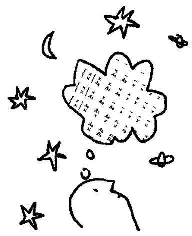


Comentarios generales sobre los exámenes de Relatividad General

- El examen de Relatividad General consiste de dos partes: una parte tipo test por un total de 2 puntos y tres problemas por un total de 8 puntos (2+3+3). El test se hace con libro cerrado (aunque está permitido traer el apéndice con las fórmulas de las notas) y tiene un tiempo máximo de 45 minutos. Una vez entregado el test, el alumno puede empezar con los problemas de la parte dos, que es un examen con libro abierto. El tiempo máximo del examen es de 4 horas.
- El test consiste de 20 preguntillas de las cuales el alumno tiene que indicar si son verdaderas o falsas. Cada respuesta correcta suma $+0,1$ puntos, cada respuesta equivocada suma $-0,1$ y cada pregunta sin contestar equivale 0 puntos. Típicamente las preguntillas del test tratan de cosas que deberían ser bastante obvias después de pensar unos segundos ó, como máximo, después de un calculito de no más de tres renglones (aunque se admite que a veces se intenta sembrar duda deliberadamente). La finalidad de test es evaluar la familiaridad del alumno con los conceptos básicos de temario y con las operaciones de cálculo.
- Por ser un examen de libro abierto, los problemas de la parte II obviamente no vienen directamente de las notas. Sin embargo el estudiante atento se dará cuenta que muchas de las preguntas son pequeñas variaciones de los temas de las notas o combinaciones de diferentes temas. En general las preguntas se pueden resolver de manera relativamente corta y elegante (típicamente 1,5 ó 2 hojas por pregunta), aunque se admiten formas alternativas (léese: más largas y menos elegantes) siempre y cuando que sean correctas.
  Si una pregunta consiste de varios apartados (*a, b, ...*), entonces cada apartado se puede resolver independientemente de los otros. Si para un apartado se necesita los resultados de los anteriores, estos resultados serán dados en las preguntas.
- En ningún momento se espera del estudiante que sepa de memoria las fórmulas de las notas. Al tratarse de un examen de libro abierto, se puede consultar la forma exacta de las expresiones en la literatura (aunque es recomendable tener cuidado con posibles diferencias en convenios en diferentes fuentes). Lo que se pretende evaluar es la familiaridad del estudiante con el temario, no la capacidad de su memoria a corto plazo.
- La mejor preparación para el examen es la práctica. Es recomendable que el estudiante averigue todos los cálculos (explícitas o no) en las notas e intente hacer los exámenes anteriores. Los alumnos están invitados a venir a tutorías para resolver dudas o a que se les corrigen los problemas hechos.

El profesor,

Bert Janssen

Relatividad General
4º de Física
3 septiembre 2012

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ el potencial electromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético, $T^{\mu\nu}$ un tensor arbitrario de rango 2, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. Sea además $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	F
1. Para cualquier punto p de una variedad arbitraria siempre se puede elegir unas coordenadas tal que el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$ es cero en este punto (salvo en singularidades).	☐	☐
2. $g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$ es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
3. La métrica $ds^2 = dt^2 - M_{ij}dx^i dx^j$, con M_{ij} un tensor 3×3 constante, simétrico y definido positivo, describe el espacio de Minkowski.	☐	☐
4. $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$ es un invariante bajo transformaciones de Lorentz.	☐	☐
5. $\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
6. La solución de Schwarzschild del agujero negro neutro es una solución de las ecuaciones de Einstein acopladas al campo electromagnético $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa\Big[F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho \ + \ \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}\Big], \qquad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$	☐	☐
7. El hecho de que la energía cinética E y el momento $\vec{p}$ de una partícula forman un cuadrivector bajo transfomaciones de Lorentz implica que las leyes de conservación de la energía y el momento ya no son válidas por separado.	☐	☐
8. $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\nabla_\rho A^\rho = 0$	☐	☐
9. $\partial_\mu(A_\nu B^\nu) = \tilde{\nabla}_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \tilde{\nabla}_\mu B^\nu$.	☐	☐
10. El tensor de Riemann del espacio de Minkowski en coordenadas esféricas es distinto de cero.	☐	☐

	V	F
11. En ausencia de masa y energía (es decir $T_{\mu\nu} = 0$), el espacio de Minkowski es la única solución de las ecuaciones de Einstein.	□	□
12. $\partial_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \partial_\mu B^\nu = \tilde{\nabla}_\mu (A_\nu B^\nu)$.	□	□
13. $R_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ es idénticamente cero para cualquier solución de las ecuaciones de Einstein.	□	□
14. Si $T_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, $T^{\rho\lambda} = g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} T_{\mu\nu}$ también lo es.	□	□
15. Si T_{ij} es un tensor antisimétrico en coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$, también es antisimétrico en coordenadas esféricas.	□	□
16. $\nabla_\mu \nabla^2 \phi = \partial_\mu \partial^2 \phi$	□	□
17. Si un vector en la solución de Schwarzschild es espacial en coordenadas de Schwarzschild, también es espacial en coordenadas de Kruskal.	□	□
18. En un espacio plano, los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son cero en todos los sistemas de referencia.	□	□
19. $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu T^{\rho\lambda} = \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}_\mu T^{\rho\lambda}$.	□	□
20. Si el escalar de Ricci R de una métrica $g_{\mu\nu}$ es cero, entonces también su tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$ es cero.	□	□

Relatividad General
4^o de Física
3 september 2012

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Geometría diferencial (2 puntos):** En 4 dimensiones se puede contraer el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ con el tensor de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ para formar el invariante de curvatura $\mathcal{R} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} R_{\mu\nu\rho\lambda}$. Demuestra que $\mathcal{R}$ es idénticamente cero para la conexión de Levi-Civita, pero que para conexiones arbitrarias
$$\mathcal{R} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} g_{\lambda\sigma} \Big[\nabla_\mu T_{\nu\rho}^{\sigma} + T_{\mu\nu}^{\tau} T_{\tau\rho}^{\sigma} \Big], \tag{1}$$
donde $T_{\mu\nu}^{\rho}$ es el tensor de torsión.
<u>Pista:</u> Recuerda que $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ es completamente antisimétrico bajo en intercambio de cualquier dos de sus índices.

2. **La solución de Robertson-Bertotti en Einstein-Maxwell (3 puntos):** Considera la acción de Einstein-Maxwell en cuatro dimensiones
$$S_{EM} \;=\; \int d^4x \, \sqrt{|g|} \, \Big[\frac{1}{2\kappa} R \;-\; \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Big], \tag{2}$$
donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.
a. Calcula la ecuación de Maxwell y la ecuación de Einstein sin traza y demuestra que en general las soluciones de esta acción no son Ricci planas, pero sí tienen curvatura escalar cero, es decir, $R_{\mu\nu} \neq 0$, pero $R = 0$.
b. La métrica de Robertson-Bertotti (es el producto directo $AdS_2 \times S^2$ de un espacio de anti-De Sitter bidimensional con una esfera bidimensional, ambos con radio R_0) es de la forma
$$ds^2 \;=\; \frac{r^2}{R_0^2} \, dt^2 \;-\; \frac{R_0^2}{r^2} \, dr^2 \;-\; R_0^2 \Big(d\theta^2 \;+\; \sin^2\theta d\phi^2 \Big). \tag{3}$$
Los símbolos de Christoffel no triviales son
$$\Gamma_{tt}^{r} = R^{-4} r^3, \qquad \Gamma_{tr}^{t} = r^{-1}, \qquad \Gamma_{rr}^{r} = -r^{-1}, \qquad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \operatorname{cotg}\theta, \qquad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta\cos\theta. \tag{4}$$
Calcula las componentes del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y desmuestra que
$$R_{ab} = -R_0^{-2} g_{ab}, \qquad R_{ij} = +R_0^{-2} g_{ij}, \qquad R_{ai} = 0, \tag{5}$$
para $a, b \in \{t, r\}$ y $i, j \in \{\theta, \phi\}$.
c. Considera el Ansatz para el campo eléctrico $F_{tr} = \frac{Q}{r^n}$. Determina el valor de los constantes Q y n tal que la métrica de Robertson-Bertotti con este campo eléctrico satisfaga la ecuación de Maxwell y la ecuación de Einstein.

3. **Transformaciones conformes (3 puntos):** Dos métricas D-dimensionales $g_{\mu\nu}$ y $\tilde{g}_{\mu\nu}$ están relacionadas a través de una transformación conforme si se pueden escribir como

$$\tilde{g}_{\mu\nu} \;=\; e^{2\phi(x)}\, g_{\mu\nu}, \tag{6}$$

donde $\phi = \phi(x)$ es una función escalar.
a. Demuestra que los símbolos de Christoffel de la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ vienen dados, en términos de $g_{\mu\nu}$ y sus símbolos de Christoffel $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, por

$$\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} \;=\; \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \;+\; \partial_\mu\phi\,\delta^{\rho}_{\nu} \;+\; \partial_\nu\phi\,\delta^{\rho}_{\mu} \;-\; \partial^{\rho}\phi\, g_{\mu\nu}. \tag{7}$$

b. Calcula el tensor de Ricci $\tilde{R}_{\mu\nu}$ de la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ en términos de $g_{\mu\nu}$ y $R_{\mu\nu}$.
c. Explica por qué en general la transformación conforme (6) *no* es un cambio de coordenadas. ¿Lo es si la función ϕ es constante?

Relatividad General
4º de Física
10 febrero 2012

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ el potencial electromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético, $T^{\mu\nu}$ un tensor arbitrario de rango 2, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. Sea además $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	**F**
1. En un espacio plano, los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son cero en todos los sistemas de referencia.	☐	☐
2. El radio del horizonte de un agujero negro de Schwarzschild es proporcional a la masa del agujero negro.	☐	☐
3. $[\tilde{\nabla}_\mu, \tilde{\nabla}_\nu]\tilde{\nabla}_\rho A^\rho = 0$	☐	☐
4. $\nabla^2 R = \partial^2 R$	☐	☐
5. $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^2 \phi = \partial_\mu \tilde{\nabla}^2 \phi$	☐	☐
6. La métrica $ds^2 = M_{ij} dx^i dx^j$, con M_{ij} un tensor 3×3 constante, simétrico y definido positivo, describe $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
7. Si $\bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ y $\hat{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ son dos conexiones afines generales (no necesariamente Levi-Civita), entonces $K^\rho_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ es un tensor.	☐	☐
8. $\nabla_\mu \nabla^2 \phi = \partial_\mu \partial^2 \phi$	☐	☐
9. $\nabla_\mu \nabla^2 \phi = \nabla^2 \nabla_\mu \phi$	☐	☐
10. Si el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ de una métrica $g_{\mu\nu}$ es cero, entonces también su tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$ es cero.	☐	☐
11. $R_{\rho\mu\nu\lambda} R^{\rho\lambda} = R_{\rho\nu\mu\lambda} R^{\rho\lambda}$	☐	☐
12. El tiempo propio $\Delta\tau = \int_a^b d\tau$ de una partícula es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐

	V	F
13. $g^{\rho\lambda}\nabla_\mu\nabla_\nu T_{\rho\lambda} = g^{\rho\lambda}\nabla_\nu\nabla_\mu T_{\rho\lambda}$	☐	☐
14. Para la solcución de Schwarzschild existe un sistema de coordenadas tal que los símboles de Christoffel son idénticamente cero en todo el espacio.	☐	☐
15. En un espacio plano, los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ son cero en todos los sistemas de referencia.	☐	☐
16. La solución de Schwarzschild es una solución de las ecuaciones del vacío.	☐	☐
17. $\nabla_\mu\nabla^\mu A^\lambda = \nabla^\mu\nabla_\mu A^\lambda$	☐	☐
18. La solución de Schwarzschild del agujero negro neutro es una solución de las ecuaciones de Einstein acopladas al campo electromagnético $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{1}{2}F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho \ + \ \frac{1}{8}g_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}F^{\rho\lambda}, \qquad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$	☐	☐
19. $\tilde\nabla_\mu\tilde\nabla^\mu A^\lambda = \tilde\nabla^\mu\tilde\nabla_\mu A^\lambda$	☐	☐
20. Si el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ de una métrica $g_{\mu\nu}$ es cero, entonces también su tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$ es cero.	☐	☐

