la siguiente

$$\begin{aligned}\Im(\overline{\lambda}N) = &-\frac{3}{8}\int_0^T c(t)|\Psi(t)|^4 dt\\ &-\frac{1}{4}\iint_{\Delta_T} G(t,s)b(t)b(s)[2|\Psi(t)|^2|\Psi(s)|^2 + \Psi(t)^2\bar{\Psi}(s)^2]dsdt,\end{aligned}$$

donde $\Psi = \phi_1 + i\phi_2$ es la solución de la ecuación linealizada con condiciones iniciales $\Psi(0) = 1,\ \Psi'(0) = i,$ la función G está dada por

$$G(t,s) = \phi_1(t)\phi_2(s) - \phi_1(s)\phi_2(t)$$

y $\Delta_T = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < s < t,\ 0 < t < T\}$.

Luego, bajo condiciones sobre la ecuación linealizada puede conseguirse que $G < 0$ sobre Δ_T[8]. Por otra parte el término

$$2|\Psi(t)|^2|\Psi(s)|^2 + \Psi(t)^2\bar{\Psi}(s)^2 > 0,\ \forall (s,t) \in \Delta_T.$$

Entonces si fijamos los signos del siguiente modo:

$$c \leq 0,\ b \leq 0 \ o \ b \geq 0$$

resulta claro de la fórmula anterior que

$$\Im(\overline{\lambda}N) > 0.$$

[9] En la fórmula (1.17) los otros dos términos resultan positivos si por ejemplo $0 < |\theta| \leq \frac{\pi}{3}$. Este tipo de restricción sobre los multiplicadores

---

[7]Esta nueva ecuación coincide naturalmente con la ec. variacional de $\varphi^\star$.

[8]Se supone siempre que la distancia entre dos ceros consecutivos de cualquier solución no trivial de la ecuación linealizada sea al menos T

[9]Los coeficientes b y c no son ambos idénticamente nulos

se consigue imponiendo cotas de tipo L^∞ o L^1 sobre el coeficiente lineal a (véase [**50**, Teorema 1] y [**52**, Corolario 3.3]). Si los multiplicadores se salen de este sector entonces debe estudiarse la contribución de $|A|$ y $|C|$ al signo del coeficiente twist. Esto se hace en [**52**] comparando las cantidades $|A|$ y $|C|$ (véase Lema 4.7 de este artículo).

En los problemas que trataremos en el tercer capítulo perderemos estos signos y entonces se buscarán caminos alternativos al principio del máximo.

CAPíTULO 2

Criterio de estabilidad para equilibrios parabólicos

2.1. Introducción

En este capítulo iniciaremos el estudio de la estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$ para una clase particular de la ecuación (1.22).

Supondremos que la ecuación (1.22) admite un desarrollo de Taylor alrededor de $x = 0$ de la forma

$$\ddot{x} + a(t)x + c(t)x^{2n+1} + \cdots = 0, \tag{2.28}$$

donde $n \geq 1$ es un entero y las funciones a y c son 1-periódicas. El resto, denotado por puntos suspensivos en la ecuación, es una función $r = r(t, x)$ que también es 1-periódica en t y satisface

$$r(t, x) = o(x^{2n+1}),\ x \to 0.$$

Como ejemplos de esta clase de ecuaciones podemos citar una par de problemas clásicos de la Mecánica: i) el péndulo de longitud variable y ii) el movimiento de un planetoide en presencia de estrellas dobles (un problema restringido de tres cuerpos) (véase la sección 2.6).

La ecuación precedente puede verse como una versión no lineal de la clásica ecuación de Hill y en esta memoria estaremos interesados en las propiedades de estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$.

La linealización en $x \equiv 0$ es

$$\ddot{x} + a(t)x = 0. \tag{2.29}$$

Las matrices de monodromía de (2.29) son conjugadas en el grupo simpléctico $Sp(\mathbb{R}^2)$ y los autovalores (que son comunes a todas ellas) λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ son llamados los multiplicadores de Floquet de la ecuación de Hill (2.29).

Como ya se ha discutido en el capítulo anterior, el primer método de Lyapunov no decide la estabilidad en los casos elíptico ($|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, $\lambda_i \neq \pm 1$) y parabólico ($\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$).

En este capítulo supondremos que $c(t)$ no cambia de signo y probaremos que bajo esta condición es posible obtener una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de $x \equiv 0$. Un hecho notable de esta condición es que sólo depende de la ecuación linealizada (2.29).

La estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$ para la ecuación (2.28) ha sido ya estudiada en [**51**] y [**29**]. En [**51**] se prueba que $x = 0$ es stable si la linealización (2.29) es estable y $c(t)$ satisface una de las siguientes condiciones

$$c(t) \geq 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}, \;\; \int_0^1 c > 0 \quad \text{o} \;\; c(t) \leq 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}, \;\; \int_0^1 c < 0. \tag{2.30}$$

La ecuación (2.29) es estable cuando es elíptica y en algunos casos parabólicos excepcionales (caso parabólico estable). Como $x \equiv 0$ es inestable si (2.29) es hiperbólica, el único caso que quedó pendiente despúes de [**51**] fue la situación parabólica inestable.

Puede ocurrir que $x \equiv 0$ sea estable para (2.28) mientras (2.29) es inestable (y parabólica) y un ejemplo de este fenómeno fue analizado por B. Liu en [**29**]. En este artículo Liu supone que $a \equiv 0$, entonces la ecuación no lineal es del tipo

$$\ddot{x} + c(t)x^{2n+1} + \cdots = 0 \tag{2.31}$$

mientras que la ecuación linealizada $\ddot{x} = 0$, es parabólica-inestable. El autor prueba que el equilibrio $\equiv 0$ es estable si $\int_0^1 c > 0$ e inestable si $\int_0^1 c < 0$. (Las condiciones (2.30) no son requeridas en el resultado de Liu).

Para completar el trabajo iniciado en [**51**] obtendremos un criterio de estabilidad para la ecuación general (2.28) cuando (2.29) es parabólica-inestable y (2.30) se verifica. Para hacer esto asociaremos dos números $\sigma,\ \nu \in \{+1, -1\}$ a cada ecuación (2.29) que es parabólica-inestable. Entonces $x \equiv 0$ será estable si $\sigma\nu c(t) \geq 0$ e inestable si $\sigma\nu c(t) \leq 0$. Para la ecuación $\ddot{x} = 0$ los números σ y ν toman el valor 1 y así el resultado de Liu se recupera en parte. La definición de $\sigma,\ \nu$ puede encontrarse en la sección 2.2 y el criterio preciso de estabilidad será presentado en la sección 2.5.

El estudio de (2.28) en el caso parabólico-inestable nos conduce de manera natural al análisis de la estabilidad del origen para transformaciones F en el plano del tipo

$$x_1 = x + y + \ldots, \qquad y_1 = y + \ldots$$

donde los términos no lineales son representados por puntos suspensivos.

Para reflejar el carácter Hamiltoniano de (2.28) supondremos que F es una transformación que conserva el área. Como apuntábamos en el capítulo 1, este es un problema clásico en teoría de la estabilidad. En 1901 Levi-Civita obtuvo interesantes criterios de inestabilidad para esta familia de transformaciones ([**27**]). Los resultados de estabilidad son más recientes porque su prueba requiere del Teorema de la Curva Invariante de Moser. En [**61**] Simó dió un criterio preciso de estabilidad para este tipo de transformaciones (véase también [**62**]). Su idea fue proceder con la misma metodología del caso elíptico ([**60**]). Primero se trabaja formalmente para obtener una Forma Normal y una vez que esta Forma Normal ha sido calculada se procede a la búsqueda de un sistema hamiltoniano autónomo que interpola a F hasta cierto orden.

Finalmente las variables de acción ángulo asociadas a este hamiltoniano, son empleadas para reducir F a una forma adecuada de manera que el Teorema Twist puede ser aplicado. Los resultados en [**61**] fueron obtenidos para transformaciones analíticas reales, pero pueden ser adaptados para transformaciones de clase C^k con k suficientemente grande. Sin embargo; las pruebas detalladas involucran largos cálculos. En este capítulo se presentará una demostración completa del resultado de Simó empleando un método que reduce bastante los cálculos. Las principales diferencias de esta demostración con respecto a la dada en [**61**] son las siguientes:

En lugar de usar una Forma Normal, la transformación F se realiza como el operador de Poincaré de un cierto sistema hamiltoniano periódico (este procedimiento es muy usual en dinámica, véase [**40**]). Esto permite trasladar el problema al lenguaje y técnicas propias de las ecuaciones diferenciales periódicas. De este modo, las estimaciones requeridas para la aplicación del Teorema Twist pueden deducirse de una versión apropiada del Teorema de Peano sobre diferenciabilidad con respecto de parámetros. Los detalles pueden verse en las secciones 2.3 y 2.4. Este método fue inspirado por [**10**]. En este artículo se dan criterios para la estabilidad asintótica de puntos fijos parabólicos (en su caso F no conserva área) y los autores realizan la transformación como el operador de Poincaré de una cierta ecuación diferencial periódica.

Otros criterios de estabilidad para puntos fijos parabólicos pueden encontrarse en [**62**], [**1**], [**2**] y [**30**]. Todos estos trabajos estudian el caso $F'(0) = \textit{identidad}$.

Para finalizar esta introducción, quisiera resaltar el hecho de que si sólo se está interesado en los resultados para la ecuación diferencial (2.28), entonces es posible obtener una prueba más directa e independiente del resultado de estabilidad en [**61**]. En efecto, todos los cambios canónicos de variables sobre el sistema hamiltoniano pueden ser aplicados sin pasar por la transformación de Poincaré. Sin embargo, he preferido enfatizar las conexiones entre la estabilidad de los puntos fijos y los equilibrios.

2.2. Invariantes simplécticos de la ecuación lineal

Denotemos por $Gl\,(\mathbb{R}^2)$ al grupo de matrices reales A de orden 2 tal que $\det A \neq 0$. El grupo simpléctico $Sp\,(\mathbb{R}^2)$ es el subgrupo de $Gl\,(\mathbb{R}^2)$ definido por la ecuación

$$\det A = 1.$$

Los valores propios de una matriz en $Sp\,(\mathbb{R}^2)$ cumplen $\lambda_1\lambda_2 = 1$ y esta propiedad nos proporciona la clasificación tradicional en $Sp\,(\mathbb{R}^2)$ (véase el ejemplo 1.1).

Sea A una matrix parabólica con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Si $A \neq I$ entonces la forma canónica de Jordan de A es

$$\mathcal{P}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que A y $\mathcal{P}_+$ son conjugadas en $Gl\,(\mathbb{R}^2)$; sin embargo estas matrices no son siempre conjugadas en el grupo $Sp\,(\mathbb{R}^2)$. Por ejemplo, la matriz

$$\mathcal{P}_- = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es conjugada a $\mathcal{P}_+$ en $Sp\,(\mathbb{R}^2)$ porque la ecuación $\mathcal{P}_+ = B\mathcal{P}_-B^{-1}$ implica que $\det B < 0$. De este hecho es posible deducir que cualquier matriz parabólica (distinta de $\pm I$) es conjugada en $Sp\,(\mathbb{R}^2)$ a una y sólo una de las cuatro matrices $\mathcal{P}_+, \mathcal{P}_-, -\mathcal{P}_+, -\mathcal{P}_-$. Entonces el conjunto de las matrices parabólicas en $Sp\,(\mathbb{R}^2)$ se parte en 6 clases de equivalencia bajo la relación de conjugación simpléctica.

Es posible etiquetar estas clases de equivalencia por una pareja de números reales, a saber, el autovalor y la esquina superior derecha del representante simpléctico canónico . Más precisamente, asociaremos dos números $\sigma = \sigma(A)$ y $\nu = \nu(A)$ a cada matriz parabólica A. Estos números sólo dependen de la clase de conjugación en $Sp\,(\mathbb{R}^2)$ y son tales que verifican

$$\sigma\left(\mathcal{P}_+\right) = \sigma\left(\mathcal{P}_-\right) = \sigma\left(I\right) = 1,\ \sigma\left(-\mathcal{P}_+\right) = \sigma\left(-\mathcal{P}_-\right) = \sigma\left(-I\right) = -1,$$

$$\nu\left(\mathcal{P}_+\right) = \nu\left(-\mathcal{P}_-\right) = 1,\ \nu\left(\mathcal{P}_-\right) = \nu\left(-\mathcal{P}_+\right) = -1,\ \nu\left(I\right) = \nu\left(-I\right) = 0.$$

A continuación conectaremos las observaciones previas con una ecuación de Hill de la forma

$$\ddot{x} + a(t)x = 0, \tag{2.32}$$

donde $a \in C\,(\mathbb{T})$. De ahora en adelante $\mathbb{T}$ denotará el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Sean $\phi_1 = \phi_1(t;t_0)$ y $\phi_2 = \phi_2(t;t_0)$ las soluciones de (2.32) con condiciones iniciales

$$\phi_1(t_0;t_0) = \dot{\phi}_2(t_0;t_0) = 1,\ \dot{\phi}_1(t_0;t_0) = \phi_2(t_0;t_0) = 0.$$

La matriz fundamental

$$\Phi(t;t_0) = \begin{pmatrix} \phi_1(t;t_0) & \phi_2(t;t_0) \\ \dot{\phi}_1(t;t_0) & \dot{\phi}_2(t;t_0) \end{pmatrix},$$

pertenece a $Sp\,(\mathbb{R}^2)$ y verifica

$$\Phi(t+1;t_0+1) = \Phi(t;t_0),\quad \Phi(t_0+1;t_0) = \Phi(t_1;t_0)^{-1}\Phi(t_1+1;t_1)\Phi(t_1;t_0)$$

para todo t, t_0, $t_1 \in \mathbb{R}$.

La segunda propiedad nos dice que todas las matrices de monodromía $\Phi(t_0+1;t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, pertenecen a la misma clase de conjugación en $Sp(\mathbb{R}^2)$. La ecuación (2.32) se dirá parabólica si estas matrices son parabólicas. En tal caso los números

$$\sigma = \sigma(\Phi(t_0 + 1; t_0)), \ \nu = \nu(\Phi(t_0 + 1; t_0))$$

son independientes de t_0 y en consecuencia pueden asociarse a (2.32) como invariantes simplécticos.

El próximo resultado nos muestra que la matriz de monodromía de una ecuación parabólica puede hacerse triangular superior con una adecuada elección de t_0.

LEMA 2.12. *Supóngase que la ecuación* (2.32) *es parabólica. Entonces existe* t_0 *y* η *en* $\mathbb{R}$ *tal que*

$$\Phi(t_0 + 1; t_0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & \eta \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. La teoría de Floquet implica que existe una solución no trivial $\varphi(t)$ tal que

$$\varphi(t + 1) = \pm\varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De esta identidad podemos deducir que existe t_0 tal que $\dot{\varphi}(t_0) = 0$. Por unicidad,

$$\phi_1(t; t_0) = \varphi(t_0)^{-1}\varphi(t).$$

Como $\Phi(t_0 + 1; t_0)$ es parabólica y tiene un cero debajo de la diagonal entonces obtenemos la tesis con $\eta = \phi_2(t_0 + 1; t_0)$. □

Nótese que a partir del lema previo podemos calcular ν por la identidad

$$\nu = \operatorname{sign} \eta.$$

Para concluir esta sección, caracterizaremos el invariante ν en términos de la ecuación perturbada

$$\ddot{x} + (a(t) + \lambda)x = 0, \tag{2.33}$$

cuando λ es un pequeño parámetro.

PROPOSICIÓN 2.13. *Supóngase que* (2.32) *es parabólica y* $\nu \neq 0$. *Entonces existe* $\Lambda > 0$ *tal que para* $0 < |\lambda| < \Lambda$ *la ecuación perturbada es elíptica si* $\sigma\nu\lambda > 0$ *e hiperbólica si* $\sigma\nu\lambda < 0$.

NOTA 2.5. Es bien conocido que cuando $\nu = 0$ entonces (2.33) es elíptica para pequeños valores de $|\lambda| > 0$. Véase [**31**].

Demostración. Aquí emplearemos la teoría de funciones discriminantes desarrollada en [**31**]. Dada la ecuación (2.33), denotaremos por

$$\Phi(t; t_0, \lambda)$$

a la correspondiente matriz fundamental. La traza de la matriz de monodromía

$$\Delta(\lambda) := \operatorname{tr} \Phi(t_0 + 1; t_0, \lambda)$$

es independiente de t_0 y se denomina el discriminante de (2.33). El discriminante es una función analítica de λ y es de mayor importancia porque nos permite clasificar la ecuación (2.33). En efecto (2.33) es elíptica cuando $|\Delta(\lambda)| < 2$ e hiperbólica cuando $|\Delta(\lambda)| > 2$. El caso parabólico corresponde a $|\Delta(\lambda)| = 2$.

Se sabe por hipótesis que (2.32) es parabólica. Entonces

$$|\Delta(0)| = 2.$$

Sea t_0 el tiempo inicial descrito en el lema 2.12. Un cálculo usual de derivación respecto de parámetros como en [**31**, sec. 2.1] nos conduce a

$$\Delta^{'}(0) = -\phi_2(t_0+1;t_0)\int_0^1 \phi_1(t_0+s;t_0)^2 ds.$$

Entonces

$$\nu = \text{sign } \phi_2(t_0+1;t_0) = -\text{sign } \Delta^{'}(0).$$

A partir de esta identidad se infiere fácilmente la conclusión. □

2.3. El Sistema Hamiltoniano Interpolante

Definimos $\mathcal{H}^m$ como el conjunto de las funciones $H : \mathbb{T}\times V \to \mathbb{R}$, $(t,z)\mapsto H(t,z)$, definidas en algún entorno abierto V de $0\in\mathbb{R}^2$ y que satisfacen

$$H \in C^m(\mathbb{T}\times V), \qquad \bigtriangledown_z H(t,0) = 0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Dado $H\in\mathcal{H}^{m+1}$, el sistema hamiltoniano

$$\dot{z} = J \bigtriangledown_z H(t,z), \tag{2.34}$$

define un flujo el cual denotaremos por $\phi_t(z)$. El teorema de Liouville implica que $\phi_t\in\mathcal{A}^m$ para cada $t\in\mathbb{R}$. El flujo a tiempo $t=1$ será denotado por $\Pi_H = \phi_1$ y nos referiremos a este como la transformación de Poincaré de (2.34) (véase el ejemplo 1.3).

