Relatividad General (II)

Ejercicio 1:

Un espacio de Einstein es una variedad Riemann n-dimensional en la que se verifica $R_{\alpha\beta} = (R/n) g_{\alpha\beta}$. Demostrar que $R =$Cte en un espacio de Einstein con $n > 2$.

Ejercicio 2:

Demostrar que en un espacio de Riemann de n dimensiones si A_i es un vector de Killing, entonces a lo largo de cualquier geodésica se verifica:

$$A_i \frac{dx^i}{ds} = Cte$$

(Vector de Killing: $A_i;_j + A_j;_i = 0$)

Ejercicio 3:

Consideremos el espacio euclideo bidimensional en coordenadas polares (r, θ).

(i) Calcular el tensor métrico y los símbolos de Christoffel. Encontrar las geodésicas e integrarlas.

(ii) Sea el vector $A^\mu(1,0) = (1,1)$. Transportarlo a lo largo de la curva $\theta = p$, $0 \leq p \leq \pi/2$ y $r = 1$.

Ejercicio 4:

Calcular la curvatura de la superficie bidimensional de la esfera, parametrizada con coordenadas (ϕ, θ),

$$x = R \sin\theta \cos\phi \,, \quad y = R \sin\theta \sin\phi \,, \quad z = R \cos\theta \,.$$

Ejercicio 5:

Consideremos el espacio euclideo bidimensional en coordenadas $(\varphi,\, \theta)$ (proyección de Mercator):

$$x = R_0 \varphi \,, \quad y = R_0 \mathrm{Arctgh} \cos\theta \,.$$

Calcular los tensores de Riemann, Ricci, y el escalar de curvatura.

Ejercicio 6:

Sea el espacio-tiempo determinado por:

$$ds^2 = dt^2 - \omega(r,\theta) dt d\phi - dr^2 - r^2 (d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi) \,.$$

Demostrar que cualquier partícula de momento angular nulo debe girar con velocidad angular $-\omega/(2r^2 \sin^2\theta)$.

Ejercicio 7:

Dada la transformación conforme: $\tilde{g} = \Omega^2 g$, escribir la derivada covariante compatible con la métrica $\tilde{g}$ en función de la derivada covariante compatible con g. Encontrar los tensores de Riemann, Ricci, y el escalar de curvatura de $\tilde{g}$.