Relatividad General
4^o de Física
10 febrero 2012

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Curvatura constante y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ (2 puntos):** Se dice de una variedad $\mathcal{M}^N$ que tiene curvatura constante (o lo que es lo mismo, es máximalmente simétrica) si su tensor de Riemann satisface la identidad

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} \;=\; K\Big(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\Big), \tag{8}$$

y que tiene geometría Einstein si el tensor de Ricci es de la forma

$$R_{\mu\nu} \;=\; \tilde{K} g_{\mu\nu}, \tag{9}$$

con K y $\tilde{K}$ unas constantes relacionadas con el radio de curvatura.
a. Demuestra que cualquier métrica con curvatura constante también es Einstein y halla la relación entre las constantes K y $\tilde{K}$.
b. Considera la métrica de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, el producto directo de dos esferas bidimensionales:

$$ds^2 \;=\; R_0^2\Big(d\theta^2 \;+\; \sin^2\theta\, d\phi^2\Big) \;+\; R_0^2\Big(d\alpha^2 \;+\; \sin^2\alpha\, d\beta^2\Big). \tag{10}$$

Demuestra que esta métrica es Einstein, pero no tiene curvatura cosntante, hallando (por lo menos) una componente del tensor de Riemann que no satisface (8).
Pista: Puedes utilizar lo que sabes de los tensores de curvatura de una esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$. Aprovecha del hecho de que la estructura del producto directo de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ hace que las componentes cruzados de los tensores son idénticamente cero (las dos esferas no se mezclan).

2. **Singularidades en Reissner-Nordström (3 puntos):** Considera la acción de Einstein-Maxwell en cuatro dimensiones

$$S_{EM} \;=\; \int d^4x\, \sqrt{|g|}\, \Big[\, \frac{1}{2\kappa}R \;-\; \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big], \tag{11}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.
a. Calcula la ecuación de Maxwell y la ecuación de Einstein sin traza y demuestra que en general las soluciones de esta acción no son Ricci planas, pero sí tienen curvatura escalar cero, es decir, $R_{\mu\nu} \neq 0$, pero $R = 0$.
b. Considera el Ansatz para una métrica y un campo eléctrico esféricamente simétricos y estáticos

$$ds^2 \;=\; e^{2A(r)}dt^2 \;-\; e^{2B(r)}dr^2 - r^2\Big(d\theta^2 + \;\sin^2\theta d\phi^2\Big), \qquad\qquad F_{tr} \;=\; E(r), \tag{12}$$

donde $A(r)$, $B(r)$ y $E(r)$ son funciones a determinar. Demuestra F_{tr} satisface la identidad de Bianchi para cualquier $E(r)$, pero la ecuación de Maxwell sólo si

$$E(r) \;=\; e^{(A+B)}\,\frac{Q}{r^2}, \tag{13}$$

donde Q es una constante de integración, que corresponde con la carga eléctrica de la solución.
c. Considera el agujero negro de Reissner-Nordström,

$$ds^2 = \Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa\, Q^2}{2r^2}\Big)dt^2 - \Big(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\kappa\, Q^2}{2r^2}\Big)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_2^2, \qquad F_{tr} = \frac{Q}{r^2}, \tag{14}$$

que es la solución esféricamente simétrica y estática de la acción (11). Demuestra, calculando el invariante $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, que la singularidad en $r = 0$ es una singularidad física.
Pista: En lugar de calcular el tensor de Ricci de la solución (14) explícitamente, es mucho más fácil y mucho más rápido utilizar las ecuaciones de Einstein y la expresión para el campo eléctrico calculadas en los apartados *a* y *b*..

3. **Espacios conformemente planos (3 puntos):** Una métrica D-dimensional $g_{\mu\nu}$ es conformemente plana si se puede escribir de la forma

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi(x)}\, \eta_{\mu\nu}, \tag{15}$$

donde $\phi = \phi(x)$ es una función escalar y $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minskowksi en coordenadas cartesianas.
a. Demuestra que los símbolos de Christoffel de la métrica $g_{\mu\nu}$ vienen dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \partial_\mu\phi\, \delta_\nu^\rho + \partial_\nu\phi\, \delta_\mu^\rho - \partial^\rho\phi\, \eta_{\mu\nu}. \tag{16}$$

b. Calcula el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ de la métrica $g_{\mu\nu}$. La métrica $g_{\mu\nu}$ construida de esta forma ¿es plana?
c. Demuestra que el espacio de De Sitter

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t/R_0}\, \delta_{ij}\, dx^i dx^j, \tag{17}$$

con R_0 una constante y δ_{ij} la métrica plana en $\mathbb{R}^3$, es conformamente plano, escribiéndolo de la forma (15) a través del cambio de coordenadas

$$\tau = R_0\, e^{-t/R_0}. \tag{18}$$

Relatividad General
4º de Física
19 septiembre 2011

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ el potencial electromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético, $S^{\mu\nu}$ un tensor arbitrario de rango 2, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. Sea además $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	F
1. Todas las componentes del tensor de Riemann de $\mathbb{R}^N$ son cero en coordenadas cilíndricas.	☐	☐
2. Las transformaciones de Lorentz para la energía E y el momento $\vec{p}$, $$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad p'_x = \frac{p_x - Ev}{\sqrt{1-v^2}}$$ implican que las leyes de conservación de la energía y el momento ya no son válidas individualmente.	☐	☐
3. Si $\nabla_\mu A_\nu$ es un tensor antisimétrico, $\nabla^\mu A^\nu = g^{\mu\rho}\nabla_\rho(g^{\nu\lambda}A_\lambda)$ también lo es.	☐	☐
4. Si $\tilde{\nabla}_\mu A_\nu$ es un tensor antisimétrico, $\tilde{\nabla}^\mu A^\nu = g^{\mu\rho}\tilde{\nabla}_\rho(g^{\nu\lambda}A_\lambda)$ también lo es.	☐	☐
5. Si $\tilde{\nabla}_\mu A_\nu$ es un tensor antisimétrico, $\tilde{\nabla}^\mu A^\nu = g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\tilde{\nabla}_\rho A_\lambda$ también lo es.	☐	☐
6. El tensor de Riemann de la solución de Schwarzschild es idénticamente cero en las coordenadas retardadas de Eddington-Finkelstein.	☐	☐
7. El escalar de Ricci de la solución de Schwarzschild es idénticamente cero en las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein.	☐	☐
8. $g^{\rho\lambda}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu S_{\rho\lambda} = g^{\rho\lambda}\tilde{\nabla}_\nu\tilde{\nabla}_\mu S_{\rho\lambda}$	☐	☐
9. $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}$ es un tensor bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
10. Un espacio con métrica $g_{\mu\nu}$ es plano si existe un cambio de coordenadas $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$ en todo el espacio.	☐	☐
11. $g^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu S_{\rho\lambda} = g^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\nu\tilde{\nabla}_\mu S_{\rho\lambda}$	☐	☐

		V	F
12.	En cualquier punto p de un espacio arbitrario siempre se puede encontrar un cambio de coordenadas tal que $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que en el punto p la métrica es de la forma $\eta_{\alpha\beta}(p) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$.	□	□
13.	$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^2 \phi = \partial_\mu \tilde{\nabla}^2 \phi$	□	□
14.	En ausencia de masa y energía (es decir $T_{\mu\nu} = 0$), el espacio de Minkowski es la única solución de las ecuaciones de Einstein.	□	□
15.	El radio del horizonte de un agujero negro de Schwarzschild es proporcional a la masa del agujero negro.	□	□
16.	Para cualquier punto p de una variedad arbitraria siempre se puede elegir unas coordenadas tal que el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$ es cero en este punto (salvo en singularidades).	□	□
17.	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ transforma como un tensor bajo cambios generales de coordenadas en cualquier variedad arbitraria equipada con la conexión de Levi-Civita.	□	□
18.	$R_{\rho\mu\nu\lambda} R^{\rho\lambda} = R_{\rho\nu\mu\lambda} R^{\rho\lambda}$ en cualquier variedad arbitraria equipada con la conexión de Levi-Civita.	□	□
19.	La traza $S = S^\mu{}_\mu$ de un tensor $S^{\mu\nu}$ es un invariante en un espacio arbitrario.	□	□
20.	Un universo del tipo Friedmann-Robertson-Walker con las secciones espaciales planas tiene un tensor de Riemann idénticamente cero.	□	□

Relatividad General
4^o de Física
19 septiembre 2011

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Cambio de coordenadas en una métrica bidimensional (2 puntos):** Considera la siguiente métrica en una variedad bidimensional, equipada con la conexión de Levi-Civita,

$$ds^2 = \Big(\frac{R_0}{1+\cos\theta}\Big)^2 \Big[d\theta^2 \, + \, \sin^2\theta \, d\phi^2\Big], \tag{19}$$

donde R_0 es una constante con dimensión de longitud, mientras que los ángulos θ y ϕ tienen rangos $\theta \in [0,\pi[$ y $\phi \in [0, 2\pi]$.
a. Calcula todas las componentes independientes de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ y del tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$.
b. Calcula la forma de la métrica y del tensor de Riemann después de aplicar el cambio de coordenadas

$$r \;=\; \frac{R_0 \sin\theta}{1+\cos\theta}. \tag{20}$$

Determina el rango y la dimensión de la coordenada r e identifica argumentadamente la métrica (19).

2. **Tensor de energía-momento en Einstein-Maxwell (3 puntos):** Considera la acción de Einstein-Maxwell de electromagnetismo acoplado a la gravedad:

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|}\,\Big[R \;-\; \tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big]. \tag{21}$$

donde R es el escalar de Ricci y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético.
a. Calcula la ecuación de Einstein. Se puede suponer el formalismo de Palatini conocido.
b. Suponiendo que el campo electromagnético satisface la ecuación de Maxwell $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, demuestra que el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ de la acción (21) satisface la identidad

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} j_\mu F^{\mu\nu}. \tag{22}$$

c. Calcula la ecuación de Einstein sin traza. ¿Por qué este cálculo es especialmente sencillo en cuatro dimensiones?

