

El movimiento rígido en Relatividad: paradojas de Bell y Ehrenfest

Daniel de la Fuente*, Juan Jesús Salamanca†

* Departamento de Matemática Aplicada,
Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain
E-mail: delafuente@ugr.es

† Departamento de Geometría y Topología,
Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain
E-mail: jjsalamanca@ugr.es

Resumen

En este trabajo se discute la noción de movimiento rígido en Relatividad Especial a través de las paradojas de Bell y Ehrenfest.

In this paper we discuss the notion of rigid motion in Special Relativity by means of the Bell's and Ehrenfest's paradoxes.

Palabras clave: Movimiento rígido relativista, paradoja de Bell, paradoja de Ehrenfest.

Ha transcendido hasta nuestros días la popular afirmación de que, durante las primeras décadas del siglo pasado, sólo diez personas eran capaces de entender la Teoría de la Relatividad de Einstein. Sin entrar en debate sobre cuál es su grado de veracidad, lo cierto es que no faltan motivos para justificar su incomprensión. Que el tiempo no transcurre para todos igual o que diferentes observadores pueden medir distintas longitudes de un mismo objeto son afirmaciones difíciles de asimilar, sobretodo cuando la experiencia nos grita a diario que no es así. Estos efectos relativistas, aunque no son directamente apreciables en nuestra vida cotidiana, son imprescindibles para el correcto funcionamiento de multitud de dispositivos modernos (como el GPS), y sus consecuencias teóricas han desembocado en la proliferación de numerosas ‘paradojas’ [2]. La irrupción de la Relatividad Especial de Einstein, no ya como una teoría, sino como un nuevo marco teórico sobre el que se asientan todas la teorías físicas, obligó a una revisión pormenorizada de todas ellas. Conceptos clásicos y sencillos como el de sólido rígido se tornaron sutiles y resbaladizos. De hecho, su correcta aprehensión costó varias décadas, e incluso, en nuestros días, todavía sigue siendo un asunto un tanto esquivo que en muchos casos suele zanjarse diciendo que “el sólido y el movimiento rígido no tienen cabida en Relatividad”. Trataremos de aclarar estas ideas a lo largo del artículo.

El concepto de cuerpo rígido descansa en la esencia de los primeros enunciados de la Relatividad Especial. Ya Einstein, en su famoso artículo de 1905, escribía frases como “*Let there be given a stationary rigid rod ...*” o “*We envisage a rigid sphere ...*”. Cuatro años más tarde,



Figura 1: Paul Ehrenfest (1880 – 1933).

M. Born postuló por primera vez la noción de movimiento rígido en Relatividad, y que hoy en día conocemos como ‘rigidez de Born’ [1]. Pronto comenzaría el debate, de la mano de P. Ehrenfest, sobre este nuevo concepto relativista. Su paradoja propuesta, que analizaremos en la Sección 4, despertó rápidamente el interés de muchos otros físicos eminentes de la época, como M. Planck, T. Kaluza o M. von Laue. Algo más tarde, P. Langevin, A.S. Eddington y J. Weyssenhoff fueron aclarando dificultades y malentendidos. Todavía en 1958, W. Pauli escribe “*the concept of a rigid body has no place in relativistic mechanics, it is nevertheless useful and natural to introduce the concept of a rigid motion of a body*” [4]. Es decir, según Pauli, el concepto definido por Born era adecuado para describir el *movimiento* rígido en Relatividad, pero no el de *cuerpo* rígido en el que pensaba Born cuando lo introdujo. Pero aún en 1962, Panofsky y Phillips [3] establecían de nuevo que “*...Special Relativity precludes the existence of the ideal rigid body*”. Objetaban que si un cuerpo realmente rígido fuera golpeado en un extremo, el otro extremo debería moverse simultáneamente respecto de cualquier observador. Por supuesto, esto es incompatible con la Relatividad, dado que la simultaneidad no es un concepto absoluto en la teoría de Einstein. Sin embargo, no se trata de una objeción exclusivamente relativista. Recordemos que las partículas que componen un sólido se mantienen unidas mediante interacciones electromagnéticas, que no pueden propagarse a una velocidad superior a c (la velocidad de la luz en el vacío). Por tanto, la velocidad de transmisión de cualquier impulso producido en un extremo del sólido se corresponde con la velocidad del sonido del material del que está compuesto que, en realidad, es varios ordenes de magnitud inferior a c . Así pues, la existencia de un retardo entre el movimiento de dos extremos de un cuerpo rígido *real* está clásicamente justificado.

