Relatividad General (I)

Ejercicio 1:

Probar que el producto directo de dos tensores $A^{\mu\nu}_{\sigma} B^{\sigma\beta}_{\gamma}$ es un tensor.

Ejercicio 2:

(i) Probar que $g^{-1/2}\delta^4(x-y)$, donde $g \equiv -det(g_{\mu\nu})$, es un escalar bajo transformaciones generales de coordenadas.

(ii) Probar también que $g^{-1/2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es un tensor.

Ejercicio 3:

Encontrar las propiedades de transformación de la conexión $\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ bajo transformaciones generales de coordenadas.

Ejercicio 4:

(i) Probar que $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$, para la conexión de Levi-Civita.

(ii) Probar que si A^{μ}_{λ}, B^{μ}_{λ}, C^{μ} y $D^{\mu\nu}_{\lambda}$ son tensores, entonces:

(a) $(aA^{\mu}_{\lambda} + bB^{\mu}_{\lambda})_{;\rho} = aA^{\mu}_{\lambda;\rho} + bB^{\mu}_{\lambda;\rho}$

(b) $(A^{\mu}_{\lambda}C^{\nu})_{;\rho} = A^{\mu}_{\lambda;\rho}C^{\nu} + A^{\mu}_{\lambda}C^{\nu}_{;\rho}$

(c) $D^{\mu\nu}_{\nu;\rho} = D^{\mu\nu}_{\nu,\rho} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}D^{\lambda\nu}_{\nu}$

Ejercicio 5:

(i) Probar la siguiente igualdad:

$$TrM^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}M(x) = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \ln detM(x)$$

(ii) Probar también las siguientes expresiones:

(a) $V^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{g}V^{\mu})$

(b) $V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial V_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$

(c) $T^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{g}T^{\mu\nu}) + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda})$

Ejercicio 6:

Demostrar que para cualquier punto del espacio-tiempo siempre se puede encontrar un sistema de coordenadas en el que la métrica es localmente plana, es decir,

$$g_{\alpha\beta}(x^{\mu}) = \eta_{\alpha\beta} + O((x^{\mu})^2)$$

Ejercicio 7:

Probar que el tensor de Riemann-Christoffel (tensor de curvatura)

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta}$$

puede escribirse como:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\right) + g_{\eta\sigma}(\Gamma^{\eta}_{\nu\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} - \Gamma^{\eta}_{\kappa\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})\,.$$

A partir de esta expresión discutir sus propiedades algebraicas y probar que cumple:

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\kappa}R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0\,.$$

Ejercicio 8:

Probar que el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ cumple:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\mu} = 0\,,$$

donde $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ es la curvatura escalar.