

# Existencia y estabilidad de soluciones periódicas en ecuaciones con singularidades

Alexánder Gutiérrez Gutiérrez



Universidad de Granada  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemática Aplicada  
Granada  
2012

## **Existencia y estabilidad de soluciones periódicas en ecuaciones con singularidades**

Alexánder Gutiérrez G.

Disertación presentada en sesión pública el 21 de Junio de 2012, en el Salón de Grados de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, para optar a el título de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

Director: Dr. D. Pedro José Torres Villarroja

Jurados, Prof. Drs. D.:

Rafael Ortega Ríos (U. de Granada)

Daniel Franco Leis (U. Nacional de Educación a Distancia)

Carlos Escudero Liebana (U. Autónoma de Madrid)

Rogério Martins (U. Nova de Lisboa)

Antonio Jesús Ureña (U. de Granada)

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Teoría del Grado . . . . .	7
2.1.1. Grado en dimensión finita . . . . .	7
2.1.2. Grado en dimensión infinita . . . . .	11
2.1.3. Grado de Coincidencia . . . . .	13
2.2. Índice de puntos fijos . . . . .	17
2.3. Estabilidad e índice de soluciones periódicas . . . . .	20
2.4. Índice y espacio de funciones periódicas . . . . .	24
2.5. Sub-super soluciones . . . . .	26
<b>3. Soluciones periódicas de la ecuación de Liénard con una o dos singularidades débiles</b>	<b>29</b>
3.1. Resultados auxiliares . . . . .	31
3.2. Demostración del resultado principal de este Capítulo. . . . .	33
3.3. Soluciones periódicas asintóticamente estables. . . . .	36
3.4. Ejemplos y comparación de resultados. . . . .	37
<b>4. Bifurcación de nodo-silla en un MEMS electrostático canónico no autónomo</b>	<b>41</b>
4.1. Una ecuación singular equivalente. . . . .	43
4.2. Cotas a priori. . . . .	45
4.3. Demostración de nuestros resultados . . . . .	46
4.3.1. Resultado de existencia . . . . .	47
4.3.2. Resultado de estabilidad . . . . .	50
4.4. Aplicación al modelo original de MEMS. . . . .	52

<b>5. La ecuación de Lazer-Solimini con retraso dependiente del estado</b>	<b>55</b>
5.1. Cotas a priori. . . . .	56
5.2. Demostración de los resultados principales de este Capítulo. . . . .	60
5.3. Demostración alternativa de los resultados principales . . . . .	61
<b>Comentarios finales</b>	<b>64</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>74</b>

# Índice de figuras

2.1.1.Valores posibles del Grado en $\mathbb{R}$ . . . . .	9
2.1.2.Ilustración del número de vueltas $\frac{1}{2}(\theta(b) - \theta(a))$ . . . . .	10
2.2.1.Valores de índice topológico en el caso unidimensional. . . . .	18
3.2.1.En blanco la región $D$ y en tonos grises el exterior de $D$ . . . . .	34
3.4.1.Regiones donde se satisfacen las condiciones (3.4.2), (3.0.2), para el ejemplo 3.4.1. . . . .	38
3.4.2.Para el ejemplo 3.4.2 : (a) Comparación (3.4.2) con (3.0.2). (b) Intervalo $[l'_1, l'_2]$ que satisfacen (3.0.2) y (3.3.1) para cualquier frecuencia $w > 0$ . . . . .	39
3.4.3.Regiones donde se satisfacen las condiciones (3.4.4) y (3.0.2) para el ejemplo 3.4.3. . . . .	40
4.0.1.Modelo masa-resorte que idealiza la acción electrostática de un sistema micro-electro-mecánico. . . . .	42
4.0.2.Ilustración de la bifurcación nodo-silla en el caso de voltaje constante en la ecuación (4.0.1). . . . .	43



*A mi esposa Katherine  
por regalarme día a día  
alegría, sosiego y amor.*





# Agradecimientos

Le doy mis más sinceros agradecimientos a mi director el Profesor Pedro J. Torres, por ser mi guía en este viaje por el mundo del análisis no lineal y por su disposición e inconmensurable paciencia para conmigo. También me gustaría agradecer al Profesor Cristian Bereanu por su interés en mi trabajo y sus oportunas sugerencias.

De otro lado, agradezco a mi colega Andrés M. Rivera, por animarme a seguir estudiando ayudándome a abrir una puerta que estuvo cerrada por más de diez años, también a mis colegas Edgar A. Valencia y Pedro P. Cárdenas por estar prestos con las gestiones de mi comisión de doctorado año tras año.

Mil gracias a mi esposa Katherine por su incondicional apoyo y dulce compañía en esta etapa de mi vida, a mis padres y hermana, por estar cerca de mí a pesar de la distancia, a todas las personas que me han brindado su generosa hospitalidad haciéndome sentir como en casa, en especial a Rodri, Stephan, Giacomo, Antonia y los Manolos y Luises.

He de agradecer el apoyo institucional de la Universidad Tecnológica de Pereira, la Fundación Carolina y la Universidad de Granada, que también fueron de gran ayuda para llegar hasta este punto.



# Resumen del contenido

Con la ayuda de métodos topológicos se demuestra existencia y estabilidad de soluciones periódicas para ciertas ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden con singularidades en la variable de estado. En el Capítulo 1 hacemos una breve descripción del estado del arte de las ecuaciones diferenciales con singularidades. En el Capítulo 2 presentamos las herramientas topológicas que usaremos en esta memoria: métodos de sub-super soluciones, teoría de grado y algunas propiedades del índice topológico. En el Capítulo 3 nos ocupamos de la existencia y estabilidad de soluciones periódicas de ecuaciones no lineales del tipo Liénard con una o dos singularidades débiles. El método de la demostración se basa en la construcción de una región positivamente invariante del flujo combinado con propiedades del índice topológico. En el Capítulo 4, usando cotas a priori, grado de Leray-Schauder e índice topológico, nosotros damos resultados de existencia, multiplicidad y estabilidad de soluciones periódicas de un modelo masa-resorte no autónomo que idealiza la acción electrostática de un sistema micro-electro-mecánico (MEMS). Una bifurcación nodo-silla se revela, en forma análoga al caso autónomo. Finalmente, en el Capítulo 5, usando grado de Leray-Schauder y cotas a priori, se obtienen condiciones suficientes para la existencia de soluciones periódicas para familias de ecuaciones del tipo Lazer-Solimini con retraso dependiente del estado.



# Notación

$u^+$   $\max\{0, u\}$ .

$u^-$   $\max\{0, -u\}$ .

$\mathbb{R}_+$  Números reales no negativos.

$L^p(a, b)$  Con  $p \in [1, \infty[$ , funciones  $u$  de  $(a, b)$  en  $\mathbb{R}$  tal que

$$\|u\|_p = \left( \int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

$L^\infty(a, b)$  Funciones  $u$  de  $(a, b)$  en  $\mathbb{R}$ , medibles tales que  
 $\|u\|_\infty = \sup |u(x)| < \infty$ .

$L^p(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  Funciones  $u$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ ,  $T$ -periódicas y  
 $\left( \int_0^T |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$ .

$C(a, b)$  Funciones  $u$  continuas de  $(a, b)$  en  $\mathbb{R}$ .

$C^k(a, b)$  Funciones de  $(a, b)$  en  $\mathbb{R}$  con  $k$ -ésima derivada continua.

$C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  Funciones  $u$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ ,  $T$ -periódicas y continuas.

$C^k(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  Funciones  $u$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ ,  $T$ -periódicas y de clase  $C^k$ .

$\alpha \ll \beta$  Las funciones  $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\alpha(t) \leq \beta(t)$  para todo  $t \in [a, b]$  y la desigualdad estricta se satisface en un subconjunto de medida de Lebesgue positiva.

$\bar{p}$  Es el valor medio de  $p(\zeta) \in L^1(0, T)$ , es decir,  
 $\bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$ .

---

## Capítulo 1

---

# Introducción

En esta tesis nos proponemos analizar existencia y estabilidad de soluciones periódicas para diversos tipos de problemas no lineales que tienen en común singularidades, entendiendo por singularidad la existencia de una discontinuidad en el término no lineal. Para caracterizar la existencia y estabilidad de soluciones se han empleado técnicas topológicas.

El origen de dichas técnicas se encuentra en los trabajos de C. F. Gauss y A. L. Cauchy, retomado a finales del siglo XIX por L. Kronecker, J. Hadamard, H. Poincaré y L. E. J. Brouwer, quien finalmente desarrolló la teoría topológica de funciones continuas en espacios de dimensión finita con la publicación [8] en 1911, esta teoría es conocida como grado de Brouwer. Una de las consecuencias del grado de Brouwer es el famoso teorema de punto fijo de Brouwer que varios autores extendieron a dimensión infinita como G. D. Birkhoff y O. D. Kellogg en [7] a ciertos espacios de funciones, después Schauder en [75], presentó su teorema de punto fijo para operadores continuos que mapean en sí mismo un subconjunto compacto y convexo de un espacio de Banach. Una revisión reciente del estado del arte de la teoría topológica de puntos fijos puede consultarse en [9]. Finalmente, fueron J. Leray y J. Schauder en [47] quienes en 1934 publicaron una extensión de los resultados del grado de Brouwer a espacios de dimensión infinita conocida como grado de Leray-Schauder.

Gracias a las investigaciones de J. Leray, J. Schauder, E. Rothe, C. L. Dolph, M. A. Krasnoselskii entre otros, la teoría del grado topológico se aplica al estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias. Pues por ejemplo, dicha teoría nos permite formular la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales como el estudio del conjunto de soluciones de una ecuación de la forma  $f(x) = p$  en el espacio apropiado. Entretanto, el estudio de la estabilidad de soluciones periódicas usando teoría del grado es mucho más reciente, son pioneras las publicaciones de M. A. Krasnoselskii [44] con un criterio de inestabilidad para sistemas arbitrarios y R. Ortega [63, 65, 67] con criterios de estabilidad para ecuaciones diferenciales de segundo orden, que bajo ciertas condiciones puede extenderse a sistemas de ecuaciones [66]. La idea general propuesta por Ortega es reducir

el problema al estudio de las propiedades de estabilidad de puntos fijos de cierta sección del flujo, conocido como operador de Poincaré, aprovechando que el operador de Poincaré permite conocer la dinámica de la ecuación.

El estudio de las ecuaciones escalares de segundo orden con singularidades se puede remontar a un artículo de Nagumo [59] publicado en 1944. Destacamos este hecho debido a que parece ser poco conocido, pues por ejemplo en las publicaciones [56, 72, 73] se registran como las primeras referencias los artículos de los años sesenta de Forbat, Huaux y Derwindué [25, 32, 42]. Aunque la primera aplicación de grado topológico se debe a Fauré [29] donde estudia la existencia de soluciones periódicas para ecuaciones del tipo

$$u'' + cu' + \frac{u}{1-u} = e(t),$$

motivado por el movimiento de un pistón en un cilindro cerrado en un extremo y sometido a una fuerza periódica externa  $e(t)$  con valor medio cero, es decir,  $\bar{e} = 0$ , donde  $\frac{u}{1-u}$  es la fuerza restauradora de un gas perfecto y  $cu'$  es la fricción viscosa.

Otro ejemplo de singularidad no lineal surge de forma natural cuando se consideran fuerzas gravitatorias o electromagnéticas. Consideremos un espacio unidimensional, entonces la ecuación que describe el movimiento de una partícula con carga eléctrica bajo la influencia de un campo eléctrico generado por otra partícula con carga eléctrica situada en el origen y fuerza externa  $p$  es

$$x'' \pm \frac{1}{x^\alpha} = p(t), \quad \alpha > 0. \quad (1.0.1)$$

El signo + indica que las partículas tiene cargas contrarias, mientras el signo – indica que las partículas tienen la misma carga. Así que en la terminología clásica, se dice que la ecuación con el signo + (resp. –) tiene una singularidad atractiva (resp. repulsiva). A menudo, simplemente se habla del caso atractivo y repulsivo. La ecuación (1.0.1) también modela la ley de gravitación de Newton entre dos partículas y una fuerza externa  $p$ , una fija en el origen y la otra de masa unitaria moviéndose a su derecha (resp. izquierda), caso atractivo (resp. repulsivo). La naturaleza de la fuerza externa  $p(t)$  determina la dinámica de la ecuación. Cuando  $p(t)$  es periódica, Lazer y Solimini [46] demostraron, usando métodos de sub-super soluciones y argumentos topológicos, condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones periódicas.

De otro lado, cuando  $\alpha \geq 1$  en (1.0.1), se suele decir que se satisface la condición de "fuerza fuerte", término que fue introducido por Gordon [33]. Al definir el potencial asociado como

$$G(x) = \int_x^1 \frac{1}{s^\alpha} ds,$$

diremos que  $\frac{1}{x^\alpha}$  tiene una singularidad fuerte en cero si

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = +\infty.$$

En otro caso, cuando el límite es finito, se dice que la singularidad es débil. Después de integrar en (1.0.1) sobre todo un período, se hace evidente que una condición necesaria para la existencia de soluciones periódicas positivas (resp. negativas), en el caso atractivo, es  $\bar{p} > 0$  (resp.  $\bar{p} < 0$ ). La condición de fuerza fuerte se ha convertido en estándar en la literatura relacionada [12, 23, 24, 30, 37] incluso en los artículos clásicos de los cuarenta y sesenta que hemos citado con anterioridad. Pues por ejemplo, en presencia de una singularidad fuerte, la energía en cero se hace infinito y este hecho es de gran ayuda a la hora de establecer cotas a priori necesarias para la aplicación clásica de teoría del grado. Mientras que en el caso repulsivo, Lazer y Solimini [46] construyeron un ejemplo donde el valor medio de  $p(t)$  es negativo y sin embargo no existen soluciones periódicas si  $0 < \alpha < 1$ , es decir, cuando la singularidad es débil. En los últimos años el interés por soluciones periódicas de ecuaciones con singularidades débiles se ha incrementado, véase por ejemplo [15, 53, 61, 74, 77, 79, 78, 88]. Una revisión reciente de métodos topológicos y variacionales usados en la existencia de soluciones periódicas para ecuaciones con singularidades puede consultarse en [14, 72, 73] y la bibliografía citada en ellas. En los Capítulos 3 y 5 abordaremos la existencia de soluciones periódicas en casos concretos de ecuaciones diferenciales con singularidades débiles.

De otro lado, el estudio de la estabilidad de soluciones periódicas para ecuaciones con singularidades [13, 52, 76, 78, 81] no es muy extensa en comparación con el estudio de la existencia de dichas soluciones. En los capítulos 3 y 4 haremos uso de las técnicas topológicas desarrolladas en [63, 65, 68, 89] para establecer criterios de estabilidad de soluciones periódicas para el tipo de ecuaciones con singularidades concretas que serán establecidas más adelante.

A continuación contextualizamos los resultados obtenidos:

En el Capítulo 3 exponemos los resultados obtenidos en [34]. Consideramos la ecuación diferencial tipo Liénard

$$x'' + f(x)x' + g(x) = h(t),$$



donde  $h(t)$  es una fuerza externa periódica,  $f(x)$  es una función positiva que se interpreta como rozamiento y  $g(x)$  es la fuerza central, que suponemos estrictamente creciente con una o dos singularidades débiles. Nuestro resultado principal establece condiciones para la existencia de soluciones periódicas. La idea de la demostración se basa en la técnica expuesta por Nagumo [59], cuando  $g(x)$  tiene singularidades fuertes, y consiste en construir una región positivamente invariante del flujo y aplicar el Teorema de punto fijo de Brouwer. La demostración de unicidad y estabilidad asintótica de soluciones periódicas se obtuvo tomando las técnicas de [89].

También dedicamos un apartado a mostrar que nuestros resultados de existencia y estabilidad son independientes de los obtenidos en [61, 88]. Concretamente, en el caso  $h(t) = a \cos(\omega t)$ , presentamos ejemplos donde nuestros resultados son válidos mientras los expuestos en [61, 88] no.

Aunque los resultados presentados por Fonda-Zanolin [31] para ecuaciones de Liénard no se pueden aplicar en nuestro caso, es interesante anotar que ellos también demuestran la existencia de soluciones acotadas con la ayuda de conjuntos positivamente invariantes cuando  $h$  es no acotada, tal que  $g$  y  $h$  están relacionadas por la condición generalizada de Landesman-Lazer presentada en [69] y la primitiva de  $f$  satisface cierto criterio de crecimiento.

En el Capítulo 4 estudiamos la multiplicidad y estabilidad de soluciones periódicas para ecuaciones del tipo

$$x'' + cx' + kx + \frac{a^2(t)}{x^2} = s,$$

dependiendo del parámetro  $s$ ,  $a(t)$  es una función positiva y periódica,  $c, k$  son constantes positivas. Hemos estudiado este problema con la finalidad de aplicar nuestros resultados a modelos masa-resorte que idealiza la acción electrostática de un sistema micro-electro-mecánico, cuyas siglas en inglés son MEMS (micro-electro-mechanical system), que se ha convertido en canónico en la literatura relacionada y ha sido estudiado por más de 40 años después de su introducción por Nathanson et. al. [60] en 1967. Aunque una bibliografía completa está fuera de nuestro alcance, nos gustaría referirnos a [1, 2, 5, 43, 87] y la bibliografía citada allí. A pesar del gran número de documentos relacionados, la comprensión de las matemáticas de este sistema aún está lejos de ser completa.

En particular, nos llamó la atención [1] debido a que los autores analizan en detalle los llamados "regímenes dominados por la viscosidad", lo cual sucede cuando el coeficiente de amortiguamiento  $c$  es muy grande y los efectos de amortiguación dominan sobre los efectos de inercia. Esto los llevó a reducir la ecuación diferencial de segundo orden a una de primer orden, dejando al descubierto una bifurcación nodo-silla.

El conjunto de parámetros admisibles para los cuales existen soluciones periódicas resulta ser un intervalo acotado inferiormente, cuyo valor crítico  $s_0$  se encuentra en un intervalo cerrado que se define explícitamente. Además mostramos que efectivamente la ecuación considerada tiene bifurcación nodo-silla en el umbral de valores de  $s_0$ . Los resultados obtenidos se encuentran en [36] y son aplicados a MEMS.

En la literatura matemática, este tipo de resultados de multiplicidad se conoce como de Ambrosetti-Prodi debido a la clásica publicación de los autores [4] en 1972 y ha dado lugar a una gran variedad de resultados [3, 19, 28, 38, 64]. En particular, en [28] se establecen condiciones de multiplicidad para una ecuación regular de la forma  $u'' + cu' + g(t, u) = s$ , donde la función  $g$  satisface la condición de coercitividad

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} g(t, u) = +\infty, \quad \text{uniformemente en } t.$$

Sin embargo, la presencia de la singularidad en nuestra ecuación impide la aplicación directa de ese resultado. Tampoco se pueden aplicar directamente los resultados de estabilidad presentados en [64] debido a las condiciones de regularidad impuestas sobre  $g$ .

Finalmente en el Capítulo 5, exploramos las ecuaciones diferenciales con retraso dependiente del estado y singularidades. Los sistemas con retraso han sido el foco de atención de muchos investigadores como una respuesta de sus múltiples aplicaciones. En particular, la variable dependiente con retraso juega un papel clave en una gran variedad de modelos biológicos y mecánicos (véase por ejemplo [84] y su bibliografía). Aunque las ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden con retraso han sido consideradas en algunos artículos recientes, por ejemplo [27, 40, 51, 85], a nuestro entender la inclusión de las singularidades con retraso no ha sido cubierto por la bibliografía existente hasta el momento.

Cuando se habla de las fuerzas gravitacionales, la introducción de los efectos relativistas tiene sentido. Una de las consecuencias conocidas de la Relatividad Especial es que el estado dependiente tiene retrasos [26, 82]. Con esta idea en mente, proponemos de forma natural el estudio de la existencia de soluciones periódicas para ecuaciones del tipo Lazer-Solimini con variable dependiente de retraso. Hemos obtenido dos resultados principales, uno parece ser nuevo incluso para la ecuación sin retraso, mientras el otro es una generalización del resultado clásico de Lazer-Solimini, que se recupera al tomar la función de retraso idénticamente cero. El método de las demostraciones se basa en una combinación de grado Leray-Schauder y cotas a priori, ha sido publicado en [35].



---

## Capítulo 2

---

# Preliminares

En este capítulo presentamos las nociones teóricas básicas, con el propósito de establecer la notación y lenguaje necesario para plantear los resultados principales de esta memoria. Primero presentaremos algunas propiedades básicas de teoría de grado que usaremos para demostrar la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En los dos apartados siguientes presentamos algunos resultados del índice topológico, debidos a [63, 65, 68, 67], que serán usadas para determinar la estabilidad de las soluciones periódicas. En el penúltimo apartado, presentamos una relación del índice topológico y el espacio de funciones periódicas. Finalmente, presentamos el método de sub y super soluciones y su relación con la estabilidad de soluciones periódicas.

## 2.1. Teoría del Grado

En este apartado presentamos las propiedades básicas de teoría de grado topológico que usaremos en el resto de la memoria, por comodidad todos las propiedades del grado las presentaremos sobre funciones continuamente diferenciables, extensiones a espacios y funciones mas generales puede consultarse en [22, 50]. Primero presentamos las propiedades del grado topológico en dimensión finita, conocido como grado de Brouwer, después una extensión del grado a espacios de Banach (posiblemente de dimensión infinita), conocido como grado de Leray-Schauder y finalmente presentamos el grado de coincidencia de Mawhin [54], que relaciona el grado de Brouwer con el grado de Leray-Schauder para operadores lineales de Fredholm con índice cero.

### 2.1.1. Grado en dimensión finita

Primero hacemos frente al caso de espacios de dimensión finita, con la construcción del grado de Brouwer [8] en 1911.

