UNIVERSIDAD DE GRANADA

# BREVE INTRODUCCIÓN

A LA

# RELATIVIDAD

EDUARDO BATTANER LÓPEZ
battaner@ugr.es
http://www.ugr.es/local/battaner

# 1 RELATIVIDAD RESTRINGIDA

La Relatividad Restringida (o Especial) se refiere a sistemas inerciales y la Relatividad Genaralizada a cualquier tipo de sistemas de referencia. Hace falta entonces, para empezar, una definición de sistema inercial.

Un sistema inercial es aquel que se mueve con velocidad uniforme con respecto a un sistema inercial. Esto es un ejemplo de mala definición, en la que lo definido entra a formar parte de la definición. No es completamente inútil, sin embargo, pues dado un sistema inercial inicial, podemos a partir de él encontrar la familia completa de todos los sistemas inerciales imaginables. Este primer sistema inercial inicial fue proporcionado por Newton. Es el llamado “Espacio Absoluto de Newton”. Se trata de un concepto intuitivo, sin definición, aunque fértil en la Física Clásica. Lo llena todo y es independiente de los procesos físicos que en él ocurran. Es como el marco si el proceso es el cuadro.

Correspondientemente, y con tan falto de definición, Newton imaginó lo que hoy se llama el “Tiempo Absoluto de Newton”, tiempo que fluye independientemente de los procesos que en él estén teniendo lugar.

Según el Primer Principio de Newton, o Principio de Galileo, en un sistema inercial, un cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza sigue una trayectoria rectilínea recorrida con velocidad uniforme. (El reposo sería un caso particular). Si no sigue esta trayectoria espacio-temporal, o es que hay fuerzas, o es que el sistema no es inercial. En este segundo caso podemos atribuir la desobediencia a otras fuerzas, llamadas “fuerzas de inercia”. Por tanto, fuerzas de inercia son aquellas que perturban la trayectoria de un móvil, “por culpa” de no haber adoptado un sistema inercial. Si se adopta que los sistemas inerciales son los “buenos”, entonces las fuerzas de inercia son “ficticias”.

Como se ve, hay en esto mucho de arbitrario. ¿Cómo distinguir las fuerzas de inercia de las fuerzas “reales”?. Ejemplos típicos de fuerzas de inercia serían: la apreciada en un vehículo acelerado en la que los conductores son “empujados” hacia el respaldo de su asiento, las fuerzas centrífuga y de Coriolis, etc.. Ejemplos típicos de fuerzas reales serían las fuerzas gravitatoria, eléctrica, magnética, etc. No está definida la diferencia de los dos tipos de fuerza.

Ahora bien, si logramos establecer un criterio que nos haga diferenciar ambos tipos de fuerza, de inercia y reales, habremos podido definir qué es un sistema inercial. Por ejemplo, si sobre un móvil no actua ninguna fuerza “real” y si su trayectoria obedece al Principio de Galileo, es que el sistema de referencia es inercial. Por tanto, es conveniente que, aprovechando nuestra intuición (¿forjada a base de una mala educación?), busquemos una distinción objetiva entre fuerzas de inercia y fuerzas reales.

Consideremos una mesa, con un libro, un bolígrado, un cuaderno...Todo está en reposo. Pensemos ingenuamente que estamos en reposo, es decir, que estamos en un sistema inercial. Convirtámonos nosotros mismos en un observador no inercial moviéndonos aceleradamente hacia atrás. Entonces, todo los objetos de la mesa se mueven aceleradamente hacia delante, debido, creemos, a una fuerza de inercia. Todos los objetos de la mesa sufren la misma aceleración, independientemente de su masa, su color, su forma, su carga eléctrica.... Las fuerzas de inercia actúan de igual forma sobre todos los móviles. No así las fuerzas reales: la fuerza eléctrica, por ejemplo, depende de la carga.

Hay otra diferencia esencial. Podemos imaginar otro sistema de referencia que anule las fuerzas de inercia. Si con respecto al observador que se movía aceleradamente hacia atrás, consideramos otro que se mueva hacia delante con la misma aceleración que el primero hacia atrás, habremos recuperado el reposo de todos los objetos. Con un simple cambio de sistema de referencia se pueden anular todas las fuerzas de inercia. No así, por ejemplo, la fuerza eléctrica, para la que podemos recuperar el reposo para un cuerpo con una determinada carga, pero no para otro cuerpo con una carga diferente.

Esta distinción estaría muy bien si no fuera por una notabilísima excepción: la gravedad. La gravedad, como las fuerzas de inercia, actua igual sobre todos los cuerpos. Así, en la Tierra, la gravedad es $m\vec{g}$, siendo $\vec{g}$ un vector constante, y debe igualarse, según el Segundo Principio de Newton, a $m\vec{a}$. Al igualarse, se elimina la masa, con lo que resulta que la aceleración es $\vec{a} = \vec{g}$. El movimiento de un cuerpo, en el camo gravitatorio terrestre es independiente de su masa y de todo. Lo mismo podemos decir al igualar $GMm/r$ a $ma$. Se anula $m$. El movimiento de un cuerpo en el seno de un campo gravitatorio no depende de su masa ni de nada. En el campo gravitatorio creado por el Sol igual órbita tienen una mísera pluma y Júpiter.

Debemos entonces buscar una distinción objetiva entre fuerzas de inercia y gravedad. No será fácil pues, como veremos en Relatividad General, ambas tienen la misma naturaleza. Pero aunque sean de igual naturaleza, no son idénticas. En el caso de las fuerzas de inercia, con un simple cambio de sistema de referencia podemos anularlas en todo el espacio. En el caso de la gravedad podemos anularla sólo localmente; un solo cambio de sistema de referencia no puede anular la gravedad en todo el espacio.

Por ejemplo, en un ascensor en reposo, hay dos cuerpos, A y B, que pesan. Podemos anular su peso, cortando el cable que sostiene el ascensor. Pero si el ascensor es muy grande o su recorrido muy largo, veremos que A y B se van acercando, al disminuir su distancia al centro de La Tierra. Al cortar el cable no hemos suprimido completamente la gravedad; si no, A y B no se acercarían mutuamente. En el caso de la gravedad, podemos suprimirla con un simple cambio de sistema de referencia sólo localmente, en un punto del espacio y su microentorno. En el caso de las fuerzas de inercia, con un simple cambio de referencia podemos hacerlas desaparecer en todo el espacio, hasta el infinito. Así, podemos hacer que desaparezca la fuerza centrífuga imaginando a un observador que gire con respecto al primitivo.

En este sentido, podemos hablar de sistemas inerciales sin riesgo de confusión. Simplemente debemos abandonar expresiones como "los sistemas inerciales son los buenos" y "las fuerzas de inercia son ficticias". Todos los observadores son igual de buenos, se muevan como se muevan, acelerándose, girando, dando tumbos, etc.

Definimos entonces un sistema inercial como aquel en el que no aparecen fuerzas de inercia. Fuerzas de inercia son todas aquellas que no actuan de forma diferente sobre los distintos cuerpos (llamémoslas fuerzas reales) y excluimos también la gravedad (fuerza que actua igual sobre todos los cuerpos pero que no se puede anular en todo el espacio mediante un simple cambio de sistema de referencia). Esta definición de sistema inercial no es elegante pero es operativa.

Veremos posteriormente que el gran parecido físico entre fuerzas de inercia y gravitatoria tiene importantes implicaciones en la teoría de la Relatividad General.

Veamos el Principio de Relatividad de Galileo.

Debiera llamársele Principio de Relatividad de Juan de Celaya. Consideremos únicamente sistemas inerciales. Las fórmulas de transformación de Galileo para cambios de sistemas de referencia inerciales son:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{v}t' \tag{1}$$

$$t = t' \tag{2}$$

donde $[\vec{r}, t]$ son las coordenadas espacio temporales para un observador que se mueve con velocidad $\vec{v}$ constante respecto de otro observador que usa las coordenadas $[\vec{r'}, t']$. Derivando vemos que la aceleración de un móvil es la misma para todos los observadores.

Como se aceptaba implícitamente que las fuerzas y las masas, que aparecen en la segunda ley de Newton, eran independientes del sistema de referencia, se deduce el llamado Principio de Relatividad de Galileo:

Las fórmulas de la Mecánica son invariantes para todo sistema inercial.

Equivalentemente, se puede afirmar que es imposible para un observador inercial conocer su estado de movimiento o reposo mediante experimentos en Mecánica.

El mismo Galileo ponía un magnífico ejemplo. Si yo, observador en el muelle, dejo caer una piedra, caerá sobre mis pies. Si aquel hombre que va en la bodega del barco, deja caer una piedra, la velocidad horizontal inicial que tiene su piedra, al participar del movimiento del barco, hará que la piedra siga una trayectoria parabólica, y no caerá en el lugar que tenían sus pies cuando la piedra empezó a caer. Pero mientras la piedra describe su trayectoria parabólica, los pies del marino avanzan con la velocidad del barco y su piedra también herirá sus pies tal como mi piedra hirió los míos. ¿Quién es el que se mueve, el barco o yo?.

# 2 PRINCIPIO DE RELATIVIDAD RESTRINGIDA

Con experimentos en Mecánica es imposible para un observador inercial conocer su estado de movimiento o reposo; las leyes son equivalentes para todo observador inercial. Pero, ¿y con otros experimentos no mecánicos?. Por ejemplo ¿podríamos conocer nuestro movimiento absoluto mediante experimentos ópticos?.

La luz se propaga en el vacío. Se pensó que un hipotético “éter” era el medio material que sustentaba las ondas electromagnéticas. Incluso el vacío no sería tal, sino que estaría lleno de éter. Midiendo la velocidad de la luz en diferentes direcciones, ¿sería posible calcular la velocidad de nuestro sistema de referencia ligado a La Tierra con respecto al éter?.

El experimento de Michelson permitía, a principios de siglo, apreciar la diferencia en la velocidad de la luz de dos rayos, uno lanzado en la dirección de avance de La Tierra (en su traslación) y otro en dirección contraria. No se apreció ninguna diferencia. La interpretación más sencilla hubiera podido ser que en el mes en que se realizó el experimento daba la casualidad de que La Tierra estaba en reposo con respecto al éter. Pero al medir seis meses más tarde, el experimento tuvo de nuevo un resultado negativo, a pesar de que ahora La Tierra debía moverse con $10^{-4}C$ con respecto al éter (la velocidad de traslación de La Tierra).

La explicación más inmediata hubiera sido entonces que los fotones se compertaban como las piedras del experimento del barco de Galileo. La velocidad de la luz podría ser la composición vectorial de la velocidad de la luz propiamente dicha y la del emisor. Si los fotones son como las piedras la Óptica no era más útil que la Mecánica para que un observador inercial conociera su movimiento absoluto. Esta explicación que, como veremos, es perfectamente compatible con el Principio de Relatividad Restringida, fue desechada por ser incompatible con la observación de las estrellas dobles. Si existiera tal composición vectorial una estrella de un sistema doble debería verse en varias posiciones a la vez.

La explicación dada por Einstein fue la siguiente: Si la velocidad de la luz parecía ser siempre la misma es que la velocidad de la luz era independiente del observador. Es éste el Principio de la Invariancia de la Velocidad de la Luz.

La velocidad de la luz es un invariante, es una constante universal. Es la misma para todos los observadores. De ahora en adelante adoptaremos $c = 1$.

La invariancia de la velocidad de la luz impide que un observador inercial conozca su movimiento absoluto, no sólo con experimentos en Mecánica, sino tampoco con experimentos en óptica. Einstein generalizó: ni con experimentos mecánicos, ni con ópticos ni con ningún tipo de experimentos. Estableció así su Principio de Relatividad Restringida:

Las leyes son equivalentes para todo observador inercial.

