

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**  
**Facultad de Ciencias**  
**Departamento de Matemática Aplicada**



**PROPIEDADES DINÁMICAS DE UN MODELO CON  
IMPACTOS: CAÍDA DE GRANOS SOBRE UN PERFIL  
ESCALONADO**

**TESIS DOCTORAL**

**M<sup>a</sup> José Romero Vallés**

**Granada, Noviembre 2008**



**UNIVERSIDAD DE GRANADA**  
**Facultad de Ciencias**  
**Departamento de Matemática Aplicada**

**PROPIEDADES DINÁMICAS DE UN MODELO CON  
IMPACTOS: CAÍDA DE GRANOS SOBRE UN PERFIL  
ESCALONADO**

**TESIS DOCTORAL**

realizada por

**M<sup>a</sup> JOSÉ ROMERO VALLÉS**

para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Granada, Noviembre 2008



Tesis doctoral realizada por Da. María José Romero Vallés, bajo la dirección de Dr. Juan Campos Rodríguez y Dr. Pedro José Torres Villarroya del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada.

Fue leída el día 7 de Noviembre de 2008, ante el tribunal formado por Prof. Drs. D.:

*Rafael Ortega Ríos (U. de Granada)*

*Juan Soler Vizcaíno (U. de Granada)*

*Eduardo Liz Marzan (U. de Vigo)*

*Lluís Alsedà i Soler (U. Autònoma de Barcelona)*

*Antonio Algaba Durán (U. de Huelva).*

Obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude por unanimidad.



A mis padres, fuente de amor y cariño,  
apoyo y sustento, siempre junto a mí.  
Sin vosotros y vuestro sacrificio,  
no habría llegado hasta aquí.

A mis hermanos, Marina y Juan Emilio,  
por vuestra alegría y afecto.  
Por ser hermanos y amigos,  
en mi corazón siempre os llevo.

A Juan, quien me regala cada día,  
por compartir mis penas y mis sueños.  
Gracias por llenar mi vida  
de muchos y buenos momentos.





## Agradecimientos

Las páginas que componen esta tesis son el fruto del trabajo de varios años. En este tiempo ha sido esencial el apoyo y la ayuda de mis directores y coautores. Por ello, deseo expresar mi mayor gratitud a Juan Campos y Pedro Torres por haberme introducido en el mundo de la investigación en Matemática Aplicada; estando siempre ahí para lo que he necesitado y guiando mis pasos. Gracias por todas las horas de trabajo juntos y por confiar en este proyecto.

También me gustaría agradecer al profesor Peter Veerman que me iniciara en el problema de la caída de granos, tema sobre el que se centra esta memoria. Al Departamento de Matemática Aplicada por poner los medios para que se realizara y al Ministerio de Ciencia y Tecnología por concederme la beca que lo ha financiado.

Por último pero no menos importante, en el terreno personal, me gustaría dar las gracias a mi familia. A mis padres por su apoyo y aliento desde el principio de mis estudios. A mi madre, por tanto trabajo no siempre reconocido que ha hecho posible que me dedicara a estudiar y a mi padre por iniciarme en las Matemáticas, confiando siempre en mis posibilidades. A mis hermanos, por compartir tantos momentos de la vida y hacerme sentir tan plena y querida. A Marina he de agradecerle que llene con su sonrisa incluso mis momentos no tan alegres y a Juan Emilio algunas de sus charlas sobre materiales medio en broma medio en serio. A Juan, su inagotable paciencia sobretodo en los últimos meses en los que la escritura de esta memoria me han hecho más susceptible. Gracias por tu apoyo incondicional.



# Contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
1.1	Motivación y antecedentes . . . . .	4
1.1.1	Sistemas no regulares . . . . .	4
1.1.2	Fenómenos nuevos . . . . .	11
1.2	Marco general . . . . .	13
1.2.1	Medios granulares. . . . .	13
1.2.2	Convertidores de corriente. . . . .	15
1.3	Objetivos y estructura de la tesis . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Caída de partículas</b>	<b>19</b>
2.1	Del modelo continuo al modelo discreto . . . . .	20
2.2	Descripción soluciones. Acumulación . . . . .	27
2.3	Rango de parámetros. Casos residuales . . . . .	31
<b>3</b>	<b>La escalera inclinada</b>	<b>41</b>
3.1	Acotación de soluciones . . . . .	42
3.2	Soluciones de parada . . . . .	47
3.3	Soluciones periódicas . . . . .	51
3.4	Estabilidad . . . . .	62
<b>4</b>	<b>La escalera horizontal</b>	<b>73</b>
4.1	El Operador de Poincaré . . . . .	74
4.2	Soluciones periódicas . . . . .	80
4.2.1	Periódicas impactos aislados . . . . .	80
4.2.2	Soluciones periódicas deslizantes . . . . .	88
4.2.3	Una estructura fractal. Bifurcaciones . . . . .	91
4.3	Extensión multivaluada . . . . .	98
4.3.1	Puntos fijos del operador de Poincaré. Bifurcación. . .	107

2

*CONTENIDOS*

**5 Convertidor reductor DC-DC**

**119**

# Capítulo 1

## Introducción

## 1.1 Motivación y antecedentes

En la naturaleza aparecen fenómenos instantáneos o bien otros en los que la transición de un estado a otro ocurre de forma mucho más rápida que el tiempo en cada estado. Estos fenómenos deben ser modelizados con sistemas no regulares que recojan estos cambios instantáneos. Estos sistemas se conocen como sistemas no suaves y engloban a modelos con impactos, fricción seca o de Coulomb, ... Una recopilación sobre este tipo de sistemas puede encontrarse en [56], donde se hace una revisión de los resultados en sistemas dinámicos no suaves que incorporan efectos de fricción y/o impactos. Así mismo, en [76] puede encontrarse una relación de ejemplos mecánicos modelados por este tipo de sistemas y un buen número de referencias.

La primera forma de resolver este tipo de problemas fue mediante regularización para poder aplicar la gran variedad de resultados para sistemas regulares. Sin embargo, esto conlleva una pérdida en el significado físico y/o biológico de las soluciones. Además, no siempre es posible reflejar toda la riqueza dinámica puesto que aparecen nuevos tipos de órbitas periódicas así como bifurcaciones inducidas por la pérdida de regularidad.

El primer problema es la definición de solución. Aún más complicado es el estudio de nociones como la estabilidad, pues el paso por las regiones donde se pierde la regularidad puede convertir soluciones estables en inestables o estabilizar soluciones inestables. De hecho, es posible encontrar ejemplos en los que los sistemas que describen las soluciones por separado son inestables y se usa la combinación de ellos para estabilizar la solución [63]. Sin embargo, es posible que las soluciones se inestabilicen al pasar de un sistema a otro.

Por otra parte, cuestiones como funciones de Lyapunov deben ser generalizadas ante la imposibilidad de calcular las derivadas en una órbita periódica. Por ejemplo, viendo si la función es decreciente cuando las soluciones atraviesan la zona donde el sistema no es regular.

### 1.1.1 Sistemas no regulares

Existen distintos modelos, que pueden clasificarse según el grado de pérdida de regularidad. Una forma de clasificarlos, siguiendo [61] es la siguiente.

#### 1. Discontinuidad en las variables de estado.

Dentro de este tipo de sistemas podemos encontrar sistemas cuyas soluciones son discontinuas como es el caso de los sistemas de impulsos y

otros en los que la derivada no es continua como en los que se consideran impactos.

Por ejemplo, para una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, podríamos imponer la condición de impacto cuando la solución se anula.

Así,

$$\begin{cases} x'' + \gamma x' + x = p(t) & \text{si } x(t) > 0 \\ x'(t^+) = -rx'(t^-) & \text{si } x(t) = 0 \end{cases}$$

donde  $r \in [0, 1]$ . Normalmente, se dice que si  $r = 0$  el impacto es completamente plástico, si  $r = 1$  es elástico y si  $r \in (0, 1)$  se dice inelástico o parcialmente elástico.

En [69] se presentan fundamentos sobre la evaluación del coeficiente de restitución de manera experimental. Para ello, se estudia la colisión de una esfera en una pared plana lisa, explorando un rango significativo de materiales, velocidades de impacto y tamaño de la partícula. Por otra parte, son numerosos los trabajos donde se estudia el movimiento de una bola sobre distintos perfiles como en [11], [51] y [85]. También existen programas para ver lo que ocurre como es el caso del que aparece acompañando al libro [1] o del *Bouncing Ball Workbench* realizado por Piotr Pierański y Riccardo Barberi que puede encontrarse en la red

<http://fizyka.phys.put.poznan.pl/~pieransk/BouncigBall.html>

junto con una explicación del aparato físico que simula.

Teóricamente este tipo de sistemas es el que presenta mayor dificultad puesto que no hay una teoría bien establecida sobre existencia y prolongación de soluciones. En el libro [8] se presenta una base teórica para el estudio de este tipo de problemas así como ejemplos de modelos físicos.

Modelos con impactos aparecen de forma natural en un amplio rango de aplicaciones como dinámica de estructuras bajo la acción de terremotos [47] o máquinas de percusión [80]. Un problema clásico de sistema con impactos es el propuesto por Fermi [33] para acelerar partículas cargadas mediante colisiones bajo un campo magnético, con el que se pretende explicar la aceleración de los rayos cósmicos. Hay numerosas formas de enfrentarse a este problema, una de las más conocidas es el modelo de Fermi-Ulam, en el que se considera una partícula moviéndose

entre dos láminas paralelas e interactuando con ellas mediante una ley de impacto elástico. Se considera que una de estas láminas está fija y la otra se mueve periódicamente de forma perpendicular a ambas [38]. Para este modelo existen resultados sobre acotación y no acotación de soluciones, inestabilidad [86], cuasiperiodicidad y curvas invariantes [88],...

Otro tipo de modelos son los llamados *osciladores con impactos*, dentro de los cuales se encuentra el siguiente ejemplo que puede verse en [55]. Se considera una pelota atada a un muelle golpeando en una pared fija, dada por  $x = \sigma$  y una fuerza periódica  $p(t)$  ejercida sobre el muelle. Las ecuaciones que rigen este movimiento son

$$\begin{cases} \ddot{x} + \delta\dot{x} + x = p(t) & \text{si } x < \sigma \\ x'(t^+) = -rx'(t^-) & \text{si } x = \sigma ; \end{cases}$$

donde  $\delta$  es el amortiguamiento. Este tipo de sistemas con ecuación sin término de fricción ha sido analizado, entre otros, por Lazer y McKenna [60] que han buscado soluciones periódicas y posteriormente por Ortega [72] dando condiciones para la existencia de soluciones y la acotación o no acotación de soluciones periódicas. Así mismo, en [13] y [77] se da la existencia y no existencia de soluciones periódicas. Además, se obtienen soluciones con número de impactos tan grande como se quiera en un periodo. Otro ejemplo de oscilador con impacto es el movimiento de un péndulo invertido que impacta sucesivamente en dos paredes verticales fijas [30] y [31].

Los billares forman también un extenso e interesante campo de estudio en sistemas con impactos [29]; estando relacionado así mismo con el estudio de la iluminación de una habitación [20]. En este sentido, es análogo considerar una bola de billar que rebota sucesivamente en las paredes de una mesa que un rayo de luz que se refleja reiteradamente en las paredes de una habitación. Se considera que el habitáculo está delimitado por una curva cerrada (parábola, hipérbola,...) y la reflexión se produce de acuerdo a la ley "el ángulo de reflexión es igual al de incidencia". Por eso, se suele considerar que los impactos son elásticos ya que por ejemplo en el caso de la luz, ésta no pierde intensidad sino que al impactar se refleja. En este entorno se han desarrollado parte de la teoría de sistemas no lineales, hamiltonianos,... encontrando evidencias de comportamiento KAM así como movimiento casi periódico,



caos... como puede verse en [32], [36], [41], [87] y sus referencias.

Por otra parte, los problemas con impulsos han sido desarrollados en numerosos campos de la ciencia ya que muchos fenómenos como los desastres naturales envuelven pequeñas perturbaciones no lineales que ocurren en un instante, es decir, en un periodo de tiempo insignificante en comparación con la evolución total del proceso. Además, los impactos pueden ser vistos como impulsos variables en la velocidad.

Por ejemplo, los impulsos se usan en dinámica de poblaciones para modelar los efectos de los factores exteriores en el crecimiento de una población cuando estos ocurren de manera puntual o bien para ejercer un control sobre ella como en [3] ó [71].

Existen numerosos trabajos en este campo, como puede verse en [5], [58] y sus referencias. Citamos sólo algunos de los trabajos en esta línea, como demostrar existencia para problemas con condiciones no lineales de frontera [15] o encontrar funciones de Green o principio de máximo para cualquier orden [16], de gran utilidad ya para problemas suaves. Por otra parte, es posible utilizar sub y supersoluciones con algún salto para aproximar soluciones regulares de ecuaciones ordinarias y extender así estas nociones [64].

Un ejemplo de este tipo de sistemas para primer orden sería

$$\begin{cases} x' = f(t) & , \text{ si } x(t) \neq g(t), \\ x(t_i^+) = F(x(t_i^-)) & , \text{ si } x(t_i) = g(t_i) ; \end{cases}$$

donde  $f$ ,  $F$  y  $g$  son funciones regulares. Obsérvese que el problema anterior puede ser reescrito en términos de medidas puntuales.

Dentro de este tipo se encuentra el sistema dinámico asociado a la caída de una partícula sobre un perfil escalonado, en el que se centra esencialmente la tesis.

## 2. Discontinuidad en el lado derecho de la ecuación diferencial.

En este tipo se encuadran aquellos en los que el campo es discontinuo y las soluciones suelen entenderse en el sentido de Carathéodory [43] o de Filippov.

Una revisión de los principales resultados puede encontrarse en el libro de Filippov [35], donde se da una generalización de las soluciones y

la aplicabilidad de muchos de los resultados de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Siguiendo este libro, consideremos una ecuación general de la forma

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.1)$$

donde en principio, no se hace ninguna hipótesis sobre la función  $f$ . La discontinuidad de  $f$  puede ser en el tiempo o en la variable de estado. En el caso clásico, bajo la hipótesis de continuidad de  $f$ , se dice que  $x(t)$  es solución de (1.1) si verifica la ecuación integral

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds . \quad (1.2)$$

Ahora bien, en el caso de lado derecho discontinuo uno de los primeros problemas es establecer la solución. Veamos esto con dos ejemplos.

**Ejemplo 1:**

$$\dot{x} = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases} .$$

Las soluciones son continuas, de hecho son de la forma  $x(t) = |t| + c$  pero para  $t = 0$  la derivada no existe. Sin embargo, la solución puede entenderse casi por doquier por la forma del campo. En efecto, por la izquierda la solución se aproxima a la línea de discontinuidad y por la derecha se aleja. Por lo tanto, las soluciones atraviesan la línea de discontinuidad y las soluciones tienen pleno sentido aunque no sean derivables para  $t = 0$ .

**Ejemplo 2:**

$$\dot{x} = 1 - 2\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \\ 3 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

En este caso, las soluciones serán de la forma  $x(t) = -t + c$  si  $x > 0$  y  $x(t) = 3t + c'$  si  $x < 0$ . Esto es, cuando el tiempo crece todas las soluciones alcanzan la recta  $x = 0$ . Además, puesto que ambos campos apuntan hacia  $x = 0$  las soluciones no pueden escapar. Sin embargo en la línea no se verifica la ecuación diferencial, ni siquiera para casi todo tiempo, a menos que se extienda la condición de verificación.

El primer ejemplo es representativo de lo que ocurre cuando en (1.1) la función  $f(t, x)$  es discontinua en el tiempo. En este caso, usando la ecuación integral (1.2) se obtiene la definición de *solución en sentido Caratheodory* y esto nos permite desarrollar la teoría de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo en  $t$ . Para ello, asumamos que  $f(t, x)$  satisface las condiciones de Caratheodory,

- (a) para casi todo valor de  $t$ ,  $f(t, x)$  está definida y es continua como función de  $x$ ;
- (b) es medible en  $t$  para cada valor de  $x$ ;
- (c) para cada compacto contenido en el dominio de definición de  $f$ ,  $|f(t, x)| \leq m(t)$  donde  $m(t)$  es integrable.

La ecuación (1.1) donde  $f(t, x)$  verifica las condiciones anteriores, se dice de Caratheodory.  $x(t)$  es una solución de la ecuación de Caratheodory en un intervalo (abierto o cerrado) si es absolutamente continua en todo subintervalo cerrado y satisface la ecuación para casi todo  $t$ . O equivalentemente, bajo las condiciones a)-b)-c) verifica la ecuación integral (1.2) para algún  $t_0$ .

En cambio, si la discontinuidad es en la variable de estado como en el caso del segundo ejemplo, las cosas son más complicadas y las soluciones generalmente no pueden definirse casi por doquier. De hecho, se suele entender la ecuación en sentido de inclusión diferencial, es decir,

$$\dot{x} \in F(t, x).$$

Así, si  $f(t, x)$  es continua en un dominio  $G$  y discontinua en un conjunto de medida cero  $S$ ; se define  $F(t, x) = f(t, x)$  para todo valor  $(t, x) \in G$ , es decir, como un punto. Por otra parte, si  $(t, x) \in S$  hay que definir  $F(t, x)$  como un conjunto apropiado. Se dice que una solución de la ecuación (1.1) es solución de la inclusión diferencial si es una función absolutamente continua definida en un segmento donde  $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$  casi por doquier. En este caso se dice que la solución es en sentido *multivaluado* o de *Filippov*. El mayor interés de las distintas definiciones de  $F(t, x)$  en los puntos de discontinuidad consiste en dar sentido físico a las soluciones de los problemas reales. La forma más sencilla de hacerlo es considerar para cada  $(t^*, x^*) \in S$  que  $F(t^*, x^*)$  es

el menor convexo cerrado que contiene a todos los puntos adherentes de  $f(t, x)$  con  $(t, x) \rightarrow (t^*, x^*)$ .

Quizás los problemas más representativos de este tipo de ecuaciones son los referentes a los modelos con *fricción seca*. Se llama así a la resistencia al movimiento relativo entre dos cuerpos, cuando sus superficies son rugosas o débilmente lubricadas. Tal como se hace notar en [76], este movimiento alterna entre dos modos: modo de arrastre (*stick*) y modo de deslizamiento (*slip*). El primero es la resistencia umbral o inicial contra el movimiento desde el equilibrio y ocurre cuando la fuerza aplicada sobre un cuerpo no es suficiente para moverlo con respecto al otro y es arrastrado por el primero. Ahora bien, si la fuerza aplicada supera la fuerza de rozamiento estática entonces un cuerpo desliza con respecto al otro entrando en modo deslizamiento. Ambos modos se alternan en problemas de fricción seca produciendo vibraciones. Este fenómeno se da en la vibración de la caja de cambio de un coche, el ruido de una tiza en una pizarra o el traqueteo de una maquinaria.

El nuevo concepto de solución introducido para este tipo de problemas permite resolver la paradoja de Painlevé [74] que proclamaba la inconsistencia de los problemas de sólidos rígidos con fricción seca.

Citamos un ejemplo dado en el libro de Deimling [26] 13.3 como muestra representativa de este tipo de problemas. Se considera una masa  $M$  unida a un muelle, moviéndose en un tubo con líquido, en contacto con una pared y periódicamente excitado por una fuerza  $P(t)$ . Las fuerzas que actúan son por tanto,  $-kx$  por la elasticidad del muelle,  $-rx'$  el amortiguamiento viscoso del líquido y  $-c \operatorname{sgn}(x')$  la fricción seca o de Coulomb con la pared. Todas las constantes son positivas y  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  representa la función signo ( $\operatorname{sgn}(\alpha) = \frac{\alpha}{|\alpha|}$  para cualquier  $\alpha$  no cero). Luego, el balance de fuerzas es de la forma

$$x'' + rx' + kx = P(t) - c \operatorname{sgn}(x') .$$

Puesto que el signo no está definido para valores nulos, la ecuación anterior es extendida en sentido multivaluado como

$$x'' + rx' + kx \in P(t) - cS\operatorname{gn}(x') ,$$

siendo

$$S\operatorname{gn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Un estudio del problema anterior generalizando las fuerzas a casos no lineales, describiendo las soluciones periódicas, comportamiento asintótico, ... puede encontrarse tanto en el libro citado como en los artículos [27] y [28]. Otros modelos de fricción seca pueden encontrarse en [14], [34],[52] y [57].

Otra importante línea de estudio en la que se consideran sistemas con campo discontinuo son los convertidores de corriente [10], [25], [37], ... Analizaremos estos problemas con detalle en la Sección 1.2.2 .

### 3. Campo continuo pero no diferenciable

Este tipo son aquellos en los que el Jacobiano no es diferenciable aunque el campo sea continuo. Un ejemplo de este tipo de sistemas son los osciladores asimétricos, dados en [2], [73] y sus referencias. Estos representan un modelo importante para comprender las oscilaciones de los puentes en suspensión [59]. También se engloban dentro de este caso a los sistemas mecánicos con soporte elástico bilineal [48].

Por supuesto, los casos anteriores no son independientes y pueden darse problemas con variables de estado discontinuo y campo no continuo o no diferenciable. Por ejemplo, problemas de osciladores con impactos que añaden fricción seca [22].

## 1.1.2 Fenómenos nuevos

Asociados a las soluciones de sistemas no suaves aparecen nuevos fenómenos que los sistemas regulares no presentaban pero que representan soluciones reales de los problemas físicos, biológicos,... que modelizan. Entre estos fenómenos citamos tres: soluciones que acumulan impactos, soluciones deslizantes y soluciones de raspado o rozadura.

El fenómeno Zeno (*chattering*) consiste en la acumulación de impactos en tiempo finito o bien en la acumulación de infinitos cambios de sistemas. Matemáticamente, esto lleva asociado a veces una pérdida de unicidad en las soluciones y hay que decidir qué ocurre después, es decir, cómo se continúan las soluciones tras este fenómeno. Desde el punto de vista físico, este tipo de fenómenos puede representar un problema y debe ser controlado. Por ejemplo, si el sistema modela el funcionamiento de una pieza de una maquinaria o un conmutador se produciría un excesivo desgaste.

Por otra parte, se llaman soluciones deslizantes a aquellas que caen en el conjunto de discontinuidad. Esto ocurre cuando los campos que definen los sistemas tienen la misma dirección en la intersección de las correspondientes regiones de validez. Estas soluciones pueden aparecer como parte de una solución periódica del sistema bajo consideración y generalmente en sistemas de Filippov.

Por último, se denomina soluciones de rozadura (*grazing*) a aquellas en las que el impacto no llega a ocurrir porque la derivada es paralela a la pendiente de la superficie en el punto de impacto. Este tipo de soluciones aparecen como transición entre un movimiento libre y un impacto; es como si éste se produjera de manera tangencial. Por ejemplo, en un péndulo que oscila entre dos paredes fijas bajo un flujo vertical de velocidad  $u$ . La amplitud de las oscilaciones crece cuando aumenta  $u$  y existe un cierto valor crítico  $u_0$  donde el péndulo pasa rozando ambas paredes.

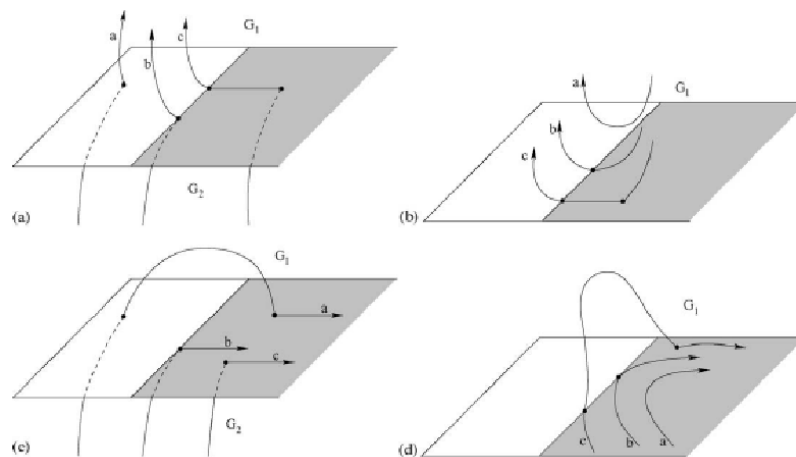


Figura 1.1: Bifurcaciones no suaves. Transición a-b-c.

Además, en el estudio de las bifurcaciones, también aparecen nuevos tipos debidos a la no regularidad. Por ejemplo, en sistemas de tipo Filippov, cuando las trayectorias entran en contacto con el borde de la región de deslizamiento pueden darse cuatro escenarios de bifurcación [48], [54]: *crossing - sliding* (cruce - deslizamiento)(Figura 1.1 a)), *grazing - sliding* (rozadura -

deslizamiento) (Figura 1.1 b)) , *switching - sliding* (salto - deslizamiento) ((Figura 1.1 c)) y *adding - sliding* ( aumento - deslizamiento) (Figura 1.1 d)). En el primero, bajo la modificación de un parámetro, las soluciones pasan a cruzar transversalmente el borde de la región de deslizamiento en un punto de bifurcación y posteriormente, las trayectorias tienen una parte deslizante. En el segundo caso, las soluciones rozan el borde de la región de deslizamiento por arriba y posteriormente caen en dicha zona. El tercero es similar al primero, sólo que en este caso las soluciones permanecen en la región de deslizamiento y no cruzan. Por último, en el cuarto caso, las soluciones pasan de estar en la región de deslizamiento a tener parte de la trayectoria fuera de esta zona. Numerosos son los artículos en los que se trata este tipo de bifurcaciones, por ejemplo [4], [45], [53], [54], ...

## 1.2 Marco general: Medios granulares y convertidores de corriente.

### 1.2.1 Medios granulares.

El estudio de medios granulares está muy extendido en nuestro entorno puesto que sirven como modelo de fenómenos naturales como avalanchas o tormentas de arena y también de procesos tecnológicos e industriales como el transporte, cribado o prensado de materiales como trigo, carbón, oro... El entendimiento de las propiedades de un flujo granular ha sufrido sustanciales cambios teóricos a lo largo de la historia [46], [50].

El comportamiento de un medio granular es distinto del de un sólido continuo, un líquido o un gas. Aunque el movimiento de una partícula puede ser descrito por las leyes clásicas de la física: fricción, impacto,... éstas no sirven siempre para describir el conjunto.

Existen distintas maneras de enfrentarse al problema de modelar un flujo granular, dependiendo de los niveles de descripción (ver [75] y sus referencias):

1. **Nivel microscópico** Se considera que los flujos granulares son un conjunto discreto de un gran número de partículas y se usan generalmente modelos deterministas [67]. Se asume que éstas están bajo un potencial que puede ser de distinto tipo: Lennard-Jones para moléculas [62] o asociado a fuerzas lineales o Hertzianas,...

- 2. Nivel mesoscópico** En este nivel se consideran funciones de densidad en el espacio de fase en lugar de un conjunto discreto. Se suelen usar simulaciones con el Método de Montecarlo para resolver la ecuación cinética de Boltzmann-Enskog [40].
- 3. Nivel macroscópico** Generalmente se usan ecuaciones en derivadas parciales [19].

En [75] puede verse una comparación entre la dinámica de flujos granulares realizada por el primer y el segundo nivel, para un caso particular de flujos unidimensionales correspondientes a fuerzas de Coette. Se considera el material granular entre dos paredes, con una energía exterior inducida por las paredes en sentido contrario.

Por otra parte, existen dos grandes grupos de flujos granulares, los secos y los húmedos. En los primeros se consideran únicamente fuerzas de contacto y disipativas; en los segundos hay que añadir las fuerzas adhesivas como las de Van der Waals.

Información sobre aplicaciones de sistemas mecánicos con un modelo de sólido rígido a flujos granulares puede encontrarse en [21] y [68]. En [78] pueden encontrarse aplicaciones en el estudio de avalanchas. Así mismo, en [70] se presenta un estudio de la convección granular. Para ello, se considera un material granular en un cilindro y se agita externamente de forma armónica en la dirección de la gravedad. Una de las aplicaciones del estudio de medios granulares es el vaciamiento de un silo. Un estudio de esta dinámica con especial interés en los puntos de equilibrio puede verse en [42].

Ahora bien, una de las propiedades más representativas de este tipo de modelos es que si formamos una pila con un material granular, como la arena, la pendiente del montículo resultante depende principalmente de dos ángulos. Estos ángulos, separados únicamente por unos grados, son conocidos como *ángulo de reposo* y *ángulo de máxima estabilidad* [49]. Uno de los pensamientos al respecto es que este fenómeno es consecuencia de la interacción entre partículas.

En [84] (y resumido en [82]) se presenta un modelo consistente en una única partícula cayendo en una escalera inclinada obteniendo un comportamiento muy similar con resultados parciales en esa dirección. En esencia, se reduce a la siguiente conjetura: si la inclinación de la escalera es menor a un cierto ángulo  $\varphi_0$ , la partícula eventualmente para y si este ángulo es mayor que  $\varphi_1 > \varphi_0$  se acelera continuamente (en el sentido de velocidad



no acotada). Sin embargo, debido a la complejidad del modelo no se daba ninguna prueba o refutación de la misma. Por eso, se formula un problema más sencillo [81], [82] en el que la partícula se pega completamente al escalón hasta el borde del peldaño. Es decir, con impacto completamente plástico. Sin embargo, este modelo no es representativo y no hay manera de reflejar los ángulos.

En este contexto se presenta el modelo esencial de esta tesis, la caída de una partícula sobre un perfil escalonado. Se considera un modelo que engloba a la escalera inclinada de los artículos [82]-[84] y el modelo de la escalera horizontal.

### 1.2.2 Convertidores de corriente.

Actualmente muchos son los estudios relacionados con los convertidores de corriente: DC/DC, AC/AC, DC/ AC y AC/DC; donde AC simboliza corriente alterna y DC corriente continua. Esto se debe a la necesidad de obtener fuentes de voltaje que den el voltaje requerido por la carga sin importar las variaciones de ésta. En los últimos años estos dispositivos se han orientado a fuentes conmutadas que usan corriente continua y se ejerce un control en el sistema mediante un modulador de ancho de pulso *PWM* (Pulsewidth modulation). Este modulador consta de un interruptor (o varios) que conmuta entre la posición ON (conducción) y la posición OFF (no conducción). Lo más usual para saber el tiempo de conmutación es comparar la señal con una rampa de referencia, esto ha sido utilizado en convertidores de tipo reductor (*buck*) [25], [37]. Son muchos los trabajos realizados para los convertidores DC-DC reductores, a continuación citamos sólo algunos. En [25] se dan evidencias numéricas de caos mediante doblamiento de periodo así como la presencia de subarmónicos y en [10] se estudian diferentes tipos de soluciones. En [37] se da un estudio de las diferentes órbitas periódicas según el número de conmutaciones por periodo, dando condiciones necesarias de existencia en forma de expresiones cerradas para las soluciones, estudiando su estabilidad mediante el cálculo numérico de los multiplicadores característicos del operador de Poincaré y resaltando la presencia de atractores extraños. Una recopilación de los métodos en el estudio de bifurcaciones puede encontrarse en [4], aunque existen muchos otros trabajos como [9] y [24].

Sin embargo, se han desarrollado otros esquemas de control con el fin de reducir comportamientos no deseados como el *chattering*. Este es el caso de

la técnica propuesta en [37] en la que se hace uso de una superficie de deslizamiento, combinación lineal del error de voltaje (diferencia entre la señal y los voltajes de referencia) y su derivada; obligando a que tenga promedio cero en cada iteración. Este tipo de control se denomina control *ZAD* (Zero Average Dynamics).

En este contexto se sitúa el último capítulo de la presente memoria, donde se analiza un tipo particular de órbitas para el convertidor DC-DC reductor.

### 1.3 Objetivos y estructura de la tesis

El objetivo principal de la presente memoria es comprender el comportamiento de un sistema dinámico no suave. Más concretamente, de un modelo de impactos con variable de estado no continua, el correspondiente a una partícula que impacta sucesivamente en un perfil escalonado. Se pretendía encontrar un modelo que unificara los trabajos en perfiles inclinados propiamente dicho [82],[81],[83],[84] y el modelo de la escalera horizontal [17],[18]; que no podían verse tomando límite en el ángulo de inclinación.

Así mismo, la investigación de este sistema nos ha permitido clarificar la dinámica que aparece. Uno de los fenómenos a destacar es la acumulación de impactos en tiempo finito y la posterior continuación de la solución. Por tanto, otro de los objetivos era estudiar este fenómeno tanto en el caso en que las soluciones se paran como cuando deslizan.

Por otro lado, en el caso de perfil no inclinado, se ha desarrollado un estudio más completo. Este modelo no es sólo una simplificación del anterior sino que presenta riqueza por sí mismo y el hecho de ser modelado mediante unas ecuaciones más sencillas nos permite obtener mucha más información.

Finalmente, en un intento de extender algunas de las técnicas empleadas en el trabajo anterior, hemos empezado con el estudio de un sistema continuo pero no suave. Más concretamente en el análisis del sistema dinámico asociado a convertidores de corriente como los de tipo DC-DC [10], [25], [37],...

La memoria está estructurada como sigue. En el Capítulo 2 hacemos una descripción del modelo de la caída de la partícula sobre un perfil escalonado, obteniendo las ecuaciones del sistema no suave que lo representa así como una discretización del mismo. Tras una normalización de los parámetros, se hace una descripción de las soluciones, haciendo especial hincapié en el fenómeno de acumulación de impactos (Sección 2.2). A continuación, en la

Sección 2.3 se da una descripción del rango de validez de los parámetros y se estudian los casos con dinámica sencilla para poder centrarnos después en los que tengan más interés.

En el Capítulo 3 nos concentramos en el estudio de la dinámica en el caso de escalera inclinada dentro del rango de parámetros interesante. En una primera sección se establecen las condiciones de acotación y no acotación de soluciones, estudiando los valores propios de la matriz del sistema. Posteriormente, en la Sección 3.2 estudiamos las soluciones que paran completamente tras una acumulación de impactos, tras saltar al menos un escalón antes. La Sección 3.3 está dedicada al estudio de las soluciones periódicas de impactos aislados, dando las condiciones necesarias y suficientes de existencia. Además, se demuestra que las superficies de existencia en el espacio de parámetros están fuera de la región de acotación de soluciones. Finalmente, se examina la estabilidad de estas órbitas periódicas en la Sección 3.4.

El Capítulo 4 está dedicado al estudio del caso de la escalera horizontal, simplificando las ecuaciones generales. Para entender mejor este sistema dinámico se define un operador de Poincaré en la Sección 4.1. En la Sección 4.2 se examinan las órbitas periódicas, poniendo especial interés en aquellas que representan partículas que tras una acumulación de impactos deslizan hasta el borde del peldaño. Una representación gráfica de los parámetros para los que estas órbitas aparecen nos da la existencia de una estructura fractal, que se analiza en la Sección 4.2.2 y cuya dimensión se calcula mediante un algoritmo de recuento de cajas. En esta sección se hace también un estudio numérico de las bifurcaciones. Por último, la extensión de la ecuación diferencial en sentido de inclusión en la Sección 4.3 y la correspondiente generalización del concepto de solución a solución en sentido multivaluado [35], nos permite recuperar las órbitas periódicas “perdidas” por la falta de continuidad del sistema. Así mismo, es posible realizar con detalle el esquema de bifurcación de los puntos fijos del operador de Poincaré extendido.

En el último capítulo, Capítulo 5, nos centramos en dar un modelo no suave en el que hemos empezado a aplicar las técnicas usadas para el otro modelo. En el campo de un convertidor reductor DC-DC, determinamos la condición suficiente para la existencia de una órbita periódica con una única conmutación por periodo y depuramos la condición necesaria existente. Además, bajo una hipótesis de separación de ceros obtenemos información geométrica de la solución que nos permite, entre otras cosas, acotar la amplitud de la misma.

Los resultados que se muestran en esta memoria se sustentan en tres

artículos de investigación, [17],[18] y [23], dos de ellos ya publicados y el tercero sometido. Sin embargo, existen resultados nuevos, desarrollados esencialmente en la Sección 4.3 y el Capítulo 5.

## Capítulo 2

# Caída de partículas sobre un perfil escalonado

## 2.1 Del modelo continuo al modelo discreto

En esta sección vamos a introducir el modelo esencial en cuyo estudio se centra la tesis, así como la deducción de las ecuaciones que lo describen. Pretendemos modelar la trayectoria de una partícula puntual de masa unidad que desciende por una escalera inclinada bajo el único efecto de la gravedad (ver Figura 2.1). Por conveniencia, podemos suponer que la escalera es horizontal y que es la gravedad la que forma un ángulo con el eje de dicha escalera. O lo que es lo mismo, expresarla como un vector cuyas dos componentes son no nulas.

En primer lugar, para escribir la ecuación de la escalera descendente, consideramos que los peldaños tienen una altura  $a$  y una longitud  $b$ . Denotemos además por  $x$  e  $y$  las componentes horizontal y vertical de posición. Podemos entonces modelizar la escalera como  $y = -aE\left[\frac{x}{b}\right]$ , siendo  $E[\cdot]$  la función parte entera.

Ahora, a fin de calcular las ecuaciones del movimiento de la partícula, notaremos por  $x(t)$  e  $y(t)$  las componentes horizontal y vertical de su posición en un tiempo  $t$ , respectivamente. Además, denotamos como  $g_1$  y  $-g_2$  las componentes de la gravedad ( $g_1, g_2$  estrictamente positivas). Hay que tener en cuenta que los elementos físicos que rigen este movimiento son esencialmente dos: un vuelo parabólico mientras la partícula permanece en el aire y una condición de impacto en la velocidad cuando se produce una colisión. Esto puede detallarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x''(t) = g_1 \\ y''(t) = -g_2, \end{array} \right\} \text{ si } y(t) > -aE\left[\frac{x(t)}{b}\right] \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x'(t^+) = e_t x'(t^-) \\ y'(t^+) = -e_n y'(t^-), \end{array} \right\} \text{ si } y(t) = -aE\left[\frac{x(t)}{b}\right] \quad (2.2)$$

donde los parámetros  $e_t, e_n \in [0, 1]$  se denominan generalmente *parámetros de restitución tangencial y normal*, respectivamente. Se obtiene un sistema (2.1)-(2.2) que es un sistema dinámico no regular pero integrable a trozos.

Aunque utilizaremos el sistema anterior de tiempo continuo, para facilitar la comprensión de algunas de las propiedades de este sistema realizamos una discretización. Para ello, vamos a seccionar el flujo en cada impacto, situando el sistema de referencia en el punto de impacto, apoyado en los peldaños y orientado hacia abajo y a la derecha.

