Actividad formativa de doctorado:
Métodos de entropía en EDPs & teoría cinética

Febrero 2017

1. Motivación y principales contenidos del curso

En sistemas dinámicos es muy común usar funcionales de Lyapunov como herramienta para estudiar su comportamiento asintótico y concretamente, para analizar la convergencia hacia los equilibrios del sistema. En muchas ecuaciones en derivadas parciales (EDPs), originadas en la física matemática aparecen de forma natural funcionales de Lyapunov que describen la entropía, la energía o la energía libre del sistema sujeto a estudio. Estas EDPs definen sistemas dinámicos en dimensión infinita, en los que el análisis de la estabilidad de los equilibrios mediante funcionales de Lyapunov es más complicado que en sistemas dinámicos de dimensión finita.

En teoría cinética, el empleo de estos funcionales de Lyapunov para estudiar la convergencia al equilibrio se conoce como *método de disipación de entropía* o *método de entropía*. Consiste en asociar un funcional H (funcional de entropía), decreciente a lo largo de la solución $u = u(t)$ de la EDP:

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) \leq -D(u(t)),$$

donde H y D son funcionales no negativos, definidos en en el espacio en el que tenga sentido la solución $u(t)$ de la EDP. Observamos que H es decreciente puesto que D es no negativo y por tanto H es un funcional de Lyapunov para el sistema. Fijado el equilibrio del que queremos estudiar la estabilidad, se puede reescribir H de forma que valga 0 en él. La desigualdad anterior garantiza la estabilidad, en términos de H, ya que:

$$H(u(t)) \leq H(u(0)) \quad \forall t,$$

por ser $H(u(t))$ decreciente. El método de entropía permite decir más: permite dar un orden de convergencia de la solución hacia el estado estacionario, siempre que se puedan obtener desigualdades funcionales de la siguiente forma:

$$f(H(u)) \leq D(u),$$

para ciertas funciones u (entre las que se encuentran la solución de la EDP sujeta a estudio) y con $f = f(H)$ una función continua estrictamente positiva para $H \geq 0$. Como caso particular, podemos pensar que $f(H(u)) = \lambda H(u)$, lo que produce la desigualdad funcional

$$\frac{d}{dt}H(u(t)) \leq -\lambda H(u),$$

que directamente implica la convergencia exponencial de la soluciones de la EDP hacia el equilibrio.

Estas desigualdades funcionales aparecen en muchos contextos: son fundamentales en la teoría de procesos de Markov e implican desigualdades de hueco espectral y desigualdades de tipo Sobolev logarítmica, ver por ejemplo Bakry et al. (2014). En teoría cinética, la aplicación a la ecuación de Boltzmann es conocida como *Conjetura de Cercignani* (ver Desvillettes et al. (2011)). En biología matemática hay también aplicaciones recientes usando el método de disipación de entropía, por ejemplo en Michel et al. (2005); Cáceres et al. (2011). Más detalles y ejemplos sobre este método se pueden leer en Villani (2002).

El objetivo de este curso es analizar brevemente el método de disipación de entropía y verlo aplicado a distintos contextos de la investigación matemática actual, concretamente en: reacciones químicas, la ecuación de Boltzmann, flujos gradientes y neurociencia.

2. Estructura y contenido del curso

El curso está pensado para personas de último curso del grado de matemáticas, graduadas e investigadoras. Consistirá en charlas impartidas por José A. Cañizo y María J. Cáceres, pudiéndose incorporar otro profesorado, dependiendo del interés de las personas participantes. Las exposiciones pretenden ser dinámicas y que se presten a comentarios e intercambio de ideas.

La duración estimada del curso es de aproximadamente 16 horas en total, con una sesión de dos horas por semana, durante los meses de marzo y abril.

Contenido general del curso

1. Funcionales de entropía y Lyapunov. Introducción y ejemplos.
2. Caso lineal
    a) Entropía y procesos de Markov
    b) Principio de la entropía general. Aplicaciones en biología matemática.
3. El caso no lineal
    a) Sistemas de reacciones químicas con balance detallado
    b) La ecuación de Boltzmann
    c) Flujos gradientes
    d) EDPs en neurociencia
4. Algunas desigualdades relacionadas
    a) Desigualdades de hueco espectral
    b) Desigualdades de tipo Logaritmo-Sobolev
    c) Φ-entropías

Referencias

Dominique Bakry, Ivan Gentil, and Michel Ledoux. *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*, volume 348 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer International Publishing, Cham, 2014. ISBN 978-3-319-00226-2.

María J. Cáceres, José A. Cañizo, and Stéphane Mischler. Rate of convergence to an asymptotic profile for the self-similar fragmentation and growth-fragmentation equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 96(4):334–362, October 2011. ISSN 00217824.

Laurent Desvillettes, Clément Mouhot, and Cédric Villani. Celebrating Cercignani's conjecture for the Boltzmann equation. *Kinetic and Related Models*, 4(1):277–294, January 2011. ISSN 1937-5093, `arXiv:1009.4006`.

P. Michel, S. Mischler, and B. Perthame. General relative entropy inequality: an illustration on growth models. *Journal de Mathématiques Pures et Appliqués*, 84(9): 1235–1260, September 2005. ISSN 00217824.

C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In S. Friedlander and D. Serre, editors, *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, Vol. 1*, pages 71–305. Elsevier, Amsterdam, Netherlands; Boston, U.S.A., 2002.