Cosmología relativista

¿Cuándo es preciso RG?

$$rc^2 \approx GM \qquad rc^2 = G\rho r^3$$

$$r = \frac{c}{\sqrt{G\rho}} = 3.7\,x\,10^{28}\,cm \approx 10^4\,\mathrm{Mpc}$$

Pero... El Universo no es un agujero negro.

Fluidos relativistas

$$f\left(x^i, p^i, t\right)$$

$f d\tau_r d\tau_p =$ número de partículas en $d\tau_r d\tau_p$

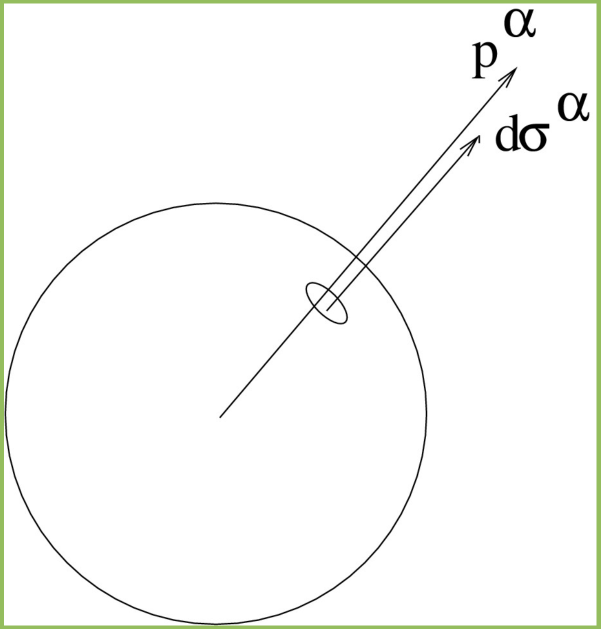
$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^{\ 2}}}$$

$$d\tau_r = \frac{d\tau_r'}{\Gamma}$$

$$d\tau_p ?$$

Hiperesfera en el espacio de momentos

$$d\sigma_0 = dp_1 dp_2 dp_3 = d\tau_p$$
$$p_0 = E$$



$$E = \Gamma E'$$
$$d\tau_p = \Gamma d\tau_p'$$

$\dfrac{d\tau_p}{E}$ es un escalar

$$d\tau_r d\tau_p = d\tau_r' d\tau_p'$$

Flujos de transporte

$$\Phi^{\alpha}(G)=\int_{p} G p^{\alpha} f \frac{d\tau_{p}}{E}$$

$$J^{\alpha}=\int_{p} p^{\alpha} f \frac{d\tau_{p}}{E}$$

$$J^{0}=\int_{p} f\, d\tau_{p}=n$$

Si clásico $J^{i}=n\langle\vec{v}_{i}\rangle$

$$\tau^{\alpha\beta}=\int_{p} \frac{p^{\alpha} p^{\beta}}{E} f\, d\tau_{p}$$

$$\tau^{00}=\int_{p} E f d\tau_{p}=\epsilon$$

$$P=\frac{1}{3}\tau^{ii}$$

Fluidos perfectos

- Son aquellos en los que se puede encontrar en cada punto un observador que vea su microentorno isótropo.
- A este observador llamamos “observador mojado”.
- Para él las integrales anteriores son muy fáciles de resolver.

Flujos en fluidos perfectos

$$J^{\alpha} = (n, 0, 0, 0)$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = \tau^{00} = \int_p fE\, d\tau_p = n\langle E\rangle$$

$$P = \frac{1}{3}\int_p \frac{p^2}{E} f\, d\tau_p = \frac{1}{3} n \left\langle \frac{p^2}{E} \right\rangle$$

Partículas materiales

$$\epsilon = n\langle E\rangle = mn\langle\gamma\rangle$$

$$P = \frac{1}{3}n\left\langle\frac{p^2}{E}\right\rangle = \frac{1}{3}n\left\langle\frac{m^2\gamma^2 v^2}{\gamma m}\right\rangle = \frac{1}{3}mn\langle\gamma v^2\rangle$$

Gas frío

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}v^2 \qquad \epsilon = mn + \frac{1}{2}mn\langle v^2\rangle$$

$$\gamma v^2 \approx v^2 \qquad P \approx \frac{1}{3}mn\langle v^2\rangle$$

$$\epsilon = mn + \frac{3}{2}P$$

Ecuación de estado del gas frío

Gas caliente

$$P=\frac{1}{3}mn\langle\gamma v^2\rangle\approx\frac{1}{3}mn\langle\gamma\rangle=\frac{\epsilon}{3}$$