La trayectoria después de cada impacto viene determinada por tres magnitudes representativas. Estas magnitudes son la distancia al borde del escalón

y las componentes horizontal y vertical de la velocidad de salida. Denotaremos a estas variables por  $z$ ,  $u$  y  $v$ , respectivamente (ver Figura 2.1). Así, cada impacto vendrá dado por una terna  $(z, u, v)$  y debemos calcular la terna  $(z', u', v')$  correspondiente al nuevo impacto.

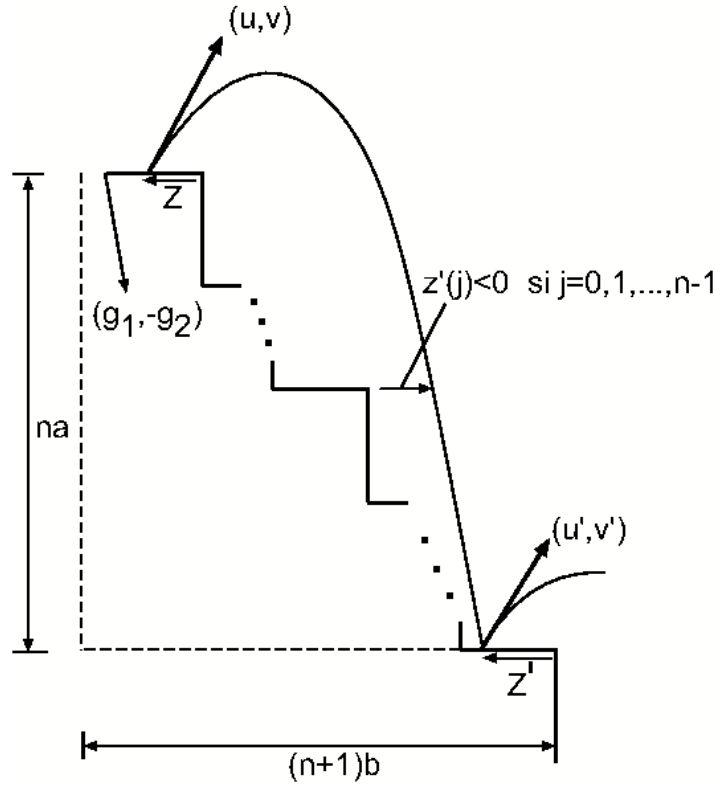


Figura 2.1: El modelo discreto

**Proposición 2.1** Sea  $(u, v, z)$  con  $u \geq 0, v > 0, z \in [0, b)$ , entonces  $(u', v', z')$  verifica

$$\begin{cases} u' = e_t \left( u + \frac{g_1}{g_2} (v + \sqrt{v^2 + 2g_2na}) \right) , \\ v' = e_n \sqrt{v^2 + 2g_2na} , \\ z' = z + n(b - \frac{g_1}{g_2}a) - \left( u + \frac{g_1}{g_2}v \right) \frac{v + \sqrt{v^2 + 2g_2na}}{g_2} ; \end{cases}$$

donde  $n$  es el primer natural donde la tercera expresión es positiva.

### Demostración

Sea  $(x(t), y(t))$  la solución del sistema dado por (2.1) y (2.2). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que para  $t = 0$  se produce un impacto en el punto  $(b - z, 0)$  correspondiente al primer escalón de la gráfica  $y = -aE[\frac{x}{b}]$ . Luego,

$$\begin{aligned} x(0) &= b - z & x'(0) &= u \\ y(0) &= 0 & y'(0) &= v \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x(t) &= g_1 \frac{t^2}{2} + ut + b - z \\ y(t) &= -g_2 \frac{t^2}{2} + vt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ahora, supondremos conocido el número de escalones que se saltan entre dos impactos consecutivos y denotaremos este número por  $n$ . Lo llamaremos *número de salto* y posteriormente veremos cómo se calcula.

Conocido  $n$ , para calcular la terna  $(z', u', v')$  necesitamos saber el tiempo de impacto,  $t_i$ . Este tiempo se obtiene de imponer que la componente vertical de la posición coincide con la altura del  $n$ -ésimo escalón. Esto es,

$$y(t_i) = -na .$$

Y por tanto, viene dado por

$$t_i = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2g_2na}}{g_2}. \tag{2.4}$$

Ahora ya podemos obtener las expresiones de  $(u', v', z')$ , sustituyendo en (2.3) y teniendo en cuenta las condiciones de impacto. Así,

$$\begin{aligned} v' &= -e_n y'(t_i) = e_n \sqrt{v^2 + 2g_2na} \\ u' &= e_t x'(t_i) = e_t \left( u + \frac{g_1}{g_2} (v + \sqrt{v^2 + 2g_2na}) \right) \end{aligned}$$

y por último,

$$\begin{aligned} z' &= (n + 1)b - x(t_i) = (n + 1)b - \left( g_1 \frac{t_i^2}{2} + ut_i + b - z \right) = z + nb \\ &\quad - \left( \frac{g_1}{g_2} (vt_i + na) + ut_i \right) = z + n(b - \frac{g_1}{g_2}a) - \left( u + \frac{g_1}{g_2}v \right) \frac{v + \sqrt{v^2 + 2g_2na}}{g_2}. \end{aligned}$$

■



Sólo nos resta calcular el número de salto,  $n$ , que será el primer número natural que hace que  $z'(n)$  sea positivo (ver Figura 2.1). Así,

$$n = 0 \text{ si } z'(0) \geq 0, \text{ es decir, } z \geq \frac{2v}{g_2} \left( u + \frac{g_1}{g_2} v \right).$$

Esto nos indica que la partícula vuelve a impactar en el mismo escalón. En otro caso,  $n$  se calcula buscando el primer número natural que hace que  $z'(n)$  sea positivo, es decir,

$$z + n \left( b - \frac{g_1}{g_2} a \right) - \left( u + \frac{g_1}{g_2} v \right) \frac{v + \sqrt{v^2 + 2g_2 n a}}{g_2} \geq 0$$

o lo que es lo mismo, si hacemos el cambio de variable  $y = \sqrt{v^2 + 2g_2 n a}$ ,

$$z'(y) = z + \frac{b - \frac{g_1}{g_2} a}{2g_2 a} (y^2 - v^2) - \left( u + \frac{g_1}{g_2} v \right) \frac{v + y}{g_2} \geq 0.$$

Esto es una parábola en  $y$  cuyas dos raíces, que denotamos por  $y_1$  e  $y_2$ , están ordenadas de forma que  $y_1 \leq v \leq y_2$  ya que en  $y = v$  la expresión anterior es negativa por ser

$$z < \frac{2v}{g_2} \left( u + \frac{g_1}{g_2} v \right).$$

Ahora bien, por la definición de  $y$  se tiene que  $y \geq v$ . Por tanto, la única raíz válida es  $y_2$  que viene dada por

$$\frac{g_2 u + g_1 v + \sqrt{(g_2 u + g_1 v)^2 - 2 \left( g_2 \frac{b}{a} - g_1 \right) \left( g_2^2 z - \frac{g_1 + g_2 \frac{b}{a}}{2} v^2 - g_2 u v \right)}}{g_2 \frac{b}{a} - g_1}. \quad (2.5)$$

Hay que observar que en el razonamiento anterior se está asumiendo que

$$g_2 \frac{b}{a} - g_1 > 0 \quad (2.6)$$

o lo que es lo mismo que la pendiente de la escalera ( $\frac{b}{a}$ ) es superior a la inclinación de la gravedad ( $\frac{g_1}{g_2}$ ). De otro modo, la parábola que describe el movimiento no tocaría a la escalera en más de un punto y no se producirían impactos.

Ahora bien, de la expresión (2.5), se deduce que  $z'(n) \geq 0$  si y sólo si  $y \geq y_2$ , lo que es equivalente a

$$v^2 + 2g_2na \geq y_2^2 ,$$

es decir,  $n$  es el primer número natural tal que

$$n \geq \frac{y_2^2 - v^2}{2g_2a} .$$

De esto se sigue el siguiente corolario sobre los números de salto.

**Corolario 2.2** *En las condiciones de la proposición anterior se verifica que*

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0 \\ n = \Gamma \left[ \frac{y_2^2 - v^2}{2g_2} \right] \end{array} \right. , \text{ si } z \geq \frac{2v}{g_2} \left( u + \frac{g_1}{g_2} v \right) , \text{ en otro caso.}$$

$\Gamma[x]$  denota la función techo (ceiling) que a cada número real le hace corresponder el menor entero mayor o igual que él e  $y_2$  viene dado por la expresión (2.5).

Para simplificar el sistema supondremos  $a = b = 1$  o lo que es lo mismo mediremos la longitud y la altura en escalones. Además, normalizamos la gravedad en la forma  $g = (\kappa, -1)$  con  $0 \leq \kappa \leq 1$ . Así, llegamos a

$$\left. \begin{array}{l} x''(t) = \kappa \\ y''(t) = -1, \end{array} \right\} \text{ si } y(t) > -E[x(t)] \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} x'(t^+) = e_t x'(t^-) \\ y'(t^+) = -e_n y'(t^-), \end{array} \right\} \text{ si } y(t) = -E[x(t)] \quad (2.8)$$

donde los parámetros  $g_1, g_2, a$  y  $b$  se han fusionado en uno sólo  $\kappa$  que mide la inclinación de la gravedad.

**Nota 2.3** *Para que estas estimaciones tengan sentido  $0 \leq \kappa < 1$  (lo que equivale a (2.6)). En otro caso, como se dijo anteriormente, tras un impacto la gravedad sería incapaz de devolver la partícula a la escalera por estar menos inclinada que ella. En el modelo real, valores de  $\kappa$  mayores que uno equivaldrían a escaleras cuya inclinación es superior a 45 grados.*

El correspondiente sistema discreto será

$$\begin{cases} u' = e_t (u + \kappa(v + \sqrt{v^2 + 2n})) \\ v' = e_n \sqrt{v^2 + 2n} \\ z' = z + n(1 - \kappa) - (u + \kappa v)(v + \sqrt{v^2 + 2n}). \end{cases} \quad (2.9)$$

Y en cuanto al número de salto,  $n = 0$  si  $z \geq 2v(u + \kappa v)$  y en otro caso,  $n = \Gamma \left[ \frac{y_2^2 - v^2}{2} \right]$ . Escribiremos explícitamente la expresión de  $n$  en función de las variables del sistema. Puesto que podemos reescribir, tras sustituir en (2.5) y simplificar,  $y_2$  como

$$y_2 = \frac{u + \kappa v + \sqrt{(u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z}}{1 - \kappa};$$

tendríamos que

$$y_2^2 = \frac{(u + \kappa v)^2 + (u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z + 2(u + \kappa v)\sqrt{(u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z}}{(1 - \kappa)^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{y^2 - v^2}{2} &= -\frac{z}{1 - \kappa} + \frac{u + \kappa v}{(1 - \kappa)^2} \sqrt{(u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z} \\ &\quad + \frac{(u + \kappa v)^2 + (u + v)^2 - (1 - \kappa)^2 v^2}{2(1 - \kappa)^2}, \end{aligned}$$

que desarrollando da lugar a

$$\frac{y^2 - v^2}{2} = -\frac{z}{1 - \kappa} + \frac{u + \kappa v}{(1 - \kappa)^2} \sqrt{(u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z} + \frac{u^2 + \kappa uv + uv + \kappa v^2}{(1 - \kappa)^2}.$$

Esta expresión puede simplificarse hasta obtener

$$\frac{y^2 - v^2}{2} = \frac{u + \kappa v}{(1 - \kappa)^2} \left( u + v + \sqrt{(u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z} \right) - \frac{z}{1 - \kappa}.$$

Luego, en conclusión, el número de salto viene determinado por

$$\begin{cases} n = 0 & , \text{ si } z \geq 2v(u + \kappa v) . \\ n = \Gamma \left[ \frac{u + \kappa v}{(1 - \kappa)^2} \left( u + v + \sqrt{(u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z} \right) - \frac{z}{1 - \kappa} \right] , & \text{ en otro caso.} \end{cases} \quad (2.10)$$

El sistema anterior, así como la discretización (2.9), serán en los que se centre el desarrollo de la tesis. Se engloba así en un único modelo el modelo de la escalera inclinada presentado en [84] y el de la escalera horizontal [17]. Además, eliminamos la singularidad que presentaban las ecuaciones de [84] para el caso  $\kappa = 0$  y cuando sustituimos este valor de  $\kappa$ , recuperamos las ecuaciones de [17] para gravedad uno (dadas en [18]).

Para posteriores análisis de la estructura global de las soluciones del sistema discreto (2.9) es conveniente notar que el sistema anterior puede ser escrito en la forma

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ z' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

donde  $F : [0, +\infty) \times (0, +\infty) \times [0, 1) \rightarrow [0, +\infty) \times (0, +\infty) \times [0, 1)$  es una función discontinua con discontinuidad en el borde de cada peldaño de la escalera.

**Proposición 2.4** *Se verifica siempre que  $z' < 1 - \kappa$ .*

### Demostración

Para demostrar la desigualdad basta aplicar el teorema de valor medio a la tercera componente del sistema discreto. Así, usando que

$$\frac{\partial z'}{\partial n} = 1 - \kappa - \frac{u + \kappa v}{\sqrt{v^2 + 2n}} < 1 - \kappa$$

se obtiene

$$z'(n) - z'(n-1) < 1 - \kappa.$$

Por otra parte,  $z'(n) = z'$  y  $z'(n-1) < 0$  por definición de número de salto. Como consecuencia se llega inmediatamente a la desigualdad enunciada en la proposición. ■

Como corolario de lo anterior, podemos restringir el dominio de definición de la función  $F$  y suponer que

$$F : [0, +\infty) \times (0, +\infty)^2 \times [0, 1 - \kappa) \rightarrow [0, +\infty) \times (0, +\infty)^2 \times [0, 1 - \kappa) .$$

Hay que observar que en la formulación anterior se han omitido algunas condiciones iniciales. Más concretamente, velocidades horizontales negativas  $u < 0$  que darían lugar a partículas que suben la escalera y velocidades

verticales estrictamente negativas  $v < 0$  que carecen de sentido pues nos indicarían que la partícula está por debajo de la escalera y por tanto, no se ve influenciada por ésta. El caso  $v = 0$  está en las mismas condiciones pues la gravedad arrastra la partícula también debajo de la escalera a menos que  $z = 0$ , que indicaría la salida desde la esquina del escalón. Esto será útil en el caso de los deslizamientos como veremos en la siguiente sección de acumulación de impactos. El correspondiente número de salto se calcularía con la segunda expresión de (2.10).

## 2.2 Descripción de soluciones. Acumulación de impactos

El objetivo de esta sección es dar una descripción cualitativa de las soluciones de la ecuación diferencial (2.7) junto con la condición de impacto (2.8). Para ello, teniendo en cuenta que estas ecuaciones presentan un fenómeno de *acumulación de impactos*, podemos distinguir entre *soluciones de impactos aislados* y *soluciones de acumulación de impactos*.

Para entender el fenómeno de acumulación de impactos, podemos pensar en una pelota botando sobre un suelo plano (lo que correspondería a suponer  $a = 0$ ,  $g_1 = 0$  en (2.1)-(2.2)). Supondremos además que el impacto no es completamente elástico en la componente normal y que ambos coeficientes de restitución son no nulos, es decir,  $e_t \in (0, 1]$  y  $e_n \in (0, 1)$ . En este caso tendríamos que el sistema de ecuaciones que rigen el movimiento serían

$$\left. \begin{array}{l} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -1, \end{array} \right\} \text{ si } y(t) > 0 \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{array}{l} x'(t^+) = e_t x'(t^-) \\ y'(t^+) = -e_n y'(t^-), \end{array} \right\} \text{ si } y(t) = 0. \quad (2.13)$$

**Teorema 2.5** *El tiempo entre impactos consecutivos asociado al sistema (2.12)-(2.13) sigue una ley geométrica de razón  $0 < e_n < 1$  y por lo tanto, existe una acumulación de impactos en tiempo finito que llamaremos tiempo de parada.*

### Demostración

Podemos suponer que las condiciones iniciales son  $y(0) = 0$  e  $y'(0^+) = v$  (obsérvese que la componente horizontal no juega ningún papel en este

cálculo). Notamos por  $\{t_i\}$  con  $i = 1, 2, \dots$  a la secuencia de los sucesivos impactos y por  $v_i$  a  $y'(t_i^+)$  ( $y(t_i) = 0, \forall i$ ).

Se tendría entonces que  $t_1$  es solución de

$$y(t) = -\frac{t^2}{2} + vt = 0,$$

es decir,  $t_1 = 2v$  y  $v_1 = e_n v$ . Del mismo modo,  $t_2$  es solución de

$$y(t) = -\frac{(t - t_1)^2}{2} + v_1(t - t_1).$$

Luego,  $t_2 - t_1 = 2v_1$  y  $v_2 = e_n v_1 = e_n^2 v$  y siguiendo el procedimiento, se obtendría que en general  $t_{i+1} - t_i = 2v_i$  y  $v_i = 2e_n^i v$ . Por tanto, el tiempo entre impactos consecutivos es de la forma  $t_{i+1} - t_i = 2e_n^i v$ . Luego,

$$t_{i+1} = t_1 + (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) \dots + (t_{i+1} - t_i) = 2v \sum_{j=0, \dots, i} e_n^j = 2v \frac{1 - e_n^{i+1}}{1 - e_n}$$

y existe  $\lim_{i \rightarrow +\infty} t_i = \frac{2v}{1 - e_n} = t_s < +\infty$ . ■

Veamos ahora que aparecen dos tipos diferentes de soluciones con acumulación de impactos según el coeficiente de restitución tangencial. Para ello, pensemos en la forma en que debemos continuar la solución después de este fenómeno. Sabemos, por el teorema anterior, que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0$  e  $y(t_k) = 0 \forall k$ . Luego, el modo natural de continuar la solución es imponiendo que  $y(t)$  es idénticamente nula a partir de  $t = t_s$ .

Ahora bien, si  $e_t \in (0, 1)$  entonces  $x'(t_k^+) = e_t^k x'(0)$ . Es decir,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(t_k) = 0$$

y debemos continuar de la misma forma que lo hacíamos con la componente vertical, esto es,  $x(t) \equiv 0$  para todo  $t \geq t_s$ . Esto representa soluciones donde la partícula se para completamente tras la acumulación de impactos. A este tipo de soluciones las llamaremos *soluciones de parada*.

Sin embargo, si el impacto es completamente elástico en la componente horizontal ( $e_t = 1$ ), entonces  $x(t)$  será una función regular de la forma

$$x(t) = x(0) + x'(0)t.$$

Por tanto, la partícula seguirá un movimiento uniforme en la componente horizontal. Este comportamiento debe ser visto como un deslizamiento sobre el suelo ya que  $y(t) \equiv 0$  para todo  $t \geq t_s$ . A las soluciones que presenten este comportamiento las llamaremos *soluciones deslizantes*.

Este fenómeno de acumulación de impactos también ocurre en el perfil escalonado, cuando se dan las condiciones de la siguiente proposición.

**Proposición 2.6** *Sea  $t_k$  una sucesión de impactos convergente asociada a una solución  $(x(t), y(t))$  de (2.7) y (2.8). Entonces existen  $n, k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $y(t_k) = n$  para  $k \geq k_0$ . Es decir, salvo un número finito de saltos, todos los impactos ocurren en el mismo escalón.*

**Demostración.**

Denotemos por  $v_k = y'(t_k^+)$ . Entonces, usando (2.4) (recordar  $a = 1 = b = g_2$  y  $g_1 = \kappa$ ), se obtiene que

$$t_{k+1} - t_k = v_k + \sqrt{v_k^2 + 2n_k}$$

donde  $n_k$  es el correspondiente número de salto entre  $t_k$  y  $t_{k+1}$ . Como la sucesión de impactos es convergente, la diferencia entre impactos consecutivos tiende a cero y por tanto los número de salto también. Esto es, la sucesión de naturales  $n_k$  es cero para  $k$  avanzado. ■

**Nota 2.7** *De la demostración se deduce además que  $v_k \rightarrow 0$ . De donde se sigue directamente, teniendo en cuenta que  $v_{k+1} = e_n \sqrt{v_k^2 + 2n_k}$ , que el coeficiente de restitución normal debe ser menor estricto que uno. De otro modo,  $v_k$  sería creciente.*

Por tanto, cualquier acumulación de impactos ocurre en el mismo peldaño. A partir de ésta, el sistema discreto no proporciona más información y la continuación de la solución del modelo continuo depende del comportamiento de la componente horizontal. Más concretamente, del coeficiente de restitución tangencial. Así, de la Proposición anterior se obtiene que

$$u_k := x'(t_k^+) = e_t^{(k-k_0)} u_{k_0}$$

y por tanto podemos diferenciar dos casos.

Si  $e_t < 1$  se obtiene que  $u_k \rightarrow 0$  y por tanto también la componente horizontal de la velocidad tiende a cero, es decir,  $\lim_{t \rightarrow t_s} x'(t) = 0$ . La forma coherente de continuar será mediante una solución constante, esto es,

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t_s) \\y(t) &= y(t_s)\end{aligned}$$

para todo  $t \geq t_s$ . Llamaremos a este tipo de soluciones *soluciones de parada* puesto que la partícula pierde completamente su velocidad tras la acumulación de impactos y permanece inmóvil en el peldaño donde ésta ocurre.

Ahora bien, si  $e_t = 1$  se obtiene que  $u_k \rightarrow u_{k_0} = \lim_{t \rightarrow t_s} x'(t)$ . La forma coherente de continuar es imponiendo que la partícula sigue un movimiento uniforme adherido al peldaño tras la acumulación hasta el borde del mismo, esto es,

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t_s) + x'(t_s)(t - t_s) \\y(t) &= y(t_s)\end{aligned}$$

para todo  $t_s \leq t \leq t_v$ , donde  $t_v$  denota el momento en que se llega a la esquina del escalón. Es decir, la partícula desliza en el intervalo de tiempo  $[t_s, t_v]$  y posteriormente, saltará con velocidad vertical nula. Luego el sistema discreto (2.9) se vuelve insuficiente por sí sólo para describir este tipo de soluciones. La forma de continuar la solución discreta es imponer que tanto la variable que representa la velocidad vertical como la de la posición de la partícula se anulan, es decir,  $v = z = 0$  y calcular el número de salto usando la segunda ecuación de (2.10). Llamaremos a este tipo de soluciones *soluciones de deslizamiento*.

A partir de ahora nos centraremos en dar una forma de simbolizar las soluciones de (2.7)-(2.8), que las representen cualitativamente. Para hacerlo emplearemos la secuencia de números de saltos y lo que llamaremos la *palabra asociada* a una solución.

**Definición 2.8** *Dada una solución de (2.7)-(2.8) se define la palabra asociada como el conjunto de números de salto de dicha solución. Denotamos por  $0^\infty$  a la acumulación de impactos y lo llamamos cola de acumulación. Esta representación es el reflejo de que los impactos se producen en un mismo peldaño y por tanto, la palabra asociada tiene infinitos números de salto nulos.*

Así, por ejemplo, la secuencia  $(n_0, n_1, n_2, \dots)$  indicará que la partícula salta  $n_0$  escalones antes de impactar y a continuación, salta  $n_1$  escalones. Luego impacta en el  $n_0 + n_1$ -ésimo escalón y salta  $n_2$  escalones, etc.



Ahora bien, en general no es cierto que cada palabra represente únicamente una solución, aunque sí podemos representar cada solución con un tipo de palabra. Y en cierto sentido, al menos cualitativamente, esta palabra nos indica cómo es la solución.

Así, existen dos tipos de palabras diferentes asociadas para representar las soluciones de impactos aislados y las de acumulación. Las primeras, son una secuencia únicamente de números naturales y ceros, donde los ceros indican que la partícula tiene varios impactos consecutivos en el mismo peldaño. Cuando en una palabra haya una cantidad finita de ceros consecutivos, a fin de simplificar la notación, notaremos por  $(n_0, \dots, n_{j-1}, 0^k, n_{j+k}, \dots)$  a la secuencia  $(n_0, n_1, \dots, n_{j-1}, 0, \dots, 0, n_{j+k}, \dots)$  donde hay  $k$  ceros. En cuanto a las segundas, lo que caracteriza a las palabras que las representan es la presencia de colas de acumulación.

Por otra parte, si denotamos las secuencias infinitas de números de salto que se repiten mediante una palabra finita, podremos representar soluciones periódicas mediante palabras finitas. Así, por ejemplo, las soluciones  $k$ -periódicas pueden representarse por secuencias del tipo  $(n_0, n_1, \dots, n_{k-1})$ , donde se indica que tras saltar  $n_{k-1}$  escalones y completar la secuencia, ésta se volverá a repetir. Sin embargo, hay que observar que no toda secuencia finita debe representar una solución periódica, puesto que pueden repetirse la secuencia de números de salto sin que la sucesión  $(u_k, v_k, z_k)$  se haga periódica. También podemos representar soluciones periódicas con acumulación mediante secuencias finitas del tipo  $(n_0, \dots, n_{k-1}, 0^\infty)$ .

Aunque ya hemos dicho que las palabras no tienen por qué ser finitas, éstas serán las más representativas y las que aparecerán en todo el estudio por ser las representantes de las soluciones periódicas.

## 2.3 Rango de parámetros. Casos residuales

En esta sección se pretende dar una descripción del rango de validez de los parámetros del sistema, así como estudiar los casos donde la dinámica es trivial. El objetivo es encontrar los valores interesantes de los parámetros para centrar el estudio posterior en ellos.

En primer lugar, como se dijo en la Nota 2.3, el rango natural para el parámetro que mide la inclinación de la gravedad con respecto al eje de la escalera,  $\kappa$ , es el intervalo  $[0, 1)$  para garantizar que haya más de un impacto.

Por otra parte, en la formulación del sistema discreto se explicó que no

tiene sentido que la componente  $v$  sea nula, salvo que también  $z$  lo sea y estemos ante la continuación de soluciones deslizantes. Así pues, podemos asumir en general que  $v > 0$  y por tanto, el parámetro de restitución normal debe ser estrictamente positivo,  $e_n > 0$ , para que la solución tenga sentido después del primer impacto.

Por último, observar que si la escalera es horizontal y el parámetro de restitución tangencial es uno,  $\kappa = 0$  y  $e_t = 1$ ; la componente horizontal de la velocidad es constante y puede ser considerada un parámetro.

Pues bien, teniendo en cuenta lo anterior, podemos restringir los parámetros a  $\kappa \in [0, 1)$ ,  $e_t \in [0, 1]$  y  $e_n \in (0, 1]$ . Nos centraremos en este rango y analizaremos aquellos casos en los que todas las soluciones presentan un mismo comportamiento, dejando para posteriores capítulos el resto. Una idea global de las soluciones, así como la alusión a las proposiciones donde se demuestran puede verse en el cuadro 2.1.

Antes de enunciar las proposiciones que nos darán el comportamiento de las soluciones, veamos cuando es posible la acumulación de impactos. Más concretamente, dada una condición inicial calculamos la condición para que la correspondiente solución de (2.9) tenga una cola de acumulación en ese escalón.

**Lema 2.9** *La solución de (2.9) con condiciones iniciales  $(u, v, z)$  tiene una secuencia infinita de números de salto nulos si  $e_n < 1$  y*

$$z \geq \frac{2v}{(1 - e_t e_n)} \left( u + \frac{1 + e_t e_n}{1 - e_n^2} \kappa v \right). \quad (2.14)$$

*Si  $e_n = 1$  la secuencia nula sólo es infinita para  $\kappa = 0$ ,  $e_t < 1$  y las condiciones iniciales verificando*

$$z \geq \frac{2uv}{(1 - e_t)}. \quad (2.15)$$

*Si  $e_n = 1$  y  $\kappa > 0$  los números de salto no pueden ser eventualmente cero para ninguna condición inicial.*

### **Demostración**

Supongamos en primer lugar que el parámetro de restitución normal no es uno,  $e_n < 1$ . Tomando la condición inicial  $(z, u, v)$ , imponemos que los sucesivos números de salto son todos nulos y usamos el sistema discreto, (2.9), para calcular las sucesivas iteraciones.

Se obtiene fácilmente que  $v_j = e_n^j v$  y por tanto,

$$\begin{aligned} u_1 &= e_t(u + 2\kappa v) \\ u_2 &= e_t(u_1 + 2\kappa v_1) = e_t^2 u + 2\kappa(e_t^2 + e_t e_n) \\ u_3 &= e_t(u_2 + 2\kappa v_2) = \dots = e_t^3 u + 2\kappa v(e_t^3 + e_t^2 e_n + e_t e_n^2) \\ &\vdots \\ u_j &= e_t^j u + 2\kappa v(e_t^j + e_t^{j-1} e_n + \dots + e_t e_n^{j-1}). \end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior,

$$u_j = e_t^j u + 2\kappa v \frac{e_t(e_n^j - e_t^j)}{e_n - e_t}$$

y por tanto, operando adecuadamente,

$$\begin{aligned} z_j &= z - 2 \sum_{i=1}^{j-1} ((u_i + \kappa v_i) v_i) = \\ &= z - 2 \left( uv \sum_{i=1}^{j-1} (e_t e_n)^i + 2\kappa v^2 \frac{e_t}{e_n - e_t} \sum_{i=1}^{j-1} (e_n^{2i} - (e_n e_t)^i) + \kappa v^2 \sum_{i=1}^{j-1} e_n^{2i} \right). \end{aligned}$$

Ahora tomamos límite en la expresión de  $z_j$  cuando  $j \rightarrow +\infty$  e imponemos que este límite debe ser positivo. Esto es,

$$z_j \rightarrow z - 2\kappa v^2 \frac{1 + e_t e_n}{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)} - 2uv \frac{1}{1 - e_t e_n} \geq 0,$$

de donde se llega a la expresión (2.14).

Ahora bien, si  $e_n = 1$ ,  $\kappa = 0$  y  $e_t < 1$  entonces  $u_j = e_t^j u$  y la expresión de  $z_j$  se reduce a

$$z_j = z - 2 \sum_{i=1}^{j-1} u_i v$$

y de ahí, tomando límite e imponiendo que es positivo, se sigue la condición (2.15) para  $e_t < 1$ . Obsérvese que si  $e_t = 1$ ,  $u_j = u$  y  $z_j$  se haría negativo para  $j$  suficientemente avanzado. Luego, en ese caso existen a lo más un número finito de números de salto nulos.

Por último veamos el caso de  $e_n = 1$  y  $\kappa > 0$ . Procedamos por reducción al absurdo, suponiendo que existe  $k_0$  tal que  $n_k = 0$ ,  $\forall k \geq k_0$ . En ese caso,  $v_k = v_{k_0}$  y procediendo de manera análoga a la anterior,

$$z_k = z_{k_0} - 2 \sum_{i=k_0}^{k-1} ((u_i + \kappa v_{k_0}) v_{k_0})$$

y por lo tanto,  $z_k$  sería negativo para algún  $k$ . ■

		$0 \leq e_t < 1$		$e_t = 1$	
				$u = 0$	$u > 0$
$\kappa = 0$	$0 < e_n < 1$	Todas las soluciones son de parada. (Proposición 2.11)	Parada en el primer escalón. (Proposición 2.12)	Riqueza dinámica. (Estudio en Capítulo 4) Todas las soluciones son acotadas. (Proposición 2.12)	
	$e_n = 1$	La soluciones se quedan en un mismo escalón para siempre con velocidad vertical constante. (Proposición 2.11)	Todas las soluciones son constantes. (Proposición 2.12)	Todas las soluciones son no acotadas. (Proposición 2.12)	
$0 < \kappa < 1$	$0 < e_n < 1$	Riqueza dinámica (Capítulo 3)	Puede tener a lo más un número finito de deslizamientos y después de eso, $u_k$ es no acotada. (Proposición 2.13)		
	$e_n = 1$	Todas las soluciones son no acotadas. $u_k$ tiende a cero si $e_t = 0$ o es divergente si $e_t \neq 0$ . (Proposición 2.14)			

Cuadro 2.1: Comportamiento general de las soluciones.

**Nota 2.10** *Obsérvese que cuando los números de salto son cero salvo en una secuencia numerable finita no siempre existe acumulación de impactos. De hecho, si  $e_n = 1$  y se verifica (2.15) lo que ocurre es que la partícula pierde toda la velocidad horizontal pero permanece botando en el mismo punto ( $z$  constante) con velocidad vertical constante.*

*Ahora bien, si  $e_n < 1$  las soluciones presentan acumulación de impactos y las soluciones serán deslizantes si  $e_t = 1$  o de parada si  $e_t < 1$ , tal como se dijo en la sección anterior.*

En primer lugar vamos a aclarar el comportamiento de las soluciones para el caso de la escalera horizontal ( $\kappa = 0$ ).

**Proposición 2.11** *Sea  $\kappa = 0$  y  $0 \leq e_t < 1$ . Entonces  $n_k$  es constante cero salvo en un número finito de términos y  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$ . Además, la secuencia  $v_k$  es constante salvo una secuencia finita si  $e_n = 1$  y converge a cero en otro caso, esto es, si  $e_n < 1$ .*

**Demostración.**

De la ecuación para  $u$  de (2.9) para  $\kappa = 0$ , se deduce fácilmente que  $u_j = e_t^j u_0$  y por tanto,  $u_j \rightarrow 0$  puesto que  $e_t < 1$ .

Por otra parte,  $u_j v_j$  es acotada. En efecto, usando la expresión de  $n$  dada en (2.10) para pendiente nula y teniendo en cuenta que  $\Gamma[x] \leq x + 1$

$$n_j \leq 2u_j(u_j + v_j) + 1 \quad (2.16)$$

(obsérvese que si  $n_j = 0$  también se da la desigualdad anterior). Luego, sustituyendo en la correspondiente ecuación de (2.9) para  $v$ , se obtiene que

$$v_{j+1} \leq e_n \sqrt{v_j^2 + 4u_j(u_j + v_j) + 2}. \quad (2.17)$$

Ahora bien, puesto que  $u_j \rightarrow 0$ , podemos elegir  $\delta > 0$  de forma que  $u_j \leq \delta$  para  $j$  suficientemente avanzado. En consecuencia, multiplicando (2.17) por  $u_{j+1}$ , llamando  $w_j := u_j v_j$  y agrupando adecuadamente, se llega a

$$w_{j+1} \leq e_t e_n \sqrt{w_j^2 + 4\delta^2 w_j + (4\delta^4 + 2\delta^2)};$$

para  $j$  avanzado. Esto es,  $w_j$  es una subsolución del sistema dinámico definido por

$$w_{k+1} = e_n \sqrt{w_k^2 + a w_k + b}, \quad (2.18)$$

donde  $a = 4\delta^2$  y  $b = 4\delta^4 + 2\delta^2$  son constantes estrictamente positivas que dependen de  $\delta$ . Ahora bien, este sistema dinámico tiene un único punto fijo positivo  $w^* = w^*(\delta) > 0$ . En efecto,  $w^*$  verifica la ecuación de una parábola

$$\frac{1 - e_n^2}{e_n^2}(w^*)^2 - aw^* - b^* = 0$$

con abertura hacia arriba y tal que en cero es estrictamente negativa. Además, la función que define el sistema dinámico es creciente. Luego, las subsoluciones estarán acotadas superiormente por las soluciones con las mismas condiciones iniciales. Por tanto, en el límite lo estarán por el punto fijo puesto que todas las soluciones convergen al equilibrio, es decir,  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} w_k \leq w^*(\delta)$ . Esto es,  $u_j v_j$  está acotada. Además, como podemos tomar  $\delta$  tan pequeño como se quiera, se verifica también que  $\lim_j u_j v_j = 0$ .

A continuación vamos a demostrar que  $n_j$  es eventualmente cero. Procedamos por reducción al absurdo. Entonces, la condición (2.14) no se verificará para ninguna iterada (estamos en las condiciones del lema ya que  $\kappa = 0$  y  $e_t < 1$ ). O lo que es lo mismo,

$$z_j < \frac{2u_j v_j}{1 - e_t e_n}.$$

Luego,  $z_j \rightarrow 0$ . Por otra parte, de la ecuación correspondiente para  $z$  de (2.9),

$$z_{j+1} - z_j = n_j - u_j \left( v_j + \sqrt{v_j^2 + 2n_j} \right).$$

Ahora bien, como consecuencia de lo anterior el primer miembro de la igualdad tiende a cero. Además, los números de salto ( $n_j$ ) están acotados por (2.16) y lo mismo ocurre con  $v_j$ . Por tanto, el segundo sumando de la parte derecha de la igualdad también tiende a cero. Por consiguiente los números de salto deben ser eventualmente cero. Esta es la contradicción.

Por tanto,  $n_j$  debe ser eventualmente cero y en consecuencia  $v_j$  es de la forma  $v_j = e_n^{j-j_0} v_{j_0}$  para algún  $j_0$ . Así, si el parámetro de restitución normal es uno, la componente  $v_j$  será constante e igual a  $v_{j_0}$  y si  $e_n < 1$  esta componente tenderá a cero. ■

**Proposición 2.12** *Sea  $\kappa = 0$  y  $e_t = 1$ . En estas condiciones  $u$  es constante.*

- *Supongamos  $u = 0$ . Entonces tanto  $z$  como  $v$  son constantes si  $e_n = 1$  y  $z$  es constante y  $v_j$  tiende a cero si  $e_n < 1$ .*

- Supongamos  $u > 0$ . Entonces  $v_j$  es una sucesión acotada si  $e_n < 1$  y tanto ella como los números de salto divergen positivamente si  $e_n = 1$ .

### Demostración

En las condiciones del enunciado, la correspondiente ecuación para  $u$  en (2.9) sería  $u' = u$ . Ahora bien, si  $u = 0$  la condición para que el número de salto sea nulo se verifica siempre. Así, la conclusión para este caso se deduce trivialmente puesto que  $v_j = e_n^j v_0$ .

Supongamos ahora que  $u > 0$  y estudiemos en primer lugar el caso en que  $e_n < 1$ . Para probar que  $v_k$  es acotada, estimamos en primer lugar el número de salto,

$$\begin{aligned} n_k &= \Gamma \left[ u_k \left( u_k + v_k + \sqrt{(u_k + v_k)^2 - 2z_k} \right) - z_k \right] \leq \\ &\leq 2u_0(u_0 + v_k) + 1 = 2u_0^2 + 2u_0v + 1. \end{aligned}$$

Luego, usando la ecuación de  $v_k$  dada en (2.9) y la acotación anterior,

$$v_{k+1} \leq e_n \sqrt{v_k^2 + 4u_0v_k + 2(2u_0^2 + 1)}.$$

Ahora procedemos de manera análoga a la demostración de la proposición anterior para demostrar que  $v_j$  es acotada.