3. **Tensores de curvatura con torsión (3 puntos):** En una variedad $\mathcal{M}^N$, equipada con una conexión arbitraria $\tilde\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$, siempre se puede escribir la conexión como la suma de su parte simétrica y su parte antisimétrica:

$$\tilde\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \;=\; \tfrac{1}{2}(\tilde\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \tilde\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) \;+\; \tfrac{1}{2}(\tilde\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \tilde\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) \;=\; \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \;+\; \tfrac{1}{2} T_{\mu\nu}^{\rho}. \tag{23}$$

a. Demuestra que el tensor de Riemann $\tilde R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$ se puede escribir en términos de la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ y la torsión $T_{\mu\nu}^{\rho}$ como

$$\tilde R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} \;=\; R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} \;+\; \tfrac{1}{2}\nabla_\mu T_{\nu\rho}^{\lambda} \;-\; \tfrac{1}{2}\nabla_\nu T_{\mu\rho}^{\lambda} \;+\; \tfrac{1}{4} T_{\mu\sigma}^{\lambda} T_{\nu\rho}^{\sigma} \;-\; \tfrac{1}{4} T_{\nu\sigma}^{\lambda} T_{\mu\rho}^{\sigma}, \tag{24}$$

donde $R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$ y ∇_μ son respectivamente el tensor de Riemann y la derivada covariante con respecto a la conexión $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$.

b. Calcula las expresiones para el tensor y el escalar de Ricci, $\tilde{R}_{\mu\rho}$ y $\tilde{R}$, en términos de $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ y $T^\rho_{\mu\nu}$.

c. Suponiendo que la conexión $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ es compatible con la métrica (es decir $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$), demuestra que la acción de Hilbert construida a base del escalar de Ricci $\tilde{R}$, tras integración por partes, es equivalente a la siguiente acción en términos de $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ y $T^\rho_{\mu\nu}$,

$$S \;=\; \int d^4x \sqrt{|g|}\, \tilde{R} \;=\; \int d^4x \sqrt{|g|} \Big[R \;-\; \tfrac{1}{4}\, g^{\mu\rho}\, T^\lambda_{\mu\sigma}\, T^\sigma_{\rho\lambda} \Big]. \tag{25}$$

Relatividad General
4º de Física
18 febrero 2011

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ el potencial electromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético, $T^{\mu\nu}$ un tensor arbitrario de rango 2, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. Sea además $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	**F**
1. $\nabla^2 R = \partial^2 R$	☐	☐
2. $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ transforma como un escalar bajo transformaciones de Lorentz.	☐	☐
3. Un observador en caida libre en un agujero negro tipo Schwarzschild nota un efecto físico cuando cruza el horizonte de eventos.	☐	☐
4. $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ transforma como un escalar bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
5. $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \nabla_\rho A^\rho = 0$	☐	☐
6. Una partícula libre en un espaciotiempo arbitrario es una partícula sobre la cual solamente actua la gravedad.	☐	☐
7. Todas las componentes del tensor de Riemann del espacio de Minkowski son cero en coordenadas polares.	☐	☐
8. $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ no es invariante bajo transformaciones gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \nabla_\mu \Lambda$.	☐	☐
9. $B_{\nu\lambda} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\rho\lambda}$ transforma como un tensor bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
10. $\nabla_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0$	☐	☐
11. $g^{\rho\lambda} \nabla_\mu \nabla_\nu T_{\rho\lambda} = g^{\rho\lambda} \nabla_\nu \nabla_\mu T_{\rho\lambda}$	☐	☐
12. Un espacio descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$ es plano si existe un cambio de coordenadas $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$ en todas los puntos de la variedad.	☐	☐
13. $g^{\rho\lambda} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu T_{\rho\lambda} = g^{\rho\lambda} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu T_{\rho\lambda}$	☐	☐

	V	F
14. En tensor de Ricci de la solución de Schwarzschild en coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein es idénticamente cero.	□	□
15. Si el escalar de Ricci R de una solución es cero, entonces también el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ es cero.	□	□
16. $\partial_\mu(A_\nu B^\nu) = \tilde{\nabla}_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \tilde{\nabla}_\mu B^\nu$.	□	□
17. En un espacio plano, los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son cero en todos los sistemas de referencia.	□	□
18. El gauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz.	□	□
19. $\partial_\mu(A_\nu F^{\mu\nu}) = \nabla_\mu A_\nu F^{\mu\nu} + A_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu}$.	□	□
20. $\partial_\rho(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = 2F_{\mu\nu}\nabla_\rho F^{\mu\nu}$	□	□

Relatividad General
4^o de Física
18 febrero 2011

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Divergencia del tensor de Einstein (2 puntos):** Considera el Ansatz para una métrica esféricamente simétrica y estática

$$ds^2 \;=\; e^{2A(r)}dt^2 \;-\; e^{2B(r)}dr^2 \;-\; r^2\Big(d\theta^2 \;+\; \sin^2\theta d\phi^2\Big), \tag{26}$$

de modo que los símbolos de Christoffel y las componentes del tensor de Ricci no-triviales vienen dados por

$$\begin{aligned}
&\Gamma^r_{tt} = e^{2(A-B)}A', \qquad &&\Gamma^\theta_{r\theta} = r^{-1}, \qquad &&\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \operatorname{cotg}\theta,\\
&\Gamma^t_{tr} = A', &&\Gamma^\phi_{r\phi} = r^{-1}, &&\Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta\; e^{-2B},\\
&\Gamma^r_{rr} = B', &&\Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-2B}, &&\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -e^{2(A-B)}\Big[A'' + (A')^2 - A'B' + 2r^{-1}A'\Big],\\
R_{rr} &= A'' + (A')^2 - A'B' - 2r^{-1}B',\\
R_{\theta\theta} &= e^{-2B}\Big[rA' - rB' + 1\Big] - 1,\\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta\; R_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Calcula la expresión para el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ y demuestra que su divergencia $\nabla_\mu G^{\mu\nu}$ es idénticamente cero para $A = A(r)$ y $B = B(r)$ funciones arbitrarias de la coordenada radial r. Explica por qué.
Pista: Esta métrica no representa la solución de Schwarzschild para A y B arbitrarias, así que en general $R_{\mu\nu} \neq 0$.

2. **Cosmología con escalares (3 puntos):** Considera la siguiente acción de un escalar ϕ mínimamente acoplado a la gravedad y un potencial exponencial:

$$S \;=\; \int d^4x\sqrt{|g|}\;\Big[R \;+\; \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \;-\; 4e^{-\phi}\Big]. \tag{29}$$

a. Demuestra que la ecuación de Einstein sin traza y la ecuación de movimiento de ϕ son:

$$R_{\mu\nu} \;=\; -\tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \;+\; 2g_{\mu\nu}e^{-\phi}, \qquad\qquad \nabla^2\phi \;=\; 4e^{-\phi}, \tag{30}$$

b. Considera ahora la métrica de Friedmann-Robertson-Walker con secciones planas

$$ds^2 \;=\; dt^2 \;-\; a^2(t)\delta_{ij}dx^idx^j, \tag{31}$$

donde $a(t)$ es el factor de escala y δ_{ij} es la métrica euclidea plana tridimensional, de modo que el tensor de Ricci viene dado por

$$R_{tt} \ = \ 3\frac{\ddot{a}}{a}, \qquad\qquad R_{ij} \ = \ -\Big(a\ddot{a} \ + \ 2\dot{a}^2\Big)\delta_{ij}. \tag{32}$$

Sea $\phi = \phi(t)$ una función sólo de la coordenada temporal t, demuestra que las ecuaciones de movimiento (30) con este Ansatz se reducen al conjunto de ecuaciones diferenciales para $a(t)$ y $\phi(t)$

$$\begin{aligned} &3a\ddot{a} \ + \ \tfrac{1}{2}a^2\dot{\phi}^2 \ - \ 2a^2e^{-\phi} \ = \ 0, \\ &a\ddot{a} \ + \ 2\dot{a}^2 \ - \ 2a^2e^{-\phi} \ = \ 0, \\ &\ddot{\phi} \ + \ 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} - \ 4e^{-\phi} \ = \ 0, \end{aligned} \tag{33}$$

donde el punto indica una derivación con respecto a t.
c. Si asumimos una solución de la forma

$$a(t) \ = \ t^p, \qquad\qquad \phi(t) \ = \ q\ln t, \tag{34}$$

determina el valor de los parámetros p y q tal que las ecuaciones de movimiento (33) estén satisfechas.

3. **Vectores de Killing (3 puntos):** Sea $\mathcal{M}^N$ una variedad arbitraria equipada con la conexión de Levi-Civita y un campo vectorial V^ρ. Entonces se define la derivada de Lie $\mathcal{L}_V T_{\mu\nu}$ de un tensor $T_{\mu\nu}$ a lo largo de un campo vectorial V^ρ como

$$\mathcal{L}_V T_{\mu\nu} \ = \ V^\rho\partial_\rho T_{\mu\nu} \ + \ T_{\rho\nu}\partial_\mu V^\rho \ + \ T_{\mu\rho}\partial_\nu V^\rho \tag{35}$$

La derivada de Lie mide cómo cambia $T_{\mu\nu}$ a lo largo de las lineas de flujo del campo vectorial V^ρ.

a. Demuestra que $\mathcal{L}_V T_{\mu\nu}$ transforma como un tensor de rango $(0,2)$, a pesar de ser definida en términos de derivadas parciales.
b. Se dice que un campo vectorial k^ρ es un vector de Killing, si la derivada de Lie de la métrica $g_{\mu\nu}$ a lo largo de k^ρ es cero, $\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = 0$ (es decir, si la métrica no cambia a lo largo de las lineas flujo de k^μ). Demuestra que esto implica que k^μ satisface la condición de Killing

$$\nabla_\mu k_\nu \ + \ \nabla_\nu k_\mu \ = \ 0. \tag{36}$$

c. Se define el conmutador $[k,\ell]^\mu$ de dos campos vectoriales k^μ y ℓ^μ como

$$[k,\ell]^\mu \ = \ k^\rho\nabla_\rho\ell^\mu \ - \ \ell^\rho\nabla_\rho k^\mu. \tag{37}$$

Si k^μ y ℓ^μ son vectores de Killing (es decir, si $\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0 = \nabla_\mu\ell_\nu + \nabla_\nu\ell_\mu$), demuestra que su conmutador $[k,\ell]^\mu$ también satisface al ecuación de Killing

$$\nabla_\mu[k,\ell]_\nu \ + \ \nabla_\nu[k,\ell]_\mu \ = \ 0. \tag{38}$$

Relatividad General
4º de Física
16 septiembre 2010

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ el potencial electromagnético, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético, $T^{\mu\nu}$ un tensor arbitrario de rango 2, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. Sea además $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	**F**
1. $\nabla^2 R = \partial^2 R$	☐	☐
2. $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ transforma como un escalar bajo transformaciones de Lorentz.	☐	☐
3. Un observador en caida libre en un agujero negro tipo Schwarzschild nota un efecto físico cuando cruza el horizonte de eventos.	☐	☐
4. $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ transforma como un escalar bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
5. $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \nabla_\rho A^\rho = 0$	☐	☐
6. Una partícula libre en un espaciotiempo arbitrario es una partícula sobre la cual solamente actua la gravedad.	☐	☐
7. Todas las componentes del tensor de Riemann del espacio de Minkowski son cero en coordenadas polares.	☐	☐
8. $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ no es invariante bajo transformaciones gauge $A_\mu \to A_\mu + \nabla_\mu \Lambda$.	☐	☐
9. $B_{\nu\lambda} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\rho\lambda}$ transforma como un tensor bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
10. $\nabla_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0$	☐	☐

		V	F
11. $g^{\rho\lambda}\nabla_\mu\nabla_\nu T_{\rho\lambda} = g^{\rho\lambda}\nabla_\nu\nabla_\mu T_{\rho\lambda}$		☐	☐
12. Un espacio descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$ es plano si existe un cambio de coordenadas $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$ en todas los puntos de la variedad.		☐	☐
13. $g^{\rho\lambda}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu T_{\rho\lambda} = g^{\rho\lambda}\tilde{\nabla}_\nu\tilde{\nabla}_\mu T_{\rho\lambda}$		☐	☐
14. En tensor de Ricci de la solución de Schwarzschild en coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein es idénticamente cero.		☐	☐
15. Si el escalar de Ricci R de una solución es cero, entonces también el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ es cero.		☐	☐
16. $\partial_\mu(A_\nu B^\nu) = \tilde{\nabla}_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \tilde{\nabla}_\mu B^\nu$.		☐	☐
17. En un espacio plano, los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son cero en todos los sistemas de referencia.		☐	☐
18. El gauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz.		☐	☐
19. $\partial_\mu(A_\nu F^{\mu\nu}) = \nabla_\mu A_\nu F^{\mu\nu} + A_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu}$.		☐	☐
20. $\partial_\rho(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = 2F_{\mu\nu}\nabla_\rho F^{\mu\nu}$		☐	☐

Relatividad General
4^o de Física
16 septiembre 2010

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Tensor de Weyl (2 puntos):** En un espacio cuadrimensional, equipada con la conexión de Levi-Civita, el tensor de Weyl está definido por

$$C_{\mu\nu\rho\lambda} \;=\; R_{\mu\nu\rho\lambda} \;-\; \frac{1}{2}\Big(g_{\mu\rho}R_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\lambda} + g_{\nu\lambda}R_{\mu\rho}\Big) \;+\; \frac{1}{6}R\Big(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}\Big), \tag{39}$$

donde $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ es el tensor de Riemann, $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y R el escalar de Ricci.
a. Demuestra que el tensor de Weyl tiene las mismas simetrías que el tensor de Riemann, es decir:

$$C_{\mu\nu\rho\lambda} = -C_{\nu\mu\rho\lambda}, \qquad C_{\mu\nu\rho\lambda} = -C_{\mu\nu\lambda\rho}, \qquad C_{\mu\nu\rho\lambda} = C_{\rho\lambda\mu\nu} \tag{40}$$

b. Demuestra que el tensor de Weyl tiene traza cero. Es decir, que la contracción de cualesquiera dos índices del tensor de Weyl es idénticamente cero.
c. Calcula la divergencia del tensor de Weyl $\nabla_\lambda C_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$.
Pista: La contracción de segunda identidad de Bianchi dice que $\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda} + \nabla_\mu R_{\nu\rho} - \nabla_\nu R_{\mu\rho} = 0$.