$\epsilon=3P$ Ecuación de estado del gas caliente

Observador seco

$$J^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} J'^{\beta} = n \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma v_0 & 0 & 0 \\ \Gamma v_0 & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Gamma v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J^{\alpha} = n\Gamma\left(1, v_0\right) = nU^{\alpha}$$

$$U_{\alpha} U^{\alpha} = -1$$

Tensor energía-momento

$$\tau^{\alpha\beta}=\Gamma^{\alpha}_{\gamma}\Gamma^{\beta}_{\delta}\tau'^{\gamma\delta}=\begin{pmatrix}\Gamma^2\left(\epsilon+P v_0^2\right) & \Gamma^2 v_0\left(\epsilon+P\right) & 0 & 0\\ \Gamma^2 v_0\left(\epsilon+P\right) & P+\Gamma^2 v_0^2\left(\epsilon+P\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & P & 0\\ 0 & 0 & 0 & P\end{pmatrix}$$

Para cualquier matriz de Lorentz

$$\tau^{ij}=P\,\delta_{ij}+\left(P+\epsilon\right)\Gamma^2 v_{0\mathrm{i}}v_{0\mathrm{j}}$$

$$\tau^{i0}=\Gamma^2\left(\epsilon+P\right)v_{0\mathrm{i}}$$

$$\tau^{00}=\Gamma^2\left(\epsilon+P v_o^2\right)$$

Forma covariante:

$$\tau^{\alpha\beta}=P\,\eta^{\alpha\beta}+\left(P+\epsilon\right)U^{\alpha}U^{\beta}$$

T E-M

Tensor de Minkowski

$$\eta=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de Lorentz

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \Gamma & \left(\Gamma\,\vec{v}_0\right) \\ \left(\Gamma\,\vec{v}_0\right) & \left(\delta+\dfrac{\Gamma-1}{{v_0}^2}\,\vec{v}\,\vec{v}\right) \end{pmatrix}$$

Ecuación de Boltzmann

$$v^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}}+F^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial p^{\alpha}}=\Pi$$

Es covariante y contiene la fórmula clásica (todo ella multiplicada por γ)

$$\Gamma[d\tau_r d\tau_p]dt=\Gamma[d\tau_r d\tau_p]\gamma d\tau$$

El término de colisiones también está multiplicado por γ

$$p^{\alpha}=\Lambda^{\alpha}_{\beta}p'^{\beta}$$

$$p'^{\beta}=\Lambda^{\beta}_{\alpha}p^{\alpha}$$

$$\frac{\partial p'^{\beta}}{\partial p^{\alpha}}=\Lambda^{\beta}_{\alpha}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p^{\alpha}}=\frac{\partial f}{\partial p'^{\beta}}\frac{\partial p'^{\beta}}{\partial p^{\alpha}}=\Lambda^{\beta}_{\alpha}\frac{\partial f}{\partial p'^{\beta}}$$

El gradiente en *p* es un auténtico vector covariante

Ecuación de continuidad

hacemos $\int_p (\text{Boltzmnn})\, G \frac{d\tau_p}{E}$

y el término de colisiones desaparece

Hagamos $G \equiv 1$

$$\int_p p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{d\tau_p}{E} = \int_p mF^\alpha \frac{\partial f}{\partial p^\alpha} \frac{d\tau_p}{E}$$

$$\frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

Si las fuerzas no dependen del momento

MHD relativista

$$F^{\alpha}=\frac{q}{m}\psi^{\alpha}_{\ \beta}\,p^{\beta}$$

Fuerza electromagnética

$$\Psi^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tensor de Faraday

$$\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}=0$$

No se modifica

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{\sqrt{1-v_0^2}}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{n\vec{v}_0}{\sqrt{1-v_0^2}}\right)=0$$

Notación “bastarda”

¿

Ecuación de energía-momento

Haciendo $G = p^{\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \tau^{\alpha\beta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \tau^{\alpha\beta}_{total} = 0 \qquad \tau^{\alpha\beta}_{\text{total}} = \tau^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}_{EM}$$

$$4\pi \tau^{\alpha\beta}_{EM} = \Psi^{\alpha}{}_{\gamma} \Psi^{\beta\gamma} - \frac{1}{4\pi} \eta^{\alpha\beta} \Psi_{\gamma\delta} \Psi^{\gamma\delta}$$

Tensor energía-impulso EM

$$\tau^{\alpha\beta}_{EM} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & \left(\vec{E}\times\vec{B}\right) \\ \begin{pmatrix}\vec{E}\\ \times\\ \vec{B}\end{pmatrix} & \left(-\vec{E}\,\vec{E}-\vec{B}\,\vec{B}\right)\end{pmatrix} + \frac{1}{8\pi}\left(E^2+B^2\right)\delta^{\alpha}_{\beta}$$

Regla nemotécnica

$$\epsilon_{EM} = \tau^{00}_{EM} = \frac{1}{8\pi}\left(E^2+B^2\right)$$

Densidad de energía electromagnética

$$3\,P_{EM} = \tau^{ii} = \frac{1}{8\pi}\left(E^2+B^2\right) = \epsilon_{EM}\text{¿}$$