**Teorema 2.1.1** (Existencia y unicidad del grado). *Existe una única función  $\text{deg}$  asocia a un conjunto abierto y acotado  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , y a cualquier función continua  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $0 \notin f(\partial\Omega)$  un número real*

$$\text{deg}(f, \Omega),$$

con las siguientes propiedades:

- **A1 (Normalización)**. Si  $0 \in \Omega$ , entonces  $\text{deg}(I, \Omega) = 1$ , donde  $I$  denota la función identidad.
- **A2 (Aditividad)**. Si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son dos subconjuntos abiertos y disjuntos de  $\Omega$  tales que  $0 \notin f(\overline{\Omega} / (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ , entonces  $\text{deg}(f, \Omega) = \text{deg}(f, \Omega_1) + \text{deg}(f, \Omega_2)$ .
- **A3 (Invarianza por homotopía)**. Si  $F: \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua tal que  $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$ , entonces  $\text{deg}(F(\cdot, \lambda), \Omega)$  es independiente de  $\lambda \in [0, 1]$ .

El número  $d(f, \Omega)$  es el grado topológico de Brouwer, o simplemente el grado de  $f$  respecto al conjunto  $\Omega$ .

Diremos que  $y$  es un valor regular de  $f \in C^1(\Omega)$  si para todo  $x \in f^{-1}(y)$  tenemos que  $\det Jf(x) \neq 0$  donde  $Jf(x)$  es la matriz jacobiana asociada.

Ahora presentamos algunas propiedades destacadas del grado:

**Corolario 2.1.2.** *Sea  $\Omega$  un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$  y  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua tal que  $0 \notin f(\partial\Omega)$ . Además de A1, A2 y A3 se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. **Excisión**. Si  $\Omega_1$  es un subconjunto abierto de  $\Omega$  y  $0 \notin f(\overline{\Omega} / \Omega_1)$ , entonces  $\text{deg}(f, \Omega) = \text{deg}(f, \Omega_1)$ .
2. **Existencia**. Si  $\text{deg}(f, \Omega) \neq 0$  entonces existe un  $x \in \Omega$  tal que  $f(x) = 0$ .
3. Si  $f = g$  en  $\partial\Omega$  entonces  $\text{deg}(f, \Omega) = \text{deg}(g, \Omega)$ .
4. Si  $f \in C^1(\Omega)$  y  $0$  es un valor regular de  $f$ , entonces

$$\text{deg}(f, \Omega) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \text{sign}(\det Jf(x)), \text{ y tal suma es finita.}$$

5. El valor de  $\text{deg}(f, \Omega)$  es siempre un número entero.

En el caso unidimensional,  $n = 1$ , es fácil caracterizar el grado. Sea  $\Omega$  un intervalo  $]a, b[$  y  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(x) \neq 0$  para  $x \in \{a, b\}$ . Consideremos la función

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right),$$

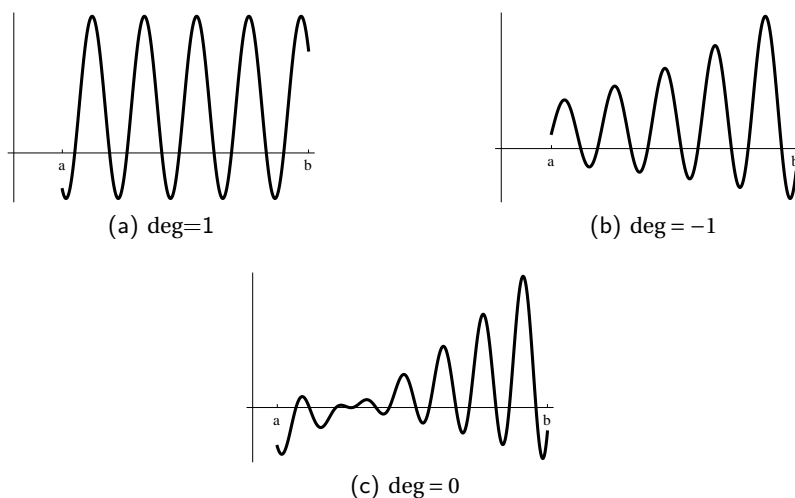


Figura 2.1.1: Valores posibles del Grado en  $\mathbb{R}$ .

y observando que  $x \in \{a, b\}$  tenemos  $F(x, \lambda) = f(x) \neq 0$ . Entonces

$$\text{deg}(f, ]a, b[) = \text{deg}(F(x, 0), ]a, b[) = \text{deg}(F(x, 1), ]a, b[),$$

en consecuencia,

$$\text{deg}(f, ]a, b[) = \begin{cases} 1, & f(a) < 0 < f(b) \\ -1, & f(b) < 0 < f(a) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En la figura 2.1.1 ilustramos el cálculo del grado en el caso unidimensional.

Ahora presentamos una interpretación del grado, que ilustraremos en el caso  $n = 2$  y relaciona el número de vueltas de una curva alrededor de un punto con el grado de Brouwer.

**Lema 2.1.3.** *Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  una función continua. Entonces existe una función continua  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\alpha(t) = r(t)(\cos\theta(t), \text{sen } \theta(t)), \quad t \in [a, b]$$

donde  $r(t) = \|\alpha(t)\|$ .

Una primera observación es que el valor  $\theta(t)$  se repite al sumar  $2\pi$ . En segunda instancia observe que si  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  es una función continua tenemos que el número

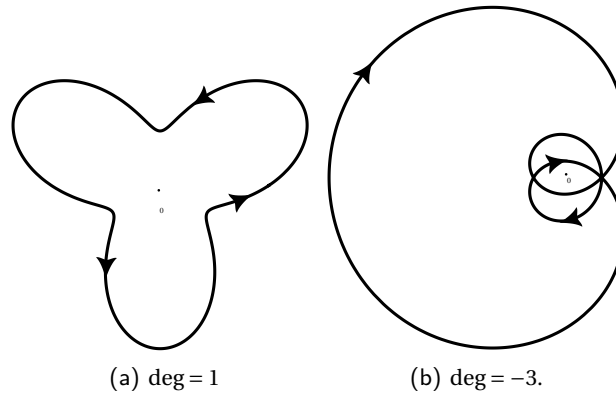


Figura 2.1.2: Ilustración del número de vueltas  $\frac{1}{2}(\theta(b) - \theta(a))$ .

$$\frac{1}{2}(\theta(b) - \theta(a)),$$

es independiente de la elección del argumento y lo llamaremos número de vueltas de la curva  $\alpha$  alrededor del origen, concepto bien conocido por Gauss y Cauchy a principios del siglo XIX y retomado por L. Kronecker, J. Hadamard y H. Poincaré entre otros. Ahora si la curva  $\alpha$  es cerrada tenemos que  $\alpha(a) = \alpha(b)$  y el número de vueltas es un número entero. Intuitivamente hablando  $+n$  significa  $n$  revoluciones alrededor del origen en el sentido contrario de las manecillas de reloj y  $-n$  si es en el sentido del reloj. En la gráfica 2.1.2 se muestran algunos ejemplos del número de vueltas.

Sea  $\Omega$  un dominio Jordan en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $\Omega$  es la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$ , donde  $\partial\Omega$  es una curva de Jordan. Supongamos que  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una parametrización positiva de  $\partial\Omega$ ,  $\alpha(0) = \alpha(1)$ ,  $\alpha|_{[0,1]}$  es uno a uno y  $\alpha|_{[0,1]} = \partial\Omega$ . Si  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función continua tal que  $0 \notin f(\partial\Omega)$  entonces tenemos que el grado de  $f$  respecto a  $\Omega$  es equivalente al número de vueltas de la curva  $f \circ \alpha$  alrededor del origen, es decir,

$$\deg(f, \Omega) = \text{número de vueltas de la curva } f \circ \alpha \text{ alrededor del origen.}$$

Concepto que será de gran ayuda a la hora de presentar los resultados de estabilidad del apartado 2.3. Una aplicación directa de la definición del grado topológico de Brouwer es, precisamente, el teorema de punto fijo de Brouwer:

**Teorema 2.1.4** (Teorema de punto fijo de Brouwer). *Toda función  $f: \overline{B}_1(0) \rightarrow \overline{B}_1(0)$  continua tiene al menos un punto fijo.*

*Demostración.* Si  $f$  tiene algún punto fijo en  $\partial B_1(0)$  el resultado es verdadero. Ahora si  $f$  no tiene puntos fijos en  $\partial B_1(0)$ , es decir,  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in \partial B_1(0)$ , entonces debemos mostrar que la función  $g(x) = x - f(x)$  se anula en  $B_1(0)$ , hacemos la homotopía

$$F(x, \lambda) = \lambda g(x) + (1 - \lambda)x = x - \lambda f(x),$$

observe que si  $\|x\| = 1$  y  $\lambda \in [0, 1[$  entonces

$$\|F(x, \lambda)\| \geq \|x\| - \lambda \|f(x)\| \geq 1 - \lambda > 0.$$

Ahora  $\|x\| = 1$  y  $\lambda = 1$ , entonces  $F(x, 1) = x - f(x) \neq 0$ , porque hemos supuesto que  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in \partial B_1(0)$ . En consecuencia,  $0 \notin F(\partial B_1(0) \times [0, 1])$ . Así que de las propiedades A1 y A3 tenemos que

$$\deg(g, B_1(0)) = \deg(F(x, 1), B_1(0)) = \deg(F(x, 0), B_1(0)) = 1.$$

Por consiguiente,  $g(x) = x - f(x)$  tiene un cero que a su vez es un punto fijo de  $f$ . □

### 2.1.2. Grado en dimensión infinita

Ahora pasamos a extender el grado topológico para aplicaciones definidas en la clausura de un abierto  $\Omega \subseteq X$ , donde  $X$  es un espacio de Banach, demostrado por J. Leray y J. Schauder [47] en 1934. Decimos que una función  $g: \overline{\Omega} \rightarrow X$  es completamente continua si transforma conjuntos acotados en relativamente compactos, equivalentemente, si  $(x_n)_n$  es una sucesión acotada,  $(g(x_n))_n$  contiene una subsucesión convergente. Denotemos por  $K(\overline{\Omega}, X)$  al conjunto de funciones  $f: \overline{\Omega} \rightarrow X$  tales que  $f = I - g$  con  $g: \overline{\Omega} \rightarrow X$  una función completamente continua.

**Teorema 2.1.5.** *Existe una única función  $\deg_{LS}$  asociada a un conjunto abierto y acotado  $\Omega \subseteq X$ , para cualquier función  $f \in K(\overline{\Omega}, X)$  tal que  $0 \notin f(\partial\Omega)$  un número real*

$$\deg_{LS}(f, \Omega),$$

con las siguientes propiedades:

- **A1 (Normalización).** Si  $0 \in \Omega$ , entonces  $\deg_{LS}(I, \Omega) = 1$ , donde  $I$  denota la función identidad.
- **A2 (Aditividad).** Si  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son dos subconjuntos abiertos y disjuntos de  $\Omega$  tales que  $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ , entonces  $\deg_{LS}(f, \Omega) = \deg_{LS}(f, \Omega_1) + \deg_{LS}(f, \Omega_2)$ .



- **A3 (Invarianza por homotopía).** Si  $F \in K(\overline{\Omega} \times [0, 1], X)$  es una función tal que  $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$ , entonces  $\deg_{LS}(F(\cdot, \lambda), \Omega)$  es independiente de  $\lambda \in [0, 1]$ .

Aun más, el valor de  $\deg_{LS}(f, \Omega)$  es siempre un número entero y las siguientes propiedades se satisfacen:

- **Excisión.** Si  $\Omega_1$  es un subconjunto abierto de  $\Omega$  y  $0 \notin f(\overline{\Omega}/\Omega_1)$ , entonces  $\deg_{LS}(f, \Omega) = \deg_{LS}(f, \Omega_1)$ .
- **Existencia.** Si  $\deg_{LS}(f, \Omega) \neq 0$  entonces existe un  $x \in \Omega$  tal que  $f(x) = 0$ .

El número  $\deg_{LS}(f, \Omega)$ , es el grado topológico de Leray-Schauder. Una aplicación directa de la definición del grado topológico de Leray-Schauder es el teorema de punto fijo de Schauder:

**Teorema 2.1.6** (Teorema de punto fijo de Schauder). Si  $g: X \rightarrow X$  es una función completamente continua y hay una bola cerrada  $\overline{B}_R$  tal que

$$g(\overline{B}_R) \subseteq \overline{B}_R,$$

entonces existe  $x \in \overline{B}_R$  tal que  $g(x) = x$ . Si  $g$  no tiene puntos fijos en  $\partial\overline{B}_R$ . Entonces

$$\deg_{LS}(I - g, \overline{B}_R) = 1.$$

*Demostración.* Si  $g$  tiene puntos fijos en  $\partial\overline{B}_R$  entonces el enunciado es cierto. Supongamos ahora que  $g$  no tiene puntos fijo en  $\partial\overline{B}_R$ . Consideremos la función  $F \in K(\overline{\Omega}, B_R)$ , definida

$$F(x, \lambda) = x - g(x) + \lambda g(x).$$

Observe que si  $x \in \partial\overline{B}_R$  y  $\lambda \in ]0, 1]$  entonces tenemos

$$\|F(x, \lambda)\| \geq \|x\| - (1 - \lambda)\|g(x)\| \geq R - (1 - \lambda)R > 0,$$

y si  $\lambda = 0$ , tenemos que  $F(x, 0) \neq 0$  para todo  $x \in \partial\overline{B}_R$ . En consecuencia,  $0 \notin F(\partial\overline{B}_R \times [0, 1])$  y de las propiedades A1 y A3 tenemos

$$\deg_{LS}(I - g, B_R) = \deg_{LS}(F(x, 0), B_R) = \deg_{LS}(F(x, 1), B_R) = \deg_{LS}(I, B_R) = 1.$$

Por tanto de la propiedad de existencia, existe un  $x \in B_R$  tal que  $x - g(x) = 0$ , es decir,  $x$  es un punto fijo de  $g$ . □

De otro lado, recordemos que una función continua  $g: \bar{\Omega} \rightarrow X$  es compacta si la imagen  $g(\bar{\Omega})$  es un subconjunto relativamente compacta en  $X$ . Así tenemos que un función completamente continuo es una función que es compacta al restringirla a cualquier subconjunto acotado de su dominio. La siguiente definición será muy útil en el resto del trabajo:

**Definición 2.1.7.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios normados. Diremos que el operador lineal  $T: X \rightarrow Y$  es compacto (o completamente continuo) si transforma subconjuntos acotados de  $X$  a subconjuntos relativamente compactos de  $Y$ .

### 2.1.3. Grado de Coincidencia

En este apartado presentamos otra herramienta topológica conocida como teorema de continuación de Mawhin o grado de coincidencia publicado en [54] por Mawhin en la década de los setenta y que usaremos como alternativa de demostración de los resultados de existencia de soluciones periódicas presentados en el Capítulo 5. En [57] puede consultarse un recuento histórico del origen del grado de coincidencia.

Sean  $X$  y  $Z$  dos espacios normados y reales de dimensión infinita. El operador lineal  $L: D(L) \subset X \rightarrow Z$  se dice de Fredholm si se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $\ker L$  tiene dimensión finita.
2.  $\text{Im } L$  es cerrada y codimensión finita.

Cuando  $L$  es un operador de Fredholm, tenemos que el índice de  $L$  es un número entero

$$i(L) := \dim \ker L - \text{codim } \text{Im } (L).$$

En lo que sigue de la sección denotamos por  $L: D(L) \subset X \rightarrow Z$  a un operador de Fredholm de índice cero no inyectivo. Así podemos definir las proyecciones continuas  $P: X \rightarrow X$  y  $Q: Z \rightarrow Z$  tales que

$$\begin{aligned} \ker Q &= \text{Im } L & \text{Im } P &= \ker L \\ X &= \ker L \oplus \ker P & Z &= \text{Im } L \oplus \text{Im } Q. \end{aligned}$$

La aplicación  $J: \ker L \rightarrow \text{Im } Q$  es un isomorfismo y  $L: D(L) \cap \ker P \rightarrow \text{Im } L$  es un isomorfismo que denotaremos por  $L_P$ . Denotemos por  $K_{PQ}$  el operador de  $X$  en  $Z$  tal que  $K_{PQ} := L_P^{-1}(I - Q)$ .

**Lema 2.1.8.** *El operador  $L+JP: X \rightarrow Z$  es un isomorfismo y*

$$(L+JP)^{-1} = K_{PQ} + J^{-1}Q.$$

*Demostración.* Primero mostremos que  $L+JP$  es un isomorfismo. Si  $x \in D(L)$  tal que  $(L+JP)x = 0$  entonces tenemos que

$$Lx \in \text{Im}L \cap \text{Im}J = \ker Q \cap \text{Im}Q = \{0\}.$$

En consecuencia,  $x \in \ker L$  y como  $(L+JP)x = 0$  tenemos  $JPx = 0$  lo que implica  $Px = 0$ . En consecuencia,  $x \in \ker P$  y  $x \in \ker L$  entonces  $x = 0 = \ker(L+JP)$ . Ahora mostremos que si  $y \in Z$  entonces el problema

$$(L+JP)x = y,$$

tiene solución  $x = (K_{PQ} + J^{-1}Q)y$ . En efecto, en el caso que  $(J^{-1}Q)y \in \ker L$  entonces

$$Lx = LK_{PQ}y = LL_P^{-1}(I-Q)y = (I-Q)y.$$

Entretanto, si  $K_{PQ}y \in D(L) \cap \ker P$  entonces  $\text{Im}P(J^{-1}Q) = \text{Im}J^{-1}Q$  y

$$JPx = JP(J^{-1}Q)y = JJ^{-1}Qy = Qy.$$

Por consiguiente,

$$(L+JP)x = (I-Q)y + Qy = y.$$

Luego,  $(L+JP)^{-1} = K_{PQ} + J^{-1}Q$ . □

**Lema 2.1.9.** *Si  $N: \Delta \subset X \rightarrow Z$  es un operador entonces el problema*

$$Lx = Nx, \quad x \in D(L) \cap \Delta,$$

*es equivalente al problema de punto fijo*

$$x = Px + J^{-1}QNx + K_{PQ}Nx, \quad x \in \Delta.$$

*Demostración.* Tenemos que si  $x \in D(L) \cap \Delta$

$$Lx = Nx \iff (L + JP)x = (N + JP)x,$$

y por consiguiente,  $x = (L + JP)^{-1}(N + JP)x$ ,  $x \in \Delta$ . Ahora al usar el Lema 2.1.8 tenemos

$$\begin{aligned} (L + JP)^{-1}(N + JP) &= (K_{PQ} + J^{-1}Q)(N + JP) \\ &= K_{PQ}N + K_{PQ}JP + J^{-1}QN + J^{-1}QJP. \end{aligned}$$

Por un lado, como  $\text{Im } J = \text{Im } Q = \ker(I - Q)$  tenemos

$$K_{PQ}JP = L_p^{-1}(I - Q)JP = 0,$$

y por el otro lado, como  $Q|_{\text{Im } Q} = I|_{\text{Im } Q}$  y  $\text{Im } J = \text{Im } Q$  entonces

$$J^{-1}QJP = J^{-1}JP = P.$$

En consecuencia,

$$(L + JP)^{-1}(N + JP) = P + J^{-1}QN + K_{PQ}N.$$

□

**Definición 2.1.10.** Sea  $\Omega$  un subconjunto acotado de  $X$  y  $N: \overline{\Omega} \rightarrow Z$ . Se dice que el operador  $N$  es  $L$ -compacto si  $K_{PQ}N$  es compacto,  $QN$  es continua y  $QN(\overline{\Omega})$  es un subconjunto acotado de  $Z$ .

**Teorema 2.1.11** ([56, Theorem 2.4]). Sea  $F = L + N$  con  $N: \overline{\Omega} \rightarrow Z$   $L$ -compacto. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:

1.  $Lx + \lambda Nx \neq 0$ , para todo  $(x, \lambda) \in [(D(L) \setminus \ker L) \cap \partial\Omega] \times ]0, 1[$ .
2.  $Nx \notin \text{Im } L$  para todo  $x \in \ker L \cap \partial\Omega$ .
3.  $\deg(QN|_{\ker L}, \Omega \cap \ker L) \neq 0$ , donde  $Q: Z \rightarrow Z$  es una proyección continua tal que  $\ker Q = \text{Im } L$ .

Entonces la ecuación  $Lx + Nx = 0$  tiene al menos una solución en  $D(L) \cap \overline{\Omega}$ .