Por último, si  $u > 0$  y  $e_n = 1$  por el Lema 2.9 los números de salto no pueden ser eventualmente cero. Luego, puesto que

$$v_{j+1} = \sqrt{v_j^2 + 2n_j}, \quad (2.19)$$

$v_j$  es estrictamente creciente. Ahora bien, si  $v_j$  fuera acotada tendría límite y por tanto, de (2.19) se deduciría que  $n_j$  tiende a cero y esto no es posible. Por tanto,  $v_j \rightarrow +\infty$  y  $n_j$  también ha de hacerlo. En efecto,  $n_j$  no puede ser cero para  $j$  avanzado puesto que no se verificaría que  $z_j \geq 2v_j(u + \kappa v_j)$  ya que  $v_j$  diverge positivamente. Luego,  $n_j$  viene dada por la segunda expresión de (2.10) y por tanto,  $n_j \geq 2u(u + v_j)$ . ■

Ahora que hemos aclarado el caso de la escalera horizontal, nos centraremos en la escalera inclinada. Esto es, en lo sucesivo se considerará que la pendiente  $\kappa$  no es nula.

**Proposición 2.13** *Sea  $0 < \kappa < 1$ ,  $e_t = 1$  y  $0 < e_n < 1$ . Entonces, todas las soluciones de (2.7)-(2.8) son no acotadas. Más aún, existen a lo más un número finito de acumulaciones de impactos, donde  $u_j \rightarrow u^*$ ,  $v_j \rightarrow 0$  y  $z_j \rightarrow z^*$ . Después de eso,  $u_j$  es divergente.*

**Demostración**

Escribamos en primer lugar la correspondiente ecuación de (2.9) para  $u_j$  cuando  $e_t = 1$ . Esto es,

$$u_{j+1} = u_j + \kappa(v_j + \sqrt{v_j^2 + 2n_j}). \quad (2.20)$$

Puesto que el segundo sumando de la igualdad anterior es siempre positivo, la sucesión  $u_j$  es creciente. Luego, o bien  $u_j \rightarrow +\infty$  o bien  $u_j$  converge a un cierto valor que denotaremos por  $u^*$ .

Ahora bien, si  $u_j \rightarrow u^*$  entonces de la ecuación (2.20) se deduce que tanto la secuencia de números de salto como la sucesión  $v_j$  tienden a cero. Esto es lo que hemos llamado acumulación con deslizamiento y debemos continuar el sistema discreto comenzando con  $u = u^*, v = 0$  y  $z = 0$ . La sucesión de las nuevas iteradas están en la situación inicial, es decir, o bien  $u_j^*$  es divergente o bien tiende a un segundo valor que denotaremos por  $u^{2*}$ . Reiterando el proceso, llamemos  $u^{i*}$  a la sucesión de velocidades de deslizamiento. Veamos que esto sólo puede darse un número finito de veces.

Razonamos por reducción al absurdo. Sean  $(u_{k_i}^{i*}, v_{k_i}^{i*}, z_{k_i}^{i*})$  los correspondientes valores de  $u, v$  y  $z$  a partir de las cuales el  $i$ -ésimo deslizamiento tiene lugar o lo que es lo mismo la secuencia de números de salto es eventualmente cero. Entonces,  $(u_{k_i}^{i*}, v_{k_i}^{i*}, z_{k_i}^{i*})$  verifican que

- $u_{k_i}^{i*}$  es creciente porque cada sucesión inicial lo es y después de cada deslizamiento también se produce un crecimiento en esta magnitud;
- $v_{k_i}^{i*} \geq e_n \sqrt{2}$  puesto que el número de salto anterior es no nulo por construcción.

En consecuencia,

$$u_{k_{i+1}}^{(i+1)*} \geq u_{k_i}^{i*} + \kappa(1 + e_n)\sqrt{2}$$

es divergente a  $+\infty$ . Luego, la condición de acumulación (2.14) no puede darse para todo  $(u_{k_i}^{i*}, v_{k_i}^{i*}, z_{k_i}^{i*})$  puesto que el segundo miembro de la desigualdad,

$$z_{k_i}^{i*} \geq c_1 u_{k_i}^{i*} + c_2,$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes, diverge a  $+\infty$ .

En conclusión, la acumulación se da un número finito de veces y después  $u_j$  es divergente. ■



**Proposición 2.14** *Sea  $0 < \kappa < 1$  y  $e_n = 1$ . Entonces, todas las soluciones son no acotadas en el sentido de que  $v_j \rightarrow +\infty$  y  $n_j \rightarrow +\infty$ . La secuencia  $u_j$  también es divergente si  $e_t \neq 0$  y sería idénticamente cero, salvo el primer término si  $e_t = 0$ .*

### **Demostración**

La demostración es análoga a la hecha en la Proposición 2.12 para el caso de  $e_n = 1$ . En efecto, por el lema 2.9 los números de salto no pueden ser eventualmente cero. Luego, puesto que

$$v_{j+1} = \sqrt{v_j^2 + 2n_j}, \quad (2.21)$$

$v_j$  es estrictamente creciente y  $v_j \rightarrow +\infty$ . En consecuencia,  $n_j$  también. La conclusión para  $u_j$  es trivial a partir de aquí. ■



## Capítulo 3

### La escalera inclinada

En este capítulo vamos a considerar la ecuación diferencial (2.7) con la condición de impacto (2.8). Por la discusión anterior, restringiremos los parámetros a los valores  $0 \leq e_t < 1$ ,  $0 < e_n < 1$  y  $0 < \kappa < 1$ . Puesto que en estas condiciones no hay deslizamiento (ver Nota 2.10), las soluciones están en correspondencia directa con las soluciones del sistema dinámico discreto (2.9). Se recuerda que el espacio de fases es  $u \geq 0$ ,  $v > 0$ ,  $0 \leq z < 1 - \kappa$ .

### 3.1 Acotación de soluciones

El primer paso para la comprensión de los aspectos globales de un sistema dinámico suele ser conocer el comportamiento de sus soluciones en el futuro, estudiando si éstas son acotadas o no. En esta línea se enuncia y se demuestra el teorema principal de esta sección. Observemos en primer lugar que para conocer la acotación de las soluciones de (2.9) sólo necesitamos estudiar el comportamiento de las velocidades  $u_k$  y  $v_k$  ya que  $z_k \in [0, 1 - \kappa)$  siempre estará acotada.

Enunciaremos y demostraremos en primer lugar una proposición sobre acotación de soluciones en el marco de las perturbaciones acotadas de sistemas dinámicos lineales. El sistema que consideramos es de la forma

$$x_{k+1} = Ax_k + b(k, x_k), \quad (3.1)$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times m}$  y  $b : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función.

**Definición 3.1** *Definimos la relación de orden parcial  $\geq$ ,  $>$  en  $\mathbb{R}^m$  y en las matrices cuadradas de orden  $m$  como la extensión componente a componente de la relación de orden definida en  $\mathbb{R}$ . Así, por ejemplo, diremos que  $x > y$  con  $x, y \in \mathbb{R}^k$  si  $x_i > y_i$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Análogamente, se definen las nociones de positividad.*

**Proposición 3.2** *Asumamos que la matriz  $A$  y los vectores  $x_k$  del sistema dinámico (3.1) son estrictamente positivos y sea  $e = (1, \dots, 1)$  vector definido en  $\mathbb{R}^m$ . Denotemos por  $\sigma(A)$  el radio espectral de la matriz  $A$ .*

a) *Si  $\sigma(A) < 1$  y  $b$  es acotada superiormente, entonces todas las soluciones de (3.1) están acotadas.*

b) *Si  $\sigma(A) > 1$  y  $b$  verifica que existen una constante  $M > 0$  y un vector  $\bar{v}$  estrictamente positivo tales que  $b(i, x) \geq -Me$  para todo  $x \geq \bar{v}$ ; entonces existen soluciones no acotadas. Más concretamente, existe un vector  $\tilde{v} \geq \bar{v}$*

tal que si la condición inicial,  $x_0$ , es estrictamente mayor que  $\tilde{v}$  ( $x_0 > \tilde{v}$ ) entonces todas las componentes de  $x_k$  tienden a infinito.

**Demostración.**

En la prueba de este teorema usaremos que toda matriz estrictamente positiva tiene un valor propio dominante estrictamente positivo. Además, el vector propio correspondiente también es estrictamente positivo (Teorema de Perron [65]). Denotemos por  $\lambda$  al valor propio dominante de  $A$ .

Demostramos en primer lugar la parte a) del teorema. Para ello, sea  $A^t$  la matriz traspuesta de  $A$ . Puesto que  $A$  es estrictamente positiva,  $A^t$  también lo será. Además,  $\sigma(A^t) = \sigma(A) < 1$ , por lo que  $0 < \lambda < 1$ . Sea  $v$  el correspondiente autovector de  $\lambda$  asociado a  $A^t$ .

Multiplicamos la ecuación (3.1) por  $v^t$  a izquierda,

$$v^t x_{k+1} = v^t A x_k + v^t b(k, x_k) = (A^t v)^t x_k + v^t b(k, x_k) = \lambda v^t x_k + v^t b(k, x_k)$$

y llamamos  $y_i = v^t x_i$ . Entonces obtenemos un sistema escalar que verifica

$$y_{k+1} \leq \lambda y_k + C, \text{ donde } C \text{ es una constante,}$$

es decir,  $\{y_i\}$  está acotada. Luego,  $y_i = v^t x_i = \sum_{j=1}^k v_j x_j$  es una suma de términos positivos que está acotada. Por tanto, todos los sumandos estarán acotados y eso implica inmediatamente que las soluciones de (3.1) son todas acotadas.

A continuación vamos a demostrar la parte b). Para ello, denotemos por  $\tilde{v}$  al vector propio dominante de la matriz  $A$ , elegido de forma que

$$\begin{cases} (\lambda - 1)\tilde{v} \geq Me \\ \tilde{v} \geq \bar{v} \end{cases}.$$

Sea ahora  $x_0$  una condición inicial de forma que  $x_0 > \tilde{v}$  y veamos que todas las componentes de  $x_k$  tienden a infinito. Para ello, vamos a minorar las iteradas de  $x_0$  por una sucesión no acotada. A este fin definimos  $y_0$  como  $y_0 = x_0 - \tilde{v}$  y por  $y_i = A^i y_0$  a las sucesivas iteradas. Entonces  $y_0 > 0$  y se verifica que

$$x_1 = Ax_0 + b(0, x_0) \geq A(y_0 + \tilde{v}) - Me = y_1 + A\tilde{v} - Me,$$

donde

$$A\tilde{v} - Me = \lambda\tilde{v} - Me \geq Me + \tilde{v} - Me.$$

Esto es,  $x_1 \geq y_1 + \tilde{v}$  y puesto que  $y_1$  es positivo,  $x_1 \geq \tilde{v}$ . Por tanto podemos repetir la acotación anterior,

$$x_2 = Ax_1 + b(1, x_1) \geq Ax_1 - Me \geq y_2 + A\tilde{v} - Me \geq y_2 + \tilde{v}$$

y deducir que  $x_2 \geq y_2 + \tilde{v}$  y  $x_2 \geq \bar{v}$ . En general, se demuestra que  $x_n \geq y_n + \tilde{v}$  donde todas las componentes de  $y_n$  tienden a  $+\infty$ . ■

**Nota.** Obsérvese que la demostración anterior para el caso de radio espectral menor que uno se basa en que  $v^t x$  es una función de Lyapunov para el sistema (3.1).

La siguiente demostración de acotación está basada en la correspondiente de [84].

**Teorema 3.3** *Sea  $0 < \kappa < 1$ ,  $e_t < 1$ ,  $0 < e_n < 1$ . Todas las soluciones de (2.9) están acotadas si  $\kappa < \kappa_\infty$ , donde*

$$\kappa_\infty = \frac{(1 - e_t)(1 - e_n)}{(1 + e_t)(1 + e_n)}.$$

*Y si  $\kappa > \kappa_\infty$  entonces existen soluciones no acotadas.*

### Demostración.

Para demostrar este teorema vamos a escribir (2.9) como una perturbación de un sistema lineal a fin de emplear la proposición anterior.

Para ello definimos  $\gamma$  como

$$\gamma \equiv \sqrt{v^2 + 2n} - \frac{2u + (1 + \kappa)v}{(1 - \kappa)}.$$

Usando esta definición podemos escribir las ecuaciones para  $u$  y  $v$  de (2.9) como

$$\begin{cases} u' = e_t \frac{(1 + \kappa)u + 2\kappa v}{1 - \kappa} + \kappa e_t \gamma \\ v' = e_n \frac{2u + (1 + \kappa)v}{1 - \kappa} + e_n \gamma \end{cases}$$

Como veremos posteriormente en el Lema 3.4

$$-\frac{1}{v} < \gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y esto nos permite aplicar la Proposición 3.2. Así pues estudiemos el sistema linealizado,

$$\begin{cases} u' = e_t \frac{(1 + \kappa)u + 2\kappa v}{1 - \kappa} \\ v' = e_n \frac{2u + (1 + \kappa)v}{1 - \kappa} \end{cases} . \quad (3.2)$$

Necesitamos conocer el radio espectral de la matriz que define el sistema anterior. A este fin escribimos el polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (e_t + e_n) \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \lambda + e_t e_n .$$

y estudiamos sus raíces. Como el término independiente de dicho polinomio es el producto de sus dos raíces, al menos una de las dos debe ser menor que uno ( $e_t e_n < 1$ ). Como consecuencia, uno de los autovalores será mayor que uno si y sólo si  $p(1) < 0$ . Y en este caso, existirán soluciones no acotadas. En cambio, si  $p(1) > 0$  todas las soluciones estarán acotadas. Ahora bien

$$p(1) = 1 - (e_t + e_n) \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} + e_t e_n ,$$

que es positivo si y sólo si

$$(1 - e_n - e_t + e_t e_n) - (1 + e_n + e_t + e_t e_n) \kappa > 0 .$$

O equivalentemente,

$$\kappa < \kappa_\infty = \frac{(1 - e_t)(1 - e_n)}{(1 + e_t)(1 + e_n)} .$$

■

**Lema 3.4** *Se verifica que  $-\frac{1}{v} < \gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .*

**Demostración.**

En primer lugar escribimos  $\gamma$  de una manera más conveniente,

$$\gamma = \sqrt{v^2 + 2n} - \left[ \frac{u + \kappa v}{1 - \kappa} + \frac{\sqrt{(u + v)^2}}{1 - \kappa} \right] .$$

Estudiamos los casos  $n = 0$  y  $n \geq 1$  de manera independiente. Sea en primer lugar  $n = 0$ . Entonces

$$\gamma = -\frac{2(u + \kappa v)}{1 - k}$$

y por tanto,  $\gamma$  es menor que cualquier constante positiva. Por otro lado,  $z \geq 2v(u + \kappa v)$ . Luego se obtiene que

$$(u + \kappa v) \leq \frac{z}{2v} \leq \frac{1 - \kappa}{2v}$$

y resumiendo,

$$-\frac{1}{v} \leq \gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

si  $n = 0$ .

Estudiemos ahora el caso  $n \geq 1$ . En primer lugar vamos a acotar  $\sqrt{v^2 + 2n}$  empleando la segunda definición de número de salto (2.10), válida para  $n \neq 0$ . Así,

$$n - 1 < \frac{u + \kappa v}{(1 - \kappa)^2} \left( u + v + \sqrt{(u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z} \right) - \frac{z}{1 - \kappa} \leq n .$$

Multiplicamos por dos la desigualdad anterior y le sumamos  $v^2$ . De esta forma podemos agrupar el término central en un cuadrado perfecto, obteniéndose

$$v^2 + 2(n - 1) < \left( \frac{(u + \kappa v) + \sqrt{(u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z}}{1 - \kappa} \right)^2 \leq v^2 + 2n . \quad (3.3)$$

Luego, empleando la primera desigualdad de (3.3), deducimos

$$\sqrt{v^2 + 2(n - 1)} < \frac{(u + \kappa v) + \sqrt{(u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z}}{1 - \kappa} .$$

Usando que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x - \alpha}| \leq \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \geq \alpha , \quad (3.4)$$

para  $\alpha = 2$  se llega a

$$\frac{1}{\sqrt{v^2 + 2n}} \geq \sqrt{v^2 + 2n} - \sqrt{v^2 + 2n - 2} .$$



Por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{v^2 + 2n}} > \sqrt{v^2 + 2n} - \left( \frac{u + \kappa v}{1 - \kappa} + \frac{\sqrt{(u + v)^2 - 2(1 - \kappa)z}}{1 - \kappa} \right) > \gamma$$

por definición de  $\gamma$ . Así,

$$\gamma < \frac{1}{\sqrt{v^2 + 2n}} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por último, veamos que si  $n \geq 1$  también se verifica que  $\gamma \geq -\frac{1}{v}$ . Para ello, empleamos la segunda desigualdad de (3.3) y obtenemos que

$$0 \leq \sqrt{v^2 + 2n} - \left( \frac{u + \kappa v}{1 - \kappa} + \sqrt{\left( \frac{u + v}{1 - \kappa} \right)^2 - \frac{2z}{(1 - \kappa)}} \right).$$

De la expresión anterior se llega a

$$0 \leq \gamma + \sqrt{\left( \frac{u + v}{1 - \kappa} \right)^2} - \sqrt{\left( \frac{u + v}{1 - \kappa} \right)^2 - \frac{2z}{(1 - \kappa)}}$$

y usando (3.4) para  $\alpha = \frac{2z}{1 - \kappa}$ ,

$$0 \leq \gamma + \frac{1 - \kappa}{u + v}.$$

Por tanto

$$-\gamma \leq \frac{1 - \kappa}{u + v} \leq \frac{1}{v}.$$

■

## 3.2 Soluciones de parada

En esta sección nos centraremos en dar la región en el espacio de parámetros donde la existencia de soluciones con acumulación de impactos no triviales está garantizada. En el rango de parámetros que estamos considerando las soluciones de acumulación son siempre soluciones de parada (ver Nota 2.10).

En virtud de la desigualdad (2.14) del Lema 2.9, soluciones de parada siempre existen. Basta tomar  $u$  y  $v$  suficiente cercanas a cero para que se verifique la condición de acumulación, pero en ese caso todos los números de salto serían nulos y la partícula no escaparía del primer escalón. En lo que sigue no consideraremos este tipo por ser triviales. En esta línea, entenderemos por soluciones de parada *no triviales* a aquellas soluciones donde el primer número de salto es no nulo. Esto corresponde a partículas que saltan al menos un escalón antes de pararse. Estas soluciones no siempre existen, sino que su existencia depende de la inclinación de la escalera.

**Teorema 3.5** *Existen soluciones de parada no triviales si y sólo si  $\kappa \leq \kappa_s$ , donde*

$$\kappa_s := \kappa_s(e_t, e_n) = \frac{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)}{1 + 3e_n^2 + 3e_n e_t + e_n^3 e_t}.$$

**Demostración.**

Nos centraremos en primer lugar en demostrar la condición suficiente para la existencia de soluciones de parada no triviales. Para ello daremos la construcción explícita de una solución con acumulación de impactos cuya existencia viene determinada por la condición  $\kappa \leq \kappa_s$ . Esta solución es la solución periódica  $(1, 0^\infty)$ . Esta solución representa el movimiento de una partícula que cae desde el borde del primer escalón y tras botar repetidamente en el siguiente peldaño, se para completamente porque su velocidad se hace cero.

Sea la condición inicial  $(u_0, v_0, z_0) = (0, 0, 0)$ . Entonces el primer número de salto es uno y podemos calcular la primera iteración mediante el sistema (2.9). Así,

$$\begin{aligned} u_1 &= \kappa e_t \sqrt{2} \\ v_1 &= e_n \sqrt{2} \\ z_1 &= 1 - \kappa \end{aligned} .$$

Veamos que se verifica la condición de acumulación (2.14) con

$$(u, v, z) = (u_1, v_1, z_1) ,$$

esto es,

$$1 - \kappa \geq \frac{2e_n \sqrt{2}}{1 - e_t e_n} \left( \kappa e_t \sqrt{2} + \kappa e_n \sqrt{2} \frac{1 + e_t e_n}{1 - e_n^2} \right) = \frac{4e_n e_t + 4e_n^2}{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)} \kappa ;$$

o equivalentemente

$$\kappa \leq \frac{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)}{1 + 3e_n^2 + 3e_n e_t + e_n^3 e_t},$$

y esta última condición se verifica por hipótesis ( $\kappa < \kappa_s$ ). Obsérvese que esta es la construcción natural de la superficie  $\kappa_s$ .

Para demostrar la condición necesaria consideraremos ahora que  $(x(t), y(t))$  es una solución de parada de (2.1)-(2.2). Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la condición inicial es

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & x'(0) &= u \\ y(0) &= y \geq 1 & y'(0) &= v \end{aligned}$$

y que el primer número de salto es  $n = 1$ . Esto es, asumimos que empezamos a mirar la solución en el final del peldaño anterior a la acumulación de impactos. Sea  $t_1$  el tiempo correspondiente al primer impacto. Entonces,  $t_1$  es solución de  $y(t_1) = E[x(t_1)] = 0$  siendo  $y(t) = -\frac{t^2}{2} + vt + y$ . Es decir,

$$t_1 = v + \sqrt{v^2 + 2y}.$$

Luego, la componente horizontal de la solución verificará que

$$x(t_1) = \kappa \frac{t_1^2}{2} + ut_1 = (u + \kappa v) \left( v + \sqrt{v^2 + 2y} \right) + \kappa y.$$

Ahora podemos reescribir la solución en términos del sistema discreto,

$$\begin{aligned} u_1 &= x'(t_1^+) = e_t \left( u + \kappa \left( v + \sqrt{v^2 + 2y} \right) \right) \\ v_1 &= y'(t_1^+) = e_n \sqrt{v^2 + 2y} \\ z_1 &= 1 - x(t_1) = 1 - (u + \kappa v) \left( v + \sqrt{v^2 + 2y} \right) - \kappa y \end{aligned}.$$

Imponemos que debe verificarse la condición de parada (2.14) con

$$(u, v, z) = (u_1, v_1, z_1)$$

calculados previamente. Es decir,

$$z_1 - \frac{2v_1}{(1 - e_t e_n)} \left( u_1 + \frac{1 + e_t e_n}{1 - e_n^2} \kappa v_1 \right)$$

es igual a

$$1 - \kappa \frac{(1 + e_t e_n)(1 + e_n^2)}{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)} v^2 - \kappa \frac{1 + 3e_n^2 + 3e_t e_n + e_t e_n^3}{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)} y \\ - uv - \frac{1 + e_t e_n}{1 - e_t e_n} (u + \kappa v) \sqrt{v^2 + 2y} \geq 0 .$$

Consideremos la función cuya positividad define la condición de parada, es decir,

$$f(u, v, y) = 1 - \kappa a b v^2 - \kappa c y - uv - b(u + \kappa v) \sqrt{v^2 + 2y}$$

donde

$$a = \frac{1 + e_n^2}{1 - e_n^2}, \quad b = \frac{1 + e_t e_n}{1 - e_t e_n} \quad y \quad c = \frac{1 + 3e_n^2 + 3e_t e_n + e_t e_n^3}{(1 - e_t e_n)(1 - e_n^2)}$$

dependen únicamente de los parámetros de restitución.

Luego,  $f(u, v, y) \geq 0$  por la condición de acumulación y por tanto su máximo también debe serlo. Vamos a demostrar que en ese caso  $\kappa \leq \kappa_s$ , quedando así probado el teorema.

En primer lugar, hay que notar que el extremo debe verificar unas restricciones, a saber,

$$u \geq 0, \quad y \geq 1 \quad y \quad u + \kappa v \geq 0 .$$

La tercera condición se deriva del hecho de que la pendiente del vector velocidad en el borde del peldaño debe ser mayor que la del vector gravedad, esto es,  $\frac{v}{u} \geq \frac{-1}{\kappa}$ .

Procedamos por tanto a calcular el máximo restringido de  $f(u, v, y)$ . En primer lugar, como la función es decreciente en  $y$ , podemos reducirnos a dos variables y hallar el máximo de  $f(u, v, 1)$ . Ahora bien, la derivada parcial con respecto a  $u$  es negativa y por tanto, el mayor valor lo alcanzará en el borde de la región, esto es, en  $(0, v, 1)$  con  $v \geq 0$  ó  $(-\kappa v, v, 1)$  con  $v \leq 0$ . Además, se verifica

$$f(0, v, 1) = 1 - \kappa a b v^2 - \kappa c - \kappa b v \sqrt{v^2 + 2} \leq 1 - \kappa c, \\ f(-\kappa v, v, 1) = 1 - \kappa c + \kappa v^2 (1 - ab) \leq 1 - \kappa c$$

puesto que  $ab \geq 1$ . Luego en ambos casos,  $f(u, v, 1) \leq 1 - \kappa \frac{1}{\kappa_s}$ . Por tanto,

$$0 \leq f(u, v, y) \leq 1 - \kappa \frac{1}{\kappa_s}$$

y de ahí se sigue que la inclinación de la escalera para la existencia de cualquier solución de parada debe ser menor que la correspondiente a la solución  $(1, 0^\infty)$ , es decir,  $\kappa \leq \kappa_s$ . ■

**Nota.** De la prueba del teorema anterior se deduce que las únicas soluciones periódicas de parada son las soluciones de tipo  $(1, 0^\infty)$ .

### 3.3 Soluciones periódicas

En esta sección nos vamos a centrar en estudiar las soluciones periódicas con impactos aislados, es decir, la partícula tocará la escalera en una secuencia discreta de puntos. No estudiamos las soluciones periódicas con acumulación puesto que, como se dijo en la sección anterior, sólo existen las de tipo  $(1, 0^\infty)$  y su existencia ya ha sido analizada. Mientras no se especifique lo contrario, nos referiremos a las soluciones periódicas de impactos aislados simplemente como soluciones periódicas.

**Definición 3.6** Diremos que una órbita de (2.7)-(2.8) con impactos aislados es periódica si se corresponde con una secuencia periódica del sistema discreto (2.9).

**Nota.** Este tipo de soluciones periódicas son soluciones periódicas del sistema original, considerando un sistema de referencia que se mueve con el eje de la escalera.

Comenzaremos analizando las soluciones periódicas en general, para luego dar algunos ejemplos particulares. Para ello consideremos una palabra finita cualquiera,  $\sigma = (n_0, n_1, \dots, n_{k-1})$ , representativa de una solución  $k$ -periódica. A partir de ella y considerando una condición inicial cualquiera  $(u_0, v_0, z_0)$ , calcularemos las sucesivas iteradas. Posteriormente, impondremos la condición de periodicidad, es decir,

$$\begin{cases} u_k = u_0 , \\ v_k = v_0 , \\ z_k = z_0 . \end{cases}$$

De este modo vamos a encontrar la condición necesaria para que una solución periódica asociada a la palabra  $\sigma$  exista. Probaremos además que esta existencia se reduce a una superficie del espacio de parámetros, de la forma  $\kappa_\sigma = \kappa(e_t, e_n)$ .

Posteriormente veremos que esta condición no es suficiente en general. Será necesario comprobar que la solución periódica asociada a  $\sigma$  que hemos construido formalmente tiene realmente esa configuración de números

de salto. Las condiciones suficientes que hallaremos se denominan *condiciones de compatibilidad*. Aunque explicaremos esto con detalle más adelante, hay que notar que estas condiciones de compatibilidad nos darán el rango de validez de la superficie  $\kappa_\sigma = \kappa(e_t, e_n)$ . En todo caso, como para cada palabra la existencia se da a lo más en una superficie, lo que tenemos es que no existirán soluciones periódicas con impactos aislados para la mayoría de los valores de los parámetros en el espacio tridimensional  $\{(\kappa, e_t, e_n) \in (0, 1) \times [0, 1) \times (0, 1)\}$ .

**Teorema 3.7** *Sea  $\sigma = (n_0, n_1, \dots, n_{k-1})$ . Si existe solución periódica de (2.9) asociada a  $\sigma$  entonces*

$$\kappa_\sigma = \kappa(e_t, e_n) = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} n_j}{\sum_{j=0}^{k-1} n_j + \left( \sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{u_j}{\kappa} + v_j \right) \left( v_j + \frac{v_{j+1}}{e_n} \right) \right)} ;$$

donde

$$v_j = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} (e_n^{2(k-i)} n_{i+j})}}{\sqrt{1 - e_n^{2k}}} \quad \forall 0 \leq j \leq k-1 ; \quad (3.5)$$

$$u_i = \kappa \frac{e_t}{e_n} \left( v_i + \frac{e_t + e_n}{1 - e_t^k} \sum_{j=0}^{k-1} \left( e_t^{k-j-1} v_{i+j} \right) \right) \quad \forall 0 \leq i \leq k-1 . \quad (3.6)$$

### Demostración.

Consideremos una condición inicial cualquiera  $(u_0, v_0, z_0)$ . Lo primero que podemos calcular son las iteradas  $v_i$  con  $i = 1, \dots, k$ , puesto que su ecuación en (2.9) es independiente de las otras. Así,

$$\begin{aligned} v_1^2 &= e_n^2 (v_0^2 + 2n_0) \\ v_2^2 &= e_n^4 v_0^2 + 2(e_n^4 n_0 + e_n^2 n_1) \\ &\dots \\ v_k^2 &= e_n^{2k} v_0^2 + 2 \sum_{i=0}^{k-1} e_n^{2(k-i)} n_i \end{aligned}$$

Ahora imponemos la condición de periodicidad, es decir,  $v_k = v_0$  y obtenemos  $v_0 = v_0(e_t, e_n)$ ,

$$v_0 = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} (e_n^{2(k-i)} n_i)}}{\sqrt{1 - e_n^{2k}}} . \quad (3.7)$$

Extendiendo los números de salto periódicamente y observando que  $v_j$  es la velocidad inicial asociada a una órbita periódica con palabra  $(n_j, n_{j+1}, \dots, n_{j+k-1})$ , se llega a la expresión de  $v_j$ ,

$$v_j = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} (e_n^{2(k-i)} n_{i+j})}}{\sqrt{1 - e_n^{2k}}} \quad \forall 1 \leq j \leq k-1. \quad (3.8)$$

Lo siguiente es calcular la componente horizontal de la velocidad, procediendo de la misma forma que lo anterior,

$$\begin{aligned} u_1 &= e_t \left( u_0 + \kappa \left( v_0 + \frac{v_1}{e_n} \right) \right) \\ u_2 &= e_t \left( u_1 + \kappa \left( v_1 + \frac{v_2}{e_n} \right) \right) = e_t^2 u_0 + \kappa e_t (e_t v_0 + v_1 + \frac{e_t v_1 + v_2}{e_n}) \\ &\dots \\ u_k &= e_t^k u_0 + \kappa \frac{e_t}{e_n} \left( (e_t^{k-1} e_n + 1) v_0 + (e_t + e_n) \sum_{j=1}^{k-1} (e_t^{k-j-1} v_j) \right) \end{aligned}$$

e imponer que  $u_k = u_0$ , teniendo en cuenta que  $v_k = v_0$  para agrupar las sumas,

$$u_0 = \kappa \frac{e_t}{e_n} \left( v_0 + \frac{e_t + e_n}{1 - e_t^k} \sum_{j=0}^{k-1} (e_t^{k-j-1} v_j) \right) \quad (3.9)$$

y

$$u_i = \kappa \frac{e_t}{e_n} \left( v_i + \frac{e_t + e_n}{1 - e_t^k} \sum_{j=0}^{k-1} (e_t^{k-j-1} v_{i+j}) \right) \quad \forall 1 \leq i \leq k-1. \quad (3.10)$$

Luego, podemos expresar  $u_i$  en función de los parámetros, es decir,  $u_i = u_i(e_t, e_n, \kappa)$ . Por último, imponiendo la condición de periodicidad para  $z_i$ , obtenemos la superficie  $\kappa_\sigma$  que nos da la condición necesaria para la existencia de la solución periódica. Esto es,

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 + n_0(1 - \kappa) - (u_0 + \kappa v_0) \left( v_0 + \frac{v_1}{e_n} \right) \\ &\dots \\ z_k &= z_0 + (1 - \kappa) \sum_{j=0}^{k-1} n_j - \sum_{j=0}^{k-1} \left( (u_j + \kappa v_j) \left( v_j + \frac{v_{j+1}}{e_n} \right) \right). \end{aligned}$$

Por tanto, imponiendo que  $z_k = z_0$  en la expresión de  $z_k$ , se deduce que

$$\kappa_\sigma = \kappa(e_t, e_n) = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} n_j}{\sum_{j=0}^{k-1} n_j + \left( \sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{u_j}{\kappa} + v_j \right) \left( v_j + \frac{v_{j+1}}{e_n} \right) \right)} \quad (3.11)$$

( $\kappa_\sigma$  depende únicamente de  $e_t$  y  $e_n$  puesto que tanto  $\frac{u_j}{\kappa}$  como  $v_j$  están escritos en función de estos parámetros). ■

Como dijimos anteriormente, esta condición es sólo necesaria. La sucesión  $(u_i, v_i, z_i)_{\{i=1, \dots, k-1\}}$  construida con  $\kappa = \kappa_\sigma$  es una solución formal, calculada imponiendo la periodicidad si los números de salto son los dados por  $\sigma$ . Para que esta solución sea una solución real hay que imponer condiciones extras. Más concretamente que los números de salto son realmente los  $n_i$ , es decir, que todos los  $z_i$  son positivos y cada  $n_i$  es el menor número natural que hace que lo sean. Estas condiciones son las que antes hemos denominado condiciones de compatibilidad.

Antes de enunciar el teorema sobre la condición suficiente de existencia de solución periódica asociada a  $\sigma$  necesitamos algo de notación.

Sea  $(u_0, v_0, z_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  una condición inicial verificando  $u_0 = u_0(e_t, e_n, \kappa_\sigma)$  y  $v_0 = v_0(e_t, e_n, \kappa_\sigma)$  dadas en la demostración del teorema anterior,  $z_0$  cualquiera. A partir de ella construimos  $(u_i, v_i, z_i)_{\{i=0, \dots, k-1\}}$  y denotamos por  $z_j(l)$  a la función que da la tercera componente del sistema discreto, esto es,

$$z_j(l) = z_{j-1} + (1 - \kappa)l - (u_{j-1} + \kappa v_{j-1}) \left( v_{j-1} + \sqrt{v_{j-1}^2 + 2l} \right) .$$

Obsérvese que todo  $z_j(l)$  depende de  $z_0$  que podría ser tomado cero sin pérdida de generalidad. Además, si el número de salto es  $n_i$  entonces  $z_{i+1} = z_{i+1}(n_i)$ .

**Teorema 3.8** *Sea  $m = \min_i z_i$  y  $M = \max_{\{i,j\}} z_{i+1}(n_i - j)$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ . Si  $M - m < 0$  existe solución periódica de tipo  $\sigma$ . Más aún,  $(u_0, v_0, z_0^*)$  será una condición inicial válida si  $z_0^* \in [z_0 - m, z_0 - M)$ .*

### Demostración.

Definimos en primer lugar  $\bar{z}_i = z_i - m$ . Puesto que  $m$  es el mínimo de los  $z_i$ ,  $\bar{z}_i \geq 0$  para todo  $i = 0, \dots, k-1$ . Para ver que esta solución  $(u_i, v_i, \bar{z}_i)$  es válida, habría que demostrar que para toda iteración  $i$  se tiene que

$$\bar{z}_i(n_i - j) = z_i(n_i - j) - m < 0, \forall j = 1, \dots, n_i .$$

Pero eso es consecuencia inmediata de la condición  $M - m < 0$ .

Por último, para ver el rango de validez consideremos  $z_0^*$  cualquiera. Podemos escribir  $z_0^* = z_0 + (z_0^* - z_0)$  donde  $z_0^* - z_0$  puede ser visto como



un desplazamiento y por tanto, se conservará en todas las iteradas; es decir,  $z_i^* = z_i + (z_0^* - z_0)$ . Por tanto,  $\forall i$  se verifica que  $z_i^* \geq z_i - m \geq 0$  y  $z_i^*(n_i - j) = z_i(n_i - j) + (z_0^* - z_0) < M - M = 0$  para todo  $j = 1, \dots, n_i$ . ■

El siguiente lema sobre la función que da la tercera componente del sistema discreto nos será de gran utilidad para el estudio de las condiciones de compatibilidad.

**Lema 3.9** *Sea  $f(m) = m(1 - \kappa) - (u_i + \kappa v_i)(v_i + \sqrt{v_i^2 + 2m})$  y supon- gamos que  $n_i \neq 0$  es tal que  $z_{i+1} = z_i + f(n_i)$ . Entonces,  $f$  tiene un único cero,  $m_0 = \frac{2(u_i + \kappa v_i)(u_i + v_i)}{(1 - \kappa)^2}$  y un punto crítico,  $m^*$ , que es un mínimo. En consecuencia,*

- a)  $z_{i+1}(j) < z_i$  para todo  $0 \leq j \leq m_0$ .
- b)  $\max_{j=0, \dots, n_i-1} z_{i+1}(j) = \max\{z_{i+1}(0), z_{i+1}(n_i - 1)\}$ .

#### **Demostración.**

La demostración del lema se basa en el hecho de que  $f$  es una función con un único mínimo, verificando  $f(0) < 0$  y  $\lim_{l \rightarrow +\infty} f(l) = +\infty$ .

El apartado a) se sigue inmediatamente del hecho de que  $m_0$  sea el cero de la función  $f$ . En efecto,  $f(j) < 0$  para todo  $j \leq m_0$  y por tanto,  $z_{i+1}(j) < z_i$ .

Como la función  $f$  tiene un único punto crítico que es un mínimo, su máximo en un intervalo cerrado se alcanza siempre en los extremos. Por lo tanto, el valor máximo de  $f$  en  $[0, n_i - 1]$  estará en el máximo de los valores  $f(0)$  y  $f(n_i - 1)$ , de donde se implica directamente la tesis del apartado b). ■

**Nota 3.10** *Como consecuencia del Lema 3.9, el máximo  $M$  se calcula considerando únicamente los valores de  $z_i(0)$  y  $z_i(n_i - 1)$  si  $n_i \geq 1$ .*

A continuación, demostraremos dos teoremas generales sobre la existencia de soluciones periódicas de impactos aislados. En el primero se prueba que este tipo de soluciones se encuentran siempre fuera de la región donde todas las soluciones están acotadas, es decir, la superficie  $\kappa_\sigma$  está por encima de la superficie  $\kappa_\infty$ . En el segundo veremos que la región en el espacio de parámetros donde se da la existencia de estas soluciones es muy "reducida", en el sentido de que es un conjunto numerable de superficies.

