Relatividad General (III)

Ejercicio 1:

(i) Encontrar la solución estática de las ecuaciones de Einstein en el vacio, con simetría esférica (métrica de Schwarzschild).

(ii) La métrica de Schwarzschilld nos describe el exterior de una estrella relativista estática con simetría esférica y radio R. Encontrar la métrica que describe el interior de dicha estrella, considerando que el contenido de materia-energía se comporta como un fluido perfecto con densidad de energía constante ρ_0 y presión $p(r)$.

Nota: Resolver las ecuaciones de Einstein junto con las ecuaciones de conservación del tensor de energía-impulso. Para fijar las constantes de integración, utilizar las condiciones de frontera: (a) La métrica exterior e interior coinciden para $r = R$. (b) $P(R) = 0$.

(iii) Obtener el límite superior de la masa de Swarzschild en función de la densidad de energía ρ_0.

Ejercicio 2:

(i) Encontrar que la métrica de Shwarzschild en coordenadas cartesianas viene dada por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} - 1\right] r^{-2}(\vec{x}d\vec{x})^2 - d\vec{x}^2 \,.$$

(ii) Encontrar que su forma isótropa viene dada por:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{MG}{2r'}}{1 + \frac{MG}{2r'}}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{MG}{2r'}\right)^4 d\vec{x}'^2 \,,$$

haciendo el cambio: $t = t'$, $x^i = \left(1 + \frac{MG}{2r'}\right)^2 x'^i$.

Ejercicio 3:

Un átomo de hidrógeno que se encuentra en la superficie de una estrella de neutrones emite un fotón correspondiente a la transición de Balmer ($\lambda_B = 6.62 \times 10^5$ cm). La masa de Schwarzschild de la estrella es $M = 2 \times 10^{33}$ g. En la Tierra se observa ese mismo fotón con $\lambda = 7.89 \times 10^{-5}$ cm.

(i) Determinar el radio de la estrella R, suponiendo que la distancia entre la estrella y la Tierra es mucho mayor que R

(ii) Si la métrica en el interior de la estrella es:

$$ds^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - AR^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - Ar^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - Ar^2} - r^2 d\Omega^2 \,,$$

determinar la constante A.

Ejercicio 4:

Un observador ern $r = r_1$ en una métrica de Schwarzschild envía una señal luminosa en la dirección radial hacia $r = r_2$ ($r_2 < r_1$). Suponiendo que la señal se refleja en r_2 volviendo a r_1, ¿Cuánto tiempo tarda la señal en regresar a r_1?.

Ejercicio 5:

Sea el sistema dinámico:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}(1 + \sigma\frac{GM}{r})x \,,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}(1 + \sigma\frac{GM}{r})y \,,$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$ y σ es un parámetro.

(i) Demostrar que este sistema "cuasi-newtoniano" es equivalente al siguiente sistema en coordenadas polares (r, ϕ):

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\phi}{dt})^2 &= -\frac{GM}{r^2}(1 + \sigma\frac{GM}{r}) \,, \\ r^2\frac{d\phi}{dt} &= h \,, \end{aligned}$$

siendo h constante.

(ii) Suponiendo que $GM/h \ll 1$, hallar la expresión para el desplazamiento del perihelio de un planeta en esta teoría. ¿Para qué valor de σ, y bajo que condiciones, se obtiene el resultado de la relatividad general?