1. La rigidez de Born

Según la dinámica clásica (prerrelativista), se dice que un cuerpo es rígido cuando su forma y sus dimensiones se preservan durante cualquier movimiento del mismo. Desde un punto de vista microscópico, un sólido rígido es un sistema de partículas materiales sobre las que actúan ciertas ligaduras (mayoritariamente electromagnéticas) que mantienen constante

las distancias relativas entre ellas. Observamos dos problemas en esta definición. En primer lugar, todo sólido real tiene ciertas propiedades elásticas y, por tanto, sufrirá alguna distorsión cuando sea acelerado. Por otra parte, como comentábamos en la introducción, la velocidad del sonido de cualquier material es finita y, desde luego, sus consecuencias serán en realidad mucho más importantes que los posibles efectos relativistas. Estas dificultades son habitualmente resueltas suponiendo que las interacciones entre partículas son tan fuertes que las posibles deformaciones elásticas pueden ser ignoradas, y que la velocidad del sonido es tan grande que el retraso en el movimiento sea tan despreciable como se nos antoje. Es decir, asumimos que el cuerpo rígido es *ideal*. Sin embargo, mientras que esta idealización es compatible con la dinámica newtoniana, no lo es con la relativista, pues la velocidad del sonido no puede ser arbitrariamente grande. Adicionalmente, la ‘distancia relativista’ entre dos partículas de un cuerpo cambia cuando su velocidad se incrementa, violando así la definición clásica en la que las dimensiones de un cuerpo rígido se preservan durante el movimiento.



Figura 2: Max Born (1882 – 1970).

Llegados a este punto, es natural plantearse una modificación de la definición clásica de cuerpo rígido ideal. Pero los intentos fallidos de la gran generación de científicos de los comienzos del siglo XX nos ha llevado a la sutil postura que Pauli adoptó en 1958. Debemos renunciar al concepto de *cuerpo* rígido en Relatividad, en favor de una definición de *movimiento* rígido. Esta noción se corresponde precisamente con la introducida por Born casi cincuenta años antes. Intuitivamente, *un cuerpo extenso relativista se mueve rígidamente si, localmente, las distancias espaciales (infinitesimales) de sus constituyentes materiales permanecen constantes*. En otras palabras, si cada partícula del cuerpo ‘observa’ que sus vecinas ni se acercan ni se alejan. Notemos que la definición es análoga a la clásica pero en ‘versión infinitesimal’. Pero no hay que dejarse engañar por esta similitud, esto no implica que la longitud (medida por una prefijada familia de observadores) sea constante. Es más, puede incluso que resulte imposible asignarle una longitud propia, esto es, la que medirían los observadores comóviles con las partículas constituyentes. Además, respecto de un sistema de referencia, la velocidad de cada partícula del sólido no será la misma en general. Puede parecer una contradicción con la la definición de Born que acabamos de esbozar, pero no lo es, como mostraremos más adelante mediante la paradoja de Bell.

Otra de las sorpresas que se nos brinda es que el movimiento rígido relativista goza sólo de tres grados de libertad, y no de seis (tres de traslación y tres de rotación). Este fue

precisamente el enunciado del hoy conocido como teorema de Herglotz-Noether¹, de manera que el movimiento rígido de un cuerpo está, en general, completamente determinado por el de una de sus partículas. Las dos paradojas que presentamos en las siguientes secciones clarifican este resultado. La paradoja de Bell nos muestra que si aceleramos una de sus partículas, la traslación rígida del cuerpo obliga al resto a moverse con una determinada aceleración propia, distinta para cada partícula en general. Por otra parte, la paradoja de Ehrenfest pone de manifiesto que sólo es posible rotar rígidamente un sólido mientras la rotación sea uniforme.