**Teorema 3.11** *Consideremos una pendiente  $\kappa_\sigma$  asociada una solución periódica de palabra  $\sigma$ . Entonces,  $\kappa_\sigma \geq \kappa_\infty$ .*

**Demostración.**

En primer lugar escribimos la expresión general de  $\kappa$  para soluciones periódicas, esto es,

$$\kappa_\sigma = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} n_j}{\sum_{j=0}^{k-1} n_j + \left( \sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{u_j}{\kappa} + v_j \right) \left( v_j + \frac{v_{j+1}}{e_n} \right) \right)}.$$

Pretendemos acotar superiormente la sumatoria de las velocidades

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left( v_j^2 + \frac{v_j v_{j+1}}{e_n} + \frac{u_j}{\kappa} v_j + \frac{u_j}{\kappa} \frac{v_{j+1}}{e_n} \right)$$

en función de la sumatoria de  $v_j^2$  y esta a su vez por los números de salto. Para ello, procedemos sumando a sumando y usamos la desigualdad de Schwartz.

Así, el segundo sumando puede acotarse mediante

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{v_j v_{j+1}}{e_n} \leq \frac{1}{e_n} \left( \sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=0}^{k-1} v_{j+1}^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{e_n} \sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 ;$$

donde la última igualdad es consecuencia de la periodicidad de  $v_j$ .

Para acotar el tercero debemos usar la expresión de los  $u_j$  dada en (3.6). Así,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{u_j}{\kappa} v_j \right) = \frac{e_t}{e_n} \left( \left( \sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 \right) + \frac{e_t + e_n}{1 - e_t^k} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left( e_t^{k-i-1} v_{i+j} v_j \right) \right) ;$$

donde la última suma puede reordenarse como

$$\sum_{i=0}^{k-1} e_t^{k-i-1} \left( \sum_{j=0}^{k-1} v_{i+j} v_j \right) \leq \sum_{i=0}^{k-1} e_t^{k-i-1} \sum_{j=0}^{k-1} v_j^2.$$

Luego,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{u_j}{\kappa} v_j \right) \leq \frac{e_t}{e_n} \left( 1 + \frac{e_t + e_n}{1 - e_t^k} \frac{1 - e_t^k}{1 - e_t} \right) \sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 = \frac{e_t(1 + e_n)}{e_n(1 - e_t)} \sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 .$$

El último sumando es igual al anterior dividido por  $e_n$ . Por tanto, podemos acotar la sumatoria de las velocidades por

$$\left(1 + \frac{1}{e_n}\right) \left(1 + \frac{e_t(1 + e_n)}{e_n(1 - e_t)}\right) \sum_{j=0}^{k-1} v_j^2.$$

Puesto que la solución es periódica la sumatoria de los  $v_j$  coincide con la de los  $v_{j+1}$  y de la primera ecuación de (2.9) se tiene que  $v_{j+1}^2 = e_n^2(v_j^2 + 2n_j)$ . Luego, podemos escribir la sumatoria de las  $v_j^2$  como

$$\sum_{j=0}^{k-1} v_j^2 = \frac{2e_n^2}{1 - e_n^2} \sum_{j=0}^{k-1} n_j.$$

La tesis del teorema se sigue inmediatamente sustituyendo en la expresión de  $\kappa_\sigma$ .

■

**Teorema 3.12** *No existe solución periódica de impactos aislados de (2.9) para la mayoría de los valores de los parámetros.*

**Demostración.**

Cada solución periódica lleva asociada una palabra finita del tipo

$$(n_0, n_1, \dots, n_{k-1}).$$

Además, por el Teorema 3.7, para cada palabra el subconjunto del espacio de parámetros donde existe la correspondiente solución periódica está contenido en el gráfico de una función analítica

$$\kappa : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Por tanto, este subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  donde existe cada solución periódica es de medida nula. En consecuencia, el conjunto

$$\mathcal{P} := \{(e_t, e_n, \kappa) : \text{existe solución periódica de (2.9)}\}$$

es de medida nula por ser una colección numerable de “trozos“ de superficies.

■

**Nota 3.13** *No se ha podido determinar si el conjunto anterior es denso.*

A partir de ahora vamos a exponer algunos ejemplos representativos de soluciones periódicas. Estudiaremos en primer lugar el caso más sencillo, consistente en secuencias  $\{u_k, v_k, z_k\}$  constantes. A esta clase de soluciones periódicas las denominaremos *soluciones periódicas de tipo*  $(n_0)$  porque la partícula salta exactamente  $n_0$  escalones entre dos impactos consecutivos.

**Proposición 3.14** *Existen soluciones periódicas de tipo  $n_0$  si y sólo si*

$$\kappa_{n_0}(e_t, e_n) := \frac{(1 - e_t)(1 - e_n)}{(1 + e_t)(1 + e_n)}, \quad (e_t, e_n) \in [0, 1) \times (0, 1) .$$

**Demostración.**

Para obtener la expresión de la superficie  $\kappa_{n_0}$  basta particularizar la expresión (3.11) para soluciones 1- periódicas y palabra  $\sigma = (n_0)$ . Es decir,  $k = 1$  y  $n_0$ ,

$$\kappa_{n_0} = \frac{n_0}{n_0 + \left(\frac{u_0}{k} + v_0\right)\left(\frac{1+e_n}{e_n}\right)v_0} .$$

Sustituimos ahora los valores de  $u_0$  y  $v_0$  obtenidos a partir de las ecuaciones (3.9) y (3.7), es decir,

$$v_0 = \frac{e_n}{\sqrt{1 - e_n^2}} \sqrt{2n_0} \quad \text{y} \quad u_0 = \kappa \frac{e_t(1 + e_n)}{e_n(1 - e_t)} v_0 .$$

De este modo se llega a la expresión para  $\kappa$  dada en la Proposición.

Como ya dijimos anteriormente, esta condición es en general sólo necesaria. Sin embargo, veamos que en este caso es también suficiente y por tanto, la superficie está definida para todos los valores (bajo consideración) de los parámetros  $e_t$  y  $e_n$ . Para ello, apliquemos el Teorema 3.8, teniendo en cuenta que en este caso  $m = z_0$  y  $M = \max_{\{j=0, \dots, n_0-1\}} z_0(j)$ . Por tanto, tendríamos que demostrar que

$$z_0 = z_0(n_0) > z_0(j) = z_0 + f(j) \quad \text{para todo } j = 0, \dots, n_0 - 1 .$$

Ahora bien, la condición anterior es consecuencia inmediata del Lema 3.9 a). En efecto, en este caso  $m_0 = n_0$  puesto que  $z_0 = z_0 + f(n_0)$  por ser la solución 1-periódica. ■

**Nota.** Hay que observar que en este caso particular la superficie de existencia  $\kappa_{n_0}$  coincide con la que delimita la región de acotación de soluciones  $\kappa_\infty$ .

Las siguientes soluciones periódicas en las que vamos a centrar nuestro estudio son las soluciones 2 periódicas. Esto es, en aquellas cuyas palabras son de la forma  $\sigma = (n_0, n_1)$ .

**Proposición 3.15** *Consideremos una solución periódica de tipo  $(n_0, n_1)$ . Entonces,  $\kappa_{(n_0, n_1)}$  es de la forma*

$$\overline{\left(1 + \frac{2(e_t + e_n)^2}{(1 - e_t^2)(1 - e_n^2)}\right) (n_0 + n_1) + \frac{4(e_t + e_n)(1 + e_t e_n)}{(1 - e_t^2)(1 - e_n^4)} \sqrt{e_n^2 n_0 + n_1} \sqrt{n_0 + e_n^2 n_1}} .$$

La superficie anterior está definida en un subconjunto propio de

$$\{(e_t, e_n) \in [0, 1) \times (0, 1)\} .$$

### Demostración.

Para obtener la superficie basta escribir la expresión (3.11), teniendo en cuenta que  $k = 2$  y calculando previamente los valores de  $\frac{u_i}{\kappa}$  y  $v_i$ . Para ello, sustituyendo  $\sigma = (n_0, n_1)$  en (3.5) obtenemos que

$$v_0 = \frac{\sqrt{2}e_n \sqrt{e_n^2 n_0 + n_1}}{\sqrt{1 - e_n^4}} \quad \text{y} \quad v_1 = \frac{\sqrt{2}e_n \sqrt{n_0 + e_n^2 n_1}}{\sqrt{1 - e_n^4}} .$$

A partir de estas expresiones podemos calcular las velocidades horizontales usando (3.6). Así,

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{\kappa} + v_0 &= v_0 + \frac{e_t}{e_n} \left( v_0 + \frac{e_t + e_n}{1 - e_t^2} (v_1 + e_t v_0) \right) = \frac{e_t + e_n}{(1 - e_t^2)e_n} (v_0 + e_t v_1), \\ \frac{u_1}{\kappa} + v_1 &= v_1 + \frac{e_t}{e_n} \left( v_1 + \frac{e_t + e_n}{1 - e_t^2} (v_0 + e_t v_1) \right) = \frac{e_t + e_n}{(1 - e_t^2)e_n} (v_1 + e_t v_0). \end{aligned}$$

Luego, se verifica que

$$\begin{aligned} \left( \frac{u_0}{\kappa} + v_0 \right) \left( v_0 + \frac{v_1}{e_n} \right) + \left( \frac{u_1}{\kappa} + v_1 \right) \left( v_1 + \frac{v_0}{e_n} \right) &= \\ \frac{e_t + e_n}{e_n^2(1 - e_t^2)} \left( (e_t + e_n)(v_0^2 + v_1^2) + 2(1 + e_t e_n)v_0 v_1 \right) . \end{aligned}$$

La expresión de la superficie del teorema se obtiene sustituyendo los valores para  $v_0$  y  $v_1$  obtenidos anteriormente.

Ahora vamos a ver que no toda la superficie es admisible y que el rango de valores de los parámetros de restitución ha de ser determinado. A este fin estudiamos las condiciones de compatibilidad. Podemos suponer que  $n_0 < n_1$  puesto que de no ser así podríamos reescribir la solución periódica para que lo fuera. Veamos en primer lugar que  $z_0$  es distinto de  $z_1$ . Procedamos por reducción al absurdo. Denotemos por

$$a_0 = (u_0 + \kappa v_0)(v_0 + \frac{v_1}{e_n}) \quad \text{y} \quad a_1 = (u_1 + \kappa v_1)(v_1 + \frac{v_0}{e_n})$$

y asumamos que  $z_1 = z_0$ . Entonces, de la tercera expresión del sistema discreto (2.9) se obtiene que

$$z_1 = z_0 + n_0(1 - \kappa) - a_0$$

y por tanto,  $\kappa = \frac{n_0 - a_0}{n_0}$ . Por otra parte,

$$z_0 = z_2 = z_1 + n_1(1 - \kappa) - a_1 ,$$

luego  $\kappa = \frac{n_1 - a_1}{n_1}$  .

Entonces, igualando ambas expresiones,  $n_0 a_1 = n_1 a_0$ . En consecuencia,

$$n_1(u_0 + \kappa v_0) \left( v_0 + \frac{v_1}{e_n} \right) = n_0(u_1 + \kappa v_1) \left( v_1 + \frac{v_0}{e_n} \right) .$$

Sustituyendo ahora los valores de las velocidades calculados anteriormente y dividiendo ambos lados de la igualdad por  $n_0$  y  $n_1$ , llegaremos a

$$\begin{aligned} e_n^3 + e_n s + e_t e_n^2 s + e_t + (1 + e_t e_n) \sqrt{e_n^2 + s} \sqrt{1 + e_n^2 s} = \\ e_n^3 + e_n \frac{1}{s} + e_t e_n^2 \frac{1}{s} + e_t + \frac{(1 + e_t e_n)}{s} \sqrt{e_n^2 + s} \sqrt{1 + e_n^2 s}, \end{aligned}$$

donde  $s = \frac{n_1}{n_0}$ . Luego,

$$\left( s - \frac{1}{s} \right) \left( e_n + e_t e_n^2 + (1 + e_t e_n) \sqrt{e_n^2 + s} \sqrt{1 + e_n^2 s} \right) = 0$$

pero esto no es posible puesto que  $s$  es distinto de uno ya que  $n_0 < n_1$  y el segundo factor es estrictamente positivo. Por lo tanto, o bien  $z_0 > z_1$  o bien  $z_1 > z_0$ .

Puesto que si  $n_0 = 0$  se verifica que  $z_1 < z_0$  para todo  $n_1$  y  $z_1 \neq z_0$  para todo  $n_0 < n_1$  por el razonamiento anterior, entonces  $z_1(n_0) < z_0(n_1)$  siempre que  $n_0 < n_1$ . Luego, el mínimo  $m$  se da en  $z_1$ . Por otra parte, en virtud del Lema 3.9 se tiene que

$$M = \max\{z_0(0), z_0(n_1 - 1), z_1(0), z_1(n_0 - 1)\} .$$

Luego, la condición suficiente para la existencia de soluciones 2-periódicas dada en el Teorema 3.8 es que cada uno de ellos sea menor que  $z_1$ . Esto se reduce a dos condiciones de compatibilidad

$$\begin{aligned} (C1) \quad & z_0(n_1 - 1) < z_1 \quad , \\ (C2) \quad & z_1(0) < z_1 \quad ; \end{aligned}$$

en el caso de  $n_0 \neq 0$  y a una, (C1), si  $n_0 = 0$ . Esto se debe a que se verifica inmediatamente que  $z_0(0) = z_1 + f^1(0) < z_1$  por ser  $f^1(0) < 0$  y  $z_1(n_0 - 1) < z_1$  se deduce de la condición (C2) ya que el máximo de  $f^0$  en  $[0, n_0]$  se alcanza en los extremos, es decir,

$$z_1(n_0 - 1) < \max\{z_1(0), z_1(n_0) = z_1\} < z_1 .$$

■

**Corolario 3.16** *Las soluciones periódicas de tipo  $(0, 1)$  existen si y sólo si*

$$\kappa = \kappa_{(0,1)}(e_t, e_n) = \frac{(1 - e_t^2)(1 - e_n^4)}{(1 + 6e_n^2 + e_n^4)(1 + e_t^2) + 8e_n(1 + e_n^2)e_t}$$

para todo  $(e_t, e_n) \in [0, 1) \times (0, 1)$ . Además,  $\kappa_{(0,n)} = \kappa_{(0,1)}$  aunque el rango de validez de los parámetros de restitución no es el mismo en general.

**Demostración.**

El cálculo de  $\kappa_{(0,n)}$  es análogo a los realizados anteriormente para las otras soluciones periódicas. Ahora bien, las condiciones de compatibilidad en este caso se reducen a (C1) como se dijo en el teorema anterior. Es decir, hay que estudiar la negatividad de la función

$$g(n) = (n - 1) - \frac{2(e_t + e_n)^2}{(1 - e_t^2)(1 - e_n^4)} \left( \sqrt{n} \left( e_n^2 \sqrt{n} + \sqrt{n - (1 - e_n^4)} \right) \right) .$$

Observese que si  $n = 1$  la función anterior es siempre negativa y por tanto, la superficie  $\kappa_{(0,1)}$  es admisible para todos los valores de los parámetros de restitución. ■

**Nota 3.17** Las superficies  $\kappa_s$ ,  $\kappa_\infty$  y  $\kappa_{(0,1)}$  están ordenadas de forma que

$$\kappa_\infty \leq \kappa_{(0,1)} \leq \kappa_s$$

para todo  $e_t \in [0, 1)$  y  $e_n \in (0, 1)$ . Además, por el Teorema 3.11 siempre se verifica que  $\kappa_\sigma \geq \kappa_\infty$  para cualquier solución periódica de palabra  $\sigma$ . Sin embargo, no se sabe en general, si  $\kappa_\sigma \leq \kappa_s$ .

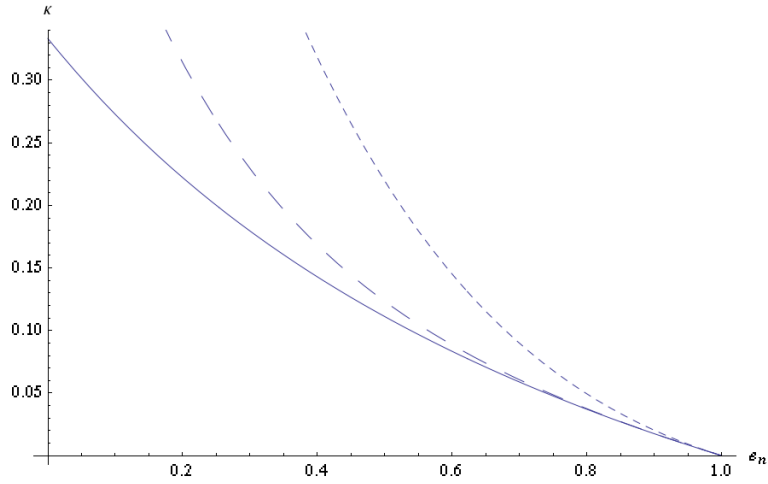


Figura 3.1: Posición relativa de las superficies para  $e_t = 0.5$  ( $\kappa_\infty$  en trazado continuo,  $\kappa_{0,1}$  en trazo discontinuo largo y  $\kappa_s$  en trazo discontinuo corto).

### 3.4 Estabilidad

Esta sección está dedicada al estudio de la estabilidad de las soluciones periódicas de (2.9). Más concretamente, estudiaremos la estabilidad en sentido Lyapunov.

**Definición 3.18** Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^N$  y  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  una función continua. Además, sea  $\bar{p}$  una órbita cualquiera de  $F$  con condición inicial  $\bar{p}_0 \in \mathbb{R}^N$ . Se dice que  $\bar{p}$  es Lyapunov estable si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $0 < \delta \leq \epsilon$  tal que si  $\|p_0 - \bar{p}_0\| < \delta$  entonces  $\forall n \geq 0$   $F^n(p_0)$  está bien definido y  $\|F^n(p_0) - F^n(\bar{p}_0)\| < \epsilon$ .

A continuación, damos una definición equivalente de estabilidad para órbitas periódicas.



**Proposición 3.19** *En las condiciones de la definición anterior, sea  $\bar{p}$  una órbita  $k$ -periódica.  $\bar{p}$  es Lyapunov estable si y sólo si lo es para  $F^k$ .*

**Demostración .**

La implicación directa es inmediata puesto que la condición de estabilidad Lyapunov es más general. Probemos la condición inversa. Notaremos (\*) a la condición que suponemos verificada y sea  $\epsilon$  fijo. De la continuidad de  $F^n$  para  $n = 0, \dots, k - 1$  se deduce la existencia de un  $\delta_1 > 0$  tal que si  $\|p_0 - \bar{p}_0\| < \delta_1$  entonces

$$\|F^n(p_0) - F^n(\bar{p}_0)\| < \epsilon, \text{ para todo } n = 0, \dots, k - 1. \quad (3.12)$$

Ahora bien, de la condición (\*) tomando  $\epsilon = \delta_1$  se deduce que existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$\|p_0 - \bar{p}_0\| < \delta_2 \Rightarrow \|F^{lk}(p_0) - \bar{p}_0\| < \delta_1 \text{ para todo } l \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Sea ahora  $m$  cualquiera. Podemos escribir  $m = lk + n$  donde  $0 \leq n < k$ . Supongamos que  $\|p_0 - \bar{p}_0\| < \delta$  con  $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Entonces, por (3.13) se verifica que  $\|F^{lk}(p_0) - \bar{p}_0\| < \delta_1$ . Aplicamos ahora (3.12) y obtenemos que

$$\|F^n(F^{lk}(p_0)) - F^n(\bar{p}_0)\| < \epsilon.$$

Puesto que  $F^n(F^{lk}(p_0)) = F^m(p_0)$  la Proposición queda demostrada. ■

Sea  $F$  la función que define el sistema discreto (2.11) definida en el conjunto  $\Omega$ ,

$$\Omega = \{(u, v, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times (0, 1 - \kappa) : z' > 0\}.$$

**Proposición 3.20** *El conjunto  $\Omega$  es abierto y la función  $F$  es continua definida sobre él.*

**Demostración.**

Para demostrar que  $\Omega$  es abierto habrá que ver que si  $(u_0, v_0, z_0) \in \Omega$  entonces existe un entorno,  $U = E(u_0, v_0, z_0)$  contenido en  $\Omega$ . Esto es, tal que  $z' > 0$  en  $U$ . En particular, de esto se deduce que  $n$  es constante en  $U$ . Distingamos entre el número de salto nulo y mayor o igual que uno.

Si  $n = 0$  entonces  $z_0 \geq 2v_0(u_0 + \kappa v_0)$ . Ahora bien, si la desigualdad es estricta entonces lo será en un entorno  $U$  de  $(u_0, v_0, z_0)$  y por tanto,

$$z' = z - 2v(u + \kappa v) > 0$$

en  $U$ . Además,  $n = 0$  en ese entorno. Por otra parte, la igualdad

$$z_0 = 2v_0(u_0 + \kappa v_0)$$

no puede darse puesto que, en ese caso,  $z' = z_0 - 2v_0(u_0 + \kappa v_0) = 0$  y esto sería una contradicción.

Por otra parte, si  $n \geq 1$  entonces  $z_0 < 2v_0(u_0 + \kappa v_0)$  y puedo tomar un entorno  $U$  donde se mantenga la desigualdad. Por tanto,  $n \neq 0$  en ese entorno. Además,

$$z'(n_0) = z_0 + n_0(1 - \kappa) - (u_0 + \kappa v_0) \left( v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2n_0} \right) > 0$$

y  $z'(k) < 0$  para todo  $k < n_0$ , por ser  $n_0$  el menor número natural tal que  $z' \geq 0$ . Luego, puedo escoger  $U$  para que también se den estas condiciones estrictas en ese entorno. Además,  $n(u, v, z) = n_0$  en  $U$ .

La continuidad de  $n$  es consecuencia de lo anterior, ya que es constante en un entorno. Se deduce inmediatamente que  $F$  es también continua por ser composición de funciones continuas. ■

Las órbitas periódicas contenidas en  $\Omega$  se denominan *órbitas periódicas estrictas*. La estabilidad de estas órbitas viene dada en el siguiente teorema.

**Teorema 3.21** *Toda solución periódica estricta de (2.9) es Lyapunov estable. Además, para todo punto de ésta existe un entorno de condiciones iniciales cuyas órbitas correspondientes convergen exponencialmente a una trasladada de la periódica.*

**Nota 3.22** *Las órbitas periódicas estrictas no pueden ser localmente atractoras. De hecho, en cualquier entorno de una órbita periódica estricta existe una desplazada de ella que permanece constante y por tanto, no converge a la original.*

La demostración del teorema anterior está basada en los siguientes lemas y la nota, que se enuncian sin demostración y se probarán posteriormente.

A partir de ahora notaremos por  $\bar{O} = \{\bar{O}_i\}_{i=0, \dots, k-1}$  a una órbita  $k$ -periódica. El primer lema nos garantiza la continuidad de las iteradas con respecto a las condiciones iniciales y nos permite "controlar" los números de salto en un entorno de la solución periódica estricta.

**Lema 3.23** Existe  $r_0 > 0$  tal que  $F, F^2, \dots, F^k$  son continuas en

$$B_0 = B(\bar{O}_0, r_0) = B(\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{z}_0) .$$

Como consecuencia, los números de salto son constantes e iguales a los de la periódica hasta  $n_k$ .

**Nota 3.24** Como consecuencia del Lema anterior, si  $O$  es una órbita con condiciones iniciales en  $B_0$  entonces sus números de salto coinciden con los de la periódica hasta el  $k$ -ésimo impacto. Esto se debe a que  $n_j = n(F^j(\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{z}_0))$

A continuación damos una acotación de la distancia entre una órbita  $O$ , con condición inicial en  $B_0$  y la solución periódica estricta  $\bar{O}$ . Esta distancia la mediremos en norma  $\|\cdot\|_1$ , donde para cualquier vector  $x = (x_i)$  de  $\mathbb{R}^k$  la norma uno es  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_i|$ .

**Lema 3.25** Sea  $(u_0, v_0, z_0) \in B_0$  condición inicial para  $O$ . Notemos por  $(d_i)_{\{i \geq 0\}}$  a  $d_i = \|(u_i - \bar{u}_i, v_i - \bar{v}_i)\|_1$  y por  $\theta < 1$  a una constante mayor que el máximo entre  $e_t$  y  $e_n$ . Entonces, si los números de salto de  $O$  son iguales a los de  $\bar{O}$  para  $i = 0, \dots, nk$ , la órbita  $O$  permanece "cerca" de  $\bar{O}$  hasta la  $nk$ -ésima iterada. Además, existe una constante  $C_1 = C(\bar{O}, \theta, \kappa)$ , independiente de  $n$ , tal que

$$a) \quad d_i \leq C_1 \theta^i d_0, \quad \forall i = 0, \dots, nk; \quad (3.14)$$

$$b) \quad |z_{mk} - \bar{z}_0| \leq |z_0 - \bar{z}_0| + C_1 d_0, \quad \forall m = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Por último, encontramos un entorno de condiciones iniciales alrededor de  $\bar{O}_0$  de manera que las órbitas que comiencen con condiciones en este entorno tengan los mismos números de salto que la órbita periódica en todas las iteradas. El siguiente lema garantiza la existencia de dicho entorno.

**Lema 3.26** Existe  $\tilde{B}_0 \subset B_0$  entorno de  $\bar{O}_0 = (\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{z}_0)$  tal que si  $O_0 = (u_0, v_0, z_0) \in \tilde{B}_0$  entonces  $n_i(O_0) = n_i(\bar{O}_0) \quad \forall i \geq 0$ .

**Nota 3.27** El lema anterior garantiza que las desigualdades del Lema 3.25 son ciertas para cualquier iterada siempre que la condición inicial esté en  $\tilde{B}_0$ , es decir,

- a)  $d_i \leq C_1 \theta^i d_0, \forall i \geq 0,$   
 b)  $|z_{mk} - \bar{z}_0| \leq |z_0 - \bar{z}_0| + C_1 d_0, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$

Una vez enunciados los lemas anteriores, estamos en condiciones de demostrar el Teorema 3.21.

**Demostración (Teorema 3.21.)**

La estabilidad Lyapunov es consecuencia de la Nota 3.27. En efecto, sea  $\epsilon \leq r_0$  cualquiera. Puesto que  $\bar{O}$  es  $k$ -periódica basta ver que existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|O_0 - \bar{O}_0\|_1 < \delta$  entonces  $\|O_{mk} - \bar{O}_0\|_1 < \epsilon$  (Proposición 3.19). Pero eso se verifica ya que si  $O$  es una órbita con condición inicial en  $\tilde{B}_0$ , se verifican las desigualdades dadas en la Nota 3.27. Esto es,

$$\|O_{mk} - \bar{O}_0\|_1 \leq |z_{mk} - \bar{z}_0| + d_{mk} \leq |z_0 - \bar{z}_0| + C_1 d_0 + C_1 \theta^{mk} d_0$$

y puesto que  $\theta < 1$ , basta tomar  $\delta < \frac{\epsilon}{1 + 2C_1}$ .

Demostremos ahora la convergencia exponencial. Para las componentes de velocidad está demostrado en la Nota 3.27 a). Veamos ahora la convergencia exponencial de la componente  $z$  a una trasladada de la periódica original. Esto es, probaremos que existe dos constantes  $L > 0$  y  $z^d$  verificando

$$|z_i - \bar{z}_i - z^d| \leq L \theta^i$$

para todo  $i \geq 1$  y veremos que la órbita  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{z}_i + z^d)$  es una periódica, trasladada de la original.

Para ello, sea

$$\alpha_i = (u_i + \kappa v_i)(v_i + \frac{v_{i+1}}{e_n}) \quad \text{y} \quad \bar{\alpha}_i = (\bar{u}_i + \kappa \bar{v}_i)(\bar{v}_i + \frac{\bar{v}_{i+1}}{e_n}) \quad (3.16)$$

el término que aparece al escribir la  $i$ -ésima iterada de  $z$ . Entonces, podemos escribir

$$z_{ik+k} = z_{ik} + (1 - \kappa) \sum_{j=0}^{k-1} n_{ik+j} - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ik+j},$$

donde  $(1 - \kappa) \sum_{j=0}^{k-1} n_{ik+j}$  es una constante y la notaremos por  $C^*$ . Sea

$$\beta_i = C^* - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ik+j}. \quad (3.17)$$

Se verifica :

- a)  $z_{(i+1)k} = z_{ik} + \beta_i$ .
- b) Existe el límite de  $\beta_i$  y es cero.
- c) Existe una constante  $M > 0$  de forma que  $|\beta_i| < M\theta^{ik}$ .
- d)  $z^d = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i$  es la constante buscada.

La primera parte se verifica por definición. Para ver b) hay que tener en cuenta que  $\bar{O}$  es periódica y por tanto,

$$\|(u_{ik+j} - \bar{u}_j, v_{ik+j} - \bar{v}_j)\|_1 = \|(u_{ik+j} - \bar{u}_{ik+j}, v_{ik+j} - \bar{v}_{ik+j})\|_1 .$$

Usamos ahora la Nota 3.27 a),

$$\|(u_{ik+j} - \bar{u}_j, v_{ik+j} - \bar{v}_j)\|_1 \leq C_1 d_0 \theta^{ik+j}$$

y obtenemos que  $(u_{ik+j}, v_{ik+j})$  converge a  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j)$ . En consecuencia,

$$\alpha_{ik+j} \rightarrow \bar{\alpha}_j$$

y por tanto, existe el límite de  $\beta_i$ . Ahora bien, si éste fuera no nulo se tendría que  $\lim_j z_j = \infty$  por ser una sucesión estrictamente monótona.

Veamos ahora c)  $|\beta_i| \leq M\theta^{ik}$  donde  $M$  es una constante. Para ello necesitamos la acotación (3.20) dada en la demostración del Lema 3.25 para los  $\alpha_i$ . Esto es,

$$|\alpha_i - \bar{\alpha}_i| \leq C_2 \theta^i d_0.$$

Restamos a  $\beta_i$  definida en (3.17) su límite y obtenemos

$$|\beta_i - \lim_i \beta_i| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_{ik+j} - \bar{\alpha}_j| = \sum_{j=0}^{k-1} |\alpha_{ik+j} - \bar{\alpha}_{ik+j}| \leq C_1 d_0 \sum_{j=0}^{k-1} \theta^{ik+j} .$$

Ahora bien,  $\lim_i \beta_i = 0$  y por tanto,

$$|\beta_i| \leq C d_0 \frac{1 - \theta^k}{1 - \theta} \theta^{ik} = M(\theta, \bar{O}) \theta^{ik} .$$

Por último, sea  $z_0^d = z_0 + z^d = z_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i$ . Definimos  $O^d$  la órbita con condiciones iniciales  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0, z_0^d)$ . Veamos que la órbita con condiciones iniciales  $(u_0, v_0, z_0)$  converge exponencialmente a  $O^d$ .

En primer lugar,  $z^d$  está bien definido puesto que la serie es convergente por lo anterior. Además, tomando  $r_0$  más pequeño si es necesario, podemos suponer que la bola construida es cerrada.

Ahora bien, se verifica que  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0, z_0^d) \in B_0$  puesto que  $u_{nk} \rightarrow \bar{u}_0$ ,  $v_{nk} \rightarrow \bar{v}_0$ ,  $z_{nk} \rightarrow z_0^d$  como probaremos después y la bola es cerrada. Además, como consecuencia del Lema 3.23 los números de salto de  $O^d$  son iguales a los de  $\bar{O}$  hasta  $n_k$ . Por tanto,  $O^d$  es una solución periódica desplazada de  $\bar{O}$ .

Veamos ahora que se da la convergencia de la tercera componente de forma exponencial. Esto es,

$$|z_{ik+j} - z_j^d| \leq M^* \theta^{ik}$$

para todo  $0 \leq j \leq k-1$ . En efecto,

$$|z_{ik} - z_0^d| \leq \left| \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right| \leq \sum_{j=n}^{\infty} |\beta_j| \leq M \sum_{j=n}^{\infty} \theta^{jk} = M_1 \theta^{ik}$$

y en general,

$$\begin{aligned} |z_{ik+j} - z_j^d| &= \left| z_{ik} + \sum_{l=0}^{j-1} (n_{ik+l} - \alpha_{ik+l}) - z_0^d - \sum_{l=0}^{j-1} (n_l - \bar{\alpha}_l) \right| \\ &\leq |z_{ik} - z_0^d| + \sum_{l=0}^{j-1} |\alpha_{ik+l} - \bar{\alpha}_{ik+l}|, \end{aligned}$$

por lo que

$$|z_{ik+j} - z_j^d| \leq M_2 \theta^{ik}$$

y para completar la demostración basta tomar  $M^* = \max\{M_1, M_2\}$ .

Por último,  $\forall i \geq 0$  existen  $j, l \in \mathbb{N}$  tales que  $i \in [jk, (j+1)k)$  e  $i = jk + l$ . Por tanto,

$$|z_i - \bar{z}_i - z_0^d| = |z_{kj+l} - \bar{z}_{kj+l} - z_0^d| = |z_{kj+l} - z_l^d| \leq M^* \theta^{kj} \leq M^* \theta^i$$

y el teorema queda demostrado tomando  $L = \max\{M, M^*\}$ . ■

Para finalizar la sección demostraremos los lemas enunciados anteriormente.

**Demostración(Lema 3.23).**

Como  $\bar{O}_0 \in \Omega$  podemos encontrar un entorno suyo donde  $F$  es continua. Notaremos por  $B_k = B(\bar{O}_0, r_k)$  a ese entorno. Entonces, existe  $r_{k-1} > 0$  tal que

$$F(B_{k-1}) = F(B(\bar{O}_{k-1}, r_k)) \subset B(F(\bar{O}_{k-1}), r_{k-1}) = B_k \subset \Omega$$

y podemos ahora repetir el argumento para  $B_{k-1}$ . De este modo construimos un conjunto de bolas  $B_{i \in \{0, \dots, k\}} \subset \Omega$  de forma que  $F(B_i) \subset B_{i+1}$ . En particular, tendríamos para las iteradas de  $B_0$  que

$$B_0 \subset \Omega, F(B_0) \subset B_1 \subset \Omega, \dots, F^k(B_0) \subset B_k \subset \Omega.$$

Por último, podemos escribir los números de salto hasta  $i = k$  como función continua de la condición inicial. Más concretamente,  $n_i = n(F^i(\bar{O}_0)) \forall i = 0, \dots, k$  y por tanto afirmar que son constantes en  $B_0$  ya que son una función continua que toma valores en  $\mathbb{N}$ . ■

### **Demostración(Lema 3.25).**

Comencemos demostrando (3.14) mediante iteración de (2.9). Los números de salto son iguales hasta  $i = nk$  y la función  $v \rightarrow e_n \sqrt{v^2 + 2n}$  es Lipschitziana de constante  $e_n$ . Por tanto, se obtiene que

$$|v_i - \bar{v}_i| \leq e_n^i |v_0 - \bar{v}_0| \leq e^i |v_0 - \bar{v}_0| \quad (3.18)$$

para todo  $i = 0, \dots, nk$ ; donde  $e$  es el máximo entre  $e_t$  y  $e_n$ .

Acotemos ahora la diferencia de las componentes horizontales de la velocidad, usando la correspondiente ecuación de (2.9),

$$\begin{aligned} |u_i - \bar{u}_i| &\leq e_t \left( |u_{i-1} - \bar{u}_{i-1}| + \frac{2\kappa}{e_n} |v_i - \bar{v}_i| \right) \leq \\ &\leq e_t (|u_{i-1} - \bar{u}_{i-1}| + 2\kappa e_n^{i-1} |v_0 - \bar{v}_0|) \leq \\ &\leq e_t [e_t |u_{i-2} - \bar{u}_{i-2}| + 2\kappa (e_n^{i-2} + e_t e_n^{i-1}) |v_0 - \bar{v}_0|] \\ &\leq \dots \leq e_t \left( e_t^{i-1} |u_0 - \bar{u}_0| + 2\kappa \sum_{j=0}^{i-1} e_t^j e_n^{i-j-1} |v_0 - \bar{v}_0| \right). \end{aligned}$$

Luego,

$$|u_i - \bar{u}_i| \leq e^i |u_0 - \bar{u}_0| + 2\kappa e^i |v_0 - \bar{v}_0|, \forall i = 0, \dots, nk.$$

Además, es posible acotar superiormente el término  $e^j j$  por  $C\theta^j$ , donde  $C > 0$  y  $e < \theta < 1$  son constantes. Por tanto,

$$|u_i - \bar{u}_i| \leq \tilde{C}\theta^i (|u_0 - \bar{u}_0| + |v_0 - \bar{v}_0|) \quad \forall i = 0, \dots, nk \quad (3.19)$$

donde  $\tilde{C} = \max\{1, 2\kappa C\}$ . Como consecuencia se obtiene la desigualdad (3.14),

$$d_i \leq (\tilde{C} + 1)\theta^i d_0 \text{ para todo } i = 0, \dots, nk .$$

Para demostrar (3.15) necesitamos acotar la diferencia entre los términos que aparecen al escribir la  $i$ -ésima iterada de  $z$  en función de  $d_0$ . Para ello, sean  $\alpha_i$  y  $\bar{\alpha}_i$  definidas en (3.16) en la demostración del Teorema 3.21 y vamos a encontrar que existe una constante  $C_2 = C(\bar{O}, \theta) > 0$  tal que

$$|\alpha_i - \bar{\alpha}_i| \leq C_2 \theta^i d_0. \quad (3.20)$$

Descomponemos en primer lugar cada  $\alpha_i$  en cuatro sumandos y acotamos cada uno de ellos por una constante que depende únicamente de la órbita periódica y la constante  $\theta$ . Posteriormente, tomamos  $C_1$  como la mayor de todas ellas. Puesto que el razonamiento es análogo para todos los casos, escribiremos sólo el correspondiente al  $n$  primero. Así,

$$|u_i v_i - \bar{u}_i \bar{v}_i| = |u_i v_i - u_i \bar{v}_i + u_i \bar{v}_i - \bar{u}_i \bar{v}_i| \leq |u_i| |v_i - \bar{v}_i| + |\bar{v}_i| |u_i - \bar{u}_i|.$$

Ahora bien, podemos acotar superiormente

$$|u_i| |v_i - \bar{v}_i| = |u_i - \bar{u}_i + \bar{u}_i| |v_i - \bar{v}_i|$$

por

$$(|u_i - \bar{u}_i| + |\bar{u}_i|) |v_i - \bar{v}_i| \leq (\tilde{C} \theta^i d_0 + \max_i |\bar{u}_i|) |v_i - \bar{v}_i| \leq (\tilde{C} r_0 + \max_i |\bar{u}_i|) d_i .$$

Por tanto,

$$|u_i v_i - \bar{u}_i \bar{v}_i| \leq C'(\bar{O}, \theta, r_0) d_i \leq C' \theta^i d_0 .$$

Utilizando la acotación (3.20) podemos deducir la desigualdad (3.15). En efecto,

$$z_{nk} - \bar{z}_{nk} = z_{nk-1} - \bar{z}_{nk-1} - (\alpha_{nk-1} - \bar{\alpha}_{nk-1}) = \dots = z_0 - \bar{z}_0 - \sum_{i=0}^{nk-1} (\alpha_i - \bar{\alpha}_i)$$

y por tanto,

$$|z_{nk} - \bar{z}_0| = |z_{nk} - \bar{z}_{nk}| \leq |z_0 - \bar{z}_0| + C_1 \frac{1 - \theta^{nk}}{1 - \theta} d_0 \leq |z_0 - \bar{z}_0| + \frac{C_1}{1 - \theta} d_0 .$$

Para conseguir la misma constante en (3.14) y (3.15) basta tomar el máximo, es decir,  $C = \max\{\tilde{C}, \frac{C_1}{1 - \theta}\}$ . ■



**Demostración (Lema 3.26).**

En primer lugar, se tiene que podemos escribir los números de salto hasta  $i = k$  como función continua de la condición inicial. Más concretamente,  $n_i = n(F^i(\bar{O}_0)) \forall i = 0, \dots, k$  y por tanto afirmar que son constantes en  $B_0$  ya que son una función continua que toma valores en  $\mathbb{N}$ .