Como ejemplo considérese la función hamiltoniana autónoma

$$D(t,z) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\alpha}{n+1}x^{n+1}, \tag{2.35}$$

donde $z=(x,y)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ y $n=2,3,\ldots$. Entonces $D\in\mathcal{H}^\omega$ y el desarrollo de Taylor del flujo asociado ϕ_t puede ser calculado por procedimientos standard. Hasta el orden n obtenemos para $t=1$

$$\Pi_D(x,y) = (x+y-\alpha\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}y^k + \cdots, y-\alpha\sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k}y^k+\cdots), \tag{2.36}$$

con

$$a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\begin{pmatrix} n \\ k\end{pmatrix},\ b_k = \frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} n \\ k\end{pmatrix},$$

para $k=0,1\ldots n$. En particular $\Pi^{'}_D(0) = \mathcal{P}_+$ y el origen es un punto fijo parabólico de Π_D.

El próximo resultado muestra que Π_D es un paradigma del caso parabólico.

PROPOSICIÓN 2.14. *Sea $F \in \mathcal{A}^\infty$, $F = (F_1, F_2)$, una transformación con $F^{'}(0) = \mathcal{P}_+$. Adicionalmente supóngase que existe un entero n, $n \geq 2$, tal que*

$$\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k}(F - \mathcal{P}_+)(0,0) = (0,0), \tag{2.37}$$

para cada $(h,k) : h + k < n$. Entonces existen $\Psi \in \mathcal{A}^\omega$ y $H \in \mathcal{H}^\infty$ tal que $\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi = \Pi_H$ y H puede ser escogido de la forma

$$H(t,x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\alpha}{n+1}x^{n+1} + R(t,x,y), \tag{2.38}$$

con

$$\alpha = -\frac{1}{n!}\frac{\partial^n F_2}{\partial x^n}(0,0), \tag{2.39}$$

y

$$\frac{\partial^{h+k} R}{\partial x^h y^k}(t,0,0) = 0, \tag{2.40}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall (h,k) \ : h + k \leq n+1$.

NOTA 2.6. En [**61**] Simó obtiene una forma normal para puntos fijos parabólicos. A saber, dada $F \in \mathcal{A}^\omega$ con $F^{'}(0) = \mathcal{P}_+$, Simó ha probado la existencia de $\Phi \in \mathcal{A}^\omega$ y un polinomio $p_m(\xi) = a_2\xi^2 + \cdots + a_m\xi^m$ tal que $S = \Phi^{-1} \circ F \circ \Phi$ tiene el desarrollo

$$S(x,y) = (x + y + \ldots, y + p_m(x+y) + \ldots).$$

Cuando (2.37) se verifica, la proposición previa implica que $\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi$ tiene un contacto de orden n con Π_D dado por (2.36). La forma Normal de Simó es algebraicamente más simple que (2.36); sin embargo el hamiltoniano interpolante de S fue calculado en [**61**] y es má complicado que D.

NOTA 2.7. En [**40**, cap. VII] se estudian varias formas normales para casos degenerados y en particular la forma normal (2.35) es obtenida para el hamiltoniano interpolante de F. Sin embargo la propiedad de invariancia, que es crucial para obtener una fórmula explícita de α en términos de F, no es analizada en [**40**]. El procedimiento general en [**40**] emplea series de Lie y puede ser aplicado en nuestro caso, aunque he preferido desarrollar aquí un tipo de cálculos más directos (que guardan relación con estas técnicas) para demostrar esta propiedad de invariancia.

Demostración de la Proposición 2.14. Dada una transformación (o una función escalar) R, definida en un entorno del origen, usaremos la notación

$$R \in o_n,$$

para indicar que $\partial^\alpha R(0) = 0$ si $|\alpha| \le n$.

Haremos la prueba en varios pasos.

Paso 1. *Existe $h \in \mathcal{H}^\infty$ tal que $F = \Pi_h$ y*

$$h(t,z) = \frac{1}{2} z^* A(t) z + r(t,z),$$

con $A(t) = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(t,0)$ y $r(t,\cdot) \in o_n$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Por lo discutido en el capítulo anterior, la existencia de un hamiltoniano interpolante es equivalente a la existencia de una isotopía de simplectomorfismos uniendo F con la identidad (véase [**40**, pág. 117]) Comenzaremos conectando $G = \mathcal{P}_+^{-1} \circ F$ con la identidad. Como $G'(0) = I$ definimos

$$\Sigma(t,z) = \begin{cases} t^{-1} G(tz) & \text{if } t \in (0,1] \\ z & \text{if } t = 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

Esta isotopía conserva el área y fue empleada en [**19**]. Un cálculo elemental muestra que $\Sigma \in C^\infty([0,1] \times \Omega)$, donde Ω es algún entorno abierto del origen. Más aún, (2.37) implica que $\Sigma(t,\cdot) - I \in o_{n-1}$ y $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(t,\cdot) \in o_{n-1}$ para cada t.

Para unir F con I definimos la isotopía

$$\Xi(t,\cdot) = e^{\mathcal{N}t} \circ \Sigma(t,\cdot), \qquad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El resultado en [**40**] implica ahora la existencia de $h \in \mathcal{H}^\infty$ tal que $\Pi_h = F$. En virtud de que $\Xi(t,\cdot) - e^{\mathcal{N}t} \in o_{n-1}$, la construcción del hamiltoniano h en [**40**] implica que $r(t,\cdot) \in o_n$.

Paso 2. *Existe $h^* \in \mathcal{H}^\infty$, $h^* = h^*(t,w)$, $w = (u,v)$, tal que $\Pi_{h^*} = F$ y*

$$h^*(t,w) = \frac{1}{2} v^2 + r^*(t,w),$$

con $r^*(t,\cdot) \in o_n$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

La ecuación variacional en $z = 0$ del sistema obtenido en el Paso 1 es

$$\dot{\xi} = J \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(t,0)\xi.$$

Este es un sistema lineal periódico y denotaremos por $\Phi(t)$ a la matriz solución con condición inicial $\Phi(0) = I$. La matriz de monodromía $\Phi(1)$ debe coincidir con la derivada de Π_h en 0. Como $F = \Pi_h$ se deduce que $\Phi(1) = \mathcal{P}_+$. La teoría de Floquet nos dice que $\Phi(t)$ se factoriza como

$$\Phi(t) = P(t) e^{\mathcal{N}t},$$

donde $P(t)$ es 1-periódica y satisface

$$\dot{P} = J \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(t,0) P - P\mathcal{N}.$$

Por otra parte el cambio de variables $z = P(t)w$ transforma el sistema hamiltoniano en

$$\dot{w} = \mathcal{N}w + P(t)^{-1}J \bigtriangledown_z r(t, P(t)w).$$

Puesto que $P(t)$ es una matriz simpléctica, $P(t)^{-1} = -JP(t)^*J$ y entonces

$$P(t)^* \bigtriangledown_z h(t, P(t)w) = P(t)^*(D_w h(t, P(t)w)P(t)^{-1})^* = \bigtriangledown_w h(t, P(t)w).$$

Luego, el nuevo sistema es también hamiltoniano con hamiltoniano

$$h^*(t, w) = \frac{1}{2}v^2 + r^*(t, w), \quad r^*(t, w) = r(t, P(t)w).$$

Las identidades $F = P(1) \circ \Pi_{h^*}$ y $P(1) = P(0) = I$ completan la demostración del Paso 2.

Nota 2.8. Nótese que existe una ligera diferencia en la fórmula del resto $r*$ con respecto a la que aparece en [**46**]. La fórmula correcta es la dada arriba.

Paso 3. *Existen* $\Psi \in \mathcal{A}^\omega$ *y* $h^{**} = h^{**}(t, \xi)$, $\xi = (q, p)$, *tal que*

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi = \Pi_{h^{**}}$$

y

$$h^{**}(t, \xi) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\alpha}{n+1}q^{n+1} + r^{**}(t, \xi)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $r^{**}(t, \cdot) \in o_{n+1}$.

Consideraremos cambios canónicos de variables que dependen periódicamente del tiempo y que son de la forma

$$w = \overline{\Psi}(t, \xi) = \xi + Q(t, \xi) + \varrho(t, \xi),$$

donde $\overline{\Psi}$ es analítico, $Q(t, \cdot)$ es un polinomio homogéneo de grado n y $\varrho(t, \cdot) \in o_n$. Es fácil demostrar empleando la teoría de funciones generatrices que dado $Q = (Q_1, Q_2)$, tal cambio de variables existe si y sólo si

$$\text{div}_\xi Q = \frac{\partial Q_1}{\partial q} + \frac{\partial Q_2}{\partial p} \equiv 0 \tag{2.42}$$

(Véase [**9**]). Más aún, la inversa $\xi = \chi(t, w)$ será también analítica y tendrá la forma

$$\xi = w - Q(t, w) + \varrho^*(t, w)$$

con $\varrho^*(t, \cdot) \in o_n, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Despúes de un cambio de este tipo, el hamiltoniano h^* es transformado en

$$h^{**}(t, \xi) = h^*(t, \overline{\Psi}(t, \xi)) + \eta(t, \xi)$$

donde la función resto η es definida por (véase [**40**, pag 88-89])

$$\eta(t, \xi) = -\int_0^1 \langle J\partial_t \chi(t, w)|_{w=\overline{\Psi}(t, s\xi)}, \xi \rangle ds.$$

De las propiedades de h^* deducimos que

$h^*(t,\overline{\Psi}(t,\xi)) = \frac{1}{2}(p+Q_2(t,\xi)+\dots)^2 + r^*(t,\xi+Q(t,\xi)+\dots) =$
$\frac{1}{2}p^2 + pQ_2(t,\xi) + r^*_{n+1}(t,\xi)+\dots,$

donde $r^*_{n+1}(t,\xi)$ es el polinomio homogéneo de grado $n+1$ en el desarrollo de Taylor de $r^*(t,\xi)$ y los puntos suspensivos indican términos en o_{n+1}.

De la homogeneidad de $Q(t,\xi)$ se deduce que

$$\eta(t,\xi) = \int_0^1 \langle J\partial_t Q(t,w)|_{w=\overline{\Psi}(t,s\xi)}, \xi\rangle ds + \dots =$$

$$\int_0^1 \{q\partial_t Q_2(t,s\xi) - p\partial_t Q_1(t,s\xi)\} ds + \dots =$$

$$\frac{q}{n+1}\partial_t Q_2(t,\xi) - \frac{p}{n+1}\partial_t Q_1(t,\xi) + \dots$$

Para conseguir la conclusión del paso 3 debemos resolver la ecuación homológica

$$\frac{\alpha}{n+1}q^{n+1} = pQ_2 + \frac{q}{n+1}\partial_t Q_2 - \frac{p}{n+1}\partial_t Q_1 + r^*_{n+1}. \tag{2.43}$$

Aquí α es un parámetro a determinar y las funciones incógnitas son Q_1 and Q_2. Si escribimos Q_1,Q_2 y r^*_{n+1} en la forma

$$Q_1(t,\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) q^{n-i} p^i,\ Q_2(t,\xi) = \sum_{i=0}^{n} b_i(t) q^{n-i} p^i,$$

$$r^*_{n+1}(t,\xi) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i(t) q^{n+1-i} p^i,$$

entonces (2.43) se transforma en

$$\left\{\begin{array}{lcll} c_0 + \frac{1}{n+1}\dot{b}_0 & = & \frac{\alpha}{n+1} & \\ b_i + c_{i+1} - \frac{1}{n+1}\dot{a}_i + \frac{1}{n+1}\dot{b}_{i+1} & = & 0, & i=0,\dots,n-1 \\ b_n + c_{n+1} - \frac{1}{n+1}\dot{a}_n & = & 0. & \end{array}\right.$$

Las incógnitas a_i y b_i están relacionadas por (2.42). A saber,

$$(n-i)a_i + (i+1)b_{i+1} = 0,\ i = 0,1,\dots n-1.$$

Combinando las identidades previas llegamos al siguiente sistema diferencial en las incógnitas $b_0,\dots b_n, a_n$,

$$\left\{\begin{array}{lcll} \dot{b}_0 & = & \alpha - (n+1)c_0(t) & \\ \dot{b}_i & = & -(n-i+1)b_{i-1} - (n-i+1)c_i(t), & i=1,\dots,n \\ \dot{a}_n & = & (n+1)b_n + (n+1)c_{n+1}(t). & \end{array}\right.$$

Si definimos

$$\alpha = (n+1)\int_0^1 c_0(t)dt$$

este sistema admite soluciones periódicas de período 1. Es fácil comprobar esto último a partir del método de la alternativa de Fredholm o por integración sucesiva y descendente del sistema. Esto completa la demostración del paso 3 escogiendo $\Psi = \overline{\Psi}(0, \cdot)$.

Sólo queda por demostrar (2.39).

Paso 4 (Invariancia). Supongamos que F, F^* y φ son transformaciones en $\mathcal{A}^\infty$ que verifican las siguientes condiciones,

$$F - \mathcal{P}_+ \in o_{n-1}, \ \varphi - I \in o_{n-1}, \ F^* - \varphi^{-1} \circ F \circ \varphi \in o_n.$$

Entonces

$$\frac{\partial^n F_2}{\partial x^n}(0,0) = \frac{\partial^n F_2^*}{\partial x^n}(0,0).$$

Estas condiciones también implican que $F^* - \mathcal{P}_+ \in o_{n-1}$ y podemos escribir los desarrollos

$$F = \mathcal{P}_+ + \hat{F}_n + \dots, \quad F^* = \mathcal{P}_+ + \hat{F}_n^* + \dots, \quad \varphi = I + \hat{\varphi}_n + \dots$$

donde $\hat{F}_n$, $\hat{F}_n^*$, $\hat{\varphi}_n$ son polinomios homogéneos de grado n y los puntos suspensivos representan restos en o_n. De

$$\varphi \circ F^* - F \circ \varphi \in o_n$$

obtenemos la ecuación homológica

$$\mathcal{P}_+ \circ \hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_n \circ \mathcal{P}_+ + \hat{F}_n - \hat{F}_n^* = 0. \tag{2.44}$$

Expresando el polinomio $\hat{\varphi}_n$ como

$$\hat{\varphi}_n(x,y) = \left(\sum_{i=0}^n f_i x^i y^{n-i}, \sum_{i=0}^n g_i x^i y^{n-i} \right)$$

se obtiene

$$\left(\mathcal{P}_+ \circ \hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_n \circ \mathcal{P}_+\right)_2 (x,y) = \sum_{i=0}^n \left\{ g_i x^i y^{n-i} - g_i (x+y)^i y^{n-i} \right\}.$$

Reordenando esta componente en una suma de potencias $x^i y^{n-i}$ entonces resulta claro que el coeficiente correspondiente a $i = n$ se anula. El paso 4 se sigue de esta observación y la ecuación (2.44).

Paso 5. *Demostración de* (2.39).

Sabemos del paso 3 que existe $\Psi \in \mathcal{A}^\omega$ tal que

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Psi - \Pi_D \in o_n,$$

donde D es el hamiltoniano dado por (2.35). Más aún, la demostración del paso 3 implica que $\Psi - I \in o_{n-1}$. Aplicando ahora el paso 4 deducimos que

$$\frac{\partial^n F_2}{\partial x^n}(0,0) = \frac{\partial^n (\Pi_D)_2}{\partial x^n}(0,0).$$

Esta última derivada puede ser calculada a partir de (2.36) y tiene el valor $-n!\alpha$. Esto concluye la demostración.$\square$

Nota 2.9. Cuando F es de clase C^k, $k \geq 2$, la isotopía Σ construída en el Paso 1 verifica que $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$ es de clase C^{k-1}. Esta observación conduce a una versión de la Proposición 2.14 para $F \in \mathcal{A}^N$ con $N > n$. La conclusión será la misma excepto que ahora el hamiltoniano H pertenece a $\mathcal{H}^N$.

2.4. Criterio de Estabilidad para puntos fijos parabólicos

En la sección anterior el hamiltoniano interpolante de F fue reducido por cambios canónicos de variables a un hamiltoniano más simple con parte autónoma dada por (2.35). Cuando $\alpha \neq 0$ la parte autónoma nos da un sistema con equilibrio $x = y = 0$ estable si n es impar y $\alpha > 0$ e inestable en caso contrario. El próximo resultado puede verse como una extensión a transformaciones abstractas de este criterio de estabilidad. Este criterio fue obtenido en [**61**] para el caso analítico.

Teorema 2.15. *Sea $F \in \mathcal{A}^\infty$, $F = (F_1, F_2)$, una transformación con $F'(0) = \mathcal{P}_+$ y que verifica*

$$\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} F(0) = 0 \;\; si \;\; 2 \leq h + k < n, \quad \frac{\partial^n F_2}{\partial x^n}(0,0) \neq 0, \tag{2.45}$$

para algún $n \geq 2$. Entonces $z = 0$ es estable si n es impar y

$$\frac{\partial^n F_2}{\partial x^n}(0,0) < 0 \tag{2.46}$$

e inestable en caso contrario.

Como consecuencia de este resultado obtenemos dos corolarios que serán empleados más tarde.

Corolario 2.16. *Supóngase que $F \in \mathcal{A}^\infty$ y que para algún $n \geq 2$ se verifica* (2.45). *Supóngase además que*

$$F'(0) = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \eta \neq 0.$$

Entonces $z = 0$ es estable si y sólo si n es impar y $\eta \frac{\partial^n F_2}{\partial x^n}(0,0) < 0$.

Demostración. Definamos $G = L \circ F \circ L^{-1}$ donde $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$. De este modo G está en las condiciones del Teorema 2.15 y

$$\frac{\partial^n G_2}{\partial x^n}(0,0) = \eta \frac{\partial^n F_2}{\partial x^n}(0,0). \; \square$$

COROLARIO 2.17. *Supongamos que* $F \in \mathcal{A}^\infty$, *y que para algún entero impar* $n > 2$ *se verifica la condición* (2.45). *Adicionalmente, supóngase que*

$$F^{'}(0) = \begin{pmatrix} -1 & \eta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \eta \neq 0.$$

Entonces $z = 0$ *es estable si y sólo si* $\eta \frac{\partial^n F_2}{\partial x^n}(0,0) < 0$.

Demostración. La transformación $G = F^2$ verifica

$$G^{'}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2\eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Más aún, como n es impar entonces

$$\frac{\partial^n G_2}{\partial x^n}(0,0) = -2\frac{\partial^n F_2}{\partial x^n}(0,0).$$

Una aplicación del Corolario 2.16 a G finaliza la demostración. □

Variables de Acción-Ángulo para la ecuación de Duffing.

Antes de proceder a la demostración del Teorema 2.15, necesitaré introducir previamente unas variables canónicas en las que el sistema hamiltoniano asociado a (2.38) adoptará una forma más simple. Estas variables son las coordenadas naturales asociadas al hamiltoniano autónomo (2.35) (con $\alpha > 0$) y son llamadas las variables de acción-ángulo del hamiltoniano.