*Demostración.* Para  $\lambda \in [0, 1]$  consideremos la familia

$$Lx + \lambda Nx + (1 - \lambda)QNx = 0 \quad x \in D(L) \cap \bar{\Omega}. \quad (2.1.1)$$

Sea  $\mathcal{M}: \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow Z$  la homotopía definida por

$$\mathcal{M}(x, \lambda) := Px - J^{-1}QNx - \lambda K_{PQ}Nx.$$

Primero observemos que  $K_{PQ}QNx = L_p^{-1}(I - Q)QN = 0$ . Así del Lema 2.1.9 tenemos que (2.1.1) es equivalente al problema de punto fijo de  $x \in \bar{\Omega}$  tales que

$$\begin{aligned} x &= Px - J^{-1}Q(\lambda Nx + (1 - \lambda)QNx) - K_{PQ}(\lambda Nx + (1 - \lambda)QNx) \\ &= Px - \lambda J^{-1}QNx - (1 - \lambda)J^{-1}QNx - \lambda K_{PQ}Nx - (1 - \lambda)K_{PQ}QNx \\ &= \mathcal{M}(x, \lambda). \end{aligned}$$

En consecuencia, (2.1.1) es equivalente al problema de punto fijo

$$x = \mathcal{M}(x, \lambda), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (2.1.2)$$

Si  $x \in \partial\Omega$  es tal que  $Lx + Nx = 0$  entonces el resultado está demostrado. Entonces supongamos que

$$Lx + Nx \neq 0, \quad x \in D(L) \cap \partial\Omega. \quad (2.1.3)$$

Ahora mostremos que

$$Lx + \lambda Nx + (1 - \lambda)QNx \neq 0 \quad x \in D(L) \cap \partial\Omega, \lambda \in ]0, 1[. \quad (2.1.4)$$

En efecto, si existe  $(x, \lambda) \in (D(L) \cap \partial\Omega) \times ]0, 1[$  tal que  $Lx + \lambda Nx + (1 - \lambda)QNx = 0$  entonces al aplicar  $Q$  a ambos miembros de la ecuación anterior tenemos  $QNx = 0$  por consiguiente,

$$Lx + \lambda Nx + (1 - \lambda)QNx = Lx + \lambda Nx = 0,$$

la ecuación anterior junto con la condición 1 implican

$$Lx + \lambda Nx = 0, \quad x \in \ker L \cap \partial\Omega, \lambda \in ]0, 1[.$$

Entonces  $Nx \in \text{Im}L$  para  $x \in \ker L \cap \partial\Omega$  lo que contradice la condición 2. De otro lado, la condición 3.

implica que

$$Lx + Qx \neq 0, \quad x \in D(L) \cap \partial\Omega. \quad (2.1.5)$$

De (2.1.3), (2.1.4) y (2.1.5) tenemos

$$\mathcal{M}(x, \lambda) \neq 0, \quad x \in D(L) \cap \partial\Omega, \lambda \in [0, 1]. \quad (2.1.6)$$

Debido a que  $N$  es  $L$ -compacto tenemos que  $\mathcal{M}$  es compacto, además de (2.1.6), (2.1.2) y la propiedad de invarianza sobre homotopías compactas del grado de Leray-Schauder tenemos

$$\deg_{LS}(I - \mathcal{M}(x, 1), \Omega) = \deg_{LS}(I - \mathcal{M}(x, 0), \Omega) = \deg_{LS}(I - Px + J^{-1}QNx, \Omega). \quad (2.1.7)$$

Ahora bien, como la imagen de  $Px + J^{-1}QNx$  esta contenida en  $\ker L$  podemos usar la propiedad de excisión del grado, así tenemos

$$\begin{aligned} \deg_{LS}(I - Px + J^{-1}QNx, \Omega) &= \deg(I - Px + J^{-1}QNx, \Omega \cap \ker L) \\ &= \deg(J^{-1}QNx, \Omega \cap \ker L) \\ &= (\operatorname{sgn}(\det J^{-1})) \deg(QNx, \Omega \cap \ker L). \end{aligned}$$

Entonces de la igualdad anterior, la condición 3 y (2.1.7) tenemos que  $\deg_{LS}(I - \mathcal{M}(x, 1), \Omega) \neq 0$ . Entonces existe  $x \in \Omega$  tal que  $x = \mathcal{M}(x, \lambda)$ , y por lo tanto  $Lx + Nx = 0$  tiene una solución en  $D(L) \cap \Omega$ .  $\square$

## 2.2. Índice de puntos fijos

En esta sección presentamos algunas propiedades del índice de puntos fijos aislados de funciones vectoriales, definido en términos del grado de Brouwer, y que será relacionado en la siguiente sección con el índice de estabilidad de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias. El resultado principal de este apartado establece condiciones bajo las cuales los puntos fijos aislados son asintóticamente estables en términos del índice, Teorema 2.2.3 demostrado por Ortega en [66].

Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^n$  y  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua tal que  $p \in \Omega$  es un punto fijo aislado de  $F$ . Denotamos el índice de  $F$  en el punto fijo  $p$  como

$$i(F, p) = \deg(I - F, B_\rho),$$

donde  $B_\rho$  es una bola pequeña centrada en  $p$  que no contiene otro punto fijo de  $F$ . La propiedad de excisión del grado muestra que esta definición es independiente del radio  $\rho$ . En el caso en que  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  y  $1 \notin \sigma(F'(p))$ ,  $\sigma(A)$  denota el espectro del operador lineal  $A = F'(p)$ , tenemos de la propiedad 4 del corolario 2.1.2 que

$$i(F, p) = \text{sgn}(\det(I - F'(p))). \quad (2.2.1)$$

En el caso unidimensional el índice de una función  $F$  solo puede tomar los valores de 1, -1 o 0, como se ilustra en la figura 2.2.1.

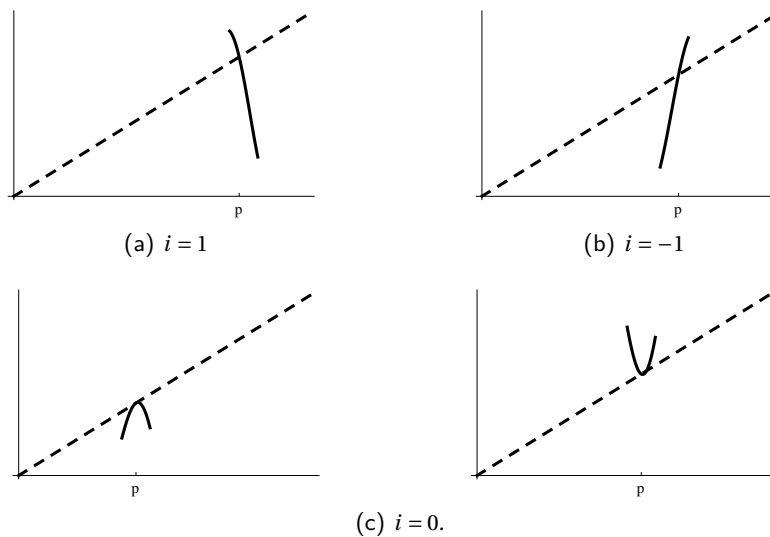


Figura 2.2.1: Valores de índice topológico en el caso unidimensional.

Si  $p$  es un punto fijo de  $F$  entonces  $p$  es un punto fijo de la iteración  $F^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Si además  $p$  es un punto aislado para  $F^n$  entonces el índice de  $F^n$  está bien definido.

**Definición 2.2.1.** Supongamos que  $F$  es continua, uno a uno y  $p$  es un punto fijo de  $F$ . Decimos que

- $p$  estable si cualquier vecindad  $V$  de  $p$  contiene otra vecindad  $W$  tal que para todo  $n \geq 0$   $F^n(W)$  está bien definido y  $F^n(W) \subset V$ .

- $p$  es asintóticamente estable si es estable y además existe una vecindad  $A$  de  $p$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(q) = p, \quad \text{para todo } q \in A.$$

- $p$  es inestable cuando no es estable.

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [44, 45].

**Teorema 2.2.2.** *Si  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es uno a uno,  $p$  es un punto fijo de  $F$  asintóticamente estable entonces  $i(F^k, p) = 1$  para todo  $k \geq 1$ .*

El recíproco del Teorema anterior no es cierto, pues por ejemplo si tomamos  $n = 2$  y definimos  $F(x) = \lambda x$ ,  $\lambda > 1$ , tenemos  $0$  es un punto fijo de  $F$  tal que

$$i(F^k, 0) = \text{sgn}(\det(I - \lambda^k I)) = \text{sgn}(1 - \lambda^k)^2 = 1, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

y sin embargo,  $x = 0$  es inestable.

En el siguiente Teorema se presentan condiciones necesarias de la estabilidad asintótica, de puntos fijos en términos del índice. Primero introducimos algo de notación, sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  y  $\sigma(A) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$  los diferentes valores propios de  $A$ ,  $r \leq n$ , que están ordenados de tal forma que  $|\mu_i| < |\mu_j|$  siempre que  $i > j$  y sea  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  sus correspondientes multiplicidades algebraicas. Entonces diremos que  $A$  satisface la condición (C) si se satisface alguna de las siguientes condiciones

**(C)**  $|\mu_1| < 1$  o  $|\mu_2| < 1$  y  $\lambda_1 = 1$ .

**Teorema 2.2.3.** *Si  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , es uno a uno, con un punto fijo en  $p$ . Adicionalmente,  $p$  es aislado respecto de  $F^2$  y  $F'(p)$  satisface la condición (C). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $p$  es asintóticamente estable.
- $p$  es estable.
- $i(F^2, p) = 1$ .

La demostración de este teorema se puede consultar en [66]. Un resultado similar se encuentra en [20], donde la condición (C) es reemplazada por una condición de monotonía sobre  $F$ .



### 2.3. Estabilidad e índice de soluciones periódicas

En este apartado primero hacemos una descripción de la forma en que se relaciona el índice de puntos fijos con el índice de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el operador de Poincaré. En segundo lugar, presentamos la relación de estabilidad de puntos fijos, Teorema 2.2.3, con la estabilidad de soluciones periódicas para las ecuaciones estudiadas en los Capítulos 3 y 4, por medio de la Proposición 2.3.4 y el Corolario 2.3.5, respectivamente.

Consideremos el sistema

$$X' = G(t, X), \quad (2.3.1)$$

donde  $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua y  $T$ -periódica en la variable  $t$ , es decir,  $G(t+T, X) = G(t, X)$ . Denotemos por  $X(t; \zeta_0)$  la única solución de (2.3.1) tal que  $X(0; \zeta_0) = \zeta_0$ . Ahora definamos el operador de Poincaré  $P_T$  como

$$P_T: D_T \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad P_T(\zeta) = X(T; \zeta),$$

donde  $D_T = \{\zeta \in \mathbb{R}^n: X(t, \zeta) \text{ esta definido en } [0, T]\}$ . Debido a la unicidad de soluciones de (2.3.1)  $D_T$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $P_T$  es continuamente diferenciable en  $D_T$ . Observemos que los puntos fijos de  $P_T$  corresponden con las condiciones iniciales de las soluciones  $T$ -periódicas, por tal motivo encontrar soluciones  $T$ -periódicas es equivalente a encontrar soluciones de la ecuación

$$P_T(\zeta) = \zeta, \quad \zeta \in D_T.$$

También podemos ver la ecuación (2.3.1) como periódica de periodo  $nT$ ,  $n \geq 2$  y definimos  $P_{nT}$  como

$$P_{nT}: D_{nT} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad P_{nT}(\zeta) = X(nT; \zeta),$$

donde  $D_{nT} = \{\zeta \in \mathbb{R}^n: X(t, \zeta) \text{ esta definido en } [0, nT]\}$ . Así tenemos que las soluciones  $nT$ -periódicas son los puntos fijos de  $P_{nT}(\zeta) = \zeta$ ,  $\zeta \in D_{nT}$ . En consecuencia, toda solución  $T$ -periódica es también una solución  $nT$ -periódica. Algunas veces la ecuación (2.3.1) puede tener soluciones  $nT$ -periódicas que no son puntos fijos de  $P_T$ , este tipo de soluciones se suelen llamar subarmónicas.

Denotemos con  $\varphi$  una solución  $T$ -periódica de (2.3.1) tal que  $\varphi(0) = \zeta_0$ , diremos que la solución  $\varphi$  es aislada ( $T$ -periódica) si  $\zeta_0$  es un punto fijo aislado de  $P_T$ . En tal caso, el índice de  $\varphi$  se define en términos de la siguiente fórmula

$$\gamma_T(\varphi) := i(P_T, \zeta_0).$$

Además, diremos que  $\varphi$  es aislada  $nT$ -periódica si  $\zeta_0$  es un punto fijo aislado de  $P_{nT}$  y el índice  $nT$ -periódico se define como

$$\gamma_{nT}(\varphi) := i(P_{nT}, \zeta_0).$$

Presentamos la definición de estabilidad de soluciones periódicas

**Definición 2.3.1.** Si  $\varphi$  es una solución  $T$ -periódica de (2.3.1). Entonces diremos que

- $\varphi$  es estable si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\eta > 0$  tal que si  $|\zeta - \varphi(0)| < \eta$  entonces  $X(t, \zeta)$  está definido en  $[0, \infty[$  y  $|X(t, \zeta) - \varphi(0)| < \epsilon$  para todo  $t \geq 0$ .
- $\varphi$  es asintóticamente estable si es estable y existe  $\delta > 0$  tal que  $|\zeta - \varphi(0)| < \delta$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X(t, \zeta) - \varphi(0)| = 0.$$

- $\varphi$  es inestable si no es estable.

Entonces podemos relacionar los conceptos de estabilidad de soluciones periódicas con estabilidad de puntos fijos de  $P_T$ .

**Hecho 2.3.2.**  $\varphi$  es estable (resp. asintóticamente estable, inestable) para (2.3.1) si y sólo si  $\varphi(0)$  es estable (resp. asintóticamente estable, inestable) para  $P_T$ .

**Definición 2.3.3.** Diremos que  $\varphi$  una solución  $T$ -periódica de (2.3.1) es no degenerada de periodo  $T$  (resp. periodo  $2T$ ) si la ecuación linealizada

$$Y' = \partial_X G(t, \varphi) Y, \tag{2.3.2}$$

no admite más soluciones  $T$ -periódicas ( $2T$ -periódicas) que la trivial. De lo contrario diremos que es degenerada.

Como definición equivalente diremos que  $\varphi$  es no degenerada de periodo  $T$  (resp. periodo  $2T$ ) si  $\zeta_0$  no es un punto crítico de  $I - P_T$  (resp.  $I - P_{2T}$ ), es decir,  $\det(I - P_T'(\zeta_0)) \neq 0$  (resp.  $\det(I - P_{2T}'(\zeta_0)) \neq 0$ ). Observe que  $P_T'(\zeta_0)$  es una matriz de monodromía de (2.3.2) y los multiplicadores característicos de (2.3.2),  $\mu_1, \dots, \mu_r$  son precisamente los valores propios de  $P_T'(\zeta_0)$ . En consecuencia, usando la teoría de Floquet y (2.2.1) tenemos

$$\gamma_T(\varphi) = \text{sgn} (\det((1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \dots (1 - \mu_r))),$$

$$\gamma_{2T}(\varphi) = \text{sgn} (\det((1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2) \dots (1 - \mu_r^2))),$$

siempre que  $\mu_i \neq 1$  (resp.  $\mu_i^2 \neq 1$ ) para todo  $i = 1, 2, \dots, r$ . Así tenemos que  $\varphi$  es no degenerada de periodo  $T$  (resp. periodo  $2T$ ) si 1 no es un multiplicador característico de  $P'_T$  (resp.  $P'_{2T}$ ). Cuando  $\varphi$  es degenerada el cálculo del índice depende de los términos no lineales de la expansión de Taylor de (2.3.1).

Ahora relacionamos el hecho de que  $\varphi$  sea no degenerada con que sea aislada. Si  $\varphi$  es  $T$ -periódica y no degenerada de periodo  $2T$  entonces usando argumentos de función implícita se demuestra que  $\varphi$  es aislada para  $P_{2T}$ , por ende también para  $P_T$  y

$$|\gamma_T| = |\gamma_{2T}| = 1,$$

otras propiedades del índice pueden consultarse en [63, 65].

En particular nuestro interés se centra en los resultados de estabilidad de las ecuaciones escalares de segundo orden

$$x'' + f(x)x' + g(t, x) = 0, \quad (2.3.3)$$

donde  $f$  es estrictamente positiva,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  y  $g$  es continua,  $T$ -periódica en la primera variable y continuamente diferenciable en la segunda variable. Bajo las siguientes condiciones

$$0 < m = \inf f(x) \leq M = \sup f(x) < \infty, \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) \leq \alpha - \beta(\gamma + \alpha^{1/2}), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y todo } x \in \mathbb{R} \quad (2.3.5)$$

donde  $\beta = (M - m)/2$ ,  $\gamma = (M + m)/2$ ,  $\alpha = (\pi/T)^2 + \gamma^2/4$ ,  $\alpha - \beta(\gamma + \alpha^{1/2}) > 0$ , presentamos el resultado de estabilidad que usaremos en el Capítulo 3 demostrado por Ortega y Zitan en [89].

**Proposición 2.3.4** ([89, Proposición 1.2]). *Si  $\varphi$  es una solución  $T$ -periódica aislada de (2.3.3) y se satisfacen (2.3.4), (2.3.5). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\varphi$  es asintóticamente estable.
2.  $\varphi$  es estable.
3.  $\gamma_T(\varphi) = 1$ .

El esquema de la demostración es el siguiente:

1. Reescribimos (2.3.3) como el sistema bidimensional equivalente

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -f(x_1)x_2 - g(t, x_1). \quad (2.3.6)$$

Además tenemos que  $\text{div}(x_2, -f(x_1)x_2 - g(t, x_1)) = -f(x_1) < 0$  para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Entonces la fórmula de Jacobi-Liouville nos dice que los multiplicadores característicos  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$  de la linealización de (2.3.6),

$$x'' + (f(x)x)' + \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = 0,$$

satisfacen

$$0 < \mu_1 \mu_2 = \det P_T'(x_1, x_2) = \exp\left(-\int_0^T f(x_1(s)) ds\right) < 1.$$

2. Ahora la desigualdad (2.3.5) implica que los multiplicadores característicos  $\mu_1, \mu_2$  no pueden ser negativos, la demostración puede consultarse en [89, Proposition A.2].
3. Entonces 2 implica que las soluciones  $T$ -periódicas son no degeneradas de periodo  $2T$  y en consecuencia aislada respecto de  $P_{2T}$  y  $P_T$ .
4. Combinando 1 con 2 tenemos que los multiplicadores característicos satisfacen una de las siguientes alternativas  $|\mu_1| = |\mu_2| < 1$  ó  $\mu_1, \mu_2$  son reales positivos tales que uno de los multiplicadores característicos es menor que 1 y el otro es mayor que 1. En consecuencia, tenemos  $\gamma_{2T} = 1 = \gamma_T$  o  $\gamma_{2T} = -1 = \gamma_T$ .
5. Finalmente combinando 1, 2, 3 y 4 podemos usar el Teorema 2.2.3 y obtener la Proposición 2.3.4.

En particular, si  $f(x) \equiv c$ , para el resto del capítulo tomaremos  $c$  como una constante no negativa, entonces la ecuación (2.3.3) se escribe como

$$x'' + cx' + g(t, x) = 0, \quad (2.3.7)$$

y (2.3.5) se simplifica

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, \varphi(t)) \leq \frac{\pi^2}{T^2} + \frac{c^2}{4}. \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \quad (2.3.8)$$

De otro lado, los resultados de estabilidad que se usarán en el Capítulo 4 son los siguientes

**Corolario 2.3.5** ([63, Theorem 1.1]). *Supongamos que  $\varphi$  es solución aislada,  $T$ -periódica de (2.3.7) y se satisface la condición (2.3.8). Entonces  $\varphi$  es asintóticamente estable (resp. inestable) si y solo si  $\gamma_T(\varphi) = 1$  (resp.  $\gamma_T(\varphi) = -1$ ).*

La demostración sigue el mismo esquema presentado antes y fue demostrado en [63].

El siguiente Lema es clave para la demostración del resultado de estabilidad presentado en el Capítulo 4, pues la primera parte del lema la usaremos para ordenar las soluciones  $T$ -periódicas, mientras la segunda parte la usaremos para mostrar que dichas soluciones  $T$ -periódicas son no degeneradas de periodo  $T$ .

**Lema 2.3.6** ([56, Lemma 7.2]). *Considere el operador lineal  $\mathcal{L}_\alpha$  dado por*

$$\mathcal{L}_\alpha[x] := x'' + cx' + \alpha(\cdot)x,$$

*que actúa sobre funciones  $T$ -periódicas, donde  $c > 0$  y  $\alpha \in L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  es tal que*

$$\alpha \ll \frac{\pi^2}{T^2} + \frac{c^2}{4}. \quad (2.3.9)$$

*Entonces los siguientes enunciados son ciertos*

1. *Para cada número real  $\mu$ , cualquier posible solución  $T$ -periódica  $x$  de la ecuación  $\mathcal{L}_\alpha[x] = \mu$  es trivial o distinta de cero para cada  $t \in ]0, T[$ .*
2. *Dadas  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  funciones en  $L^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  que satisfacen (2.3.9) y tales que  $\alpha_1 \ll \alpha_2$ . Entonces las ecuaciones*

$$\mathcal{L}_{\alpha_i}[x] = 0, \quad i = 1, 2,$$

*no pueden admitir soluciones  $T$ -periódicas no triviales simultáneamente.*

## 2.4. Índice y espacio de funciones periódicas

Podemos definir el índice en el espacio de funciones periódicas esta vez usando el grado de Leray-Schauder como veremos a continuación. Sea  $X_T = C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  y  $p(t) \in X_T$ , considere el problema lineal

$$x'' + cx' - \lambda x = p(t), \quad x \in X_T, \lambda > 0. \quad (2.4.1)$$

La condición  $\lambda > 0$  asegura que (2.4.1) tiene solución única. El primer paso es formular el problema de soluciones periódicas de (2.3.7) como una ecuación de punto fijo en  $X_T$ . De la alternativa de Fredholm

se sigue que este problema tiene una única solución  $u = L_\lambda p$ . El operador lineal  $L_\lambda$  puede expresarse explícitamente en términos de función de Green como un operador integral y es fácil mostrar que es compacto con la norma usual de  $X_T$ . Entonces el problema periódico asociado a (2.3.7) es equivalente a

$$x = L_\lambda(N[x] - \lambda x),$$

donde el operador de Nemitskii  $N: X_T \rightarrow X_T$  está dado por

$$N[x] := -g(t, x).$$

Ahora, definiendo  $\Phi_\lambda := L_\lambda(N - \lambda I)$  tenemos que, encontrar una solución  $T$ -periódica de (2.3.7) es equivalente a encontrar una solución de la ecuación

$$x - \Phi_\lambda(x) = 0.$$

Debido a que  $\Phi_\lambda$  es un operador compacto, el grado de Leray-Schauder  $\deg_{LS}(I - \Phi_\lambda, B_\rho)$  está bien definido siempre que  $\Phi_\lambda$  no tenga puntos fijos en la frontera de  $\partial B_\rho$ . Entonces, si  $\varphi$  es una solución periódica de (2.3.7) y  $B_\rho$  es una bola centrada en  $\varphi$  que no contiene otro punto fijo de  $\Phi_\lambda$  podemos definir el nuevo índice,

$$\tilde{\gamma}_T(\varphi) := -i(\Phi_\lambda, \varphi) = -\deg_{LS}(I - \Phi_\lambda, B_\rho).$$

Cuando hay unicidad en los problemas de valor inicial de (2.4.1), tenemos que  $\varphi$  es un punto fijo aislado de  $\Phi_\lambda$ , para algún  $\lambda > 0$ , si y sólo si  $\varphi$  es aislado ( $T$ -periódica) en el sentido del apartado 2.3. También usando argumentos de homotopía se puede demostrar que la definición de  $\tilde{\gamma}_T$  es independiente de  $\lambda$ , con  $\lambda > 0$ . Denotemos por  $\gamma_T$  el índice de las soluciones  $T$ -periódicas de (2.3.7), tal y como se presentó en el apartado 2.3 y aunque los dos índices  $\gamma_T$  y  $\tilde{\gamma}_T$  han sido definidos por diferentes caminos en [45, Capítulo 3] se mostró que coinciden siempre y cuando el operador de Poincaré  $P_T$  esté bien definido. Esta relación entre los índices y los resultados de estabilidad de la sección 2.3 nos ayudará a la hora de caracterizar la estabilidad de soluciones periódicas del Capítulo 4.