En consecuencia, es imposible para un observador inercial conocer su movimiento absoluto.

# 3 RELATIVIDAD DEL ESPACIO Y DEL TIEMPO

¿Cómo puede ser la luz invariante?. Sean dos observadores A y B, juntos en el momento inicial. En el momento inicial, B empieza a moverse con v, y en el momento inicial también se produce un destello luminoso en la misma dirección de B. Al cabo de un cierto tiempo, t, A dirá que el rayo ha llegado a la distancia ct. Pero A dirá que si para B la velocidad es también c, y en t, B está a vt de distancia de él, B ha de ver que el rayo a llegado a la distancia $(c+v)t$. Los dos no pueden tener razón. El rayo puede llegar a activar algún mecanimo testigo.

La respuesta de Einstein es que los dos tienen razón pero que no cuentan el tiempo de la misma manera. Aún siendo el reloj de B absolutamente perfecto, A observa que el reloj de B no lleva el mismo ritmo que el suyo, también absolutamente perfecto. Y tampoco ambos observadores miden las distancias de igual forma. El espacio y el tiempo son relativos.

# 4 EL TIEMPO PROPIO

Sean dos sucesos infinitamente próximos, separados por $dt$ y por $dx_i$. Se define el tiempo popio, $d\tau$ como

$$d\tau^2 = dt^2 - \Sigma_i dx_i^2 \tag{3}$$

Para el observador que viaja con el reloj, existe $dt$ pero $dx_i = 0$. Por tanto el tiempo propio es el tiempo marcado por el reloj, sencillamente. La importancia del tiempo propio es que es un invariante relativista, es decir, que es igual para todos los observadores. El tiempo de todos los observadores es diferente, pero cuando preguntemos a todos ellos, ¿cuál es el tiempo que marca aquel reloj determinado?, todos deben decir lo mismo. El tiempo propio de un observador que se mueve con respecto a nosotros es el tiempo que marca su reloj, solidario a él, sobre el que va "montado".

Convenzámonos de la invariancia relativista del tiempo propio. Busquemos la transformación de $d\tau$ al pasar de un observador O a un observador O'. Debemos hacer una hipótesis compatible con la invariancia de la velocidad de la luz. Debemos pensar que estamos empleando solo conceptos muy elementales como espacio, tiempo, observadores irreales, triedros imaginarios... sin hacer referencia aún a proceso físico alguno. Si los sucesos infinitamente próximos están conectados por un rayo luminoso (es decir, suceso inicial: parte un rayo aquí, ahora; suceso final: llega el rayo allí, después) tendrá que ser

$$d\tau = 0 \tag{4}$$

para todos los observadores del mundo, es decir, también $d\tau' = 0$. Busquemos la relación entre $d\tau$ y $d\tau'$ de la forma

$$d\tau = a d\tau' \tag{5}$$

es decir, sin términos constantes aditivos para que, obligatoriamente, sea $d\tau = 0$ si $d\tau' = 0$ y admitiendo que ambos tiempos propios son infinitésimos del mismo orden. Pero $a$ es una función desconocida. La función $a$ no debe depender de $x_i$ (¡imaginemos que no hay nada en el Universo!, admitamos la homogeneidad del espacio) ni de $t$ (admitamos la homogeneidad del tiempo). Son condiciones asumidas siempre, aunque pueden ser replanteadas en Relatividad General. Entonces, $a$ solo puede depender de $\vec{v}$. Pero no puede depender de la dirección de $\vec{v}$ (admitamos la isotropía del espacio), luego sólo puede depender del módulo de $\vec{v}$, es decir, de $v$.

Ahora bien, si O' se mueve con $\vec{v}$ con respecto a O, y O" con $-\vec{v}$ con respecto a O', entonces O y O' son (pueden ser) la misma persona, luego

$$d\tau^2 = a(v)d\tau'^2 = a(v)a(v)d\tau''^2 = a^2(v)d\tau^2 \tag{6}$$

luego $a^2(v) = 1$ y eliminando la solución $-1$ tenemos $d\tau^2 = d\tau'^2$, y tras eliminar otra solución ininterpretable, obtenemos, finalmente

$$d\tau = d\tau' \tag{7}$$

Como vemos, la invariancia del tiempo propio es consecuencia de la invariancia de la velocidad de la luz.

A partir de la definición de tiempo propio, obtenemos

$$d\tau^2 = dt^2(1 - v^2) \tag{8}$$

que relaciona mi tiempo $t$ con el tiempo propio $\tau$ de un reloj que se aleja de mí con velocidad $v$. O bien

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{9}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{(\sqrt{1 - v^2})} \tag{10}$$

porque, claro, $\Sigma_i dx_i^2/dt^2$ medido por nosotros, no es otra cosa que la velocidad al cuadrado del reloj que viaja. Si $v < 1$, es decir, si el reloj viaja a una velocidad menor que la de la luz, $\gamma > 1$, luego $d\tau$ es menor que $dt$. El reloj que viaja marca menos, va más lento, sus segundos son más grandes. Este es el conocido resultado de la dilatación de los intervalos de tiempo. Claro está, el observador que viaja no se dará cuenta pues también sus procesos biológicos irán más lentos. De hecho, nosotros podemos estar viajando con $v = 0.9999$ con respecto a algún observador imaginario y no somos conscientes de nuestra extraordinaria longevidad. Como en las fórmulas de transformación solo aparece el módulo de $\vec{v}$, tanto nosotros como el observador montado en el reloj pensamos que el reloj del otro es el que va más lento.

Si $v = 1$ el reloj que viaja se detiene completamente. Y si $v > 1$ veríamos que el reloj de nuestro amigo viajero empezaría a mover las manecillas del tiempo imaginario. Por esta razón ya, debemos admitir que ningún objeto, ni ninguna información, puede viajar a mayor velocidad que la de la luz. Luego veremos otras razones más acuciantes.

Si $v$ es constante, podemos integrar

$$\tau = t/\gamma \tag{11}$$

con una adecuada elección de orígenes de tiempo. También

$$\tau^2 = t^2 - l^2 \tag{12}$$

siendo

$$l = \sqrt{\Sigma_i \Delta x_i^2} \tag{13}$$

la separación espacial entre dos sucesos.

# 5 TIPOS DE INTERVALOS

Hay dos tipos de intervalos espacio-temorales entre dos sucesos. a) Si $\tau^2 > 0$, es deir, $\tau$ real, el intervalo se dice "temporal", porque no existe observador en el mundo que pueda ver estos dos sucesos ocurriendo simultánamente. No podemos hacer $t = 0$. Los distintos observadores no se ponen de acuerdo en cuál es la diferencia de tiempo entre los dos sucesos, pero todos coinciden en que hay una diferencia de tiempo no nula. Se habla de "futuro absoluto" (si $\tau > 0$) o de "pasado absoluto" (si $\tau < 0$). b) Si $\tau^2 < 0$, es decir, si $\tau$ es imaginario, el intervalo se dice "espacial" porque no puede haber observador en el mundo que vea estos dos sucesos ocurriendo en el mismo lugar (isotópicos). No podemos hacer $l = 0$. Se habla entonces de lo "absolutamente separado".

Si el suceso 2 es efecto del suceso 1 causa, pensamos (¿ingenuamente?) que el intervalo entre 1 y 2 debe ser temporal. El efecto debe ser posterior en el tiempo para todos los observadores del mundo. En la propagación causa-efecto tendremos que tener $\tau^2 > 0$, es decir, tendrá que ser $t > l$. Si $V$ es la velocidad de propagación causa-efecto, será $l = Vt$, o bien $t < Vt$, o bien $V < 1$. Es decir, la velocidad de propagación causa-efecto debe ser inferior a la velocidad de la luz. La información no puede viajar a mayor velocidad que la luz. Las ondas electromagnéticas constituyen el procedimiento más veloz para transmitir información.Como los objetos materiales pueden ser utilizados como transmisores de información tampoco pueden viajar a mayor velocidad que la unidad. Luego veremos una demostración más contundente de este resultado.

# 6 TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Son las transformaciones que sustituyen a las de Galileo, es decir, que nos proporcionan nuestras $x_i$ y $t$ a partir de las coordenadas $x'_i$ y el tiempo $t'$ de un observador que se mueve con respecto a nosotros con velocidad $-\vec{v}$, teniendo en cuenta el principio de invariancia de la velocidad de la luz.

Elegimos los ejes OX y OX' coincidiendo con la dirección de $\vec{v}$, de tal forma que es esperable que no se transformen las coordenadas $y$ y $z$. Así pues:

$$y = y' \tag{14}$$

$$z = z' \tag{15}$$

Podemos definir la coordenada imaginaria:

$$T = it \tag{16}$$

Entonces:

$$-d\tau^2 = \Sigma_i dx_i^2 + dT^2 \tag{17}$$

que recuerda la expresión del elemento de arco en un espacio euclídeo, sin más que hacer $ds^2 = -d\tau^2$. A este espacio se le llama "Espacio de Minkowski" y jugará un papel importante en el tratamiento tensorial del que hablaremos dentro de poco. Puesto que $d\tau^2$ es invariante, es decir, puesto que el elemento de arco es invariante en las transformaciones que estamos buscando, éstas deben consistir en rotaciones y translaciones. Pero las translaciones son equivalentes a cambios de los orígenes de las coordenadas y del tiempo, y lo que realmente nos interesan son las rotaciones en el espacio de Minkowski. De éstas no nos interesan las rotaciones puramente espaciales. Nos centramos, pues, en aquellas que se realizan en el plano OX,OT. Las fórmulas de la rotación son:

$$x = x' \cos\varphi - T' \sin\varphi \tag{18}$$

$$T = x' \sin\varphi + T' \cos\varphi \tag{19}$$

Solo debemos determinar $\phi$ para obtener las fórmulas de transformación. Pero $\phi$ solo puede depender del módulo de la velocidad entre O y O', es decir, de $v$. Para $x' = 0$ (origen de coordenadas de O') tendremos:

$$x_o = -T' \sin\varphi \tag{20}$$

$$T_o = T' \cos\varphi \tag{21}$$

luego:

$$\frac{x_o}{T_o} = -\tan\varphi \tag{22}$$

Como

$$\frac{x_o}{t_o} = v \tag{23}$$

se tiene:

$$iv = \tan\varphi \tag{24}$$

luego

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{iv}{\sqrt{1-v^2}} = i\gamma v \tag{25}$$

y

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \gamma \tag{26}$$

Sustituyendo:

$$x = \gamma x' - it' i\gamma v \tag{27}$$

$$T = x' i\gamma v + it'\gamma \tag{28}$$

o, prescindiendo ya de la variable imaginaria, se obtienen ya las transformaciones de Lorentz:

$$x = \gamma(x' + vt') \tag{29}$$

$$t = \gamma(t' + vx') \tag{30}$$

$$y = y' \tag{31}$$

$$z = z' \tag{32}$$

También podemos obtener las fórmulas inversas, o bien pensando que ahora hemos de sustituir $v$ por $-v$, o, de forma más tranquilizadora, despejando:

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{33}$$

$$t' = \gamma(t - vx) \tag{34}$$

$$y' = y; x' = x \tag{35}$$

Algunas conclusiones básicas se obtienen de forma inmediata a partir de las ecuaciones de Lorentz:

a) En el caso clásico, con $\gamma = 1$ y con $x'$ muy pequeño (1 cm es $0.3 \times 10^{-10}$ segundos), se obtienen las fórmulas de transformación de Galileo.