Presión hidrostática electromagnética

Expresión bastarda

$$\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \vec{v}_0 + \frac{\nabla P + \frac{\partial P}{\partial t} \vec{v}_0}{\Gamma^2 (\epsilon + P)} = 0$$

movimiento

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma^2 (\epsilon + P)\right) + \vec{v}_0 \cdot \nabla \left(\Gamma^2 (\epsilon + P)\right) = \frac{\partial P}{\partial t} - \Gamma^2 (\epsilon + P) \nabla \cdot \vec{v}_0$$

Conservación de energía

Entropía

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x^{\alpha}} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = U^{\alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial x^{\alpha}}$$

mojado seco

$$Td\sigma = pd\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{\epsilon}{n}\right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = 0$$

En un fluido perfecto
el flujo es isentrópico

El sonido

$$\epsilon = 3\mathrm{P} \qquad P \rightarrow P + P' \qquad \vec{v}_0 \rightarrow 0 + \vec{v}\,' \qquad \nabla P = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \qquad \Gamma = 1$$

$$\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \vec{v}_0 + \frac{\nabla P + \frac{\partial P}{\partial t}\vec{v}_0}{\Gamma^2 (\epsilon + P)} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{v}\,'}{\partial t} + \frac{\nabla P'}{4\mathrm{P}} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \vec{v}_0 + \frac{\nabla P + \frac{\partial P}{\partial t}\vec{v}_0}{\Gamma^2 (\epsilon + P)} = 0 \qquad \frac{\partial (3\mathrm{P}')}{\partial t} + 4\mathrm{P}\,\nabla \cdot \vec{v}\,' = 0$$

$$\nabla^2 P' = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(3\mathrm{P}')$$

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$$

Ecuaciones del campo de Einstein

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=-8\pi\tau_{\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta}=-8\pi\left(\tau_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\tau^{\lambda}{}_{\lambda}\right)$$

$$R=R^{\alpha}{}_{\alpha}$$

Curvatura escalar

$$R_{\alpha\beta}=R^{\lambda}{}_{\alpha\lambda\beta}$$

Tensor de Ricci

$$R^{\lambda}{}_{\alpha\varphi\beta}=\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha\varphi}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\varphi}}+\Gamma^{\eta}_{\alpha\varphi}\Gamma^{\lambda}_{\beta\eta}-\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\eta}$$

Tensor de curvatura de Riemann

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\lambda\epsilon}\left(\frac{\partial g_{\epsilon\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\epsilon\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\epsilon}}\right)$$

Conexión afín

Continuidad en RG

$$J^{\alpha}_{;\alpha}=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{g}\,J^{\alpha}\right)=0$$

$$g=-\det\left(g_{\alpha\beta}\right)$$

$$\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\delta}_{\delta\lambda}J^{\lambda}=0$$

$$\tau^{\alpha\beta}=P\,g^{\alpha\beta}+\left(P+\epsilon\right)U^{\alpha}U^{\beta}$$