## 2.5. Sub-super soluciones

Ahora introduciremos los conceptos de sub-super solución y la relación del método de sub-super soluciones con la estabilidad de soluciones periódicas. El Teorema 2.5.2 será usado en el resultado de multiplicidad presentado en el Capítulo 4, ver Lema 4.3.6.

**Definición 2.5.1.** Las funciones  $\alpha, \beta \in C^2(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  son llamadas sub y super soluciones respectivamente para (2.3.7) si para todo  $t \in \mathbb{R}$  se verifica

$$\begin{aligned}\alpha'' + c\alpha' + g(t, \alpha) &\geq 0, \\ \beta'' + c\beta' + g(t, \beta) &\leq 0.\end{aligned}$$

Una sub (resp. super) solución se dice que es estricta siempre que la desigualdad anterior sea también estricta para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Cuando la pareja  $(\alpha, \beta)$  está bien ordenada, es decir,  $\alpha < \beta$ , es conocido que existe al menos una solución  $T$ -periódica entre ellas, ver [18, Theorem I-6.9]. Si el número de soluciones  $T$ -periódicas entre  $\alpha$  y  $\beta$  es finito el siguiente teorema nos dice que al menos una de ellas es inestable.

**Teorema 2.5.2** ([68, Theorem 5, Section 2.6.2]). *Si  $g$  es localmente Lipschitziana respecto de  $x$ ,  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) es una sub (resp. super) solución de 2.3.7 y el número de soluciones  $T$ -periódicas de (2.3.7) que satisfacen*

$$\alpha(t) < \varphi(t) < \beta(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

*es finito. Entonces al menos una de ellas es inestable.*

La demostración está basada en la definición del índice  $\tilde{\gamma}_T$  junto con el siguiente principio del máximo para problemas periódicos, ver [70, Theorem 3]:

**Teorema 2.5.3.** [70, Theorem 3] *Sea  $x \in C^2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$  una solución de la desigualdad diferencial*

$$x'' + cx' - \lambda x \leq 0,$$

*para algún  $\lambda \geq 0$ . Entonces  $x(t) > 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración del Teorema 2.5.2.* Escogemos  $\lambda > 0$  suficientemente grande con el fin de que la función  $g^*(t, x) = -g(t, x) - \lambda x$  sea estrictamente decreciente con respecto a  $x$  en el conjunto  $\{(t, x) :$

$t \in \mathbb{R}, \alpha(t) < x < \beta(t)$ . Ahora siguiendo la notación del apartado 2.4 podemos reescribir el problema periódico (2.3.7) como el problema de punto fijo

$$x = \Phi_\lambda(x), \quad x \in X_T.$$

El conjunto  $\Omega = \{x(t) \in X_T : \alpha(t) < x(t) < \beta(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$  es abierto y convexo en  $X_T$ . Demostremos que  $\Phi_\lambda(\overline{\Omega}) \subset \Omega$ . Sea  $x \in \overline{\Omega}$ ,  $\alpha \leq x \leq \beta$ , así verifiquemos que  $y = \Phi_\lambda(x)$  satisface  $\alpha < y < \beta$ . En efecto,  $y$  es solución de

$$y'' + cy' - \lambda y = g^*(t, x(t)),$$

como  $g^*$  es decreciente entonces  $g^*(t, \beta) \leq g^*(t, y) \leq g^*(t, \alpha)$ . Tenemos  $z_1 = \beta - y$ ,  $z_2 = \alpha - y$  satisfacen

$$z'' + cz' - \lambda z \leq 0,$$

así que usando el Teorema 2.5.3 garantiza  $z_1 > 0$  y  $z_2 > 0$ . En consecuencia, el grado de  $I - \Phi_\lambda$  en el sentido de Leray-Schauder está bien definido en  $\Omega$  y

$$\deg_{LS}(I - \Phi_\lambda, \Omega) = 1.$$

Ahora si usamos la suposición que  $\Phi_\lambda$  tiene un número finito de puntos fijos en  $\Omega$ , digamos  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Entonces de las propiedades del grado tenemos

$$-1 = \sum_{k=1}^n \gamma_T(\varphi_k),$$

en consecuencia, alguna de las  $\varphi_k$  tiene índice negativo y por tanto es inestable.  $\square$

*Observación 2.5.4.* Similares resultados fueron demostrados en [65] cuando  $c > 0$ , en [21] cuando  $c = 0$  y extendidos a ecuaciones del tipo Liénard en [89]. En contraste con la demostración presentada ahí, las demostraciones de los resultados [21, 65, 89] se basan en la definición del índice  $\gamma_T$  y por ende de la aplicación de Poincaré  $P_T$ . Otro resultado similar se presentó en [55]. Mientras en [62] se presentan condiciones suficientes para la unicidad y estabilidad de soluciones periódicas de (2.3.7) cuando  $c = 0$  y la pareja  $(\alpha, \beta)$  de sub-super soluciones estén ordenada en la forma  $\beta < \alpha$ .





---

## Capítulo 3

---

# Soluciones periódicas de la ecuación de Liénard con una o dos singularidades débiles

En este capítulo se presentan condiciones para la existencia y estabilidad asintótica de soluciones periódicas para la ecuación del tipo Liénard

$$x'' + f(x)x' + g(x) = h(t), \quad (3.0.1)$$

donde  $h$  es una función  $T$ -periódica,  $f, g: ]l_1, l_2[ \rightarrow \mathbb{R}$ , son funciones continuas localmente Lipschitz. En principio,  $-\infty \leq l_1 < l_2 \leq +\infty$ , pero nos interesa el caso en que al menos uno de los términos es finito. En el estudio de ecuaciones con singularidades, como se mencionó en la introducción, la suposición de "fuerza fuerte" juega un papel muy importante. En el resto del Capítulo supondremos que  $\bar{x} \in ]l_1, l_2[$ ,  $\bar{x}$  es el valor mínimo de  $g$  tal que  $g(\bar{x}) = 0$  y definimos su potencial asociado como

$$G(x) = \int_{\bar{x}}^x g(s) ds.$$

Diremos que  $g$  tiene una singularidad fuerte en  $l_1$  (resp.  $l_2$ ) si

$$\lim_{x \rightarrow l_1^+} G(x) = +\infty, \quad (\text{resp. } \lim_{x \rightarrow l_2^-} G(x) = +\infty).$$

En otro caso, cuando el límite es finito, se dice que la singularidad es débil.

Nuestra propuesta en este Capítulo es retomar el método original desarrollado por Nagumo en [59] para ecuaciones del tipo (3.0.1) con singularidades fuertes y extenderlo al caso de singularidades débiles. Con el propósito de demostrar el resultado principal de este Capítulo definiremos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
F(x) &:= \int_{\bar{x}}^x f(s) ds, \\
W(x) &:= \frac{F^2(x)}{4} + 2G(x), \\
Z(x) &:= \frac{F^2(x)}{2} + 2G(x).
\end{aligned}$$

Entonces, el resultado principal de este capítulo es un resultado de existencia de soluciones periódicas para (3.0.1) con al menos una singularidad débil:

**Teorema 3.0.5.** *Asumamos las siguientes hipótesis*

**(H1)**  $C^* := \inf\{W(l_1), W(l_2)\} < \infty$ .

**(H2)**  $f$  es una función positiva y  $f(x) > f_0 > 0$  para todo  $x \in ]l_1, l_2[$ .

**(H3)**  $g$  es una función estrictamente creciente que cambia de signo.

Fijando  $0 < C < C^*$  y sea  $l'_1 < l'_2$  soluciones de la ecuación  $Z(x) = C$ . Definimos la función

$$R(x) := -\frac{1}{2}|F(x)| + \sqrt{C^* - W(x)}.$$

y fijamos las constantes positivas

$$K_1 := \min_{i=1,2} \left\{ \frac{|g(l'_i)|}{f_0}, \sqrt{\frac{2g(l'_i)F(l'_i)}{f_0}} \right\} \quad K_2 := \min_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{2}R(l'_i), \frac{1}{|F(l'_i)|}R^2(l'_i) \right\}.$$

Entonces bajo el supuesto

$$\|h\|_\infty < \frac{f_0}{2} \min\{K_1, K_2\} \quad (3.0.2)$$

existe al menos una solución  $T$ -periódica  $\varphi(t)$  de la ecuación (3.0.1). Tal solución verifica

$$l'_1 \leq \varphi(t) \leq l'_2, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (3.0.3)$$

*Observación 3.0.6.* Resaltamos el hecho que nuestro resultado es independiente de la frecuencia,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , de la función periódica  $h$  y además podemos controlar, con cierta libertad, las cotas superior

e inferior de la solución como se ilustrará en el apartado 3.4. Las condiciones (H1) y (H2) también permiten que la función  $f$  tenga singularidades débiles.

Este Capítulo está estructurado de la siguiente forma: la sección 3.1 está dedicada a la presentación de algunos resultados auxiliares. En la sección 3.2, presentamos la demostración del resultado principal. En la sección 3.3 usamos los resultados [89] para demostrar unicidad y estabilidad del resultado principal. Por último, en la sección 3.4 presentamos algunos ejemplos ilustrativos y comparamos nuestros resultados con otros de la literatura relacionada.

### 3.1. Resultados auxiliares

Observe que si  $f$  y  $g$  satisfacen las hipótesis (H1), (H2) y (H3) respectivamente entonces las funciones  $Z(x)$  y  $W(x)$  cumplen

$$\begin{aligned} W'(x), Z'(x) &< 0, & x \in ]l_1, \bar{x}[ \\ W'(x), Z'(x) &> 0, & x \in ]\bar{x}, l_2[ \end{aligned}$$

lo que implica que  $Z$  y  $W$  tienen un mínimo absoluto en  $\bar{x}$  y  $W(\bar{x}) = Z(\bar{x}) = 0$ . Más aún, para todo  $0 < C \leq C^*$  la ecuación  $Z(x) = C$  tiene exactamente dos soluciones  $l'_1, l'_2$  tales que  $l'_1 < \bar{x} < l'_2$ .

**Lema 3.1.1.** *La función  $R(x)$  es positiva para  $x \in ]l'_1, l'_2[$ .*

*Demostración.* Si  $x \in ]l'_1, l'_2[$  entonces  $Z(x) = W(x) + \frac{1}{4}F^2(x) < C$  y  $C^* - W(x) > C^* - C + \frac{1}{4}F^2(x) > 0$ . Entonces

$$\sqrt{C^* - W(x)} > \sqrt{C^* - C + \frac{1}{4}F^2(x)} > \frac{1}{2}|F(x)|.$$

□

Del Lema anterior tenemos que la constante  $K_2$  es positiva. Reescribamos (3.0.1) como el sistema

$$\begin{cases} x' &= y - F(x) \\ y' &= -g(x) + h(t) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Ahora definimos la siguiente función

$$P(x, y) := \left( y - \frac{F(x)}{2} \right)^2 + W(x). \quad (3.1.2)$$

Así tenemos que la desigualdad  $P(x, y) = C^*$  es equivalente a

$$\frac{F(x)}{2} - \sqrt{C^* - W(x)} \leq y \leq \frac{F(x)}{2} + \sqrt{C^* - W(x)}. \quad (3.1.3)$$

Entonces es fácil ver que  $P(x, y) = C^*$  es una curva cerrada simple. El objetivo ahora es mostrar que el conjunto simplemente conexo definido como

$$D := \{(x, y) : l'_1 \leq x \leq l'_2, P(x, y) \leq C^*\}, \quad (3.1.4)$$

es positivamente invariante para el sistema (3.1.1). Por comodidad en la escritura en el resto del Capítulo denotaremos  $H = \|h\|_\infty$ .

**Lema 3.1.2.** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.0.5, si  $x \in ]l'_1, l'_2[$  y  $P(x, y) \geq C^*$  entonces se satisfacen las siguientes desigualdades*

$$|y - F(x)| \geq \frac{4H}{f_0}, \quad (3.1.5)$$

$$(y - F(x))^2 > \frac{2H}{f_0} |F(x)|. \quad (3.1.6)$$

*Demostración.* Para demostrar (3.1.5), necesitamos por un lado

$$y > \frac{4H}{f_0} + F(x) \quad \text{o} \quad y < -\frac{4H}{f_0} + F(x).$$

De otro lado, sabemos que  $P(x, y) \geq C^*$  entonces de (3.1.3) tenemos

$$y \geq \frac{F(x)}{2} + \sqrt{C^* - W(x)} \quad \text{o} \quad y \leq \frac{F(x)}{2} - \sqrt{C^* - W(x)}.$$

Entonces para satisfacer (3.1.5) es suficiente mostrar

$$\frac{4H}{f_0} + F(x) < \frac{F(x)}{2} + \sqrt{C^* - W(x)} \quad \text{o} \quad -\frac{4H}{f_0} + F(x) > \frac{F(x)}{2} - \sqrt{C^* - W(x)},$$

para todo  $x \in ]l'_1, l'_2[$ , es decir,

$$H < \frac{f_0}{4} \left( -\frac{|F(x)|}{2} + \sqrt{C^* - W(x)} \right) = \frac{f_0}{4} R(x). \quad (3.1.7)$$

Observe que de la definición de  $l'_1$  y  $l'_2$  tenemos  $\sqrt{C^* - W(x)} \geq \frac{1}{2}|F(x)|$  para todo  $x \in ]l'_1, l'_2[$ . Ahora es fácil verificar que  $R'(x) > 0$  para todo  $x \in ]l'_1, \bar{x}[$  y  $R'(x) < 0$  para todo  $x \in ]\bar{x}, l'_2[$ . En consecuencia,

$$\min_{x \in ]l'_1, l'_2]} R(x) = \min_{i=1,2} R(l'_i).$$

Usando la condición (3.0.2), tenemos

$$H < \frac{f_0}{2} K_2 \leq \frac{f_0}{4} \min_{i=1,2} R(l'_i) \leq \frac{f_0}{4} R(x),$$

que es precisamente (3.1.7), por consiguiente, hemos demostrado (3.1.5).

Análogamente para demostrar (3.1.6),  $H$  debe satisfacer

$$0 < H < \frac{f_0}{2|F(x)|} \left( -\frac{|F(x)|}{2} + \sqrt{C^* - W(x)} \right)^2 = \frac{f_0}{2|F(x)|} R^2(x). \quad (3.1.8)$$

Observe

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{|F(x)|} R^2(x) \right) > 0 \quad x \in ]l'_1, \bar{x}[ \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{|F(x)|} R^2(x) \right) < 0 \quad x \in ]\bar{x}, l'_2[.$$

En consecuencia,  $\min_{x \in ]l'_1, l'_2]} \frac{R^2(x)}{|F(x)|} = \min_{i=1,2} \frac{R^2(l'_i)}{|F(l'_i)|}$ . Usando nuevamente (3.0.2) tenemos

$$H < \frac{f_0}{2} K_2 \leq \frac{f_0}{2} \frac{R^2(l'_i)}{|F(l'_i)|} \leq \frac{f_0}{2} \frac{R^2(x)}{|F(x)|},$$

que es justamente (3.1.8). □

## 3.2. Demostración del resultado principal de este Capítulo.

Lo primero que mostraremos es que la región  $D$ , definida en (3.1.4), es positivamente invariante. Es suficiente demostrar

$$\dot{P}(x, y) < 0, \quad (x, y) \notin D, \quad (3.2.1)$$

en este caso  $\dot{P}$  denota la derivada total de  $P$ . Teniendo en cuenta (3.1.1) y (3.1.2),

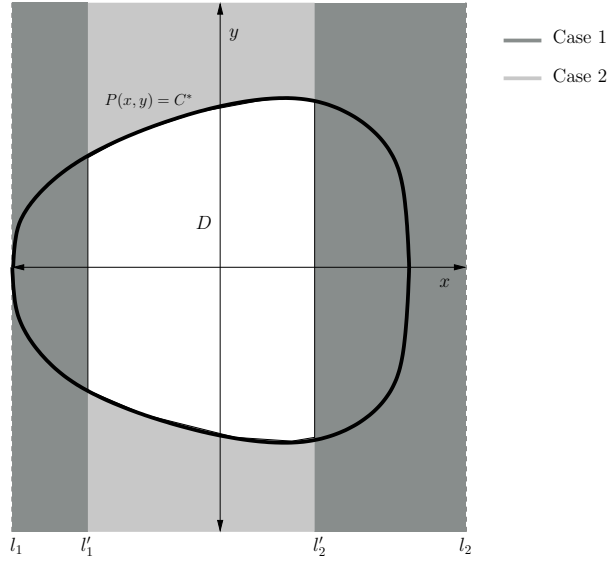


Figura 3.2.1: En blanco la región  $D$  y en tonos grises el exterior de  $D$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{P} &= [y + (y - F(x))]y' + [-f(x)(y - F(x)) + 2g(x)]x' \\
 &= [2y - F(x)](h(t) - g(x)) + [2g(x) - f(x)(y - F(x))](y - F(x)) \\
 &= h(t)[2y - F(x)] - g(x)[2y - F(x)] - f(x)(y - F(x))^2 + 2g(x)(y - F(x)) \\
 &= -f(x)(y - F(x))^2 + 2h(t)(y - F(x)) - F(x)g(x) + F(x)h(t).
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Distinguiamos dos regiones exteriores a  $D$  que hemos dividido en dos casos, ver figura 3.2.1.

**Caso 1.** Sea  $x \in ]l_1, l'_1] \cup ]l'_2, l_2[$ . Primero observemos que  $F(x)g(x)$  y  $|g(x)|$  son funciones no negativas con un mínimo absoluto en  $\bar{x}$ , además ambas funciones son decrecientes en  $]l_1, l'_1]$  y crecientes en  $]l'_2, l_2[$ . Por (3.0.2), tenemos  $H < \frac{f_0}{2}K_1$  y considerando la definición de  $K_1$  y el argumento antes mencionado, se sigue que la siguiente desigualdad

$$F(x)g(x) > \frac{2H^2}{f_0}, \quad |g(x)| > 2H,$$

para todo  $x \in ]l_1, l'_1] \cup ]l'_2, l_2[$ . En consecuencia,

$$-f(x)(y - F(x))^2 \leq -f_0(y - F(x))^2, \quad 2h(t)(y - F(x)) \leq 2H|y - F(x)|,$$

$$\begin{aligned}
F(x)h(t) - F(x)g(x) &< |F(x)|H - F(x)g(x) \\
&< |F(x)|\frac{|g(x)|}{2} - F(x)g(x), \\
&\leq -\frac{1}{2}F(x)g(x) < -\frac{H^2}{f_0}.
\end{aligned}$$

Al introducir las desigualdades anteriores en (3.2.2) tenemos

$$\begin{aligned}
\dot{P} &< -f_0(y - F(x))^2 + 2H|y - F(x)| - \frac{H^2}{f_0} \\
&< -\left(\sqrt{f_0}|y - F(x)| - \frac{H}{\sqrt{f_0}}\right)^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

para todo  $x \in ]l_1, l'_1] \cup ]l'_2, l_2[$  y  $y \in \mathbb{R}$ .

**Caso 2.** Sea  $x \in ]l'_1, l'_2[$  y  $P(x, y) \geq C^*$ . Por el Lema 3.1.2 las desigualdades (3.1.5), (3.1.6) se satisfacen, por consiguiente

$$\begin{aligned}
-f(x)(y - F(x))^2 &\leq -f_0(y - F(x))^2, \\
F(x)h(t) - F(x)g(x) &\leq H|F(x)| < \frac{f_0}{2}(y - F(x))^2.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\dot{P} &< |y - F(x)|\left(-\frac{f_0}{2}|y - F(x)| + 2h(t)\right) \\
&< |y - F(x)|(-2H + 2h(t)) < 0,
\end{aligned}$$

para todo  $x \in ]l'_1, l'_2[$  y  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $P(x, y) \geq C^*$ .

Por tanto, combinando los casos 1 y 2 obtenemos (3.2.1). Siguiendo la notación del Capítulo 2, denotamos por  $P_T$  la aplicación de Poincaré asociada al sistema (3.1.1) con condición inicial  $\zeta_0 = (x_0, y_0)$ . Ahora como  $D$  es positivamente invariante tenemos que si  $\zeta_0 \in D$  entonces  $P_T(\zeta_0) \in D$ . Finalmente, como  $D$  es compacto, simplemente conexo y positivamente invariante, el teorema de punto fijo de Brouwer garantiza que  $P_T$  tiene un punto fijo y corresponde a una solución  $T$ -periódica  $\varphi(t)$  de (3.0.1) que verifica (3.0.3).



### 3.3. Soluciones periódicas asintóticamente estables.

En esta sección se combinan las cotas obtenidas en la demostración de existencia y [89], debido a que obtendremos unicidad y un criterio de estabilidad. Antes de presentar el teorema definamos las siguientes constantes

$$m = \min_{x \in [l'_1, l'_2]} f(x), \quad M = \max_{x \in [l'_1, l'_2]} f(x),$$

$$\beta = (M - m)/2, \quad \gamma = (M + m)/2, \quad \alpha = (\pi/T)^2 + \gamma^2/4.$$

**Teorema 3.3.1.** *Bajo los supuestos del Teorema 3.0.5 y suponiendo que  $g$  es una función continuamente diferenciable en todo su dominio de definición tal que*

$$0 < \max_{x \in [l'_1, l'_2]} g'(x) \leq \alpha - \beta(\gamma + \alpha^{1/2}). \quad (3.3.1)$$

Entonces la solución encontrada en el Teorema 3.0.5 es única y asintóticamente estable.