2. ¿Distancias y longitudes?

2.1. Los diagramas espacio-temporales de Minkowski

Como es bien conocido, el espaciotiempo de la Relatividad Especial, el de Minkowski, es un espacio afín dotado con una métrica pseudoeuclídea que, expresada en coordenadas cartesianas y con unidades de tiempo adecuadas para que $c = 1$, se escribe como $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Mientras no sea necesario considerar más de una dimensión espacial, usaremos diagramas bidimensionales (una dimensión temporal y otra espacial). La línea de vida de un observador se representa por una curva temporal unitaria apuntando al futuro (hacia arriba en los diagramas). En particular, los observadores inerciales se corresponden con las rectas temporales. Las trayectorias de los rayos de luz se dibujan como rectas ‘luminosas’, es decir, formando 45° con la horizontal, y aparecen en traza amarilla (ver Figura 3). El espacio de *simultaneidad* de un observador inercial O en un suceso P viene dado por el espacio ortogonal a su cuadrivelocidad (esto es, su vector tangente) en P .

El *tiempo propio* transcurrido entre dos sucesos de la vida de un observador, es decir, el que marcaría su reloj, viene dado por la longitud de su línea de vida entre ambos sucesos. Conviene resaltar que el tiempo propio depende de la historia del observador, no sólo de los sucesos inicial y final. Ahora bien, ¿cómo se miden las distancias y longitudes?

2.2. El problema de las longitudes

Para una mente prerrelativista, la respuesta a la pregunta anterior es absurdamente trivial: cójase un metro patrón y cuéntese el número de veces que es necesario superponerlo hasta cubrir la distancia que se pretende medir. Pero una vez más, la Relatividad vuelve a cubrir de sutilezas otro de los conceptos básicos y primarios de la Física Clásica, que ha obligado incluso a modificar la centenaria definición de unidad de longitud: el metro. Durante muchos años se mantuvo como la longitud del metro-patrón de platino e iridio conservado en la Oficina de Pesos y Medidas de París. Pero recientemente, en 1989, se acordó que el metro debía ser igual a la distancia que recorre la luz en el vacío durante $1/c$ segundos ($c \approx 10^8$). Es decir, ahora las magnitudes espacio-temporales primarias son tiempo y velocidad, más que tiempo y longitud (aunque operacionalmente lo sigan siendo). La razón última, que pondremos de manifiesto mediante la paradoja de Ehrenfest, es que *en general* sólo es posible hablar de longitudes de una manera ‘infinitesimal’, pero no de la longitud de un cuerpo extenso. Ni siquiera de la *longitud propia o en reposo* de un cuerpo. Pero entonces, ¿por qué seguimos hablando de longitudes? Es interesante reflexionar sobre esta cuestión que, desde nuestro punto de vista, no está reflejado con claridad en la mayoría de los textos de mecánica relativista y que, en ocasiones, se presta a confusión y malentendidos.

¹Fritz Noether, hermano de la conocida física alemana Emmy Noether.

Un único observador sólo puede medir intervalos de tiempo (propio) entre eventos de su vida, así como enviar y recibir señales –mayoritariamente electromagnéticas–. La única opción razonable que le queda para asignar una distancia entre dos sucesos espaciotemporales es imitar el procedimiento usado por los radares. Esta estrategia le permite incluso establecer un sistema de coordenadas que, generalmente, sólo cubre una pequeña región del espaciotiempo, es decir, no permite asignar distancias a dos sucesos cualesquiera (por ejemplo, las coordenadas de Rindler para un observador uniformemente acelerado).