$$g_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta}=-1$$

$$\tau^{\varphi\alpha}_{\;;\alpha}=0$$

Energía-momento en RG

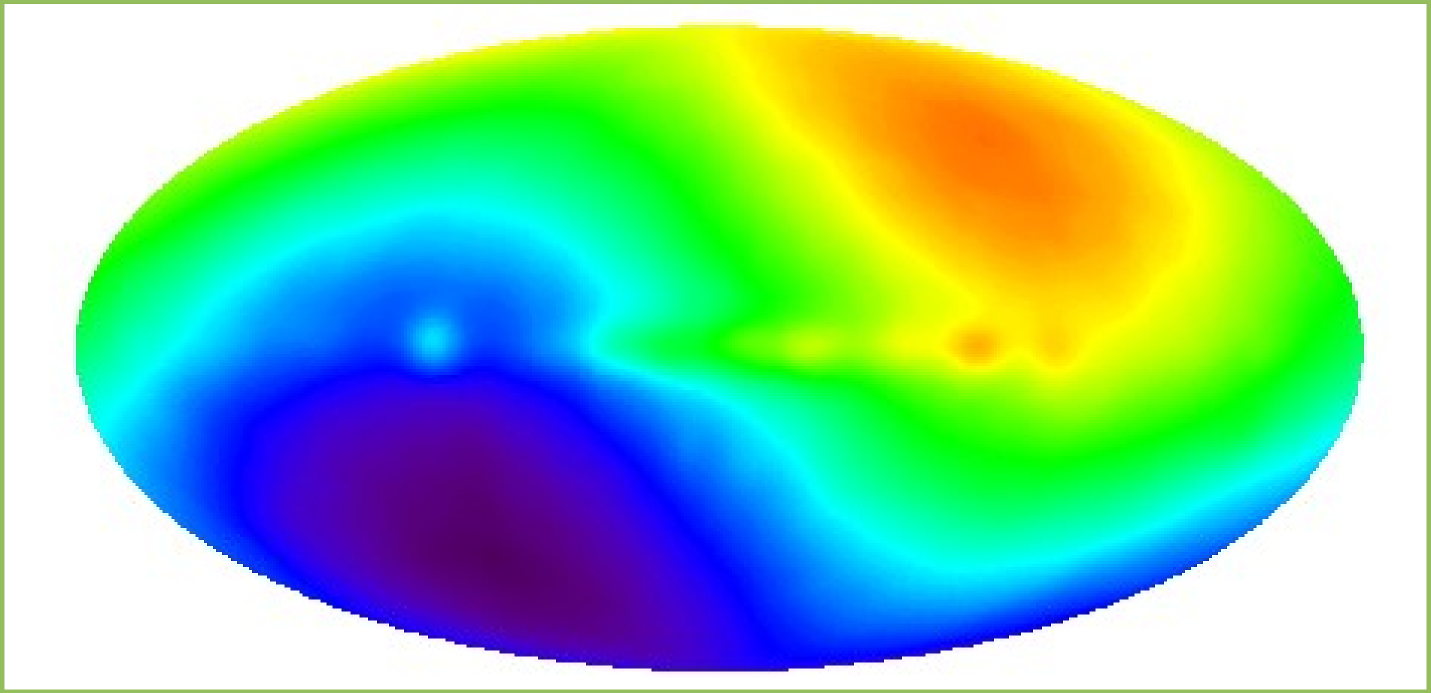
$$\tau^{\varphi\alpha}{}_{;\alpha}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x^{\lambda}} g^{\lambda\alpha}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\sqrt{g}\left(P+\epsilon\right)U^{\lambda}U^{\alpha}\right)+\Gamma^{\alpha}_{\varphi\lambda}\left(P+\epsilon\right)U^{\varphi}U^{\lambda}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x^{\lambda}} g^{\lambda\alpha}+\left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(P+\epsilon\right)\right)U^{\lambda}U^{\alpha}+\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(U^{\lambda}U^{\alpha}\right)\left(P+\epsilon\right)+\left(\Gamma^{\alpha}_{\varphi\lambda}U^{\varphi}U^{\lambda}+\Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}U^{\lambda}U^{\alpha}\right)\left(P+\epsilon\right)=0$$

Cosmología Relativista

- Principio cosmológico
- Homogeneidad e isotropía ¿en el tiempo de quién?
- En el tiempo de los observadores cayentes.
- Los observadores cayentes están definidos en todos los puntos.
- Tienen la misma película del Universo.
- Desplazándolas pueden sincronizar sus relojes



El tiempo cósmico

- El tiempo cósmico está bendecido por la RG
- Termómetros como relojes.
- Observadores fundamentales.
- Galaxias fundamentales.
- Si un observador ve el Universo Isótropo, otro que se mueva con respecto a él, no lo verá isótropo.
- EL CMB es un buen ejemplo.

El Universo Perfecto

- Un fluido perfecto es aquel en el que podemos encontrar en cada punto un observador que ve su microentorno isótropo.
- En el Universo podemos encontrar en cada punto un observador que lo ve todo isótropo.

Principio cosmológico

- El Universo es un fluido perfecto.
- El Universo es un fluido “pluscuamperfecto”
- Principio cosmológico: Hay observadores cayentes que ven el Universo isótropo, huelga decir que homogéneo.
- Los observadores cayentes tienen la descripción más sencilla del Universo.
- Además pueden utilizar el tiempo cósmico.
- Pero nosotros no somos observadores fundamentales.

Curvatura homogénea

- No sólo hay homogeneidad para funciones termodinámicas
- T(t), P(t), … composición química, …
- ...número de seres vivos...
- También debe haber homogeneidad en los tensores de curvatura.
- La curvatura es homogénea pero no estacionaria.
- Busquemos una métrica

Métrica de Robertson Walker

$$dl^2 = R^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right)$$

Elemento de arco espacial

$$ds^2 = g_{00}\,dt^2 + 2g_{0r}\,dt\,dr + 2g_{0\theta}\,dt\,d\theta + 2g_{0\varphi}\,dt\,d\varphi + dl^2$$

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2$$

$$ds^2 = -dt^2 + R^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right)$$

Métrica de Robertson-Walker

El espacio espacial

$$g_{ij} = R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad g^{ij} = R^{-2} \begin{pmatrix} 1-kr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{kr}{1-kr^2} \qquad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r\left(1-kr^2\right) \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\left(1-kr^2\right)\sin^2\theta$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$$

Geodésicas

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{kr}{1-kr^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r\left(1-kr^2\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r\left(1-kr^2\right)\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0$$

Geodésicas radiales

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{kr}{1-kr^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{k}{R^2} r = 0$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{1-kr^2}{R^2}$$

$$r = r_0 \sin\left(s \frac{k^{1/2}}{R}\right)$$

Si k=1, r vuelve a ser 0 para $s = 2\pi R$

R es el radio del Universo (!)