*Demostración.* Para la unicidad seguiremos el argumento de la demostración [89, Proposición 4.3]. En efecto, si  $x_1$  y  $x_2$  son dos soluciones distintas y  $T$ -periódicas de (3.0.1), entonces  $z = x_1 - x_2$  es una solución  $T$ -periódica de la ecuación

$$z'' + (p(t)z)' + q(t)z = 0, \quad (3.3.2)$$

donde  $0 < q(t) < \alpha - \beta(\gamma + \alpha^{1/2})$  y  $m \leq p(t) \leq M$ . Por un lado, al integrar sobre el periodo la ecuación (3.3.2) tenemos

$$\int_0^T q(t)z(t)dt = 0. \quad (3.3.3)$$

Por otro lado, tenemos que [89, Corollary A.3] garantiza que las soluciones periódicas de (3.3.2) son idénticamente cero o  $z(t) \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Descartamos la segunda condición debido a  $q > 0$  y  $z$  debe satisfacer (3.3.3). Por consiguiente,  $x_1$  es idéntica a  $x_2$  y por lo tanto la solución es única.

En cuanto a la estabilidad asintótica, la solución  $\varphi$  encontrada en el Teorema 3.0.5 bajo la condición (3.3.1) es aislada, pues siguiendo el argumento de la demostración de la Proposición 2.3.4 tenemos que el origen es la única solución  $2T$ -periódica de la linealización (3.3.2) de (3.0.1) lo que implica que  $\varphi$  es aislada. De otro lado, usando argumentos de homotopía se demuestra que los multiplicadores característicos  $\mu_1, \mu_2$  asociados a (3.3.2) satisfacen  $|\mu_1| = |\mu_2| < 1$  y por lo tanto

$$\gamma_T(\varphi) = \text{sgn}((1 - \mu_1)(1 - \mu_2)) = 1,$$

entonces podemos aplicar [89, Proposition 1.2] (ver Proposición 2.3.4) y obtener que  $\varphi$  es una solución asintóticamente estable.  $\square$

### 3.4. Ejemplos y comparación de resultados.

Es importante destacar que la ecuación con singularidades débiles y término de fricción lineal ha sido poco explorada hasta ahora. Una referencia reciente es [88]. Para comparar los resultados respectivos, tomemos la ecuación del modelo

$$x'' + f(x)x' + x^\mu - \frac{1}{x^\delta} = a \cos(\omega t), \quad (3.4.1)$$

donde  $a, \mu, \delta, \omega > 0$ . Esta ecuación corresponde a (3.0.1) con  $g(x) = x^\mu - \frac{1}{x^\delta}$  y  $h(t) = a \cos(\omega t)$ . Por supuesto  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Bajo la hipótesis (H2), en [88, Teorema 1.1] establecen la existencia de una solución  $T$ -periódica positiva siempre que

$$f_0 > \frac{\sqrt{T} \|h\|_2}{g^{-1}(-a)} = \frac{\pi \sqrt{2} a}{g^{-1}(-a) \omega}. \quad (3.4.2)$$

Al comparar (3.4.2) con (3.0.2), nuestra condición tiene la ventaja de que no depende de la frecuencia  $\omega$ . Por lo tanto, ambos supuestos son independientes y es fácil construir ejemplos que verifican (3.0.2) y no (3.4.2), simplemente tomando  $\omega$  suficientemente pequeño.

**Ejemplo 3.4.1.** Si fijamos

$$f(x) = 1, \mu = 1, \delta = \frac{1}{2},$$

y tomamos  $C = 1$  en el Teorema 3.0.5,  $l'_1, l'_2$  se pueden calcular numéricamente como  $l'_1 = 0,340298$ ,  $l'_2 = 1,73068$ . En consecuencia,  $K_1 = 0,970549$ ,  $K_2 = 0,589254$ . Por tanto, la condición (3.0.2), se escribe como

$$a \leq \frac{1}{2} \min\{K_1, K_2\} = 0,294627.$$

Bajo tal condición, (3.4.1) tiene una solución  $T$ -periódica para cualquier  $\omega > 0$ . Mientras si tomamos  $a = \frac{1}{4}$  tenemos que (3.4.2) no se satisface cuando  $\omega < 0,189215$ .

En la gráfica 3.4.1 mostramos el plano  $(a, \omega)$  mostrando en color gris las regiones donde se satisfacen las condiciones (3.4.2), (3.0.2). La región en gris más oscuro satisface (3.0.2) pero no (3.4.2), en contraste la región en gris más claro satisface (3.4.2) y no (3.0.2), mientras la región en gris medio satisface ambas condiciones.

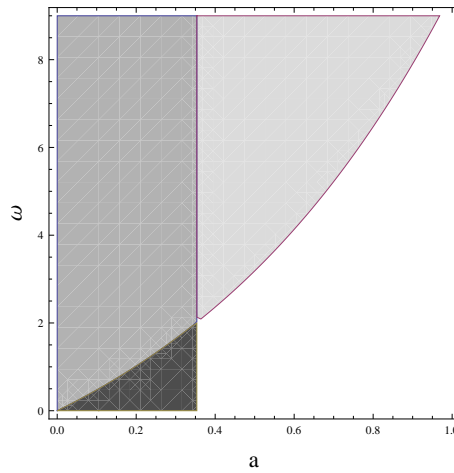


Figura 3.4.1: Regiones donde se satisfacen las condiciones (3.4.2), (3.0.2), para el ejemplo 3.4.1.

**Ejemplo 3.4.2.** Ahora, al tomar

$$\mu = 2, \delta = \frac{1}{2}, f(x) \equiv 4, l'_1 = \frac{1}{2},$$

y  $C = Z(l'_1)$ , entonces  $l'_2 = 1,49107$ ,  $K_1 = 0,698446$ ,  $K_2 = 0,291053$ , la condición (3.0.2) se escribe

$$a \leq 2 \min\{K_1, K_2\} = 0,582107,$$

y (3.3.1) se escribe

$$\max_{x \in [l'_1, l'_2]} g'(x) = 3,25676 < 4 + \frac{w^2}{4},$$

la desigualdad anterior se satisface para cualquier frecuencia  $w > 0$ . Si fijamos  $a = \frac{1}{2}$  los Teoremas 3.0.5, 3.3.1 garantizan la existencia de una única solución  $T$ -periódica asintóticamente estable para todo  $w$ , aunque (3.4.2) no se cumple cuando  $w < 0,698132$ . En la figura 3.4.2 comparamos las condiciones (3.4.2), (3.0.2) en el plano  $(a, w)$  ver figura (a), mientras en la figura (b) mostramos la curva en el plano  $(l'_2, a)$  que satisfacen (3.0.2) y (3.3.1), es decir las regiones más oscuras de la figura (a). Además la región sombreada de la figura (b) es el conjunto de valores  $(l'_2, a)$  donde la estabilidad es independiente de la frecuencia  $w > 0$ , es decir los valores de  $a$  y  $l'_2$  donde se verifican (3.0.2) y no (3.4.2).

Otra referencia que es de interés [61], pues los autores hacen un estudio de la ecuación (3.0.1) cuando el término de fricción es lineal ( $f(x) \equiv c$ , constante) y usan una combinación del método de sub y

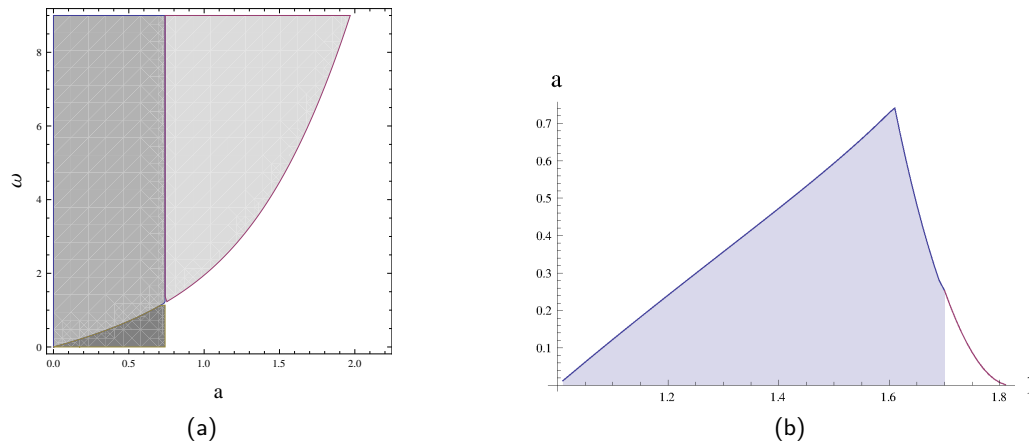


Figura 3.4.2: Para el ejemplo 3.4.2 : (a) Comparación (3.4.2) con (3.0.2). (b) Intervalo  $[l'_1, l'_2]$  que satisfacen (3.0.2) y (3.3.1) para cualquier frecuencia  $w > 0$ .

super soluciones e ideas del artículo [89]. En particular, para la ecuación

$$x'' + cx' - \frac{1}{x^\delta} = -1 + a \cos(wt), \quad (3.4.3)$$

con  $a, \delta > 0$ , el Teorema 1.2, véase también el Ejemplo 3.1, garantiza la existencia de una solución  $T$ -periódica asintóticamente estable siempre que

$$1 + a \leq \left( \frac{1}{4\delta} (w^2 + c^2) \right)^{\delta/(\delta+1)}. \quad (3.4.4)$$

Una vez más, la condición depende explícitamente de la frecuencia de  $w$ , por lo que es esencialmente independiente de la condición (3.0.2). Esta ecuación corresponde a (3.0.1) con  $g(x) = 1 - \frac{1}{x^\delta}$  y  $h(t) = a \cos(wt)$ .

**Ejemplo 3.4.3.** Al fijar

$$c = \frac{1}{2}, \delta = \frac{1}{2^3}, l'_2 = \frac{3}{2},$$

y  $C = Z(l'_2)$  tenemos  $l'_1 = 0,544459$ , la condición (3.0.2) se escribe

$$a \leq \frac{1}{4} \min\{K_1, K_2\} = 0,0247101.$$

Por tanto, en el caso que  $a = \frac{2}{10^2}$ , el Teorema 3.0.5, garantiza la existencia de una solución  $T$ -periódica para todo  $w > 0$ , aunque (3.4.4) no se satisface para ningún  $0 < w < 0,589531$ . En la figura 3.4.3

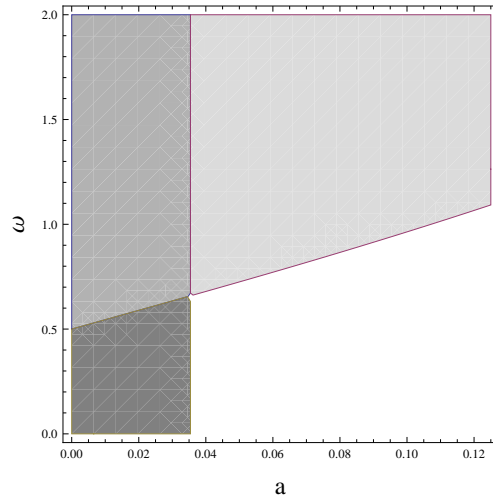


Figura 3.4.3: Regiones donde se satisfacen las condiciones (3.4.4) y (3.0.2) para el ejemplo 3.4.3.

se ilustra la región donde se satisfacen las condiciones (3.4.4) y (3.0.2). En gris más oscuro la región donde se satisface únicamente (3.0.2), en gris más claro la región donde sólo se cumple (3.4.4), mientras que en la región en color gris medio se satisfacen (3.4.4) y (3.0.2). En general, si tomamos  $c^2 < 4\delta$  podemos conseguir que (3.4.4) no se satisfaga para todo  $w > 0$  y encontrar soluciones  $T$ -periódicas que sólo satisfagan (3.0.2). Sin embargo no es posible conseguir soluciones asintóticamente estables que satisfagan (3.0.2) - (3.3.1) y no (3.4.4), pues de (3.3.1) tenemos para todo  $x \in [l'_1, l'_2]$ ,  $l'_1 < 1 < l'_2$

$$\frac{\delta}{x^{\delta+1}} < \frac{1}{4}(w^2 + c^2),$$

en consecuencia, para que se cumpla (3.0.2) es necesario que  $\frac{1}{4\delta}(w^2 + c^2) > 1$  lo que implica

$$\left(\frac{1}{4\delta}(w^2 + c^2)\right)^{\delta/(\delta+1)} > 1.$$

Por lo tanto, (3.4.4) se satisface para todo  $a$  que satisface (3.0.2).

## Bifurcación de nodo-silla en un MEMS electrostático canónico no autónomo

El propósito de este capítulo es el estudio analítico de la existencia y estabilidad de soluciones periódicas de un modelo masa-resorte que idealiza la acción electrostática de un sistema micro-electro-mecánico, cuyas siglas en inglés son MEMS (micro-electro-mechanical system), que se ha convertido en canónico en la literatura relacionada. El sistema se ilustra en la figura 4.0.1 y consiste en dos placas del condensador en paralelo separados una distancia  $d$ , una de ellas es fija y la segunda es móvil unida a un resorte lineal con coeficiente de rigidez  $k > 0$ . Cuando el voltaje  $V(t)$ , periódico en el tiempo, se aplica tenemos que la fuerza de Coulomb entre las placas hace que el sistema sea altamente no lineal. Las oscilaciones se rigen por la ecuación diferencial de segundo orden

$$my'' + cy' + ky = \frac{\epsilon_0 A}{2} \frac{V^2(t)}{(d-y)^2}, \quad (4.0.1)$$

donde  $y$  es el desplazamiento vertical de la placa móvil (y siempre se asume inferior a  $d$ ),  $m$  es su masa,  $c$  es un coeficiente de amortiguamiento viscoso,  $\epsilon_0$  es la constante dieléctrica absoluta en el vacío y  $A$  es el área de las placas.

Ahora, tomemos el voltaje constante  $V(t) \equiv V_0$ , entonces las soluciones constantes (equilibrios) de (4.0.1) corresponden a las raíces del polinomio de tercer orden  $y(d-y)^2 - h$ , donde por conveniencia hemos llamado  $h = \frac{\epsilon_0 AV_0^2}{2k} > 0$ . La ecuación  $y(d-y)^2 - h = 0$  tiene siempre una raíz más grande que  $d$ , y por lo tanto, sin significado físico. Un análisis directo proporciona un valor de umbral

$$d_0 = \frac{3}{2}(2h)^{1/3}, \quad (4.0.2)$$

tal que si  $d < d_0$ , la ecuación (4.0.1) no tiene equilibrios y en el caso  $d > d_0$  tenemos un punto de

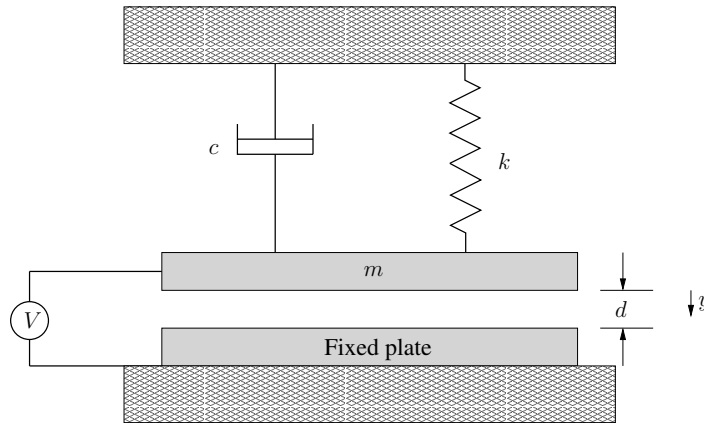


Figura 4.0.1: Modelo masa-resorte que idealiza la acción electrostática de un sistema micro-electro-mecánico.

silla y un nodo, véase figura 4.0.2.

De otro lado, al hacer el cambio de variable  $z = \frac{y}{d}$  y  $\hat{t} = \frac{k}{c}t$  en (4.0.1) se obtiene

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 z}{d\hat{t}^2} + \frac{dz}{d\hat{t}} + z = \lambda \frac{V^2(\hat{t})}{(1-z)^2}, \quad (4.0.3)$$

donde el parámetro  $\alpha$  puede interpretarse como un coeficiente de amortiguamiento que mide la fuerza relativa de la fuerza de amortiguación viscosa comparada con la fuerza restauradora, mientras que el parámetro  $\lambda$  mide la fuerza relativa de las fuerzas electrostática y elástica del sistema. En el caso en que el coeficiente de amortiguamiento es muy grande y los efectos de amortiguación dominan sobre los efectos de inercia se dice que el modelo presenta el llamado "regímenes dominados por la viscosidad". En el caso de la ecuación (4.0.3) tenemos que el "regímenes dominados por la viscosidad" reduce la ecuación a una de primer orden, y en [1] se demuestra la existencia de una bifurcación nodo-silla.

El objetivo principal del presente Capítulo es demostrar la existencia de bifurcación tipo nodo-silla del modelo no autónomo (4.0.1) para regiones concretas de los parámetros involucrados. Para este fin, señalemos que (4.0.1) es un ejemplo de EDO con singularidad en la variable de estado y dependencia periódica del tiempo y por ende podemos usar todas las herramientas desarrolladas para ecuaciones con singularidades presentadas en los Capítulos 1 y 2. Nos llama la atención que a pesar de la gran cantidad de trabajo dedicado a MEMS, a nuestro entender este es el primer trabajo, en este sentido, que conecta con las ecuaciones con singularidades.

El resto del capítulo está organizado de la siguiente forma. En la Sección 4.1 reescribimos la ecuación (4.0.1) en una forma equivalente, trasladando la singularidad al origen y presentamos los resultados

principales. En la sección 4.2, presentamos algunas cotas a priori para las soluciones. La sección 4.3 contiene las demostraciones de los resultados principales presentados en la Sección 4.1. La demostración del resultado de la multiplicidad es una adaptación de [28] y se basa en argumentos clásicos de grado topológico. Los resultados de estabilidad han sido obtenidos de la conexión conocida entre la estabilidad y el índice de solución periódico, desarrollado por Ortega en [63, 65, 66, 67], aunque es posible adaptar los resultados [64]. Finalmente, en la Sección 4.4 aplicamos los resultados principales al modelo original de MEMS (4.0.1) y lo ilustramos con un ejemplo concreto donde las constantes físicas son tomadas de [87].

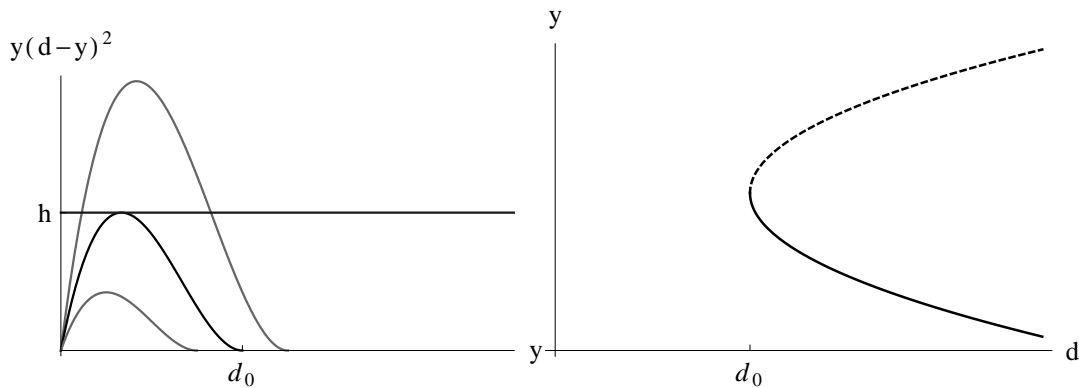


Figura 4.0.2: Ilustración de la bifurcación nodo-silla en el caso de voltaje constante en la ecuación (4.0.1).

## 4.1. Una ecuación singular equivalente.

En primer lugar, observemos que el parámetro  $m$  se puede normalizar, dividiendo (4.0.1) por  $m$  y renombrando  $c, k, A$ . Con el cambio de variable  $u = d - y$ , (4.0.1) se reescribe como

$$u'' + c u' + ku + \frac{a^2(t)}{u^2} = s, \quad (4.1.1)$$

donde  $c, k$ , y  $s$  son constantes positivas y  $a(t)$  es una función continua, positiva y  $T$ -periódica. Estamos interesados en la existencia y estabilidad de soluciones  $T$ -periódicas de (4.1.1). Fijemos las constantes

$$s_* := 3 \left( \frac{k}{2} a_m \right)^{2/3}, \quad s^* := 3 \left( \frac{k}{2} a_M \right)^{2/3},$$

donde  $a_m = \min_{t \in [0, T]} a(t)$  y  $a_M = \max_{t \in [0, T]} a(t)$ . Entonces nuestro primer resultado principal es el siguiente.



**Teorema 4.1.1** (Multiplicidad). *Existe  $s_0 \in [s_*, s^*]$  tal que*

1. *Si  $s < s_0$  entonces (4.1.1) no tiene soluciones  $T$ -periódicas.*
2. *Si  $s = s_0$  entonces (4.1.1) tiene al menos una solución  $T$ -periódica.*
3. *Si  $s > s_0$  entonces (4.1.1) tiene al menos dos soluciones  $T$ -periódicas.*

En la literatura matemática este tipo de resultados se conoce como del tipo Ambrosetti-Prodi. Un resultado similar fue demostrado en [28] para una ecuación regular de la forma  $u'' + cu' + g(t, u) = s$ , que satisface la condición de coercitividad

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} g(t, u) = +\infty, \quad \text{uniformemente en } t.$$

Sin embargo, la presencia de la singularidad en (4.1.1) impide la aplicación directa de ese teorema. El segundo resultado principal se refiere a la estabilidad de las soluciones aportadas en Teorema 4.1.1.

**Teorema 4.1.2** (Estabilidad). *Asumamos las condiciones del Teorema 4.1.1 y supongamos*

$$k - 2(a_m)^2 \left(\frac{c}{Ts}\right)^3 \left(\frac{a_m}{a_M}\right)^6 < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 + \frac{c^2}{4}. \quad (4.1.2)$$

*Entonces obtenemos los siguientes resultados.*

1. *Si  $s = s_0$  la ecuación (4.1.1) tiene una única solución  $T$ -periódica que no es asintóticamente estable.*
2. *Si  $s > s_0$  la ecuación (4.1.1) tiene exactamente dos soluciones  $T$ -periódicas, una asintóticamente estable y otra inestable.*

Ambos resultados representan un conjunto canónico de bifurcación nodo-silla en el umbral de valores de  $s_0$ .