Veamos ahora el caso general, para ello tomemos  $\tilde{r}_0 > 0$  verificando

$$(1 + 2C_1)\tilde{r}_0 \leq r_0 \quad (3.21)$$

y consideremos condiciones iniciales  $(u_0, v_0, z_0)$  en  $\tilde{B}_0 \subset B_0$ . Vamos a probar que para cualquier  $n$  se verifica que

$$(u_{nk}, v_{nk}, z_{nk}) \in B((\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{z}_0), r_0)$$

y como consecuencia los números de salto hasta  $(n+1)k$  son iguales a los de la órbita periódica, por lo dicho en el razonamiento anterior.

Para  $n = 1$ ,  $(u_0, v_0, z_0) \in \tilde{B}_0$  y los números de salto son iguales hasta  $i = k$ . Por tanto, aplicando el Lema 3.25,

$$d_k + |z_k - \bar{z}_k| \leq C_1\theta^k d_0 + |z_0 - \bar{z}_0| + C_1 d_0 \leq (1 + 2C_1)\tilde{r}_0 \leq r_0 .$$

Esto es,  $(u_k, v_k, z_k) \in B((\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{z}_0), r_0)$ .

Supongamos ahora que los números de salto son iguales hasta  $nk$ . Entonces, aplicando nuevamente el Lema 3.25,

$$d_{nk} + |z_{nk} - \bar{z}_{nk}| \leq C_1\theta^{nk} d_0 + |z_0 - \bar{z}_0| + C_1 d_0 \leq (1 + 2C_1)\tilde{r}_0 \leq r_0 .$$

Es decir,  $(u_{nk}, v_{nk}, z_{nk}) \in B((\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{z}_0), r_0)$  y como consecuencia, los números de salto son iguales hasta  $(n+1)k$ . ■



## Capítulo 4

### La escalera horizontal

En este capítulo vamos a considerar la ecuación diferencial (2.7) con la condición de impacto (2.8) para el caso  $\kappa = 0$ . Por la discusión que se hizo en el Capítulo 2, en este caso la riqueza dinámica aparece cuando el parámetro de restitución tangencial es constante e igual a uno,  $e_t = 1$  y el normal está entre cero y uno,  $0 < e_n < 1$ .

La simplificación en las ecuaciones nos permite estudiar más a fondo cuestiones como la existencia de soluciones periódicas. Además, presenta riqueza por sí mismo, siendo no sólo el germen de la dinámica que aparece en el caso general sino que presenta "objetos" propios como son las soluciones deslizantes, tal como se indicó en el segundo capítulo. Puesto que  $e_t = 1$ , la componente vertical de la velocidad se convierte en parámetro  $u \geq 0$  que junto con  $e := e_n$  son los parámetros del sistema. Escribamos en primer lugar el sistema original y la discretización para  $\kappa = 0$ . Puesto que la componente horizontal es de la forma  $x(t) = ut$ , el sistema original puede ser escrito como

$$\left. \begin{array}{l} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -1, \end{array} \right\} \text{ si } y(t) > -E[ut] \quad (4.1)$$

$$y'(t^+) = -ey'(t^-), \text{ si } y(t) = -E[ut] \quad (4.2)$$

En este caso podemos escribir el sistema discreto bidimensional con variables  $v$  y  $z$ ,

$$\begin{cases} v' = e\sqrt{v^2 + 2n} \\ z' = z + n - u(v + \sqrt{v^2 + 2n}). \end{cases} \quad (4.3)$$

El número de salto vendrá dado por

$$\begin{cases} n = 0 \\ n = \Gamma \left[ u \left( u + v + \sqrt{(u+v)^2 - 2z} \right) - z \right] \end{cases}, \text{ si } z \geq 2uv. \quad (4.4)$$

## 4.1 El Operador de Poincaré

Para entender mejor el sistema dinámico vamos a definir una sección diferente de las soluciones del sistema (4.1)-(4.2). Este operador de Poincaré nos permitirá además la definición de un algoritmo iterativo en próximas secciones.

Para ello vamos a fijar un periodo, que denotaremos por  $T$ . Este periodo viene definido por el tiempo que tarda la partícula en recorrer un peldaño

y es de la forma  $T = \frac{1}{u}$ . Matemáticamente, consideraremos el dominio de definición del operador de Poincaré como

$$\mathcal{H} = [(1, +\infty) \times \mathbb{R}] \cup [\{1\} \times [0, +\infty)] .$$

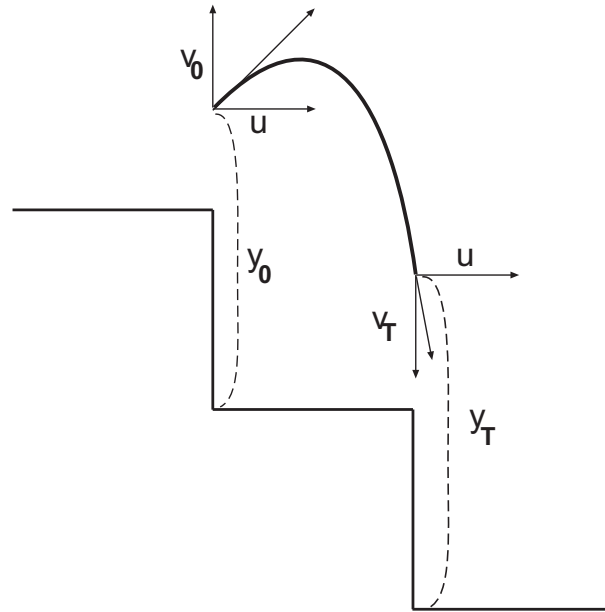


Figura 4.1: El Operador de Poincaré.

Ahora que tenemos determinado el dominio, podemos definir el operador de Poincaré como la función

$$P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

de forma que

$$P(y_0, v_0) = (y(T) + 1, y'(T^+)) ,$$

donde  $y(t)$  es la solución de (4.1)-(4.2) con condición inicial  $y(0) = y_0$  y  $y'(0^+) = v_0$ .

**Nota 4.1** *No tiene sentido considerar en el dominio velocidades negativas si  $y_0 = 1$  porque los puntos  $(1, v)$  con  $v < 0$  no pueden estar en la imagen del operador de Poincaré. En efecto, si  $P(y, v) = (1, v^*)$  entonces o bien se produce un impacto aislado en el borde del peldaño y la velocidad  $v^*$  es estrictamente positiva o bien existe deslizamiento en ese escalón y  $v^* = 0$ .*

El objetivo de esta sección será encontrar la expresión explícita de este operador. Para ello necesitamos saber el número de impactos que se producen en cada periodo, así como si éste es finito o infinito. A este fin vamos a escribir la secuencia de impactos y estudiaremos su convergencia.

Denotamos por  $t_i$  a cada término de esta sucesión y por  $v_i = y'(t_i^+)$ . En primer lugar calculamos ésta asumiendo que todos los impactos ocurren en el peldaño siguiente al de la condición inicial, esto es,  $ut \in [0, 1)$  y por tanto,  $E[ut] = 0$ . Luego,  $y(t_i) = 0$  para cualquier  $i \geq 1$ .

Posteriormente encontramos la condición que ha de verificarse para saber cuántos impactos ocurren en un periodo. Puesto que  $x(t) = ut$  y el operador de Poincaré se da en términos de la componente vertical de la solución, nos referiremos a ella como solución. Sea  $(y_0, v_0) \in \mathbb{H}$  una condición inicial cualquiera. La solución antes del primer impacto viene dada por

$$y(t) = -\frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0 .$$

Luego, el primer tiempo de impacto vendrá de resolver  $y(t_1) = 0$ . Es decir,

$$t_1 = v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2y_0}$$

y la velocidad vertical vendrá dada por

$$v_1 = y'(t_1^+) = -e(-t_1 + v_0) = e\sqrt{v_0^2 + 2y_0} .$$

Procedamos ahora al cálculo general, teniendo en cuenta que la solución entre dos impactos consecutivos viene dada por

$$y(t) = -\frac{(t - t_i)^2}{2} + v_i(t - t_i) \text{ para todo } t \in (t_i, t_{i+1}) .$$

Entonces, el  $(i + 1)$ -ésimo impacto será de la forma

$$t_{i+1} = t_i + 2v_i$$

y la velocidad

$$v_{i+1} = -e(v_i - (t_{i+1} - t_i)) = ev_i .$$

Luego la velocidad tras el  $k$ -ésimo impacto será

$$v_k = ev_{k-1} = e^2 v_{k-2} = \dots = e^{k-1} v_1 = e^k \sqrt{v_0^2 + 2y_0} . \quad (4.5)$$

El tiempo de impacto puede escribirse de la forma

$$t_k = t_1 + (t_2 - t_1) + \dots + (t_k - t_{k-1}) = t_1 + 2v_1 + \dots + 2v_{k-1}$$

y usando (4.5), se tiene que

$$t_k = t_1 + 2(1 + e + \dots + e^{k-2})v_1 = t_1 + 2\frac{1 - e^{k-1}}{1 - e} \left( e\sqrt{v_0^2 + 2y_0} \right).$$

En conclusión,

$$t_k = v_0 + \frac{1 + e - 2e^k}{1 - e} \sqrt{v_0^2 + 2y_0}. \quad (4.6)$$

El primer resultado que obtenemos del cálculo anterior es una condición equivalente a la existencia de soluciones deslizantes.

**Proposición 4.2** *Sea  $(y_0, v_0) \in \mathcal{H}$ . La solución desliza en el escalón siguiente si y sólo si*

$$y_0 \leq -\frac{2e}{(1+e)^2}v_0^2 - \frac{(1-e)^2}{(1+e)^2u}v_0 + \frac{(1-e)^2}{2u^2(1+e)^2}. \quad (4.7)$$

**Demostración.**

La demostración es análoga a la prueba del Lema 2.9, hecha para el sistema discreto.

Asumamos en primer lugar que la solución es deslizante. Entonces, al tomar límite en la expresión de  $t_k$  dada en (4.6) debe verificarse que el límite de los tiempos de impactos,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = t_d = v_0 + \frac{1+e}{1-e} \sqrt{v_0^2 + 2y_0} \quad (4.8)$$

es menor que el periodo  $T = \frac{1}{u}$ . Luego,

$$v_0 + \frac{1+e}{1-e} \sqrt{v_0^2 + 2y_0} \leq \frac{1}{u}. \quad (4.9)$$

En particular, como el segundo sumando de la parte izquierda de la desigualdad es positivo,  $\frac{1}{u} - v_0 \geq 0$ . Por tanto,

$$\left( \frac{1+e}{1-e} \sqrt{v_0^2 + 2y_0} \right)^2 \leq \left( \frac{1}{u} - v_0 \right)^2, \quad (4.10)$$

lo que es equivalente a

$$2y_0 \leq \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \left(\frac{1}{u} - v_0^2\right)^2 - v_0^2.$$

Desarrollando el miembro de la derecha y agrupando posteriormente, se llega a la desigualdad (4.7).

Probemos ahora el contrario. Para ello veamos que podemos pasar de la condición de deslizamiento (4.7) a la desigualdad (4.10). En efecto, extrayendo raíz cuadrada en (4.10) se obtiene o bien (4.9) o bien

$$\frac{1+e}{1-e} \sqrt{v_0^2 + 2y_0} \leq v_0 - \frac{1}{u}.$$

Esto último no es posible puesto que  $\frac{1+e}{1-e} \geq 1$  y por tanto, el miembro de la izquierda es mayor que  $v_0$ . ■

Como consecuencia de la Proposición anterior es posible dar una región del plano de parámetros  $(e, u)$  donde no existen soluciones deslizantes.

**Corolario 4.3** *Si*

$$u \geq \frac{1-e}{2\sqrt{2e}} \tag{4.11}$$

*no existen soluciones deslizantes.*

**Demostración.**

La curva que delimita la región de deslizamiento (4.7) es una parábola invertida  $y_0 = f(v_0)$ . Veremos que si se da la desigualdad estricta (4.11), su vértice está por debajo de la recta  $y_0 = 1$  y por tanto, no es posible el deslizamiento. El vértice  $(v_0^*, f(v_0^*))$  se calcula fácilmente,

$$v_0^* = -\frac{(1-e)^2}{4eu}$$

y

$$f(v_0^*) = \frac{(1-e)^2}{8eu^2}.$$

Ahora bien, si se da la desigualdad (4.11),

$$f(v_0^*) < -\frac{(1-e)^2 (2\sqrt{2e})^2}{8e (1-e)^2} = 1.$$



Por último, si se da la igualdad en (4.11) entonces  $f(v_0^*) = 1$ . En este caso, no es posible que la solución deslice puesto que si la altura es igual a uno, la velocidad debería ser no negativa como se dijo en la Nota 4.1. ■

Ahora que ya tenemos establecida la condición para la que una solución desliza, vamos a determinar el número de impactos en función de la condición inicial cuando no se verifica (4.7).

**Proposición 4.4** *Asumamos que no se verifica (4.7). Dada una condición inicial  $(y_0, v_0)$ , el número de impactos  $k$  en el siguiente peldaño viene determinado por*

$$k = E \left[ \log_e \left( \frac{(1-e)(v_0 - \frac{1}{u})}{2\sqrt{v_0^2 + 2y_0}} + \frac{1+e}{2} \right) \right]. \quad (4.12)$$

**Demostración.**

Para que haya  $k$  impactos ha de verificarse que

$$t_k \leq T < t_{k+1}.$$

Ahora bien, usando la expresión para los tiempos de impactos (4.6) y que  $T = \frac{1}{u}$ , la condición anterior es equivalente a

$$v_0 + \frac{1+e-2e^k}{1-e} \sqrt{v_0^2 + 2y_0} \leq \frac{1}{u} < v_0 + \frac{1+e-2e^{k+1}}{1-e} \sqrt{v_0^2 + 2y_0}.$$

Esto es,

$$-e^k \leq \left( \frac{1}{u} - v_0 \right) \frac{1-e}{2\sqrt{v_0^2 + 2y_0}} - \frac{1+e}{2} < -e^{k+1}$$

o, multiplicando por  $-1$ ,

$$e^{k+1} < \left( v_0 - \frac{1}{u} \right) \frac{1-e}{2\sqrt{v_0^2 + 2y_0}} + \frac{1+e}{2} < e^k.$$

Tomando logaritmo de base  $e < 1$  en la expresión anterior se obtiene que

$$k \leq \log_e \left( \frac{(1-e)(v_0 - \frac{1}{u})}{2\sqrt{v_0^2 + 2y_0}} + \frac{1+e}{2} \right) < k+1.$$

Por tanto, el número de impactos es igual a la parte entera del logaritmo anterior. ■

Ahora ya estamos en condiciones de dar la expresión explícita del operador de Poincaré.

**Proposición 4.5** *El operador de Poincaré viene dado por*

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \rightarrow & \mathbb{H} \\ (y_0, v_0) & \rightarrow & (y_T, v_T) ; \end{array}$$

donde

- $(y_T, v_T) = (1, 0)$  si se verifica (4.7), es decir, si hay deslizamiento.
- $(y_T, v_T) = (-\frac{T^2}{2} + v_0 T + y_0 + 1, -T + v_0)$  si no hay impactos.
- $(y_T, v_T) = \left( -\frac{(T - t_k)^2}{2} + v_k(T - t_k) + 1, -(T - t_k) + v_k \right)$  si hay  $k$  impactos. El número de impactos viene dado por (4.12), el último tiempo de impacto,  $t_k$ , viene dado por (4.6) y la velocidad tras dicho impacto,  $v_k$ , por (4.5).

## 4.2 Soluciones periódicas

En esta sección daremos una descripción de las soluciones periódicas. Como ya se dijo en el capítulo de modelización existen dos tipos diferentes de soluciones, las de impactos aislados y las deslizantes. El estudio de las periódicas de primer tipo es muy similar al hecho en el caso de la escalera inclinada, sin embargo las periódicas deslizantes son características de este modelo.

En este sentido, la sección estará estructurada como sigue. En una primera parte haremos una adaptación de la Sección 3.3 del capítulo anterior al caso de la escalera horizontal. En la segunda, estudiamos algunos ejemplos de soluciones deslizantes:  $(n, 0^\infty), (1, 1, 0^\infty), \dots$  y por último, dedicamos una sección al fractal que aparece cuando representamos gráficamente todas las soluciones deslizantes.

### 4.2.1 Soluciones periódicas de impactos aislados

Sea  $\sigma = (n_0, \dots, n_{k-1})$  una palabra cualquiera asociada a una solución  $k$ -periódica. Las soluciones periódicas de impactos aislados del sistema original (4.1)-(4.2) coinciden con las del sistema discreto (4.3).

**Proposición 4.6** *Si existe solución de (4.3) entonces*

$$u_\sigma(e) = \frac{e \sum_{j=0}^{k-1} n_j}{(1+e) \sum_{j=0}^{k-1} v_j} ; \quad (4.13)$$

donde

$$v_j = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} (e^{2(k-i)} n_{i+j})}}{\sqrt{1-e^{2k}}} \quad \forall 0 \leq j \leq k-1. \quad (4.14)$$

**Demostración.**

La demostración es análoga a la de la existencia de soluciones periódicas para la escalera inclinada. De hecho, se verifican las ecuaciones (3.7) y (3.5) para la velocidad vertical. Esto es,

$$v_0 = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} (e^{2(k-i)} n_i)}}{\sqrt{1-e^{2k}}} \quad (4.15)$$

y

$$v_j = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} (e^{2(k-i)} n_{i+j})}}{\sqrt{1-e^{2k}}} \quad \forall 1 \leq j \leq k-1. \quad (4.16)$$

En este caso  $u$  es un parámetro y para obtener la expresión (4.13) basta imponer  $z_k = z_0$  en la expresión análoga a (3.3) para  $\kappa = 0$ . Es decir,

$$z_k = z_0 + \sum_{j=0}^{k-1} n_j - u \sum_{j=0}^{k-1} \left( v_j + \frac{v_{j+1}}{e} \right)$$

y observar que  $\sum_{j=0}^{k-1} v_{j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} v_j$  por la periodicidad. ■

Al igual que en la escalera inclinada, la condición de existencia anterior no es suficiente. Debemos imponer además las correspondientes condiciones de compatibilidad. En ese sentido se enuncia el teorema siguiente, análogo al Teorema 3.8.

**Teorema 4.7** *Sea  $m = \min_i z_i$  y  $M = \max_{\{i,j\}} z_{i+1}(n_i - j)$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ . Si  $M - m < 0$  existe solución periódica de tipo  $(n_0, \dots, n_{k-1})$ . Más aún,  $(v_0, z_0^*)$  será una condición inicial válida si  $z_0^* \in [z_0 - m, z_0 - M)$*

Además, es válido el Lema 3.9 para  $\kappa = 0$ , es decir, para

$$f(m) = m - u(v_i + \sqrt{v_i^2 + 2m})$$

y como consecuencia el máximo  $M$  se calcula evaluando  $z_i(0)$  y  $z_i(n_i - 1)$  para todo  $n_i \geq 1$ .

**Nota 4.8** *No existe solución periódica de impactos aislados de (4.3) para la mayoría de los valores de los parámetros. En efecto, la existencia de una solución periódica de palabra  $\sigma$  se reduce a una curva  $u = u(e)$  por el Teorema 4.13.*

Por último, decir que todas las soluciones periódicas estrictas de (4.3) son Lyapunov estables. De hecho, verifican la siguiente condición de estabilidad cuya prueba es análoga a la del Teorema 3.21 dada para el caso de la escalera inclinada.

**Corolario 4.9** *Toda solución periódica estricta de (4.3) es Lyapunov estable. Además, para todo punto de ésta existe un entorno de condiciones iniciales cuyas órbitas correspondientes convergen exponencialmente a una trasladada de la periódica.*

A continuación, damos la existencia de algunos tipos de soluciones periódicas de (4.3). Además, se demuestra que no todas las palabras son posibles con un ejemplo.

### Soluciones periódicas a un salto

Este tipo de soluciones periódicas son aquellas que repiten siempre el mismo número de salto, es decir, son uno periódicas para el sistema discreto (4.3).

**Proposición 4.10** *Existen órbitas periódicas de tipo  $(n)$  si y sólo si*

$$u_{(n)}(e) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n(1-e)}{1+e}}$$

para todo  $e \in (0, 1)$ .

**Nota 4.11** *Las curvas de existencia dadas en el teorema anterior (para  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) están representadas en la Figura 4.4 de la página 91 mediante línea continua.*

**Demostración**

Basta particularizar la expresión (4.13) para  $\sigma = (n)$  y calcular  $v_0$  mediante (4.15). Para ver que la condición de compatibilidad es suficiente se procede de igual manera que en la demostración de la Proposición 4.10. ■

**Soluciones periódicas a dos saltos**

A continuación, damos la existencia de soluciones dos periódicas para el sistema discreto (4.3), particularizando para  $(0, n)$  y  $(n, n + 1)$ .

Como consecuencia de la expresión general de  $u_\sigma(e)$  dada en (4.13), se tiene que existe solución periódica de tipo  $(n_0, n_1)$  si

$$u_{(n_0, n_1)}(e) = \sqrt{\frac{1 - e^4}{2}} \frac{n_0 + n_1}{(1 + e)(\sqrt{e^2 n_0 + n_1} + \sqrt{n_0 + e^2 n_1})}. \quad (4.17)$$

Al igual que en la demostración de la Proposición 3.15, es posible probar que en este caso las condiciones de compatibilidad se reducen a

$$\begin{aligned} (C1) \quad & z_0(n_1 - 1) < z_1 \quad , \\ (C2) \quad & z_1(0) < z_1 \quad ; \end{aligned}$$

en el caso de  $n_0 \neq 0$  y a una, (C1), en otro caso.

Estudiamos en primer lugar el caso en que el primer número de salto es nulo.

**Proposición 4.12** *Existe solución de tipo  $(0, n)$  para todo  $e \in (0, e_n^*)$ , donde  $e_1^* = 1$  y la sucesión  $e_n^*$  viene dada por la única solución de la ecuación implícita*

$$\frac{(1 + e)^3}{4e} = n ;$$

para  $n \geq 2$ .

**Demostración.**

Veamos la condición (C1) si la palabra es  $(0, n)$ . Por definición, (C1) es equivalente a

$$n - 1 < 2u(u + v_1). \quad (4.18)$$

Ahora bien,

$$u = u_{(0, n)} = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\sqrt{1 - e^4}}{(1 + e)^2},$$

$$v_1 = \frac{e^2 \sqrt{2n}}{\sqrt{1-e^4}}.$$

Luego la desigualdad (4.18) se escribe como

$$n - 1 < \frac{1 - e + 3e^2 + e^3}{(1 + e)^3} n$$

y en consecuencia, si  $n = 1$  se verifica siempre. En otro caso, la sucesión  $e_n^*$  viene dada de forma implícita como la solución (única en  $(0, 1)$ ) de

$$n = \frac{(1 + e)^3}{4e}.$$

■

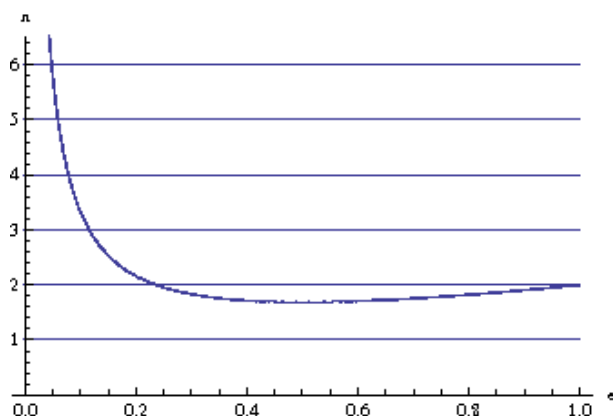


Figura 4.2: Los cortes de las líneas horizontales con la curva dan la sucesión  $e_n^*$ . En particular, se ve que la curva es siempre mayor que uno, luego  $e_1^* = 1$

**Nota 4.13** Las curvas de existencia de las soluciones periódicas  $(0, n)$  están representadas en la Figura 4.4 de la página 91 para  $n = 1, 2, 3, 4$  en trazo discontinuo corto.

Supongamos ahora que  $n_0 \neq 0$ ,  $n_1 > n_0$  y estudiemos las condiciones de compatibilidad. Escribimos en primer lugar los valores de las velocidades  $v_0$  y  $v_1$ .

$$v_0 = \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{1-e^4}}a, \quad v_1 = \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{1-e^4}}b;$$

donde  $a = a(e, n) = \sqrt{e^2 n_0 + n_1}$  y  $b = b(e, n) = \sqrt{n_0 + e^2 n_1}$ . Ahora bien, (C1) es equivalente a

$$z_1 + n_1 - 1 - u \left( v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2(n_1 - 1)} \right) < z_1 ;$$

y usando las expresiones anteriores y la correspondiente para  $u$  (4.17), a

$$F(e, n_0, n_1) = -(1 + e)(a + b)(n_1 - 1) + (n_0 + n_1)(eb + c) > 0 ; \quad (4.19)$$

donde  $c = \sqrt{e^2 n_0 + n_1 - (1 - e^4)}$ . Por otra parte, (C2) es equivalente a

$$G(e, n_0, n_1) = (1 + e)(a + b)n_0 + (ea - b)(n_0 + n_1) > 0 . \quad (4.20)$$

Ahora bien, (4.20) no se verifica para  $e = 0$  puesto que en ese caso,  $a = \sqrt{n_0}$ ,  $b = \sqrt{n_1}$  y por tanto, (4.20) se escribe como

$$\sqrt{n_1}n_0 - \sqrt{n_0}n_1 > 0 .$$

Pero eso no puede verificarse, puesto que si pasamos el segundo sumando a la derecha y elevamos al cuadrado, la desigualdad anterior sería equivalente a que  $n_0$  sea mayor que  $n_1$  y esto no es posible. Es decir, por continuidad de la función que define la condición (4.20), no existe solución dos periódica del sistema (4.3) en un entorno de  $e = 0$  para ninguna palabra con primer número de salto no nulo.

Por otra parte, si  $e = 1$  se tiene que  $a = b = c$  y (4.20) se verifica siempre ( $4an_0 > 0$ ). La otra condición, (4.19) es equivalente a

$$n_1 - n_0 - 2 < 0 .$$

Esto es, existe solución periódica de tipo  $(n_0, n_1)$  en un entorno de  $e = 1$  si y sólo si  $n_1 = n_0 + 1$ .

Por último, hay que señalar que una representación gráfica de las funciones  $F(e, n_0, n_1)$  y  $G(e, n_0, n_1)$  muestra que las órbitas periódicas de tipo  $(n_0, n_1)$  con  $n_0 \neq 0$  y  $n_1 > n_0 + 1$  no existen para ningún valor del parámetro  $e$  en el intervalo de consideración  $(0, 1)$ . Sin embargo, no tenemos demostración analítica de este hecho.

La siguiente figura (Figura 4.3) muestra que no existe la solución de tipo  $(1, 3)$ . En este caso, representamos gráficamente  $F(e, 1, 3)$  (4.19) mediante trazo continuo y  $G(e, 1, 3)$  (4.20) con trazo discontinuo. Se observa que ambas

funciones no son positivas simultáneamente y por tanto, las condiciones de compatibilidad no se verifican para ningún valor del parámetro  $e$ .

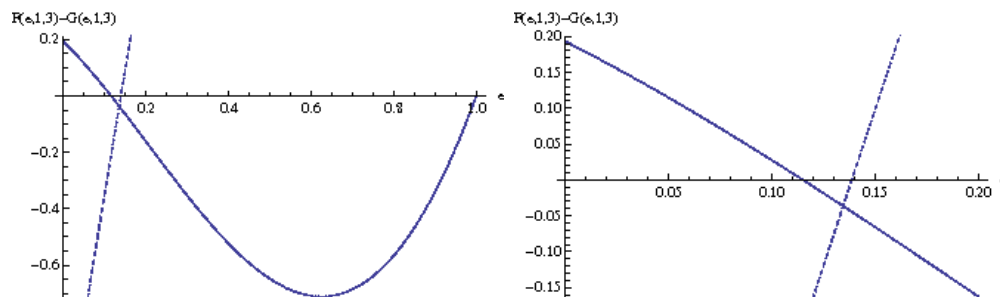


Figura 4.3: La órbita periódica de tipo  $(1, 3)$  no existe.

**Nota 4.14** *Se deduce de lo anterior que no todas las órbitas periódicas son posibles.*

Resumimos el resultado para órbitas 2 periódicas con número de salto no nulo en la siguiente proposición.

**Proposición 4.15** *Sea  $n_0 \neq 0$  y  $n_1 > n_0$ . Existe solución periódica de tipo  $(n_0, n_1)$  si  $u(e)$  verifica la ecuación (4.17) y  $n_1 = n_0 + 1$ ; siendo el rango de validez al menos un intervalo abierto  $(\tilde{e}_n, 1)$ .*

**Nota 4.16** *Las curvas de existencia de las órbitas de tipo  $(n, n + 1)$  están representadas en la siguiente figura mediante trazo discontinuo largo para  $n = 1, 2, 3$ .*



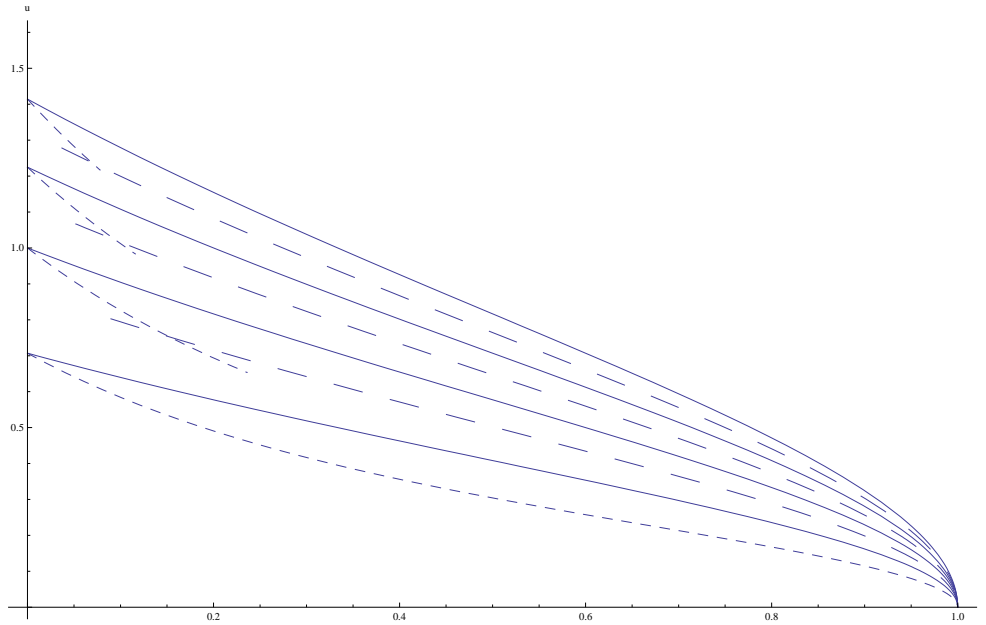


Figura 4.4: Curvas de existencia de las órbitas periódicas no deslizantes. Soluciones de tipo  $(n)$  en trazo continuo,  $(0, n)$  en discontinuo corto y  $(n, n + 1)$  en discontinuo largo ( $n = 1, \dots, 4$ ).

### Soluciones periódicas de tipo $(1, 0^k)$

El último ejemplo de soluciones periódicas no deslizantes que damos corresponde a soluciones  $k + 1$ -periódicas, donde la partícula salta 1 escalón y posteriormente impacta  $k$  veces en el mismo peldaño para después repetir la configuración. Es decir, soluciones cuya palabra asociada es  $(1, 0^k)$  y cuyas curvas de existencia están representadas en la Figura 4.5 para  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ .

**Proposición 4.17** *Existen soluciones periódicas de tipo  $(1, 0^k)$  si y sólo si*

$$u(e) = \frac{(1 - e)\sqrt{1 + e^{k+1}}}{\sqrt{2}(1 + e)\sqrt{1 - e^{k+1}}}$$

para todo  $e \in (0, 1)$ .

#### **Demostración.**

La demostración de la curva de existencia es similar a las anteriores. La condición de compatibilidad se verifica puesto que en este caso,

$$m = \min\{z_0, z_1, \dots, z_k\} = z_0$$

ya que por ser  $n_j = 0$  para  $j = 1, \dots, k$  se tiene que

$$z_0 = z_{k+1} = z_k + f(0) < z_k < z_{k-1} < \dots < z_1 .$$

Por otra parte,  $M = z_1(0)$  y por tanto,

$$M < m \Leftrightarrow z_1(0) < z_0 \Leftrightarrow z_0 + f(0) < z_0 ;$$

lo que se verifica siempre. ■

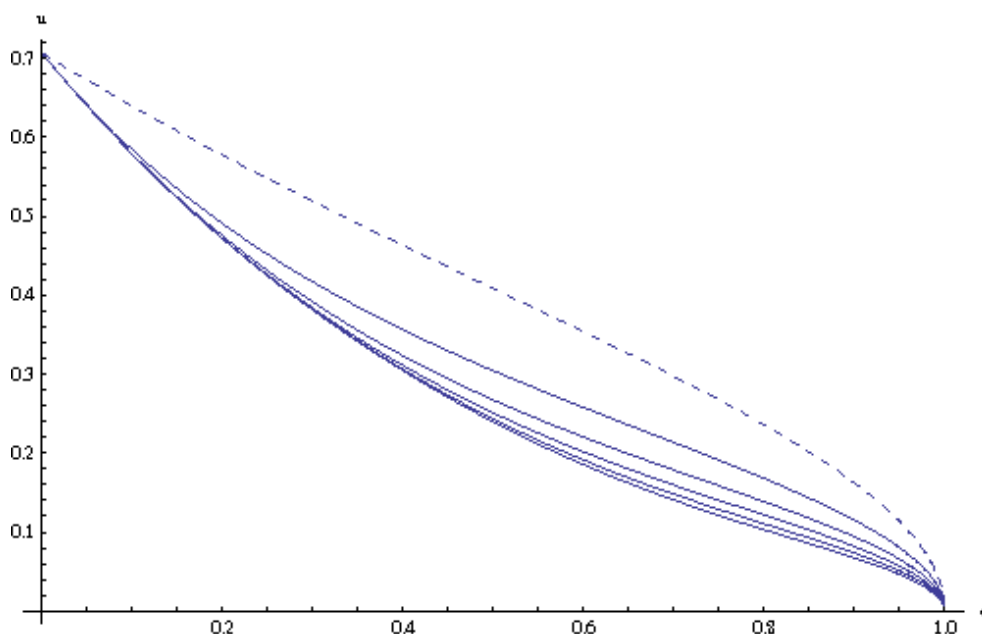


Figura 4.5: Soluciones periódicas de tipo  $(1, 0^k)$  para  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $(1)$  en trazo discontinuo.

## 4.2.2 Soluciones periódicas deslizantes

Tal como se dijo en el Capítulo 2.1, cuando  $\kappa = 0$  aparecen unas soluciones que acumulan impactos y posteriormente deslizan por efecto de la velocidad horizontal. Además, este tipo de soluciones del sistema (4.1)-(4.2) no pueden ser descritas únicamente con la discretización (4.3) sino que hay que auxiliarse de la lógica para imponer que  $z = 0$  y  $v = 0$  tras la acumulación.

En esta sección daremos la descripción de algunas soluciones deslizantes que son periódicas. Más concretamente, las de tipo  $(n, 0^\infty)$ .

**Proposición 4.18** *Dado  $e \in (0, 1)$ , existen soluciones periódicas de tipo  $(n, 0^\infty)$  si y sólo si*

$$\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} < u \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \frac{1-e}{1+e}$$

para cada  $e \in (0, 1)$ .