2. **Conservación de energía y simetría esférica (3 puntos):** Considera un espacio esféricamente simétrico y estático, decrita por la métrica

$$ds^2 = e^{2A(r)}dt^2 - e^{2B(r)}dr^2 - r^2\Big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\Big), \tag{41}$$

y un fluido perfecto en reposo, con densidad ρ y presión P, cuyo tensor de energía-momento y cuadrivelocidad vienen dados por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \qquad u^\mu = \begin{pmatrix} e^{-A} \\ \vec{0} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

La simetría esférica y el hecho de que la solución sea estática imponen las siguientes condiciones sobre la densidad, la presión y el cuadrivector:

$$\rho = \rho(r), \qquad P = P(r), \qquad u^\mu\partial_\mu\rho = 0, \qquad u^\mu\partial_\mu P = 0, \qquad \nabla_\mu u^\mu = 0. \tag{43}$$

a. Demuestra que las únicas componentes no triviales de $T^{\mu\nu}$ son

$$T^{tt} = \rho e^{-2A}, \qquad T^{rr} = Pe^{-2B}, \qquad T^{\theta\theta} = Pr^{-2}, \qquad T^{\phi\phi} = Pr^{-2}\sin^{-2}\theta. \tag{44}$$

b. Demuestra que la ley de conservación de energía-momento, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, para este fluido perfecto en este espacio implica solamente (!) la siguiente relación entre ρ y P:

$$P' + (\rho + P)A' = 0, \tag{45}$$

donde la prima denota una derivación con respecto a r. Explica por qué $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ impone solamente una condición, a pesar de ser una ecuación vectorial.
Pista: Puedes usar lo que sepas de los símbolos de Christoffel de la métrica (41).

3. **Los tensores de curvatura de la métrica de FRW D-dimensional (3 puntos):** Considera la métrica de Friedman-Robertson-Walker in D dimensiones (no necesariamente $D = 4$),

$$ds_D^2 \;=\; dt^2 - a^2(t)\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j, \qquad\qquad i,j = 1,...,D-1, \tag{46}$$

donde el factor de escala $a(t)$ depende exclusivamente de la coordenada temporal t y donde la métrica $\tilde{g}_{ij}(x)$ de las secciones espaciales $(D-1)$-dimensionales depende exclusivamente de las coordenadas espaciales x^i. Las secciones espaciales son máximamente simétricos y satisfacen por lo tanto

$$\tilde{R}_{ijkl} \;=\; k(\tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk} - \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl}), \qquad \tilde{R}_{ij} \;=\; -(D-2)k\tilde{g}_{ij}, \qquad \tilde{R} \;=\; -(D-1)(D-2)k, \tag{47}$$

donde $k = -1, 0, 1$ corresponden con sección de curvatura negativa, cero y postiva respectivamente.
a. Demuestra que los símbolos de Christoffel vienen dadas por

$$\Gamma_{ij}^t \;=\; a\dot{a}\,\tilde{g}_{ij}, \qquad\qquad \Gamma_{tj}^i \;=\; \frac{\dot{a}}{a}\,\delta_j^i, \qquad\qquad \Gamma_{ij}^k \;=\; \tilde{\Gamma}_{ij}^k, \tag{48}$$

donde el punto indica la derivada con respecto a t y $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ son los símbolos de Christoffel de la métrica de las secciones espaciales $\tilde{g}_{ij}$.
b. Calcula el tensor y el escalar de Ricci de la métrica (46).
<u>Pista:</u> Para el caso $D = 4$ las expresiones tienen que reducirse a las fórmulas (12.24) de los apuntes.

Relatividad General
4º de Física
8 de febrero 2010

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ y B_μ vectores, $T^{\mu\nu}$ un tensor arbitrario de rango 2, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. Sea además $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	**F**
1. En cualquier punto de una variedad arbitraria siempre se puede elegir coordenadas localmente inerciales en las que el tensor de Riemann es cero en este punto.	☐	☐
2. La métrica $ds^2 = dt^2 - M_{ij}dx^i dx^j$, con M_{ij} un tensor 3×3 simétrico y constante y definido positivo, describe el espacio de Minkowski.	☐	☐
3. $g^{\mu\nu}[\nabla_\rho, \nabla_\lambda]T_{\mu\nu} = 0$	☐	☐
4. Si en un espacio $\mathcal{M}^N$ los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son identicamente cero en un sistema de coordenadas, entonces $\mathcal{M}^N$ es plano.	☐	☐
5. $\partial_\mu(A_\nu B^\nu) = \tilde{\nabla}_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \tilde{\nabla}_\mu B^\nu$.	☐	☐
6. Si en un espacio $\mathcal{M}^N$ todas las componentes de la conexión general $\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ son identicamente cero en un sistema de coordenadas, entonces $\mathcal{M}^N$ es plano.	☐	☐
7. En un espacio plano, los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son cero en todos los sistemas de referencia.	☐	☐
8. $\nabla_\mu \nabla^2 \phi = \partial_\mu \nabla^2 \phi$.	☐	☐
9. $\nabla_\mu \nabla^2 \phi = \nabla_\mu \partial^2 \phi$.	☐	☐

	Si	No
10. El tiempo propio $\Delta\tau = \int_a^b d\tau$ de una partícula es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	$\square$	$\square$
11. Si $A_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, $A^{\rho\lambda} = g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} A_{\mu\nu}$ también lo es.	$\square$	$\square$
12. Si $A_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, $A^\rho{}_\nu = g^{\mu\rho} A_{\mu\nu}$ también lo es (es decir $A^\rho{}_\nu = A_\nu{}^\rho$)	$\square$	$\square$
13. Si en un espacio existe un cambio de coordenadas $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$ en todos los puntos, entonces el espacio es Minkowski.	$\square$	$\square$
14. El tensor de Ricci de la solución (exterior) de Schwarzschild es cero en coordenadas de Eddington-Finkelstein.	$\square$	$\square$
15. $\nabla_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi$ en variedades que tienen $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda = 0$.	$\square$	$\square$
16. Si el espacio descrita por la métrica $g_{\mu\nu}$ es plano, entonces existe un cambio de coordenadas $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$ en todos los puntos.	$\square$	$\square$
17. La métrica $ds^2 = f^2(x,y,z)\Big[dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\Big]$, con $f(t,y,z)$ una función arbitraria, describe el espacio de Minkowski.	$\square$	$\square$
18. $\tilde\nabla_\mu \tilde\nabla^\mu T^{\rho\lambda} = \tilde\nabla^\mu \tilde\nabla_\mu T^{\rho\lambda}$.	$\square$	$\square$
19. La métrica $ds^2 = f^2(t)dt^2 - g^2(x)dx^2 - h^2(y)dy^2 - k^2(z)dz^2$, con $f(t)$, $g(x)$, $h(y)$ y $k(z)$ funciones arbitrarias de su argumento, describe el espacio de Minkowski.	$\square$	$\square$
20. $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T^{\mu\nu} = 0$.	$\square$	$\square$

Relatividad General
4^o de Física
8 febrero 2010

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Teoría de Proca (2 puntos):** Considera el Lagrangiano de electromagnetismo masivo (también llamado teoría de Proca) en un espacio curvo

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\Big[-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ + \ \tfrac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu\Big], \tag{49}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor electromagnético y m es la masa del campo A_μ.
a. Calcula la ecuación de movimiento de A^μ.
b. ¿Es esta teoría invariante gauge? Demuestra que la divergencia de la ecuación de movimiento (es decir, actuando sobre la ecuación de movimiento con ∇_ν) implica la condición de Lorenz $\nabla_\nu A^\nu = 0$.

2. **Parte antisimétrica del tensor de Ricci (3 puntos):** En una variedad $\mathcal{M}^N$ equipada con una conexión arbitraria $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ (es decir con $T^\rho_{\mu\nu} \neq 0$ y $\nabla_\mu g_{\nu\rho} \neq 0$), el tensor de Ricci viene dada por la expresión

$$R_{\mu\nu} \ = \ \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}. \tag{50}$$

Demuestra que la parte antisimétrica del tensor de Ricci viene dada por

$$R_{\mu\nu} - R_{\nu\mu} \ = \ R_{\mu\nu\lambda}{}^{\lambda} - \nabla_\lambda T^\lambda_{\mu\nu} + \nabla_\mu T^\lambda_{\lambda\nu} - \nabla_\nu T^\lambda_{\lambda\mu} - T^\rho_{\mu\nu}T^\lambda_{\rho\lambda}. \tag{51}$$

<u>Pista:</u> Comprueba que $R_{\mu\nu\lambda}{}^{\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}$.

3. **Conservación de energía-momneto en FRW (3 puntos):** Considera el Ansatz de cosmológico

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\tilde{g}_{ij}(x)dx^i dx^j, \qquad\qquad (i,j = 1,2,3) \tag{52}$$

donde el factor de escala $a(t)$ depende exclusivamente de la coordenada temporal t y donde la métrica de las secciones espaciales $\tilde{g}_{ij}(x)$ depende exclusivamente de las coordenadas espaciales x^i.
a. Comprueba que los únicos símbolos de Christoffel que no son cero vienen dados por

$$\Gamma^t_{ij} = a\dot{a}\ \tilde{g}_{ij}, \qquad\qquad \Gamma^i_{tj} = \frac{\dot{a}}{a}\ \delta^i_j, \qquad\qquad \Gamma^k_{ij} = \tilde{\Gamma}^k_{ij}, \tag{53}$$

donde el punto indica una derivación con respecta a t y $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ son los símbolos de Christoffel de la métrica $\tilde{g}_{ij}$.
b. Considera un fluido perfecto con densidad $\rho(t)$ y presión $P(t)$, de modo que las componentes no-nulas del tensor de energía-momento vienen dadas por

$$T_{tt} = \rho, \qquad\qquad T_{ij} = a^2\, P\, \tilde{g}_{ij}. \tag{54}$$

Demuestra que la ley de conservación de energía $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ para este fluido perfecto en el espacio con métrica (52) impone solamente (!) la siguiente condición sobre ρ y P:

$$\dot{\rho} \; + \; 3\frac{\dot{a}}{a}\Big(\rho \; + \; P\Big) \; = \; 0. \tag{55}$$

Explica por qué $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ sólo impone una condición, a pesar de ser una ecuación vectorial.