## 4.2. Cotas a priori.

Esta sección está dedicada a la obtención de cotas explícitas sobre las eventuales soluciones  $T$ -periódicas de (4.1.1). En adelante  $g(t, u) := ku + \frac{a^2(t)}{u^2}$  y definimos las siguientes constantes

$$\epsilon(s) := \frac{a_m}{\sqrt{s}}, \quad (4.2.1)$$

$$M_1(s) := T \frac{s}{c} \left( \frac{a_M}{a_m} \right)^2, \quad (4.2.2)$$

$$M_2(s) := Ts \left( \frac{a_M}{a_m} \right)^2 \left( 2 + \frac{k}{c} + \left( \frac{a_m}{a_M} \right)^2 \right). \quad (4.2.3)$$

**Lema 4.2.1.** *Si  $u$  es una solución  $T$ -periódica de (4.1.1) entonces  $u(t) > \epsilon(s)$ .*

*Demostración.* Sea  $t_1 \in ]0, T[$  tal que  $u(t_1) = \min_{t \in \mathbb{R}} u(t)$ . Entonces,  $u''(t_1) \geq 0$ ,  $u'(t_1) = 0$  y

$$u''(t_1) + g(t_1, u) = s.$$

En consecuencia,  $\frac{(a_m)^2}{u^2(t_1)} < s$ . Por lo tanto,

$$u(t_1) > \frac{a_m}{\sqrt{s}} = \epsilon(s).$$

□

En el siguiente resultado se muestra una cota superior para eventuales soluciones  $T$ -periódicas de (4.1.1) en términos del parámetro  $s$ .

**Lema 4.2.2.** *Si  $u$  es una solución  $T$ -periódica de (4.1.1) entonces  $u(t) < M_1(s)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $u$  es una solución  $T$ -periódica de (4.1.1). Entonces si multiplicamos ambos lados de (4.1.1) por  $u'$  e integramos sobre el periodo, tenemos

$$c \|u'\|_2^2 = - \int_0^T \frac{a^2(t)}{u^2} u' dt < \sqrt{T} \frac{(a_M)^2}{\epsilon(s)^2} \|u'\|_2.$$

En consecuencia,

$$\|u'\|_2 < \sqrt{T} \frac{s}{c} \left( \frac{a_M}{a_m} \right)^2. \quad (4.2.4)$$

Así dados  $t_0, t \in [0, T]$ , tenemos

$$u(t) \leq |u(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t u'(s) ds \right| \leq \sqrt{T} \|u'\|_2 < T \frac{s}{c} \left( \frac{a_M}{a_m} \right)^2 = M_1(s).$$

□

Finalmente, establecemos una cota de la derivada de posibles soluciones  $T$ -periódicas de (4.1.1).

**Lema 4.2.3.** *Si  $u$  es una solución  $T$ -periódica de (4.1.1) entonces  $\|u'\|_\infty < M_2(s)$ .*

*Demostración.* Primero observemos que al integrar la ecuación (4.1.1) sobre el periodo tenemos que la existencia de una solución  $T$ -periódica implica  $s > 0$ . Ahora de la ecuación (4.1.1) tenemos

$$\begin{aligned} |u''| &= \left| -cu' - \frac{a^2(s)}{u^2(s)} - ku + s \right| \\ &\leq c|u'| + \left| \frac{a^2(s)}{u^2(s)} \right| + k|u| + s. \end{aligned}$$

Al integrar la expresión anterior sobre el periodo y usar el Lema 4.2.2, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (4.2.4)

$$\begin{aligned} \|u''\|_1 &< c\sqrt{T}\|u'\|_2 + T \frac{(a_M)^2}{\epsilon(s)^2} + kM_1(s) + Ts \\ &< Ts \left( \frac{a_M}{a_m} \right)^2 \left( 2 + \frac{k}{c} + \left( \frac{a_m}{a_M} \right)^2 \right) = M_2(s). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|u'(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t u''(s) ds \right| \leq \|u''\|_1 < M_2(s),$$

donde  $t_0, t \in [0, T]$ .

□

### 4.3. Demostración de nuestros resultados

En este apartado, por comodidad denotamos por

$$g_L(u) := ku + \frac{(a_m)^2}{u^2}, \quad g_U(u) := ku + \frac{(a_M)^2}{u^2},$$

y

$$S_j = \{s \in \mathbb{R}: (4.1.1) \text{ tiene al menos } j \text{ soluciones } T\text{-periódicas}\}, \quad j \geq 1.$$

### 4.3.1. Resultado de existencia

La demostración del Teorema 4.1.1 la hemos dividido en varios lemas. Además usaremos el concepto de sub y super solución que fue presentada en el Capítulo 2.

**Lema 4.3.1.** Si  $s \in S_1$  entonces  $s \geq s_*$ .

*Demostración.* Si  $u$  es una solución  $T$ -periódica de (4.1.1) para  $s$ , tenemos

$$\int_0^T g(t, u(t)) dt = Ts.$$

Observe que la función  $g_L(u)$  alcanza su mínimo global en  $u_1 = \left(\frac{2(a_m)^2}{k}\right)^{1/3}$  y tal mínimo es justamente  $s_*$ . Entonces

$$s_* \leq \frac{1}{T} \int_0^T g_L(u(t)) dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T g(t, u(t)) dt = s.$$

□

**Lema 4.3.2.**  $S_1 \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Vamos a demostrar que la ecuación (4.1.1) tiene al menos una solución  $T$ -periódica para  $s > s^*$ . Por un resultado conocido (ver [18, Theorem I-6.9]), es suficiente obtener sub y super soluciones  $\alpha(t), \beta(t)$  tales que  $\alpha(t) < \beta(t)$  para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ . Primero mostremos que  $\alpha_0(t) := \epsilon(s)$ , para un  $s$  fijo, es una sub-solución (constante) para (4.1.1). En efecto,

$$\alpha_0'' + c\alpha_0' + g(t, \alpha_0) \geq g_L(\alpha_0) = k \frac{a_m}{\sqrt{s}} + s > s.$$

En segundo lugar, es fácil verificar que en  $\beta_0 = \left(\frac{2(a_M)^2}{k}\right)^{1/3} = \frac{2}{3k} s^*$ , la función  $g_U(u)$  alcanza su valor mínimo  $s^*$ . Entonces,

$$\beta_0'' + c\beta_0' + g(t, \beta_0) \leq g_U(\beta_0) = s^* < s,$$

lo que implica que  $\beta_0$  es una super-solución de (4.1.1) para  $s$ . Finalmente, observemos

$$\alpha_0 < \epsilon(s^*) = \frac{2(s^*)^{3/2}}{3^{3/2}k} \frac{1}{\sqrt{s^*}},$$

y es fácil verificar que  $\epsilon(s^*) < \beta_0$ . Por tanto,  $\alpha_0 < \beta_0$ . □

**Lema 4.3.3.**  $S_1 = [s_0, +\infty)$  con  $s_0 \geq s_*$ .

*Demostración.* Del Lema 4.3.2 sabemos que  $S_1 \neq \emptyset$ . Primero mostremos que si  $\hat{s} \in S_1$ , entonces  $s \in S_1$  para todo  $s > \hat{s}$ . Denotemos con  $u_{\hat{s}}$  la solución  $T$ -periódica de (4.1.1) para  $s = \hat{s}$ . Por un lado, tenemos que  $u_{\hat{s}}$  es una super-solución de (4.1.1) con  $s > \hat{s}$ , pues

$$u_{\hat{s}}'' + cu_{\hat{s}}' + g(t, u_{\hat{s}}) = \hat{s} < s.$$

Por otro lado,  $\epsilon(s)$  (definida en (4.2.1)) es una sub-solución de (4.1.1) con  $s > \hat{s}$ , más aún del Lema 4.2.1 tenemos  $\epsilon(s) < \epsilon(\hat{s}) < u_{\hat{s}}$ . En consecuencia, la pareja  $(\epsilon(s), u_{\hat{s}})$  de sub y super soluciones está bien ordenada y existe una solución  $T$ -periódica entre ellas. Luego,  $s \in S_1$  para todo  $s > \hat{s}$ .

Finalmente, tomemos  $s_0 = \inf S_1$ , del Lema 4.3.1 sabemos que  $s_0 \geq s_*$  y mostremos que  $s_0 \in S_1$ . Sea  $\{s_n\}$  una sucesión en  $S_1$  tal que  $s_n \rightarrow s_0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Ya sabemos que la ecuación (4.1.1) tiene, para cada  $s_n$ , una solución  $u_{s_n}$ . Utilizando los Lemas 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.4, se deduce que la secuencia  $\{u_n\}$  es uniformemente acotada y equicontinua. Por el Teorema de Ascoli-Arzelá tenemos que  $\{u_n\}$  contiene una subsucesión uniformemente convergente y el límite de esa subsucesión es una solución de (4.1.1) para  $s = s_0$ .  $\square$

**Lema 4.3.4.**  $s_0 \leq s^*$ .

*Demostración.* Esto se deduce directamente del argumento empleado en la demostración del Lema 4.3.1 que implica  $s \in S_1$  para cada  $s > s^*$ . De la definición  $s_0 = \inf S_1$ , la conclusión es evidente.  $\square$

Ahora escribimos las ecuaciones como un problema abstracto de punto fijo. Dado  $X_T = C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ ,  $p(t) \in X_T$ , considere el problema lineal

$$u'' + cu' - u = p(t), \quad u \in X_T.$$

De la alternativa de Fredholm se sigue que este problema tiene una única solución  $u = Lp$ . El operador lineal  $L$  puede expresarse explícitamente en términos de función de Green como un operador integral y es fácil mostrar que es compacto con la norma usual de  $X_T$ . Entonces el problema periódico asociado a (4.1.1) es equivalente a

$$u = L(N_s u - u),$$

donde el operador de Nemitskii  $N_s : X_T \rightarrow X_T$  está dado por

$$N_s[u] := s - g(t, u).$$

Ahora, al definir  $\Phi_s := L(N_s - I)$  tenemos que encontrar una solución  $T$ -periódica de (4.1.1) es equivalente a encontrar una solución de la ecuación

$$u - \Phi_s(u) = 0. \quad (4.3.1)$$

Debido a que  $\Phi_s$  es un operador compacto,  $\deg_{LS}(I - \Phi_s, \Omega)$  el grado de Leray-Schauder está bien definido siempre que  $\Phi_s$  no tenga puntos fijos en la frontera de  $\Omega$ .

Antes de presentar el siguiente resultado, definimos el conjunto

$$\Omega_s = \{u \in C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) : \epsilon(s) < u(t) < M_1(s), t \in \mathbb{R}, \|u'\|_\infty < M_2(s)\},$$

donde  $s > 0$  y  $\epsilon(s)$ ,  $M_1(s)$ ,  $M_2(s)$  están definidos en (4.2.1), (4.2.2) y (4.2.3) respectivamente.

**Lema 4.3.5.** *Sea  $s_0 < s_1 < s_2$ . Entonces  $\Omega_s \subset \Omega_{s_2}$  para cualquier  $s \in [s_1, s_2]$  y cualquier posible solución  $u$  de (4.1.1), con  $s \in [s_1, s_2]$ , pertenece a  $\Omega_{s_2}$ .*

*Demostración.* Observe que la función  $\epsilon(s)$  es decreciente y las funciones  $M_1(s)$ ,  $M_2(s)$  son crecientes para todo  $s \in [s_1, s_2]$ . En consecuencia,  $\Omega_s \subset \Omega_{s_2}$  para cualquier  $s \in [s_1, s_2]$ . De los Lemas 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.4 tenemos que cualquier posible solución  $u$  de (4.1.1), con  $s \in [s_1, s_2]$ , pertenece a  $\Omega_{s_2}$ .  $\square$

**Lema 4.3.6.**  $]s_0, +\infty[ \subset S_2$ .

*Demostración.* Fijemos  $s_1 > s_0$ . El conjunto  $\Omega_{s_1}$  es abierto, convexo y acotado en  $X_T$ . Del Lema 4.3.5 tenemos que cualquier posible solución  $u$  de (4.1.1), con  $s \in ]s_0, s_1]$ , pertenece a  $\Omega_{s_1}$  y de los Lemas 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.4 tenemos que la ecuación (4.3.1) no tiene puntos fijos en la frontera de  $\Omega_{s_1}$ . Entonces  $\deg_{LS}(I - \Phi_s, \Omega_{s_1})$  está bien definido y es independiente de  $s \in ]s_0, s_1]$  por la propiedad de homotopía del grado. Por otro lado, la ecuación (4.3.1) no tiene soluciones si  $s < s_0$ , ver Lema 4.3.3, entonces

$$\deg_{LS}[I - \Phi_s, \Omega_{s_1}] = 0. \quad (4.3.2)$$

Por consiguiente, debido a la invarianza del grado respecto a la homotopía tenemos que (4.3.2) también se satisface para  $s \in ]s_0, s_1]$ . Dado  $s \in ]s_0, s_1]$ , denotemos por  $u_0$  la solución  $T$ -periódica de (4.1.1) cuando  $s = s_0$ . Calculemos el grado para el siguiente conjunto

$$\Omega := \{u \in C^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) : \epsilon(s_1) < u < u_0, t \in \mathbb{R}, \|u'\|_\infty < M_2(s_1)\}.$$

Observe que  $\epsilon(s_1) < \epsilon(s) < \epsilon(s_0) < u_0$  y  $u_0 < M_1(s_0) < M_1(s)$  para todo  $s \in ]s_0, s_1]$ . Entonces  $\Omega \subset \Omega_{s_1}$ .

Ahora, para todo  $s \in ]s_0, s_1]$  tenemos que  $\epsilon(s_1)$  es una sub-solución estricta de (4.1.1),

$$\epsilon(s_1)'' + c\epsilon(s_1)' + g(t, \epsilon(s_1)) \geq g_L(\epsilon(s_1)) = k \frac{a_m}{\sqrt{s_1}} + s_1 > s,$$

mientras que  $u_0$  es una super-solución, en efecto

$$u_0'' + cu_0' + g(t, u_0) = s_0 < s.$$

En consecuencia, la pareja  $(\epsilon(s_1), u_0)$  de sub y super soluciones está bien ordenada para todo  $s \in ]s_0, s_1]$  y podemos usar el Teorema 2.5.2 (ver [68, Theorem 5, Section 2.6.2 ]) para obtener

$$\deg_{LS}(I - \Phi_s, \Omega) = 1, \quad (4.3.3)$$

para todo  $s \in ]s_0, s_1]$ . Ahora, de la ecuación (4.3.2) y la propiedad de aditividad del grado tenemos que para todo  $s \in ]s_0, s_1]$ ,

$$\deg_{LS}(I - \Phi_s, \Omega_{s_1} / \Omega) = -1. \quad (4.3.4)$$

Las relaciones (4.3.3) y (4.3.4) implican que (4.1.1) tiene al menos una solución en  $\Omega$  y una segunda solución en  $\Omega_{s_1} / \Omega$ . Como  $s_1$  es arbitrario en  $]s_0, \infty[$  entonces  $]s_0, \infty[ \subset S_2$ .  $\square$

*Demostración del Teorema 4.1.1.* La conclusión del Teorema 4.1.1 se sigue de los Lemas 4.3.3, 4.3.4 y 4.3.6.  $\square$

### 4.3.2. Resultado de estabilidad

El objetivo de esta subsección es caracterizar la estabilidad de soluciones  $T$ -periódicas  $u$  de (4.1.1) y usar las propiedades básicas del índice que se presentaron en el Capítulo 2. Necesitamos el siguiente resultado que nos da información sobre el orden de las soluciones  $T$ -periódicas de (4.1.1).

**Lema 4.3.7.** *Supongamos que  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones  $T$ -periódicas de (4.1.1), para  $s = s_1$  y  $s = s_2$  respectivamente. Además satisfacen la desigualdad (4.1.2) y  $u_1(t) \neq u_2(t)$  para algún  $t$ . Entonces,  $u_1 > u_2$  o  $u_2 > u_1$  en  $[0, T]$ .*

*Demostración.* Sea  $s = \max\{s_1, s_2\}$ . Observemos que  $g$  es estrictamente convexa en el intervalo  $[\epsilon(s), M_1(s)]$  y  $s$  satisface (4.1.2). Como consecuencia de ello, es fácil comprobar que  $\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) \ll$

$\frac{\pi^2}{T^2} + \frac{c^2}{4}$  para todo  $x \in [\epsilon(s), M_1(s)]$ . La diferencia  $v = u_1 - u_2$  satisface una ecuación de la forma

$$\mathcal{L}_\alpha[v] = s_1 - s_2,$$

donde  $\alpha = \frac{g(t, u_1(t)) - g(t, u_2(t))}{u_1(t) - u_2(t)}$  es una función  $T$ -periódica, tal que  $\alpha(t) \leq \frac{\partial g}{\partial x}(t, M_1(s))$ . La conclusión se sigue de la primera parte del Lema 2.3.6.  $\square$

*Demostración del Teorema 4.1.2.* En primer lugar, vamos a demostrar que (4.1.1) tiene exactamente dos soluciones periódicas para  $s > s_0$ . Del Teorema 4.1.1 tenemos que si  $s > s_0$  entonces (4.1.1) tiene al menos dos soluciones  $T$ -periódicas. Supongamos que  $u_1, u_2$  y  $u_3$  son soluciones  $T$ -periódicas de (4.1.1) para  $s = s_1 > s_0$ . Entonces por el Lema 4.3.7 las soluciones pueden ordenarse, sin pérdida de generalidad supongamos que  $u_1 < u_2 < u_3$ . Ahora tomando  $v_1 = u_2 - u_1$ , y  $v_2 = u_3 - u_2$  tenemos que  $v_i$  satisface la ecuación

$$\mathcal{L}_{\alpha_i}[v_i] = 0, \quad \text{donde } \alpha_i = \frac{g(t, u_{i+1}) - g(t, u_i)}{v_i}, \quad i = 1, 2.$$

La convexidad estricta de  $g$  implica que  $\alpha_1 < \alpha_2$  en  $[0, T]$ . Ahora bien, si usamos la segunda parte del Lema 4.3.7 tenemos que  $v_1$  o  $v_2$  debe ser cero. Entonces hemos demostrado que (4.1.1) tiene exactamente dos soluciones periódicas siempre que  $s > s_0$ .

En segundo lugar, mostremos que  $u_0$  es la única solución  $T$ -periódica de (4.1.1) cuando  $s = s_0$ . De la continuidad del índice tenemos  $\gamma_T(u_0) = 0$ ; pues de lo contrario la ecuación (4.1.1) podría tener soluciones  $T$ -periódicas para todo  $s \in ]s_0 - \epsilon, s_0[$ ,  $\epsilon > 0$ . Por lo tanto,  $u_0$  es degenerado. Sea  $u_1$  otra solución  $T$ -periódica de (4.1.1) cuando  $s = s_0$ ,  $u_0(t) \neq u_1(t)$  para algún  $t \in [0, T]$  y como (4.1.1) se satisface, el Lema 4.3.7 implica que  $u_0$  y  $u_1$  están ordenadas y junto con la convexidad escrita de  $g$  tenemos

$$u_0 < u_1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_0) < \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_1) \quad \text{en } [0, T]$$

ó

$$u_1 < u_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_1) < \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_0) \quad \text{en } [0, T].$$

Ahora bien, consideremos las ecuaciones

$$\mathcal{L}_{\alpha_i}[v] = 0 \quad \text{donde } \alpha_i = \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_i), \quad i = 0, 1.$$



Como  $u_0$  es degenerada la ecuación  $\mathcal{L}_{\alpha_0}[v] = 0$  tiene una solución no trivial y como  $\alpha_0 < \alpha_1$  ó  $\alpha_0 > \alpha_1$  entonces el Teorema de comparación de Sturm nos asegura que la ecuación  $\mathcal{L}_{\alpha_1}[v] = 0$  también tiene una solución no trivial, lo que contradice la segunda parte del Lema 2.3.6. Así hemos demostrado que para  $s = s_0$  la ecuación (4.1.1) tiene una única solución  $T$ -periódica que satisface  $\gamma_T(u_0) = 0$  que no puede ser asintóticamente estable como lo muestra el Teorema 2.3.5.

Finalmente, una consecuencia del razonamiento que hemos hecho hasta ahora combinado con el Lema 4.3.6 es la existencia de exactamente dos soluciones  $T$ -periódicas no degeneradas  $u_1 < u_2$  de (4.1.1) para  $s \in ]s_0, +\infty[$ . Usando el Lema 4.3.5, la propiedad de homotopía del grado de Leray-Schauder y siguiendo la notación del Capítulo 2 tenemos por un lado,

$$\deg_{LS}[I - \Phi_{s_1}, \Omega_{s_1}] = \deg_{LS}[I - \Phi_{s_0}, \Omega_{s_1}] = -\gamma_T(u_0) = 0,$$

y de otro lado, hemos mostrado la existencia de exactamente dos soluciones  $T$ -periódicas no degeneradas  $u_1 < u_2$  de (4.1.1) para  $s \in ]s_0, +\infty[$ , entonces

$$-\gamma_T(u_1) - \gamma_T(u_2) = \deg_{LS}[I - \Phi_{s_1}, \Omega_{s_1}],$$

lo que necesariamente implica  $\gamma_T(u_1) + \gamma_T(u_2) = \gamma_T(u_0) = 0$  y usando el hecho  $u_1, u_2$  son no degeneradas tenemos

$$\gamma_T(u_1) = -\gamma_T(u_2) = 1.$$

La conclusión se deriva de una aplicación directa del Teorema 2.3.5. □

#### 4.4. Aplicación al modelo original de MEMS.

La motivación inicial de nuestro estudio ha sido el análisis del modelo masa-resorte que idealiza la acción electrostática de un sistema MEMS que se presentó en la introducción del capítulo. En este apartado, aplicamos los resultado de los Teoremas 4.1.1, 4.1.2 a este modelo. Como hemos señalado antes, el parámetro masa,  $m$ , se puede escalar dividiendo (4.0.1) por  $m$  y cambiar el nombre de las constantes  $c, k, A, \varepsilon_0$ .  $V(t)$  es una función continua, positiva y  $T$ -periódica. Vamos a escribir  $T = 2w$ , donde  $w$  es la frecuencia.