Para mayor sencillez, considérese la ecuación autónoma

$$\ddot{x} + x^n = 0, \tag{2.47}$$

donde $n \geq 3$ es impar. Esta ecuación es equivalente al sistema hamiltoniano

$$\dot{x} = \frac{\partial D}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial D}{\partial x}, \qquad D = \frac{1}{2}y^2 + \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{2.48}$$

Como el origen es un centro en el plano (x, y) es posible considerar las variables de acción-ángulo asociadas. Estas coordenadas fueron ya empleadas por Lyapunov en sus estudios sobre la estabilidad (véase [**10, 28**]). Seguiremos el modo como estas fueron introducidas en [**18**].

Dado $\lambda > 0$ sea $x_\lambda(t)$ la única solución de (2.47) con condiciones iniciales $x(0) = \lambda$, $\dot{x}(0) = 0$. Denotaremos el período minimal de $x_\lambda(t)$ por $T = T(\lambda)$. Un cálculo directo nos muestra que $x_\lambda(t) = \lambda x_1(\lambda^{\frac{n-1}{2}} t)$ y en consecuencia

$$T(\lambda) = T(1)\lambda^{\frac{1-n}{2}}.$$

Sea λ_0 el único número tal que $T(\lambda_0) = 1$. Definimos

$$\mathcal{C}(t) := x_{\lambda_0}(t), \quad \mathcal{S}(t) := \dot{\mathcal{C}}(t).$$

Estas funciones son analíticas, 1-periódicas y satisfacen las siguientes identidades

$$\dot{\mathcal{S}} = -\mathcal{C}^n, \quad \frac{1}{2}\mathcal{S}^2 + \frac{1}{n+1}\mathcal{C}^{n+1} = \frac{\lambda_0^{n+1}}{n+1}. \tag{2.49}$$

Definimos el siguiente cambio de variables

$$x = \gamma \rho^{\frac{2}{n+3}} \mathcal{C}(\theta),\ y = \gamma^{\frac{n+1}{2}} \rho^{\frac{n+1}{n+3}} \mathcal{S}(\theta), \quad \rho > 0,\ \theta \in \mathbb{R},$$

donde $\gamma > 0$ es un parámetro que determinaremos más tarde. La transformación

$$\Phi : \mathbb{T} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2 - \{0\}, \quad (\bar{\theta}, \rho) \mapsto (x, y)$$

es biyectiva. Esto se prueba a partir de la segunda identidad en (2.49) y usando el hecho de que $\mathcal{C}$ es 1-periódica.

Nuevamente empleando estas identidades podemos calcular el elemento de área

$$dx \wedge dy = \frac{2}{n+3} \lambda_0^{n+1} \gamma^{\frac{n+3}{2}} d\theta \wedge d\rho.$$

Tomando $\gamma^{\frac{n+3}{2}} = \frac{n+3}{2\lambda_0^{n+1}}$ se concluye que Φ es un difeomorfismo analítico y simpléctico. Las siguientes estimaciones son una consecuencia de la definición de Φ,

$$\Phi(\theta, \rho) = O(\rho^{\frac{2}{n+3}}),\ \text{cuando } \rho \to 0, \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial^h \Phi}{\partial \theta^{h_1} \partial \rho^{h_2}}(\theta, \rho) = O(\rho^{\frac{2}{n+3} - h_2}),\ \text{cuando } \rho \to 0, \tag{2.51}$$

para cada multi-índice $h = (h_1, h_2)$.

También nos será útil obtener estimaciones similares cuando expresamos una función en las variables anteriores. Dada $f = f(x, y)$ definida en un entorno del origen, la función $f^* = f^*(\theta, \rho)$ se define por $f^* = f \circ \Phi$. Si f es infinitamente diferenciable entonces también lo será f^* para ρ positivo y pequeño.

Lema 2.18. *Sea $f = f(x, y)$ una función de clase C^∞ que está definida en un entorno del origen y tal que*

$$f \in o_{\mu - 1}$$

para algún $\mu = 0, 1, 2, \ldots$. (Esta condición es vacía cuando $\mu = 0$). Entonces, para cada multi-índice $h = (h_1, h_2)$ se tiene que

$$\frac{\partial^{h_1 + h_2} f^*}{\partial \theta^{h_1} \partial \rho^{h_2}}(\theta, \rho) = O(\rho^{\frac{2\mu}{n+3} - h_2}),\ \text{cuando } \rho \to 0. \tag{2.52}$$

Demostración. Haremos inducción con respecto al orden de derivación ν ($\geq h_1 + h_2$). Para $\nu = 0$ sólo habrá que probar la estimación

$$f^*(\theta, \rho) = O(\rho^{\frac{2\mu}{n+3}}),$$

y esto es una clara consecuencia de (2.50).

Supondremos que (2.52) es cierta para derivadas de orden $h_1 + h_2 \leq \nu$ y probaremos que esto también es válido para $h_1 + h_2 = \nu + 1$.

Las funciones f_x y f_y pertenecen a $o_{\bar{\mu}-1}$ con $\bar{\mu} = \text{máx}\{\mu - 1, 0\}$. Aplicando (2.52) a estas funciones se deduce que para cada (h_1, h_2) con $h_1 + h_2 \leq \nu$,

$$|\frac{\partial^{h_1+h_2}}{\partial\theta^{h_1}\partial\rho^{h_2}}(f_x)^*| + |\frac{\partial^{h_1+h_2}}{\partial\theta^{h_1}\partial\rho^{h_2}}(f_y)^*| = O(\rho^{\frac{2\bar{\mu}}{n+3}-h_2}). \tag{2.53}$$

De la Regla de la Cadena,

$$(f^*)_\theta = (f_x)^* x_\theta + (f_y)^* y_\theta, \quad (f^*)_\rho = (f_x)^* x_\rho + (f_y)^* y_\rho. \tag{2.54}$$

Ahora aplicando la regla de Leibniz a la primera fórmula en (2.54) se obtiene

$$|\frac{\partial^\nu}{\partial\theta^{h_1}\partial\rho^{h_2}}(f^*)_\theta| \leq C_\nu \sum_{\substack{i_1+j_1=h_1\\ i_2+j_2=h_2}} |\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial\theta^{i_1}\partial\rho^{i_2}}(f_x)^*||\frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial\theta^{j_1}\partial\rho^{j_2}}(x_\theta)|$$

$$+|\frac{\partial^{i_1+i_2}}{\partial\theta^{i_1}\partial\rho^{i_2}}(f_y)^*||\frac{\partial^{j_1+j_2}}{\partial\theta^{j_1}\partial\rho^{j_2}}(y_\theta)|,$$

donde C_ν es cierta constante que sólo depende de ν.

Si combinamos (2.51) y (2.53) se concluye que

$$\frac{\partial^{\nu+1}}{\partial\theta^{h_1+1}\partial\rho^{h_2}} f^*(\theta, \rho) = O(\rho^{\frac{2\mu}{n+3}-h_2}).$$

La demostración no está terminada porque falta por estimar aún $\frac{\partial^{\nu+1} f^*}{\partial\rho^{\nu+1}}$. Esto se hace de modo similar pero comenzando con la segunda fórmula en (2.54).□

Demostración del Teorema 4.1. En virtud de la Proposición 2.14 será suficiente considerar el sistema hamiltoniano (2.34) con hamiltoniano (2.38) y discutir la estabilidad o inestabilidad del equilibrio $z = 0$. Es importante recordar que H presenta la forma

$$H(t, x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\alpha}{n+1}x^{n+1} + \dots$$

Estabilidad. Supóngase que n es impar y α es positivo. Despúes de aplicar el cambio de escala $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ con $\alpha\lambda^{1-n} = 1$ (que es una transformación simpléctica con multiplicador), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha = 1$. La parte autónoma de H corresponde ahora a (2.47) y podemos considerar las variables de acción-ángulo

$$\Phi : x = \gamma\rho^{\frac{2}{n+3}}\mathcal{C}(\theta), \quad y = \gamma^{\frac{n+1}{2}}\rho^{\frac{n+1}{n+3}}\mathcal{S}(\theta).$$

El hamiltoniano $H(t, x, y)$ se transforma bajo Φ en

$$h(t, \theta, \rho) = \kappa\rho^{\frac{2(n+1)}{n+3}} + R^*(t, \theta, \rho),$$

donde $R^*(t, \theta, \rho) = R(t, \Phi(\theta, \rho))$, y κ es cierta constante positiva. De este modo llegamos al sistema

$$\dot{\theta} = \frac{\partial h}{\partial\rho} = \kappa_0\rho^{\frac{n-1}{n+3}} + \frac{\partial R^*}{\partial\rho}, \qquad \dot{\rho} = -\frac{\partial h}{\partial\theta} = -\frac{\partial R^*}{\partial\theta}, \tag{2.55}$$

con $\kappa_0 > 0$. El sistema anterior, es equivalente en algún entorno reducido del origen a

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x. \tag{2.56}$$

La transformación de Poincaré asociada a (2.56) pertenece a $\mathcal{A}^\infty$, lo que implica que la transformación de Poincaré asociada a (2.55) está bien definida en alguna banda $0 < \rho < \rho^*$ donde además verifica la propiedad de intersección. Nuestro objetivo es demostrar que esta transformación tiene curvas invariantes en ciertos anillos del tipo $\{\alpha_1 \leq \rho \leq \alpha_2\}$ con $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ y $\alpha_2 \to 0$. Con el objeto de aplicar el teorema 1.7, se precisa fijar el anillo y evitar exponentes fraccionarios. Por estos motivos, introduciremos el siguiente cambio de variables

$$\rho^{\frac{n-1}{n+3}} = \delta r, \quad r \in [0{,}5, 2{,}5], \tag{2.57}$$

donde $\delta > 0$ es un parámetro pequeño. El nuevo sistema está definido en la banda $D = \{(\theta, r) :\ 0{,}5 \leq r \leq 2{,}5\}$ y es de la forma

$$\dot{\theta} = \kappa_0 \delta r + X_1(t, \theta, r, \delta), \quad \dot{r} = X_2(t, \theta, r, \delta) \tag{2.58}$$

donde

$$\begin{aligned} X_1(t,\theta,r,\delta) &= \ \frac{\partial}{\partial\rho} R^*(t,\theta,(\delta r)^{\frac{n+3}{n-1}}) \\ X_2(t,\theta,r,\delta) &= \ -\tfrac{n-1}{n+3}\delta^{-\frac{n+3}{n-1}} r^{-\frac{4}{n-1}} \frac{\partial}{\partial\theta} R^*(t,\theta,(\delta r)^{\frac{n+3}{n-1}}). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Afirmación. Existe $\Delta > 0$ *tal que* $X_1,\ X_2 \in C^{0,\infty,1}(\mathbb{T} \times D \times [0, \Delta])$ *con* $X_1 = X_2 = \frac{\partial X_1}{\partial \delta} = \frac{\partial X_2}{\partial \delta} = 0$ *en* $\delta = 0$.

Para demostrar esto aplicamos primero el lema 2.18 a la función $R(t, \cdot, \cdot) \in o_{n+1}$ y obtenemos

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} R^*}{\partial\theta^{\alpha_1}\partial\rho^{\alpha_2}}(t,\theta,\rho) = O(\rho^{\frac{2(n+2)}{n+3}-\alpha_2})$$

para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Observe que la estimación es uniforme en t. Ahora, se deduce fácilmente a partir de la definición de X_1 y X_2 en (2.59) que si $\delta > 0$, entonces

$$\frac{\partial^{h_1+h_2}}{\partial\theta^{h_1}\partial r^{h_2}} X_i(t,\theta,r,\delta) = O(\delta^{\frac{n+1}{n-1}}).$$

Esto implica $X_i \in C^{0,\infty,0}$ y $X_i = 0$ en $\delta = 0$.

Para estimar la derivada en δ, nótese que $\frac{\partial X_i}{\partial \delta} = \frac{1}{\delta} r \frac{\partial X_i}{\partial r}$ y por lo tanto

$$\frac{\partial^{h_1+h_2+1}}{\partial\theta^{h_1}\partial r^{h_2}\partial\delta} X_i(t,\theta,r,\delta) = O(\delta^{\frac{2}{n-1}}).$$

Esto demuestra la Afirmación.

Sea $(\theta(t;\theta_0,r_0,\delta), r(t;\theta_0,r_0,\delta))$ la solución de (2.58) con condición inicial (θ_0, r_0) en $t = 0$. Para δ pequeño y $r_0 \in [1,2]$ esta solución puede prolongarse hasta $t = 1$ (cuando $\delta = 0$ el flujo del sistema está trivialmente definido para todo t). A continuación aplicaremos la proposición 1.8 a (2.58) con $K = \{(\theta, r) : \ \theta \in [0,1], \ r \in [1,2]\}$. Las funciones

$$\xi(t) = \frac{\partial \theta}{\partial \delta}(t; \theta_0, r_0, 0), \ \eta(t) = \frac{\partial r}{\partial \delta}(t; \theta_0, r_0, 0)$$

satisfacen las ecuaciones variacionales

$$\dot{\xi} = \kappa_0 r_0, \ \ \dot{\eta} = 0, \ \ \xi(0) = \eta(0) = 0$$

y así obtenemos el desarrollo

$$\begin{cases} \theta(t; \theta_0, r_0, \delta) = & \theta_0 + \delta \kappa_0 r_0 t + \delta \varphi_1(t; \theta_0, r_0, \delta) \\ r(t; \theta_0, r_0, \delta) = & r_0 + \delta \varphi_2(t; \theta_0, r_0, \delta), \end{cases} \tag{2.60}$$

donde los restos verifican

$$||\varphi_1(t; \cdot, \cdot, \delta)||_{C^4(A)} + ||\varphi_2(t; \cdot, \cdot, \delta)||_{C^4(A)} \to 0,$$

cuando $\delta \to 0$, con $t \in [0,1]$ y $A = \mathbb{T} \times [1,2]$.

La propiedad de intersección es invariante por conjugación, en consecuencia la transformación [1]

$$M_\delta : A \subset C \to C, \ \ (\theta_0, r_0) \mapsto (\theta(1; \theta_0, r_0, \delta), r(1; \theta_0, r_0, \delta))$$

también tiene la propiedad de intersección. El desarrollo requerido en el Teorema Twist (Teorema 1.7) es precisamente (2.60) para $t = 1$. Entonces se deduce que M_δ tiene curvas invariantes para δ pequeño. Expresando estas curvas en las coordenadas cartesianas originales resulta que estas son invariantes para Π_H. Esto finaliza la demostración de la estabilidad.

Inestabilidad. La inestabilidad puede demostrarse usando las ideas de Levi-Civita en [**27**]. Daremos una demostración abreviada para completar. Supóngase primero que $\alpha < 0$. Los hamiltonianos H y D tienen un contacto de orden $n+1$, así Π_H y Π_D coinciden hasta el orden n. En (2.36) los coeficientes a_k y b_k son positivos. De aquí se deduce la existencia de una bola pequeña $B \subset \mathbb{R}^2$, centrada en el origen tal que

$$\Pi_H(\mathbb{R}^2_+ \cap B) \subset \mathbb{R}^2_+,$$

donde $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \ y > 0\}$. Más aún, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \cap B$ entonces $x_1 > x + y, \ y_1 > y$ (en consecuencia $x_n > x + ny$). Esto implica que el origen es un repulsor con respecto al primer cuadrante y por lo tanto es inestable. El caso $\alpha > 0$ y n par se trata de la misma manera sustituyendo $\mathbb{R}^2_+$ por el tercer cuadrante. □

Nota 2.10. En virtud de la nota al final de la sección anterior y la proposición 1.8, la demostración de la estabilidad funciona aún con $F \in \mathcal{A}^6$. Por supuesto que este no es el grado de regularidad óptimo. Para relajar el grado de diferenciabilidad se debe estimar directamente la transformación sin pasar por la ecuación diferencial. Sin embargo este procedimiento es sumamente largo.

[1] Aquí C denota el cilindro $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$.

2.5. El Resultado Principal

El resultado principal de este capítulo concierne a la estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$ para la siguiente ecuación diferencial periódica

$$\ddot{x} + a(t)x + c(t)x^{2n+1} + r(t,x) = 0, \quad n \geq 1, \tag{2.61}$$

donde las funciones $a,\ c : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ son continuas, c no es idénticamente nula y el resto $r : \mathbb{T} \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, $(\epsilon > 0)$, es de clase $C^{0,\infty}$ con

$$\frac{\partial^m r}{\partial x^m}(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ m = 0, 1, \ldots, 2n+1.$$

Teorema 2.19. *Supóngase que la ecuación lineal*

$$\ddot{x} + a(t)x = 0 \tag{2.62}$$

es parabólica-inestable ($\nu \neq 0$). Entonces $x \equiv 0$ es estable para (2.61) *si*

$$\sigma\nu c(t) \geq 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

e inestable si

$$\sigma\nu c(t) \leq 0 \ \ \forall \ t \in \mathbb{R}.$$

(Los símbolos σ y ν fueron introducidos en la sección 2.2*).*

Nota 2.11. El resultado principal en [**51**] establece que $x \equiv 0$ es estable si (2.62) es estable y $c(t)$ no cambia el signo ($c \geq 0$ o $c \leq 0$). Si ponemos juntos los dos resultados obtendremos una descripción completa de las propiedades de estabilidad de $x \equiv 0$ cuando $c(t)$ no cambia el signo.

Nota 2.12. La prueba del Teorema mostrará que la condición

$$\sigma\nu \int_0^1 c(t)\phi_1(t)^{2n+2}dt > 0 \quad [\text{resp. } < 0]$$

es suficiente para la estabilidad [resp. la inestabilidad]. Aquí $\phi_1(t)$ es la solución de (2.62) tal que $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$. En la mayoría de los casos no es posible calcular ϕ_1, pero si $a \equiv 0$ entonces $\phi_1 \equiv 1$ y se recupera el resultado de B. Liu en [**29**].

Nota 2.13. Como consecuencia del método de demostración, se obtiene más información que la mera estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$. De hecho, en el caso estable existe una dinámica de tipo twist cerca del origen, lo que tiene muchas consecuencias: existencia de sub-armónicos y soluciones cuasi-periódicas,... etc.

Demostración. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ el tiempo inicial que nos da el Lema 2.12. Después de una traslación del tiempo en la ecuación podemos suponer que $t_0 = 0$. Sean $\phi_1(t),\ \phi_2(t)$ las soluciones de (2.62) que satisfacen $\phi_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 1,\ \dot{\phi}_1(0) = \phi_2(0) = 0$. Del Lema 2.12 se deduce

$$\phi_1(1) = \dot{\phi}_2(1) = \sigma,\ \dot{\phi}_1(1) = 0,\ \phi_2(1) = \eta,$$

donde η es cierto número tal que $\nu\eta > 0$.