Relatividad General
4º de Física
11 de septiembre 2009

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ y B_μ vectores, $F_{\mu\nu}$ un tensor antisimétrico de rango 2, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. Sea además $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	F
1. $\nabla_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi$ en el espacio de Minksowki.	☐	☐
2. $\partial^\mu \nabla_\mu \phi$ transforma como un escalar bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
3. $\partial_\mu (A_\nu B^\nu) = \nabla_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \nabla_\mu B^\nu$.	☐	☐
4. Todas las componentes del tensor de Ricci del espacio de Minkowski son cero en coordenadas polares.	☐	☐
5. La solución de Schwarschild es una solución de las ecuaciones del vacio.	☐	☐
6. El tensor de Riemann de la solución de Schwarzschild es identicamente cero.	☐	☐
7. $\nabla_\mu \nabla^\mu A^\lambda = \nabla^\mu \nabla_\mu A^\lambda$	☐	☐
8. El escalar de Ricci de la solución de Schwarzschild es identicamente cero.	☐	☐
9. $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu A^\lambda = \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}_\mu A^\lambda$	☐	☐
10. $\tilde{\nabla}_\mu (A_\lambda B^\lambda) = \tilde{\nabla}_\mu (A^\lambda B_\lambda)$	☐	☐
11. Si un vector es espacial en coordenadas de Schwarzschild, también lo es en coordenadas de Eddington-Finkelstein.	☐	☐
12. Un espacio descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$ es plano si existe un cambio de coordenadas $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$.	☐	☐

	V	F
13. $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}$ es un tensor bajo cambios generales de coordenadas.	□	□
14. El Principio de Equivalencia implica que la gravedad interacciona de la misma manera con cualquier tipo de materia.	□	□
15. $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\nabla_\rho A^\rho = 0$	□	□
16. En cualquier espaciotiempo, existe siempre un cambio general de coordenadas que hace desaparecer la fuerza de la gravedad en todo el espacio, tal que el espacio entero parece plano.	□	□
17. $\nabla_\mu \nabla^2 \phi = \partial_\mu \nabla^2 \phi$	□	□
18. $\nabla_\mu \nabla^2 \phi = \nabla^2 \nabla_\mu \phi$	□	□
19. El Principio de Equivalencia implica que en cualquier punto de una variedad arbiratria se puede encontrar unas coordenadas tal que el tensor de Riemann es cero.	□	□
20. Cuando la métrica esté degenerada en un punto p (es decir cuando $\|g\| = 0$ en p), hay una singularidad física en el punto p.	□	□

Relatividad General
4^o de Física
11 de septiembre 2009

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Base de cono de luz (2 puntos):** Considera el espacio de Minkowski equipada con una base cartesiana $|e_\mu\rangle$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), de modo que las componentes de los vectores de base vienen dadas por $(|e_\mu\rangle)^\nu = \delta_\mu^\nu$. Considera ahora el cambio de coordenadas

$$|e_+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|e_0\rangle + |e_1\rangle\Big), \qquad\qquad |e_-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(|e_0\rangle - |e_1\rangle\Big), , \qquad (56)$$

a. Calcula la forma de la métrica $g_{\alpha\beta}$ en la base $|e_\alpha\rangle$ ($\alpha = +, -, 2, 3$).
b. Demuestra que $\langle e^\pm|e_{2,3}\rangle = 0$, pero que $\langle e^+|e_-\rangle \neq 0$. Si has hecho el cáluclo en la base $|e_\mu\rangle$, comprueba el resultado en la base $|e_\alpha\rangle$ y viceversa.

2. **Integración por partes con derivadas covariantes (3 puntos):** Sean A_μ y $B_{\mu\nu}$ respectivamente un vector y un tensor de rango 2 en una variadad arbitraria $\mathcal{M}^N$. Demuestra que la fórmula de integración por partes con derivadas covariantes

$$\int d^N x\sqrt{|g|} A_\mu \nabla_\nu B^{\mu\nu} \;=\; -\int d^N x\sqrt{|g|}\nabla_\nu A_\mu B^{\mu\nu} \;+\; \text{un término de frontera} \qquad (57)$$

es correcta, siempre y cuando $\mathcal{M}^N$ esté equipada con la conexión de Levi-Civita. Indica dónde exactamente en la demostración se usa que la conexión es Levi-Civita.

3. **Singularidad de un universo con radiación (3 puntos):** Considera el Ansatz de un universo en expansión

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \qquad\qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (58)$$

donde el factor de escala $a(t)$ depende exclusivamente del tiempo t y donde δ_{ij} es la métrica euclidea de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.
a. Comprueba que los únicos símbolos de Christoffel que no son cero vienen dados por

$$\Gamma_{ij}^t = a\dot{a}\;\delta_{ij}, \qquad\qquad \Gamma_{tj}^i = \frac{\dot{a}}{a}\;\delta_j^i. \qquad (59)$$

b. Comprueba que el tensor y el escalar de Ricci son de la forma

$$R_{tt} \;=\; 3\frac{\ddot{a}}{a}, \qquad R_{ij} = -\Big[a\ddot{a} + 2\dot{a}^2\Big]\delta_{ij}, \qquad R = 6\Big[\frac{\ddot{a}}{a} + \Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)^2\Big]. \qquad (60)$$

c. Considera ahora la solución exacta que tiene

$$a(t) = A_0\;t^{1/2}, \qquad (61)$$

donde A_0 es una constante de integración (físicamente esta solución corresponde con un universo lleno de radiación). Averigua si la singularidad en $t = 0$ de la métrica (58) con factor de escala (61) es física o si es una singularidad de coordenadas.
Pista: Por razones dimensionales, las potencias de t deberían ser las mismas en todos los términos de una expresión.

Relatividad General
4^{o} de Física
28 de enero 2009

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sean ϕ un escalar, A_μ un vector, $\eta_{\mu\nu}$ la métrica de Minskowski en coordenadas cartesianas, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético. Sean además $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a la conexión $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$. El laplaciano $\tilde{\nabla}^2$ está definido como $g^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\nabla}_\nu$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	**F**
1. Un espacio descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$ es plano si existe un cambio de coordenadas $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$ en todos los puntos.	☐	☐
2. Si un espacio descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$ es plano, entonces existe un cambio de coordenadas $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$ en todos los puntos.	☐	☐
3. La teoría de la relatividad especial no es causal porque el orden cronológico de algunos eventos depende del observador.	☐	☐
4. $[\tilde{\nabla}_\mu, \tilde{\nabla}_\nu]\tilde{\nabla}_\lambda A^\lambda = 0$.	☐	☐
5. $\nabla_\mu \nabla^2\phi = \partial_\mu \nabla^2 \phi$.	☐	☐
6. El tiempo propio $\Delta\tau = \int_a^b d\tau$ de una partícula es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
7. $\nabla_\mu \nabla^2 \phi = \nabla^2 \partial_\mu \phi$.	☐	☐
8. Si $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A^\lambda = 0$, entonces el espacio es plano.	☐	☐
9. $\Gamma^\mu_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\rho\lambda} g^{\nu\lambda}$ es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
10. $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^2 \phi = \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}_\mu \phi$.	☐	☐

		V	F
12. $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ no es invariante bajo transformaciones gauge $A_\mu \to A_\mu + \nabla_\mu \Lambda$.		□	□

13. En la solución (externa) de Schwarzschild, todas las componentes del tensor de Ricci son cero en coordenadas de Eddington-Finkelstein. □ □

14. Si un vector en el espacio Schwarzschild es temporal para un observador, es temporal para todos los observadores. □ □

15. Las transformaciones de Lorentz para la energía E y el momento $\vec{p}$, □ □

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad p'_x = \frac{p_x - Ev}{\sqrt{1-v^2}}$$

implican que las leyes de conservación de la energía y el momento ya no son válidas individualmente.

16. $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} \neq \nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\nu}$ □ □

17. $g^{\rho\lambda}\nabla_\mu\nabla_\nu T_{\rho\lambda} = g^{\rho\lambda}\nabla_\nu\nabla_\mu T_{\rho\lambda}$ □ □

18. $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} \neq \tilde{\nabla}_\mu F_{\nu\rho} + \tilde{\nabla}_\nu F_{\rho\mu} + \tilde{\nabla}_\rho F_{\mu\nu}$ □ □

19. El radio del horizonte de un agujero negro de Schwarzschild es proporcional a la masa del agujero negro. □ □

20. El espacio descrito por $ds^2 = dt^2 - S(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$ es esféricamente simétrico. □ □

Relatividad General
4^o de Física
28 de enero 2009

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Identidades vectoriales en 3 dimensiones (2 puntos):** Considera una variedad arbitraria tridimensional $\mathcal{M}^3$, equipada con una métrica $g_{\mu\nu}$ y una conexión $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ que es compatible con la métrica, pero no simétrica (es decir $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$, pero $T_{\mu\nu}^{\rho} \neq 0$) y sean ϕ y A_μ un campo escalar y vectorial en $\mathcal{M}^3$ respectivamente. Definimos, como generalizacion de $\mathbb{R}^3$ equipada con Levi-Civita, el gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano en $\mathcal{M}^3$ de la siguiente manera:

$$(\vec{\nabla}\phi)_\mu \;=\; \nabla_\mu\phi, \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \;=\; \nabla_\mu A^\mu,$$
$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})^\mu \;=\; \varepsilon^{\mu\nu\rho}\nabla_\nu A_\rho, \qquad\qquad \nabla^2\phi \;=\; \nabla_\mu\nabla^\mu\phi, \tag{62}$$

donde $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ es el tensor de Levi-Civita tridimensional, con $\varepsilon^{123} = 1$. Comprueba y corrige si procede las siguientes identidades vectoriales, válidas en $\mathbb{R}^3$, tal que también sean válidas en $\mathcal{M}^3$:

$$a.\;\; \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) \;=\; \nabla^2\phi, \qquad\qquad b.\;\; (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi)^\mu \;=\; 0,$$
$$c.\;\; \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \;=\; 0, \qquad\qquad d.\;\; (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A})^\mu \;=\; \nabla^\mu(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2 A^\mu. \tag{63}$$

<u>Pista:</u> Observa que $\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{\mu\lambda\sigma} \;=\; \delta^\nu_\lambda\delta^\rho_\sigma \;-\; \delta^\rho_\lambda\delta^\nu_\sigma$.

2. **Campo escalar (3 puntos):** Considera un campo escalar ϕ en una variedad arbitraria $\mathcal{M}$ (equipada con Levi-Civita), que satisface la condición $\nabla_\mu\nabla^\mu\phi = 0$ y define el tensor simétrico $B_{\mu\nu}(k)$ como

$$B_{\mu\nu}(k) \;=\; \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \;-\; k\; g_{\mu\nu}\nabla_\rho\phi\nabla^\rho\phi, \tag{64}$$

con k una constante arbitraria.
a. Calcula para qué valor(es) $k = k_0$ el tensor $B_{\mu\nu}(k)$ satisface la condición $\nabla_\mu B^{\mu\nu}(k_0) = 0$.
b. Considera la acción de un campo escalar acoplado a gravedad

$$S = \int d^4x\; \sqrt{|g|}\Big[R \;+\; \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\Big]. \tag{65}$$

Demuestra que la condición $\nabla_\mu\nabla^\mu\phi = 0$ es la ecuación de movimiento de ϕ y da una interpretación (motivada) para $B_{\mu\nu}(k_0)$.

3. **Geodésicas en el espacio de De Sitter (3 puntos):** Considera un universo en expansión exponencial, llamado el espacio de De Sitter,

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\Lambda t}\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{66}$$

donde Λ is una constante positiva (relacionada con la constante cosmológica) y donde δ_{ij} es la métrica euclídea tridimensional en coordenadas cartesianas. Los símbolos de Christoffel no triviales vienen dadas por $\Gamma_{ti}^{j} = \Lambda\delta_i^j$ y $\Gamma_{ij}^{t} = \Lambda e^{2\Lambda t}\delta_{ij}$. Calcula la geodésica de una partícula sin masa que se mueve en la direccion x.
<u>Pista:</u> Intenta con funciones de la forma $f(\sigma) = \alpha\log(\beta\sigma)$ y $g(\sigma) = A(\sigma + B)^n$, con α, β, A, B y n constantes a determinar.