Geodésicas radiales en espacio-tiempo

- Las galaxias fundamentales son cayentes: siguen geodésicas.
- Existen geodésicas radiales. Las galaxias fundamentales siguen geodésicas radiales.
- Podemos suponer que no hay variación en las coordenadas angulares.
- En ellas podemos emplear el tiempo cósmico. Su tiempo y nuestro tiempo pueden ser el mismo.

Desplazamiento al rojo cosmológico

Galaxia observada $\left(r_{1,}\theta_{1,}\varphi_1\right)$ pulsos emitidos en t_1 y $t_1+\delta t_1$

Nosotros $\left(0,\theta_{1,}\varphi_1\right)$ pulsos recibidos en t_0 y $t_0+\delta t_0$

procesos luminosos: $d\tau=0$

$$dt^2=R^2\frac{dr^2}{1-kr^2}$$

De Robertson
-Walker

Primer pulso: $$\int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{R}=\int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}=f\left(r_1\right)$$

Segundo pulso: $$\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0}\frac{dt}{R}=f\left(r_1\right)$$

$$\int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{R}=\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0}\frac{dt}{R}$$

Z cosmológico

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{R}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{R} + \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0} \frac{dt}{R} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0} \frac{dt}{R} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{R}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{R} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{R}$$

$$\frac{t_1+\delta t_1-t_1}{R(t_1)} = \frac{t_0+\delta t_0-t_0}{R_0}$$

$$\frac{\delta t_1}{R(t_1)} = \frac{\delta t_0}{R_0}$$

$$z = \frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\delta t_0-\delta t_1}{\delta t_1}$$

$$\boxed{z = \frac{R_0}{R} - 1}$$

Distancia propia

Hacemos dt=0

$$ds = R\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Distancia propia $$d_1 = R\int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = Rf\left(r_1\right)$$

$$f\left(r_1\right) = \int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = ¿$$

$$\begin{array}{c} \sin^{-1} r_1 \quad \text{for} \quad k=1 \\ r_1 \quad \text{for} \quad k=0 \\ \sinh^{-1} r_1 \quad \text{for} \quad k=-1 \end{array}$$

¿Ley de Hubble?

si en el Universo actual es $k=1$ entonces $d_1 = Rr_1$

la distancia propia presente sería $d_1 = R_0 r_1$

derivando $\dot{d}_1 = \frac{\dot{R}}{R} d_1$

Que parece la ley de Hubble pero $\dot{d}_1$ no es z a no ser que las distancias sean muy pequeñas como para que

$$\dot{d}_1 = Hd_1 \approx \frac{1}{R(t_1)} \frac{R_0 - R(t_1)}{t_0 - t_1} d_1 = z$$

Distancias

- Hay dos formas básicas de medir distancias:
- a) comparando la luminosidad (previamente conocida) con el flujo recibido.
- b) Comparando el tamaño real (previamente conocido) con el tamaño angular observado.
- Si aplicamos ambos métodos obtenemos la distancia de luminosidad y la distancia de diámetro.
- Su relación con la distancia propia depende de la curvatura.

Distancia de luminosidad $d_L = (1+z) R_0 r_1$

Distancia de diámetro $d_D = \frac{R_0 r_1}{1+z}$

Relaciones aproximadas

$$R = R_0\left(1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \ldots\right)$$

$$\frac{R_0}{R} = 1 + H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \ldots$$

$$z = H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \ldots$$

$$t_0 - t = \frac{1}{H_0}\left(z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \ldots\right)$$

$$f(r) \approx r = \int_t^{t_0} \frac{dt}{R} = \frac{1}{R_0}\left((t_0 - t) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t)^2 + \ldots\right) = \frac{1}{R_0 H_0}\left(z - \frac{1}{2}(1 - q_0) z^2 + \ldots\right)$$

$$d = \frac{1}{H_0}\left(z + \frac{1}{2}(1 - q_0) z^2 + \ldots\right)$$

De interés observacional

El Universo Perfecto

$$U^0 = 1 \quad U^i = 0 \quad J^\alpha \equiv (n, 0, 0, 0) \quad g = R^6 r^4 (1 - kr^2)^{-1} \sin^2\theta$$

$$\frac{d}{dt}(nR^3) = 0$$

$$nR^3 = \text{constante}$$

Ecuación de continuidad

Energía-momento

$$\Gamma^{\mu}_{00} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{-\partial P}{\partial t} + \frac{\sqrt{1-kr^2}}{R^3 r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{R^3 r^2 \sin\theta}{\sqrt{1-kr^2}}\right)(\epsilon + P)\right) = 0$$

$$R^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R^3(\epsilon + P)\right)$$