**Demostración.**

Puesto que tras el deslizamiento  $z = 0$  y  $v = 0$ , para que la solución sea periódica la condición inicial debe ser  $z_0 = 0$  y  $v_0 = 0$ . A partir de esta condición inicial, calculamos la siguiente iteración usando el sistema discreto (4.3) con número de salto  $n$ . Esto es,

$$\begin{aligned} v_1 &= e\sqrt{2n} \\ z_1 &= n - u\sqrt{2n} \end{aligned} .$$

Ahora imponemos la condición de acumulación de impactos (2.14) para  $\kappa = 0$  dada en el Lema 2.9,

$$z_1 \geq \frac{2uv_1}{1-e} .$$

Usamos las expresiones anteriores para  $v_1$  y  $z_1$  para obtener la desigualdad

$$u \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \frac{1-e}{1+e} .$$

Ahora bien, al igual que en el caso de las soluciones periódicas de impactos aislados, la condición anterior es sólo necesaria. La condición suficiente es  $z_1(n-1) < 0$ , es decir,

$$n-1 - \sqrt{2(n-1)u} < 0 .$$

Esa expresión es equivalente a la desigualdad

$$\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} < u .$$

■

**Nota 4.19** *Obsérvese que la región delimitada por la proposición anterior es un conjunto de lenguas cuyo tamaño decrece cuando aumenta el número de salto  $n$  (ver Figura 4.6 zona gris oscura).*

**Nota 4.20** *Se observa que la curva de no existencia de soluciones deslizantes es óptima en el sentido de que ajusta perfectamente a los picos de las lenguas de las soluciones  $(n, 0^\infty)$ .*

Con argumentos similares se puede estudiar la existencia de otro tipo de soluciones periódicas. En particular, las regiones correspondientes a las soluciones  $(1, 1, 0^\infty)$  y  $(1, 2, 0^\infty)$ . Sin embargo, no todas las combinaciones son aceptables, por ejemplo para la palabra  $(2, 1, 0^\infty)$  la correspondiente órbita periódica no existe.

**Proposición 4.21** *Existe solución periódica de tipo  $(1, 1, 0^\infty)$  si y sólo si se verifican simultáneamente las siguientes desigualdades*

- (C1)  $u \leq \frac{\sqrt{2}(1-e)}{(1+e)(1-e+\sqrt{1+e^2})}$ ,
- (C2)  $u > \frac{1}{\sqrt{2}(1+2e)}$ .

*Por otro lado, existe solución periódica de tipo  $(1, 2, 0^\infty)$  si y sólo si*

- (D1)  $u \leq \frac{3(1-e)}{\sqrt{2}(1+e)(1-e+\sqrt{2+e^2})}$ ,
- (D2)  $u < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,
- (D3)  $u > \frac{\sqrt{2}}{1+e+\sqrt{1+e^2}}$ .

**Demostración.**

Las condiciones (C1) y (D1) se obtienen imponiendo las correspondientes condiciones de deslizamiento. Ahora bien, hay que comprobar en cada caso las condiciones de compatibilidad. En el caso de las soluciones  $(1, 1, 0^\infty)$ , habría que ver que tanto  $z_1(0)$  como  $z_2(0)$  son estrictamente negativos y comprobar que  $z_1$  y  $z_2$  son positivos. Puesto que la solución deslizante es periódica,  $z_0 = 0$  y por tanto,  $z_1(0) < 0$  se verifica trivialmente. Además, (C1) implica directamente que  $z_1 = 1 - \sqrt{2}u > 0$  y puesto que la solución desliza en ese escalón,  $z_2 > 0$ . Luego, las condiciones de compatibilidad se reducen a una,  $z_2(0) < 0$  ó equivalentemente, (C2).

En cuanto a la solución  $(1, 2, 0^\infty)$  con un razonamiento análogo se demuestra que las condiciones de compatibilidad se reducen a  $z_1(0) < 0$  y  $z_2(1) < 0$  ó equivalentemente a (D2) y (D3). ■

**Nota 4.22** Las regiones de existencia de las soluciones periódicas  $(1, 1, 0^\infty)$  y  $(1, 2, 0^\infty)$  se muestran en la Figura 4.6 en blanco.

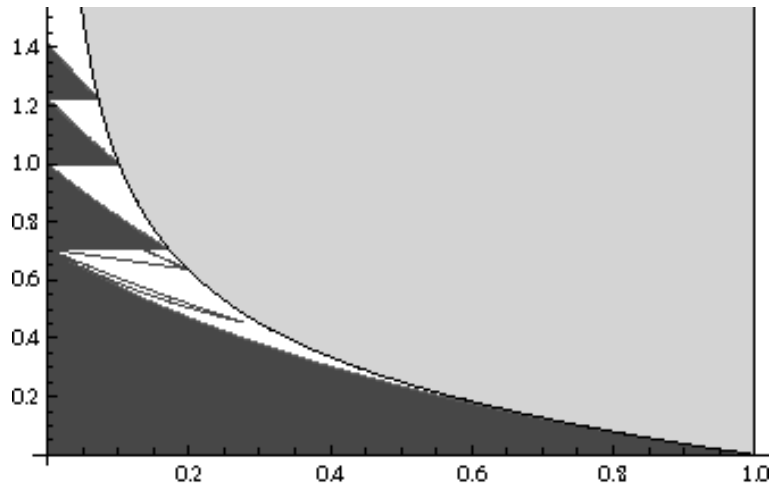


Figura 4.6: Algunas soluciones deslizantes:  $(n, 0^\infty)$  en negro,  $(1, 1, 0^\infty)$  y  $(1, 2, 0^\infty)$  en blanco. Zona de no deslizamiento en gris.

**Nota 4.23** La solución de tipo  $(2, 1, 0^\infty)$  no existe.

En efecto, se comprueba que la condición de deslizamiento (4.7)

$$u \leq \frac{3(1-e)}{(1+e)(2-2e+\sqrt{2}\sqrt{1+2e^2})}$$

es incompatible con la condición de compatibilidad,  $z_2(0) < 0$ , esto es,

$$u > \frac{1}{1+2e}.$$

### 4.2.3 Una estructura fractal. Bifurcaciones

El objetivo de esta sección es presentar el fractal que aparece en este modelo cuando representamos las regiones de existencia de soluciones deslizantes en el plano de parámetros  $(e, u)$ . Además, realizaremos un análisis de las

bifurcaciones que aparecen. Para ello, empleamos el operador de Poincaré construido en la Proposición 4.5. Todo ello se realizará mediante el siguiente algoritmo implementado en ordenador.

Para el estudio del fractal, consideramos una malla fina de  $500 \times 350$  puntos en el plano de parámetros  $(e, u)$ . Posteriormente, para cada punto de la región de parámetros construimos la solución comenzando con condición inicial  $y_0 = 1$  y  $v_0 = 0$ . Para ello, iteramos el operador de Poincaré definido en la Proposición 4.5, comprobando en cada paso la condición de deslizamiento (4.7) que nos sirve como criterio de parada. Finalmente, se colorea cada punto del espacio de parámetros donde la correspondiente solución desliza, dependiendo de la longitud de la palabra.

El resultado de este esquema numérico se presenta en la Figura 4.7. Obsérvese que las zonas en negro coinciden con las lenguas de soluciones  $(n, 0^\infty)$  y corresponden a palabras con un único número de salto no nulo representadas en la Figura 4.6.

En este gráfico y en los siguientes, el color indica la longitud de la palabra asociada a la solución deslizante, considerando ésta como la cantidad de números de salto no nulos. Si ampliamos dos lenguas consecutivas de la figura anterior (Figura 4.8 a), b) y c)) podemos observar la propiedad de *autosemejanza*, característica de los fractales. Así, observamos que la complejidad no disminuye si hacemos la escala más y más pequeña sino que en toda amplificación se reproduce la estructura global. Ponemos de relieve este hecho haciendo zoom en otras regiones (Figura 4.8 d) y e) ).

La dimensión fractal del borde ha sido calculada numéricamente mediante un algoritmo de *recuento de cajas*, representado en las Figuras 4.9 y 4.10. Para ello, lo primero ha sido representar el borde del fractal. Esto ha sido realizado comprobando la existencia de dos puntos consecutivos tales que uno de ellos está en el fractal y el otro no.

Hay que hacer notar que el conjunto en sí tiene dimensión dos pues contiene abiertos del plano. Sin embargo, lo que se evidencia es que el borde tiene dimensión fractal entre uno y dos, revelando su complejidad. Como consecuencia la estructura del conjunto en general es también compleja.

Antes de proceder a mostrar la computación de la dimensión fractal, explicaremos brevemente en qué consiste el algoritmo de recuento de cajas. La dimensión euclídea de un objeto relaciona la unidad de medida utilizada

con el valor geométrico medido. Así,

$$N(L) = \left(\frac{1}{L}\right)^D$$

donde  $\frac{1}{L}$  es el número de unidades en uno de los lados y  $D$  corresponde a 1 para una recta, 2 para una superficie y 3 para un volumen. Generalizando esta noción a números  $D$  fraccionarios se obtiene la *dimensión fractal*.

Para medir esta dimensión fractal, se utilizan recubrimientos o cajas que cubran el conjunto y se mide el número de cajas necesarios en función de la escala de las cajas. Este cálculo es válido sólo en el rango en que esta relación es potencial y está bien definida mediante la expresión,

$$D = \frac{\log(N(L))}{\log(L)} ;$$

que es lo que se conoce como escala logarítmica. O equivalentemente, la dada por Mandelbrot en [66]

$$D = -\frac{\log(N(L))}{\log(L)} .$$

El problema de la implementación numérica de esta metodología es el cálculo de  $N(L)$  y para ello, se utilizan distintos métodos. Uno de ellos es el *recuento de cajas (box-counting)*, que es el que hemos usado nosotros y que se relaciona con el concepto de autosimilaridad. Para ello, se utilizan cuadrados de distintos lados,  $\delta$  y se cuentan cuántos de ellos intersecan al objeto de estudio computándolo en  $N(\delta)$ . Se repite este proceso para distintos  $\delta_i$ , nosotros lo hacemos para  $\delta_i = 2^i$   $i = 0, 1, \dots, 8$  ; siendo  $2^8 = 256$  el número de píxeles. La existencia de una dimensión fractal única se demuestra con una buena correlación de la recta de regresión de los puntos  $\log(N(\delta_i))$  respecto de  $\log(\delta_i)$ . En ese caso, la dimensión es menos la pendiente de dicha recta.

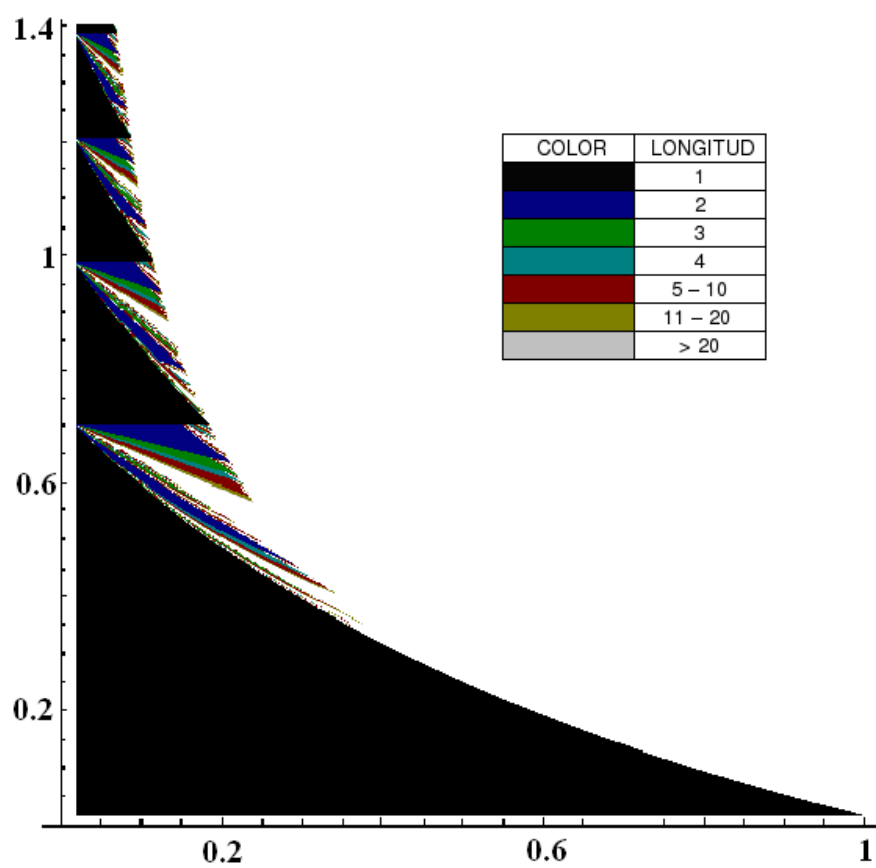


Figura 4.7: Fractal en el plano de parámetros.



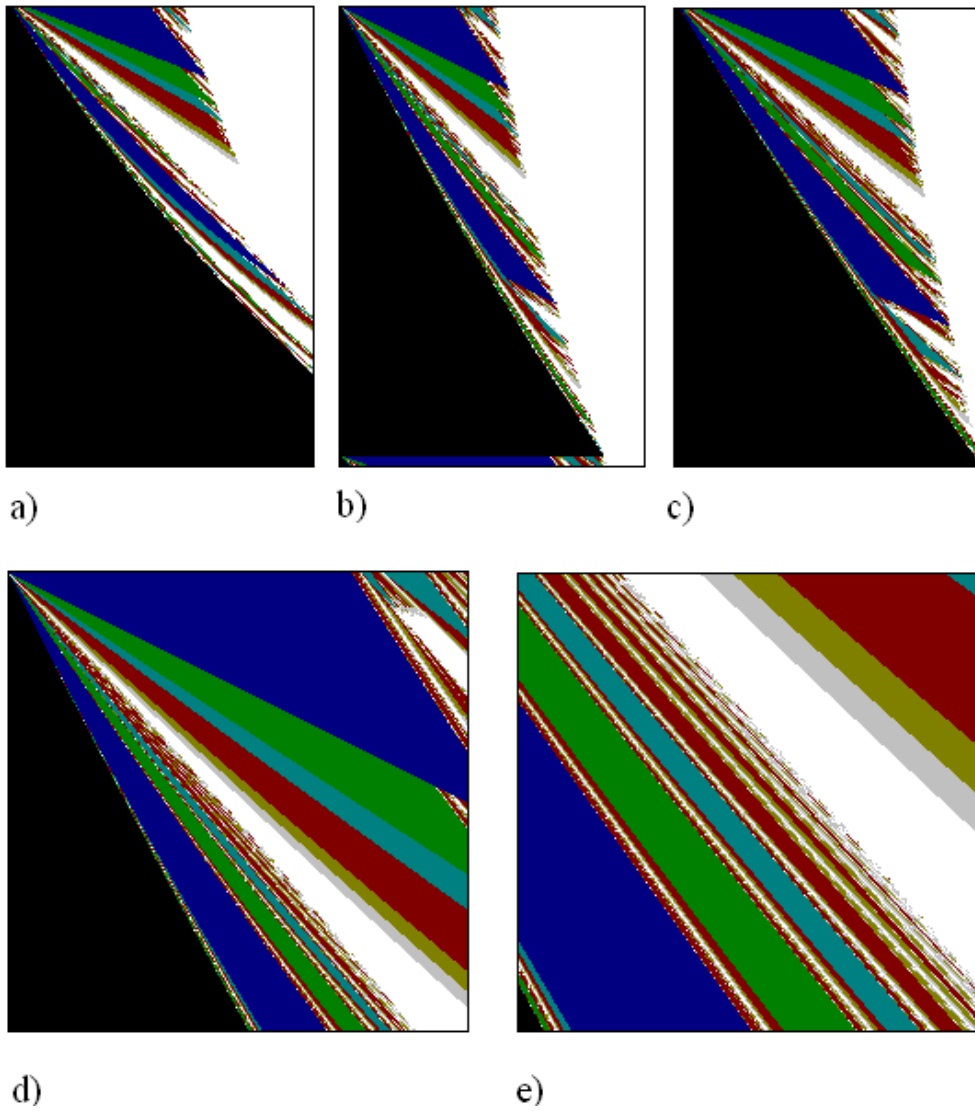


Figura 4.8: Amplificación en a)  $[0, 0.3] \times [0.3, 0.7]$ , b)  $[0, 0.2] \times [0.7, 1]$ , c)  $[0, 0.1] \times [1, 1.22]$ , d)  $[0, 0.1] \times [0.9, 1]$  y e)  $[0.04, 0.065] \times [0.92, 0.945]$ .

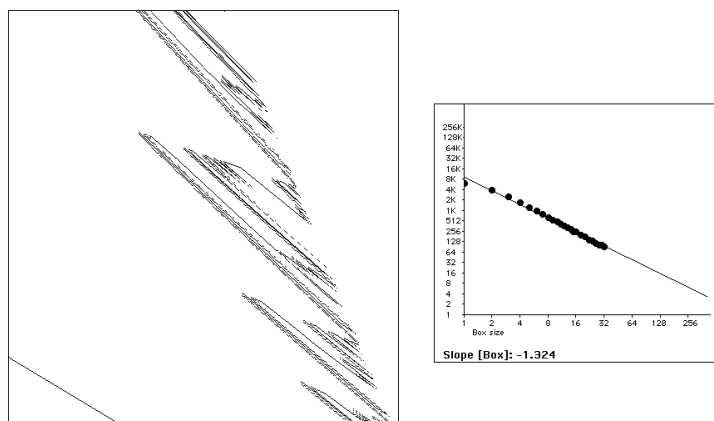


Figura 4.9: Borde de la región  $[0, 0.333] \times [0.4, 0.7333]$  y el cómputo de recuento de cajas asociado.

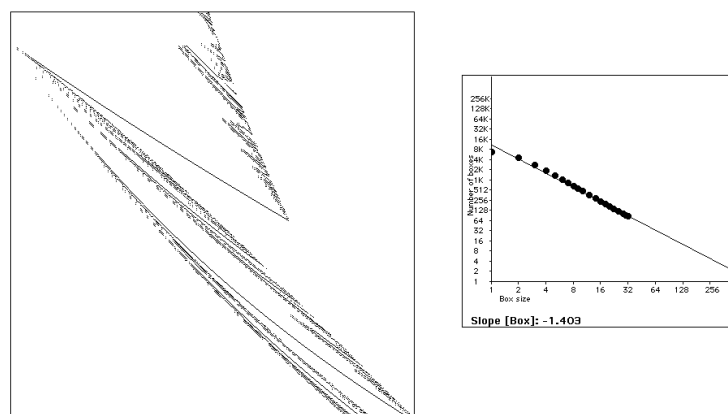


Figura 4.10: Borde de la región  $[0.155, 0.2138] \times [0.6, 0.658]$  y el cómputo de recuento de cajas asociado.

A continuación, pasamos al estudio de las bifurcaciones. En esta línea, analizamos el comportamiento general de la primera componente del operador, es decir,  $y$ . Para ello, fijamos uno de los parámetros  $e$ ,  $u$  y movemos el otro en un determinado rango. La estrategia para este estudio será calcular un número elevado de iteraciones, saltándonos las primeras para que el diagrama sea independiente de la condición inicial. Esta es la forma usual

de proceder en el análisis de bifurcaciones de sistemas unidimensionales. Un ejemplo clásico de esta forma de proceder puede verse en el estudio de la bifurcación de duplicación de periodo en la logística (ver por ejemplo [44]).

Comencemos fijando  $e$  y moviendo  $u$  en una partición de un intervalo adecuado. Así, para cada valor de  $u$  calculamos la solución con condición inicial  $y_0 = 1$  y  $v_0 = 0$  usando el operador de Poincaré y representamos la primera componente para las iteradas desde 2000 a 22000. Se han hecho computaciones similares comprobando otras posibilidades como fijar  $u$  y mover  $e$ , cambiar la condición inicial o dibujar la segunda componente. En todos los casos se obtienen resultados similares.

Se observa que si el parámetro de restitución es pequeño el diagrama de bifurcación es regular (ver Figura 4.11). Cada vez que el parámetro  $u$  cruza una nueva lengua de solución  $(n, 0^\infty)$ , aparecen nuevas ramas de forma regular. Esto corresponde a bifurcaciones de rozadura, *grazing bifurcations*, esto es, valores de  $u$  para los que la partícula pasa rozando el borde del peldaño. Este tipo de bifurcaciones son conocidas como bifurcaciones inducidas por la discontinuidad y son representativas de sistemas dinámicos no suaves como en el caso de convertidores de corriente o circuitos eléctricos (ver por ejemplo [7] y sus referencias).

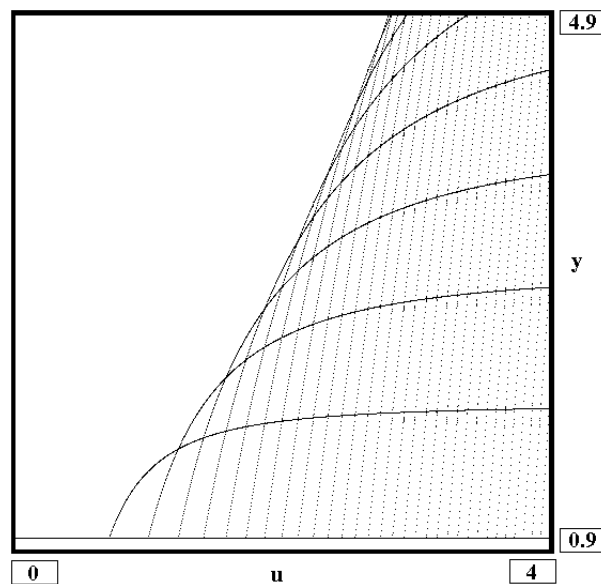


Figura 4.11: Diagrama de bifurcación para  $e = 0.01$  y  $u \in (0, 4)$ .

Ahora bien, si el parámetro de restitución es mayor, por ejemplo  $e = 0.1$ , se produce un diagrama de bifurcación autosimilar cuando el parámetro  $u$  se toma en un rango que seccione el fractal de soluciones deslizantes. Aparece un comportamiento complejo, que se reproduce si representamos escalas cada vez más pequeñas como se muestra en la Figura 4.12.

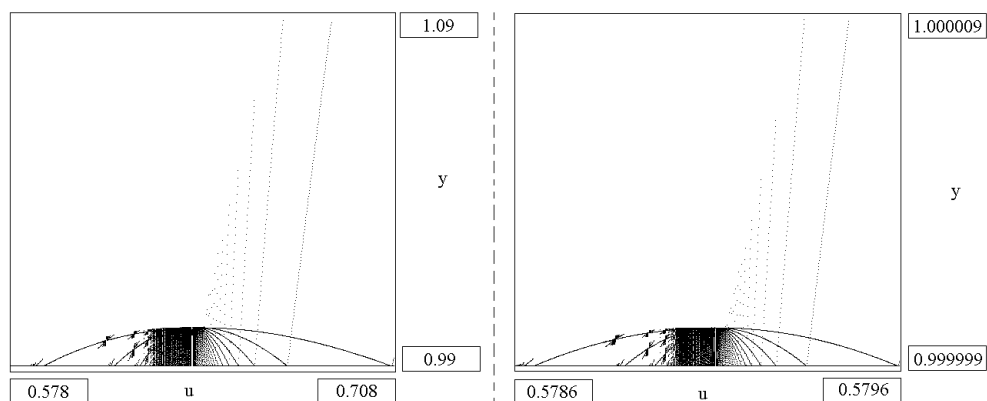


Figura 4.12: Diagrama de bifurcación para  $e = 0.1$ .  $u \in (0.578, 0.708)$  y  $u \in (0.5786, 0.5796)$ .

### 4.3 Extensión multivaluada. Bifurcación de soluciones periódicas

El objetivo de esta sección es dar una extensión del modelo (4.1)-(4.2). La motivación es la siguiente.

Sabemos que toda solución del modelo con inclinación nula, es decir, de la escalera horizontal es acotada ( Proposición 2.12 del Capítulo 2). Por otra parte, existen regiones de valores de los parámetros donde no existen ningún tipo de soluciones periódicas. En efecto, existe una zona de exclusión de soluciones deslizantes ( Curva (4.11) ) y no existen soluciones periódicas de impactos aislados para la mayoría de los valores de los parámetros (Nota 4.8). Estas dos afirmaciones parecen contradictorias. De hecho, se verifica el siguiente resultado aplicación del Teorema de Brouwer, cuya prueba puede encontrarse en [6].

Dado un sistema dinámico no autónomo  $x' = f(t, x)$ , donde

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

es una función  $T$ -periódica continua en la primera componente, esto es, en  $t$  y Lipschitziana con respecto a  $x$ . Se dice que el sistema es *disipativo* si existe una constante positiva  $R_0 > 0$  tal que  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq R_0$  para cualquier solución  $x(t)$ .

**Teorema 4.24** *Un sistema disipativo tiene siempre una solución  $T$ -periódica.*

Este teorema puede extenderse a numerosas situaciones, incluyendo impulsos o impactos pero no es cierto en nuestro caso ya que el operador de Poincaré es discontinuo. Esta discontinuidad ocurre si hay un impacto en el borde del peldaño.

A partir de ahora, consideraremos  $P$  el operador de Poincaré definido en la Proposición 4.5, extendido en la clausura de  $\mathcal{IH}$ . Así, aunque los puntos de la forma  $(1, v)$  para  $v < 0$  no están en la imagen, tiene pleno sentido considerar las soluciones del sistema (4.1)-(4.2) con esa condición inicial.

**Teorema 4.25** *Se verifica*

- $P$  es continuo en  $(y_0, v_0)$  si  $y_T > 1$ .
- Si  $y_T = 1$  entonces toda sucesión  $(y_n, v_n)$  tendiendo a  $(y_0, v_0)$  verifica que  $P(y_n, v_n)$  tiene dos valores adherentes diferentes  $(1, v_T)$  y  $(1, -\frac{v_T}{e})$ .

**Nota 4.26** *El primer valor adherente de  $P$  cuando  $y_T = 1$  corresponde a sucesiones de soluciones del problema de valores iniciales tales que la partícula impacta antes del borde y el segundo a aquellas en las que la partícula no llega a impactar. Además, hay que observar que si  $y_T = 1$  y  $v_T = 0$  el operador de Poincaré es también continuo.*

**Demostración.**

No hay ningún problema mientras que el último impacto del escalón se produzca fuera del borde del peldaño. Ahora bien, si  $y_T > 1$  entonces no hay impacto en  $t = T$  y por tanto, la expresión  $P(y, v)$  dada en (4.5), depende regularmente de los valores iniciales cerca de  $(y_0, v_0)$ . En consecuencia, la primera afirmación es cierta.

En el segundo caso, hay dos posibilidades dependiendo de si hay o no deslizamiento. Si no estamos tras una cola de acumulación, se verifica que el último impacto ocurre en el periodo,  $t_k(y_0, v_0) = T$ . Sea  $(y_n, v_n)$  una sucesión de condiciones iniciales convergente a  $(y_0, v_0)$ . El último impacto,  $t_k(y_n, v_n)$ ,

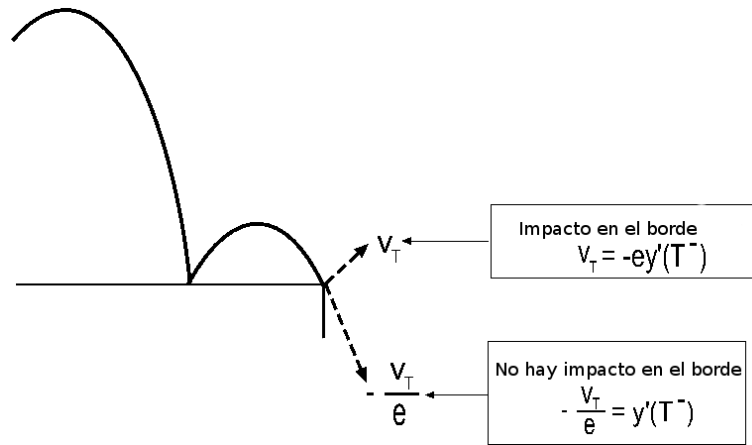


Figura 4.13: Los dos valores adherentes de  $P$ .

tiene una expresión regular cerca de  $(y_0, v_0)$  (dada en 4.6) y pueden darse dos casos:

- o bien  $t_k(y_n, v_n) > T$  y ese último impacto no ocurre. Entonces, la iterada del operador de Poincaré  $P(y_n, v_n)$  tiende a  $(1, -\frac{v_T}{e})$ , que sería el valor de  $(y(t), y'(t^-))$  en función de  $(y_0, v_0)$ .
- o bien  $t_k(y_n, v_n) \leq T$  y el impacto final ocurre. Por tanto,  $P(y_n, v_n)$  tiende a  $(1, v_T)$ .

Por último, si existe deslizamiento entonces el tiempo de acumulación  $t_d$  (dado en (4.8)) depende de manera regular de las condiciones iniciales. Por tanto,  $P(y_n, v_n)$  será cercano a  $P(y_0, v_0) = (1, 0)$  para toda sucesión  $(y_n, v_n)$  tendiendo a  $(y_0, v_0)$ . ■

**Teorema 4.27** *Existe una constante  $R_0 > 0$  tal que la región*

$$\Gamma_{R_0} = \{(y, v) \in [1, +\infty) \times \mathbb{R} : (v + u)^2 + y \leq R_0\}$$

*es positivamente invariante.*

### **Demostración.**

En la demostración del teorema usaremos la existencia de una *función guía*. Puesto que las soluciones de nuestro sistema (4.1)-(4.2) no son derivables en sentido clásico, usaremos una definición de función guía extensión

de la usual. Así, diremos que  $V(t, y, y')$  es una *función guía* para (4.1) si existe  $R_1 > 0$  de forma que

$$V(t, y(t), y'(t))$$

es decreciente evaluada en cualquier solución  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$V(t, y(t), y'(t)) \geq R_1 \quad \forall t \in I .$$

Sea

$$V(t, y, y') = \frac{1}{2}(y'(t) + u)^2 + y(t) + ut .$$

Veamos que es una función guía para el problema (4.1). Para ello consideramos  $y(t)$  una solución definida en un intervalo  $I$  y llamamos  $V(t) = V(t, y(t), y'(t))$ . Entonces  $V$  es constante si  $y(t)$  no tiene impactos. En efecto,

$$V'(t) = y''(t)(y'(t) + u) + y'(t) + u = 0$$

ya que  $y''(t) = -1$  por ser  $y(t)$  solución de (4.1).

Supongamos ahora que  $t$  es un punto de impacto verificando  $V(t) \geq R_1$  para algún  $R_1$  suficientemente grande aún por determinar y veamos

$$V(t^-) - V(t^+) \geq 0 .$$

Denotamos por  $v = y'(t^+) \geq 0$ . Entonces,  $-\frac{v}{e} = y'(t^-)$  e  $y(t) = 0$ . Como  $V(t) \geq R_1$ ,

$$\frac{1}{2} \left( u - \frac{v}{e} \right)^2 + ut = V(t^-) = V(t_0) \geq R_1 .$$

De donde se deduce que

$$\left( u - \frac{v}{e} \right)^2 \geq 2(R_1 - ut) .$$

Procedamos ahora a calcular la diferencia de la función guía en el punto de impacto,

$$V(t^-) - V(t^+) = \frac{1}{2} \left( \left( -\frac{v}{e} + u \right)^2 - (v + u)^2 \right) = \frac{1}{2} \left( (1 - e^2) \frac{v^2}{e^2} - 2(1 + e)u \frac{v}{e} \right) .$$

Distingamos dos casos, dependiendo del signo de  $u - \frac{v}{e}$ . Si esta cantidad es positiva,

$$\left( u - \frac{v}{e} \right)^2 \geq 2(R_1 - ut)$$

es equivalente a

$$\frac{v}{e} \leq u - \sqrt{2(R_1 - ut)}. \quad (4.21)$$

Ahora bien, esto no es posible puesto que  $u - \sqrt{2(R_1 - ut)}$  es negativo para  $R_1$  grande y  $\frac{v}{e}$  es positivo.

Por otra parte, si  $u - \frac{v}{e}$  es negativa entonces

$$\left(u - \frac{v}{e}\right)^2 \geq 2(R_1 - ut)$$

es equivalente a

$$\frac{v}{e} \geq u + \sqrt{2(R_1 - ut)}. \quad (4.22)$$

Además, se puede conseguir que el segundo miembro de la desigualdad anterior sea mayor que la segunda raíz de la parábola  $(1 - e^2)z^2 - 2(1 + e)uz$  para  $R_1$  suficientemente grande, esto es,

$$u + \sqrt{2(R_1 - ut)} \geq \frac{2u}{1 - e}.$$

Como consecuencia se obtiene que  $V(t^-) - V(t^+) > 0$ .

Veamos ahora que de la existencia de  $V$  se deduce la existencia de una región positivamente invariante. Para ello, elegimos  $R_0 \geq R_1$  de forma que si una solución  $y : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  verifica en un tiempo  $t_0 \in (0, T)$  que

$$V(t_0, y_0, v_0) \leq R_1$$

entonces

$$\text{máx}(V(t^-), V(t^+)) < R_0$$

para todo  $t_0 \leq t \leq T$ .

Esto es posible, puesto que puedo acotar superiormente  $y(t)$  e  $y'(t)$  por las condiciones en  $t_0$ . Se entiende que si  $t = T$  entonces se considera la solución definida un instante después.

Veamos que este es el  $R_0$  deseado. Para ello veremos que si  $(y_0, v_0)$  es una condición inicial en la región  $\Gamma_{R_0}$  entonces

$$\frac{1}{2}(v_T + u)^2 + y_T \leq R_0$$

y por tanto,  $(y_T, v_T)$  pertenece a  $\Gamma_{R_0}$ . Distingamos los siguientes casos:



- $y_T > 1$  y existe  $t_0$  verificando

$$V(t_0, y(t_0), y'(t_0)) \leq R_0 . \quad (4.23)$$

Entonces,

$$\frac{1}{2}(v_T + u)^2 + y_T = \frac{1}{2}(y'(T) + u)^2 + y(T) + 1 = V(T) < R_0 .$$

- $y_T = 1$  y existe  $t_0$  verificando (4.23). Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_T + u)^2 + y_T &= \frac{1}{2}(-ey'(T^-) + u)^2 + y(T^-) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(y'(T^+) + u)^2 + y(T^+) + uT = V(T^+) < R_0 . \end{aligned}$$

- $y_T > 1$  y no existe  $t_0$  verificando (4.23). Entonces, la función guía es decreciente y por tanto,

$$\begin{aligned} R_0 \geq V(0) \geq V(T) &= \frac{1}{2}(y'(T) + u)^2 + y(T) + uT \\ &= \frac{1}{2}(v_T + u)^2 + (y_T - 1) + uT = \frac{1}{2}(v_T + u)^2 + y_T . \end{aligned}$$

- $y_T = 1$  y no existe  $t_0$  verificando (4.23). Entonces, la función guía es decreciente y por tanto,

$$R_0 \geq V(0) \geq V(T^+) = \frac{1}{2}(y'(T^+) + u)^2 + y(T^+) + uT = \frac{1}{2}(v_T + u)^2 + y_T .$$

■

Esto es, tenemos un operador de Poincaré definido en una región positivamente invariante  $\Gamma_{R_0}$  que es la región entre la recta  $y = 1$  y una parábola invertida de vértice en  $y' = -u = -\frac{1}{T}$ , como puede verse en la Figura 4.14. Sin embargo, sus puntos fijos correspondientes a soluciones periódicas a un escalón, han *desaparecido* por la pérdida de continuidad. Esta pérdida de regularidad nos deja fuera de una posible aplicación del Teorema de Brouwer en la línea de la demostración del Teorema 4.24.

Ahora bien, desde el punto de vista de la dinámica, la existencia de soluciones periódicas es muy importante. Por tanto, la búsqueda de un entorno

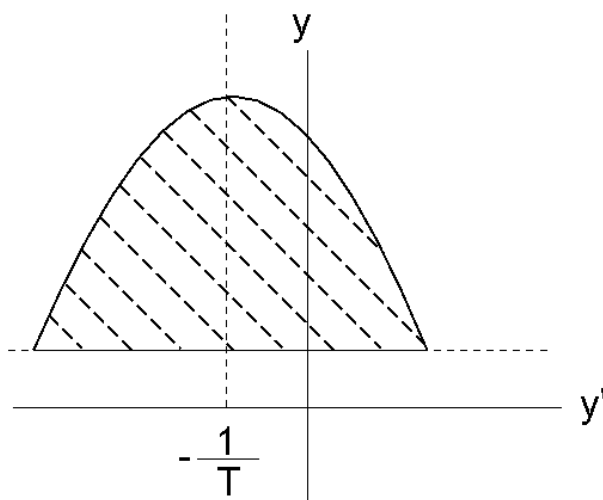


Figura 4.14: La región invariante.

donde aparezcan soluciones periódicas para cualquier valor de los parámetros es la motivación que nos impulsa a construir una extensión del operador.

En esta línea usaremos la extensión en sentido Filippov. Esto es, generalizando la definición de solución clásica a la de solución en sentido multivaluado. En este contexto, el Teorema de Kakutani garantiza la existencia de solución periódica. Este teorema puede verse como una adaptación del Teorema de Brouwer para funciones multivaluadas y su prueba puede encontrarse en [6]. En este escenario, la imagen de las funciones son conjuntos y denotaremos por  $P(X)$  al conjunto de partes de  $X$ . Asimismo, los puntos fijos vienen definidos por la propiedad de pertenecer a su propia imagen. Esto es,  $x^*$  es un punto fijo de una aplicación  $F$  si  $x^* \in F(x^*)$ .

**Teorema 4.28** *Sea  $K$  un subconjunto compacto y convexo de un espacio euclídeo de dimensión finita y  $F : K \rightarrow P(K)$  una función verificando*

- $F(x)$  es compacto y convexo para todo  $x$  de  $K$ .
- $F$  es semicontinua en la topología de Hausdorff, es decir,  $F$  tiene gráfica cerrada.

*Entonces, existe un punto fijo de  $F$ .*

Teniendo en cuenta el teorema anterior, procedemos a la extensión del operador de Poincaré. Para ello, se recuerda que  $(y_T, v_T) = P(y, v)$  denotaba la primera iterada del operador de Poincaré en el sentido clásico.

**Definición 4.29** *Se define el operador de Poincaré en sentido multivaluado,  $P^*$ , como la función*

$$P^* : \Gamma_{R_0} \rightarrow P(\Gamma_{R_0}) \\ (y, v) \rightarrow A_T ;$$

donde

- $A_T = (y_T, v_T)$ , si  $y_T > 1$  ;
- $A_T = \overline{(1, v_T), (1, -\frac{v_T}{e})}$ , es decir, el segmento que une los puntos  $(1, v_T)$  y  $(1, -\frac{v_T}{e})$ .