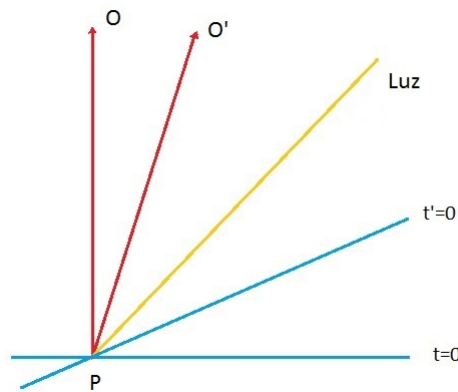


Figura 3: Los observadores inerciales O y O' (líneas rojas) tienen distintos espacios de simultaneidad (líneas azules). Cada espacio de simultaneidad se corresponde con el conjunto de sucesos ‘simétricos’ a la línea de vida del observador, respecto de las trayectorias luminosas (línea amarilla).

La forma más interesante y habitual de asignar distancias se lleva a cabo cuando, en vez de un único observador, disponemos de una familia *sincronizada* de observadores. Tras convenir inicialmente cuál es su origen de tiempos y su ‘espacio a tiempo cero’, los integrantes de la familia se ponen de acuerdo para definir una función ‘tiempo de compromiso’ o ‘sincronización’ t (que no siempre es igual al tiempo propio que marcan sus relojes). De esta manera, el conjunto de nivel $t^{-1}(a)$ será para todos ellos el ‘espacio a tiempo a ’, sobre el que definirán las distancias y las longitudes de objetos. Nuevamente, la asignación de la longitud de un objeto deberá venir acompañado de la coletilla “... respecto a la familia de observadores”. Cuando la sincronización es dada por el tiempo propio, los conjuntos de nivel del tiempo de compromiso se llaman espacios de simultaneidad, como los asociados a familias de observadores inerciales previamente comentados. Podemos concluir por tanto que *es admisible (e inevitable) verse obligados a definir distancia en vez de presuponer que las distancias preexisten en el espaciotiempo (y nos limitamos a medirlas con procedimientos operacionales lo que no ocurre con las duraciones temporales)*.

Dado un cuerpo extenso, podemos considerar los observadores comóviles con cada una de las partículas constituyentes. De esta manera, tenemos una familia de observadores ‘natural’ o intrínseca al objeto en cuestión. Es por tanto tentador llamar *longitud propia o en reposo* de un cuerpo a la longitud medida por esta familia de observadores. Ahora bien, esta familia ¿no siempre será *sincronizable*! De hecho, la sincronizabilidad dependerá precisamente de cómo se mueva el objeto. Esta es la razón por la que ni siquiera el concepto de longitud propia tiene

sentido en general, aunque no deja de ser un concepto útil e importante, como veremos en la siguiente sección.

3. La paradoja de Bell

También es conocida como paradoja de las las naves espaciales. Aunque primeramente propuesta por E. Dewan y M. Beran en 1959, no fue ampliamente conocida hasta que J.S. Bell² formuló su versión ligeramente modificada.

Consideremos dos naves espaciales idénticas A y B , una delante de la otra, en reposo respecto a un hangar espacial, y separadas por una distancia L (medida por un observador inercial O situado en el hangar). Conectemos las naves mediante una cuerda de longitud exactamente igual a L , muy frágil, que suponemos se rompe ante cualquier tracción que supere cierto valor de rotura. Las naves disponen de motores de arranque idénticos que se activan simultáneamente (respecto del hangar) durante un cierto intervalo de tiempo Δt , medido por el reloj de O , que proporciona a las naves una aceleración propia constante. Después, los motores simultáneamente se apagan, de manera que las naves quedan moviéndose por el espacio con velocidad constante v respecto al hangar. La cuestión es, ¿se rompe la cuerda tras el proceso de aceleración? Naturalmente, desde el hangar las dos naves se comportan de forma idéntica, por lo que no hay razón para que la cuerda se rompa. La distancia entre la naves durante el proceso de aceleración será siempre L y continuará así hasta el régimen final. En cambio, desde el punto de vista de las naves, cada una de ellas ve que la distancia que la separa de la otra va aumentando hasta acabar alcanzando un valor de $L' = \gamma L$, siendo $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. (Recordemos que, por uno de los resultados básicos de la Relatividad Especial, la contracción de Lorentz, la longitud de un objeto en movimiento disminuye en un factor $1/\gamma$. Por tanto, desde el punto de vista del hangar, la distancia medida será $L'/\gamma = L$). De esta manera, los pilotos de las naves observarán que la cuerda se rompe en algún momento del proceso de aceleración, justo cuando el incremento de la distancia supere su valor límite de rotura.

