Relatividad Especial

Transformaciones de Lorentz

Ejercicio 1:

Un tren que mide 100 m avanza a una velocidad $v = \sqrt{3}c/2$. El tren pasa por una estación cuyo andén mide 50 m y posee barreras a ambos extremos. El jefe de estación se encuentra en el extremo del andén por el que entra el tren y justo en el instante en que pasa la cola sube la barrera que hay a su lado y baja la barrera del otro extremo.

i) ¿Podría el tren atropellar a alguien?

ii) ¿Cuánto tiempo tarda la cabeza del tren en atravesar la estación según el jefe de estación? ¿Y según el maquinista?

iii) ¿Como se ve el proceso desde el tren?

Ejercicio 2:

La vida media del mesón π medida en sus sistema de referencia es 2.5×10^{-8} s. ¿Cuál es su vida media medida por un observador respecto del cual se mueve con velocidad $v = 0.999c$? ¿A qué velocidad ha de viajar el pión para que su vida media medida por un observador en reposo sea de 1 s?

Ejercicio 3:

Una fuente luminosa en reposo en $x = 0$ en el sistema de referencia S emite 2 pulsos P_1 y P_2 a $t = 0$ y $t = \tau$ respectivamente. Tenemos otro sistema de referencia S' que se mueve con velocidad v con respecto a S. Un observador en S' recive el pulso inicial a $t' = 0 = x'$

i) Calcular el tiempo de recepción τ' del segundo pulso en S'.

ii) Caclular el efecto Doppler para la longitud de onda, es decir, la longitud de onda observada en S', en función de la longitud de onda emitida en S.

Ejercicio 4:

Sean E_i, B_i las componentes del campo eléctrico y magnético, respectivamente, y definamos el tensor antisimétrico $F^{\mu\nu}$ a partir de $E_i \equiv F^{0i}$, $B_k \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{kij}F^{ij}$.

i) Comprobar que las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= -J^\beta\,, \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\beta F_{\gamma\delta} &= 0\,, \end{aligned}$$

donde se ha definido el vector cuadricorriente $J^\alpha \equiv (\rho, J^i)$, siendo ρ la densidad de carga y J^i la densidad de corriente; $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor totalmente antisimétrico de rango 4.

ii) Comprobar que la segunda ecuación es equivalente a

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \;=\; 0\,.$$

iii) Deducir, a partir de sus propiedades de transformación de $F^{\alpha\beta}$, como cambian los campos eléctrico y magnético bajo una transformación de Lorentz pura con $\vec{\beta} = \vec{v}/c$,

$$\Lambda^0_{\ 0} = \gamma\,, \quad \Lambda^0_{\ i} = \Lambda^i_{\ 0} = -\gamma\beta_i\,, \quad \Lambda^i_{\ j} = \delta^i_j + (\gamma - 1)\frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2}\,. \tag{1}$$

iv) ¿Son las ecuaciones de Maxwell invariantes bajo dicha transformación?

Ejercicio 5:

Sea una onda plana electromagnética, de frecuencia ω y número de ondas $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0}e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}\,, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B_0}e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}\,,$$

i) Teniendo en cuenta que $(ct, \mathbf{x})$ es un cuadrivector, justificar que $(\omega, c\mathbf{k})$ también lo es.

ii) Un átomo que en reposo emite luz de frecuencia ω_0 se mueve en la dirección x con velocidad v respecto a un observador en reposo. Cuál es la frecuencia observada si el átomo (a) se aleja del observador, (b) se acerca.

Ejercicio 6:

Un espejo se mueve en el vacio con velocidad v en la dirección x. Un rayo de luz de frecuencia ω_i incide en el espejo y se refleja. ¿Cuál es la frecuencia de la luz reflejada?.