Relatividad General
4^{o} de Física
10 de septiembre 2008

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$ y $R_{\mu\nu}$ el tensor de Riemann y de Ricci respectivamente. Sea además $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a la conexión $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	F
1. $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ transforma como un escalar bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
2. $\nabla_\mu \nabla^\mu T^{\rho\lambda} = \nabla^\mu \nabla_\mu T^{\rho\lambda}$.	☐	☐
3. $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ transforma como un escalar bajo transformaciones de Lorentz.	☐	☐
4. $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu T^{\rho\lambda} = \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}_\mu T^{\rho\lambda}$.	☐	☐
5. Una partícula libre en un espaciotiempo arbitrario es una partícula sobre la cual solamente actua la gravedad.	☐	☐
6. Todas las componentes del tensor de Riemann del espacio de Minkowski son cero en coordenadas polares.	☐	☐
7. Todas las componentes de los símbolos de Christoffel del espacio de Minkowski son cero en coordenadas polares.	☐	☐
8. $\nabla_\mu \nabla^2 \phi = \partial_\mu \nabla^2 \phi$	☐	☐
9. Si el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$ de una métrica $g_{\mu\nu}$ es cero, entonces también su tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ es cero.	☐	☐
10. Si la torsión $T^{\rho}_{\mu\nu}$ es cero, entonces al conexión es simétrica.	☐	☐
11. $R_{\rho\mu\nu\lambda} R^{\rho\lambda} = R_{\rho\nu\mu\lambda} R^{\rho\lambda}$ para la conexión de Levi Civita.	☐	☐

	V	F
12. El espacio de Minkowski es solución de la ecuación $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ con $\Lambda \neq 0$.	$\square$	$\square$
13. $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}$ es un tensor bajo cambios generales de coordenadas.	$\square$	$\square$
14. $g^{\rho\lambda}\nabla_\mu\nabla_\nu T_{\rho\lambda} = g^{\rho\lambda}\nabla_\nu\nabla_\mu T_{\rho\lambda}$	$\square$	$\square$
15. El Principio de Equivalencia dice que en cada punto de una variedad arbitraria existe un cambio de coordenadas que hace que el tensor de Riemann es cero en este punto.	$\square$	$\square$
16. $\nabla^2 R = \partial^2 R$	$\square$	$\square$
17. Si un vector en el espacio de Schwarzschild es espacial para un observador, es espacial para todos los observadores.	$\square$	$\square$
18. $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^2 \phi = \partial_\mu \tilde{\nabla}^2 \phi$	$\square$	$\square$
19. $\nabla_\mu \nabla^2 \phi = \nabla^2 \nabla_\mu \phi$	$\square$	$\square$
20. El espacio de Minkowski es solución de $R_{\mu\nu} = 0$ en cualquier sistema de coordenadas.	$\square$	$\square$

Relatividad General
4^o de Física
10 de septiembre 2008

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Geometría diferencial (2 puntos):** En 4 dimensiones se puede contraer el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ con el tensor de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ para formar el invariante de curvatura $\mathcal{R} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}R_{\mu\nu\rho\lambda}$. Demuestra que $\mathcal{R}$ es identicamente cero para la conexión de Levi-Civita, pero que para conexiones arbitrarias
$$\mathcal{R} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} g_{\lambda\sigma}\Big[\nabla_\mu T_{\nu\rho}^\sigma + T_{\mu\nu}^\tau T_{\tau\rho}^\sigma\Big]. \tag{67}$$
<u>Pista:</u> Recuerda que $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ es completamente antisimétrico bajo en intercambio de cualquier dos de sus índices.

2. **Tensor de energía momento electromagnético (3 puntos):** Considera la acción de electromagnetismo en estacio curvo
$$S = \int d^4x\sqrt{|g|}\Big[\ -\tfrac{1}{4}\ g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\ F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}\Big], \tag{68}$$
donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.
a. Demuestra, variando la acción con respecto a la métrica, que el tensor de energía-momento viene dada por
$$T_{\alpha\beta} = \ -\tfrac{1}{2}\ F_{\alpha\nu}F_\beta{}^\nu\ +\ \tfrac{1}{8}\ g_{\alpha\beta}\ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{69}$$
b. Demuestra, utilizando la Ley de Maxwell en espacio curvo y la Identidad de Bianchi que
$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} j_\nu F^{\nu\beta}, \tag{70}$$
donde j^μ es la densidad de corriente.

3. **Tensores de curvature del espacio de De Sitter (3 puntos):** Considera un universo en expansión exponencial, llamado el espacio de De Sitter,
$$ds^2 = dt^2 - e^{2\Lambda t}\delta_{ij}dx^i dx^j, \tag{71}$$
donde Λ is una constante positiva (relacionada con la constante cosmológica) y donde δ_{ij} es la métrica euclídea tridimensional en coordenadas cartesianas.
a. Demuestra que los únicos símbolos de Christoffel de la métrica (71) que no son cero vienen dadas por
$$\Gamma_{ij}^t = \Lambda e^{2\Lambda t}\delta_{ij}, \qquad\qquad \Gamma_{ti}^j = \Lambda\delta_i^j, \tag{72}$$
b. Demuestra que el tensor de Ricci satisface la identidad $R_{\mu\nu} = 3\Lambda^2 g_{\mu\nu}$.
c. Considera el cambio de coordenadas
$$\tilde{t} = \Lambda^{-1}e^{-\Lambda t}, \qquad\qquad \tilde{x}^i = x^i. \tag{73}$$
Calcula la forma de la métrica y del tensor de Ricci en las coordenadas $(\tilde{t}, \tilde{x}^i)$.
<u>Pista:</u> Utiliza la covariancia $SO(3)$ de la parte espacial para ahorrar trabajo.

Relatividad General
4º de Física
1 de febrero 2008

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ y B_μ vectores, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci. Sea además $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a la conexión $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	F
1. La métrica $ds^2 = dt^2 - M_{ij}dx^i dx^j$, con M_{ij} un tensor 3×3 simétrico y constante y definido positivo, describe el espacio de Minkowski.	☐	☐
2. $\nabla_\mu \nabla_\nu R^{\mu\nu} \neq \nabla_\nu \nabla_\mu R^{\mu\nu}$	☐	☐
3. $\partial_\mu \partial_\nu R^{\mu\nu}$ transforma como un escalar bajo cambios generales de coordinadas.	☐	☐
4. En un espacio plano, los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son cero en todos los sistemas de referencia.	☐	☐
5. $\nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}$	☐	☐
6. $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]F^{\mu\nu} = 0$.	☐	☐
7. En cualquier espaciotiempo, existe siempre un cambio general de coordenadas que hace desaparecer la fuerza de la gravedad en todo el espacio, tal que el espacio entero parece plano.	☐	☐
8. $\tilde{\nabla}_\mu F_{\nu\rho} + \tilde{\nabla}_\nu F_{\rho\mu} + \tilde{\nabla}_\rho F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}$	☐	☐
9. El radio del horizonte de un agujero negro de Schwarzschild es proporcional a la masa del agujero negro.	☐	☐

	V	F
10. $\partial_\mu(A_\nu B^\nu) = \nabla_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \nabla_\mu B^\nu$.	☐	☐
11. Si $\bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ y $\hat{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ son dos conexiones afines generales (no necesariamente Levi-Civita), entonces $K^\rho_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ es un tensor.	☐	☐
12. $\partial_\mu(A_\nu B^\nu) = \partial_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \partial_\mu B^\nu$.	☐	☐
13. Todos las componentes del tensor de Riemann del espacio de Minkowski son cero en coordenadas polares.	☐	☐
14. El tiempo propio $\Delta\tau = \int_a^b d\tau$ de una partícula es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
15. $g^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 0$ en todos los sistemas de referencia.	☐	☐
16. En ausencia de masa y energía (es decir $T_{\mu\nu} = 0$), el espacio de Minkowski es la única solución de las ecuaciones de Einstein.	☐	☐
17. Si $A_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, $A^{\rho\lambda} = g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}A_{\mu\nu}$ también lo es.	☐	☐
18. Si $A_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, $A_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta}A_{\mu\nu}$ también lo es.	☐	☐
19. Si el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ de una métrica $g_{\mu\nu}$ es cero, entonces también su tensor de Riemann ${R_{\mu\nu\rho}}^\lambda$ es cero.	☐	☐
20. Si existe unas coordenadas donde todos los símbolos de Christoffel son identicamnete cero, entonces el espacio es plano.	☐	☐

Relatividad General
4^o de Física
1 de febrero 2008

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Relatividad especial (2 puntos):** Considera una partícula masiva en el espacio de Minkowski cuya cuadrivelocidad visto por un observador $\mathcal{O}$ es de la forma

$$u^\mu = \tilde{\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

a. Calcula e interpreta la forma de la cuadrivelocidad u'^μ visto por un observador $\mathcal{O}'$, si los dos observadores $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ estan relacionados a través de una transformación de Lorentz

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{75}$$

b. Repite el problema de arriba para el caso en que la partícula no tenga masa.

2. **Corchete de Lie (3 puntos):** Considera un campo escalar ϕ y dos campos de vectoriales A^μ y B^μ en una variedad arbitraria $\mathcal{M}$. La derivada direccional de ϕ y de A^μ a lo largo de B^μ (también llamada la derivada de Lie a lo largo de B) está definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B\phi &\equiv B^\nu\partial_\nu\phi, \\ (\mathcal{L}_B A)^\mu &\equiv B^\nu\partial_\nu A^\mu - A^\nu\partial_\nu B^\mu. \end{aligned} \tag{76}$$

a. Demuestra que $\mathcal{L}_B\phi$ y $\mathcal{L}_B A$ transforman respectivamente como un escalar y como vector contravariante bajo cambios generales de coordenadas.
b. Demuestra que la derivada de Lie satisface la regla de Leibnitz $\mathcal{L}_B(\phi A) = \phi\mathcal{L}_B A + A\mathcal{L}_B\phi$.
c. Calcula como actua la derivada de Lie $\mathcal{L}_B C$ sobre un vector covariante C_μ. (Pista: utiliza que sabes como actua la derivada de Lie sobre un escalar.)

3. **El gauge de Lorenz (3 puntos):** En un espacio curvo la ecuación inhomogenea de Maxwell viene dada por $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético, $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$.
a. Sustituyendo la expresión para $F_{\mu\nu}$ en la ecuación inhomogenea de Maxwell y asumiendo el gauge de Lorenz $\nabla_\mu A^\mu = 0$ para el potencial A_μ, demuestra que la ecuación inhomogenea toma la forma

$$\nabla_\mu\nabla^\mu A^\nu + R^{\mu\nu}A_\mu = j^\nu, \tag{77}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci.
b. Demuestra que la ecuación de Maxwell en la forma (77) satisface la ley de conservación de carga $\nabla_\mu j^\mu = 0$. (Pista: Antes hemos asumido el gauge de Lorenz, así que utilizalo!)