**Teorema 4.4.1** (Multiplicidad). *Existe un  $d_0 > 0$  tal que*

1. *Si  $d < d_0$ , (4.0.1) no tiene soluciones  $T$ -periódicas.*

2. Si  $d = d_0$ , (4.0.1) tiene al menos una solución  $T$ -periódica.
3. Si  $d > d_0$ , (4.0.1) tiene al menos dos soluciones  $T$ -periódicas.

Además,  $d_0$  admite el siguiente estimativo

$$\frac{3}{2} \left( \frac{\varepsilon_0 AV_m^2}{k} \right)^{1/3} \leq d_0 \leq \frac{3}{2} \left( \frac{\varepsilon_0 AV_M^2}{k} \right)^{1/3}. \quad (4.4.1)$$

**Teorema 4.4.2** (Estabilidad). *Bajo las mismas condiciones del Teorema 4.4.1, supongamos*

$$4k < \frac{\varepsilon_0 AV_m^2}{2} \left( \frac{wcV_m^2}{\pi kdV_M^2} \right)^3 + w^2 + \frac{c^2}{m}. \quad (4.4.2)$$

Entonces,

1. Si  $d = d_0$ , (4.0.1) tiene una única solución  $T$ -periódica que no es asintóticamente estable.
2. Si  $d > d_0$ , (4.0.1) tiene exactamente dos soluciones  $T$ -periódicas, una asintóticamente estable y otra inestable.

*Observación 4.4.3.* Como hemos dicho en la introducción, la desigualdad (4.4.1) es óptima debido a que si se elige  $V(t)$  constante (caso autónomo), entonces las desigualdades son de hecho igualdades y  $d_0$  es exactamente  $\frac{3}{2}(2h)^{1/3}$ , el valor obtenido en la introducción de este Capítulo.

*Observación 4.4.4.* Vale la pena analizar en detalle el significado físico de la condición (4.4.2). Teniendo en cuenta que si  $4k \leq \frac{c^2}{m}$  entonces (4.4.2) es válido para cualquier frecuencia  $w$ . Este caso puede relacionarse con el "régimen dominado por la viscosidad" estudiado en [1]. Por el otro, si  $4k > \frac{c^2}{m}$ , cálculos elementales proporcionan una frecuencia mínima  $w_0$  tal que (4.4.2) se cumple para cada  $w > w_0$ , donde  $w_0$  es la única raíz positiva de una ecuación cúbica. Otra posibilidad es tomar  $w^2 > 4k$ . Esto se asemeja al fenómeno paradigmático de "estabilización por altas frecuencias" lo que aparece en un gran número de sistemas físicos como el péndulo invertido, con vibración de apoyo (ver por ejemplo [41, 48, 49]).

**Ejemplo 4.4.5.** Para fines ilustrativos, hemos tomado de [87] los siguientes valores de los parámetros físicos:

$m = 3,5 \times 10^{-11}$ Kg,	$k = 0,17$ N/m,	$c = 1,78 \times 10^{-6}$ Kg/s,
$A = 1,6 \times 10^{-9} m^2$ ,	$\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m.	

Si  $V(t) = 10 + 2\cos\omega t$  voltios, entonces utilizando el Teorema 4.4.1, el valor de bifurcación esta acotado por

$$2,62033\ \mu m < d_0 < 3,4336\ \mu m.$$

Ahora apliquemos el Teorema 4.4.2, tomemos  $d > d_0$  y  $\omega \geq 0,76772\text{rad/s}$ , hay exactamente dos soluciones periódicas para (4.0.1), una asintóticamente estable y la otra inestable.

---

## Capítulo 5

---

# La ecuación de Lazer-Solimini con retraso dependiente del estado

Cuando se habla de las fuerzas gravitacionales, la introducción de los efectos relativistas tiene sentido. Una de las consecuencias conocidas de la Relatividad Especial es que el estado dependiente tiene retrasos cuando se consideran la evolución temporal en sistemas donde interactúan campos eléctricos y magnéticos con cargas en movimiento, ver [26, 82]. Motivados por esta reflexión, proponemos el estudio de un análogo de las ecuaciones Lazer-Solimini con retraso dependiente del estado

$$x'' + g[x](t) = p(t), \quad (5.0.1)$$

$$x'' - g[x](t) = -p(t), \quad (5.0.2)$$

donde  $p \in C(\mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z})$  y

$$g[x](t) \equiv g(x(t - \tau(t, x(t))))),$$

siendo  $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función continua no negativa y  $T$ -periódica en la primera variable. Finalmente,  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una función continua que verifica las siguientes hipótesis

**(H1)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ .

En la terminología clásica, se dice que (5.0.1) tiene una singularidad atractiva, mientras que (5.0.2) tiene una singularidad repulsiva. A menudo, simplemente se habla del caso atractivo y caso repulsivo. En este último caso, un signo menos fue añadido a  $p$  por conveniencia.

Vamos a explicar nuestros resultados principales, después de integrar sobre todo un período, se hace evidente que  $\bar{p} > 0$  es una condición necesaria para la existencia de solución  $T$ -periódica para las ecuaciones (5.0.1) y (5.0.2). En el caso sin retraso, Lazer y Solimini [46] demostraron que también  $\bar{p} >$

0 es suficiente en el caso atractivo, mientras que en el caso repulsivo construyeron un contraejemplo para demostrar qué condiciones adicionales son necesarias (por ejemplo, la llamada condición de fuerza fuerte) para la existencia de soluciones  $T$ -periódicas. Nuestro objetivo es proporcionar una condición complementaria suficiente válida para ecuaciones con retraso dependiente del estado.

**Teorema 5.0.6.** *Supongamos que  $g$  satisface (H1) y*

**(H2)**  $g(x) > \bar{p} > 0$  para cada  $x \leq T\|p^+\|_1$ .

*Entonces (5.0.1) (resp. (5.0.2)) tiene al menos una solución  $T$ -periódica positiva.*

En el caso atractivo, podemos probar un resultado diferente.

**Teorema 5.0.7.** *Supongamos que  $g$  satisface (H1) y  $\bar{p} > 0$ . Si  $p(t)$  esta acotada superiormente y*

**(H3)**  $\limsup_{x \rightarrow 0^+} \tau(t, x) < \frac{\min\{v \in \mathbb{R}_+ : g(v) = \|p^+\|_\infty\}}{\|p^+\|_1}$ , uniformemente en  $t$ ,

*entonces (5.0.1) tiene al menos una solución  $T$ -periódica positiva.*

Parece hasta ahora que el Teorema 5.0.6 es un nuevo resultado incluso para la ecuación sin retraso. En cambio, el Teorema 5.0.7 es una generalización del resultado clásico de Lazer-Solimini, que se recupera al tomar  $\tau(t, x) \equiv 0$ . Claramente, la condición (H2) tiene que ver con la fortaleza de la singularidad y es válida para cualquier retraso. Por otro lado, (H3) está relacionada con el comportamiento del retraso cerca de la singularidad. Sin embargo, podría tener algún interés desde el punto de vista de la Física, ya que en la Relatividad Especial el retraso esperado debe ser proporcional a la distancia de la partícula a la singularidad, que es del tipo  $\tau(t, x) = x$ , lo que satisface trivialmente (H3).

Desde ahora, consideramos los espacios de Banach  $X = C^1(\mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z})$  con la norma habitual en  $C^1$  y  $Z = L^1(\mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z})$  con la norma  $L^1$ . Ahora pasamos a hacer una breve descripción de cómo desarrollaremos el Capítulo. En el apartado 5.1 presentamos algunas cotas a priori para una familia homotópica conveniente. En el apartado 5.2 presentamos la demostración de nuestro resultado principal usando el teorema de continuación de Capietto–Mawhin–Zanolin[10]. Finalmente, en el apartado 5.3 presentamos una demostración alternativa de nuestro resultado principal ahora usando el teorema de continuación de Mawhin [54].

## 5.1. Cotas a priori.

En esta sección mostramos algunos Lemas que serán usados en las demostraciones de nuestros resultados principales. Consideremos las siguientes ecuaciones homotópicas

$$x'' + g_\lambda[x](t) = p_\lambda(t), \quad (5.1.1)$$

$$x'' - g_\lambda[x](t) = -p_\lambda(t), \quad (5.1.2)$$

donde  $g_\lambda[x](t) := g(x(t - \lambda\tau(t, x(t))))$ ,  $p_\lambda(t) = (1 - \lambda)\bar{p} + \lambda p(t)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . El siguiente Lema, debido a Lazer-Solimini [46], será de gran utilidad.

**Lema 5.1.1** ([46]). *Sea  $x \in X$  una función  $T$ -periódica tal que  $x'' \in Z$ . Entonces,*

$$\|x'\|_\infty \leq \|(x'')^\pm\|_1.$$

Con este Lema podemos encontrar una cota uniforme para  $x'$  cuando  $x$  es una solución  $T$ -periódica de (5.0.1) o (5.0.2).

**Lema 5.1.2.** *Si  $x$  es una solución  $T$ -periódica de (5.1.1) o (5.1.2) y  $g$  satisface (H1) entonces*

$$\|x'\|_\infty \leq \|p^+\|_1.$$

*Demostración.* Sea  $x \in X$  una solución  $T$ -periódica de (5.1.1), entonces por el Lema 5.1.1 tenemos

$$\begin{aligned} \|x'\|_\infty &< \|(x'')^+\|_1 = \|(p_\lambda(t) - g_\lambda[x](t))^+\|_1 \\ &\leq \|p_\lambda^+\|_1 \leq \|p^+\|_1. \end{aligned}$$

La demostración en el caso que  $x$  sea una solución  $T$ -periódica de (5.1.2) es análogo, teniendo en cuenta  $\|x'\|_\infty \leq \|(x'')^-\|_1 = \|(-x'')^+\|_1$ .  $\square$

Ahora encontramos cotas superiores para soluciones  $T$ -periódicas de las ecuaciones (5.1.1) o (5.1.2).

**Lema 5.1.3.** *Supongamos que  $g$  satisface (H1) y  $\bar{p} > 0$ . Entonces existe una constante positiva  $M$  que no depende de  $\lambda$  tal que*

$$x(t) < M, \quad \text{para todo } t,$$

*para toda solución  $T$ -periódica de (5.1.1) o (5.1.2).*

*Demostración.* Denotemos con  $x$  una solución  $T$ -periódica de (5.1.1) o (5.1.2). Integrando a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T g_\lambda[x](t) dt &= \int_0^T ((1-\lambda)\bar{p} + \lambda p(t)) dt \\ &= T\bar{p}. \end{aligned}$$

Debido a la continuidad de las funciones involucradas, existe  $t_1 \in ]0, T[$  tal que

$$g_\lambda[x](t_1) = g(x(t_1 - \lambda\tau(t_1, x(t_1)))) = \bar{p}.$$

Al definir  $t_{0,\lambda} := t_1 - \lambda\tau(t_1, x(t_1))$  y usar el Lema 5.1.2, tenemos

$$x(t) - x(t_{0,\lambda}) = \int_{t_{0,\lambda}}^t x'(s) ds \leq T \|x'\|_\infty \leq T \|p^+\|_1,$$

para todo  $t \in ]t_{0,\lambda}, t_{0,\lambda} + T[$ . De otro lado, (H1) y  $\bar{p} > 0$  implican que el conjunto  $\{v \in \mathbb{R}^+ : g(v) = \bar{p}\}$  es acotado, cerrado y no vacío, esto en consecuencia nos dice que el conjunto anterior alcanza un máximo, que llamaremos  $C^*$ . Entonces,

$$x(t) \leq T \|p^+\|_1 + x(t_{0,\lambda}) < T \|p^+\|_1 + C^* + 1 =: M,$$

es obvio que esta constante no depende de  $\lambda$ . □

Finalmente, mostremos unas cotas inferiores para soluciones  $T$ -periódicas de (5.1.1) o (5.1.2).

**Lema 5.1.4.** *Bajo las condiciones del Teorema 5.0.6, existe  $\varepsilon_1 > 0$  que no depende de  $\lambda \in [0, 1]$  tal que*

$$x(t) > \varepsilon_1, \quad \text{para todo } t,$$

para toda solución  $T$ -periódica de (5.1.1) o (5.1.2).

*Demostración.* Argumentando en forma similar como en el Lema 5.1.3, obtenemos

$$x(t) = \int_{t_{0,\lambda}}^t x'(s) ds + x(t_{0,\lambda}),$$

donde  $g(x(t_{0,\lambda})) = \bar{p}$ . De las condiciones (H1) y (H2) se obtiene  $C_* = \min\{v \in \mathbb{R}^+ : g(v) = \bar{p}\}$ . Entonces

aplicando el Lema 5.1.2 una vez más,

$$x(t) = \int_{t_0, \lambda}^t x'(s) ds + x(t_0, \lambda) \geq C_* - T \|p^+\|_1 > \frac{C_* - T \|p^+\|_1}{2} =: \varepsilon_1 > 0.$$

□

**Lema 5.1.5.** *Bajo las condiciones del Teorema 5.0.7, existe  $\varepsilon_2 > 0$  que no depende de  $\lambda \in [0, 1]$  tal que*

$$x(t) > \varepsilon_2, \quad \text{para todo } t,$$

para toda solución  $T$ -periódica de (5.1.1).

*Demostración.* Dada  $x$  una solución  $T$ -periódica de (5.1.1) y supongamos que  $x(t_0) = \min_{t \in [0, T]} x(t)$ . Entonces,

$$g_\lambda[x](t_0) \leq x''(t_0) + g_\lambda[x](t_0) = p_\lambda(t_0) \leq \|p^+\|_\infty.$$

Ahora, al usar la hipótesis (H1) tenemos

$$x(t_0 - \lambda\tau(t_0, x(t_0))) \geq D_* := \min\{v \in \mathbb{R}^+ : g(v) = \|p^+\|_\infty\} > 0. \quad (5.1.3)$$

De un lado, si llamamos  $\tilde{\varepsilon} := D_* - \|p^+\|_1 \limsup_{x \rightarrow 0^+} \tau(t, x)$ , por la condición (H3) existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$D_* - \|p^+\|_1 \tau(t, x) \geq \tilde{\varepsilon} > 0, \quad \text{para todo } 0 < x \leq \varepsilon. \quad (5.1.4)$$

Ahora, usando el Teorema del Valor Medio y el Lema 5.1.2 tenemos

$$\begin{aligned} x(t_0 - \lambda\tau(t_0, x(t_0))) - x(t_0) &\leq x'(\zeta)\tau(t_0, x(t_0)) \\ &\leq \|x'\|_\infty \tau(t_0, x(t_0)) \\ &\leq \|p^+\|_1 \tau(t_0, x(t_0)). \end{aligned}$$

De otro lado, usando (5.1.3) tenemos

$$\begin{aligned} x(t_0) &\geq x(t_0 - \lambda\tau(t_0, x(t_0))) - \|p^+\|_1 \tau(t_0, x(t_0)) \\ &\geq D_* - \|p^+\|_1 \tau(t_0, x(t_0)) > 0. \end{aligned}$$



Bien, si  $x(t_0) \leq \varepsilon$ , combinando (5.1.4) con la desigualdad anterior, obtenemos  $x(t_0) \geq \tilde{\varepsilon}$ . La demostración se finaliza tomando

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, \tilde{\varepsilon}\}.$$

□

## 5.2. Demostración de los resultados principales de este Capítulo.

Definamos el operador lineal

$$\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset X \rightarrow Z, \quad \mathcal{L}(x) := x'' - x,$$

donde  $D(\mathcal{L}) := \{x : x \in X, x' \text{ es absolutamente continua en } \mathbb{R}\}$  y el operador de Nemitskii  $\mathcal{N}: X^+ \times [0, 1] \rightarrow Z$ ,  $X^+ := \{x \in X : x(t) > 0 \text{ para todo } t\} \subset X$ , dado por

$$\mathcal{N}(x; \lambda) := \begin{cases} p_\lambda(t) - g_\lambda[x](t) - x(t), & \text{para la Eq. (5.1.1)} \\ -p_\lambda(t) + g_\lambda[x](t) - x(t), & \text{para la Eq. (5.1.2)} \end{cases}.$$

Entonces  $x$  es una solución  $T$ -periódica de (5.1.1) o (5.1.2),  $\lambda \in [0, 1]$  si y sólo si  $x \in D(\mathcal{L})$  es solución de la ecuación

$$\mathcal{L}x = \mathcal{N}(x; \lambda), \quad \lambda \in [0, 1].$$

En particular, (5.0.1)-(5.0.2) son equivalentes a  $\mathcal{L}x = \mathcal{N}(x; 1)$ . Como  $\mathcal{L}$  es invertible, podemos escribir en forma equivalente,

$$x - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}(x; \lambda) = 0. \tag{5.2.1}$$

En consecuencia, encontrar una solución  $T$ -periódica de las ecuaciones (5.1.1) o (5.1.2) es equivalente a encontrar puntos fijos del operador  $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}$  en  $\Omega$ . Con esto en mente, presentamos la demostración del Teorema 5.0.6.

**Demostración de los Teoremas 5.0.6 y 5.0.7.** Sea  $\Omega \subset X$  un conjunto acotado y abierto definido por

$$\Omega = \{x \in X : \varepsilon_1 < x(t) < M \text{ y } \|x'(t)\|_\infty < M_1, \forall t \in \mathbb{R}\},$$

donde  $\varepsilon_1, M$  son constantes positivas que se fijaron en los Lemas 5.1.3, 5.1.4 y  $M_1 := \|p^+\|_1$ . Bien,

de las cotas a priori presentadas en el apartado 5.1 tenemos que (5.2.1) no tiene soluciones en  $(x, \lambda) \in (D(\mathcal{L}) \cap \partial\Omega) \times [0, 1]$ . El operador  $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}(\cdot; \lambda)$  es compacto, por el principio de continuación global de Leray-Schauder [86, Theorem 14.C], así el Teorema 5.0.6 estará demostrado si mostramos que el grado de  $\mathcal{I} - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}(\cdot; \lambda)$  es diferente de cero para algún  $\lambda \in [0, 1]$ .

Primero consideremos el caso de la ecuación (5.0.1). Al tomar  $\lambda = 0$  en (5.1.1) obtenemos la ecuación

$$x'' + g(x(t)) = \bar{p}. \quad (5.2.2)$$

Definamos la función  $F: [\varepsilon_1, M] \times [-M_1, M_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$F(u, v) = (v, \bar{p} - g(u)).$$

Por un resultado clásico de Capietto, Mawhin y Zanolin [10], podemos calcular el grado de Leray-Schauder del operador  $\mathcal{I} - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}(\cdot; \lambda)$  con el grado de Brouwer para  $F$  de la siguiente forma

$$\deg_{LS}(\mathcal{I} - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}(\cdot; 0), \Omega) = \deg(F, [\varepsilon_1, M] \times [-M_1, M_1]).$$

Tal grado se puede computar fácilmente usando técnicas sencillas y se muestra que es 1. Por tanto, de la propiedad de existencia del grado, existe  $x \in D(\mathcal{L}) \cap \Omega$  tal que  $\mathcal{L}x = \mathcal{N}(x; 1)$ . Exactamente la misma demostración es válida para demostrar el Teorema 5.0.7. La demostración para la ecuación (5.1.2) es análoga, sólo cambiando un signo en la segunda componente de la función  $F$  con lo que obtenemos un grado igual a  $-1$ .  $\square$

### 5.3. Demostración alternativa de los resultados principales

En esta sección presentamos una demostración alternativa de nuestros resultados usando esta vez el teorema de coincidencia del grado que fue presentado en el Capítulo 2. Consideremos las siguientes ecuaciones homotópicas

$$x'' + \lambda g[x](t) = \lambda p(t), \quad (5.3.1)$$

$$x'' - \lambda g[x](t) = -\lambda p(t), \quad (5.3.2)$$

donde  $\lambda \in [0, 1]$ . Una simple inspección muestra que las ecuaciones (5.3.1)-(5.3.2) también satisfacen las cotas a priori demostradas en la sección 5.1, es decir, los Lemas 5.1.2, 5.1.3, 5.1.4 y 5.1.5 también se satisfacen si cambiamos (5.1.1)-(5.1.2) por (5.3.1)-(5.3.2).

Ahora si tomamos  $\tilde{\mathcal{L}}: D(\mathcal{L}) \rightarrow Z$  el operador lineal definido por

$$\tilde{\mathcal{L}}(x) := x'',$$

tenemos que  $\tilde{\mathcal{L}}$  es un operador de Fredholm de índice cero. Además

$$\ker \tilde{\mathcal{L}} = \{x \in X : x \text{ es una función constante}\} \cong \mathbb{R}$$

$$\text{Im } \tilde{\mathcal{L}} = \{h \in Z : \int_0^T h(t) dt = 0\}.$$

Definamos la proyección  $\mathcal{Q}: Z \rightarrow Z$  por

$$\mathcal{Q}(y) := \frac{1}{T} \int_0^T y(s) ds.$$

Entonces  $\mathcal{Q}$  satisface  $\ker \mathcal{Q} = \text{Im } \tilde{\mathcal{L}}$ . El operador de Nemitskii  $\mathcal{N}: X^+ \rightarrow Z$  dado por

$$\mathcal{N}(x) = g[x] - p(t).$$

En consecuencia, la existencia de una solución  $T$ -periódica de (5.0.1) o (5.0.2) es equivalente a resolver la ecuación

$$\tilde{\mathcal{L}}(x) + \mathcal{N}(x) = 0 \quad \text{o} \quad \tilde{\mathcal{L}}(x) - \mathcal{N}(x) = 0,$$

respectivamente. Presentamos la demostración del Teorema 5.0.7 mostrando que las condiciones 1, 2 y 3 del Teorema 2.5.2 se satisfacen.