b) Volvemos a encontrar el resultado de la dilatación de los intervalos de tiempo, haciendo $x' = 0$, observando el origen de coordenadas de nuestro amigo viajero.

c) Otro conocido resultado relativista es el de la "contracción de longitudes", que en realidad es una consecuencia de la pérdida de acuerdo sobre la simultaneidad. En efecto, aunque no lo expresáramos explícitamente, al medir una longitud, sus dos extremos han de medirse simultáneamente. (Imaginemos que medimos la longitud de un coche en movimiento; si nos demoramos en medir el segundo extremo, podremos llegar a la conclusión de que ¡el coche mide más de 1 km!). Así pues, haciendo $dt = 0$, obtenemos:

$$dx' = \gamma dx \tag{36}$$

Nosotros observamos $dx < dx'$ para la longitud de un objeto determinado (contracción de longitudes). Claro está que sólo las longitudes en la dirección de $\vec{v}$ se contraen; las longitudes transversales se conservan.

d) El elemento de volumen se transformará según:

$$dV = dxdydz = \frac{1}{\gamma} dx'dy'dz' = \frac{1}{\gamma} dV' \tag{37}$$

# 7 TRANSFORMACIÓN DE LA VELOCIDAD

Sea $u'$ la velocidad de una partícula referida a O' y $u$ la velocidad de esa partícula referida a O. Consideramos que O' se mueve con velocidad $\vec{v} = (v, 0, 0)$ respecto a O. Hallando $dx$, $dt$ y dividiendo:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + vdt')}{\gamma(dt' + vdx')} = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x} \tag{38}$$

e igualmente

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(1 + vu'_x)dt'} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu'_x)} \tag{39}$$

de donde se sacan las conclusiones básicas siguientes: a) Si $v$ y $u$ son mucho menores que 1 se reencuentra la ley clásica de composición vectorial de velocidades. Si no es así, deja de ser cierta la ley $\vec{u} = \vec{u'} + \vec{c}$. La velocidad de la luz no es un vector; la velocidad de la luz no es una velocidad. b) Si $\vec{u'} = (1, 0, 0)$, resulta $\vec{u} = (1, 0, 0)$. En cambio, si $\vec{u'} = (0, 1, 0)$ resulta $\vec{u} = (v, 1/\gamma, 0)$. En ambos casos, el módulo de $\vec{u}$ es la unidad, conforme al principio de invariancia de la velocidad de la luz. Sin embargo, en el segundo caso ha habido un cambio en la dirección de luz, produciéndose el fenómeno llamado "aberración de la luz". Debido a ello, por ejemplo, no hay que apuntar un telescopio en la dirección en que se encuentra una estrella, sino algo más hacia el este, como consecuencia del movimiento de rotación de La Tierra (de igual modo que debemos de inclinar el paraguas en la dirección de marcha). La corrección vendrá dada por el ángulo $\phi$ que forman $\vec{u'}$ y $\vec{u}$, que es tal que $\cos\phi = 1/\gamma$. Como $v = \Omega R \cos\lambda$, siendo $\Omega$ la velocidad angular de La Tierra, $R$ su radio y $\lambda$ la latitud del lugar de observación, el ángulo de aberración es

$$\phi = \Omega R \cos\lambda \tag{40}$$

Este efecto era ya conocido clásicamente y es del orden de $0.2''$.

# 8 TRANSFORMACIÓN DE LA MASA

La teoría de la Relatividad debería llamarse teoría de lo Absoluto, pues hace que las magnitudes físicas sean relativas de forma que las fórmulas sean absolutas, independientes del "incorpóreo" observador. Para ver cómo se transforma la masa aprovechemos la fórmula básica

$$\vec{f} = \frac{d}{dt}(m\vec{u}) \tag{41}$$

válida para todos los observadores inerciales (hay que elegir previamente entre esta expresión y $\vec{f} = m\vec{a}$ como válida). Recurramos a un experimento que haga uso de esta fórmula pero en la que no intervenga la fuerza, cuya transformación nos es aún desconocida. Siguiendo un argumento original de Lewis y Tolman aprovechemos un choque elástico.

Inicialmente O' tiene la bola 1 en reposo (dice él) y nosotros (sistema O, en el origen de coordenadas) la bola 2 en reposo. Antes de que O' "tome carrerilla" hemos comprobado que ambas bolas tienen igual masa (en reposo) y hemos acordado lanzar nuestras bolas en la dirección del eje OY, nosotros hacia arriba y él hacia abajo, con velocidad $u'$. Él va a moverse con velocidad $v$ en la dirección de nuestro eje X, desde valores negativos a positivos. No hemos acordado, en cambio, el momento de lanzamiento, pero tras varios intentos vemos que puede presentarse la situación, en la que nuestra bola 2 vuelve a nuestras manos y la trayectoria de su bola es simtrica. Al observar el resultado nosotros vemos que nuestro amigo O' lanza una bola con diferente masa, $m$ y no observamos que la bola 1 lleve la velocidad $u'$ convenida, sino otra diferente, $u$. Pero estamos en nuestro derecho de aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento. La conservación de la componente vertical nos dirá:

$$m_0u' - mu = -m_0u' + mu \tag{42}$$

o bien

$$m_0u' = mu \tag{43}$$

Con la fórmula de transformación de velocidades obtenemos, en el caso de que $v$ sea pequeña:

$$u = u'/\gamma \tag{44}$$

luego

$$m = m_0\gamma. \tag{45}$$

La masa aumenta cuando está en movimiento. Es esto otro de los grandes y paradógicos resultados de la Relatividad. Si $v = 1$ la masa se hace infinita, lo que prueba de forma contundente que un cuerpo no puede alcanzar la velocidad de la luz. Algunas partículas, como el fotón, tienen $v = 1$, pero su masa en reposo es nula.

# 9 ENERGIA

Vayamos acelerando una partícula de masa en reposo $m_0$ desde el reposo. Según va adquiriendo velocidad su energía cinética va aumentando y, según lo visto, también su masa. ¿Hay alguna relación entre las dos?. Supongamos que la fuerza y la velocidad tienen la misma dirección para evitar el empleo de vectores. El trabajo, $W$, se obtendrá como:

$$dW = fdl = \frac{d(mv)}{dt}vdt = v^2dm + mvdv \tag{46}$$

La masa y la velocidad están relacionadas:

$$v^2 = 1 - \frac{m_0^2}{m^2} \tag{47}$$

$$vdv = \frac{m_0^2}{m^3}dm \tag{48}$$

con lo que:

$$dW = (1 - \frac{m_0^2}{m^2})dm + \frac{m_0^2}{m^2}dm = dm \tag{49}$$

La energía cinética $T$ es, por definición:

$$T = \int_{m_0}^{m} dW = m - m_0 \tag{50}$$

Con lo que se aprecia que $m_0$ es la energía en reposo. No es que la masa se convierta en energía; es que es lo mismo. No es necesario recordar la "explosión" de aplicaciones de este resultado, escrito en unidades convencionales como $E_0 = m_0c^2$.

Si la energía $E$ y la masa $m$ son lo mismo, de ahora en adelante utilizaremos la nomenclatura habitual, denotando con $E$ la masa en movimiento (lo que llamábamos $m$) y con $m$ la masa en reposo (lo que llamábamos $m_0$). Así:

$$E = m\gamma \tag{51}$$

es decir:

$$E^2 = \frac{m^2}{1 - v^2} \tag{52}$$

o bien:

$$E^2 - E^2v^2 = m^2 \tag{53}$$

o bien:

$$E^2 = m^2 + p^2 \tag{54}$$

siendo $p = Ev$ el momento. Es ésta una importante fórmula relativista.

# 10 TENSORES

El álgebra tensorial ha sido de decisiva importancia en la Física Clásica. La razón es que proporciona unas fórmulas que son independientes de la "postura" del observador, es decir, invariantes frente a los giros de coordenadas. Al producirse un giro en el sistema de coordenadas, las componentes de un vector, por ejemplo, cambian de una determinada manera. En una ecuación vectorial, al girar los ejes, los dos miembros de la ecuación cambian numéricamente, pero lo hacen los dos de la misma manera.

En relatividad precisamos un tratamiento tensorial para que las fórmulas adquieran ese valor absoluto, invariantes frente a los giros, en este caso a los giros en el espacio de cuatro dimensiones de Minkowski. En este espacio hay giros puramente tridimensionales y hay giros que involucran el espacio-tiempo. De hecho, ya obtuvimos las transformaciones de Lorentz como giros en el espacio de Minkowski. Ahora un giro espacio-temporal equivale a considerar un nuevo observador inercial. Si hacemos que todas las magnitudes sean cuadri-tensores y todas las fórmulas cuadri-tensoriales, habremos conseguido una formulación de la Física válida para todos los observadores inerciales.

Llamando $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ tendremos el radio vector en este espacio, $x^\alpha$. Estas coordenadas se transformarán en un cambio de sistema de referencia, según las transformaciones de Lorentz:

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x'^\beta \tag{55}$$

donde $\Lambda$ es la matriz de Lorentz. Por ejemplo, en el caso particular ya visto de que el cambio involucre solo a los ejes $X$ y $t$ es:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{56}$$

Las fórmulas de transformación inversas se escriben:

$$x'^\alpha = \Lambda_\beta{}^\alpha x^\beta \tag{57}$$

donde $\Lambda$ son las componentes de $\Lambda^{-1}$, matriz inversa de $\Lambda$. Así, en el caso particular cnsiderado, las componentes de la matris $\Lambda^{-1}$ son:

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{58}$$

que se interpreta fácilmente: Si O se mueve con velocidad $v$ con respecto a O', entonces O' se mueve con velocidad $-v$ con respecto a O.

Estrictamente $\Lambda$ no es una matriz ortogonal, ni representa un giro. Eso sería verdad si la coordenada temporal fuera $it$. Tampoco nuestras coordenadas son estrictamente cartesianas, aunque el significado es equivalente. El elemento de arco adopta la forma:

$$ds^2 = -d\tau^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{59}$$

Es preferible emplear coordenadas no cartesianas y prescindir de una coordenada temporal compleja.

Como es usual, llamamos "escalares" o "tensores de orden cero" a las magnitudes con un solo componente que permanecen invariantes frenta a los giros, es decir, magnitudes que son invariantes relativistas. El primer ejemplo es el elemento de arco, ya que sabemos que el tiempo propio es invariante relativista.

Hay vectores, (o tensores de orden 1) contravariantes y covariantes. Un vector contravariante, $V^\alpha$ es el conjunto de cuatro funciones que en una transformación relativista se transforman de igual forma que el radio vector de posición, es decir, según la ley:

$$V^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta V'^\beta \tag{60}$$

mientras que un vector covariante, $U_\alpha$, lo hace según la ley:

$$U_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta U'_\beta \tag{61}$$

con la matriz inversa.

El "producto escalar" de un vector covariante por uno contravariante es escalar, es decir, invariante relativista. En efecto, el producto escalar se define como $U_\alpha V^\alpha$ (sumando con respecto a los subíndices repetidos) y es invariante pues:

$$U_\alpha V^\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta U'_\beta \Lambda^\alpha{}_\gamma V'^\gamma = U'_\beta V'^\beta \tag{62}$$

pues evidentemente:

$$\Lambda_\alpha{}^\beta \Lambda^\alpha{}_\gamma = \delta^\beta_\gamma \tag{63}$$

por ser una matriz inversa de la otra.

Creemos innecesario definir todas las operaciones tensoriales y demostrar que el resultado de estas operaciones es un auténtico tensor. Nos limitamos a las propiedades que diferencian entre covariancia y contravariancia, por ser novedosas con respecto a la teoría de los tensores cartesianos rectangulares.