**Proposición 4.30** *La extensión multivaluada del operador de Poincaré tiene gráfica cerrada.*

**Demostración.**

Veamos que todo límite de sucesiones de puntos de la gráfica de  $P^*$  pertenecen a dicha gráfica. Esto es, sea  $(y_0^n, v_0^n, y^n, v^n)$  tal que  $(y^n, v^n) \in P^*(y_0^n, v_0^n)$  y supongamos que

$$(y_0^n, v_0^n) \longrightarrow (y_0^*, v_0^*)$$

$$(y^n, v^n) \longrightarrow (y^*, v^*) .$$

Vamos a demostrar que

$$(y^*, v^*) \in P^*(y_0^*, v_0^*) .$$

Para ello, distinguiamos dos casos:

- Si  $y_T^* > 1$  podemos considerar que toda la sucesión verifica que  $y_T^n > 1$  y por tanto, el operador de Poincaré está definido en sentido clásico. Luego, es continuo y por tanto,

$$\begin{array}{ccc} (y^n, v^n) & = & P(y_0^n, v_0^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (y^*, v^*) & = & P(y_0^*, v_0^*) . \end{array}$$

- Si  $y_T^* = 1$  podemos dividir los términos de la sucesión en aquellos con  $y^n > 1$  y  $y^n = 1$ . Asumamos primero que  $y^n > 1$  y denotemos por  $v_T^*$  la derivada de la solución  $y(t)$  con condición inicial  $(y_0^*, v_0^*)$  evaluada en  $T$ . Puesto que el operador de Poincaré original  $P$  tiene sólo dos valores adherentes, se tiene que  $P(y_0^n, v_0^n)$  converge a  $(1, v_T^*)$  o bien  $(1, -\frac{v_T^*}{e})$ . En cualquier caso, su límite sería punto de la gráfica de  $P^*$ .

Veamos ahora aquellos puntos de la sucesión de la forma  $(y_0^n, v_0^n, 1, v^n)$ . En este caso, puesto que  $(y^n, v^n) \in P(y_0^n, v_0^n)$  debe estar en el segmento que une los puntos  $(1, v_T^*)$  y  $(1, -\frac{v_T^*}{e})$ . Esto es,

$$v^n = \lambda_n(v_T^*) - (1 - \lambda_n)\frac{v_T^*}{e};$$

donde  $\lambda_n \in [0, 1]$ . Ahora bien, existe una subsecuencia de  $\lambda_n$  convergente puesto que es una sucesión acotada. Por tanto, tomando límite en la expresión de  $v^n$  se tiene que

$$v^* = \lambda v_T^* - (1 - \lambda)\frac{v_T^*}{e}, \lambda \in [0, 1]$$

puesto que  $v_T^n \rightarrow v_T^*$  ya que la expresión de  $y'(T^-)$  depende continuamente de la condición inicial. La dependencia es continua puesto que es antes del impacto en el borde del peldaño. Luego,  $(1, v^*)$  es un punto del segmento que une  $(1, v_T^*)$  y  $(1, -\frac{v_T^*}{e})$  y en consecuencia,  $(y_0^*, v_0^*, 1, v^*)$  pertenece a la gráfica de  $P^*$ .

■

**Nota 4.31** Como consecuencia, la región  $\Gamma_{R_0}$  es positivamente invariante para la extensión multivaluada del operador de Poincaré,  $P^*$ .

Por tanto, este operador extendido está bajo las hipótesis del Teorema de Kakutani y en consecuencia, nos permite asegurar la existencia de solución  $T$ -periódica para cualesquiera valores de los parámetros  $(e, u)$ . Puesto que no existe solución periódica clásica para la mayoría de los valores de los parámetros, podemos afirmar que la solución  $T$ -periódica es casi siempre en sentido multivaluado. Este operador representa las soluciones del sistema

$$\left. \begin{array}{l} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -1, \end{array} \right\} \text{ si } y(t) > -E[ut] \quad (4.24)$$

$$y'(t^+) = -ey'(t^-) \text{ si } y(t) = -E[ut] \text{ , } t \notin T\mathbb{Z} \quad (4.25)$$

$$y'(t^+) \in [y'(t^-), -ey'(t^-)] \text{ si } y(t) = -E[ut] \text{ , } t \in T\mathbb{Z} \quad (4.26)$$

miradas en el borde de los peldaños, esto es, la sección en  $t = T = \frac{1}{u}$ .

Desde el punto de vista físico, en la anterior modelización del problema dada por el sistema (4.1)-(4.2), se estaba asumiendo que el impacto en el borde del escalón era rígido y sólo era posible una velocidad de salida. Sin embargo, la experiencia nos muestra que esta velocidad de salida es variable y depende de varios factores como la forma de la partícula o el escalón, el ángulo de impacto, ... intuición que aparece reflejada en el sistema multivaluado y que hace razonable esta extensión multivaluada también desde el punto de vista físico.

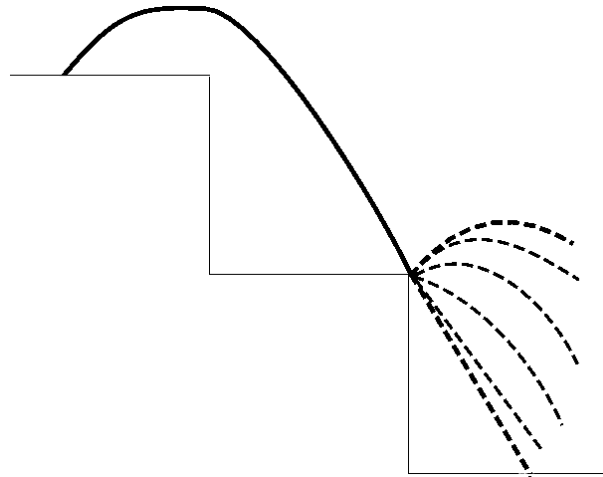


Figura 4.15: Extensión multivaluada.

### 4.3.1 Puntos fijos del operador de Poincaré. Bifurcación.

Centraremos esta sección en el estudio de puntos fijos del operador de Poincaré generalizado. En primer lugar, reescribiremos los puntos fijos en sentido clásico. Estos se corresponden únicamente con las órbitas periódicas de tipo  $(1)$ ,  $(1, 0^k)$  y  $(1, 0^\infty)$  estudiadas en el Capítulo 4.2. Posteriormente, nos centraremos en los puntos fijos en sentido multivaluado, que notaremos por  $(1)_m$  y  $(1, 0^k)_m$  donde las letras de cada palabra representan lo mismo que en las soluciones clásicas y el subíndice indica que son en sentido multivaluado.

La primera observación es que las únicas soluciones periódicas deslizantes a un escalón que pueden existir son las de tipo  $(1, 0^\infty)$  puesto que la velocidad de salida debe ser cero y eso reduciría  $A_T$  siempre al punto  $(1, 0)$ . Esto es, no hay soluciones deslizantes en sentido multivaluado.

Comencemos analizando los puntos fijos en sentido clásico. Para ello, distinguiremos diferentes casos según el número de impactos. En primer lugar, no pueden existir puntos fijos de  $P$  si no hay impactos.

Por otra parte, introducimos una variable proporcional a la energía de las soluciones de (4.1)-(4.2),

$$E(t) = y'(t)^2 + 2y(t)$$

y que nos servirá para analizar mejor los rangos de validez de las curvas de existencia. Por conservación de energía, ésta será constante en los intervalos de tiempo donde no se produzcan impactos. La existencia de puntos fijos se resume en la siguiente proposición.

**Proposición 4.32** *Supongamos  $e$  fijo. Los puntos fijos del operador de Poincaré en sentido clásico  $P$ , aparecen para*

$$u = \frac{(1-e)\sqrt{1+e^k}}{\sqrt{2}(1+e)\sqrt{1-e^k}}$$

y se reduce a la siguiente curva en el plano  $(y, v)$

$$y = \frac{1}{1-e^{2k}} - \frac{v^2}{2}, \quad v \in \frac{\sqrt{2}e^k}{\sqrt{1-e^{2k}}}(-1, 1];$$

donde  $k = 0, 1, \dots$  es el número de impactos en  $(0, T]$ . O bien

$$u \leq \frac{1-e}{\sqrt{2}(1+e)},$$

que se reduce a un punto  $(y, v) = (1, 0)$  en el plano de fases; si la solución es deslizante.

### Demostración.

Empecemos analizando el caso en que ocurre un único impacto en  $(0, T)$ , lo que corresponde a soluciones periódicas de tipo (1). Por tanto, por la Proposición 4.10

$$u(e) = \sqrt{\frac{1-e}{2(1+e)}} \quad (4.27)$$

para todo  $e \in (0, 1)$ . Pretendemos calcular la expresión de

$$E_0 = E(0) = v_0^2 + 2y_0 ,$$

la energía inicial. Entonces, el tiempo de impacto puede ser escrito como

$$t_1 = v_0 + \sqrt{E_0}$$

y se verifican los siguientes cálculos de energía,

$$\begin{aligned} E_0 &= E(t_1^-) = y'(t_1^-)^2 \\ E(t_1^+) &= (-ey'(t_1^-))^2 = e^2 E_0 \\ E(t_1^+) &= E(T) = v_0^2 + 2(y_0 - 1) = E_0 - 2 . \end{aligned}$$

Por tanto,

$$E_0 = \frac{2}{1 - e^2} .$$

De este modo,

$$\frac{2}{1 - e^2} = E_0 = v_0^2 + 2y_0 .$$

Por otra parte, debemos imponer las condiciones de compatibilidad. En este caso, que el primer impacto ocurre

$$t_1 \leq T \tag{4.28}$$

y el segundo no

$$t_2 > T . \tag{4.29}$$

Para ello vamos a escribir  $T$  en función del parámetro de restitución y la energía inicial. Así, de la periodicidad de la solución se obtiene que.

$$y'(T^+) = -(T - t_1) + v_1 = v_0$$

y por tanto,

$$T(e) = (1 + e)\sqrt{E_0} .$$

(  $v_1$  denota la velocidad de salida tras el impacto, como hasta ahora).

Luego, las condiciones serán

$$(4.28) \Leftrightarrow v_0 + \sqrt{E_0} \leq (1 + e)\sqrt{E_0} \Leftrightarrow v_0 \leq e\sqrt{\frac{2}{1 - e^2}} ;$$

y usando la expresión para el tiempo de impacto dada en (4.6),

$$(4.29) \Leftrightarrow v_0 + \frac{1+e-2e^2}{1-e} \sqrt{E_0} > (1+e)\sqrt{E_0} \Leftrightarrow v_0 > -e\sqrt{\frac{2}{1-e^2}} .$$

Esto es, se verifica lo enunciado en la Proposición para  $k = 0$ .

Analizamos ahora el caso en que existen  $k + 1$  impactos en  $(0, T)$ , correspondientes a soluciones periódicas de palabra  $(1, 0^k)$ . De la Proposición 4.17 se verifica

$$u(e) = \frac{(1-e)\sqrt{1+e^{k+1}}}{\sqrt{2}(1+e)\sqrt{1-e^{k+1}}}$$

para todo  $e \in (0, 1)$ .

Procedemos con el cómputo de energía,  $E_0 = v_0^2 + y_0$ .

$$\begin{aligned} E_0 &= E(t_1^-) = y'(t_1^-)^2 \\ E(t_1^+) &= (-ey'(t_1^-))^2 = e^2 E_0 \\ E(t_2^+) &= (-ey'(t_2^-))^2 = e^2 E(t_1^+) = e^4 E_0 \\ &\vdots \\ E(t_{k+1}^+) &= e^{2(k+1)} E_0 \end{aligned}$$

y por otra parte,

$$E(t_{k+1}^+) = E(T) = v_0^2 + 2(y_0 - 1) = E_0 - 2 .$$

Por tanto,

$$E_0 = \frac{2}{1 - e^{2(k+1)}} .$$

Luego, la altura inicial viene dada en función de la velocidad como

$$y_0 = \frac{1}{1 - e^{2(k+1)}} - \frac{v_0^2}{2} .$$

Nos resta calcular las condiciones de compatibilidad, esto es,

$$t_{k+1} \leq T , \tag{4.30}$$

$$t_{k+2} > T . \tag{4.31}$$

Procedemos de manera análoga al caso de un solo impacto, calculando  $T$  imponiendo la periodicidad de la velocidad



$$y'(T) = -(T - t_{k+1}) + v_{k+1} = v_0 \Leftrightarrow T = t_{k+1} + v_{k+1} - v_0 .$$

Luego, usando la expresión (4.5) para  $v_{k+1}$  la primera condición (4.30) es equivalente a

$$v_0 \leq e^{k+1} \sqrt{E_0} = \frac{\sqrt{2}e^{k+1}}{\sqrt{1 - e^{2(k+1)}}}$$

y puesto que  $t_{k+2} = t_{k+1} - v_{k+1}$ , la segunda (4.31) es

$$v_0 > -\frac{\sqrt{2}e^{k+1}}{\sqrt{1 - e^{2(k+1)}}} .$$

■

En las Figuras 4.16 y 4.17 aparecen las curvas de existencia de puntos fijos con 1, 2, 3 y 4 impactos en el plano de parámetros y en el plano de fase para  $e = 0.5$ , respectivamente. También se representa la curva para acumulación de impactos en trazo discontinuo y el punto  $(1, 0)$ .

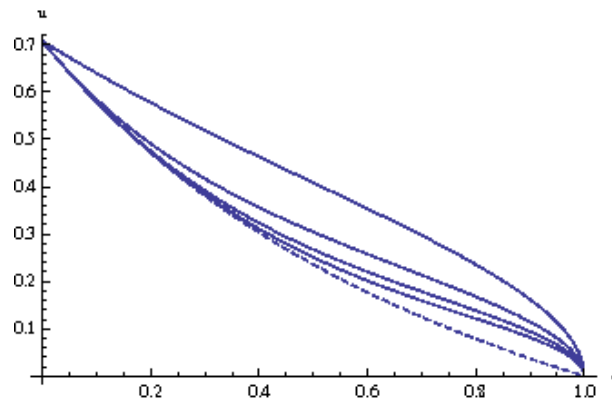


Figura 4.16: Existencia de puntos fijos en sentido clásico. Plano de parámetros  $(e, u)$

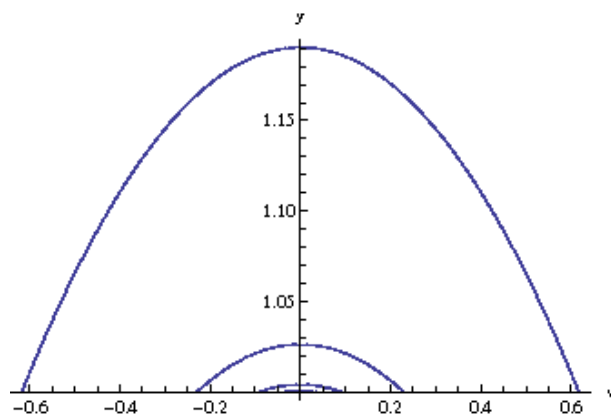


Figura 4.17: Existencia de puntos fijos en sentido clásico. Plano de fase  $(y, v)$  para  $e = 0.4$ .

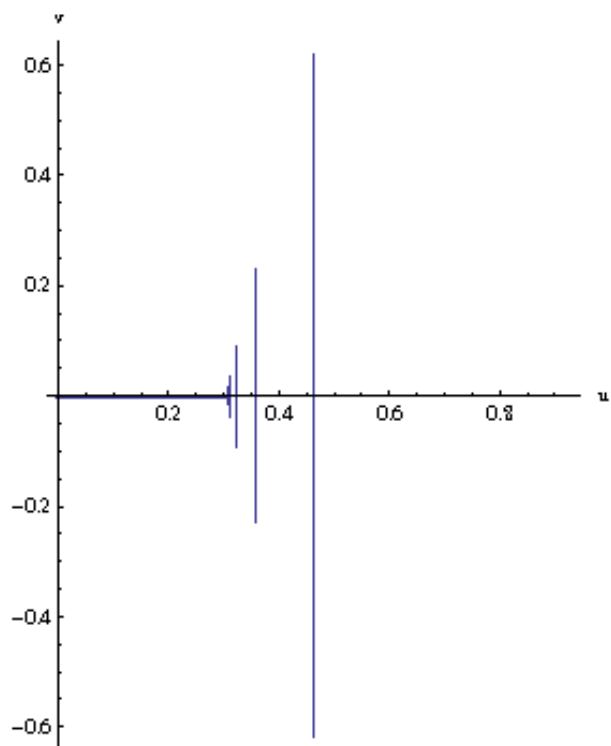


Figura 4.18: Existencia de puntos fijos en sentido clásico para  $e = 0.4$ .

Sin embargo, para estudiar la bifurcación es más conveniente representar un parámetro y una variable del sistema. Elegimos por relevancia y claridad el parámetro  $u$  y la variable velocidad  $v$ . En la Figura 4.18 se representan los puntos fijos en sentido clásico para  $k = 1, \dots, 5$  y el trazo horizontal representa la solución deslizante.

**Nota 4.33** *Para identificar mejor la bifurcación, para cada  $e$  en  $(0, 1)$  fijo denotaremos por  $u^k$  al valor del parámetro  $u$  que da la existencia de solución periódica con  $k$  impactos, esto es,*

$$u^k = \frac{(1-e)\sqrt{1+e^k}}{\sqrt{2}(1+e)\sqrt{1-e^k}}.$$

Además, sea  $a_k = \frac{\sqrt{2}e^k}{\sqrt{1-e^{2k}}}$  de forma que el intervalo donde está definida dicha solución es  $(-a_k, a_k]$ .

Pasamos ahora a estudiar los puntos fijos de  $P^*$  en sentido multivaluado.

**Proposición 4.34** *Supongamos  $e$  fijo. Los puntos fijos del operador de Poincaré en sentido multivaluado, aparecen para*

$$u_m^k(v) = \frac{1}{v + \frac{1+e-2e^k}{1-e}\sqrt{v^2+2}}$$

para

$$v \in [-a_{k-1}, a_k);$$

donde  $k = 0, 1, \dots$  es el número de impactos en  $(0, T]$ . Se considera que  $a_0 = \infty$ .

**Demostración.**

Puesto que la solución multivaluada debe ser periódica, ha de verificarse

$$y_T = 1, v_0 \in \left[-\frac{v_T}{e}, v_T\right).$$

Empecemos calculando la solución con un único impacto, para después hacer el caso general de  $k$  impactos con  $k > 1$ .

En primer lugar, puesto que  $y_T = 1$  se obtiene que

$$-\frac{T^2}{2} + v_0 T + 1 = 0$$

y por tanto,

$$u = \frac{1}{T} = \frac{1}{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2}} .$$

Por otra parte, se verifica que

$$y'(T^+) = -e(-\sqrt{v_0^2 + 2}) = v_T$$

y en consecuencia, la condición que hay que imponer es

$$v_0 \in [-\sqrt{v_0^2 + 2}, e\sqrt{v_0^2 + 2}) .$$

De ese modo, si  $v_0 \leq 0$  la condición se dará siempre pues  $v_0 \geq -\sqrt{v_0^2 + 2}$ . Ahora bien, si  $v_0 > 0$  la pertenencia al intervalo viene dada por

$$v_0 < e\sqrt{v_0^2 + 2} \Leftrightarrow v_0 < e\sqrt{\frac{2}{1 - e^2}} = a_1 .$$

Luego,  $v_0 \in (-\infty, a_1)$  .

Pasamos ahora a demostrar el caso general de  $k + 1$  impactos con  $k \geq 1$ . En ese caso, puesto que  $y_0 = 1$  , la expresión para  $y_T$  es

$$y_T = -\frac{(T - t_k)^2}{2} + v_k(T - t_k) + 1 = 1 .$$

Despejamos ahora el periodo, usando las expresiones de  $t_k$  y  $v_k$  dadas en (4.6) y (4.5) resp.

$$T = v_0 + \frac{1 + e - 2e^{k+1}}{1 - e} \sqrt{v_0^2 + 2}$$

y de aquí, se obtiene  $u = \frac{1}{T}$ . Calculemos ahora el rango de validez de la velocidad. Puesto que

$$v_T = -e(-(T - t_k) + v_k) = e^{k+1} \sqrt{v_0^2 + 2} ,$$

la condición es

$$v_0 \in \left[ -e^k \sqrt{v_0^2 + 2}, e^{k+1} \sqrt{v_0^2 + 2} \right) .$$

Distinguiendo ahora los casos para  $v_0$  negativo o positivo, de manera análoga a lo hecho para un único impacto, se llega a la expresión

$$v_0 \in [-a_k, a_{k+1}) .$$

■

Por último procedamos a ver la bifurcación. Como es usual representamos la variable de estado en función del parámetro, para ello dibujamos las curvas obtenidas en las Propositiones 4.32 y 4.34 en el plano  $(v, u)$  (Figura 4.19, 4.20, 4.21 y 4.22).

La primera observación es que cualquier corte entre una curva de soluciones periódicas en sentido clásico y otra en sentido multivaluado es ficticio. Esto se debe a que las soluciones multivaluadas viven en el plano  $y = 1$  mientras que las otras no. Además, puesto que  $u_m^k(v)$  es monótona en  $k$  no hay cortes entre dos soluciones multivaluadas en el diagrama de bifurcación.

Por otra parte, de la expresión de  $u_m^k(v)$  y del intervalo de validez de  $v$  se obtiene que las curvas correspondientes a soluciones en sentido multivaluado unen las dadas para soluciones clásicas. Más concretamente,

$$u_m^k(-a_{k-1}) = u^k \text{ y } u_m^k(a_k) = u^{k+1} .$$

Ahora bien, pueden darse dos casos bien distintos, dependiendo del valor del parámetro de restitución normal. Esto se debe a la monotonía de la curva  $T_m^k(v) = \frac{1}{u_m^k(v)}$ , que presenta un único punto crítico para cada valor de  $e$ ,

$$v_c^k = -\frac{1 - e}{\sqrt{2e(1 - e^{k-1})(1 - e^k)}} .$$

Ahora bien, la curva  $u_m^k(v)$  será estrictamente decreciente si  $v_c^k < -a_{k-1}$  o bien será una parábola con vértice en el plano  $(v, u)$  si el punto crítico está en el intervalo. Esto último ocurre en un intervalo  $(e_k, 1)$  donde  $e_2 = \frac{1}{2}$  y  $e_k \rightarrow 1$ . Además, en el caso de un único impacto, la curva es siempre decreciente. De este modo, para valores lejanos de uno, más concretamente  $e < 0.5$ , la bifurcación es regular y los gráficos son similares a los siguientes

hechos para  $e = 0.4$  en las Figuras 4.19 y 4.20. En la Figura 4.19 las curvas de existencia con número de impactos desde 1 hasta 4 y en la Figura 4.20 desde 20 hasta 23. En ambas las rectas representan puntos fijos en sentido clásico y las curvas corresponden a puntos fijos en sentido multivaluado. Se observa que las curvas de las soluciones multivaluadas rellenan los huecos de las soluciones clásicas y colisionan en el segmento que representan las soluciones deslizantes.

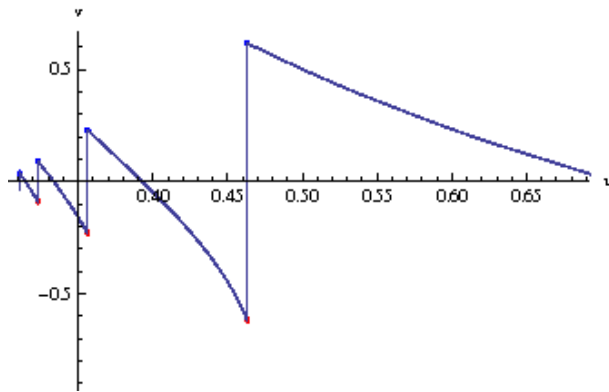


Figura 4.19: Curvas de existencia de puntos fijos para  $e = 0.4$ . Número de impactos desde 1 hasta 4.

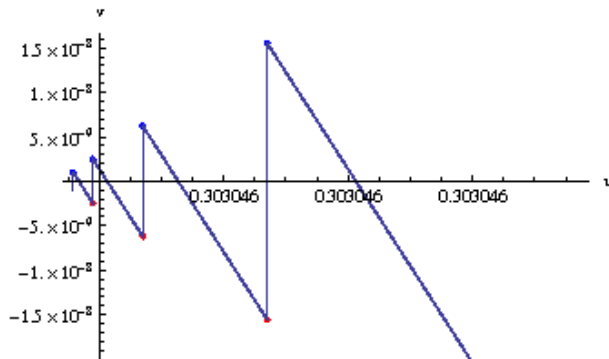


Figura 4.20: Curvas de existencia de puntos fijos para  $e = 0.4$ . Número de impactos desde 20 hasta 23.

Sin embargo, cuanto más próximo está el valor del parámetro de restitución a uno se observa que aparecen más convivencia de puntos fijos en

sentido multivaluado. De hecho, si fijamos  $e$  cercano a uno y trazamos una línea vertical en el plano  $(u, v)$  para  $u$  cercano a cero aparecerán cada vez más cortes con las curvas que representan la existencia de puntos fijos en sentido multivaluado. Esto es, para valores del parámetro  $e$  cercanos a uno y valores de  $u$  cercanos a cero es posible encontrar tantas soluciones periódicas en sentido multivaluado como se quiera. Ponemos de relieve este hecho numéricamente en los siguientes gráficos (Figura 4.21 y 4.22), donde  $e = 0.99$ . En la Figura 4.21 se representan las curvas de existencia con número de impactos desde 1 hasta 4 y en la Figura 4.22 desde 20 hasta 23.

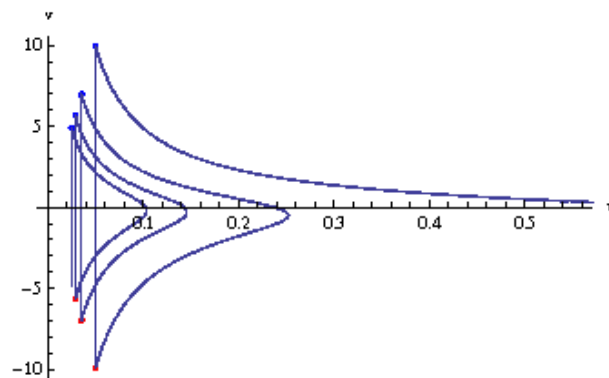


Figura 4.21: Curvas de existencia de puntos fijos para  $e = 0.99$ . Número de impactos desde 1 hasta 4.

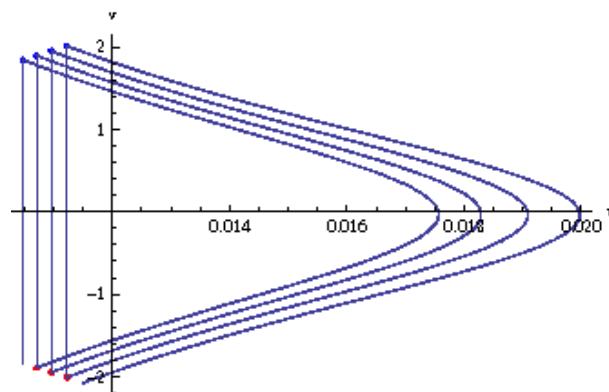


Figura 4.22: Curvas de existencia de puntos fijos para  $e = 0.99$ . Número de impactos desde 20 hasta 23.

Igual que en el caso regular, las rectas representan puntos fijos en sentido clásico y las curvas corresponden a puntos fijos en sentido multivaluado. Ahora las curvas también rellenan los huecos de las soluciones clásicas pero se vuelven sobre sí mismas por la existencia del punto crítico. Además, puesto que es un mínimo en  $(v, u)$ , las parábolas son siempre de la misma forma y no existe convivencia de soluciones multivaluadas con la solución deslizante. Obsérvese que los cortes de las soluciones clásicas y las multivaluadas que se observan en la figura son ficticios ya que para las primeras  $y > 1$  mientras que  $y = 1$  para las segundas.



## Capítulo 5

Otro sistema no suave:  
convertidor reductor DC-DC

En este capítulo nos centraremos en dar otro modelo en el que hemos comenzado a estudiar, siguiendo las pautas del caso de la escalera.

Este modelo es el correspondiente a un problema de control asociado a un circuito eléctrico sobre una rampa de voltaje. Como es habitual en la literatura, el modelo original puede ser normalizado reduciendo el número de parámetros. En este sentido, usaremos el cambio de variables dado en [39] para conseguir un sistema adimensional.

Así pues, consideramos la siguiente ecuación diferencial,

$$x'' + \gamma x' + x = u, \quad (5.1)$$

donde  $u$  es la variable de control y está definida como

$$\begin{cases} u = 0 & \text{si } x(t) > x_r(t) \\ u = 1 & \text{si } x(t) < x_r(t) \end{cases}; \quad (5.2)$$

siendo  $x_r(t) = A + B \left[ \frac{t}{T} \right]$  la rampa de control, donde  $[\cdot]$  representa la parte decimal. En otras palabras, existe un interruptor que puede ser controlado mediante una rampa y se entiende que  $u = 0$  cuando este interruptor está abierto y  $u = 1$  si está cerrado. Normalmente, este control depende de un reloj que fuerza al sistema a ser  $T$ -periódico. En el dibujo se representa por  $S$  a este interruptor.

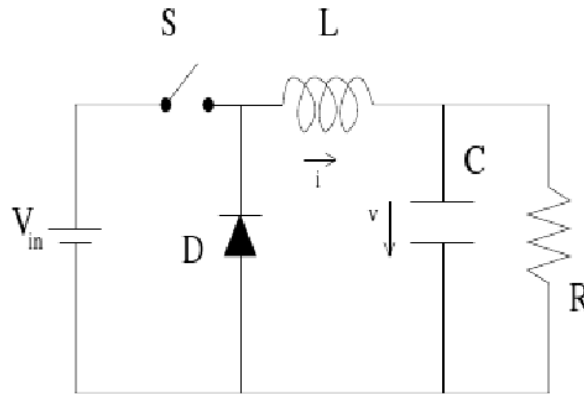


Figura 5.1: Convertidor DC-DC.

Los parámetros están normalizados y supondremos sólo que  $\gamma > 0$ , aunque es usual suponer que los autovalores del polinomio característico,  $(p(\lambda) =$

$\lambda^2 + \gamma\lambda + 1$ ) son complejos, nosotros no asumiremos esa restricción. De esta forma, la relación entre éstos y los reales, es la siguiente

$$\gamma = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, T = \frac{T_c}{\sqrt{LC}}, A = \frac{V_L}{a} + V_{ref}, B = \frac{V_U - V_L}{a}.$$

Donde manteniendo la notación de [25],  $L$  es la inductancia de la bobina,  $C$  la capacidad de carga del condensador y  $R$  la resistencia.  $V_L$  y  $V_U$  son los voltajes inferior y superior de la rampa, respectivamente;  $V_{ref}$  es el voltaje de referencia y  $a$  la ganancia del amplificador.

Resumiendo, estamos ante una ecuación ordinaria de segundo orden,  $T$ -periódica (en  $t$ ) con cuatro parámetros  $A$ ,  $B$ ,  $\gamma$  y  $T$ . Se asume que todos son positivos, salvo el punto inicial de la rampa,  $A$ , sobre el que no se supone signo definido. Esto es,

$$\begin{cases} x'' + \gamma x' + x = u \\ u = \begin{cases} 0 & \text{si } x > x_r(t) \\ 1 & \text{si } x < x_r(t) \end{cases} \end{cases} \quad x_r(t) = A + B \left[ \frac{t}{T} \right] \quad (5.3)$$

La ecuación adimensional anterior se consigue mediante el cambio de variable propuesto en [39].

Nuestro estudio se centra en un tipo especial de soluciones periódicas con periodo el de la ecuación y con una única conmutación por periodo. Esto es, son soluciones  $T$ -periódicas con exactamente un cambio de sistema por periodo. Estas soluciones son de especial relevancia en este ámbito puesto que serían el comportamiento deseado del circuito. Denotamos a estas soluciones periódicas por  $(1, 1)$  como es usual en la literatura [37].

A partir de ahora, puesto que nos centramos en soluciones  $T$ -periódicas, reescribiremos el tiempo como una fase del periodo. Esto es, para todo  $t \in (0, T)$  escribiremos  $t = \alpha T$  con  $\alpha \in (0, 1)$ . Además, notaremos por  $(1, 1)_\alpha$  a las soluciones  $(1, 1)$  que conmutan en el tiempo  $\alpha T$  para explicitar este momento. La primera pregunta razonable es cuál es la configuración de sistemas asociada a este tipo de soluciones.

**Lema 5.1** *Si  $x(t)$  es una solución  $(1, 1)_\alpha$  entonces  $u = 0$  en  $(0, \alpha T)$  y  $u = 1$  en  $(\alpha T, 1)$ .*

**Demostración.**

No es posible que  $u = 1$  en  $(0, \alpha T)$ . En efecto, en ese caso se verificaría que

$$x(0) < x_r(0) < x_r(T);$$

donde la última desigualdad se verifica como consecuencia de la positividad de  $B$  (rampa creciente). Sin embargo, de la condición  $u = 0$  en  $(\alpha T, T)$  y la periodicidad,

$$x(0) = x(T) > x_r(T) .$$

■

Supongamos ahora fija una fase, esto es,  $\alpha \in (0, 1)$  y asumamos que  $u = 0$  en  $(0, \alpha T)$  y  $u = 1$  en  $(\alpha T, T)$ . Así mismo, consideremos el siguiente problema lineal

$$\begin{cases} x'' + \gamma x' + x = u(t) \\ u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \alpha T \\ 1 & \text{si } t > \alpha T \end{cases} . \end{cases} \quad (5.4)$$

**Nota 5.2** Si  $x(t)$  es una solución  $(1, 1)_\alpha$  de (5.3), entonces es también solución de (5.4).

Ahora bien, el problema lineal (5.4) tiene una única solución. Esto es consecuencia de la aplicación del Teorema de la alternativa de Fredholm ya que el problema homogéneo sólo tiene la solución nula. Denotemos por  $x_\alpha^*(t)$  a esa solución. Sin embargo, omitiremos el asterisco al referirnos a su condición inicial o su evaluación en el punto de conmutación cuando no sea confuso.

Podemos deducir una condición necesaria de la existencia de solución periódica de tipo  $(1, 1)_\alpha$ .

**Lema 5.3** Si  $x(t)$  es una solución periódica de tipo  $(1, 1)_\alpha$  para (5.3), entonces  $x_\alpha = A + B\alpha$  donde  $x_\alpha$  es el valor de la solución  $T$ -periódica de (5.4) en el tiempo de conmutación. Esto es,

$$x_\alpha = x_\alpha^*(\alpha T) .$$

La condición anterior significa que la recta  $A + B\frac{t}{T}$  pasa por  $x_\alpha$ , pero  $x_\alpha^*(t)$  no depende de  $A$  ni  $B$ . Es por esto que la condición no es suficiente para asegurar que la solución de (5.4) sea solución de (5.3) para esa rampa  $x_r(t) = A + B\frac{t}{T}$ . De hecho, pueden ocurrir falsos cortes si la solución pasa de un lado al otro de la rampa pero no hay cambio de sistema (esto es, en el sentido de la siguiente figura).

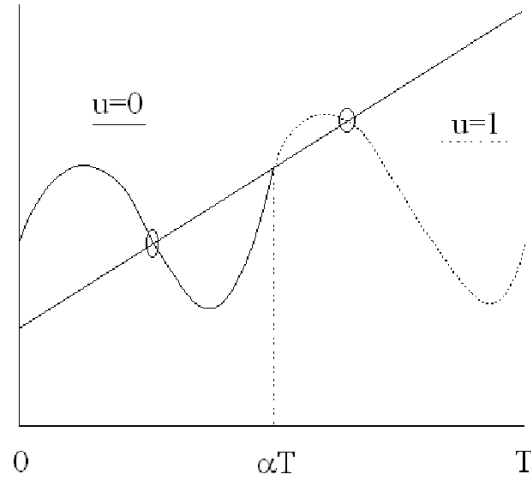


Figura 5.2: Cruces sin conmutación.

A esta clase de soluciones se las conoce en la literatura relacionada como *soluciones fantasmas* por no ser soluciones reales del problema (5.3). Los objetivos serán encontrar una rampa “adecuada” de forma que la solución  $x_\alpha^*(t)$  pase a ser solución del sistema (5.3) y encontrar cuando la solución es positiva. Esto último es necesario porque el convertidor debe devolver corriente continua y por tanto, el signo de  $x$  debe ser constante, suponemos positivo.

En el teorema siguiente demostramos que fijados el periodo y la fase, es posible encontrar una familia de rampas adecuadas de forma que exista solución  $T$ -periódica con una única conmutación y un único cambio de sistema por periodo. Por supuesto, esta solución es la única solución del problema (5.4).

**Teorema 5.4** Sean  $T > 0$  y  $\alpha \in (0, 1)$  fijos. Existe  $B_0(\alpha)$  de forma que para cualquier  $B > B_0$  y  $A$  verificando  $x_\alpha = A + B\alpha$ ,  $x_\alpha^*(t)$  es solución periódica  $(1, 1)$  de (5.3) con rampa de control  $x_r(t) = A + B\frac{t}{T}$ . Si  $B < B_0$  la solución no es de rampa.

#### **Demostración.**

En primer lugar, tomamos la pendiente  $\frac{B_0}{T}$  como el ínfimo de las pendientes de las rectas que pasan por  $x_\alpha$  y no “tocan” a la solución  $x_\alpha^*(t)$  en

ningún otro punto con  $t \in (0, T)$ . Este ínfimo siempre existe puesto que el conjunto de pendientes admisibles está acotado inferiormente. Esta cota es el máximo entre los cocientes  $\frac{x_\alpha - x_0}{\alpha T}$  y  $\frac{x_0 - x_\alpha}{(1-\alpha)T}$ , pendientes de las rectas que unen  $x_0$  con  $x_\alpha$  y  $x_\alpha$  con  $x(T) = x_0$  respectivamente.

Este ínfimo no siempre se alcanza, aunque es un mínimo si consideramos la condición de rampa generalizada,

$$\begin{cases} u = 0 & \text{si } x(t) \geq x_r(t) \\ u = 1 & \text{si } x(t) \leq x_r(t) \end{cases} . \quad (5.5)$$

En efecto, sea  $B_n$  una sucesión convergiendo al ínfimo  $B_0$  de forma que  $B_n < B_0$  para todo  $n$ . Entonces, existe una sucesión  $t_n$  de manera que  $x(t_n)$  no es solución de (5.1) con control generalizado (5.5) para la rampa correspondiente,  $x_r^n(t) = A_n + B_n \frac{t}{T}$ . Puesto que  $t_n$  es una sucesión acotada por tener todos sus términos en  $(0, T)$ , admite una parcial convergente. Esta convergencia puede darse a cinco límites distintos, que nos dan las diferentes formas de alcanzar el mínimo en sentido generalizado.