Entonces, ¿se rompe en realidad la cuerda? Desde luego, el que se rompa o no es un hecho absoluto, no depende de quién la observe. En su artículo, Bell cuenta que tras haber sometido esta cuestión a votación entre los físicos del CERN, se encontró con una marcada división de opiniones, entre los que aseguraban que la cuerda se rompe (tal y como observarían los pilotos de las naves) o permanece intacta (como aseguraría el observador O situado en el hangar).

El análisis es directo a través del diagrama de Minkowski (Figura 4). Las líneas de vida de las naves y de las partículas de la cuerda aparecen representadas mediante trazas rojas. Puesto que la familia de observadores en reposo relativo con la cuerda es sincronizable, medirá las longitudes sobre sus correspondientes espacios de igual tiempo de compromiso, que vienen trazados con curvas azules. Por tanto, la *longitud propia* de la cuerda aumenta durante el proceso de aceleración. Teniendo en cuenta que la resistencia a las tensiones proviene, en última instancia, de los enlaces atómicos y moleculares, y que éstos determinan la longitud propia de la cuerda (y no la longitud medida por otros observadores), concluimos que, efectivamente, la cuerda se romperá. El observador O desde el hangar notará que sobre la cuerda aparecen tensiones hasta su ruptura, aunque midan siempre la misma longitud. Y aquí está la moraleja. Desde el hangar, O piensa que la cuerda se está moviendo rígidamente, pues en

²Se trata del mismo Bell que formuló las famosas ‘Desigualdes de Bell’ en Mecánica Cuántica, motivo por el que fue universalmente conocido.

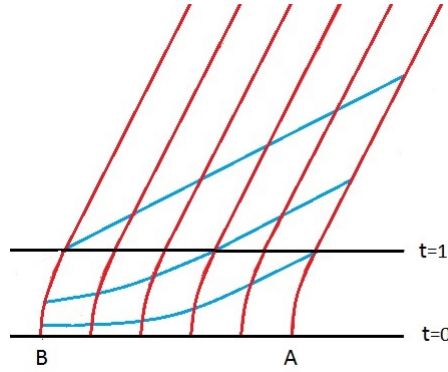


Figura 4: Las líneas de vida de las naves y de las partículas de la cuerda, trazadas en rojo, describen el proceso de aceleración (hasta que el reloj de los observadores del hangar marca 1) y su posterior régimen final. Los pilotos de las naves medirán la longitud de la cuerda sobre su espacio a $s = \text{cte}$ (líneas azules), que será mayor que la longitud medida desde el hangar.

todo momento mantiene sus dimensiones. Sin embargo, la cuerda realmente se deforma, tal y como detectan sus observadores comóviles: no satisface las condiciones de rigidez de Born.

Surge ahora la pregunta, ¿cómo debemos acelerar las naves para que el movimiento de la cuerda sea rígido? Obsérvese el diagrama de la Figura 5. La longitud natural, medida por observadores en reposo relativo con la cuerda, se mantiene constante (ellos dirían que se mueve rígidamente). En contra, un observador en el hangar verá que las naves se acercan y la cuerda se contrae. Los diferentes puntos de la cuerda experimentan aceleraciones *diferentes*, que la deforman hasta que las fuerzas elásticas compensan las aceleraciones diferenciales, generando tensiones en la cuerda. De hecho, la nave A no puede adquirir un valor de la aceleración propia por encima de c^2/L , ya que la aceleración en el otro extremo de la cuerda, donde está la nave B, resultaría infinita. No obstante, este valor máximo de la aceleración propia es extraordinariamente grande, y es completamente inaccesible para el ser humano generar tales aceleraciones sobre un cuerpo extenso.