A cualquier vector contravariante $V^\beta$ le corresponde el vector contravariante $V_\alpha$ de componentes:

$$V_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\beta \tag{64}$$

donde $\eta_{\alpha\beta}$ tiene por componentes:

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{65}$$

Es fácil demostrar que el vector así obtenido es un auténtico vector covariante (para ello hay que tener en cuenta que $\eta$ es igual a su inversa).

Dado un vector covariante $V_\alpha$, podemos obtener un vector contravariante mediante

$$V^\alpha = \eta^{\alpha\beta} V_\beta \tag{66}$$

donde las componentes de $\eta^{\alpha\beta}$ son las mismas que las de $\eta_{\alpha\beta}$.

Se ve que la operación de subir o bajar índices no hace otra cosa que cambiar de signo la componente cero de un vector, ya sea covariante o contravariante, por lo que parece excesivamente formalista y no proporciona vectores con distinto significado físico. Pero su introducción es ahora conveniente como preparación al tratamiento tensorial de la Relatividad General.

Un ejemplo de vector contravariante es el vector de posición, $x^\alpha$. Un ejemplo de vector covariante es el gradiente de un escalar $\partial e/\partial x^\alpha$ pues

$$\frac{\partial e}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial e}{\partial x'^\beta} = \Lambda_\alpha{}^\beta \frac{\partial e}{\partial x'^\beta} \tag{67}$$

pues evidentemente, $e$, ha de ser un escalar, es decir, un invariante relativista, es decir, un tensor de orden cero, de forma que $e = e'$.

La divergencia de un vector contravariante $\partial V^\alpha / \partial x^\alpha$ es un auténtico escalar, tensor de orden cero, invariante relativista.

Suelen reservarse los índices latinos, $i$, $j$, $k$...para denotar componentes puramente espaciales, y los índices griegos $\alpha$, $\beta$... para denotar cualquier tipo de componentes, temporales-espaciales.

Los tensores de orden superior se definen de igual forma. Así el tensor de tercer orden contravariante-covariante-covariante, $\tau$ es el conjunto de $4^3$, funciones dispuestas en forma de matriz cúbica, que en una transformación relativista se transforma según:

$$\tau^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = \Lambda^{\gamma}{}_{\delta} \Lambda_{\alpha}{}^{\epsilon} \Lambda_{\beta}{}^{\omega} \tau'^{\delta}{}_{\epsilon\omega} \tag{68}$$

La igualdad y la suma de tensores solo puede hacerse con tensores con la misma naturaleza ordenada de covariancia y contravariancia.

La contracción consiste en igualar dos subíndices contiguos, uno contravariante y otro covariante, y sumar con respecto al subíndice repetido, como es usual. El resultado es un auténtico tensor de un orden $n - 2$, si $n$ era el orden del tensor original. El producto interno es el resultado de un producto externo más una contracción. El producto externo se define como habitualmente. Así el producto de un tensor de orden 3 y tensor de orden 2 es un tensor de orden 5 y el producto interno de estos dos tensores es un tensor de orden $3 + 2 - 2 = 3$.

Ejemplo muy interesante de tensor de segundo orden covariante-covariante es el tensor $\eta$ pues es fácil comprobar que

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha}{}^{\gamma} \Lambda_{\beta}{}^{\delta} \eta'_{\gamma\delta} \tag{69}$$

Es decir, que aunque se definió por sus componentes numéricos, éstos no cambian en una transformación relativista. Recibe el nombre de tensor de Minkowski. Con él podemos bajar y subir índices a los tensores. Por ejemplo

$$\tau_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} = \eta_{\alpha\delta} \tau^{\delta\beta}{}_{\gamma} \tag{70}$$

baja un índice, mientras que, por ejemplo

$$V^\alpha = \eta^{\alpha\beta} V_\beta \tag{71}$$

sube índices. ¿Quién es $\eta^{\alpha\beta}$?. Es el mismo $\eta$ al que el mismo $\eta$ a subido los dos subíndices. También:

$$\eta^{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma} \tag{72}$$

siendo $\delta$ el tensor unidad. Se comprueba inmediatamente que el bajar el primer índice a un tensor de segundo orden cambia el signo de la primera fila. Al bajar el segundo índice cambia el signo de la primera columna. Lo mismo puede decirse de subir índices, pues numéricamente $\eta^{\alpha\beta}$ y $\eta_{\alpha\beta}$ son iguales. Obsérvese que la operación de subir o bajar índices es un producto escalar de $\eta$ por el tensor que sufre la operación.

$\eta$ y $\delta$ tienen el mismo significado físico ya que $\delta$ puede obtenerse o bien bajando un índice a $\eta_{\alpha\beta}$ o subiendo uno a $\eta_{\alpha\beta}$.

# 11 ALGUNAS MAGNITUDES FISICAS

Para que las ecuaciones de la Física sean relaciones entre tensores debemos emplear exclusivamente magnitudes que sean auténticos tensores, esto es, que cumplan con las leyes correspondientes de transformación frente a los cambios de observador.

Escalares, es decir, tensores de orden cero, es decir, invariantes relativistas, son el tiempo propio, $\tau$, o la masa (se entiende que en reposo, si no se especifica otra cosa).

Ya hemos visto que el radio vector de posición, $x^\alpha$ es un auténtico vector contravariante. Podemos definir cualquier otra magnitud física si en su definición utilizamos operaciones tensoriales entre tensores. Así definimos la velocidad de un móvil como

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \tag{73}$$

Su componente cero será:

$$v^0 = \frac{dt}{d\tau} = \gamma \tag{74}$$

y sus componentes espaciales:

$$v^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dx^i}{dt} \tag{75}$$

es decir, que sus componentes espaciales son las componentes tri-dimensionales "bastardas" de la velocidad, aunque corregidas estando multiplicadas por el factor $\gamma$, y su componente cero (o "temporal") es $\gamma$.

El módulo de la velocidad será

$$v^2 = v^\alpha v_\alpha = -\gamma^2 + \gamma^2 v^2 = -1 \tag{76}$$

Podemos definir la cuadri-fuerza como:

$$F^\alpha = m\frac{dv^\alpha}{d\tau} \tag{77}$$

siendo $m$ la masa en reposo (si no la hubiéramos denotado con $E$).

Y definimos el cuadri-momento o simplemente momento, $p^\alpha$, como:

$$p^\alpha = mv^\alpha \tag{78}$$

cuyas componentes espaciales son $p^i = m\gamma dx^i/dt$ y puesto que $m\gamma$ no es otra cosa que la masa en movimiento, es decir, la masa, estas componentes espaciales coinciden con el momento tridimensional bastardo. En cambio, la componente cero es $p^0 = \gamma m = E$, la energía. Por eso a veces al momento se le denomina tetra-vector impulso-energía, aunque este nombre no es muy apropiado por las razones que veremos.

Ahora también podremos escribir:

$$F^\alpha = \frac{dp^\alpha}{d\tau} \tag{79}$$

# 12 ELECTROMAGNETISMO EN RELATIVIDAD RESTRINGIDA

Recordemos la expresión clásica de cuatro de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \tag{80}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi\vec{j} \tag{81}$$

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \tag{82}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{83}$$

donde por ser ecuaciones sobradamente conocidas no es preciso repetir el significado de los símbolos de las magnitudes físicas. Observemos que, si se define el tensor antisimétrico, llamado tensor de Faraday,

$$F^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{84}$$

y el tetravector "corriente eléctrica"

$$J^\alpha = [\rho, j_1, j_2, j_3] \tag{85}$$

las dos primeras ecuaciones de Maxwell pueden escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -4\pi J^\beta \tag{86}$$

No queda probado que ésta sea una ecuación covariante puesto que el tensor $F^{\alpha\beta}$ fue definido por sus componentes, y lo mismo podemos decir de $J^\alpha$. Ambas magnitudes son auténticos tensores, aunque no lo demostremos, por brevedad.

Si lo son, resulta un interesante ejercicio recomendado encontrar las fórmulas de transformación de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que, en el caso clásico no relativista, con $\gamma = 1$, resultan ser:

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}' \tag{87}$$

$$\vec{B} = \vec{B}' + \vec{v} \times \vec{E}' \tag{88}$$

Si la carga no se mueve en nuestro sistema será $\vec{B}' = 0$, pero un observador que se mueva con $\vec{v}$ con respecto a nosotros, observará un campo magnético igual a $\vec{v} \times \vec{E}'$, lo que prueba que el campo magnético es un efector relativista del campo eléctrico; y viceversa; ¡incluso en el caso clsico!. Las ecuaciones tercera y cuarta de Maxwell se podrían englobar en la ecuación covariante:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} F_{\alpha\beta} = 0 \tag{89}$$

donde $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, aunque esta expresión incluye la posibilidad de que dos o tres índices sean iguales, pues se obtienen entonces resultados obvios. Así si $\alpha = \beta$:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F_{\alpha\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} F_{\alpha\alpha} = 0 \tag{90}$$

evidentemente cierto pues al ser (como es fácil demostrar) también $F_{\alpha\beta}$ antisimétrico, será $F_{\alpha\alpha} = 0$, y $F_{\alpha\gamma} = -F_{\gamma\alpha}$.

# 13 RELATIVIDAD GENERAL

Recordemos el Principio de Relatividad de Galileo:

"Las leyes de la Mecánica son equivalentes para todo observador inercial".

El Principio de la Relatividad Restringida eliminó una palabra superflua en esta frase; la palabra "Mecánica" restaba generalidad al principio:

"Las leyes son equivalentes para todo observador inercial".

Pero hay todavía una palabra aparentemente superflua que resta generalidad y que, al ser suprimida, obtenemos el Principio de Relatividad General:

"Las leyes son equivalentes para todo observador".

Aparece entonces un Principio filosóficamente muy atractivo que constituye la grandeza de la Teoría de la Relatividad. Los observadores son humanos, los observadores son imaginarios, los observadores son algo aportado por el físico; no por la naturaleza. ¿Cómo van a depender las leyes de los observadores, si los observadores no existen? . Si las leyes están escritas de forma correcta su expresión no puede contener ninguna alusión al etéreo observador. Hay que desubjetivizar las leyes.

La tachadura de la palabra inercial es elegante y atractiva. Pero es paradógica. Aunque si salvamos las paradojas podremos obtener notorias conclusiones a partir de un Principio aparentemente inocente, casi un juego de palabras. Es un Principio que ilustra la potencia de lo sencillo.

Las leyes, aparentemente, no pueden ser equivalentes para los observadores inerciales, porque ellos aprecian fuerzas de inercia. Ellos pueden conocer su aceleración “absoluta”, su estado de movimiento, sin más que analizar las fuerzas de inercia que aprecian. Esta es la paradoja que tenemos que solventar antes de seguir adelante.

Para ello, recordemos el gran parecido de las fuerzas de inercia y la gravedad. Ambas producen en los cuerpos una acción que no depende de la masa, ni de la carga, ni de la forma, ni de... ni de nada. Pues bien, digamos ahora que estas fuerzas son de igual naturaleza. Esta identificación constituye el llamado “Principio de Equivalencia” de la Relatividad General. Esta identificación está basada en la imposibilidad de distinción entre masa inercial y masa gravitatoria por todos los experimentos que a tal fin se han llevado a cabo. La gravedad y las fuerzas de inercia son equivalentes, pertenecen a la misma familia.