**Demostración de los Teoremas 5.0.6 y 5.0.7.** Sea  $\Omega \subset X$  un conjunto acotado y abierto definido por

$$\Omega = \{x \in X : \varepsilon_2 < x(t) < M \text{ y } \|x'(t)\|_\infty < M_1, \forall t \in \mathbb{R}\},$$

donde  $\varepsilon_2, M$  son constantes positivas que se fijaron en los Lemas 5.1.3, 5.1.5 y  $M_1 := \|p^+\|_1$ . Por un lado tenemos que  $\mathcal{N}$  es  $\tilde{\mathcal{L}}$ -compacto, pues  $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}}\mathcal{N}$  es compacto,  $\mathcal{Q}\mathcal{N}$  es continua y  $\mathcal{Q}\mathcal{N}(\bar{\Omega})$  es un subconjunto acotado de  $Z$ . De otro lado, la condición 1 del Teorema 2.5.2 se satisface gracias a los Lemas 5.1.2, 5.1.3, 5.1.5 y la definición de  $\Omega$ . Ahora si definimos el conjunto  $\Omega_1 = \{x \in X | x \in$

$\ker \widetilde{\mathcal{L}}, \mathcal{N}(x) \in \text{Im } \widetilde{\mathcal{L}}$  tenemos que todo  $x \in \Omega_1$  es constante  $x \equiv c$  y  $g(c) = \bar{p}$ . Por consiguiente,  $\Omega_1 \subset \Omega$  y la condición 2 se cumple. De otro lado,  $x \equiv$  constante y positivo pertenece a  $\ker \widetilde{\mathcal{L}}$  y

$$\mathcal{Q}\mathcal{N}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T g[x] - \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = g(x) - \bar{p},$$

entonces usando la condición (H3) tenemos que  $g(\varepsilon_2) - \bar{p} > 0$  y  $g(M_1) - \bar{p} < 0$ . En consecuencia,

$$\text{deg}(\mathcal{Q}\mathcal{N}(x)|_{\ker \widetilde{\mathcal{L}}, \Omega \cap \ker \widetilde{\mathcal{L}}}) = -1.$$

Así tenemos que la condición 3 también se verifica. Por lo tanto, (5.0.1) tiene al menos una solución en  $\bar{\Omega}$ , que es una solución  $T$ -periódica positiva.  $\square$



# Comentarios finales

En esta memoria hemos presentado algunos criterios de existencia y estabilidad de soluciones periódicas para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no autónomas y singulares en el termino no lineal con una clara interpretación física. Los resultados de estabilidad son adaptaciones de [63, 65, 68, 67], entretanto los resultados de existencia son adaptaciones [28, 59] o una combinación de cotas a priori y el grado de Leray-Schuader. Presentamos unas reflexiones finales de esta investigación:

1. Con el Teorema 3.0.5 no podemos recuperar el resultado [59] debido a la restricción que hemos impuesto en la búsqueda de los valores de  $l'_1, l'_2$  que satisfacen la condición (3.0.2), pues en este caso tenemos

$$\tilde{l}_1 < l'_1 < \bar{x} < l'_2 < \tilde{l}_2,$$

donde  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$  son las soluciones

$$0 = Z(C^*), \quad C^* := \inf\{W(l_1), W(l_2)\} < \infty,$$

sin embargo es posible cambiar esta condición a una más general a costa de que la función  $R(x)$  ya no sea positiva y deba sustituirse la demostración del Lema 3.1.2, aunque el valor máximo de la norma de  $h$  que satisfacen la condición (3.0.2) no cambie. Adicionalmente, puede ser buena idea adaptar la técnica presentada en [31], que también está basada en la construcción de una región positivamente invariante del flujo, para mostrar la existencia de soluciones acotadas para ecuaciones del tipo Liénard con singularidades débiles.

2. Por otro lado el resultado de estabilidad obtenido en el Capítulo 4 está basado en la posibilidad de ordenar las soluciones periódicas combinado con las propiedades del índice topológico, sin embargo se puede adaptar la técnica expuesta en [64] para extender los resultados cuando existen subarmónicos de orden dos. Existencia y multiplicidad de soluciones periódicas para

problemas del tipo Ambrosetti-Prodi con  $\phi$ -Laplacianos se encuentran por ejemplo en [6, 16, 58, 80]. En particular, en [16] también se estudia la estabilidad de dichas soluciones periódicas usando técnicas de linealización. Así que en futuros trabajos se podría estudiar la existencia, multiplicidad y estabilidad de soluciones periódicas para ecuaciones del tipo

$$(\phi(x'))' + c\phi(x') + g(x) = p(t) + s,$$

que tienen cierto interés en la descripción de fenómenos físicos como el centro de masa de un flujo cuántico atrapado en un anillo de unión Josephson incrustado en un campo magnético no homogéneo [11], o la descripción en coordenadas colectivas de la dinámica de un solitón de una ecuación no lineal de Klein-Gordon con amortiguación y fuerza externa [71].

3. El resultado presentado en el Capítulo 5 es sólo de existencia y parece ser que no se pueden aplicar directamente las propiedades del índice topológico [63, 65, 68, 67] con el fin de caracterizar la estabilidad de soluciones de ecuaciones con retraso dependiente del estado, pues en la literatura apenas hay referencias que traten este asunto, ver por ejemplo [17, 83]. Mediante la revisión de las demostraciones, nos damos cuenta que el Teorema 5.0.6 sigue siendo válido en el caso  $p \in L^1(\mathbb{R} \setminus T\mathbb{Z})$ , por supuesto, teniendo en cuenta las soluciones en el sentido Caratheodory. Por otro lado, un análogo del Teorema 5.0.7 para un ambiente  $L^1$ -Caratheodory es un problema abierto, incluso para la ecuación sin retraso, un hecho comprobado en [39]. De otro lado, siguiendo la misma notación presentada en Capítulo 5, parece que los resultados de existencia de soluciones periódicas pueden ser extendidos a ecuaciones de la forma

$$(\phi(x'))' + g[x(t)] = p(t),$$

es decir, generalizar el problema de términos de  $\phi$ -Laplaciano con retraso dependiente del estado.

# Bibliografía

- [1] S. Ai and J. A. Pelesko. Dynamics of a canonical electrostatic MEMS/NEMS system. *J. Dyn. Differ. Eqns.*, 20:609–641, 2007.
- [2] F. M. Alsaleem, M. I. Younis, and H. M. Ouakad. On the nonlinear resonances and dynamic pull-in of electrostatically actuated resonators. *J. Micromech. Microeng.*, 19:045013, 2009.
- [3] H. Amann and P. Hess. A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 84A:145–151, 1979.
- [4] A. Ambrosetti and G. Prodi. On the inversion of some differential mappings with singularities between Banach spaces. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 93:231–246, 1972.
- [5] M. Belhaq and F. Lakrad. Suppression of pull-in in a microstructure actuated by mechanical shocks and electrostatic forces. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46:407–414, 2011.
- [6] C. Bereanu and J. Mawhin. Existence and multiplicity results for some nonlinear problems with singular  $\phi$ -laplacian. *J. Differential Equations*, 243(2):536–557, 2007.
- [7] G. D. Birkhoff and O. D. Kellogg. Invariant points in function space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 23:96–115, 1922.
- [8] L. E. J. Brouwer. Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71(1):97–115, 1911.
- [9] R. F. Brown, M. Furi, L. Górniewicz, and B. Jiang, editors. *Handbook of Topological Fixed Point Theory*. Springer, 2005.
- [10] A. Capietto, J. Mawhin, and F. Zanolin. Continuation theorems for periodic perturbations of autonomous systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 329:41–72, 1992.



- [11] G. Carapella and G. Costabile. Ratchet Effect: Demonstration of a Relativistic Fluxon Diode. *Physical Review Letters*, 87, 077002 (4pp)(7), August 2001.
- [12] J. Chu, D. Jiang, and M. Zhang. Multiplicity of positive periodic solutions to superlinear repulsive singular equations. *J. Differential Equations*, 211:282–302, 2005.
- [13] J. Chu and M. Li. Twist periodic solutions of second order singular differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 355:830–838, 2009.
- [14] J. Chu and J. J. Nieto. Recent existence results for second-order singular periodic differential equations. *Boundary Value Problems*, 2009:1–20, 2009.
- [15] J. Chu and P. J. Torres. Applications of Schauder's fixed point theorem to singular differential equations. *Bull. London Math. Soc.*, 39(4):653–660, 2007.
- [16] J. A. Cid and P. J. Torres. On the existence and stability of periodic solutions for pendulum-like equations with friction and  $\phi$ -laplacian. *to appear in Discrete and Continuous Dynamical Systems A*.
- [17] K. L. Cooke and W. Huang. On the problem of linearization for state- dependent delay differential equations. *Proceedings on the American Mathematical Society*, 124(5):1417–1426, 1996.
- [18] C. De Coster and P. Habets. *Two-point Boundary Value Problems: Lower and Upper Solutions*, volume 205. Mathematics in Science and Engineering, 2006.
- [19] E. B. Dancer. On the ranges of certain weakly non linear elliptic partial differential equations. *J. Math. Pures Appl.*, 57:351–366, 1978.
- [20] E. N. Dancer. Upper and lower stability and index theory for positive mappings and applications. *Nonlinear Analysis TMA*, 17:205–217, 1991.
- [21] E. N. Dancer and R. Ortega. The index of Lyapunov stable fixed points in two dimensions. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 6(4):631–637, 1994.
- [22] K. Deimling. *Nonlinear Functional analysis*. Berlin, 1980.
- [23] M. del Pino and R. Manásevich. Infinitely many t-periodic solutions for a problem arising in nonlinear elasticity. *J. Differential Equations*, 103:260–277, 1993.

- [24] M. del Pino, R. Manásevich, and A. Montero. T-periodic solutions for some second order differential equations with singularities. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 120(3-4):231–243, 1992.
- [25] L. Derwidué. Systemes differentiels non lineaires ayant des solutions periodiques. *Bulletin de la Classe des Sciences, Academie Royale de Belgique*, 49:11–32, 1963.
- [26] R. D. Driver. A two-body problem of classical electrodynamics: the one-dimensional case. *Ann. Phys.*, 21:122–142, 1963.
- [27] B. Du, C. Bai, and X. Zhao. Problems of periodic for a type of Duffing equation with state-dependent delay. *J. Comput. Appl. Math.*, 233:2807–2813, 2010.
- [28] C. Fabry, J. Mawhin, and M. N. Nkashama. A multiplicity result for periodic solutions of forced nonlinear second order ordinary differential equations. *Bull. London Math. Soc*, 18:173–180, 1986.
- [29] R. Fauré. Solutions periodiques d'equations differentielles et methode de leray-schauder (cas des vibrations forcees). *Annales de l'Institut Fourier*, 14:195–204, 1964.
- [30] A. Fonda. Periodic solutions of scalar second order differential equations with a singularity. *Mém. Cl. Sci. Acad. R. Belg.*, 8(4):7–39, 1993.
- [31] A. Fonda and F. Zanolin. Bounded solutions of nonlinear second order ordinary differential equations. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 4(1):91–98, 1998.
- [32] N. Forbat and A. Huaux. Détermination approchée et stabilité locale de la solution périodique d'une équation différentielle non linéaire. *Détermination approchée et stabilité locale de la solution périodique d'une équation différentielle non linéaire, Mém. et Public. Soc. Sciences, Artts Lettres du Hainaut*, 76:3–13, 1962.
- [33] W. B. Gordon. Conservative dynamical systems involving strong forces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 204:113–135, 1975.
- [34] A. Gutiérrez and P. J. Torres. Periodic solutions of Liénard equation with one or two weak singularities. *Differ. Equ. Appl.*, 3(3):375–384, 2011.
- [35] A. Gutiérrez and P. J. Torres. The Lazer-Solimini equation with state-dependent delay. *Applied Mathematics Letters*, 25:643–647, 2012.

- [36] A. Gutiérrez and P. J. Torres. Non-autonomous saddle-node bifurcation in a canonical electrostatic MEMS. *to submitted in Nonlinearity*.
- [37] P. Habets and L. Sanchez. Periodic solutions of some Lienard equations with singularities. *Proceedings of the american mathematical society*, 109(4):1035–1044, August 1990.
- [38] P. Habets and P.J. Torres. Some multiplicity results for periodic solutions of a Rayleigh differential equation, dynamics of continuous. *Discrete and Impulsive Systems Serie A: Mathematical Analysis*, 8(3):335–347, 2001.
- [39] R. Halk and P. J. Torres. On periodic solutions of second order differential equations with attractive repulsive singularities. *J. Differential Equations*, 248:111–126, 2010.
- [40] D. Hao and S. Ma. Semilinear Duffing equations crossing resonance points. *J. Differential Equations*, 133:98–116, 1997.
- [41] J. P. Den Hartog. *Mechanical Vibrations*. New York, 1956.
- [42] A. Huaux. Sur l'existence d'une solution périodique de l'équation différentielle non linéaire  $x'' + 0,2x' + x/(1-x) = (0,5) \cos \omega t$ . *Bull. Cl. Sciences Acad. R. Belgique*, 48(5):494–504, 1962.
- [43] M. I. Ibrahim and M. I. Younis. The dynamic response of electrostatically driven resonators under mechanical shock. *J. Micromech. Microeng*, 20:025006, 2010.
- [44] M. A. Krasnosel'skii. *The Operator of Translation along the Trajectories of Differential*, volume 19 of *American Mathematical Society*. Equations, Transl. Math. Monographs, 1968.
- [45] M. A. Krasnosel'skii and P. P. Zabreiko. *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [46] A. C. Lazer and S. Solimini. On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities. *Proceedings of the american mathematical society*, 99(1):109–114, January 1987.
- [47] J. Leray and J. Schauder. Topologie et équations fonctionnelles. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 51(3):45–78, 1934.
- [48] M. Levi. Stability of the inverted pendulum—A topological explanation. *SIAM Review*, 30(4):639–644, Dic. 1985.

- [49] M. Levi and W. Weckesser. Stabilization of the inverted linearized pendulum by high frequency vibrations. *SIAM Review*, 37(2):219–223, Jun 1995.
- [50] N. G. Lloyd. *Degree theory*. Cambridge Univ. Press, 1978.
- [51] S. Ma, Z. Wang, and J. Yu. Coincidence degree and periodic solutions of Duffing equations. *Nonlinear Anal.*, 34:443–460, 1998.
- [52] P. Martínez-Amores and P. J. Torres. Dynamics of a periodic differential equation with a singular nonlinearity of attractive type. *J. Math. Anal. Appl.*, 202:1027–1039, 1996.
- [53] R. F. Martins. Existence of periodic solutions for second-order differential equations with singularities and the strong force condition. *J. Math. Anal. Appl.*, 317(1):1–13, 2006.
- [54] J. Mawhin. Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces. *J. Difference Equations Appl.*, 12:610–636, 1972.
- [55] J. Mawhin. *Compacité, monotonie et convexité dans l'étude de problèmes aux limites semi-linéaires*. Number 19. Sherbrooke, 1981.
- [56] J. Mawhin. Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations. In *Topological Methods for Ordinary Differential Equations*, M. Furi and P. Zecca, Eds., volume 1537, pages 74–142. Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Germany, 1993.
- [57] J. Mawhin. Periodic solutions in the golden sixties: The birth of a continuation theorem. In *Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology*, J. Ferrera, J. López-Gómez and F. R. Ruiz del Portal, Eds., pages 199–214. Elsevier, Amsterdam, 2005.
- [58] J. Mawhin. The periodic Ambrosetti-Prodi problem for nonlinear perturbations of the p-laplacian. *J. European Math. Soc.*, 8:375–388, 2006.
- [59] M. Nagumo. On the periodic solution of an ordinary differential equation of second order. *Zenkoku Shijou Suugaku Danwakai*, (1944), 54-61 (in japanese). English translation in *Mitio Nagumo collected papers*, Springer-Verlag, 1993.
- [60] H. C. Nathanson, W. E. Newell, R. A. Wickstrom, and J. R. Davis. The resonant gate transistor. *IEEE Trans. Electron Devices ED-14*, 14(3):117–133, 1967.

- [61] F. I. Njoku and P. Omari. Stability properties of periodic solutions of a Duffing equation in the presence of upper and lower solutions. *Appl. Math. Comp.*, 135:471–490, 2003.
- [62] D. Nuñez. The method of lower and upper solutions and the stability of periodic oscillations. *Nonlinear Analysis*, 51:1207–1222, 2002.
- [63] R. Ortega. Stability and index of periodic solutions of an equation of Duffing type. *Boll. Unione Mat. Ital.*, 7:533–546, 1989.
- [64] R. Ortega. Stability of a periodic problem of Ambrosetti-Prodi type. *Differential and Integral Equations*, 3:275–284, 1990.
- [65] R. Ortega. Topological degree and stability of periodic solutions for certain differential equations. *J. London Math. Soc.*, 42:505–516, 1990.
- [66] R. Ortega. A criterion for asymptotic stability based on topological degree. In *Proceedings of the first world congress on World congress of nonlinear analysts, V. Lakshmikantham Ed.*, volume 1, pages 383 – 394. Florida, Tampa, 1992.
- [67] R. Ortega. The first interval of stability of a periodic equation of Duffing type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 115:1061–1067, 1992.
- [68] R. Ortega. Some applications of the topological degree to stability theory. In *Topological methods in differential equations and inclusions*, A. Granas and M. Frigon, Eds., pages 377–409. Dordrecht: Kluwer, 1995.
- [69] R. Ortega and A. Tineo. Resonance and non-resonance in a problem of boundedness. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124:2089–2096, 1996.
- [70] M. Potter and H. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Englewood Cliffs, NJ, 1967.
- [71] Niurka R Quintero, Renato Alvarez-Nodarse, and José A Cuesta. Ratchet effect on a relativistic particle driven by external forces. *JOURNAL OF PHYSICS A: MATHEMATICAL AND THEORETICAL*, 44, 425205 (10pp), 2011.
- [72] I. Rachůnková, S. Staněk, and M. Tvrdý. Singularities and laplacians in boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations. In *Handbook of Differential Equations. Ordinary Differential Equations*, A. Cañada, P. Drabek and A. Fonda (Eds.), volume 3, pages 607–723. Elsevier, New York, 2006.

- [73] I. Rachůnková, S. Staněk, and M. Tvrđý. *Solvability of Nonlinear Singular Problems for Ordinary Differential Equations*, volume 5. Contemporary Mathematics and Its Applications, 2009.
- [74] I. Rachůnková, M. Tvrđý, and I. Vrkoč. Existence of nonnegative and nonpositive solutions for second-order periodic boundary-value problems. *J. Differential Equations*, 176:445–469, 2001.
- [75] J. Schauder. Der fixpunktsatz in funktionalräumen. *Studia Math.*, 2:171–180, 1930.
- [76] P. J. Torres. Twist solutions of a Hill's equation with singular term. *Advanced Nonlinear Studies*, 2:279–287, 2002.
- [77] P. J. Torres. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem. *J. Differential Equations*, 190:643–662, 2003.
- [78] P. J. Torres. Existence and stability of periodic solutions for second-order semilinear differential equations with a singular nonlinearity. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A*, 137(1):195–201, 2007.
- [79] P. J. Torres. Weak singularities may help periodic solutions to exist. *J. Differential Equations*, 232(1):277–284, 2007.
- [80] P. J. Torres. Nondegeneracy of the periodically forced Liénard differential equation with  $\phi$ -laplacian. *Communications in Contemporary Mathematics*, 13:283–292, 2011.
- [81] P. J. Torres and M. Zhang. Twist periodic solutions of repulsive singular equations. *Nonlinear Anal.*, 56:591–599, 2004.
- [82] S. P. Travis. A one-dimensional two-body problem of classical electrodynamics. *SIAM J. Appl. Math.*, 28(3):611–632, 1975.
- [83] H. O. Walther. A periodic solution of a differential equation with state-dependent delay. *Journal of Differential Equations*, 244(8):1910–1945, 2008.
- [84] H.-O. Walther, F. Hartung, T. Krisztin, and J. Wu. Functional differential equations with state-dependent delay: theory and applications. In *Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations*, A. Canada, P. Drbek, A. Fonda (Eds.), volume 3, pages 435–545. Elsevier, North-Holand, 2006.
- [85] G. Wang. A priori bounds for periodic solutions of a delay Rayleigh equation. *Appl. Math. Lett.*, 12:41–44, 1999.

- 
- [86] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, volume 1. Springer, New York, Heidelberg, 1986.
- [87] W. Zhang and G. Meng. Nonlinear dynamical system of micro-cantilever under combined parametric and forcing excitations in MEMS. *Sensors and Actuators A*, 119:291–299, 2005.
- [88] Z. Zhang and R. Yuan. Existence of positive periodic solutions for the Liénard differential equations with weakly repulsive singularity. *Acta Applicandae Mathematicae*, 111(2):171–178, 2010.
- [89] A. Zitan and R. Ortega. Existence of asymptotically stable periodic solutions of a forced equation of Liénard type. *Nonlinear Anal.*, 22:993–1003, 1994.

# Índice alfabético

## **B,**

Bifurcación nodo-silla, 42

## **C,**

Completamente continua, 11

Condición fuerza fuerte, 2

Criterio de

estabilidad asintótica de puntos fijo, 19

inestabilidad de puntos fijos, 19

## **D,**

Dominio de Jordan, 10

## **E,**

Ejemplo de índice uno e inestabilidad, 19

Estabilización por altas frecuencias, 53

## **F,**

Función periódica

aislada, 20

no degenerada, 21

## **G,**

Grado de

Brouwer, 7

coincidencia, 13

Leray-Schuder, 11

## **I,**

Índice

de operador, 13

de punto fijo, 17

espacio de funciones periódicas, 25

topológico, 20

## **N,**

Número de vueltas, 10

## **O,**

Operador

compacto, 13

lineal compacto, 13

Operador de

Fredholm, 13

Nemitskii, 60

Poincaré, 20

## **R,**

Regímenes dominados por la viscosidad, 42

## **S,**

Singularidad

débil, 3

fuerte, 3

Sistema micro-electro-mecánico, 41

Sub-super soluciones, 26

Subarmónicas, 20



**V,**

Valor regular, 8