La solución de (2.61) con condiciones iniciales $x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0$ se denotará por $x(t; x_0, v_0)$. Esta solución puede prolongarse hasta el tiempo $t = 1$ si (x_0, v_0) está en un entorno pequeño del origen. La transformación de Poincaré

$$P(x_0, v_0) = (x(1; x_0, v_0),\ \dot{x}(1; x_0, v_0))$$

es un elemento de $\mathcal{A}^\infty$ y verifica

$$P'(0,0) = \begin{pmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) \\ \dot{\phi}_1(1) & \dot{\phi}_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \eta \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

A continuación aplicaremos los Corolarios 2.16 y 2.17 a P y para esto necesitaremos calcular su desarrollo de Taylor hasta el orden $2n+1$. Como primer paso, el teorema de diferenciabilidad respecto de parámetros nos da una aproximación de orden 1 para el flujo no lineal

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(t; x_0, v_0) = & \phi_1(t)x_0 + \phi_2(t)v_0 + O(x_0^2 + v_0^2) \\ \dot{x}(t; x_0, v_0) = & \dot{\phi}_1(t)x_0 + \dot{\phi}_2(t)v_0 + O(x_0^2 + v_0^2), \end{array} \right. \tag{2.63}$$

donde la estimación es uniforme en $t \in [0,1]$. Como segundo paso, de la fórmula de variación de constantes y la propia ecuación se deduce

$$x(t; x_0, v_0) = \phi_1(t)x_0 + \phi_2(t)v_0 +$$
$$\int_0^t [\phi_1(t)\phi_2(s) - \phi_1(s)\phi_2(t)]\{c(s)x(s; x_0, v_0)^{2n+1} + r(s, x(s; x_0, v_0))\}ds$$

y

$$\dot{x}(t; x_0, v_0) = \dot{\phi}_1(t)x_0 + \dot{\phi}_2(t)v_0 +$$
$$\int_0^t [\dot{\phi}_1(t)\phi_2(s) - \phi_1(s)\dot{\phi}_2(t)]\{c(s)x(s; x_0, v_0)^{2n+1} + r(s, x(s; x_0, v_0))\}ds.$$

Finalmente, combinando estas identidades con (2.63) encontramos

$$P(x_0, v_0) = (x_1, v_1)$$

con

$$x_1 = \sigma x_0 + \eta v_0 + \int_0^1 [\sigma\phi_2(s) - \eta\phi_1(s)]c(s)(\phi_1(s)x_0 + \phi_2(s)v_0)^{2n+1}ds + \ldots,$$

$$y_1 = \sigma v_0 - \int_0^1 \sigma\phi_1(s)c(s)(\phi_1(s)x_0 + \phi_2(s)v_0)^{2n+1}ds + \ldots$$

La condición (2.45) se verifica con

$$\frac{\partial^{2n+1}P_2}{\partial x_0^{2n+1}}(0,0) = -(2n+1)!\sigma \int_0^1 c(s)\phi_1(s)^{2n+2}ds$$

y la conclusión se sigue de los corolarios antes mencionados.□

2.6. Aplicaciones

Finalizaremos este capítulo con algunas aplicaciones del Teorema 2.19.

2.6.1. El espectro de la ecuación de Hill. En primer lugar, queremos ilustrar como pueden emplearse el teorema precedente y el teorema principal de [**51**] para obtener una versión no lineal del clásico resultado sobre el espectro en ecuaciones de Hill ([**31**, capítulo 2]).

Dada una función $\alpha \in C(\mathbb{T})$ considérese la ecuación

$$\ddot{x} + \alpha(t)x + \lambda x = 0 \tag{2.64}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro. La teoría clásica de esta ecuación (véase [**31**]) dice que existen dos sucesiones crecientes (el espectro) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\lambda_n^{'}\}_{n\geq 1}$ con

$$\lambda_0 < \lambda_1^{'} \leq \lambda_2^{'} < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3^{'} \leq \lambda_4^{'} < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \ldots \to +\infty$$

y tal que (2.64) es

- elíptica si
$$\lambda \in (\lambda_0,\ \lambda_1^{'}) \cup (\lambda_2^{'},\ \lambda_1) \cup (\lambda_2,\ \lambda_3^{'}) \cup (\lambda_4^{'},\ \lambda_3) \cup \ldots$$
- hiperbólica si
$$\lambda \in (-\infty,\ \lambda_0) \cup (\lambda_1^{'},\ \lambda_2^{'}) \cup (\lambda_1,\ \lambda_2) \cup (\lambda_3^{'},\ \lambda_4^{'}) \cup \ldots$$
- parabólica si $\lambda = \lambda_n$ o $\lambda = \lambda_n^{'}$ para algún n

En el caso parabólico es posible utilizar la información en [**31**] y la Proposición 2.13 para calcular los invariantes simplécticos σ y ν. A saber,

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \lambda_n \\ -1 & \text{si } \lambda = \lambda_n^{'} \end{cases},$$

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = \lambda_0 \text{ o } \lambda = \lambda_n = \lambda_{n+1} \text{ o } \lambda = \lambda_n^{'} = \lambda_{n+1}^{'} \\ 1 & \text{si } \lambda = \lambda_{2n+2} > \lambda_{2n+1} \text{ o } \lambda = \lambda_{2n+1}^{'} < \lambda_{2n+2}^{'} \\ -1 & \text{si } \lambda = \lambda_{2n+1} < \lambda_{2n+2} \text{ o } \lambda = \lambda_{2n+2}^{'} > \lambda_{2n+1}^{'}, \end{cases}$$

para $n = 0, 1, \ldots$

Considérese ahora una ecuación de Hill no lineal de la forma

$$\ddot{x} + \alpha(t)x + \lambda x + c(t)x^3 + \cdots = 0,$$

donde supondremos que el coeficiente $c(t)$ no es idénticamente nulo y tiene signo constante. Si por ejemplo $c \geq 0$, los resultados en [**51**] y el teorema de la sección anterior implican que el equilibrio $x \equiv 0$ es estable si y sólo si

$$\lambda \in [\lambda_0,\ \lambda_1^{'}) \cup [\lambda_2^{'},\ \lambda_1) \cup [\lambda_2,\ \lambda_3^{'}) \cup [\lambda_4^{'},\ \lambda_3) \cup \ \ldots,$$

es decir, debemos añadir los nodos pares a la región de elipticidad de la ecuación lineal. Si por el contrario $c \leq 0$ entonces análogamente tendríamos que $x = 0$ es estable si y sólo si

$$\lambda \in (\lambda_0,\ \lambda_1^{'}] \cup (\lambda_2^{'},\ \lambda_1] \cup (\lambda_2,\ \lambda_3^{'}] \cup (\lambda_4^{'},\ \lambda_3] \cup \ \ldots,$$

y deben añadirse en este caso, los nodos impares a la región de elipticidad.

2.6.2. El péndulo de longitud variable. Un péndulo cuya longitud varía périódicamente en el tiempo puede ser modelado por la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \alpha(t) \sin x = 0, \tag{2.65}$$

donde $\alpha \in C(\mathbb{T})$ es una función positiva relacionada con la longitud variable del péndulo. Este modelo ha sido clásicamente empleado en mecánica para explicar el fenómeno de resonancia paramétrica. La ecuación anterior puede reescribirse de la siguiente manera

$$\ddot{x} + \alpha(t)x - \frac{1}{6}\alpha(t)x^3 + \cdots = 0.$$

Esta ecuación presenta el equilibrio $x \equiv 0$. Arnold y Avez muestran en [**8**, pág. 85]) que si α está suficientemente próxima a una constante entonces $x \equiv 0$ es estable. En [**51**] Ortega obtiene la estabilidad del equilibrio suponiendo sólamente que la ecuación linealizada es estable.

Combinando el resultado principal en [**51**] y el Teorema 2.19, obtenemos la siguiente caracterización la cual mejora los resultados previos en [**50**] y [**51**].

COROLARIO 2.20. *La posición de equilibrio $x \equiv 0$ es estable para* (2.65) *si y sólo si la ecuación*

$$\ddot{x} + \alpha(t)x = 0.$$

es elíptica o parabólica con $\sigma\nu \leq 0$.

2.6.3. Un problema restringido de tres cuerpos. La configuración del problema de tres cuerpos estudiada por Sitnikov es la siguiente:

Consideremos dos cuerpos primarios de igual masa $m_1 = m_2$ que se mueven en elipses de excentricidad $0 \leq \epsilon < 1$, alrededor de su centro de masas O que se considera en reposo; un tercer cuerpo de masa despreciable $m_3 = 0$ se mueve a lo largo de la línea OX perpendicular al plano del movimiento de los primarios. De la simetría de la situación (el movimiento de m_1 y m_2 es simétrico respecto de O) resulta claro que el tercer cuerpo permanecerá en la recta OX. El problema consiste en describir el movimiento del tercer cuerpo que está siendo periódicamente excitado por los otros dos.

Como es usual se normaliza el tiempo de modo que el período de los primarios sea 2π, las unidades de masa de modo que $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ y las unidades de longitud para que la constante de gravitación pase a ser $G = 1$. Sea x la coordenada del tercer cuerpo y $r = r(t, e)$ la distancia entre las primarias y el centro de masas O. Entonces la ecuación diferencial del problema de Sitnikov es ([**44**])

$$\ddot{x} = -\frac{x}{(x^2 + r(t)^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2.66}$$

Es un hecho conocido que r es una función periódica y par de t que tiene el siguiente desarrollo cerca de $e = 0$

$$r(t, e) = \frac{1}{2}(1 - e\cos t) + O(e^2).$$

Este problema fue propuesto por Kolmogorov en 1954, estudiado por Sitnikov en 1959 y posteriormente por Alekseev en los 60' y por Moser en los 70'.

En esta memoria estaremos interesados por las propiedades de estabilidad de la posición de equilibrio $x \equiv 0$. Cuando $e = 0$ la ecuación pasa ser autónoma ($r \equiv \frac{1}{2}$) con hamiltoniano

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}}.$$

Entonces una aplicación directa de la teoría KAM permite demostrar la estabilidad del equilibrio para pequeños valores de la excentricidad e. Estamos interesados en estudiar lo que pasa cuando e no es un pequeño parámetro.

Un cálculo sencillo nos muestra que el coeficiente $c(t)$ en la ecuación (2.66) es negativo definido y $b \equiv 0$. En consecuencia, combinando el resultado principal en [**51**] y el Teorema 2.19 obtenemos el siguiente

COROLARIO 2.21. *La posición de equilibrio* $x \equiv 0$ *es estable para* (2.66) *si y sólo si la ecuación*

$$\ddot{x} + \frac{1}{r(t)^3}x = 0$$

es elíptica o parabólica con $\sigma\nu \leq 0$.

NOTA 2.14. En [**3**] los autores también estudian este problema obteniendo algunos resultados parciales a la cuestión de la estabilidad.

CAPíTULO 3

El Método de Sub y Super-Soluciones y la Estabilidad

3.1. Introducción

En este capítulo, consideraré el problema periódico

$$\ddot{x} + g(t,x) = 0, \qquad x(0) = x(T),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(T), \tag{3.67}$$

donde $g \in C^{0,4}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$. De ahora en adelante usaremos la notación $\mathbb{T} = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.

El objetivo principal será conectar ciertos métodos de existencia de soluciones para el problema (3.67) con la estabilidad. El método de Sub y Super-soluciones es uno de los métodos más empleados para estudiar el problema (3.67) y requiere de cierta habilidad en cada caso. Todos sabemos que si una función continua cambia de signo en un intervalo ha de tener un cero. Hasta cierto punto, el método de Sub y Super-soluciones se puede ver como la extensión de este hecho al marco funcional del problema periódico (3.67).

Primero describiremos el método en su versión más clásica.

Una función $\alpha \in C^2(\mathbb{T})$ se dice una sub-solución de (3.67) si

$$\ddot{\alpha}(t) + g(t,\alpha(t)) \geq 0,\ \forall t \in [0,T].$$

Una super-solución β se define de manera similar invirtiendo la desigualdad anterior. Una sub-solución (super-solución resp.) se dice estricta si la desigualdad anterior es estricta en todo el intervalo $[0,T]$. Supongamos ahora que α y β están ordenadas y satisfacen

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En este caso es bien conocido que (3.67) tiene una solución entre α y β (véase [**17**]).

Dancer y Ortega probaron en [**16**] que este método típicamente produce soluciones inestables. Esto significa que cuando α, β son estrictas y la región $\alpha < \beta$ contiene una única solución de (3.67) entonces ésta es inestable. Por ejemplo, en la ecuación del péndulo

$$\ddot{x} + \lambda \sin x = 0,\ (\lambda > 0)$$

encontramos el equilibrio inestable $x \equiv \pi$ entre las sub y super-soluciones constantes $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}$ y $\beta \equiv \frac{3\pi}{2}$.

Supongamos ahora que α y β están ordenadas en el modo inverso; esto significa que satisfacen

$$\beta(t) \leq \alpha(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En general no se puede garantizar la existencia de una solución de (3.67) entre β y α. Un ejemplo fácil que muestra este hecho es el siguiente

$$\ddot{x} + x = \sin t,\ x(0) = x(2\pi),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi),$$

con $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv -1$. Sin embargo, si se impone la condición adicional

$$g_x(t,x) \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \ \text{ en } \ [\beta, \alpha],$$

donde $[\beta, \alpha] = \{(t,x) : \beta(t) \leq x \leq \alpha(t)\}$, entonces existe al menos una solución φ of (3.67) con

$$\alpha(t) \geq \varphi(t) \geq \beta(t)\ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Véase [**17**, Teorema 4.1] y [**64**] para una reciente aplicación de este método.

Regresemos a la ecuación del péndulo con $\lambda \leq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$. Observe que $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}$ y $\beta \equiv -\frac{\pi}{2}$ son sub y super soluciones con $\alpha > \beta$. El equilibrio $x \equiv 0$ es la única solución de (3.67) entre ellas y es estable. El primer objetivo de este capítulo será generalizar esta observación (Teorema 3.25).

Es frecuente en las aplicaciones que la ecuación en (3.67) presente una simetría de tipo impar, es decir,

$$g(-t,-x) = -g(t,x), \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.68}$$

En estas condiciones resulta natural estudiar las propiedades de las soluciones x de (3.67) que satisfacen

$$-x(-t) = x(t) = x(t+T),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

La búsqueda de tales soluciones es equivalente, en virtud de la simetría de g, al siguiente problema de Dirichlet

$$\ddot{x} + g(t,x) = 0,\ x(-\frac{T}{2}) = x(0) = 0. \tag{3.69}$$

Es decir, las soluciones que buscamos serán las extensiones impares y T-periódicas de las soluciones de (3.69). El método de Sub y Super soluciones tiene también su versión para un problema de Dirichlet y resulta muy eficaz en las aplicaciones.

Una función $\alpha \in C[-T/2, 0] \cap C^2(-T/2, 0)$ se dice una sub-solución del problema (3.69) si

(i) $\alpha(-T/2) \leq 0,\ \alpha(0) \leq 0$
(ii) $\ddot{\alpha} + g(t, \alpha(t)) \geq 0,\ \forall t \in (-T/2, 0)$.

La definición de una super-solución es similar invirtiendo las desigualdades en (i)-(ii).

Sean α, β un par de sub y super-soluciones de (3.69) tal que $\alpha \leq \beta$. El método de Sub y Super-Soluciones para el problema de Dirichlet establece que existe una solución φ de (3.69) tal que $\forall t \in [-T/2, 0]$

$$\alpha(t) \leq \varphi(t) \leq \beta(t).$$

(véase [**17**, Teorema 1.4])

Para cada función $\gamma \in C[-T/2, 0]$, denotaremos por γ^* a la extensión T-periódica de la función

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [-T/2, 0] \\ -\gamma(-t) & \text{si } t \in (0, T/2]. \end{cases}$$

De acuerdo con esta notación, resulta que φ^* es una solución impar de (3.67) que está comprendida entre las funciones α^* y β^*. Es claro que $\alpha^*,\ \beta^* \in L^\infty(\mathbb{T})$ y son continuas a trozos. ¿Qué podemos decir sobre la estabilidad de φ^* ?. El segundo objetivo de este capítulo consistirá en contestar esta pregunta.

La dificultad principal en los problemas expuestos anteriormente lo constituye el carácter no lineal del problema de estabilidad. Como ya se ha apuntado antes, usando las técnicas de linealización uno puede decir, como mucho, que una solución es elíptica. Así, en este capítulo se combinará la teoría de Formas Normales y la teoría KAM, para encontrar condiciones suficientes sobre los términos de orden superior de g que impliquen estabilidad. Para este propósito se empleará la tercera aproximación. Para ser precisos, los problemas anteriores se reducirán (trasladando la solución periódica al origen) a estudiar las propiedades de estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$ para una ecuación diferencial del tipo

$$\ddot{x} + a(t)x + b(t)x^2 + c(t)x^3 + \cdots = 0, \tag{3.70}$$

donde los nuevos términos, corresponden al desarrollo de Taylor hasta el tercer orden de $g(t, \phi(t) + x)$ cerca de $x = 0$, donde ϕ denota la solución periódica del problema estudiado.

En [**50, 51, 52**] Ortega ha obtenido resultados de estabilidad para una ecuación general del tipo anterior. En estos artículos el autor siempre supone que $b \geq 0$ o $b \leq 0$ y $c \leq 0$ (véase también [**29, 46**] para resultados relacionados). En algunos problemas interesantes encontramos que el coeficiente b cambia de signo y los resultados de Ortega no pueden aplicarse.

En la seccción 3.2 se darán condiciones suficientes para la estabilidad del equilibrio en una ecuación general del tipo (3.70), cuando los coeficientes b y c cambian de signo (Teorema 3.22). Las condiciones de estabilidad son refinadas en el Teorema 3.23 cuando $b \equiv 0$. Estos dos resultados son extensiones de los teoremas 1 y 2 respectivamente en

[**50**]. El teorema 3.22 es el resultado clave para alcanzar los objetivos de este capítulo.

Las demostraciones de estos resultados harán un uso frecuente de las técnicas desarrolladas por Ortega en [**50, 52**] y serán presentadas en la última sección del capítulo. Para señalar las principales diferencias técnicas de mi prueba con respecto a [**52**], permítanme bosquejar las etapas en la prueba de Ortega.

En [**52**] el autor emplea una representación integral para el primer coeficiente de Birkhoff β. Es bien conocido que si $\beta \neq 0$ uno tiene estabilidad si no hay resonancias fuertes (véase el capítulo 1). El integrando depende de b, c y las soluciones de la ecuación linealizada. Entonces este integrando tomará un signo definido si los coeficientes b y c tienen los signos apropiados. Este hecho está basado en el principio del máximo. En nuestro caso b y c cambian de signo y el argumento vía el principio del máximo no puede aplicarse. Ahora, uno tiene que hacer una compensación entre varias integrales para conseguir un signo definido. Para llevar a cabo esto último, será necesario controlar el crecimiento de las soluciones de la ecuación linealizada. Con este propósito en mente, se desarrollarán en la sección 3.5 algunas técnicas de comparación para la ecuación linealizada.