Pero, recordemos, hay una diferencia esencial entre la una y las otras. La gravedad puede anularse en solo un punto del espacio-tiempo mediante un cambio de sistema de referencia. En cambio, se pueden anular las fuerzas de inercia en todo el espacio tiempo con un único cambio de sistema de referencia.

¿Cómo anular la gravedad, el viejo deseo de la humanidad?. Es sencillo en un punto: Por ejemplo, yo puedo eliminar la gravedad aquí, simplemente quitando los pies del suelo. La sensación placentera de ingravidez solo durará una fracción de segundo (por culpa de que alguien ha puesto ahí un suelo) pero será efectiva. El vecino del ascensor no pesa sobre el ascensor (su sistema natural de referencia) cuando un físico teórico desaprensivo corta el cable. Al observador que anula la gravedad, adoptando un sistema de referecia especial le llamaremos “observador cayente”.

En cualquier punto del espacio-tiempo hay un observador cayente. Pero, y esta es la gran diferencia con la anulación de las fuerzas de inercia, el observador cayente en un punto y el observador cayente en otro punto próximo no son la misma persona.

Para el observador cayente no hay gravedad. Por tanto, para él es válida la teoría de la Relatividad Restringida. Si queremos conocer las leyes para nosotros, hombres graves, no tendríamos más que preguntar a este observador cayente, que goza de un espacio minkowskiano, y deshacer el cambio de sistema de referencia.

Hay en todo esto una gran semejanza con la geometría de los espacios curvos muy aprovechable. Gauss, Lobachevski, Riemann y otros desarrollaron la geometría no euclídea, de lo que se benefició la rápida formulación matemática de la Relatividad. Uno de los puntos claves, puesto ya de manifiesto por Gauss, es que en un punto de un espacio curvo, se puede “diagonalizar”, es decir, se puede “euclideizar”, con un cambio de coordenadas. Cuando el espacio es “plano” ese cambio de coordenadas “diagonaliza” todo el espacio, la euclideización es completa porque el espacio es euclídeo. En cambio, cuando el espacio es curvo, el cambio que diagonaliza en un punto es diferente del que diagonaliza en otro. Un espacio curvo puede hacerse plano solo en un punto y su microentorno.

Por ejemplo, en dos dimensiones, un plano sería un espacio plano. Un cilindro también pues una simple operación (desenrollar) nos proporciona el plano. En cambio, una esfera sería un espacio curvo pues podemos "aplanar" pero solo en un punto y su microentorno.

En la Relatividad, podemos decir que el espacio de cuatro dimensiones (espacio-tiempo) es curvo cuando hay fuerzas de inercia y gravedad, y que es plano cuando solo hay fuerzas de inercia. La gravedad queda reducida a geometría.

Si antes decíamos que un cuerpo crea gravedad en su entorno y que en el seno de un campo gravitatorio un móvil tiene una trayectoria curva, ahora diremos que un cuerpo curva el espacio-tiempo y que el móvil se desplaza "rectilíneamente" pero en espacio curvo (más precisamente: se desplaza por una geodésica de un espacio curvo).

En cambio las fuerzas de inercia corresponden a un espacio plano, sin curvatura. En ambos casos se cumple el Principio de Juan de Celaya (o de Galileo, o Primero de Newton): Un móvil sobre el que no se ejerce ninguna fuerza (excluyendo las de inercia y gravedad que han pasado a ser propiedades geométricas) sigue una trayectoria rectilínea en el espacio-tiempo.

En cualquier punto del espacio-tiempo es posible elegir un sistema inercial LOCAL, de tal forma que en una región muy próxima a este punto, las leyes de la naturaleza adquieran la misma expresión que en los sistemas coordenados cartesianos no acelerados y carentes de gravitación. Este es el otro gran punto de partida de la Relatividad General.

Las ecuaciones de la Física deben ser relaciones tensoriales en este espacio-tiempo curvo. De esta forma, conseguiremos que las leyes sean independientes del observador.

# 14 TRAYECTORIAS DE PARTÍCULAS

El observador cayente observa una trayectoria rectilínea en el espacio-tiempo (trayectoria rectilínea recorrida con velocidad uniforme) en el caso de que no haya fuerzas. Y nosotros, ¿qué observamos?. Para saberlo no tenemos más que hacer un cambio de coordenadas. Para el observador cayente, con coordenadas $\psi^\alpha$ se cumple:

$$\frac{d^2\psi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \tag{91}$$

donde el tiempo propio:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\psi^\alpha d\psi^\beta \tag{92}$$

hace las veces de parámetro de la curva $\psi^\alpha(\tau)$ de la trayectoria. Nosotros estamos en un sistema no cayente de coordenadas $x^\mu$ existiendo la relación de cambio de coordenadas $\psi^\alpha(x^\mu)$. Con este cambio:

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{93}$$

Multipliquemos por $\partial x^\lambda / \partial \psi^\alpha$ y tengamos en cuenta

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \psi^\alpha}\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu \tag{94}$$

para obtener el resultado apetecido

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{95}$$

donde hemos introducido la "conexión afín"

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \psi^\alpha} \tag{96}$$

(atención a la complejidad camuflada por el convenio de los subíndices repetidos). La conexión afín no es un tensor y es simétrica con respecto a sus dos índices inferiores.

Esta es la ecuación diferencial de la trayectoria, que podremos integrar si conocemos las fórmulas de transformación $x^\lambda(\psi^\alpha)$, con las que podremos calcular la conexión afín $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$.

Si la partícula es un fotón la ecuación diferencial pierde sentido, pues $d\tau = 0$, pero no importa pues $\tau$ juega matemáticamente el papel de parámetro de la curva. Podemos elegir cualquier otro, por ejemplo $\sigma = \psi^0$, puesto que también $d^2\psi^2/d\sigma^2 = 0$ y la ecuación de la trayectoria sería la misma, simplemente cambiando $\tau$ por $\sigma$. Al eliminar $\tau$ ( o bien $\sigma$) obtendremos $x^i(x^0)$ que es lo que queremos.

Geométricamente, la trayectoria de una partícula coincide con la fórmula de una "geodésica" lo que decimos sin demostración. Una geodésica se define como una curva que, pasando por dos puntos inicial y final dados, tiene la distancia más corta. Así pues, la trayectoria de una partícula no sometida a ninguna fuerza (admitiendo que la gravedad no lo es) es una geodésica en el espacio-tiempo.

# 15 EL TENSOR MÉTRICO

Transformemos el tiempo propio:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu \frac{\partial \psi^\beta}{\partial x^\nu}dx^\nu = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{97}$$

donde queda definido el "tensor métrico" $g_{\mu\nu}$ que, como veremos más adelante, es un auténtico tensor:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi^\beta}{\partial x^\nu} \tag{98}$$

El tensor métrico decide las propiedades métricas del espacio-tiempo, y tiene, como veremos, un papel fundamental en la teoría.

Para el observador cayente, las fórmulas de transformación son $x^\mu = \psi^\mu$. Entonces se obtiene $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ y la conexión afín, $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$, es nula, en sus $4^3$ componentes.

# 16 RELACIÓN ENTRE EL TENSOR MÉTRICO Y LA CONEXIÓN AFÍN

Veamos que $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ puede expresarse como función de las derivadas de $g_{\alpha\beta}$, de igual modo que , clásicamente, la fuerza gravitatoria se puede expresar como función de las variaciones del potencial gravitatorio.

En la fórmula de definición del tensor métrico, derivemos con respecto a $x^\lambda$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \psi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \psi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \psi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \tag{99}$$

Mediante la fórmula de definición de la conexión afín, multiplicando por $\partial\psi^\beta/\partial x^\lambda$, obtenemos:

$$\frac{\partial \psi^\beta}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \psi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{100}$$

con lo cual, en la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \left( \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\epsilon} \Gamma^\epsilon_{\lambda\mu} \right) \frac{\partial \psi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \psi^\beta}{\partial x^\omega} \Gamma^\omega_{\lambda\nu} \right) \eta_{\alpha\beta} \\ &= g_{\epsilon\nu} \Gamma^\epsilon_{\lambda\mu} + g_{\mu\omega} \Gamma^\omega_{\lambda\nu} = \Gamma^\epsilon_{\lambda\mu} g_{\epsilon\nu} + \Gamma^\epsilon_{\lambda\nu} g_{\epsilon\mu} \end{aligned} \tag{101}$$

Hagamos ahora la operación:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \Gamma^\epsilon_{\lambda\mu} g_{\epsilon\nu} + \Gamma^\epsilon_{\lambda\nu} g_{\epsilon\mu} + \Gamma^\epsilon_{\mu\lambda} g_{\epsilon\lambda} - \Gamma^\epsilon_{\nu\mu} g_{\epsilon\lambda} - \Gamma^\epsilon_{\nu\lambda} g_{\epsilon\mu} = 2\Gamma^\epsilon_{\mu\lambda} g_{\epsilon\nu} \tag{102}$$

teniendo en cuenta la simetría con respecto a los índices inferiores de $\Gamma$ como se deduce de su propia definición. LLamando $g^{\nu\rho}$ a la matriz inversa de $g_{\alpha\beta}$ de tal forma que

$$g_{\epsilon\nu} g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\epsilon \tag{103}$$

Despejemos $\Gamma^\epsilon_{\lambda\mu}$ :

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\right) g^{\nu\rho} \tag{104}$$

es decir, $\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}$ o conexión afín, o símbolos de Christoffel, pueden obtenerse con las derivadas espacio-temporales del tensor métrico (asimilable intuitivamente a un "potencial").

# 17 EL LÍMITE NEWTONIANO

Las ecuaciones precedentes coinciden con las clásicas cuando se consideran situaciones clásicas. Las ecuaciones de la trayectoria pueden aplicarse al caso de un cuerpo que se mueve con velocidad pequeña. Entonces podemos despreciar $dx^i/d\tau$ frente a $dx^0/d\tau$, de tal forma que:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{105}$$

Supongamos además que el campo gravitatorio (es decir, el tensor métrico) es estacionario, $\partial/\partial x^0 = 0$,

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{00} &= \tfrac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\tfrac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} + \tfrac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} - \tfrac{\partial g_{00}}{\partial x^{\lambda}}\right) = -\tfrac{1}{2}g^{\mu\lambda}\tfrac{\partial g_{00}}{\partial x^{\lambda}} \\ &= -\tfrac{1}{2}g^{\mu 0}\tfrac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \tfrac{1}{2}g^{\mu i}\tfrac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = 0 - \tfrac{1}{2}g^{\mu i}\left(\nabla g_{00}\right)_i \end{aligned} \tag{106}$$

Si el campo gravitatorio no es muy fuerte, el tensor métrico diferirá poco del tensor de Minkowski:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta} \tag{107}$$

siendo $\epsilon_{\alpha\beta}$ muy pequeño. Será entonces $g^{\mu i} = \eta^{\mu i}$, aproximadamente, es decir:

$$\Gamma^{\mu}_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu i}\left(\nabla g_{00}\right)_i = -\frac{1}{2}\eta^{\mu i}\left(\nabla\epsilon_{00}\right)_i = -\frac{1}{2}\left(\nabla\epsilon_{00}\right)_{\mu} \tag{108}$$

con lo que la ecuación de las geodésicas:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla\epsilon_{00}\right)_{\mu}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{109}$$

donde hemos considerado $d^2t/d\tau^2 = 0$ porque la ecuación para $\mu = 0$ nos dice que esto es precisamente así. Con lenguaje tridimensional:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla\epsilon_{00} \tag{110}$$

que coincide con la ecuación clásica:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi \tag{111}$$

siendo el potencial $\Phi$ tal que:

$$\epsilon_{00} = -2\Phi + constante. \tag{112}$$

Si hacemos que $\Phi = 0$ en el infinito, y consideramos que en el infinito $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, es decir $\epsilon_{00} = 0$, tendremos:

$$\epsilon_{00} = -2\Phi \tag{113}$$

$$g_{00} = -1 - 2\Phi \tag{114}$$

En este caso, como se ve, $g_{\alpha\beta}$ sustituye o respresenta al potencial y los símbolos de conexión afín (o smbolos de Christoffel) a la fuerza. El potencial $\Phi$ en coordenadas geometrizadas es adimensional y puede calcularse su valor en la superficie de algunos cuerpos celestes (La Tierra, $10^{-9}$; Sol, $10^{-6}$; enana blanca, $10^{-4}$).