4. La paradoja de Ehrenfest

En 1909, Ehrenfest planteó esta paradoja cuando intentaba entender la noción de rigidez relativista, recién propuesta por Born. Las discusiones originales fueron clave desde los albores de la Relatividad, y sus debates y controversias siguieron vivos durante varias décadas más.

Tomemos un disco macizo de radio R . La longitud de su circunferencia será obviamente igual a $2\pi R$. Ahora hagamos girar rígidamente el disco (es decir, suponemos que las fuerzas elásticas del material compensan las fuerzas centrífugas que aparecen cuando se pone en rotación), hasta que alcance una velocidad angular ω . Puesto que la periferia del disco se mueve con una velocidad $v = \omega R$, la longitud de la circunferencia medida por un observador no rotante será $2\pi\sqrt{1 - v^2/c^2}$, debido a la contracción de Lorentz. Por otro lado, el radio seguirá midiendo R , pues es perpendicular a la dirección del movimiento. Haciendo el cociente longitud/diámetro, llegamos a la contradicción $\pi = \pi\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Este fue el argumento de Ehrenfest, posteriormente refinado por muchos de sus contemporáneos. En su enunciado comete subrepticamente un error notable: asume que un disco

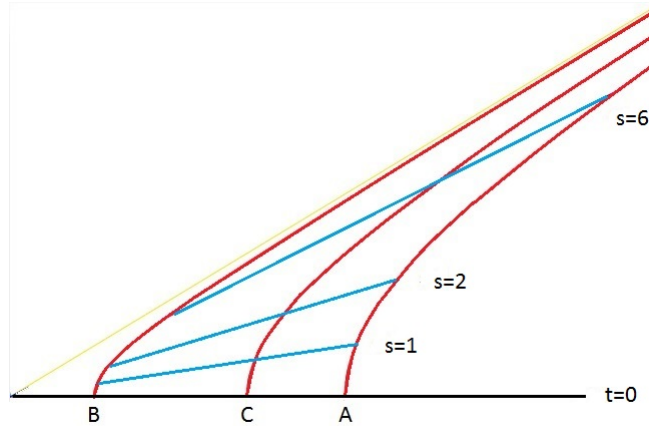


Figura 5: Las líneas de vida de las partículas de la cuerda (en rojo), cuando ésta se acelera rígidamente, describen movimientos hiperbólicos (uniformemente acelerados). Sin embargo, la aceleración propia de cada partícula es diferente: la de A es menor que la de C y ésta menor que la de B. La longitud ‘natural’, medida por los observadores en reposo respecto a la cuerda se mantiene constante. Sin embargo, para un observador en el hangar, la cuerda se contrae.

en reposo puede ponerse en rotación de una manera rígida. Sin embargo, la rigidez de Born no permite aceleraciones angulares, tal y como demostraron Herglozt y Noether un año más tarde. El radio en reposo no será igual al medido cuando está en rotación.

Pero en 1919, Einstein, motivado por la equivalencia de sistemas no inerciales y campos gravitatorios (por aquellos años estaba trabajando en su ya popularizada teoría de la Relatividad General), reformuló la paradoja de Ehrenfest como sigue.

Consideremos un disco en rotación (sin importar de qué forma se ha llegado a este estado de movimiento), sobre el que se han tallado marcas regladas de longitud 1 sobre la periferia y sobre los radios (medidas por observadores solidarios con la rotación del disco, K' , también llamados observadores de Langevin). ¿Cuánto miden éstas en un sistema de referencia inercial K desde el que se ve el disco rotando? Para facilitar el análisis, supongamos que hacemos una instantánea del disco. Como antes, las marcas radiales tendrán longitud 1, pero las tangenciales sin embargo medirán, desde K , $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. La longitud de la circunferencia exterior del disco, medida por K' , no es más que el número de marcas que hay en periferia, U' . Entonces, la longitud para K será $U = U' \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Puesto que $R = R'$, tenemos que

$$U'/2R' = U/(2R\sqrt{1 - v^2/c^2}) = \pi/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Como $v = R\omega$, obtenemos que el cociente longitud/diámetro crece a medida que lo hace el radio. Esta dependencia puede ser medida por un observador en el disco, lo que nos lleva a concluir de que la geometría del disco no puede ser Euclidiana.