**Caso 1.** *La sucesión  $t_n$  converge a cero.*

En este caso,

$$\begin{array}{ccc} x(t_n) < x_r^n(t_n) = A_n + B_n \frac{t_n}{T} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ x(0) \leq & & A_0 \end{array}$$

y como debe verificarse (5.5), entonces

$$x(0) = x_0 = A_0 = x_\alpha - B_0 \alpha .$$

Esto es,  $\frac{B_0}{T} = \frac{x_\alpha - x_0}{\alpha T}$ , pendiente de la recta que une  $x_0$  y  $x_\alpha$ .

**Caso 2.** *La sucesión  $t_n$  converge a  $t^*$  con  $t^* \in (0, \alpha T)$ .*

En este caso,

$$\begin{array}{ccc} x(t_n) < x_r^n(t_n) = A_n + B_n \frac{t_n}{T} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ x(t^*) \leq & & x_r(t^*) \end{array}$$

y como debe verificarse (5.5), entonces

$$x(t^*) = x_r(t^*) .$$

Esto es,  $\frac{B_0}{T}$  es la pendiente de la recta que une  $x_0$  y  $x(t^*)$ . Es decir, la rampa toca a la solución en otro punto, distinto de  $x_\alpha$ , de forma tangencial.

**Caso 3.** *La sucesión  $t_n$  converge al tiempo de conmutación, es decir, a  $\alpha T$ .*

Podemos suponer que existen infinitos términos de la sucesión que lo hacen para valores mayores e infinitos para menores. Veamos que en este caso el ínfimo coincide con la derivada de la solución en  $\alpha T$ . Centrémonos en el primer caso, esto es,  $x(t_n) < x_r^n(t_n)$  ( el otro es análogo). Entonces,

$$\begin{array}{ccc} \frac{x(t_n) - x_\alpha}{t_n - \alpha T} < & \frac{x_r^n(t_n) - x_\alpha}{t_n - \alpha T} \\ \downarrow & \downarrow \\ x'(\alpha T) & \leq & \frac{B_0}{T} \end{array}$$

y como debe verificarse (5.5),

$$\begin{array}{ccc} \frac{x(t_n) - x_\alpha}{t_n - \alpha T} \geq & \frac{x_r(t_n) - x_\alpha}{t_n - \alpha T} \\ \downarrow & \downarrow \\ x'(\alpha T) & \geq & \frac{B_0}{T} \end{array} .$$

Esto es,  $\frac{B_0}{T} = x'(\alpha T)$ .

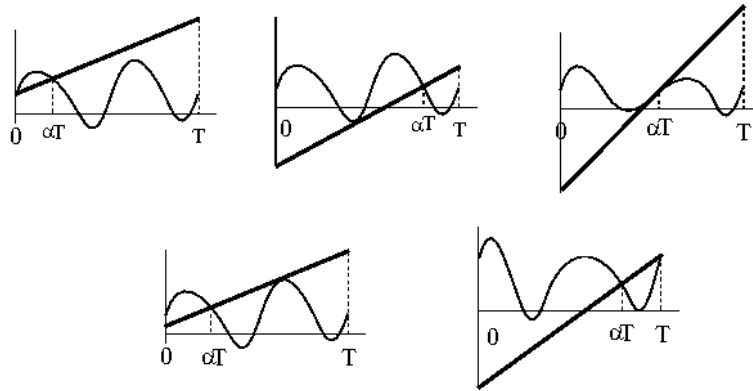
**Caso 4.** *La sucesión  $t_n$  converge a  $t^*$  con  $t^* \in (\alpha T, T)$ .*

Este caso es análogo al Caso 2 y se obtiene que la rampa toca tangencialmente en otro punto  $x(t^*)$ .  $\frac{B_0}{T}$  es la pendiente de la recta que une ese punto con  $x_0$ .

**Caso 5.** *La sucesión  $t_n$  converge a  $T$ .*

Este caso es análogo al primero y se llega a que  $\frac{B_0}{T} = \frac{x_0 - x_\alpha}{(1-\alpha)T}$ , pendiente de la recta que une  $x_\alpha$  y  $x(T) = x_0$ .

Tomando  $B > B_0$  y  $A$  tal que  $x_\alpha = A + B\alpha$ , se sigue la tesis del teorema. ■

Figura 5.3: Posibles situaciones para  $B_0$ .

**Nota 5.5** Obsérvese que la rampa con pendiente  $B_0$  es admisible en los casos 1, 3 y 5 de la demostración; no siéndolo en los otros dos por tocar a la solución en más de un punto aunque no haya conmutación. Esto se debe a que la condición de control (5.2) viene dada por una desigualdad estricta.

**Nota 5.6** La pendiente  $B_0(\alpha)$  es siempre no negativa porque es mayor o igual que

$$\max \left\{ \frac{x_\alpha - x_0}{\alpha}, \frac{x_0 - x_\alpha}{1 - \alpha} \right\} \geq 0 .$$

A veces, por motivos de diseño es deseable que la rampa sea positiva. A continuación damos una condición para asegurar que esto ocurra.

**Corolario 5.7** Sea

$$B_1(\alpha) = \frac{x_\alpha}{\alpha}$$

y supongamos que  $B_0(\alpha) < B_1(\alpha)$ . Entonces, para cualquier

$$B \in (B_0(\alpha), B_1(\alpha)]$$

y  $A$  verificando que  $A + B\alpha = x_\alpha$ , la solución  $x_\alpha^*(t)$  es una órbita  $(1, 1)$  periódica de (5.3) con rampa positiva. Es decir,  $A > 0$  y  $B > 0$ .

**Demostración.**

La pendiente es positiva por ser estrictamente mayor que  $B_0$ , que es no negativa. Probemos que  $A$  también lo es.



Por definición de  $B_1(\alpha)$ , el correspondiente punto inicial de rampa es nulo para que se verifique la condición necesaria. Es decir,  $A_1(\alpha) = 0$ . Usando ahora la condición necesaria de existencia,

$$B_1(\alpha)\alpha = x_\alpha = A + B\alpha$$

para toda rampa. Entonces,

$$A = \alpha(B_1(\alpha) - B) > 0 .$$

■

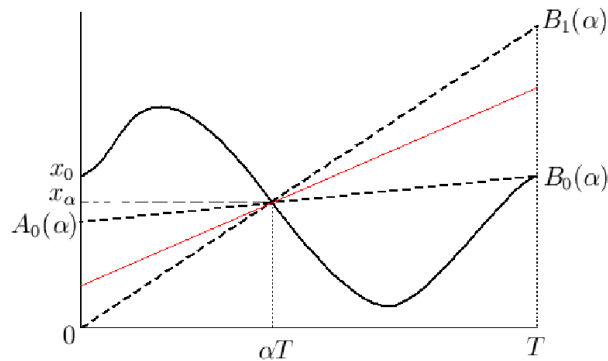


Figura 5.4: Rampas admisibles y rampas positivas.

Tal como se dijo anteriormente, la solución es una diferencia de potencial y es conveniente que sea positiva. Sin embargo, el teorema anterior no lo garantiza y la solución podría tener cambios de signo. Por eso, en lo que sigue, vamos a dar condiciones para asegurar la positividad. Como consecuencia, obtendremos información de las propiedades geométricas de la solución  $x_\alpha^*(t)$ .

Para ello buscaremos la condición que nos permita asegurar que las soluciones de la ecuación (5.1) con  $u = 0$  no son muy oscilantes. Más concretamente, que la distancia entre ceros es mayor que el periodo. Esto es, como las soluciones o bien son exponenciales o bien combinaciones de éstas con senos y cosenos, la distancia entre dos ceros consecutivos, en caso de existir, viene dada por el cociente  $\frac{\pi}{w}$ ; donde

$$w = \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} .$$

Por tanto, la condición de que esta distancia es mayor que  $T$  es

$$\frac{\pi^2}{T^2} + \frac{\gamma^2}{4} \geq 1 . \quad (5.6)$$

**Nota 5.8** La condición (5.6) garantiza que las soluciones de (5.1) con  $u = 0$  tienen a lo más un cero en  $(0, T)$ . Por la naturaleza de las soluciones (combinaciones de exponenciales, senos y cosenos), esto se extiende a todas sus derivadas. Análogamente, también se deduce que las soluciones de (5.1) con  $u = 1$  cortan a lo más una vez a la curva de nivel uno.

**Nota 5.9** Si las soluciones son exponenciales las propiedades siguientes se verifican siempre. Sin embargo, lo general en este tipo de sistemas es que se asuma

$$1 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 > 0$$

y por tanto, sea necesario asumir la hipótesis (5.6).

**Proposición 5.10** Bajo la hipótesis (5.6) la solución periódica  $x_\alpha^*(t)$  está estrictamente entre cero y uno, es decir,

$$0 < x_\alpha^*(t) < 1 .$$

La demostración es consecuencia inmediata de aplicar el siguiente teorema de comparación para  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = u$  y  $f_2 = 1$ .

**Teorema 5.11** Bajo la hipótesis (5.6), la función de Green asociada a la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' + \gamma x' + x = f(t) , \quad (5.7)$$

donde  $f(t)$  es una función  $L^1$  periódica, es positiva. En consecuencia, si se considera  $f(t) = f_i(t)$  para  $i = 0, 1, 2$  verificando

$$f_0 \preceq f_1 \preceq f_2 ;$$

las correspondientes soluciones periódicas están también ordenadas, es decir,

$$x_0 < x_1 < x_2 .$$

**Demostración.**

La demostración está basada en la función de Green. Consideramos la ecuación homogénea con condiciones periódicas,

$$x'' + \gamma x' + x = 0 \text{ en } [0, T] , \quad (5.8)$$

$$x(0) = x(T) \quad x'(0) = x'(T) . \quad (5.9)$$

Sea  $G(t, s)$  la función de Green asociada al problema (5.8)-(5.9). Las soluciones de (5.7) son de la forma

$$x(t) = \int_0^T f(s)G(t, s)ds .$$

A continuación probaremos que  $G(t, s)$  es estrictamente positiva. Entonces, dadas dos funciones  $f_0 \not\leq f_1$  las correspondientes soluciones de (5.7) verificarán

$$x_0(t) - x_1(t) = \int_0^T (f_0(s) - f_1(s))G(t, s)ds > 0$$

y por tanto, se sigue el Principio del Máximo enunciado en el Teorema.

La positividad de la función de Green se basa en la prueba del Teorema 2.1 de [79] y es consecuencia de la hipótesis de separación de ceros. En efecto, veamos que  $G(t, s)$  no se anula en ningún punto. Procedemos por reducción al absurdo, asumiendo que existe  $(t_0, s_0) \in [0, T] \times [0, T]$  tal que  $G(t_0, s_0) = 0$ .

Asumimos que  $t_0 \in (0, T)$ . Supongamos fijo  $s_0 \in (0, T)$  y que  $t_0 \in (s_0, T)$ . Entonces  $G(t, s_0)$  es solución de (5.8) en  $[0, s_0] \cup (s_0, T]$  periódica, es decir,

$$\begin{aligned} G(0, s_0) &= G(T, s_0), \\ \frac{\partial}{\partial t} G(0, s_0) &= \frac{\partial}{\partial t} G(T, s_0). \end{aligned}$$

Luego, podemos construir la función de clase 1

$$x(t) = \begin{cases} G(t, s_0) , & t \in [s_0, T] \\ G(t - T, s_0) , & t \in [T, s_0 + T] \end{cases}$$

que es solución de (5.8) en todo el intervalo. Además verifica que  $x(t_0) = 0$  por hipótesis y  $x'(t_0) = 0$ . Esto último se debe a que  $t_0$  es el único cero de  $x(t)$  en  $[s_0, s_0 + T]$  por la hipótesis (5.6) y la función  $x(t)$  toma los mismos valores en los dos extremos del intervalo por ser periódica. Luego, por unicidad del

problema de valores iniciales, debe ser la solución idénticamente nula y esto es contradictorio con la definición de la función de Green.

Análogamente se procede si  $t_0 \in [0, s_0)$ , definiendo

$$x(t) = \begin{cases} G(t - T, s_0) , & t \in [s_0 - T, 0] \\ G(t, s_0) , & t \in [0, s_0] . \end{cases}$$

El resto de los casos es similar.

Nos resta demostrar que  $G(t, s) > 0$  en algún punto. Ahora bien, si consideramos (5.7) con  $f(t) = 1$  sabemos que la única solución periódica es  $x(t) \equiv 1$  en  $[0, T]$ . Por tanto,

$$1 = x(t) = \int_0^T G(t, s) ds$$

y en consecuencia, la función de Green es positiva. ■

**Nota 5.12** *En cualquier caso, la función de Green es calculable explícitamente, distinguiendo según la forma de los valores propios.*

**Proposición 5.13** *Bajo la hipótesis (5.6) la solución periódica  $x_\alpha^*(t)$  tiene exactamente dos puntos críticos por periodo. Uno de ellos es un máximo en  $(0, \alpha T)$  y el otro un mínimo en  $(\alpha T, 1)$ .*

#### **Demostración.**

La existencia de los dos puntos críticos es trivial y es consecuencia de que la función es continua y periódica. La unicidad se deduce de la hipótesis (5.6), puesto que no puede existir más de un punto crítico para cada valor de  $u$ .

Ahora bien, el mínimo no puede estar antes de la conmutación porque la solución es siempre positiva. En efecto, si  $t_1$  es un mínimo entonces

$$x(t_1) = -x''(t_1) + \gamma x'(t_1) = -x''(t_1) < 0 .$$

Por otra parte, los dos puntos críticos no pueden coexistir y por tanto, el máximo debe estar en el intervalo  $(0, \alpha T)$ . ■

**Proposición 5.14** *Bajo la hipótesis (5.6) la solución periódica  $x_\alpha^*(t)$  es mayor en el dato inicial que en el punto de conmutación. Esto es,*

$$x_\alpha^*(0) > x_\alpha^*(\alpha T) .$$

**Demostración.** La prueba se basa en la existencia de funciones de Lyapunov para la ecuación diferencial (5.1) para  $u = 0$  y  $u = 1$ , independientemente. Más concretamente, si  $u = 0$  entonces

$$v_1(x, x') = x^2 + x'^2$$

es una función de Lyapunov y por tanto es estrictamente decreciente sobre las soluciones. Como consecuencia,

$$x(0)^2 + x'(0)^2 > x(\alpha T)^2 + x'(\alpha T)^2 .$$

Análogamente, si  $u = 1$  la función de Lyapunov es

$$v_2(x, x') = (x - 1)^2 + x'^2$$

y lo que se verifica es

$$(x(\alpha T) - 1)^2 + x'(\alpha T)^2 > (x(T) - 1)^2 + x'(T)^2 .$$

Aplicamos lo anterior a la solución  $T$  periódica  $x_\alpha^*(t)$  y obtenemos,

$$x_\alpha^*(0)^2 + (x_\alpha^{*\prime}(0))^2 - 2x_\alpha^*(0) + 1 < x_\alpha^*(\alpha T)^2 + (x_\alpha^{*\prime}(\alpha T))^2 - 2x_\alpha^*(\alpha T) + 1 .$$

De aquí se sigue inmediatamente la tesis del teorema. ■

Como consecuencia de las tres proposiciones anteriores, la solución debe ser de la forma esquemática que se representa en la Figura 5.5.

Además, la hipótesis (5.6) nos permite caracterizar cuando la pendiente  $B_0(\alpha)$  coincide exactamente con la pendiente de la recta que une la condición inicial de la solución y el punto de conmutación. Para ello, notamos por  $v_0^*$  a la derivada de  $x_\alpha^*(t)$  en  $t = 0$ .

**Proposición 5.15** *Bajo la hipótesis (5.6),*

$$B_0(\alpha) = \frac{x_0 - x_\alpha}{1 - \alpha} \text{ si y sólo si } v_0^* \geq \frac{x_0 - x_\alpha}{T(1 - \alpha)} .$$

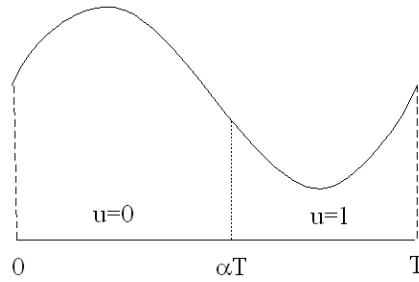


Figura 5.5: Geometría de la solución periódica  $x_\alpha^*(t)$ .

Para la prueba de esta proposición necesitamos un lema sobre la convexidad de la solución.

**Lema 5.16** *Sea  $x(t)$  una solución de (5.1) en  $(0, T)$  para  $u = 0$ . Supongamos además que  $x(t) < 0$ . Entonces o bien  $x(t)$  no tiene puntos de inflexión o bien existe  $\bar{t}$  de forma que la solución es convexa en  $(0, t^*)$  y cóncava en  $(t^*, T)$ .*

El lema es trivial y se deduce del hecho de que si  $\bar{t}$  es un punto de inflexión, entonces

$$\gamma x'(\bar{t}) = -x(\bar{t}) > 0$$

y en consecuencia,

$$x'''(\bar{t}) = -x'(\bar{t}) > 0 .$$

Ya estamos en condiciones de demostrar la Proposición anterior.

**Demostración.**

Comencemos suponiendo que  $B_0(\alpha) = \frac{x_0 - x_\alpha}{1 - \alpha}$  y denotemos por  $d(t)$  a la diferencia entre la rampa dada por  $(B_0, A_0)$  y la solución  $x_\alpha^*(t)$ . Esto es,

$$d(t) = A_0 + B_0 \frac{t}{T} - x_\alpha^*(t) .$$

Se verifica por definición que  $d(T) = 0$  puesto que

$$d(T) = \left( x_\alpha - \frac{x_0 - x_\alpha}{1 - \alpha} \alpha \right) + \frac{x_0 - x_\alpha}{1 - \alpha} - x_0 .$$

Además,  $d(t) > 0$  en  $(\alpha T, T)$  porque la solución está debajo de la rampa en ese intervalo. Por tanto,  $d'(t)$  debe ser negativa en  $T$  y como consecuencia,  $\frac{B_0}{T} - v_0 \leq 0$ .

Probemos ahora el recíproco, viendo cuales de las posibilidades para  $B_0$  dadas en la demostración del Teorema 5.4 son compatibles con las propiedades de la solución obtenidas como consecuencia de (5.6). Por la Proposición 5.14  $x_0 > x_\alpha$  y por tanto,

$$B_0(\alpha) > \frac{x_\alpha - x_0}{\alpha T}.$$

Esto es, no es posible el primer caso. El segundo tampoco puede darse puesto que  $x(t^*) > x_\alpha$ . En cuanto a la tercera opción no puede ocurrir por la forma de la solución, que hace que la derivada en  $x_\alpha$  sea negativa. Ahora bien si  $B_0(\alpha) = \frac{x_0 - x_\alpha}{1 - \alpha}$  (opción 5) habríamos terminado.

Veamos que la opción 4 tampoco es posible, por reducción al absurdo. Supongamos que existe un tiempo  $t^* \in (\alpha T, T)$  donde la solución es estrictamente mayor que la rampa dada por  $B_0 = \frac{x_0 - x_\alpha}{1 - \alpha}$ . En ese caso,  $x_\alpha^*(t)$  no sería convexa en  $(\alpha T, T)$  porque la recta que une  $(\alpha T, x_\alpha)$  con  $(T, x_0)$  estaría sobre ella en  $t^*$ . Además, puesto que la solución no es cóncava en este intervalo, ha de verificarse por el Lema 5.16 que existe un  $\bar{t} \in (\alpha T, T)$  donde pasa de convexa a cóncava. Ahora bien, esto implica que  $d(t) = x_\alpha^*(t) - x_r(t) < 0$  en  $(\alpha T, T)$  lo que es contradictorio puesto que en  $t^*$  es positiva. En efecto,  $d(T) = 0$ ,  $d'(T) \geq 0$  y  $d(t)$  es cóncava (estrictamente) en  $(\bar{t}, T)$  por hipótesis. Luego, debe ser estrictamente negativa en  $(\bar{t}, T)$ . Por otro lado,  $x_\alpha^*(t)$  es convexa en  $(\alpha T, \bar{t})$  y por tanto está debajo de la recta que une los puntos,  $(\alpha T, x_\alpha)$  y  $(\bar{t}, x_\alpha(\bar{t}))$ , extremos del intervalo, que a su vez está bajo la rampa. En consecuencia,  $d(t) < 0$  también en  $(\alpha T, \bar{t})$ . ■

**Nota 5.17** *Obsérvese que la implicación directa se verifica siempre y no necesita la hipótesis de separación de ceros.*

Además, bajo (5.6) es posible conseguir una cota de la amplitud de la solución, esto es, de

$$\Delta^* x = \max x_\alpha^*(t) - \min x_\alpha^*(t) .$$

**Teorema 5.18** *Bajo la hipótesis (5.6),*

$$\Delta^* x < \frac{T}{\gamma}(1 - \alpha) .$$

**Demostración.**

Como ya se ha dicho en la Proposición 5.13, de la condición (5.6) se deduce la existencia de un único máximo (global)  $x(t_1)$  con  $t_1 \in (0, \alpha T)$  y un único mínimo (global)  $x(t_2)$  con  $t_2 \in (\alpha T, T)$ . Además, la solución es positiva por la Proposición 5.10 y por tanto,

$$x'' + \gamma x' < u .$$

Entonces, integrando entre los puntos críticos obtenemos la cota de la amplitud. Esto es, integramos en  $(t_2 - T, t_1)$  ,

$$\gamma \Delta^* x < \int_{t_2-T}^{t_1} u(t) dt = \int_{t_2-T}^0 dt = T - t_2 < T(1 - \alpha) .$$

■

**Nota 5.19** *El Teorema anterior se puede interpretar como un control de la calidad de salida del convertidor de corriente continua. Lo deseable es que la función  $x$  sea constante y no hubiera diferencias de voltaje para que el funcionamiento sea óptimo. La cantidad  $\Delta^* x$  mide la oscilación de salida y por tanto, la fórmula anterior puede entenderse como una estimación de la calidad de la señal.*



# Bibliografía

- [1] T. ABBOT, H.F.ROGER, N.B. TUFILLARO, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley (1992).
- [2] J.M. ALONSO, R. ORTEGA, *Roots of unity and unbounded motions of an asymmetric oscillator*, Journal Differential Equations **143**, 201 – 220 (1998).
- [3] J. ANGELOVA, A. DISHLIEV, *Optimization problems in population dynamics*, Applicable Analysis **69** no. 3-4, 207 – 221 (1998).
- [4] A. EL AROUDI, M. DEBBAT, R. GIRAL, G. OLIVAR, L. BENADERO, E. TORIBIO, *Bifurcations in DC-DC switching converters: review of methods and applications*, International Journal of Bifurcation and Chaos Appl. Sci. Engrg. **15** no.5, 1549 – 1578 (2005).
- [5] N. V. AZBELEV, A. I. DOMOSHNITSKI, *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **66**, Longman Scientific and Technical, Harlow; John Wiley and Sons, New York (1993).
- [6] AUBIN, J.P., A. CELLINA, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Berlin (1984).
- [7] A. EL AROUDI, M. DEBBAT, R.GIRAL, L. BENADERO, E. TORIBIO, *Bifurcations in DC-DC switching converters: Review of methods and applications*, International J. of Bifurcations and Chaos **15** no.5, 1549–1578 (2005).
- [8] V.I. BABITSKY, *Theory of vibro-impact systems and applications*, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [9] C. BATTLE, G. OLIVAR, E. FOSSAS, *Bifurcations and chaos in converters. Discontinuous vector fields and singular Poincaré maps*, Nonlinearity **13** no. 4, 1095 – 1121 (2000).
- [10] M.DI BERNARDO, C. BUDD, A. CHAMPNEYS, *Grazing, skipping and sliding: Análisis of the non-smooth dynamics of DC/DC back converter*, Nonlinearity **11**, 859 – 890 (1998).
- [11] D. BIDEAU, A. VALANCE, *Dynamics of a ball bouncing on a rough inclined line*, Physical Review E **57** Issue 2, 1886 – 1894 (1998).

- [12] D. BIEL, E. FOSSAS, R. GRÑÓ, *Quasi-sliding control based on pulse width modulation, zero average and the L2 norm*, Advances in Variable Structure System, Analysis, Integration and Applications, Ed. World Scientific 335 – 344 (2001).
- [13] D. BONHEURE, C. FABRY, *Periodic motions in impact oscillators with perfectly elastic bounces*, Nonlinearity **15**, 1281 – 1297 (2002).
- [14] DIETER BOTHE, *Periodic solutions of non-smooth friction oscillators*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik **50** no. 5, 779 – 808 (1999).
- [15] ALBERTO CABADA, EDUARDO LIZ, *Boundary value problems for higher order ordinary differential equations with impulses*, Nonlinear Analysis **32** no. 6, 775 – 786 (1998).
- [16] ALBERTO CABADA, EDUARDO LIZ, SUSANA LOIS *Green's function and maximum principle for higher order ordinary differential equations with impulses*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **30** no. 2, 435 – 446 (2000).
- [17] J. CAMPOS, M.J. ROMERO-VALLÉS, PEDRO J. TORRES AND J.J.P. VEERMAN, *Dynamics of a jumping particle on a staircase profile*, Chaos, Solitons and Fractals **Vol 32**, Issue 2, 415–426 (2007).
- [18] J. CAMPOS, M.J. ROMERO-VALLÉS AND PEDRO J. TORRES, *A fractal in a bouncing ball model*, International Journal Qualitative Theory of Differential Equations and Applications, **Vol. 1**, 76 – 87 (2007).
- [19] J.A. CARRILLO, C. CERCIGNANI, I.M. GAMBA, *Steady states of a Boltzmann equation for driven granular media*, Physical Review E. Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics E **62** no. 6 part A, 7700 – 7707 (2000).
- [20] N. CHERNOV, G. GALPERIN, *Search light in billiard tables*, Regular and Chaotic Dynamics, **V.8**, no. 2, 225 – 241 (2003).
- [21] P.W. CLEARY, *Modelling granular flows with complex boundary geometries*, Computational Techniques and Applications:CTAC93, World Scientific, Singapore, 148 – 156 (1994).

- [22] K.M. CONE, R.I. ZADOKS, *A numerical study of an impact oscillator with the addition of dry friction*, Journal of Sound and Vibration, **188** no.5, 659 – 683 (1995). Physics of dry granular media. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute Summer School held in Cargèse, September 15–26, 1997. Edited by H. J. Herrmann, J.-P. Hovi and S. Luding. NATO Advanced Science Institutes Series E: Applied Sciences, 350. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1998
- [23] D. DAESCU, M.J. ROMERO-VALLÉS, PEDRO J. TORRES, J.J.P. VEERMAN, *Avalanches and Impact Systems*, preprint.
- [24] DONG DAI, CHI K. TSE, XIKUI MA, *Symbolic analysis of switching systems: application to bifurcation analysis of DC/DC switching converters*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I Regular Papers **52** no. 8, 1632 – 1643 (2005).
- [25] J.B. DEANE, D.C. HAMILL, *Analysis, simulation and experimental study of chaos in the DC/DC buck converter*, Power Electronics Specialists Conf., 491 – 498, San Antonio TX (1990).
- [26] K. DEIMLING, *Multivalued Differential Equations*, Walter De Gruyter, Berlin (1992).
- [27] K. DEIMLING, *Resonance and Coulomb friction*, Differential and Integral Equations **7**, 759 – 765 (1994).
- [28] K. DEIMLING, P. SZILAGYI, *Periodic solutions of dry friction problems*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik **45**, 53 – 60 (1994).
- [29] C.I. DELMAN, G. GALPERIN, *Billiards with Pockets: A separation Principle and Bound for the Number of Orbit Types*, Communications in Mathematical Physics, 230, 463 – 483 (2002).
- [30] DU, ZHENG DONG; LI, YURONG; ZHANG, WEINIAN; *Type I periodic motions for nonlinear impact oscillators*, Nonlinear Analysis **67** no. 5, 1344 – 1358 (2007).
- [31] DU, ZHENG DONG; LI, YURONG; ZHANG, WEINIAN; *Type II periodic motions for nonlinear impact oscillators*, Nonlinear Analysis **68** no. 9, 2681 – 2696 (2008).

- [32] M.L. FERGUSON, B.N. MILLER, M.A. THOMPSON, *Dynamics of a gravitational billiard with a hyperbolic lower boundary*, Chaos **9** no. 4, 841 – 848 (1999).
- [33] E. FERMI, *On the Origin of the Cosmic Radiation*, Physical Review **75**, 1169 – 1174 (1949).
- [34] MICHAL FEČKAN, *Chaotic behaviour of singular impulsive ordinary differential equations*, Advances in difference equations (Veszprém, 1995), 189 – 196, Gordon and Breach, Amsterdam (1997).
- [35] A.F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Kluwer Ac. Pub., London (1988).
- [36] S. FELDT, J. S. OLAFSEN, *Inelastic Gravitational Billiards*, Physical Review Letters **94**, 224102 (2005).
- [37] E. FOSSAS E, G. OLIVAR, *Study of chaos in the buck converter*, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications **vol. 43** n0. 1, 13 – 25 (1996).
- [38] E. FERMI, J. PASTA, S. ULAM *Studies of non linear problems*, Document LA-1940 (1955).
- [39] E. FOSSAS, A. ZINOBER, *Adaptive tracking control of nonlinear power converters*, Proceedings IFAC Workshop on Adaptation in Control and Signal Processing. Connobio. Italia, 246–266 (2001).
- [40] A. GOLDSHTEIN, M. SHAPIRO, *Mechanics of collisional motion of granular materials. I. General hydrodynamic equations*, Journal of Fluid Mechanics **282**, 75 – 114 (1995).
- [41] E. GUTKIN, *Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems*, Regular Chaotic Dynamic **8** (1), 1 – 13 (2003).
- [42] K. P. HADELER, CHRISTINA KUTTLER, *Dynamical models for granular matter*, Granular Matter **2**, 9 – 18, Springer-Verlag (1999).
- [43] O. HÁJEK, *Discontinuous Differential Equations, I*, Journal of Differential Equations **32**, 149 – 170 (1979).

- [44] J. HALE, H. KOCACK, *Dynamics and Bifurcations*, Springer, New York (1991).
- [45] C. HALSE, M. HOMER, M. DI BERNARDO, *C-bifurcations and period-adding in one-dimensional piecewise-smooth maps*, Chaos Solitons Fractals **18** no. 5 (2003).
- [46] *Physics of dry granular media. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute Summer School held in Cargèse, September 15–26, 1997* editado por H. J. Herrmann, J.P. Hovi y S. Luding. NATO Advanced Science Institutes Series E: Applied Sciences, **350**, Kluwer Academic Publishers Group (1998).
- [47] S.J. HOGAN, *On the dynamics of rigid-block motion under harmonic forcing*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **425** no. 1869, 441 – 476 (1989).
- [48] P.J. HOLMES, S.W. SHAW, *A periodically forced piecewise linear oscillator*, Journal of Sound and Vibration **vol. 90** no. 1, 129 – 155 (1983).
- [49] H. M. JAEGER, C.-H. LIU, S. R. NAGEL, *Relaxation at the Angle of Repose*, Physical Review Letters **62** no. 1, 40 – 43 (1989).
- [50] H. M. JAEGER, S. R. NAGEL, R. P. BEHRINGER, *The Physics of Granular Materials*, Physics Today April, 32 – 38 (1996).
- [51] E.KANSO, P. PAPADOPOULOS, *Dynamics of pseudo-rigid ball impact on rigid foundation*, International Journal of Non-Linear Mechanics **Vol. 39**, Issue 2 299 – 309 (2004).
- [52] S.V. KHIZGIYAYEV, *Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry "stick-slip" friction*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics **71** 905 – 913 (2007).
- [53] P. KOWALCZYK, *Robust chaos and border-collision bifurcations in non-invertible piecewise-linear maps*, Nonlinearity **18** no. 2, 485 – 504 (2005).
- [54] P. KOWALCZYK, M. DI BERNARDO, *Two-parameter degenerate sliding bifurcations in Filippov systems*, Physica D **204** no. 3-4, 204 – 229 (2005).
- [55] M. KUNZE, *Non-Smooth dynamical systems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, New York (2000).

- [56] M. KUNZE, T. KÜPPER, *Non-smooth dynamical systems: an overview*, Ergodic theory, analysis, and efficient simulation of dynamical systems, Springer, Berlin, 431 – 45 (2001).
- [57] M. KUNZE, T. KÜPPER, *Qualitative bifurcation analysis of a non-smooth friction-oscillator model*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik **48**, 87 – 101 (1997).
- [58] V. LAKSHMIKANTHAM, D. BAINOV, P. S. SIMEONOV, *Theory of Impulsive Differential Equations*, Series in Modern Applied Mathematics, vol. 6, World Scientific, New Jersey (1989).
- [59] A.C. LAZER, J.P. MCKENNA, *Large amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis*, SIAM Review **32**, 537 – 578 (1990).
- [60] A.C. LAZER, P.J. MCKENNA, *Periodic bouncing for a forced linear spring with obstacle*, Differential Integral Equations **5 no. 1**, 165 – 172 (1992).
- [61] R.I. LEINE, D.H. VAN CAMPEN, B.L. VAN DE VRANDE, *Bifurcations in nonlinear discontinuous systems*, Nonlinear Dynamics **23**, 105 – 164 (2000).
- [62] J.E. LENNARD-JONES, *Cohesion*, Proceedings of the Physical Society **43**, 461 – 482 (1931).
- [63] LIGUO ZHANG, YANGZHOU CHEN, PINGYUAN CUI, *Stabilization for a class of second-order switched systems*, Nonlinear Analysis **62**, 1527 – 1535 (2005).
- [64] EDUARDO LIZ, RODRIGO L. POUSO, *Upper and lower solutions with "jumps"*, Journal Mathematical Analysis and Applications **222 no. 2**, 484 – 493 (1998).
- [65] C.R. MACCLUER, *The Many Proofs and Applications of Perron's Theorem*, SIAM Rev. **42**, 487 – 498 (2000).
- [66] B. MANDELBROT, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and Company, New York (1983).

- [67] A. METHA, C.C. BAKER, *Vibrated Powders: A microscopic approach*, Physical Review Letters **67**, 394 – 397 (1991).
- [68] J.-J. MOREAU, *Numerical experiments in granular dynamics: Vibration-induced size segregation*, Contact Mechanics, M. Raous, M. Jean, and J.-J. Moreau, eds., Plenum Press, Proceedings of the 2nd Contact Mechanics International Symposium, 1994, Carry-Le-Rouet, France, New York, 347 – 158 (1995).
- [69] J.C. MURCIA, L.M. PINEDA, W.L. VARGAS, *Impacto inelastico de una partícula sobre una superficie*, Ciencia e Ingeniería Neogranadina, **16** no.1, 80 – 91 (2006).
- [70] DIEGO MAZA, GRUPO DE MEDIOS GRANULARES DE LA UNIVERSIDAD DE NAVARRA, *Estudio experimental de la convección granular*, [http://fisica.unav.es/granular/archis/conv\\_granular.pdf](http://fisica.unav.es/granular/archis/conv_granular.pdf)
- [71] SVETOSLAV I. NENOV, *Impulsive controllability and optimization problems in population dynamics*, Nonlinear Analysis **36** no. 7, Ser. A: Theory Methods, 881 – 890 (1999).
- [72] R. ORTEGA, *Dynamics of a forced oscillator having an obstacle*, Variational and topological methods in the study of nonlinear phenomena (Pisa, 2000), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **49**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 75 – 87 (2002).
- [73] R. ORTEGA, *Boundedness in a piecewise linear oscillator and a variant of the small twist theorem*, Proceedings London Mathematical Society, **79**, 381 – 413 (1999).
- [74] P. PAINLEVÉ, *Sur les lois du frottement de glissement*, C.R. Acad. Sci. Paris **121**, 112 – 115 (1895).
- [75] LARS POPKEN, PAUL W. CLEARY, *Comparison of kinetic theory and discrete element schemes for modelling granular Couette flows*, Journal Computational Physics **155** no. 1, 1 – 25 (1999).
- [76] K. POPP, *Non-smooth mechanical systems*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **Vol. 64**, No. 5, pp. 765 – 772, Elsevier (2000).



- [77] DINGBIAN QIAN, PEDRO J. TORRES, *Periodic motions of linear impact oscillators via the successor map*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **36** no. 6, 1707 – 1725 (2005).
- [78] WEN SHEN, *On the shape of avalanches*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **339**, no. **2**, 828 – 838 (2008).
- [79] PEDRO J. TORRES, *Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem*, Journal Differential Equations **190** no. 2, 643 – 662 (2003).
- [80] P.C. TUNG, S.W. SHAW, *The dynamics of an impact print hammer*, ASME J. Vibration Stress Reliability in Design, Vol. 110, 193 – 199 (1988).
- [81] G. L. VASCONCELOS, J. J. P. VEERMAN, *Geometrical Models for Grain Dynamics*, Physica A **271**, 251 – 259 (1999).
- [82] J. J. P. VEERMAN, *A solvable model for gravity driven granular dynamics*, Dynamical Systems **Vol. 20** Issue 2, 237 – 254 (2005).
- [83] J.J.P. VEERMAN, F.V. CUNHA-JR AND J.L. VASCONCELOS, *Chaotic Behaviour in a Model for Grain Dynamics*, Physica A **295**, 261 – 267 (2001).
- [84] J.J.P. VEERMAN, F.V. CUNHA-JR AND J.L. VASCONCELOS, *Dynamics of a granular particle on a rough surface with staircase profile*, Physica D **168/169**, 220 – 234 (2002).
- [85] J. J. WYLIE, Q. ZHANG, *Periodic orbits of a one-dimensional inelastic particle system*, Comptes Rendus **339**, 603 – 606 (2004).
- [86] V. ZHARNISTSKY, *Inestablity in Fermi-Ulam 'ping-pong' problem*, Nonlinearity **11**, 1481 – 1487 (1998).
- [87] V. ZHARNISTSKY, *Quasiperiodic Motion in the Hamiltonian Systems of the Billiard Type*, Physical Review Letters, **81**, Issue 22, 4839 – 4842 (1998).
- [88] V. ZHARNISTSKY, *Invariant curve theorem for quasiperiodic twist mappings and stability of motion in the Fermi-Ulam problem*, Nonlinearity **13**, 1123 – 1136 (2000).