Nuestro primer objetivo será completado en el Teorema 3.25 el cual es establecido y demostrado en la sección 3.3 y proporciona condiciones suficientes para la existencia de una única solución $\varphi :\ \beta \leq \varphi \leq \alpha$ que es estable. La motivación inicial para este estudio fue la búsqueda de soluciones periódicas estables en la ecuación del péndulo forzado

$$\ddot{x} + a \sin x = p(t), \tag{3.71}$$

sin usar pequeños parámetros. Aquí $a > 0$ es un parámetro y p es una función continua y T-periódica verificando $\int_0^T p = 0$. En este caso, encontramos que el coeficiente $b(t)$ de la ecuación correspondiente (3.70) asociada a cualquier solución periódica de (3.71), cambia el signo. El Teorema 3.25 se aplicará a esta ecuación para demostrar que para un rango preciso de valores del parámetro a (el cual dependerá de p), existe una única oscilación T-periódica estable de (3.71) en $(-\pi/2, \pi/2)$ (véase la sección 3.3).

La sección 3.4 está dedicada enteramente al problema periódico impar. El segundo objetivo de este capítulo se cristaliza en el Teorema 3.26. La motivación inicial para encontrar un resultado de este tipo fue la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \alpha\sqrt{1 + 3\sin^2 t}\,\sin x = 6 \sin 2t(1 + 3\sin^2 t)^{-2},$$

la cual modela el movimiento de un satélite terrestre que se mueve sobre una órbita circular polar (véase [**65**]). En [**65**] se demuestra la existencia de una solución periódica impar, que es positiva sobre medio período y linealmente estable si $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Como aplicación del Teorema 3.26 se demuestra que esta solución es estable si $\alpha \leq \frac{1}{18}$.

3.2. Equilibrios de Tipo Twist

Esta es una sección intermedia, donde estudiaremos las propiedades de estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$ para la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + a(t)x + b(t)x^2 + c(t)x^3 + r(t,x) = 0, \tag{3.72}$$

donde las funciones a, b, $c : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ son continuas, b y c no son ambas idénticamente nulas y el resto $r \in C^{0,4}\left(\mathbb{T} \times (-\epsilon, \epsilon)\right), \epsilon > 0$ satisface

$$\frac{\partial^k r}{\partial x^k}(t,0) = 0, \qquad k = 0, \ldots 3, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

En los artículos [**50, 51, 52**] el autor ha demostrado que el equilibrio $x \equiv 0$ de (3.72) es de tipo twist (véase capítulo 1 para definiciones) suponiendo que los coeficientes b y c tienen signo constante $(\, b \leq 0 \text{ o } b \geq 0; \ c \leq 0\,)$ y bajo algunas hipótesis sobre la ecuación linealizada

$$\ddot{x} + a(t)x = 0. \tag{3.73}$$

A continuación presentamos el resultado clave de este capítulo, el cual avanza en el problema de la estabilidad del equilibrio cuando los coeficientes no lineales cambian el signo.

TEOREMA 3.22. *Supóngase que existen σ, γ números positivos tales que*

$$\sigma^2 \leq a(t) \leq \gamma^2 \leq (\pi/3T)^2. \tag{3.74}$$

Entonces el equilibrio $x \equiv 0$ de (3.72) *es de tipo twist si se verifica la siguiente condición*

$$\sigma^6 \int_0^T c^- - \sigma^2\gamma^4 \int_0^T c^+ > 2\gamma^5 \int_0^T b^+ \int_0^T b^-. \tag{3.75}$$

La demostración de este teorema requiere de algún esfuerzo y he preferido posponerla hasta la sección 3.5.

NOTA 3.15. El Teorema 3.22 es una extensión del Teorema 1 in [**50**] cuando los coeficientes no lineales cambian el signo. Si $b \geq 0$ o $b \leq 0$ y $c \leq 0$ no es la función nula, la condición (3.75) se satisface trivialmente. En tal caso, el Teorema 1 en [**50**] impone una condición menos restrictiva que (3.74). En [**52**] las condiciones sobre $a(t)$ son relajadas aún más. Esto se debe a que en estos trabajos, el signo del coeficiente twist se determina con los signos de b y c vía el principio del máximo. En contraste, en nuestro caso la variación del signo de b y c no nos permite el uso del principio del máximo y tiene que hacerse una compensación entre varios términos para conseguir un signo definido. En esta compensación, intervienen las soluciones de la ecuación linealizada, lo que hace necesaria una cota del tipo (3.74) para controlar dichas soluciones.

Observe también que la condición (3.74), obliga a los multiplicadores de Floquet de (3.73) a permanecer en la región $\{\theta \in \mathbb{S}^1 : 0 < |\theta| < \frac{\pi}{3}\}$.

NOTA 3.16. Un criterio de estabilidad debería estar determinado por un funcional o una familia finita de funcionales (como ocurre en las ecuaciones lineales [**63**])

$$\Phi_i : C\left(\mathbb{T}\right)^3 \to \mathbb{R}, \qquad (a,b,c) \mapsto \Phi_i(a,b,c), \qquad i = 1,\ldots,n$$

tal que $x \equiv 0$ es estable para (3.72) si

$$\Phi_i(a,b,c) > 0; \qquad i = 1,\ldots,n.$$

El cambio de escala en la amplitud $x = \lambda y$, $\lambda > 0$ transforma la ecuación (3.72) en

$$\ddot{y} + a(y)y + \lambda b(t)y^2 + \lambda^2 c(t)y^3 + \cdots = 0,$$

así que uno debería esperar

$$\Phi_i(a,b,c) > 0 \iff \Phi_i(a,\lambda b,\lambda^2 c) > 0,\ \forall \lambda > 0.$$

En nuestro caso

$$\Phi_1 = min\, a - \sigma^2,\ \Phi_2 = \gamma^2 - max\, a,$$
$$\Phi_3 = \sigma^6 \int_0^T c^- - \sigma^2\gamma^4 \int_0^T c^+ - 2\gamma^5 \int_0^T b^+ \int_0^T b^-,$$

y es inmediato comprobar que tenemos la homogeneidad correcta.

NOTA 3.17. Los clásicos criterios de estabilidad para una ecuación de Hill son óptimos ([**63**]), esto significa que las desigualdades en los funcionales que definen el criterio son óptimas para la estabilidad. Para el problema no lineal (3.72) la situación es más complicada. Por ejemplo, las cotas impuestas sobre $a(t)$ en el Teorema 1 de [**50**] se afinan un poco más en [**52**] (véase Corolario 3.3 de este artículo) pero no son óptimas. El criterio de estabilidad más general de [**52**] (Teorema 3.2), fija los signos de b y c y apela a una región concreta para los multiplicadores de Floquet. Se predice así la existencia de una región óptima (para los multiplicadores) de estabilidad. Sin embargo, esta región es actualmente desconocida.

Ahora, resulta claro que en nuestro caso, el criterio está lejos de ser óptimo. Por ejemplo, no sabemos si la constante $\pi/3T$ en el Teorema 3.22 podría mejorarse, o más generalmente, si sería posible predecir la existencia de una región óptima para los multiplicadores. Esto debería requerir, al menos, un estudio similar al dado en [**52**] sobre la comparación de algunos coeficientes del 2-jet de la transformación de Poincaré (veáse [**52**, Lemma 4.7]). Este estudio se complica tremendamente cuando b y c cambian el signo.

El siguiente ejemplo muestra que alguna condición como (3.75) es realmente necesaria en el Teorema 3.22.

Ejemplo. Considérese la ecuación diferencial 1-periódica

$$\ddot{x} + x + x^2 + c(t)x^3 = 0, \tag{3.76}$$

donde $c(t)$ es una función continua y 1-periódica que determinaremos más tarde.

De la fórmula (1.17) (véase también [**52**, Proposición 4.4]), el coeficiente twist asociado a (3.76) está dado por

$$\beta = \beta(c) = -\frac{3}{8}\int_0^1 c(t)dt + \kappa,$$

donde κ es cierta constante positiva independiente de c. Nótese que en este caso $\sigma = \gamma = 1$ y la primera condición del Teorema 3.22 se verifica con $T = 1$. Escogiendo $c \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ con signo variable tal que $\beta(c) = 0$ i.e.

$$\int_0^1 c = \frac{8}{3}\kappa,$$

claramente se viola la condición (3.75).

Cuando (3.72) carece de término cuadrático las hipótesis del Teorema 3.22 pueden afinarse. El próximo resultado será demostrado en la sección 3.5.

Teorema 3.23. *Supóngase que* $b \equiv 0$ *en* (3.72) *y que existen* σ, γ *números positivos tales que*

$$\sigma^2 \le a(t) \le \gamma^2 < (\pi/2T)^2. \tag{3.77}$$

Entonces el equilibrio $x \equiv 0$ *es de tipo twist si se cumple alguna de las siguientes condiciones*

(i) $\sigma^4 \int_0^T c^-(t)dt - \gamma^4 \int_0^T c^+(t)dt > 0$
(ii) $\gamma^4 \int_0^T c^-(t)dt - \sigma^4 \int_0^T c^+(t)dt < 0.$

Nota 3.18. Nótese que este resultado es una extensión del Teorema 2 en [**50**] cuando c cambia el signo. Observe que si c no es idénticamente nulo y mantiene el signo, entonces (i) o (ii) se verifica de modo trivial. En tal caso el Teorema 2 en [**50**] relaja la condición (3.77).

2. Para el caso $a \equiv$ *constante* las condiciones de estabilidad (i)-(ii) pasan a ser

$$\int_0^T c \neq 0. \tag{3.78}$$

Pueden darse ejemplos con $a(t)$ constante, donde la igualdad es alcanzada en (3.78), el coeficiente twist es cero y el equilibrio es inestable (véase el ejemplo en [**51**, sección 4.2]). Esto indica que la condición (3.78) es óptima cuando $a \equiv$ *constante*.

Un condición similar de tipo promedio fue dada en [**29**] cuando $a(t) \equiv 0$. En este caso el equilibrio es inestable para la ecuación linealizada.

3.3. Sub y Super-Soluciones en Orden Invertido y Estabilidad

En esta sección conectaremos el Método de Sub y Super-soluciones en orden invertido y la estabilidad. El siguiente resultado es bien conocido y proporciona una solución de (3.67) entre un par de sub y super-soluciones de (3.67) que tienen el orden inverso ([**17**, Teorema 4.12]).

Proposición 3.24. *Sean α, β un par de sub y super-soluciones de* (3.67) *tales que $\beta(t) \leq \alpha(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Supóngase que para todo t y u, v, con $\beta(t) \leq u \leq v \leq \alpha(t)$, se verifica*

$$(\pi/T)^2 u - g(t,u) \leq (\pi/T)^2 v - g(t,v). \tag{3.79}$$

Entonces existe una solución φ del problema (3.67) tal que

$$\beta(t) \leq \varphi(t) \leq \alpha(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Obsérvese que la condición (3.79) no es necesaria en el caso clásico de sub y super-soluciones bien ordenadas: $\alpha(t) \leq \beta(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$.

A cada pareja α, β de sub y super-soluciones de (3.67) con

$$\alpha(t) \geq \beta(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

asociaremos las siguientes funciones continuas:

$$A_\star(t) = L(\partial_x g(t, \centerdot)), \ \ A^\star(t) = U(\partial_x g(t, \centerdot)),$$

$$B_+(t) = U(\frac{1}{2!}[\partial_x^2 g(t, \centerdot)]^+), \ \ B_-(t) = U(\frac{1}{2!}[\partial_x^2 g(t, \centerdot)]^-),$$

$$C_+(t) = U(\frac{1}{3!}[\partial_x^3 g(t, \centerdot)]^+), \ \ C_-(t) = L(\frac{1}{3!}[\partial_x^3 g(t, \centerdot)]^-),$$

donde los operadores

$$L, U : C(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \to C(\mathbb{T})$$

se definen por

$$L(f)(t) = \inf\{f(t,\xi) : \beta(t) \leq \xi \leq \alpha(t)\},$$

$$U(f)(t) = \sup\{f(t,\xi) : \beta(t) \leq \xi \leq \alpha(t)\},$$

para toda $f \in C(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Llamaremos a estas funciones *las funciones auxiliares* del problema (3.67) asociadas al par (α, β).

Recordemos del capítulo 1 que una solución periódica φ de (3.67) se dice que es de tipo twist si es elíptica, 4-elemental y el coeficiente twist β de φ satisface $\beta \neq 0$.

TEOREMA 3.25. *Supóngase que* $g \in C^{0,4}(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ *y que existen* α, β *sub y super-soluciones de* (3.67) *tales que*

$$\alpha(t) \geq \beta(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Además, supóngase que las funciones auxiliares de (3.67) *asociadas a* α, β *verifican*

(i) $0 < A_\star \leq A^\star \leq (\pi/3T)^2$,

(ii) $m_\star^3 \int_0^T C_- - m_\star (M^\star)^2 \int_0^T C_+ > 2(M^\star)^{\frac{5}{2}} (\int_0^T B_+)(\int_0^T B_-)$,

donde $m_\star = \text{mín}\, A_\star$ *y* $M^\star = \text{máx}\, A^\star$. *Entonces* (3.67) *tiene una única solución* φ *en* $[\beta, \alpha]$ *que es de tipo twist.*

Demostración. Haremos la demostración en varios pasos.

Paso 1. *Existencia: Si* $0 < A_\star \leq A^\star \leq (\pi/T)^2$ *entonces* (3.67) tiene al menos una solución $\varphi \in [\beta,\ \alpha]$.

La condición (i) implica

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) \leq (\pi/T)^2$$

en $[\beta,\ \alpha]$. Por lo tanto, se verifica la condición (3.79). De la Proposición 3.24 se obtiene la existencia.

Paso 2. *Unicidad:* (3.67) *tiene a lo sumo una solución en* $[\beta,\ \alpha]$.

Supóngase que existen dos soluciones distintas ϕ, $\psi \in [\beta,\ \alpha]$. Observe que $\phi - \psi$ es una solución T-periódica no trivial de la ecuación de Hill

$$\ddot{x} + \tilde{a}(t)x = 0, \tag{3.80}$$

donde $\tilde{a}$ es la función continua y T-periódica definida por

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} \frac{g(t,\phi(t)) - g(t,\psi(t))}{\phi(t) - \psi(t)} & \text{si } \phi(t) \neq \psi(t), \\ \frac{\partial g}{\partial x}(t, \phi(t)) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En consecuencia, 1 es un multiplicador de Floquet de (3.80). Aplicando el teorema del valor medio, es claro que (i) implica

$$0 < A_\star \leq \tilde{a}(t) \leq A^\star < (\pi/T)^2,\ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Así, del clásico criterio de estabilidad de Zukovskii ([**63**]) se concluye que (3.80) es elíptica, produciéndose una contradicción. Esto prueba el Paso 2.

Paso 3. φ *es elíptica.*

La ecuación variacional de φ es

$$\ddot{y} + \frac{\partial g}{\partial x}(t,\ \varphi(t))y = 0.$$

De (i) se deduce que

$$0 < \frac{\partial g}{\partial x}(t,\ \varphi(t)) < (\pi/T)^2,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

El Paso 3 se sigue entonces del criterio de Zukovskii anteriormente mencionado.

Paso 4. φ *es de tipo twist.*

Trasladando φ al origen (por medio de $y = x - \varphi(t)$) llegamos a una ecuación del tipo (3.72) con

$$a(t) = \partial_x^1 g(t, \varphi(t)), \;\; b(t) = \frac{1}{2!}\partial_x^2 g(t, \varphi(t)), \;\; c(t) = \frac{1}{3!}\partial_x^3 g(t, \varphi(t)).$$

Aplicaremos el Teorema 3.22 con $\sigma^2 = \text{mín}\, A_\star$ y $\gamma^2 = \text{máx}\, A^\star$. Observe que para todo t se verifican las siguientes desigualdades

- $0 < \sigma^2 \le a(t) \le \gamma^2 \le (\pi/3T)^2$,
- $c^-(t) \ge C_-(t), \;\; C_+(t) \ge c^+(t), \;\; B_\pm(t) \ge b^\pm(t)$.

Estas desigualdades implican que la condición (3.75) es una clara consecuencia de (ii). Una aplicación del Teorema 3.22 concluye la demostración. □

• **Aplicación : El Péndulo Forzado.**

Estudiaremos ahora un péndulo simple con una fuerza externa p T-periódica actuando sobre el sistema, es decir, consideraremos la ecuación

$$\ddot{x} + \epsilon \sin x = p(t), \tag{3.81}$$

donde $p \in C(\mathbb{T})$ y ϵ es un parámetro. Supondremos que

$$\int_0^T p = 0.$$

Como p tiene promedio cero, podemos fijar la solución T-periódica P de $\ddot{y} = p$ con $\int_0^T P = 0$.

Nótese ahora que si $\|P\|_\infty < \pi/2$, las funciones

$$\alpha(t) = P(t) + \|P\|_\infty, \qquad \beta(t) = P(t) - \|P\|_\infty$$

son sub y super-soluciones de (3.81) con orden invertido y tales que

$$-2\|P\|_\infty \le \beta(t) \le 0 \le \alpha(t) \le 2\|P\|_\infty.$$

Suponiendo que $\|P\|_\infty < \pi/4$ es fácil calcular las funciones auxiliares asociadas. Un cálculo sencillo muestra que

$$A_\star(t) = \epsilon \cos(|P(t)| + ||P||_\infty), \;\; A^\star = \epsilon,$$

$$B_+(t) = \frac{1}{2}\epsilon \sin(||P||_\infty - P(t)), \;\; B_-(t) = \frac{1}{2}\epsilon \sin(||P||_\infty + P(t)),$$

$$C_-(t) = \frac{1}{6}\epsilon \cos(||P||_\infty + |P(t)|), \;\; C_+ \equiv 0.$$

De esta manera, las condiciones (i)-(ii) del Teorema 3.25 se convierten en

$$\epsilon \in (0,\, (\pi/3T)^2] \cap (0,\, \zeta(P)), \tag{3.82}$$

donde

$$\zeta(P) = \frac{4}{9}\frac{\cos^6(2\|P\|_\infty)(\int_0^T \cos(\|P\|_\infty + |P(t)|)dt)^2}{(\int_0^T \sin(\|P\|_\infty - P(t))dt)^2(\int_0^T \sin(\|P\|_\infty + P(t))dt)^2}.$$

(Nótese que ζ toma el valor ∞ si $P = 0$)

Luego, una aplicación del Teorema 3.25 y un argumento similar al paso 2 del Teorema 3.25 nos permite concluir lo siguiente

Si ϵ pertenece al intervalo (3.82) *y* $\|P\|_\infty < \pi/4$ *entonces* (3.81) *tiene una única solución T-periódica φ en $(-\pi/2,\, \pi/2)$ la cual es de tipo twist. Más aún,*

$$\|\varphi\|_\infty \leq 2\|P\|_\infty.$$

Para el caso particular $p(t) = \sin 2t$, un cálculo númerico nos da el valor aproximado $\zeta \simeq 1{,}44481\ldots$. En consecuencia un intervalo de estabilidad de la ecuación

$$\ddot{x} + \epsilon \sin x = \sin 2t,$$

sería

$$0 < \epsilon \leq 1/9.$$

NOTA 3.19. En el tratamiento clásico de la estabilidad en el péndulo forzado, el término de forzamiento p aparece como δp con $\delta > 0$ un pequeño parámetro. Entonces es bien conocido que si $\epsilon \neq (\frac{2n\pi}{T})^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, el equilibrio de la ecuación autónoma ($\delta = 0$) puede continuarse en una oscilación periódica estable para valores pequeños de δ. El δ-intervalo de estabilidad es desconocido.