Puede dar T(R) pero no R(t)

Para fotones

$$\epsilon = 3\mathrm{P}$$

$$R^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R^3\left(\epsilon + P\right)\right)$$

$$PR^4 = \mathrm{constante}$$

Como: $P \propto T^4$

$$T \propto R^{-1}$$

Para materia

$$\epsilon = mn + \frac{3}{2} nT$$

$$R^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R^3 (\epsilon + P)\right)$$

$$PR^5 = \text{constante}$$

Como: $n \propto R^{-3}$

$$TR^2 = \text{constante}$$

Entropía

Expresión general

$$dS=\frac{1}{T}d\left(\epsilon V\right)+\frac{1}{T}PdV=\left(\frac{\epsilon+P}{T}+\frac{V}{T}\frac{\partial\epsilon}{\partial V}\right)+\frac{V}{T}\frac{\partial\epsilon}{\partial T}dT$$

$$\text{Si}\quad P=P\left(V,T\right)\quad\text{y}\quad\epsilon=\epsilon\left(V,T\right)$$

De la igualdad de las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\epsilon+P}{T}+\frac{V}{T}\frac{\partial\epsilon}{\partial V}\right)=\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}\frac{\partial\epsilon}{\partial T}\right)$$

¿

$$\frac{\partial P}{\partial T}=\frac{\epsilon+P}{T}+\frac{V}{T}\frac{\partial\epsilon}{\partial V}$$

$$dS=\frac{\partial P}{\partial T}dV+\frac{V}{T}\frac{\partial\epsilon}{\partial T}dT$$

$$n dV + V dn = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\epsilon + P}{T} + \frac{V}{T}\frac{\partial \epsilon}{\partial V}$$

Paso a magnitudes intensivas, por barión

$$dS = \frac{\partial P}{\partial T} dV + \frac{V}{T}\frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT$$

$$d\sigma = -\frac{\partial P}{\partial T}\frac{1}{n^2} dn + \frac{1}{Tn}\frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT$$

$$d\sigma = 0 \quad \text{en el Universo}$$

$$\frac{\partial P}{\partial T}\frac{dn}{n} = \frac{\partial \epsilon}{\partial T}\frac{dT}{T}$$

$$\text{si} \quad \epsilon = 3\mathrm{P} \quad \text{y} \quad \epsilon = \epsilon(T, \text{only})$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{4\mathrm{P}}{T} \longrightarrow P \propto T^4 \longrightarrow \epsilon \propto T^4$$

No sólo para fotones;
Para cualquier partícula relativista !

$$\frac{1}{3}\frac{dn}{n}=\frac{dT}{T}$$

$$\frac{n^{1/3}}{T}=\text{constante}$$

Como : $n \propto R^{-3}$

$$\boxed{T \propto R^{-1}}$$

Ley de enfriamiento válida para casi toda la historia del Universo (salvo para las partículas materiales hoy; sí para los fotones del CMB)

Entropía absoluta

si ni ϵ ni P dependen de V

$$S = \frac{V\left(\epsilon + P\right)}{T}$$

El sueño de un termodinámico

$$\sigma = \frac{\epsilon + P}{nT} = \frac{4}{3}\frac{\epsilon}{nT} = \frac{4}{3}\frac{aT^3}{n} \approx \frac{\text{número de fotones}}{\text{número de bariones}}$$

$$\varepsilon = aT^4 \quad \text{para fotones}$$

$$\varepsilon = \frac{7}{16} aT^4 \quad \text{para neutrinos}$$

$$\varepsilon = \frac{7}{8} aT^4 \quad \text{para electrones y positrones}$$

El fondo cósmico de neutrinos

Antes del desacoplamiento de los neutrinos

$$\epsilon=\left(6\times\frac{7}{16}+2\times\frac{7}{8}+1\right)aT^4=\frac{43}{8}aT^4 \longrightarrow \sigma=\frac{43}{6}\frac{aT^3}{n}$$

Entre desacoplamiento y aniquilación

$$\epsilon=\left(2\times\frac{7}{8}+1\right)=\frac{11}{4}aT^4 \longrightarrow \sigma=\frac{11}{3}\frac{aT^3}{n}$$

Tras aniquilación

$$\epsilon=aT^4 \longrightarrow \sigma=\frac{4}{3}\frac{aT^3}{n}$$

$$\frac{11}{3}\frac{aT_{antes}{}^3}{n}=\frac{4}{3}\frac{aT_{tras}{}^3}{n} \qquad \frac{T_{tras}}{T_{antes}}=\left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}\approx 1.4 \qquad T_{neutrinos}\approx 2\mathrm{K}$$