El razonamiento de Einstein es esencialmente correcto, salvo en un ligero matiz. De nuevo, la familia de observadores de Langevin –solidarios con la rotación del disco– no es sincronizable, por lo que no pueden usar una ‘regla’ para medir globalmente la longitud de la periferia (¡que no tiene longitud propia!). Sólo pueden hacerlo de manera ‘infinitesimal’ (es decir, en regiones muy pequeñas), lo que no impide que puedan descubrir que la geometría local de su ‘espacio’ no es Euclidiana. De hecho, es hiperbólica, tal y como se había anticipado T.

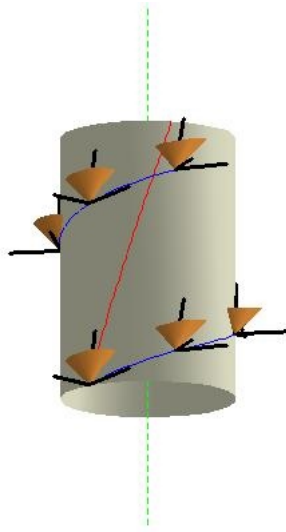


Figura 6: La línea de vida de un observador de Langevin, marcada en rojo, es una hélice en el espaciotiempo. Una familia de tales observadores no puede sincronizarse, ya que el candidato para su espacio de simultaneidad debería contener a la línea azul que, como vemos, retorna a la vida de un observador por segunda vez. Contradicción.

Kaluza diez años antes, aunque sin aportar prueba alguna de tal resultado. Einstein se valió de este resultado para justificar la equivalencia entre sistemas de referencia no inerciales y sistemas inerciales en presencia de campos gravitatorios, donde se encriptaba la esencia de la Relatividad General: poner en pie de igualdad la gravedad y las fuerzas de inercia.

5. Conclusiones

A modo de resumen, en este artículo deseamos subrayar la completa validez del concepto de *movimiento rígido* de un cuerpo en Relatividad (no así la de *sólido rígido* relativista), entendido como aquél en el que las ‘distancias espaciales infinitesimales’ entre sus constituyentes permanecen constantes. De esta forma, el movimiento del cuerpo queda, en general, completamente determinado por el de una de sus partículas. Sin embargo, esta noción difiere notablemente de su análoga clásica. La traslación rígida (acelerada) de un cuerpo obliga a sus partículas constituyentes a moverse con aceleraciones distintas, y sus dimensiones, medidas desde un sistema de referencia inercial, varían. Tampoco es posible la rotación rígida no uniforme de un sólido ni, en consecuencia, pasar de un movimiento de traslación a otro de rotación de manera rígida.

Pese a haber sido un concepto ampliamente discutido en los orígenes de la Relatividad Especial, resulta llamativa la escasa atención prestada hoy en día por la mayoría de textos de física. No en vano, aquellos debates que marcaron a Einstein sembraron el germen del que brotaría la Teoría de la Relatividad General.

Referencias

- [1] M. Born, The theory of the rigid electron in the kinematics of the principle of Relativity, *Annalen der Physik*, **335**, 1–56 (1909).
- [2] L.J. Boya y M. Santander, Paradojas relativistas, *Rev. Esp. Fis.*, **19**, 17–24 (2005).
- [3] W.K.H. Panofsky y M. Phillips, *Classical electricity and magnetism*, (Addison-Wesley, 2nd edition, 1962), p.287.
- [4] W. Pauli, *Theory of Relativity*, (Pergamon Press, Oxford, 1958), p.132.