El procedimiento anterior aplicado con δp en lugar de p permite entonces encontrar para cada $0 < \epsilon \leq (\pi/3T)^2$ fijo, un δ-intervalo de estabilidad concreto que dependerá obviamente de ϵ y la función particular p que se tome. El intervalo óptimo de estabilidad así como la admisión de valores de ϵ más grandes que $(\pi/3T)^2$ es una cuestión desconocida para nosotros y requiere un análisis más fino.

3.4. Oscilaciones Periódicas Impares de Tipo Twist

Esta sección está basada en un trabajo hecho en colaboración con el profesor Pedro Torres [**47**].

Supóngase que la ecuación (3.67) es invariante bajo la transformación $(t, x) \mapsto (-t, -x)$, es decir, g admite la simetría (3.68).

En estas condiciones resulta natural estudiar las propiedades de las soluciones x de (3.67) que satisfacen

$$-x(-t) = x(t) = x(t + T),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como ya se ha mencionado antes, la búsqueda de tales soluciones se reduce a considerar el problema de Dirichlet (3.69).

Asociaremos a cada pareja α, β de sub y super-soluciones de (3.69) con $\alpha \leq \beta$, las siguientes funciones:

$$A_\star(t) = L^*(\partial_x\, g(t,\, \centerdot)),\;\; A^\star(t) = U^*(\partial_x\, g(t,\, \centerdot)),$$

$$B_+(t) = U^*(\frac{1}{2!}[\partial_x^2\, g(t,\, \centerdot)]^+),\;\; B_-(t) = U^*(\frac{1}{2!}[\partial_x^2\, g(t,\, \centerdot)]^-),$$

$$C_+(t) = U^*(\frac{1}{3!}[\partial_x^3\, g(t,\, \centerdot)]^+),\;\; C_-(t) = L^*(\frac{1}{3!}[\partial_x^3\, g(t,\, \centerdot)]^-),$$

donde los operadores L^*, $U^* : C(\mathbb{T}\times\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{T})$ se definen como

$$L^*(f)(t) = \inf\{f(t,\xi) : \xi \text{ está comprendido entre } \alpha^*(t) \text{ y } \beta^*(t)\},$$

$$U^*(f)(t) = \sup\{f(t,\xi) : \xi \text{ está comprendido entre } \alpha^*(t) \text{ y } \beta^*(t)\},$$

para toda $f \in C(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (recordemos que α^* y β^* son funciones continuas a trozos que pertenecen a $L^\infty(\mathbb{T})$).

El siguiente teorema es muy similar al Teorema 3.25.

TEOREMA 3.26. *Sea* $g \in C^{0,4}(\mathbb{T}\times\mathbb{R})$ *verificando* (3.68)*y supóngase que* (3.69) *admite un par* α, β *de sub y super-soluciones tales que*

$$\alpha(t) \leq \beta(t),\, \forall t \in [-T/2, 0].$$

Supóngase además que

(i) $0 < A_\star \leq A^\star \leq (\pi/3T)^2$,

(ii) $m_\star^3 \int_0^T C_- - m_\star(M^\star)^2 \int_0^T C_+ > 2(M^\star)^{\frac{5}{2}}(\int_0^T B_+)(\int_0^T B_-)$,

donde $m_\star = \inf A_\star$ *y* $M^\star = \sup A^\star$. *Entonces* (3.67) *tiene una solución impar* φ^* *de tipo twist. Más aún,* φ^* *está comprendida entre* α^* *y* β^*.

Demostración. La demostración de este resultado es similar a la del Teorema (3.25) y se deja al lector. □

Daremos a continuación una aplicación del Teorema 3.26.

• Aplicación: Oscilaciones de tipo Twist para la ecuación de un satélite terrestre estabilizado magnéticamente.

En un artículo reciente [**65**] se estudia la siguiente ecuación como un modelo de un satélite en órbita alrededor de la tierra (para más información pueden verse las referencias que aparecen en [**65**] [1])

$$\ddot{x} + \alpha\sqrt{1 + 3\sin^2 t}\,\sin x = p(t), \tag{3.83}$$

donde $p(t) = 6 \sin 2t(1 + 3\sin^2 t)^{-2}$ y α es un parámetro positivo relacionado con la intensidad magnética. Nótese que esta ecuación admite la simetría (3.68). Modelos similares con simetría impar pueden verse también en [**33, 55, 20**].

[1]¡Algunas referencias están en Ruso!

En [**65**], los autores emplean la teoría de operadores monótonos de Krasnoselskii para probar que para cualquier α existe una solución π-periódica impar x_α tal que

$$x_\alpha(t) > 0 \qquad \forall t \in (-\pi/2, 0).$$

Este resultado puede demostrarse directamente a partir de la teoría de sub y supersoluciones para un problema de Dirichlet. En efecto, es fácil comprobar que $x_l \equiv 0$ es una sub-solución de (3.83) con condiciones de Dirichlet

$$x(-\pi/2) = x(0) = 0.$$

Por otra parte sea x_u la solución del siguiente problema de contorno

$$\ddot{x}(t) = -2\alpha + p(t), \qquad x(0) = x(-\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Puesto que $p(t) < 0,\ \forall t \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ resulta que $\ddot{x_u}(t) < 0,\ \forall t \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Como además x_u se anula en los extremos del intervalo se deduce que

$$x_u(t) > 0,\ \forall t \in (-\frac{\pi}{2}, 0).$$

Sea $a \in C[-\frac{\pi}{2}, 0]$ tal que $0 < a \leq 2\alpha$. Es inmediato verificar que x_u es una super-solución del siguiente problema de contorno

$$\ddot{x} + a(t)\sin x = p(t),\ x(0) = x(-\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Efectivamente,

$$\ddot{x}_u(t) + a(t)\sin x_u(t) - p(t) \leq -2\alpha + 2\alpha \leq 0,\ \forall t \in (-\frac{\pi}{2}, 0).$$

En particular tomando $a(t) = \alpha\sqrt{1 + 3\sin^2 t}$ se tiene que x_u es una super-solución de la ecuación (3.83) con condiciones de Dirichlet

$$x(-\frac{\pi}{2}) = x(0) = 0.$$

De este modo obtenemos una solución π-periódica impar x_α de (3.83) comprendida entre x_u^* y la función constante cero. En [**65**, Proposición 2.1] los autores prueban también unicidad de solución para $\alpha \leq 2$. Esto implica que nuestra metodología nos conduce a la misma solución x_α si $\alpha \leq 2$.

La estabilidad lineal de x_α se obtiene en [**65**] si $\alpha \leq 1/2$. Como ya se ha discutido anteriormente, este hecho no asegura la estabilidad en el sentido de Lyapunov, pero empleando el Teorema 3.26 podemos probar la estabilidad de Lyapunov de x_α bajo cotas más conservadoras ($\alpha \leq 1/18$). Más precisamente se tiene el siguiente resultado.

COROLARIO 3.27. *Si $\alpha \leq 1/18$ entonces la ecuación* (3.83) *tiene una solución π-periódica impar de tipo twist.*

Demostración. Un cálculo sencillo muestra que

$$x_u(t) = x_{u,\alpha}(t) = (1 - \alpha\pi/2)t - \alpha t^2 - \arctan(2\tan t).$$

Es fácil demostrar la siguiente afirmación

• *Sea* $F \in C([a,b] \times [0,\Lambda])$ *tal que* $F(t,\cdot)$ *es una función creciente para cada* $t \in [a,b]$. *Entonces* $A(\alpha) = \max\{F(t,\alpha) : t \in [a,b]\}$ *es una función creciente en* $[0,\Lambda]$.

En consecuencia, para $F(t,\alpha) = x_{u,\alpha}(t)$, $a = -\frac{\pi}{2}$ y $b = 0$ tenemos que $A(\alpha)$ es una función creciente de α en virtud de que

$$\frac{\partial x_{u,\alpha}(t)}{\partial \alpha} = -t(\frac{\pi}{2} + t) > 0, \qquad \forall t \in (-\frac{\pi}{2}, 0).$$

Así para todo $\alpha \leq 1/18$ tenemos la siguiente cota

$$||x_{u,\alpha}||_\infty \leq A(1/18) \simeq 0{,}37262$$

Por otra parte, fijadas las sub y super soluciones $x_l \equiv 0$ y $x_{u,\alpha}$ con $\alpha \leq \frac{1}{18}$ es fácil verificar las siguientes estimaciones para las funciones auxiliares (téngase en cuenta que $0 < A(1/18) < \frac{\pi}{2}$)

$$0 < \alpha \cos A(1/18) \leq A_\star \leq A^\star \leq 2\alpha \leq (\pi/3T)^2 = 1/9,$$

$$C_+ \equiv 0, \;\; C_- \geq \frac{1}{6}\alpha\sqrt{1 + 3\sin^2 t}\cos A(1/18),$$

$$B_-, B_+ \leq \frac{1}{2}\alpha\sqrt{1 + 3\sin^2 t}\sin A(1/18).$$

Nótese que la condición (i) del Teorema 3.26 se satisface para todo $0 < \alpha \leq \frac{1}{18}$. De las estimaciones anteriores se infiere que la condición (ii) del Teorema 3.26 se verifica si

$$\frac{\alpha^4}{6}\cos^4 A(1/18) M > \frac{2}{4}(2\alpha)^{5/2}\alpha^2 \sin^2 A(1/18) M^2,$$

donde $M = \int_0^\pi \sqrt{1 + 3\sin^2 t}dt$

Una cálculo numérico nos da el valor aproximado $M \simeq 4{,}84422$, por lo tanto la condición (ii) del Teorema 3.26 se verifica si

$$\alpha < \frac{\cos^8 A(1/18)}{288 M^2 \sin^4 A(1/18)} \simeq 0{,}0768,$$

lo cual es evidentemente satisfecho si $\alpha \leq 1/18$. Una aplicación del Teorema 3.26 concluye la demostración. □

Nota 3.20. En [**47**] se aplica directamente el Teorema 3.22 a la ecuación (3.70) asociada a la solución periódica x_α. En consecuencia se aprovecha la imparidad de la función b y su único cambio de signo en un período para afinar la condición (3.75). Esto hace que la estimación anterior mejore a $\alpha \leq 1{,}23$; sin embargo la restricción $\alpha \leq \frac{1}{18}$ (condición (i) del Teorema 3.26) quita importancia a esta diferencia. La diferencia en las estimaciones resulta clara desde la óptica de la generalidad del Teorema 3.26.

Nota 3.21. Experimentos númericos sugieren que se puede esperar estabilidad para $\alpha < 1/2$ excepto posiblemente cerca de los valores de resonancias fuertes dados por $\alpha = 1/8, 2/9$. Sin embargo, nuestras técnicas actuales no nos permiten probar esto. Sólo podemos alcanzar estabilidad hasta $\alpha = 1/18$. Observe que la hipótesis principal $\alpha \leq 1/18$ es necesaria esencialmente para garantizar la condición (i) del Teorema 3.26. Un optimización de nuestro resultado debería requerir un estudio como en [**52**] sobre la comparación de algunos coeficientes del 2-jet de la transformación de Poincaré de la solución periódica (véase [**52**, Lema 4.7]). Personalmente, esto me parece un problema difícil y delicado.

Nota 3.22. En [**33**] se estudia el problema de existencia y estabilidad de soluciones periódicas impares para un modelo similar de satélites pero suponiendo que la órbita es elíptica (véase también [**55, 20**]). Esto introduce un parámetro adicional de excentricidad $0 \leq e < 1$ en la ecuación diferencial. Los autores investigan las zonas de parámetros (e, α) admisibles y las soluciones periódicas impares correspondientes. Sin embargo las demostraciones de la estabilidad dependen de ciertas estimaciones númericas y de argumentos asintóticos. En consecuencia por lo menos el autor de esta memoria no consideraría dichos resultados como definitivos.

Usando las técnicas de este capítulo es posible implementar una demostración matemática para la estabilidad de alguna de estas soluciones periódicas en cierta región precisa aunque restringida de los parámetros. Este trabajo está todavía en preparación. Agrandar la región comporta los mismos problemas señalados anteriormente. Otra diferencia esencial aquí es que la ecuación diferencial no tiene la forma (1.22) aunque es posible reducirla a una ecuación Newtoniana por un cambio de variables en la variable independiente.

3.5. Demostraciones

3.5.1. Demostración del Teorema 3.22. La demostración se desarrollará en varias etapas.

1. *Estimando la escala.*

El primer paso para estudiar el signo del coeficiente twist de la ecuación (3.72) consiste en considerar el caso más simple cuando la ecuación (3.73) es R-elíptica (véase la definición 1.11).

Desde ahora, $\Psi = \phi_1 + i\phi_2$ denotará la solución compleja de (3.73) que satisface $\Psi(0) = 1$; $\dot{\Psi}(0) = i$. Es posible escribir Ψ en coordenadas polares

$$\Psi(t) = r(t)\exp(i\varphi(t)), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Observe que la función φ es creciente en virtud de que $\dot{\varphi} = r^{-2} > 0$.

Recordemos que (3.73) es R-elíptica si existe $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $|\lambda| = 1$, tal que

$$\Psi(t+T) = \bar{\lambda}\Psi(t), \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.84}$$

Notése que cuando (3.73) es R-elíptica entonces r es una función T-periódica y $\theta = \varphi(T) \in \ Arg(\bar{\lambda})$.

Introduciendo en (3.73) el cambio de variables

$$\xi = x, \qquad \tau = \frac{t - t_0}{\alpha^2},$$

con t_0, α dados por la proposición 7 en [**50**], la ecuación se transforma en una nueva ecuación de Hill que es R-elíptica con nuevo período $T^\star = T/\alpha$ (véase sección 1.5).

La estimación de la escala α constituye una cuestión central en la presente memoria. Esto se hará en el Lema 3.30 en término de los valores extremos de $a(t)$. Para ello, necesitaremos algunos resultados de comparación para la ecuación (3.73), así como también, revisar muy brevemente las propiedades del número de rotación asociado a una ecuación de Hill.

Lema 3.28. *Sea t_0 un número real y $a_i(t) \in C(\mathbb{T})$, $i = 1, 2$. Sean φ_i, ψ_i, las soluciones de*

$$\ddot{x} + a_i(t)x = 0,$$

con condiciones iniciales

$$\varphi_i(t_0) = \dot{\psi}_i(t_0) = 1; \ \dot{\varphi}_i(t_0) = \psi_i(t_0) = 0, \ i = 1, 2.$$

Supóngase que

$$a_1(t) \leq a_2(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

y

$$\varphi_1, \ \psi_1, \ \varphi_2 > 0 \ \text{ en } \ (t_0, \, t_0 + T).$$

Entonces

$$\varphi_2 \leq \varphi_1 \ \ y \ \ \psi_2 \leq \psi_1, \ \ en \ [t_0, \, t_0 + T].$$

Nota 3.23. Resultados similares de comparación han sido obtenidos en [**4**].

Demostración. Observe que $\chi = \varphi_2 - \varphi_1$ es solución del problema lineal

$$\ddot{x} + a_2(t)x + p(t) = 0; \qquad x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0,$$

donde $p(t) = \varphi_1(t)(a_2(t) - a_1(t))$. Por lo tanto, χ verifica

$$\chi(t) = -\int_{t_0}^{t} G(t,s)p(s)ds,$$

donde $G(t,s) = \varphi_2(s)\psi_2(t) - \varphi_2(t)\psi_2(s)$, $t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + T$. Por otro lado, ya que $\varphi_2 > 0$ en $[t_0 + t_0 + T)$ entonces $G(t,s) > 0$ si $t_0 < s < t < t_0 + T$ (véase [**50**, Lema 3]).

Por hipótesis $p \geq 0$ en $[t_0,\, t_0+T]$. Así, de la fórmula para χ se tiene que

$$\varphi_2 \leq \varphi_1 \ \text{ en } \ [t_0,\, t_0+T].$$

La otra desigualdad es obtenida de modo similar tomando

$$p(t) = \psi_1(t)(a_2(t) - a_1(t)).\square$$

LEMA 3.29. *Supóngase que $a(t) \in C(\mathbb{T})$ verifica*

$$0 < \sigma^2 \leq a(t) \leq \gamma^2 \leq (\pi/2T)^2, \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.85}$$

para algunos $\sigma,\, \gamma \in \mathbb{R}^+$. Sea t_0 un número real y sea $\Psi(t;t_0) = \phi_1(t;t_0) + i\phi_2(t,;t_0)$ la solución de (3.73) con condiciones iniciales $\Psi(t_0) = 1;\ \ \dot{\Psi}(t_0) = i$. Entonces para todo $t \in [t_0, t_0+T]$ se verifica

$$\begin{aligned} \cos(\gamma(t-t_0)) \ &\leq \ \phi_1(t) \ \leq \ \cos(\sigma(t-t_o)), \\ \gamma^{-1}\sin(\gamma(t-t_o)) \ &\leq \ \phi_2(t) \ \leq \ \sigma^{-1}\sin(\sigma(t-t_0)). \end{aligned}$$

En consecuencia

$$m_\gamma \leq |\Psi(t;t_0)| \leq M_\sigma, \qquad \forall t \in [t_0, t_0+T]$$

donde

$$m_\gamma = \text{mín}\{1, \gamma^{-1}\}, \qquad M_\sigma = \text{máx}\{1, \sigma^{-1}\}.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del lema precedente, en virtud de que (3.85) implica que ϕ_1, ϕ_2 y todas las soluciones canónicas que parten de t_0, para las ecuaciones

$$\ddot{x} + \sigma^2 x = 0, \ \ \ddot{x} + \gamma^2 x = 0,$$

son positivas en el intervalo $(t_0,\, t_0+T)$ (véase [**50**, Lema 2]). $\square$

NOTA 3.24. Este lema también puede probarse empleando el Teorema 2.1 y el Corolario 2.5 en [**4**].