Relatividad General
4º de Física
13 septiembre 2007
Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ y B_μ vectores, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor electromagnético, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. Sea además $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$ una conexión arbitraria, ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita y $\tilde{\nabla}_\mu$ la derivada covariante con respecto a la conexión $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	**F**
1. Un espacio descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$ es plano si existe un cambio de coordenadas $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$.	☐	☐
2. $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = 0$.	☐	☐
3. $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ no es invariante bajo transformaciones gauge $A_\mu \to A_\mu + \nabla_\mu \Lambda$.	☐	☐
4. En cualquier espaciotiempo, existe siempre un cambio general de coordenadas que hace desaparecer la fuerza de la gravedad en todo el espacio, tal que el espacio entero parece plano.	☐	☐
5. $[\tilde{\nabla}_\mu, \tilde{\nabla}_\nu]\phi = 0$.	☐	☐
6. $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}$ es un tensor bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
7. $g^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 0$ en todos los sistemas de referencia.	☐	☐
8. $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\nabla_\rho A^\rho = 0$.	☐	☐
9. $R_{\mu\nu} = 0$ implica que el espacio es plano.	☐	☐
10. En el espacio de Minkowski, la distancia espacial entre dos puntos es un invariante.	☐	☐

	V	F
11. Las coordenadas localmente inerciales en $\mathbb{R}^N$ son las coordenadas cartesianas.	□	□
12. La distancia espacial entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$ es un invariante.	□	□
13. $\partial_\mu(A_\nu B^\nu) = \nabla_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \nabla_\mu B^\nu$.	□	□
14. $\partial_\mu(A_\nu B^\nu) = \tilde{\nabla}_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \tilde{\nabla}_\mu B^\nu$.	□	□
15. La distancia espaciotemporal entre dos eventos en un espacio arbitrario es un invariante.	□	□
16. Si un vector en un espacio arbitrario es temporal para un observador, es temporal para todos los observadores.	□	□
17. $K^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ transforma como un tensor bajo cambios generales de coordenadas.	□	□
18. Cuando la métrica está degenerada en un punto p ($\det|g| = 0$ en p), hay una singularidad física en el punto p.	□	□
19. Si en un sistema de coordenadas los simbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son todos cero, entonces el espacio es plano.	□	□
20. Si $A_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, $A^{\rho\lambda} = g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} A_{\mu\nu}$ también lo es.	□	□

Relatividad General
4^o de Física
13 septiembre 2007

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Identidad de Bianchi (2 puntos)** De la identidad de Jacobi para las derivadas covariantes, actuando sobre un escalar ϕ,

$$[[\nabla_\mu, \nabla_\nu], \nabla_\rho]\ \phi + [[\nabla_\nu, \nabla_\rho], \nabla_\mu]\ \phi + [[\nabla_\rho, \nabla_\mu], \nabla_\nu]\ \phi = 0, \tag{78}$$

se deriva facilmente identidad de Bianchi para el tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda + R_{\nu\rho\mu}{}^\lambda + R_{\rho\mu\nu}{}^\lambda = 0, \tag{79}$$

asumiendo que la conexión utilizada en las derivadas covariantes es la conexión de Levi-Civita. Demuestra que, utilizando una conexión arbitraria en la identidad de Jacobi (78), la identidad de Bianchi (79) se generaliza a

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda + R_{\nu\rho\mu}{}^\lambda + R_{\rho\mu\nu}{}^\lambda - \nabla_\mu T^\lambda_{\nu\rho} - \nabla_\nu T^\lambda_{\rho\mu} - \nabla_\rho T^\lambda_{\mu\nu} + T^\sigma_{\mu\nu} T^\lambda_{\rho\sigma} + T^\sigma_{\nu\rho} T^\lambda_{\mu\sigma} + T^\sigma_{\rho\mu} T^\lambda_{\nu\sigma} = 0, \tag{80}$$

donde $T^\lambda_{\mu\nu}$ es el tensor de torsión.

2. **Tensor de energía-momento en Einstein-Maxwell (3 puntos)** Considera la acción de Einstein-Maxwell

$$S = \int d^4x\ \sqrt{|g|}\Big[R\ -\ \tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\Big] \tag{81}$$

y el Ansatz esféricamente simétrico para la métrica y el campo eléctrico

$$ds^2 = e^{2A(r)} dt^2 - e^{2B(r)} dr^2 - r^2\Big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\Big), \qquad F_{tr} = E(r), \tag{82}$$

donde $A(r)$, $B(r)$ y $E(r)$ son funciones arbitrarias de la coordenada radial.

a. Demuestra que F_{tr} satisface las ecuaciones de Maxwell $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ si $E(r)$ es de la forma

$$E(r) = e^{(A+B)}\ \frac{Q}{r^2}. \tag{83}$$

Determina las condiciones sobre $A(r)$ y $B(r)$ para que la solución sea asintóticamente plana y da una interpretación (motivada) de la constante Q.

b. Demuestra que el traza $T^{(\text{em})} = g^{\mu\nu} T^{(\text{em})}_{\mu\nu}$ del tensor de energía-momento de electromagnetismo es cero en general (en 4 dimensiones). Calcula las componentes de $T^{(\text{em})}_{\mu\nu}$ para el Ansatz de arriba y comprueba que para este caso la traza es efectivamente cero.

Pista: ¡Ten mucho cuidado con los factores de la métrica (inversa) en las contracciónes y al subir y bajar índices! Las siguientes identidades serán útiles:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho, \qquad F_{rt} = -F_{tr}, \qquad F^{tr} = g^{tt} g^{rr} F_{tr}, \qquad F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 F_{tr} F^{tr}. \tag{84}$$

3. **Electromagnetismo en espacios curvos (3 puntos):** Considera una partícula con masa m_0 y carga eléctrica e en el espacio con métrica $g_{\mu\nu}$, interaccionando con el campo electromagnético $F_{\mu\nu}$. La dinámica del sistema está descrito por la acción

$$S = -\tfrac{1}{2} m_0 \int d\tau \; g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \; - \; e \int d\tau \; \dot{x}_\mu A^\mu \; - \; \tfrac{1}{4} \int d^4x \; \sqrt{|g|} \; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{85}$$

donde $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, con τ el tiempo propio de la partícula y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

a. Demuestra que las ecuaciones de movimiento de la acción S son la ecuación inhomogénea de Maxwell y la segunda ley de Newton para una partícula sometida a la fuerza de Lorentz. ¿Cómo está codificada la identidad de Bianchi $\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$ en la acción S?

b. Identifica en esta acción la corriente eléctrica j^μ de la ley de Maxwell y demuestra que está conservada. Demuestra que la acción S es invariante bajo transformaciones gauge $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$, gracias a la conservación de la carga eléctrica.

Pista: Observa que los vectores V^μ y los tensores antisimétricos $T^{\mu\nu\cdots}$ satisfacen las siguientes identidades

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \Big[\sqrt{|g|} \; V^\mu \Big], \qquad \nabla_\mu T^{\mu\nu\cdots} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \Big[\sqrt{|g|} \; T^{\mu\nu\cdots} \Big].$$

Observa también que la ecuación de Euler-Lagrange para el campo de Maxwell viene dada por

$$\partial_\mu \Big(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)} \Big) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = 0 \tag{86}$$

Relatividad General
4º de Física
15 febrero 2007

Nombre:

Examen de Relatividad General

Parte I: Test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ y B_μ vectores, $T_{\mu\nu}$ un tensor de rango 2, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. Sea además $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ la conexión de Levi-Civita, y ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	**F**
1. Para cualquier punto p de una variedad arbitraria siempre se puede elegir unas coordenadas tal que el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$ es cero en este punto (salvo en singularidades).	□	□
2. $g^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$ es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	□	□
3. La métrica $ds^2 = dt^2 - M_{ij}dx^i dx^j$, con M_{ij} un tensor 3×3 constante, simétrico y definido positivo, describe el espacio de Minkowski.	□	□
4. $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$ es un invariante bajo transformaciones de Lorentz.	□	□
5. $\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	□	□
6. Si $T^{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, $V_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = -\nabla_\nu V_\mu T^{\mu\nu}$más una derivada total.	□	□
7. Las transformaciones de Lorentz para la energía E y el momento $\vec{p}$, $E' = \dfrac{E - vp_x}{\sqrt{1-v^2}}$, $p'_x = \dfrac{p_x - Ev}{\sqrt{1-v^2}}$ implican que las leyes de conservación de la energía y el momento ya no son válidas individualmente.	□	□
8. $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\nabla_\rho A^\rho = 0$	□	□

	V	F
9. $\partial_\mu(A_\nu B^\nu) = \nabla_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \nabla_\mu B^\nu$.	☐	☐
10. El tensor de Riemann del espacio de Minkowski en coordenadas esféricas es distinto de cero.	☐	☐
11. En ausencia de masa y energía (es decir $T_{\mu\nu} = 0$), el espacio de Minkowski es la única solución de las ecuaciones de Einstein.	☐	☐
12. $\nabla_\mu(A_\nu B^\nu) = \partial_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \partial_\mu B^\nu$.	☐	☐
13. $\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi$	☐	☐
14. Si $T_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, $T^{\rho\lambda} = g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} T_{\mu\nu}$ también lo es.	☐	☐
15. Si T_{ij} es un tensor antisimétrico en coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$, también es antisimétrico en coordenadas esféricas.	☐	☐
16. $\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \nabla_\mu \partial^\mu \phi$	☐	☐
17. Si un vector en un espacio arbitrario es espacial para un observador, es espacial para todos los observadores.	☐	☐
18. En un espacio plano, los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son cero en todos los sistemas de referencia.	☐	☐
19. $\nabla_\mu \nabla^\mu T^{\rho\lambda} = \nabla^\mu \nabla_\mu T^{\rho\lambda}$.	☐	☐
20. $g^{\rho\lambda} \nabla_\mu \nabla_\nu T_{\rho\lambda} = g^{\rho\lambda} \nabla_\nu \nabla_\mu T_{\rho\lambda}$	☐	☐

Relatividad General
4^o de Física
15 febrero 2007

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Electromagnetismo en espacios curvos (3 puntos):** Considera una partícula con masa m_0 y carga e en el espacio con métrica $g_{\mu\nu}$, interaccionando con el campo electromagnético $F_{\mu\nu}$. La dinámica del sistema está descrito por la acción

$$S = -\tfrac{1}{2}m_0 \int d\tau \; g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \;-\; e\int d\tau \; \dot{x}_\mu A^\mu \;-\; \tfrac{1}{4}\int d^4x \; \sqrt{|g|} \; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{87}$$

donde $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, con τ el tiempo propio de la partícula y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

a. Demuestra que las ecuaciones de movimiento de la acción S son la ecuación inhomogénea de Maxwell y la segunda ley de Newton para una partícula sometida a la fuerza de Lorentz. ¿Cómo está codificada la identidad de Biancchi (es decir, la ecuación homogénea de Maxwell) en la acción S?

b. Identifica la corriente eléctrica j^μ de la ley de Maxwell y demuestra que está conservada. Demuestra que la acción S es invariante bajo transformaciones gauge $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$, gracias a la conservación de la carga eléctrica.

<u>Pista:</u> Observa que vectores V^μ y tensores antisimétricos $T^{\mu\nu\cdots}$ satisfacen las siguientes identidades

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\Big[\sqrt{|g|}\; V^\mu\Big], \qquad \nabla_\mu T^{\mu\nu\cdots} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\Big[\sqrt{|g|}\; T^{\mu\nu\cdots}\Big].$$

2. **Geometría diferencial (3 puntos):** Considera una variedad N-dimensional $\mathcal{M}$ con una conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ que no necesariamente es simétrica ni compatible con la métrica (¡por lo tanto <u>*no*</u> es necesariamente la conexión de Levi-Civita!) y considera la derivada covariante ∇_μ definida con respeto a la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$. Calcula el conmutador $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ actuando sobre un vector covariante A_ρ.

<u>Pista:</u> Se puede utilizar lo que se sabe sobre el conmutador actuando sobre un vector contravariante B^ρ.

3. **Schwarzschild tridimensional (2 puntos):** Considera el siguiente Ansatz esféricamente simétrica en tres dimensiones,

$$ds^2 = e^{2A}dt^2 - e^{2B}dr^2 - r^2 d\theta^2, \tag{88}$$

donde $A = A(r)$ y $B = B(r)$ son funciones de la coordenada radial. Los símbolos de Christoffel no-zeros son

$$\Gamma_{tt}^r = e^{2(A-B)}A', \qquad \Gamma_{tr}^t = A', \qquad \Gamma_{rr}^r = B',$$
$$\Gamma_{r\theta}^\theta = r^{-1} \qquad \Gamma_{\theta\theta}^r = -re^{-2B}.$$

Observa que los símbolos de Christoffel son identicos a los símbolos correspondientes en el Ansatz cuadrimensional. Sin embargo, las componentes del tensor de Ricci toman una forma (ligeramente) distinta (¿por qué?).

a. Demuestra que las componentes non-zero del tensor de Ricci son de la forma

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -e^{2(A-B)}\Big[A'' + (A')^2 - A'B' + r^{-1}A'\Big], \\ R_{rr} &= A'' + (A')^2 - A'B' - r^{-1}B', \\ R_{\theta\theta} &= re^{-2B}\Big[A' - B'\Big]. \end{aligned}$$

b. Halla una expresión para las funciones A y B tal que el Ansatz (88) satisfaga las ecuaciones de Einstein del vacio. ¿Por qué este resultado es sorprendente? Explica el resultado, comparando el número de grados de libertad del tensor de Riemann con el número de grados de libertad del tensor de Ricci, tanto en tres como en cuatro dimensiones.