# 18 DESPLAZAMIENTO AL ROJO GRAVITATORIO

Einstein propuso tres pruebas como posible comprobación de la Relatividad General. Una de ellas fue la del desplazamiento al rojo de la luz emitida por un foco en el seno de un campo gravitatorio. (Hablaremos posteriormente de las otras dos). Veámoslo considerando cómo el campo gravitatorio afecta a la marcha de los relojes. Basta comparar $\psi_0$, medido por el observador cayente, con $x_0$ medido en el sistema que consideramos en reposo. Sea $d\tau$ el intervalo propio entre dos señales consecutivas del reloj:

$$d\tau = \left(-\eta_{\alpha\beta} d\psi^\alpha d\psi^\beta\right)^{1/2} \tag{115}$$

Recurrimos al observador cayente porque, de acuerdo con el Principio de Equivalencia, este observador nos asegura que el campo gravitatorio no afecta en absoluto a la marcha de su reloj. Hacemos entonces la correspondiente transformación a nuestro sistema de referencia:

$$d\tau = \left(-\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu\frac{\partial\psi^\beta}{\partial x^\nu}dx^\nu\right)^{1/2} = \left(-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\right)^{1/2} \tag{116}$$

Esta fórmula, en general, proporciona la relación entre $d\tau$, prometido por el fabricante, y el tiempo de nuestro reloj $dx^0$ correspondiente a $d\tau$. De forma más concreta:

$$\frac{d\tau}{dt} = \left( -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{1/2} \tag{117}$$

Si el reloj metido en ese campo gravitatorio, está en reposo con respecto a nosotros, observadores en el infinito, no sometidos al campo graviatorio, entonces $\frac{dx^\mu}{dt} = 0$, salvo si $\mu = 0$, luego:

$$\frac{d\tau}{dt} = -g_{00}^{1/2} \tag{118}$$

Si el campo graviatorio, aunque fuerte, no es comparable a 1, podremos aprovechar una aproximación anterior:

$$\frac{d\tau}{dt} = -g_{00}^{1/2} = \sqrt{1 + 2\Phi} \cong 1 + \Phi \tag{119}$$

Por supuesto, nosotros hemos de estar fuera, no sometidos a ningún campo graviatatorio, es decir, en una región donde podamos admitir $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, suficientemente lejos, La Tierra, con su débil campo gravitatorio, no es mal sitio. Como $\Phi < 0$, será $dt > d\tau$, los segundos observados son demasiado largos. Si se trata de una frecuencia de emisión con $\nu_0$ en el infinito, es decir, en La Tierra, observamos $\nu$, tal que:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{d\tau}{dt} = 1 + \Phi \tag{120}$$

y el desplazamiento al rojo vendrá dado por la fórmula:

$$z = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} \approx \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = 1 - 1 - \Phi = \frac{M}{R} \tag{121}$$

La última igualdad supone que el emisor está en la superficie de la estrella de masa $M$ y radio $R$ (Con unidades convencionales hubiéramos obtenido $GM/Rc^2$). En el Sol, $z = 2 \times 10^{-6}$, y para una luz amarilla de 500 nm, se obtiene $\Delta\lambda = 10^{-3} nm$. Esto es difícil de medir. Una velocidad de alejamiento de sólo $2 \times 10^{-6}$, (sólo 0.6 km/s) produce el mismo desplazamiento al rojo por efecto Doppler. Pero el efecto es mucho más importante en el caso de las enanas blancas. Se necesita que la enana blanca sea compañera de otra estrella, para poder determinar la masa de la enana blanca, el desplazamiento Doppler por efecto de alejamiento del sistema doble y el desplazamiento Doppler debido al movimiento orbital. Sirio A tiene una compaera, Sirio B. De igual forma 40 Eridani A tiene una compañera, 40 Eridani B, que es enana blanca. Para estimar $\Phi$ consideremos aproximadamente que una enana blanca tiene la masa del Sol y el radio de La Tierra, de forma que $z \approx 10^{-4}$ perfectamente medible, incluso en los tiempos de Einstein. La predicción y las observaciones resultaron en clamoroso acuerdo.

Existe otra interpretación popular (y cálculo) de este efecto, apoyándose en parte en la Mecánica Cuántica. El fotón, al salir del campo gravitatorio, ha de perder una energía, como lo hacen los proyectiles, dada por $Mm/R$, siendo $m$ la masa del proyectil, en este caso del fotón $h\nu_0$, luego

$$h\nu_0 - h\nu = \frac{Mm}{R} \tag{122}$$

con lo cual:

$$z = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{h\nu_0 - h\nu}{h\nu_0} = \frac{Mh\nu_0}{Rh\nu_0} = \frac{M}{R} \tag{123}$$

como habíamos obtenido antes. Si el resultado es correcto, algo tendrá de cierto, aunque el argumento se repudia porque la Relatividad se desarrolló, y se puede desarrollar, sin el concurso de la Mecánica Cuántica. El resultado también se puede invertir y constituir una demostración de la fórmula cuántica $E = h\nu$. En todo caso hay aquí una conexión interesante entre la Relatividad y la Mecánica Cuántica.

# 19 EL PRINCIPIO DE COVARIANCIA

Por el Principio de Equivalencia sabemos que siempre hay un sistema de referencia sin gravedad, para el que son ciertas las leyes de la Relatividad Restringida. Para conocer las leyes en un sistema cualquiera basta con realizar una transformación de coordenadas. Ni siquiera tendremos necesidad de ello si nos limitamos a expresar las leyes de la Naturaleza como expresiones tensoriales, de forma que sean válidas para cualquier observador. Así pues, nuestras leyes han de estar escritas en forma "covariante", es decir, como expresiones tensoriales en espacios curvos. Esto constituye el Principio de Covariancia. Esta restricción nos va a permitir encontrar la forma más general de las ecuaciones de la Física. Para que aceptemos una igualdad matemática como expresión de una ley física es preciso que: a) la igualdad sea covariante frente a cualquier transformación ($x^\mu \to x'^\nu$) y b) La igualdad sea correcta para un sistema inercial, es decir, ha de ser generalización de la correspondiente ley de la Relatividad Restringida. Otra ventaja del uso de tensores es que si nos limitamos a utilizar operaciones tensoriales, que de auténticos tensores nos proporcionen auténticos tensores, podemos aprovechar el álgebra tensorial para deducir nuevas propiedades de la Naturaleza. Eso sí, ahora las fórmulas de transformación no se limitan a giros, como en el espacio de Minkowski y, por tanto, pueden ser mucho más complejas que las de Lorentz. Es preciso pues, hacer una brevísima introducción del álgebra tensorial en espacios curvos.

# 20 TENSORES

Un tensor de orden cero, o escalar es, como siempre, una función de $x^\mu$ que en cualquier transformación de coordenadas permanece invariante. El mejor ejemplo es $d\tau$, cuya invariancia determina la métrica. Un vector contravariante es un conjunto de 4 funciones de $x^\mu$ que en un cambio de coordenadas se transforma según:

$$V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} V'^\nu \tag{124}$$

Las leyes de la derivación indican que:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \tag{125}$$

por lo que un ejemplo de vector contravariante es el vector diferencial de posición $dx^\mu$. En cambio, ahora no podemos decir que el vector de posición $x^\mu$ sea un vector. Un vector covariante se transforma según:

$$U_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} U'_\nu \tag{126}$$

El gradiente de un escalar, es un vector covariante pues:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x'^\nu} \tag{127}$$

Los tensores de orden $n$ pueden ser covariantes, contravariantes o mixtos. Por ejemplo, el tensor de orden 3 contravariante, covariante, contravariante, se transforma según:

$$\tau^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \tau'^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho} \tag{128}$$

El tensor métrico es un tensor covariante, covariante pues:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta} \tfrac{\partial \psi^\alpha}{\partial x^\mu} \tfrac{\partial \psi^\beta}{\partial x^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \tfrac{\partial \psi^\alpha}{\partial x'^\rho} \tfrac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \tfrac{\partial \psi^\beta}{\partial x'^\epsilon} \tfrac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\nu} \\ &= \tfrac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \tfrac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\nu} \left( \eta_{\alpha\beta} \tfrac{\partial \psi^\alpha}{\partial x'^\rho} \tfrac{\partial \psi^\beta}{\partial x'^\epsilon} \right) = \tfrac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \tfrac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\nu} g'_{\rho\epsilon} \end{aligned} \tag{129}$$

Su inverso (en el sentido matricial) que se denomina $g^{\mu\nu}$ es también un auténtico tensor doblemente contravariante. Igualmente es un tensor la delta de Kroenecker, $\delta^\alpha_\beta$. Hemos de desarrollar un álgebra en el que se opere con tensores y el resultado de la operación sea, a su vez, un tensor. Pero esta álgebra difiere poco del álgebra de tensores cartesianos rectangulares y solo prestaremos atención a las operaciones novedosas. Iguales son las operaciones de suma, resta, producto externo y producto interno. Este último es un producto externo y una contracción. La contracción no tiene , en general, que referirse a índices contiguos, aunque sí la contracción del producto interno. La operación de bajar índices es ahora (por ejemplo):

$$S_{\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} = g_{\mu\nu} S'^{\mu\rho}{}_{\sigma} \tag{130}$$

y la de subir índices (por ejemplo):

$$R^{\mu\rho}{}_{\sigma} = g^{\mu\nu} R'_{\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} \qquad (131)$$

Podemos subir y bajar índices al tensor métrico, y puesto que

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \qquad (132)$$

podemos interpretar a $\delta^{\mu}_{\nu}$ como el resultado de bajar un índice a $g^{\mu\nu}$ o de subírselo a $g_{\mu\nu}$. Desde el punto de vista matemático un índice contravariante o covariante son muy distintos porque la regla de transformación les afecta de forma muy diferente, pero desde el punto de vista físico son equivalentes puesto que la operación se produce con un producto interno por $g^{\mu\nu}$ o por $g_{\mu\nu}$ que no es un tensor representativo de una magnitud física sino de las propiedades del espacio-tiempo. En cambio, la conexión afín no es un tensor, a pesar de su apariencia contravariante y doblemente covariante. Tampoco lo es la derivada de un tensor cualquiera con respecto a $x^{\alpha}$, por ejemplo, no lo es $\partial V^{\alpha}/\partial x^{\beta}$. Esto nos pone en un aprieto, pues sabido es la importancia de las derivadas temporales, gradientes, divergencias, etc. en la Física. Pero puede comprobarse fácilmente la naturaleza de tensor del definido ahora como gradiente de un vector contravariante, o usualmente llamada derivada covariante del vector contravariante:

$$V^{\mu}{}_{;\nu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\kappa} V^{\kappa} \qquad (133)$$

Igualmente podemos hallar la derivada covariante de un vector covariante mediante la definición:

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda} \qquad (134)$$

que es un auténtico tensor doblemente covariante. En general, se puede definir la derivada covariante de un tensor cualquiera, por ejemplo:

$$T^{\mu\sigma}{}_{\lambda;\rho} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} T^{\mu\sigma}{}_{\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} T^{\nu\sigma}{}_{\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} T^{\mu\nu}{}_{\lambda} - \Gamma^{\omega}_{\lambda\rho} T^{\mu\sigma}{}_{\omega} \qquad (135)$$

que es un tensor de un orden superior al del tensor al que se aplica. Es sencillo expresar y deducir las siguientes propiedades: a) La derivada covariante de una constante por un tensor es la constante por la derivada convectiva del tensor. b) La derivada covariante de una suma de tensores es la suma de sus derivadas covariantes. c) La derivada de un producto externo de dos tensores es la derivada covariante del primero multiplicada externamente por el segundo más el primero multiplicado externamente por la derivada covariante del segundo. d) La derivada covariante de un tensor contraído es la contracción de su derivada covariante.