Introduciendo coordenadas polares en (3.73)

$$y = r\sin\theta, \qquad \dot{y} = r\cos\theta, \ (r > 0, \ \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}),$$

llegamos a la siguiente ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{\theta} = a(t)\sin^2\theta + \cos^2\theta.$$

Como esta ecuación es periódica con respecto a ambos argumentos, podemos emplear la teoría de ecuaciones diferenciales sobre el toro ([**57**]), la cual implica que el límite

$$\mu = \lim_{t\to\infty} \frac{\theta(t)}{t} \tag{3.86}$$

existe y es independiente de la condición inicial $\theta(0)$.

Nos referiremos a μ como el *número de rotación* de (3.73) y escribiremos $\mu = \mu(a)$.

El número de rotación tiene las siguientes propiedades relevantes

(i) $\mu \geq 0$

(ii) $a_1 \leq a_2$ (resp. $a_1 \ll a_2$) $\Rightarrow \mu(a_1) \leq \mu(a_2)$ (resp. $\mu(a_1) < \mu(a_2)$)

(iii) Supóngase que (3.73) es elíptica con multiplicadores

$$\exp(\pm i\theta), \quad \theta \in (0, \pi),$$

entonces

$$\mu = \frac{\theta}{T}. \tag{3.87}$$

(La notación $f \ll g$ significa $f \leq g$ con desigualdad estricta en un conjunto de medida positiva).

Estas propiedades son demostradas en [**45**].

Estamos ahora en posición de estimar la escala α, pero primero fijaremos un poco de notación.

Supóngase que la ecuación (3.73) es elíptica con multiplicadores de Floquet λ, $\bar{\lambda}$: $\bar{\lambda} = \exp(i\theta)$, $\theta \in (0, \pi)$. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, $\Phi(t; t_0)$ denotará la matriz solución de $Y' = A(t)Y,\ Y(t_0) = I,$ donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

El próximo lema es un refinamiento de la Proposición 8 en [**50**].

Lema 3.30. *Supóngase que existen σ, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$0 < \sigma^2 \leq a(t) \leq \gamma^2 \leq (\pi/2T)^2.$$

Entonces existen $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ tal que

(i) $\Phi(t_0 + T;\, t_0) = D_\alpha R[-\theta] D_\alpha^{-1}$, *con* $\theta \in (0, \pi/2]$ *y* D_α *denota la matriz diagonal* $\operatorname{diag}(\alpha, \alpha^{-1})$.

(ii) $\gamma^{-\frac{1}{2}} \leq \alpha \leq \sigma^{-\frac{1}{2}}$.

Demostración. Observe que la hipótesis implica que (3.73) es elíptica. La afirmación (i) es la Proposición 8 de [**50**], así que sólo probaremos (ii).

De (i) se deduce que

$$\phi_2(t_0 + T;\, t_0) = \alpha^2 \sin\theta. \tag{3.88}$$

Entonces a partir del Lema 3.29 tenemos que

$$\gamma^{-1}\sin(\gamma T) \leq \phi_2(t_0 + T,\, t_0) \leq \sigma^{-1}\sin(\sigma T). \tag{3.89}$$

Las propiedades (ii) y (iii) del número de rotación implican

$$0 < \sigma T \leq \theta \leq \gamma T \leq \pi/2. \tag{3.90}$$

Como la función seno es creciente en $[0, \pi/2]$ entonces (ii) se sigue combinando (3.88), (3.89) y (3.90). $\square$

2. *El caso R-elíptico*

Vamos a probar la siguiente versión particular del Teorema 3.22.

LEMA 3.31. *Supóngase que* (3.73) *es* R*-elíptica. Supóngase además que*

$$0 < \sigma^2 \leq a(t) \leq \gamma^2 \leq (\pi/3T)^2, \tag{3.91}$$

para algunos $\sigma,\ \gamma \in \mathbb{R}^+$. *Entonces el equilibrio* $x \equiv 0$ *de* (3.72) *es de tipo twist si se satisfacen las siguientes condiciones*

$$m_\gamma^4 \int_o^T c^- - M_\sigma^4 \int_0^T c^+ > 2M_\sigma^6 \int_0^T b^+ \int_0^T b^-. \tag{3.92}$$

Aquí m_γ, M_σ son los números definidos en el Lema 3.29.

Demostración. La R-elipticidad implica que la transformación de Poincaré $P(z,\bar{z})$ tiene el desarrollo de Taylor

$$P(z,\bar{z}) = \lambda z + P_2(z,\bar{z}) + P_3(z,\bar{z}) + \ldots,$$

donde λ es el multiplicador asociado a (3.84) y P_2, P_3 son polinomios de grado 2 y 3 respectivamente. Los jets P_2 y P_3 fueron calculados en [**52**]. El coeficiente N de $z^2\bar{z}$ en P_3 está dado por (véase [**52**, Proposición 4.4])

$$\begin{aligned} N = &-\frac{3i\lambda}{8} \int_0^T c(t)|\Psi(t)|^4 dt \\ &- \frac{i\lambda}{4} \iint_{\Delta_T} G(t,s)b(t)b(s)[2|\Psi(t)|^2|\Psi(s)|^2 + \Psi(t)^2\bar{\Psi}(s)^2]dsdt, \end{aligned}$$

donde $G(t,s) = \phi_1(t)\phi_2(s) - \phi_1(s)\phi_2(t)$ y

$$\Delta_T = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < s < t,\ 0 < t < T\}.$$

Del Lema 3.29 se tiene que $\phi_2(t) > 0$ en $(0,T]$. Entonces $\Psi(t)$ está sobre el semiplano superior $\forall t \in (0,T]$. Como φ es creciente y $\varphi(0) = 0$ se deduce que $\theta = \varphi(T)$ pertenece a $(0,\pi)$. Más aún, las propiedades (ii)-(iii) del número de rotación junto con (3.91) implican que $\theta \in (0,\pi/3]$. Así, $x \equiv 0$ es 4-elemental (véase la sección 1.5 para definiciones) y

$$\frac{3\sin\theta}{1-\cos\theta} > 0, \qquad \frac{\sin 3\theta}{1-\cos 3\theta} \geq 0.$$

En consecuencia, en virtud de la fórmula (1.17) será suficiente demostrar que

$$\Im(\bar{\lambda}N) > 0.$$

Escribiendo $b = b^+ - b^-$, $c = c^+ - c^-$ y teniendo en cuenta que $G(t,s) < 0$ en Δ_T (esto se demuestra empleando el argumento en [**52**, Lema 4.8]) se deduce que será suficiente demostrar que $\mathcal{B} > 0$, donde

$$\mathcal{B} = \frac{3}{8}\int_0^T c^-(t)|\Psi(t)|^4 - \frac{3}{8}\int_0^T c^+(t)|\Psi(t)|^4$$

$$+\frac{1}{4}\iint_{\Delta_T} G(t,s)b^+(t)b^-(s)[2|\Psi(t)|^2|\Psi(s)|^2 + \Re\{\Psi(t)^2\bar{\Psi}(s)^2\}]dsdt$$

$$+\frac{1}{4}\iint_{\Delta_T} G(t,s)b^-(t)b^+(s)[2|\Psi(t)|^2|\Psi(s)|^2 + \Re\{\Psi(t)^2\bar{\Psi}(s)^2\}]dsdt.$$

Las siguientes cotas son válidas en Δ_T

$$0 < |G(t,s)| \leq r(t)r(s),$$

$$0 < 2|\Psi(t)|^2|\Psi(s)|^2 + \Re\{\Psi(t)^2\bar{\Psi}(s)^2\} \leq 3r(t)^2r(s)^2.$$

Del Lema 3.29 se tiene también

$$m_\gamma \leq r(t) \leq M_\sigma, \ \forall t \in [0,\, T].$$

Combinando estas cotas obtenemos

$$\mathcal{B} \geq \frac{3}{8}m_\gamma^4 \int_0^T c^- - \frac{3}{8}M_\sigma^4 \int_0^T c^+$$

$$-\frac{3}{4}M_\sigma^6\left(\iint_{\Delta_T} b^+(t)b^-(s)dsdt + \iint_{\Delta_T} b^-(t)b^+(s)dsdt\right)$$

Haciendo el cambio de variables $(t,s) \mapsto (s,t)$ en la segunda integral doble, se sigue que

$$\iint_{\Delta_T}(b^+(t)b^-(s) + b^-(t)b^+(s))dsdt = \int_0^T b^+ \int_0^T b^-.$$

Ahora (3.92) implica claramente que $\mathcal{B} > 0$. Esto finaliza la demostración del lema. □

3. *El caso general.*

Introduciendo el cambio de variables (1.25) con t_0 y α dados por el Lema 3.30, la ecuación (3.72) se transforma en una nueva ecuación periódica del mismo tipo

$$\ddot{\xi} + a^\star(\tau)\xi + b^\star(\tau)\xi^2 + c^\star(\tau)\xi^3 + r^\star(\tau,\, \xi) = 0, \tag{3.93}$$

donde

$$a^\star(\tau) = \alpha^4 a(t_0 + \alpha^2\tau),\ \ b^\star(\tau) = \alpha^4 b(t_0 + \alpha^2\tau)\ \ c^\star(\tau) = \alpha^4 c(t_0 + \alpha^2\tau),$$

$$r^\star(\tau,\, \xi) = \alpha^4 r(t_0 + \alpha^2\tau,\, \xi),$$

y el nuevo período es $T^\star = T/\alpha^2$. La ecuación de Hill asociada es R-elíptica (véase la sección 1.5).

Observe ahora que (3.93) satisface todas las condiciones del Lema 3.31 y las constantes que aparecen en (3.91) pasan a ser

$$\sigma^\star = \alpha^2\sigma,\ \gamma^\star = \alpha^2\gamma,\ T^\star = T/\alpha^2.$$

Es inmediato comprobar que

$$\int_0^{T^\star} g^\star = \alpha^2 \int_0^T g,$$

para cualquier función g continua y T-periódica; en particular esto es cierto para $g = c^+,\ c^-,\ b^+$, y b^-.

Del Lema 3.30 se tiene

$$\gamma^{-1} \leq \alpha^2 \leq \sigma^{-1}. \tag{3.94}$$

Por lo tanto

$$M_{\sigma^\star} = \frac{1}{\alpha^2\sigma}, \qquad m_{\gamma^\star} = \frac{1}{\alpha^2\gamma}.$$

Empleando todas estas identidades, la condición (3.92) del Lema 3.31 se convierte en

$$\gamma^{-4}\int_0^T c^- - \sigma^{-4}\int_0^T c^+ > 2\sigma^{-6}\alpha^{-2}\int_0^T b^+ \int_0^T b^-. \tag{3.95}$$

Como (3.94) implica $\alpha^{-2} \leq \gamma$ entonces (3.95) se deduce ahora fácilmente a partir de la hipótesis (3.75). La demostración se sigue entonces del Lema 3.31. □

3.5.2. Demostración del Teorema 3.23.

Definamos el funcional

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^+ \times C(\mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R},\ (T, g, u, v) \mapsto \mathcal{A}(T, g, u, v)$$

por

$$\mathcal{A}(T, g, u, v) = u\int_0^T g^-(t)dt - v\int_0^T g^+(t)dt.$$

Este funcional tiene las siguientes propiedades

- $\mathcal{A}(T, \mu g, u, v) = \mu\mathcal{A}(T, g, u, v),\ \forall \mu > 0$
- $\mathcal{A}(T, g, \mu u, \mu v) = \mu\mathcal{A}(T, g, u, v),\ \forall \mu > 0$
- $\mathcal{A}(T, g, u^{-1}, v^{-1}) = (uv)^{-1}\mathcal{A}(T, g, v, u)$

Como siempre, se demostrará primero el siguiente resultado intermedio

Afirmación *Supóngase que* (3.73) *es R-elíptica y que se verifican las hipotésis del Teorema* 3.23*. Entonces el equilibrio es de tipo twist si*

$$\mathcal{A}(T, c, m_\gamma^4, M_\sigma^4) > 0 \text{ o } \mathcal{A}(T, c, M_\sigma^4, m_\gamma^4) < 0.$$

La hipótesis (3.77) implica que $\theta \in (0, \pi/2)$, por lo tanto $x \equiv 0$ es 4-elemental. Por otra parte, dado que $b \equiv 0$, la fórmula del coeficiente twist ([**52**, Proposiciones 2.2, 4.4]) se reduce a

$$\beta = \frac{3}{8}\int_0^T c(t)^- r(t)^4 dt - \frac{3}{8}\int_0^T c(t)^+ r(t)^4 dt.$$

. De aquí se deduce empleando el Lema 3.29 que

$$\mathcal{A}(T, c, m_\gamma^4, M_\sigma^4) \le \frac{3}{8}\beta \le \mathcal{A}(T, c, M_\sigma^4, m_\gamma^4),$$

y esto prueba la Afirmación.

Para el caso general, procedemos como en la demostración del Teorema 3.22 introduciendo el cambio de variables (1.25). Entonces la T-periodicidad y las propiedades de $\mathcal{A}$ implican

$$\mathcal{A}(T^\star, c^\star, m_{\gamma^\star}^4, M_{\sigma^\star}^4) = \frac{1}{\alpha^8}\mathcal{A}(T, \alpha^2 c, \frac{1}{\gamma^4}, \frac{1}{\sigma^4}) = \frac{1}{\alpha^6\sigma^4\gamma^4}\mathcal{A}(T, c, \sigma^4, \gamma^4),$$

$$\mathcal{A}(T^\star, c^\star, M_{\sigma^\star}^4, m_{\gamma^\star}^4) = \frac{1}{\alpha^8}\mathcal{A}(T, \alpha^2 c, \frac{1}{\sigma^4}, \frac{1}{\gamma^4}) = \frac{1}{\alpha^6\sigma^4\gamma^4}\mathcal{A}(T, c, \gamma^4, \sigma^4).$$

Una aplicación de la Afirmación concluye la demostración. □

CAPíTULO 4

Comentarios Finales y Problemas Abiertos

En esta memoria se han dado algunos criterios generales de estabilidad para una ecuación de Newton no autónoma y periódica, ilustrándose también la pertinencia de dichos resultados mediante algunos modelos mécanicos: péndulo de longitud variable, problema restringido de tres cuerpos (Sitnikov), péndulo forzado y un modelo que describe los movimientos periódicos de un satélite en su órbita circular. De este modo, el presente trabajo constituye esencialmente una extensión de los resultados en [**50**], [**51**] y [**52**]. Sin embargo quedan aún sobre el tapete algunas cuestiones que señalan algunas líneas de trabajo:

1. El teorema 2.19 supone que el coeficiente no lineal $c(t)$ tiene un signo fijo. ¿Es posible obtener un criterio de estabilidad cuando c cambia el signo?. Pueden darse algunas respuestas parciales a esta cuestión. Recuérdese de la demostración del teorema 2.19 que

- $x \equiv 0$ es estable si $\sigma\nu \int_{t_0}^{t_0+1} c(t)\phi_1(t)^{2n+2}dt > 0$
- $x \equiv 0$ es inestable si $\sigma\nu \int_{t_0}^{t_0+1} c(t)\phi_1(t)^{2n+2}dt < 0$,

donde t_0 es cierto número real y ϕ_1 es la solución de la ecuación linealizada tal que $\phi(t_0) = 1$, $\dot{\phi}_1(t_0) = 0$.

Suponiendo que $a(t)$ satisface la siguiente condición para ciertos números reales positivos ω y γ

$$-\omega^2 \leq a(t) \leq \gamma^2 < (\frac{\pi}{2})^2, \tag{4.96}$$

es fácil deducir a partir del lema 3.28 que

$$0 < \cos\gamma \leq \phi_1(t_0 + t) \leq \cosh\omega \;\; \forall t \in [0, 1].$$

Entonces a partir de las observaciones anteriores y escribiendo $c = c^+ - c^-$, se puede demostrar lo siguiente:

Supóngase que la ecuación linealizada es p.i. ($\nu \neq 0$) y que se verifica (4.96) para algunos ω, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Entonces el equilibrio de (2.61) es

(i) estable si $\sigma\nu\mathcal{A}(c, \mathcal{R}^{\frac{\sigma\nu+3}{2}}((\cos\gamma)^{2n+2}, (\cosh\omega)^{2n+2})) > 0$,
(ii) inestable si $\sigma\nu\mathcal{A}(c, \mathcal{R}^{\frac{\sigma\nu+3}{2}}((\cos\gamma)^{2n+2}, (\cosh\omega)^{2n+2})) < 0$,

donde

$$\mathcal{A} : C(\mathbb{T}) \times (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$$

es el operador definido por

$$\mathcal{A}(g,u,v) = u\int_0^1 g^+(s)ds - v\int_0^1 g^-(s)ds,$$

$\forall g \in C(\mathbb{T}),\ \forall (u,v) \in (\mathbb{R}^+)^2$ y $\mathcal{R}$ denota la reflexión $(x,y) \mapsto (y,x)$.

Este resultado tiene el defecto de no ser óptimo. Es más razonable proceder del siguiente modo. Asociaremos a cada ecuación de Hill p.i.

$$\ddot{x} + a(t)x = 0,$$

los siguientes números

$$m_a = \inf_{t_0\in[0,1]} \min_{t\in[0,1]} |\phi_1(t_0+t;t_0)|,$$

$$M_a = \sup_{t_0\in[0,1]} \max_{t\in[0,1]} |\phi_1(t_0+t;t_0)|$$

donde $\phi_1(t_0;t)$ es la solución de la ecuación de Hill con condiciones iniciales $\phi_1(t_0;t_0) = 1,\ \dot{\phi}_1(t_0;t_0) = 0$.

Luego cada solución $\phi_1(\,\cdot\,;t_0)$ satisface en $[t_0, t_0+1]$ lo siguiente

$$m_a \leq |\phi_1| \leq M_a.$$

Si suponemos que $m_a > 0$ entonces como antes, es posible establecer una condición de estabilidad (inestabilidad res.) para el equilibrio de (2.61) mediante una desigualdad que involucre a $\int_0^1 c^+,\ \int_0^1 c^-$, los invariantes σ, ν y los números m_a y M_a. Es más plausible que un criterio formulado de esta manera fuera óptimo. Esta cuestión es desconocida para el autor.

Otra cuestión importante sería establecer algunas propiedades generales de los números m_a y M_a (por ejemplo, monotonía respecto de a, etc.) que permitan orientar a una estimación de los mismos en situaciones concretas.