Bariones y fotones

Entre la Igualdad y la Recombinación

$$\epsilon = mn + \frac{3}{2} nT + aT^4$$

$$P = nT + \frac{1}{3} aT^4$$

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{aT^3}{n} \approx n_\gamma / n$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} \frac{dn}{n} = \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \frac{dT}{T}$$

$$\boxed{(1+\sigma)\, dn = 3\mathrm{n}\,(1/2+\sigma)\, dT/T}$$

Hoy $n_\gamma = 4 \times 10^3\, cm^{-3}$ mientras que $n = 6 \times 10^{-6}\, cm^{-3}$

$\sigma = 10^9 - 10^{10}$ (universo caliente). σ es constante

$dn/n = 3\, dT/T$ $\quad n \propto T^3$ $\quad TR = \text{constante}$

Ley muy constante en la historia del Universo

Ecuaciones de Einstein

$$\tau^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (P + \varepsilon) U^{\mu} U^{\nu}$$

$$\tau_{\lambda}^{\lambda} = 3\mathrm{P} + \varepsilon$$

Tras larga, fácil y placentera deducción:

$$3\frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi(\varepsilon + 3\mathrm{P})$$

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2\mathrm{k} = 4\pi R^2 (\varepsilon - P)$$

$$\longrightarrow \quad 2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{r^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi P$$

$$\frac{8\pi\varepsilon}{3} R^3 = \dot{R}^2 R + kR$$

Ecuación de Einstein-Friedmann

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon R^3) = -3R^2 \dot{R} P$$

Ecuación de conservación de energía

Conclusiones ¿buenas?

Hace falta ecuación de estado. Cualquiera que esta sea:

$$3\frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi(\varepsilon + 3P)$$ $\epsilon > 0, P > 0$ luego $\ddot{R} < 0$ Como observaciones $\dot{R} > 0$ Big-Bang

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon R^3) = -3R^2 \dot{R} P$$ ϵ decrece más rápidamente que R crece

$$\frac{8\pi\varepsilon}{3} R^3 = \dot{R}^2 R + kR$$ ϵR^3 acabará siendo cero $\dot{R}^2 + k = 0$

Si k=-1, expansión indefinida

Si k=0, Expansión se detiene en tiemp infinito

Si k=1 $\dot{R}$ puede ser 0 antes. Máximo, $\dot{R} < 0$ Big-Crunch=coalescencia

$$\frac{8\pi\epsilon}{3} = H^2 + \frac{k}{R^2}$$

Si k=0 $\epsilon_c = \frac{3}{8\pi} H^2$ Densidad crítica

$$\Omega = \frac{\epsilon}{\epsilon_c}$$

Parámetro de densidad

$$\Omega = 1 + \frac{k}{R^2 H^2}$$

Era de la materia

$P = w\epsilon$, Ecuación de barotropía; w, índice barotrópico

Para fotones, por ejemplo, $w = 1/3$

Para partículas materiales, $w = 0, P = 0$

$$\Omega = 2q$$

$$R^2 = \frac{k}{H^2(2q-1)}$$

$$\dot{a} = H_0^2\left(1 - 2q_0 + 2q_0\frac{1}{a}\right)$$

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \left(1 - 2q_0 + 2\frac{q_0}{x}\right)^{-1/2} dx$$

Tiempo de vida del Universo

En era de la materia

$k=-1, \;\; q<1/2 \;, \;\; \Omega<1$ universo abierto

$k=1 \;\;, \;\; q=1/2 \;\;, \;\; \Omega=1$ universo crítico
(plano, de Einstein-de Sitter)

$k=1 \;\;, \;\; q>1/2 \;\;, \;\; \Omega>1$ universo cerrado (o cíclico)

Modelos de Friedmann

Primer modelo $k=0$

$$\dot{a}=H_0 a^{-1/2} \longrightarrow a=\left(\frac{3}{2}H_0\right)^{2/3} t^{2/3}$$