No es muy difícil demostrar que

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \tag{136}$$

Tenía que ser así puesto que para el observador cayente es cero ($\eta_{\alpha\beta}$ es constante y $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ es nulo), y como es un auténtico tensor ha de ser nulo para todo observador. La conexión afín, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ es cero en ausencia de gravedad, por lo que la derivada covariante es efectivamente una generalización del concepto previo de derivada en Relatividad Restringida. Si en una fórmula de Relatividad Restringida aparece una derivada, en la fórmula correspondiente de Relatividad General será sustituida por la derivada covariante. En efecto, por el Principio de Equivalencia, la fórmula será correcta pues será una fórmula covariante y que es válida para el sistema cayente. Evidentemente, también habrá que sustituir $\eta_{\alpha\beta}$ por $g_{\alpha\beta}$. La divergencia de un vector es, como siempre, la contracción de su gradiente:

$$A^{\mu}{}_{;\nu} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} A^{\lambda} \tag{137}$$

e igualmente $A_{\alpha;\alpha}$.

Hay una fórmula alternativa para calcular $A^{\mu}{}_{;\mu}$:

$$A^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{g} A^{\mu}\right) \tag{138}$$

siendo:

$$g = -det\left(g_{\alpha\beta}\right) \tag{139}$$

La expresión $\sqrt{g}dx^0dx^1dx^2dx^3$ es invariante, por lo que hace las veces del volumen elemental. Se denomina rotacional de un vector a:

$$V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial V_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \tag{140}$$

# 21 MECÁNICA DE UNA PARTÍCULA

Consideremos la mecánica de una partícula. Según hemos visto,debido al Principio de Covariancia, si encontramos la fórmula correspondiente a un fenómeno tal que sea covariante y sea válida en el sistema cayente, esa será la fórmula buscada. La definición de la velocidad, vista en Relatividad Restringida:

$$v^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \tag{141}$$

es ahora un auténtico vector contravariante, puesto que lo es $dx^{\alpha}$ y $d\tau$ es un auténtico escalar. Obsérvese, sin embargo, que $dv^{\alpha}/d\tau$ no es un vector, puesto que se trata de una derivada en sentido normal; no es una derivada covariante. Hay que tener presente que $x^{\alpha}$ no es un vector, mientras que $dx^{\alpha}$ sí lo es. Todo lo contrario, $v^\alpha$ sí es un vector mientras que $dv^\alpha$ no lo es. Para expresar la ley generalización de la ley "fuerza-igual-a-masa-por-aceleración" es conveniente introducir el concepto de "derivada covariante a lo largo de una curva", $Dv^\alpha/D\tau$ como:

$$V^\mu{}_{;\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa}V^\kappa\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{DV^\mu}{D\tau} \tag{142}$$

que es un auténtico vector contravariante. De igual modo definimos, para un vector covariante:

$$\frac{DV_\mu}{D\tau} = \frac{dV_\mu}{d\tau} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\frac{dx^\nu}{d\tau}V_\lambda \tag{143}$$

y análogas definiciones para las derivadas covariantes a lo largo de una curva para un tensor cualquiera.

Definimos, entonces, la fuerza como:

$$F^\alpha = m\frac{Dv^\alpha}{D\tau} \tag{144}$$

aunque ahora, evidentemente, $F^\alpha$ no puede tener carácter gravitatorio, puesto que la gravedad se considera un efecto geométrico. Con más detalle escribimos:

$$F^\alpha = m\frac{dv^\alpha}{d\tau} + m\Gamma^\mu_{\nu\kappa}v^\nu\frac{dx^\kappa}{d\tau} \tag{145}$$

Si no existe fuerza (exceptuando, claro, la gravedad) se obtiene la generalización del Principio de Galileo (o más bien de Juan de Celaya)

$$\frac{Dv^\alpha}{D\tau} = 0 \tag{146}$$

y que con $v^\mu = dx^\mu/d\tau$, nos proporciona:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\kappa}\frac{dx\nu}{d\tau}\frac{dx^\kappa}{d\tau} = 0 \tag{147}$$

De nuevo, encontramos la ecuación de las geodésicas. Esto es bastante singular, porque anteriormente obtuvimos esta ecuación mediante el Principio de Equivalencia, mientras que ahora la hemos encontrado con el Principio de Covariancia.

# 22 ELECTROMAGNETISMO EN RELATIVIDAD GENERAL

Ahora el tensor de Faraday se define a partir del tensor de Faraday en el sistema cayente de acuerdo con la ley de transformación de tensores, e igualmente hacemos con el vector corriente. También ahora las ecuaciones de Maxwell serán las mismas, salvo que ahora la divergencia ha de sustituirse por la divergencia covariante. Tenemos una regla para calcular la divergencia covariante de un vector contravariante utilizando $g^{1/2}$. Existe una regla parecida para la divergencia de tensores:

$$\tau^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda} \tag{148}$$

con lo que la primera tanda de ecuaciones de Maxwell podría escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} F^{\mu\nu}) = -\sqrt{g} J^\nu 4\pi \tag{149}$$

Rápidamente notamos que no hemos incluido el término que contiene los símbolos de Christoffel. Ocurre que este segundo término se anula para tensores antisimétricos, pues:

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} = \Gamma^\nu_{00} F^{00} + \Gamma^\nu_{10} F^{10} + \Gamma^\nu_{01} F^{01} + ... = 0 + \Gamma^\nu_{10} F^{10} - \Gamma^\nu_{10} F^{10} + ... = 0 \tag{150}$$

La segunda tanda de las ecuaciones de Maxwell debe escribirse ahora como:

$$F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \tag{151}$$

Pero también se produce una simplificación interesante por ser $F^{\alpha\beta}$ antisimétrico. En efecto, teniendo en cuenta la regla de derivación covariante de un tensor covariante, que en este caso será:

$$F_{\beta\gamma;\alpha} = \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\rho_{\beta\alpha} F_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\gamma\alpha} F_{\beta\rho} \tag{152}$$

obtendremos

$$\begin{aligned} F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\alpha\beta;\gamma} = & \tfrac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \tfrac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \tfrac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \Gamma^\rho_{\beta\alpha} F_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\gamma\beta} F_{\rho\alpha} - \\ & \Gamma^\rho_{\gamma\alpha} F_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\gamma\alpha} F_{\beta\rho} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} F_{\gamma\rho} - \Gamma^\rho_{\beta\gamma} F_{\alpha\rho} \end{aligned} \tag{153}$$

donde vemos que, debido a la antisimetría de $F_{\alpha\beta}$, el cuarto sumando se cancela con el octavo, etc., resultando únicamente los tres primeros. Por lo tanto, la segunda tanda de las ecuaciones de Maxwell se escribe también:

$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0 \tag{154}$$

¡Exactamente como antes!. Las ecuaciones del Electromagnetismo en Relatividad General tienen, o pueden tener, la misma expresión que sus homólogas en Relatividad Restringida. La fuerza electromagnética vendrá dada por:

$$f^\alpha = q F^\alpha{}_\beta v^\beta \tag{155}$$

donde $q$ es la carga de la partícula que lleva velocidad $v^\beta$.

# 23 CURVATURA

Si el espacio no es plano hemos de expresar su curvatura con un tensor. Para hacer una buena definición del tensor de curvatura, recordamos que la curvatura de curvas y superficies viene determinadas por derivadas segundas, por lo que buscamos un tensor expresable con derivadas segundas del tensor métrico, o lo que es semejante, expresable con derivadas primeras de la conexión afín. Como $g_{\alpha\beta}$ ha de ser derivado dos veces, en general, el tensor de curvatura ha de ser un tensor de cuarto orden. Se define el tensor de curvatura o tensor de Riemann-Christoffel mediante:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \tag{156}$$

Omitimos, dado el carácter de primera introducción de este cuadernillo, las razones para esta definición y la demostración de que es un auténtico tensor. A partir de él pueden definirse otros tensores por contracción. Uno es de Ricci:

$$R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa} \tag{157}$$

y otro el llamado curvatura escalar:

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \tag{158}$$

Si el espacio es plano el tensor de curvatura se anula. Si es distinto de cero la transformación que minkowskianiza en un punto no minkowskianiza en su vecino. Esto es algo que puede demostrarse también, aunque no lo hagamos aquí. Expongamos algunas propiedades del tensor de curvatura. No se cumple la igualdad de derivadas covariantes cruzadas, sino que:

$$V_{\mu;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu} = -V_{\sigma} R^{\sigma}{}_{\mu\nu\kappa} \tag{159}$$

y para un vector contravariante:

$$V^{\mu}{}_{;\nu;\kappa} - V^{\mu}{}_{;\kappa;\nu} = V^{\sigma} R^{\mu}{}_{\sigma\nu\kappa} \tag{160}$$

Es decir, $V^{\mu}{}_{;\nu}$ no es diferencial covariante exacta, o bien, la ecuación $V^{\mu}{}_{;\nu} = 0$ no tiene solución y depende del camino seguido. Por supuesto, esto es así si estamos en un espacio realmente curvo. Hay antisimetría con respecto a los subíndices tercero y cuarto, es decir:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = -R^{\lambda}{}_{\mu\kappa\nu} \tag{161}$$

pero las propiedades de simetría del tensor curvatura se encuentran mejor mediante su expresión completamente covariante, que puede calcularse mediante:

$$
\begin{aligned}
R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \tfrac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \tfrac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \tfrac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right) \\
&\quad + g_{\eta\sigma}\left(\Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta_{\kappa\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right)
\end{aligned} \tag{162}
$$

Con esta expresión se comprueban las propiedades de
a) simetría

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\nu} \tag{163}$$

b) antisimetría

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu} \tag{164}$$

c) ciclicidad

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} = 0 \tag{165}$$

El tensor de Ricci es simétrico, como es fácilde demostrar:

$$R_{\kappa\mu} = R_{\mu\kappa} \tag{166}$$

El tensor de Ricci es el único tensor de segundo orden obtenido por contracción del tensor de curvatura. Otras contracciones o bien dan tensores equivalentes o bien dan vectores nulos. También está claro que la curvatura escalar es la única contracción del tensor de Ricci, por lo que también la curvatura escalar es la única contracción doble del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel. Otra propiedad importante en el establecimiento de las Ecuaciones del Campo, de las que luego hablaremos es:

$$\left(R^{\mu\epsilon} - \frac{1}{2} R g^{\mu\epsilon}\right)_{;\mu} = 0 \tag{167}$$

Hay muchas otras propiedades que, por brevedad, omitimos.