2. En el capítulo 3 la estimación de la escala α en el Lema 3.30 constituyó una de las piezas claves para la demostración de los teoremas 3.22 y 3.23. Las condiciones impuestas sobre a fueron de tipo L^∞. Desconozco si estimaciones de tipo L^1 sobre a pueden dar lugar a estimaciones sobre α. Esto relajaría bastante las exigencias sobre el coeficiente lineal a. Sin embargo, la mayor restricción sobre el coeficiente a proviene de otra parte. La cota $(\frac{\pi}{3T})^2$ en el teorema 3.22 fue necesaria para restringir el multiplicador $\lambda = \exp(-\theta)$ al sector $0 < |\theta| \leq \pi/3$. Esto facilitó el estudio del signo del coeficiente twist. Efectivamente, en la fórmula (1.17) pudimos olvidarnos de los coeficientes cuadráticos A y C, y nos concentramos sólamente en estudiar el término $\Im(\overline{\lambda}N)$. Al superar a la cota $(\frac{\pi}{3T})^2$ los multiplicadores pueden salirse de dicha región y entonces es necesario considerar la contribución de los otros términos en la fórmula (1.17). Para hacer esto sería muy útil iniciar un estudio similar a [**52**, sección 4] sobre la comparación de $|A|$ y $|C|$. Este tipo

de extensiones seguramente mejorarían los intervalos de estabilidad en los dos modelos mecánicos estudiados en el capítulo 3.

3. Uno de las cuestiones que se dejan abiertas en este memoria es la extensión de los resultados de estabilidad a sistemas hamiltonianos periódicos con un grado de libertad. Las técnicas empleadas en el capítulo 3 aprovechan bastante la estructura Newtoniana de la ecuación diferencial. Por ejemplo la proposición 7 en [**50**] (véase el Lema 3.30 que es un refinamiento de este resultado) depende esencialmente de la formulación Newtoniana y no es válido en general para sistemas hamiltonianos lineales. De hecho si consideramos un sistema hamiltoniano lineal con coeficientes constantes de la forma

$$\dot{x} = JAx,$$

entonces la matriz de monodromía $\Phi(t_0+T;t_0) = e^{JAT}$ para todo t_0. Si suponemos que los valores propios de JA están sobre el eje imaginario y son distintos de cero entonces el sistema es elíptico. Sin embargo, si

$$e^{JAT} \neq D_\alpha R[\theta] D_\alpha^{-1} \ \forall \alpha > 0,$$

entonces la proposición 7 de [**52**] (y el Lema 3.30) no se cumple para este sistema.

Estamos interesados particularmente en dos problemas:

3.1 El movimiento de una partícula bajo la acción de la gravedad y sobre una curva plana que pulsa periódicamente, como por ejemplo, una elipse pulsante E_t con semiejes $a(t)$, $b(t) \in C^2(\mathbb{T})$, puede modelarse por la siguiente ecuación diferencial

$$(q(t,\theta)\theta')' - \frac{1}{2}\frac{\partial q}{\partial \theta}(\theta')^2 + g(t,\theta) = 0, \tag{4.97}$$

donde θ es la coordenada angular asociada a la parametrización de la elipse pulsante[1], y

$$q(t,\theta) = a(t)^2\cos^2\theta + b(t)^2\sin^2\theta,$$
$$g(t,\theta) = \frac{1}{2}A(t)\sin 2\theta + b(t)\sin\theta$$

con

$$A(t) = a''(t)a(t) - b''(t)b(t).$$

La ecuación (4.97) es la ecuación de Lagrange del problema en las coordenadas θ, θ'.

El problema consiste en estudiar las propiedades de estabilidad del equilibrio $(\theta,\theta') = (0,0)$. Nótese que cuando $a = b$ tenemos un péndulo de longitud variable. La ecuación (4.97) puede escribirse como un

[1] La parametrización de E_t es la siguiente: $x = a(t)\sin\theta$, $y = -b(t)\cos\theta$.

sistema hamiltoniano con hamiltoniano

$$H(t,\theta,u)=\frac{u^2}{2}q(t,\theta)^{-1}+\int_0^\theta g(t,\phi)d\phi.$$

La ecuación variacional del sistema en $(\theta,u)=(0,0)$ puede reescribirse como una ecuación autoadjunta de segundo orden en θ. En consecuencia, pude demostrarse una versión de la proposición 7 de [**50**] para este caso, es decir, la reducción al caso R-elíptico aún es posible cuando la ecuación variacional es elíptica.

Desarrollando H hasta el cuarto orden, puede calcularse el 3-jet de la aplicación de Poincaré P. Resulta que todas las derivadas de orden 2 de P calculadas en el origen son nulas. En consecuencia el coeficiente twist pasa a ser

$$\beta=\Im(\overline{\lambda}N).$$

Para estudiar la no nulidad de β, sería recomendable obtener una representación integral de la fórmula anterior e investigar si un principio del máximo sería válido en este caso.

Sería ideal también obtener resultados para una curva pulsante general con ciertas propiedades geométricas prefijadas.

3.2 El modelo de presa-depredador de Volterra está dado por el siguiente sistema diferencial

$$\begin{cases} \dot{u} &= u(a(t)-b(t)v) \quad u>0 \\ \dot{v} &= v(c(t)-d(t)u) \quad v>0 \end{cases} \tag{4.98}$$

donde a,b,c,d son funciones 1-periódicas tal que

$$b\geq 0,\ d\leq 0,\ \int_0^1 b>0,\ \int_0^1 d<0.$$

Se sabe que existe solución 1-periódica $\Leftrightarrow$ $\int_0^1 a>0,\ \int_0^1 c>0.$

El problema consiste en determinar condiciones sobre a,b,c y d para que una solución periódica particular sea estable.

Como es usual se introduce el cambio de variable $x=\ln u,\ y=\ln v$ y el sistema se transforma en el siguiente sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x}= & H_y \\ \dot{y}= & -H_x \end{cases} \tag{4.99}$$

con hamiltoniano $H(t,x,y)=a(t)y-c(t)x-b(t)e^y+d(t)e^x$.

Sea $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ una solución periódica de (4.99). Trasladando φ al origen ($q=x-\varphi_1$, $p=y-\varphi_2$), el sistema puede reescribirse del siguiente modo

$$\begin{cases} \dot{q} &= -be^{\varphi_2}(e^p-1) \\ \dot{p} &= -de^{\varphi_1}(e^q-1), \end{cases} \tag{4.100}$$

que también tiene estructura hamiltoniana. Entonces el problema se reduce a estudiar las propiedades de estabilidad del equilibrio $(q,p)\equiv(0,0)$ para este sistema hamiltoniano.

Nótese que si b o d nunca se anulan entonces la ecuación variacional puede escribirse cono una ecuación lineal autoadjunta de segundo orden. En consecuencia, es posible hacer la reducción al caso R-elíptico cuando la ecuación variacional es elíptica. Todo parece indicar que en este caso el término $\Im(\overline{\lambda}N)$ tomará el signo negativo bajo ciertas restricciones adicionales. Esta inversión del signo hace imposible que exista un principio del máximo y entonces es necesario compensar con los otros términos en la fórmula del coeficiente twist. Esto es un asunto delicado.

4. Otra línea de trabajo que me gustaría desarrollar en el futuro, es el problema de estabilidad de soluciones cuasi-periódicas para ecuaciones Newtonianas que dependen cuasi-periódicamente del tiempo. Más concretamente, suponemos que los coeficientes a, b, c y el resto en la ecuación (3.72), son cuasi-periódicos en la variable t con el mismo conjunto básico de frecuencias y lo que se pretende es dar condiciones para la estabilidad del equilibrio $x \equiv 0$. En este problema debe suponerse que la ecuación linealizada puede reducirse por un cambio cuasiperiódico y simpléctico de variables (con las mismas frecuencias) a una ecuación de Hill con coeficientes constantes. Esta suposición es necesaria para poder definir la noción de elipticidad. Entonces el programa a seguir consiste en extender las técnicas desarrolladas en esta memoria al ambiente cuasi-periódico. Para esto pueden ser muy útiles los trabajos de Simó y Jorba en [**24, 25**] y también algunas versiones cuasi-periódicas del teorema twist como en [**66**]. Como modelo a tener en mente es conveniente considerar un péndulo forzado por una fuerza externa p cuasi-periódica. Entonces la idea es describir globalmente hasta donde sea posible, el rango de valores de $||\, p\, ||_\infty$ para los que existe al menos una solución cuasi-periódica estable.

Bibliografía

[1] D. AHARONOV AND U. ELIAS, Parabolic fixed points, invariant curves and action-angle variables. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* **10** (1990), 231-245.

[2] D. AHARONOV AND U. ELIAS, Invariant curves around a parabolic fixed point at infinity. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* **10** (1990), 209-229.

[3] J. M. ALFARO AND C. CHIRALT, Invariant rotational curves in Sitnikov's problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **55** (1993), 351-367.

[4] J. ALONSO AND R. ORTEGA, Boundeness and Global Asymptotic Stability of a Forced Oscillator, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications* **25** (1995), 297-309.

[5] D.V. ANOSOV y A.B. KATOK, New Examples in smooth ergodic theory, Ergodic Diffeomorphisms, *Trudy Mosk. Math. Obsc.*, 23, 3-36, 1970. Engl. transl. in Trans. Mosc. Math. soc., Am. Math. Soc. **23**, 1-35, 1972.

[6] V.I. ARNOLD, On the stability of the equilibrium solutions of Hamiltonian systems of differential equations in the general elliptic case. *Doklad. Akad. nauk SSSR* **137** (1961), 255-257.

[7] V.I. ARNOLD., "Méthodes Mathémathiques de la Mécanique Classique," Mir, Moscow, 1976.

[8] V.I. ARNOLD AND A. AVEZ, "Ergodic Problems of Classical Mechanics," Benjamin, New York, 1968.

[9] D.K. ARROWSMITH AND C.M. PLACE, "An introduction to Dynamical Systems," Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[10] J. BERNUSSOU, LIU HSU AND J.L. ABATUT. Sur le cas critique à deux multiplicateurs réels dans une transformation ponctuelle non linéaire du second ordre. *VII Internazionale Konferenz über Nichtlineare Schwingugen 1975.* Akademic-Verlag, Berlin, 1977.

[11] G.D. BIRKHOFF, "Dynamical Systems," AMS Coll. Publications, vol. 9, 1927, reprinted 1966.

[12] H. BROER AND C. SIMÓ, Resonance tongues in Hill's equations: a geometric approach, *J. Differential Equations* **166** (2000), 290-327.

[13] H.W. BROER AND G. VEGTER, "Bifurcational aspects of parametric resonance", en Dynamics Reported, New Series, vol 1, Berlin: Springer, 1992, 1-51.

[14] H. E. CABRAL AND K.R. MEYER, Stability of equilibria and fixed points of conservative systems, *Nonlinearity* **12** (1999), 1351-1362.

[15] R. CHURCHILL, M. KUMMER AND D. ROD, On averaging, reduction and symmetry in hamiltonian systems, *J. Differential Equations* **49** (1983), 359-414.

[16] E. N. DANCER AND R. ORTEGA, The index of Lyapunov stable fixed points in two dimensions, *J. Dynam. Differential Equations* **6** (1994), 631-637.

[17] C. DE COSTER AND P. HABETS, "Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: classical and recent results," en Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations,

ed. F. Zanolin, CISM-ICMS courses and lectures 371, Springer Verlag, New York, 1996.

[18] R. DIECKERHOFF AND E. ZEHNDER, Boundedness of Solutions Via the Twist-Theorem. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **14** (1987), 79-95.

[19] I. EKELAND AND H. HOFER, Symplectic topology and hamiltonian dynamics. *Math. Z.* **200** (1989), 355-378.

[20] D. HAI, Note on a differential equation describing the periodic motion of a satellite in its elliptical orbit, *Nonlinear Anal.* **12** (1988), 1337-1338.

[21] M. HANDEL, A pathological area preserving C^∞ diffeomorphism of the plane, *Proc. Amer. Math. Soc.* **86** (1982), 163-168.

[22] M.R. HERMAN, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau II. *Astérisque* **103-104** (1983)

[23] G. IOSS, "Bifurcations of maps and Applications," North-Holland, Amsterdam, 1979.

[24] À. JORBA AND C. SIMÓ, On the Reducibility of Linear Differential Equations with Quasiperiodic Coefficcients, *J. Diff. Equations* **98** (1992), 111-124.

[25] À. JORBA AND C. SIMÓ, On Quasi-periodic Perturbations of Elliptic Equilibrium Points, *SIAM J. Math. Anal.* **27** (1996), 1704-1737.

[26] M. KUNZE, "Remarks of Boundedness of Semilinear Oscillators," Nonlinear analysis and its applications to differential equations (Lisbon, 1998), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **43,** Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001, 311-319.

[27] T. LEVI-CIVITA, Sopra alcuni criteri di instabilità,. *Annali di Matematica* **5** (1901), 221-307.

[28] A. LIAPOUNOFF, Problème général de stabilité du mouvement, *Ann. Fac. Sci. Univ. Tolouse* (2) **9** (1907), 203-474, Repr. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1988.

[29] B. LIU, The Stability of The Equilibrium of a Conservative System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **202** (1996), 133-149.

[30] B. LIU AND J. YOU, Stability of a Parabolic Fixed Point of Reversible Mappings. *Chin. Ann. of Math.* **15B** (1994), 147-152.

[31] W. MAGNUS AND WINKLER, "Hill's Equation," Dover, New York, 1979.

[32] R. McGEHEE, A Stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics, *J. Differential Equations* **14** (1973), 70-88.

[33] A.P. MARKEEV AND V.A. ZLATOUSTOV, Stability of planar oscillations of a satellite in an elliptic orbit, *Celestial Mechanics* **7** (1973), 31-45.

[34] L. MARKUS AND K. R. MEYER, Periodic orbits and solenoids in generic hamiltonian dynamical systems, *Am. J. Math.* **102** (1980), 25-92.

[35] A. MARKUSHEVICH, "Teoría de las funciones analíticas," Tomo II, Editorial Mir, Moscú, 1987.

[36] J. N. MATHER, Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus, *Topology* **21** (1982), 457-467.

[37] J. N. MATHER, Variational construction of orbits of twist diffeomorphisms, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), 207-263.

[38] K.R. MEYER, Generic bifurcation of periodic points, *Trans. Am. Math. Soc.* **149** (1970), 95-107.

[39] K.R. MEYER, Generic stability properties of periodic points, *Trans. Am. Math. Soc.* **154** (1971), 273-277.

[40] K.R. MEYER AND G.R. HALL, "Introduction to Hamiltonian Dynamical System and the N-Body Problem," Springer-Verlag, New York, 1992.

[41] R. MOECKEL, Generic bifurcations of the twist coefficent, *Ergod. Theor. Dynam. Syst.* **10** (1990), 185-195.

[42] J. MOSER, On invariant curves of area preserving mappings of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. II* (1962), 1-20.

[43] J. MOSER, Stability and nonlinear character of ordinary differential equations, en Nonlinear problems, editado por R.E. Langer, The university of Wisconsin Press, 1963, 139-150.

[44] J. MOSER, "Stable and Random motions in Dynamical Systems with special emphasis on Celestial Mechanics," Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1973.

[45] J. MOSER, An example of a Schroedinger operator with almost periodic potential and nowhere dense spectrum, *Comm. Math. Helv.* **56** (1986), 198-224.

[46] D. NÚÑEZ AND R. ORTEGA, Parabolics fixed points and stability criteria for nonlinear Hill's equation, *Z. Angew. Math. Phys.* **51** (2000), 890-911.

[47] D. NÚÑEZ AND P. TORRES, Periodic Solutions of Twist Type of an Earth Satellite Equation, *Discr. Cont. Dyn. Syst.* **7** (2001), 303-306.

[48] D. NÚÑEZ, The Method of Lower and Upper Solutions and the Stability of Periodic Oscillations, aceptado para su publicación en *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications.*

[49] R. ORTEGA, Topological degree and stability of periodic solutions for certain differential equations, *J. London Math. Soc.* **42** (1990), 505-516.

[50] R. ORTEGA, The twist coefficient of periodic solutions of a time-dependent Newton's equation, *J. Dynam. Differential Equations* **4** (1992), 651-665.

[51] R. ORTEGA, The stability of the equilibrium of a non linear Hill's equation, *SIAM J. Math. Anal.* **25** (1994), 1393-1401.

[52] R. ORTEGA, Periodic Solutions of a Newtonian Equation: Stability by the Third Approximation, *J. Diff. Equations* **128** (1996) 491-518.

[53] R. ORTEGA, The number of stable periodic solutions of time-dependent Hamiltonian systems with one degree of freedom, *Ergodic Theory and Dynamical System* **18** (1998) 1007-1018.

[54] R. ORTEGA, "Twist mappings, invariant curves and periodic differential equations," Nonlinear analysis and its applications to differential equations (Lisbon, 1998), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **43,** Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001, 85-112.

[55] W.V. PETRYSHYN AND Z.S. YU, On the solvability of an equation describing the periodic motions of a satellite in its elliptic orbit, *Nonlinear Anal.* **9** (1985), 969-975.

[56] H. POINCARÉ, "Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste," vol. 1, Dover, 1957.

[57] V. PLISS, "Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations," Academic Press, New York, 1966.

[58] W. RUDIN, "Real and Complex Analysis," McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[59] H. RÜSMANN, Kleine Nenner I, Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes, *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl* **II** (1970), 67-105.

[60] C. L. SIEGEL AND J. K. MOSER, "Lectures on Celestial Mechanics," Springer-Verlag, New York. Berlin, 1971.

[61] C. SIMÓ, Invariants curves near parabolic points and regions of stability. *Lecture Notes in Mathematics* **819** (1980), 418-424.

[62] C. SIMÓ, Stability of degenerate fixed points of analytic area preserving mappings. *Astérisque* **98-99** (1982), 184-194.

[63] V. M. STARZINSKII, “Surveys of Works on Conditions of Stability of the Trivial Solution of a System of Linear Differential Equations with Periodic Coefficients,” Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol 1, Providence, **RI**, 1955.

[64] P. TORRES, Existence and Uniqueness of Elliptic Periodic Solutions of The Brillouin Electron Beam Focusing System, *Math. Met. Appl. Sci.* **23** (2000), 1139-1143.

[65] A.A ZEVIN AND M.A. PINSKY, Qualitative analysis of periodic oscillations of an earth satellite with magnetic attitude stabilization, *Discr. Cont. Dyn. Syst.* **6** (2000), 293-297.

[66] V. ZHARNITSKY, Invariant curve theorem for quasiperiodic twist mappings and stability of motion in the Fermi-Ulam problem, *Nonlinearity* **13** (2000), 1123-1136.