Relatividad General
4º de Física
8 septiembre 2006

Nombre:

DNI:

Examen de Relatividad General

Parte I: test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Sea ϕ un escalar, A_μ y B_μ vectores, $T_{\mu\nu}$ un tensor de rango 2, $g_{\mu\nu}$ la métrica de un espacio arbitrario y $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. Sea además $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ la conexión de Levi-Civita, $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ una conexión arbitraria y ∇_μ la derivada covariante con respecto a la conexión de Levi-Civita. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	**F**
1. Si un vector en el espacio de Minkowski es nulo para un observador, es nulo para todos los observadores.	☐	☐
2 $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$.	☐	☐
3 Si los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son todos cero en un sistema de referencia, también lo son en cualquier otro sistema.	☐	☐
4. La traza $T = T^\mu{}_\mu$ de un tensor $T^{\mu\nu}$ es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
5. En cualquier espaciotiempo, existe siempre un cambio general de coordenadas que hace desaparecer la fuerza de la gravedad en todo el espacio, tal que el espacio entero parece plano.	☐	☐
6. Si el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ de una métrica $g_{\mu\nu}$ es cero, entonces también su tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$ es cero.	☐	☐
7. $g^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 0$ en todos los sistemas de referencia.	☐	☐
8. $\partial_\mu A^\mu$ es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	☐	☐
9. Si $\bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ y $\hat{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ son dos conexiones afines generales (no necesariamente Levi-Civita), entonces $K^\rho_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$ es un tensor.	☐	☐

	Si	No
10. La métrica $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$ tiene una singularidad física en $\theta = 0$.	☐	☐
11. En ausencia de masa y energía (es decir $T_{\mu\nu} = 0$), el espacio de Minkowski es la única solución de las ecuaciones de Einstein.	☐	☐
12. Si $T_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, $T^{\rho\lambda} = g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} T_{\mu\nu}$ también lo es.	☐	☐
13. Un observador en caída libre en un agujero negro tipo Schwarzschild nota un efecto físico cuando cruza el horizonte de eventos.	☐	☐
14. Si $T_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, $T^{\rho}{}_{\nu} = g^{\mu\rho} T_{\mu\nu}$ también lo es.	☐	☐
15. $\nabla_\mu \partial_\nu \phi = \nabla_\nu \partial_\mu \phi$.	☐	☐
16. La métrica $ds^2 = dt^2 - M_{ij} dx^i dx^j$, con M_{ij} un tensor 3×3 constante, simétrico y definido positivo, describe el espacio de Minkowski.	☐	☐
17. Si $\partial_\mu g_{\nu\rho} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} = 0$ y $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\nu\mu}$, entonces $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ es la conexión de Levi-Civita.	☐	☐
18. $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ transforma como un escalar bajo transformaciones de Lorentz.	☐	☐
19. $\nabla_\mu (A^\mu B^\nu - B^\mu A^\nu) = \frac{1}{\sqrt{\lvert g \rvert}} \partial_\mu \Big[\sqrt{\lvert g \rvert} (A^\mu B^\nu - B^\mu A^\nu) \Big]$.	☐	☐
20. El radio del horizonte de un agujero negro de Schwarzschild es proporcional a la masa del agujero negro.	☐	☐

Relatividad General
4^o de Física
8 septiembre 2006

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Vectores :** Demuestra que si en un punto P del espacio de Minkowski un vector V^μ es ortogonal a
a. un vector temporal t^μ, entonces V^μ es espacial.
b. un vector nulo n^μ, entonces V^μ es o bien espacial, o bien proporcional a n^μ.
c. un vector espacial s^μ, entonces V^μ puede ser espacial, temporal o nulo.
d. ¿Qué cambiaría en las propiedades de ortogonalidad si P, en lugar de ser un punto del espacio de Minkowski, fuera un punto de un espacio lorentziano arbitrario $\mathcal{M}$?
Pista: Se puede coger sin pérdida de generalidad los vectores t^μ, n^μ y s^μ de la forma

$$t^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(¿Por qué?)} \tag{89}$$

(2 puntos)

2. **Curvatura constante:** Una métrica cuatro-dimensional $g_{\mu\nu}$ describe un espacio de curvatura constante si el tensor de Riemann satisface la condición

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = K\Big(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}\Big), \tag{90}$$

donde K es una constante arbitraria real, llamado la *curvatura*.
a. Demuestra que el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ satisface la condición $R_{\mu\nu} = 3Kg_{\mu\nu}$ y calcula la condición sobre el escalar de Ricci R.
b. Calcula la forma exacta de la métrica $g_{\mu\nu}$ para que satisfaga la condición sobre el tensor de Ricci, partiendo del Ansatz

$$ds^2 = e^{2A(r)}dt^2 - e^{2B(r)}dr^2 - r^2\Big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\Big).$$

Pista: Utiliza lo que sabes de los símbolos de Christoffel y del tensor de Ricci de la solución de Schwarzschild.
c. ¿Cualquier solución de la condición del tensor de Ricci también es solución de (90)? ¿Y vice versa? ¿El espacio de Minkowski es solución de alguna de estas dos condiciones?
(3 puntos)

3. **Tensor de energía-momento:** Considera un campo escalar real massivo ϕ, acoplado mínimamente a la gravedad a través del lagrangiano

$$\mathcal{L} \;=\; \sqrt{|g|}\,\Big[g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \;+\; \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \;+\; \tfrac{1}{2}m^2\phi^2\Big],$$

donde la constante m es la masa del campo ϕ.

a. Calcula la ecuación de Einstein y la ecuación de movimiento de ϕ para este lagrangiano. Puedes suponer que el formalismo de Palatini es conocido.
b. Demuestra que el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}(\phi)$ del campo ϕ satisface la condición que $\nabla_\mu T^{\mu\nu}(\phi) = 0$ si se satisface la ecuación de movimiento de ϕ.
(3 puntos)

Relatividad General
4^o de Física
21 febrero 2006

Nombre:

DNI:

Examen de Relatividad General

Parte I: test

Indica si las siguientes frases son verdaderas (**V**) o falsas (**F**). Supón que A_μ y B_μ son vectores covariantes, $T_{\mu\nu}$ un tensor de rango 2, $g_{\mu\nu}$ la métrica del espacio y $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ la métrica de Minkowski en coodenadas cartesianas. Supón además que la conexión es la de Levi-Civita. **(45 minutos, 2 puntos)**

	V	**F**
1. Para cualquier punto p de una variedad arbitraria siempre se puede elegir unas coordenadas tal que el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^{\lambda}$ es cero en este punto.	□	□
2. $\nabla_\mu \nabla^\mu T^{\rho\lambda} = \nabla^\mu \nabla_\mu T^{\rho\lambda}$.	□	□
3. En un espacio plano, los símbolos de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ son cero en todos los sistemas de referencia.	□	□
4. $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ transforma como un escalar bajo cambios generales de coordenadas.	□	□
5. Si un vector en un espacio arbitrario es nulo para un observador, es nulo para todos los observadores.	□	□
6. La métrica $ds^2 = dt^2 - M_{ij} dx^i dx^j$, con M_{ij} un tensor 3×3 simétrico y constante, describe el espacio de Minkowski.	□	□
7. $\partial_\mu \partial^\mu \phi$ transforma como un escalar bajo transformaciones de Lorentz.	□	□
8. Si T_{ij} es un tensor antisimétrico en coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$, también es antisimétrico en coordenadas esféricas.	□	□
9. $g^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$ es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	□	□
10. $\partial_\mu (A_\nu B^\nu) = \nabla_\mu A_\nu B^\nu + A_\nu \nabla_\mu B^\nu$.	□	□
11. En $\mathbb{R}^3$, la distancia espacial entre dos puntos es un invariante.	□	□

	V	F
12. El radio del horizonte de un agujero negro de Schwarzschild es proporcional a la masa del agujero negro.	□	□
13. $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ no es invariante bajo transformaciones gauge $A_\mu \to A_\mu + \nabla_\mu \Lambda$.	□	□
14. Un espacio con métrica $g_{\mu\nu}$ es plano si existe un cambio de coordenadas $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$ tal que $\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}$.	□	□
15. $g^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	□	□
16. Las transformaciones de Lorentz para la energía E y del momento $\vec{p}$, $$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad p'_x = \frac{p_x - Ev}{\sqrt{1-v^2}}$$ implican que las leyes de conservación de la energía y del momento ya no son válidas individualmente en un sistema de referencia dado.	□	□
17. Si $T_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico, $T^{\rho\lambda} = g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} T_{\mu\nu}$ también lo es.	□	□
18. Las ecuaciones de Einstein en ausencia de masa y energía son $R_{\mu\nu} = 0$.	□	□
19. $g^{\rho\lambda}\nabla_\mu\nabla_\nu T_{\rho\lambda} = g^{\rho\lambda}\nabla_\nu\nabla_\mu T_{\rho\lambda}$	□	□
20. El tiempo propio $\Delta\tau = \int_a^b d\tau$ de una partícula es un invariante bajo cambios generales de coordenadas.	□	□

Relatividad General
4^o de Física
21 febrero 2006

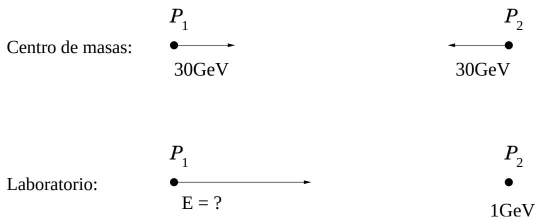
Nombre:

DNI:

Examen de Relatividad General

Parte II: Preguntas de libro abierto

1. **Relatividad especial:** En un sistema de centro de masa, dos protones, P_1 y P_2 chocan con una energía de 30 GeV cada uno. Calcula la energía del protón P_1 en el sistema de laboratorio, donde P_2 está en reposo, si sabes que la masa (en reposo) de un proton es 1 GeV. **(3 puntos)**



2. **Conservación de carga:** En relatividad especial se deriva la ley de conservación de la carga $\partial_\mu j^\mu = 0$ fácilmente de la ley de Maxwell $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$, tomando la divergencia de esta expresión:

$$\partial_\nu j^\nu \;=\; \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \;=\; 0,$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$ es a la vez simétrico y antisimétrico en μ y ν. El Principio de Mínimo Acoplo sugiere que la generalización de la ley de Maxwell y la ley de conservación de carga en relatividad general vienen dadas por

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \qquad\qquad \nabla_\mu j^\mu = 0.$$

Demuestra que también en relatividad general se puede derivar la ley de conservación de carga de la ley de Maxwell, a pesar de que ahora las derivadas covariantes no conmutan. **(2 puntos)**

3. **Constante cosmológica:** Considera la acción de Einstein-Hilbert en presencia de una constante cosmológica $\Lambda > 0$,

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|}\,\Big[R \;+\; \Lambda\Big].$$

a. Deriva que las ecuaciones de Einstein sin traza vienen dadas por $R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Lambda g_{\mu\nu}$.
b. Busca una solución estática y esféricamente simétrica de estas ecuaciones, partiendo del Ansatz

$$ds^2 = e^{2A(r)}dt^2 - e^{2B(r)}dr^2 - r^2\Big(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\Big).$$

c. ¿Es el espacio de Minkowski una solución de estas ecuaciones? ¿Por qué (no)?

Pista: Utiliza lo que sabes de la derivación de las ecuaciones de Einstein y la solución de Schwarzschild en el caso $\Lambda = 0$. En particular, puedes suponer que el formalismo de Palatini y la forma del tensor de Ricci son conocidos. **(3 puntos)**