# 24 CAMPO DÉBIL Y ESTACIONARIO

En la ecuación que nos da el tensor de curvatura en su forma completamente contravariante, despreciemos los símbolo de Christoffel

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right) \tag{168}$$

Debido a la estacionareidad $\partial/\partial x^0$, luego:

$$R_{0000} = 0 \tag{169}$$

$$R_{000i} = R_{00i0} = R_{0i00} = R_{i000} = 0 \tag{170}$$

$$R_{ij00} = R_{00ij} = 0 \tag{171}$$

$$R_{i0j0} = -R_{i00j} = -R_{0ij0} = R_{0i0j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j} \tag{172}$$

$$R_{0ijk} = -R_{i0jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{oj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ok}}{\partial x^i \partial x^j}\right) \tag{173}$$

$$R_{ij0k} = -R_{ijk0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{0i}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{oj}}{\partial x^i \partial x^k}\right) \tag{174}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial {x^i}^2} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} \tag{175}$$

# 25 ECUACIONES DE CAMPO

Hasta ahora nos hemos preocupado de cómo se mueve la materia en el seno de un espacio curvo. Ahora nos vamos a ocupar del problema inverso y complementario: cómo la materia curva el espacio. En realidad no solo la distribución de materia crea curvatura; también la distribución de materia y energía, sea cual sea la naturaleza de ésta. Hasta ahora también, hemos procedido de una forma muy elegante; con la elegancia matemática e interpretativa que caracteriza la Teoría de la Relatividad. Hasta ahora, hemos partido de unos principios generales, hemos deducido matemáticamente, y solo "a posteriori" hemos comprobado que nuestros resultados coinciden con los clásicos en la aproximación clásica. En cambio, las Ecuaciones del Campo de Einstein no se deducen, se postulan, con intuición y tanteo, y partiendo del hecho de que las nuevas ecuaciones han de ser generalizaciones de las clásicas como principio de búsqueda y selección. En la Mecánica Clásica el tiempo y el espacio absolutos tenían unas propiedades invariables. En Relatividad Restringida la invariancia de la velocidad de la luz determinaba las propiedades del espacio y el tiempo. Con la Relatividad General la materia es la que determina la curvatura, es decir, las propiedades del espacio-tiempo. De igual forma que Newton propuso la ley de gravitación universal, y, si hubiera propuesto otra, la Mecánica, en sus Principios, no hubiera perdido su validez, así Einstein propuso las ecuaciones del campo. Si éstas no son ciertas, no por ello la teoría de la Relatividad tiene que perder su validez.
Decisivo en el planteamiento relativista fue el Principio de Mach (el gran enemigo intelectual de Boltzmann). Un hombre observa que "cuando se pone a girar" ocurren dos hechos al parecer conectados íntimamente: todas las estrellas se ponen a girar en torno a él, y además, se levantan sus brazos inertes. Prescindamos de su voluntad de girar, pues la voluntad humana ha de ser eliminada de la interpretación de los fenómenos. Cuando a ese hombre se le levantan

los brazos inermes, el Universo entero se pone a girar. Este simple experimento tiene perfecta y simple explicación en el marco de la Mecánica Clásica. Si prescindimos de ella, hemos de reconocer algo así como que las propiedades de inercia en un punto dado dependen de la distribución de materia en torno a ese punto. De esa forma, pensó Einstein que el tensor de curvatura tenía que ser función del tensor momento-energía. Además esa ecuación buscada que ligue ambos tensores tiene que convertirse, en el caso clásico, en la ecuación de Poisson;

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho \tag{176}$$

que ciertamente es compatible con el Principio de Mach. No el espacio-tiempo, pero si la gravitación, que ahora pasa a ser un efecto geométrico, es decir, el potencial gravitatorio, $\Phi$, depende de la densidad, $\rho$, en ese punto, que, efectivamente, es representativa de la distribución de materia en ese punto. Pero el tensor energía-impulso, $\tau^{\alpha\beta}$ es un tensor de segundo grado y el tensor de curvatura lo es de cuarto. El tensor de enrgía-impulso, entonces debe depender de las dos únicas contracciones del tensor de curvatura, es decir del tensor de Ricci, $R_{\alpha\beta}$, y de la curvatura escalar, en la forma $Rg_{\alpha\beta}$. Quizá lo más sencillo es que dependa de una combinación lineal de ambas. Einstein, tras unos tanteos probó con

$$-8\pi\tau_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \tag{177}$$

Debemos encontrar $C_1$ y $C_2$ que deben ser constantes universales. Puesto que $\tau_{\mu\nu}$ tiene divergencia covariante nula, la divergencia covariante del segundo miembro ha de ser también nula. Derivando el segundo miembro:

$$C_1 R_{\mu\nu;\eta} + C_2 g_{\mu\nu} R_{;\eta} = 0 \tag{178}$$

pues sabemos que $g_{\mu\nu;\eta} = 0$. Hemos visto:

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right)_{;\eta} = 0 \tag{179}$$

(En realidad hemos visto una ecuación muy parecida, con los dos índices contravariantes, pero ésta es igualmente válida). Con ello:

$$\left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) g_{\mu\nu} R_{;\eta} = 0 \tag{180}$$

lo que exige, en general:

$$C_2 = -\frac{C_1}{2} \tag{181}$$

con lo cual la ecuación buscada es del tipo

$$-8\pi\tau_{\mu\nu} = C_1\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) \tag{182}$$

Solo tenemos que determinar la constante $C_1$.Para ello podemos recurrir a la limitación de las nuevas ecuaciones de proporcionar las clásicas en el caso no relativista. Ha de cumplirse la ecuación de Poisson. Además, como sabemos, en la aproximación clásica tiene que cumplirse $\epsilon \approx \rho$ y $\epsilon \gg p$ con lo que:

$$\tau_{00} \cong \rho \tag{183}$$

Además, ya hemos visto:

$$g_{00} = -1 - 2\Phi \tag{184}$$

con lo cual:

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi\tau_{00} \tag{185}$$

Al ser $\epsilon \gg p$ tambien será $\tau^{00} \gg \tau^{ij}$ pues la velocidad es práctivamente nula. Entonces:

$$R_{ij} \approx \frac{1}{2}R\delta_{ij} \tag{186}$$

$$Rii = \frac{3}{2}R \tag{187}$$

(hacemos $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$). Entonces:

$$R = \eta^{\mu\kappa}R_{\mu\kappa} = -R_{00} + R_{ii} = \frac{3}{2}R - R_{00} \tag{188}$$

de donde

$$R \approx 2R_{00} \tag{189}$$

y

$$-8\pi\tau_{00} = C_1\left(R_{00} + \frac{1}{2}R\right) \approx C_1\left(R_{00} + R_{00}\right) = 2C_1R_{00} \tag{190}$$

Como:

$$R_{00} \approx \eta^{\lambda\mu}R_{\lambda0\nu0} = -R_{0000} + R_{i0i0} \tag{191}$$

y

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} \tag{192}$$

se tiene

$$-8\pi\tau_{00} = 2C_1 R_{00} = 2C_1 \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} \tag{193}$$

comparando, se obtiene

$$C_1 = 1 \tag{194}$$

Podemos finalmente escribir las Ecuaciones del Campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi\tau_{\mu\nu} \tag{195}$$

ecuaciones de trascendental importancia. Posteriormente Einstein ratificó, introduciendo el llamado "Término Cosmológico" o "Constante Cosmológica", más recientemente denominado "Energía Oscura", aunque aquí nos limitamos a la expresión más primitiva y sencilla. Hay otra expresión alternativa interesante. Si queremos que el tensor de Ricci aparezca despejado, contraemos la forma anterior multiplicando por $g_{\mu\nu}$, puesto que

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4 \tag{196}$$

tendremos

$$R - 2R = -8\pi\tau^{\mu}{}_{\mu} \tag{197}$$

o bien:

$$R = 8\pi\tau^{\mu}{}_{\nu} \tag{198}$$

llegando a:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi\left(\tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tau^{\lambda}{}_{\lambda}\right) \tag{199}$$

Son 4×4, es decir, 16 ecuaciones, aunque debido a la simetría de $R_{\mu\nu}$ y $\tau_{\mu\nu}$ son solamente 10 ecuaciones. Debido a la simetría del tensor métrico, éste contiene 10 incógnitas. Parece entonces que el balance es perfecto: 10 ecuaciones y 10 incógnitas. No es así pues, debido a las identidades de Bianchi que vimos:

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)_{;\eta} = 0 \tag{200}$$

que suponen 4 ecuaciones de ligadura. Las 10 ecuaciones de Einstein no son independientes. Son en realidad 6 ecuaciones independientes. Desde el punto de vista físico ésto es afortunado pues si pudiéramos determinar completamente $g_{\mu\nu}$ ello equivaldría a que hubiéramos determinado "el" sistema de referencia. Dado un $g_{\mu\nu}$ debemos poder escoger otro tensor métrico mediante las fórmulas de transformación $X^{\rho} = x^{\rho}\left(x'^{\mu}\right)$ que son cuatro, precisamente. No queremos que

$g_{\mu\nu}$ quede completamente determinado, sino solamente 6 de sus componentes. Por ejemplo, podemos escoger que el tensor métrico sea el de Minkowski para el observador cayente.

# 26 LAS PRUEBAS DE LA RELATIVIDAD

Einstein propuso tres pruebas de la teoría de la Relatividad. Una de ellas ya la hemos visto: el desplazamiento al rojo gravitatorio. Otra fue la llamada de la "deflexión de la luz". La trayectoria de un fotón debe seguir una geodésica. El espacio próximo al Sol está curvado y la trayectoria es curva. Por tanto, una estrella situada próxima angularmente al Sol debe cambiar aparentemente de posición en el cielo. Omitimos el cálculo, por la brevedad de esta introducción. El resultado era que una estrella debería cambiar su posición en un ángulo dado por

$$\alpha = 1,75 \frac{R_{\odot}}{b} \tag{201}$$

fórmula que da el resultado en segundos de arco. $R_{\odot}$ es el radio del Sol y $b$ es el parámetro de impacto. Para el caso de una estrella que, antes de sufrir la desviación, pasara tangente a la superficie solar, sería $b = R\odot$, por lo que el valor de $1,75''$ es el valor máximo de desviación. Para saber si, efectivamente, las estrellas cambiaban angularmente de posición, segun la fórmula anterior, era preciso esperar un eclipse. Eddington encabezó una expedición al Sahara donde debía producirse el eclipse total, aunque en el momento preciso una tormenta de arena hizo fracasar la expedición. En el eclipse de 1919 hubo mejor suerte. Se realizaron dos expediciones a las islas de Sobral (Brasil) y al golfo de Guinea. Los resultados obtenidos concordaron con las predicciones de forma clamorosa y la teoría de la Relatividad General gozó desde entonces de una gran popularidad.

La tercera prueba de la Relatividad General explicaba el avance del perihelio de Mercurio. A diferencia de las otras dos pruebas, en las que la predicción teórica fue confirmada observacionalmente, el avance del perihelio de Mercurio se conocía desde hacía más de un siglo; pero no tenía explicación. La órbita de Mercurio no es cerrada, sino que al estar su perihelio en una región más curvada, la curvatura de la órbita en el perihelio es mayor que la predicha clásicamente y Mercurio emerge de la región entorno al perihelio con un ángulo diferente y el perihelio avanza. La explicación inicial propuesta por Le Verrier admitía la existencia de un planeta intramercurial (Vulcano) que incluso ¡llegó a avistarse!, aunque al principio del siglo XIX nadie creía ya en Vulcano. El avance del perihelio era de 43 segundos de arco por siglo. También los otros planetas sufren este avance pero, por su lejanía al Sol, es lógicamente menor: Para Venus es de 8,6; para La Tierra, 3,8; para Icarus, 10,3, todo medido en segundos de arco por siglo.