$$t=(2/3)\frac{1}{H} \longrightarrow t_0=(2/3)\frac{1}{H_0}$$

$$H=H_0 a^{-3/2}$$

$$\epsilon=mn=\frac{3\mathrm{H}_0^2}{8\pi}a^{-3}=\frac{1}{6\pi}t^{-2}$$

$$T=T_0 a^{-2}=T_0\left(\frac{3}{2}H_0\right)^{-4/3} t^{-4/3}$$

Universo cerrado

Cambio de variable: $1-\cos\theta = \frac{2q_0-1}{q_0}a$

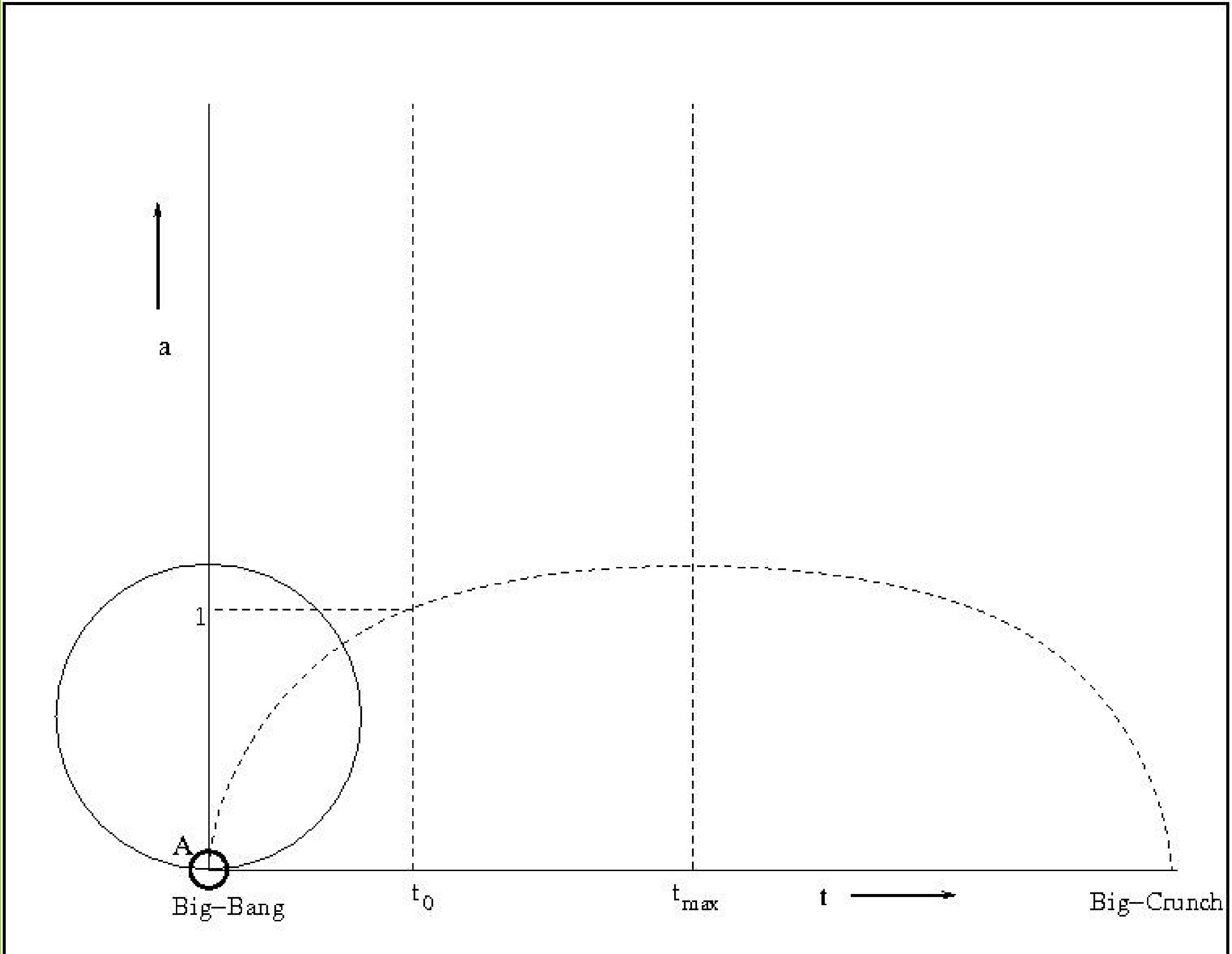
$$tH_0 = q_0\left(2q_0-1\right)^{-3/2}\left(\theta-\sin\theta\right)$$

$$\begin{cases} X = A\theta - A\sin\theta \\ Y = A - A\cos\theta \end{cases}$$

$$X \equiv t$$

$$A \equiv q_0\left(2q_0-1\right)^{-3/2}\left(\theta-\sin\theta\right)$$

$$Y = R$$


a
1
A
Big–Bang
t_0
t_{max}
t
Big–Crunch

Solución analítica

$$t=\frac{q_0}{H_0}\left(2q_0-1\right)^{-3/2}\left(\cos^{-1}\left(1-\frac{2q_0-1}{q_0}a\right)-\sqrt{1-\left(1-\frac{2q_0-1}{q_0}a\right)^2}\right)$$

El universo abierto

$$\theta = i\,\psi$$

$$1 - \cosh\psi = \frac{2q_0 - 1}{q_0}\,a$$

$$t = \frac{q_0}{H_0}\left(1 - 2q_0\right)^{-3/2}\left(\sqrt{\left(1 + \frac{1-2q_0}{q_0}\,a\right)^2 - 1} - \cosh^{-1}\left(1 + \frac{1-2q_0}{q_0}\,a\right)\right)$$

Distancias

$$r_1 = \frac{zq_0 + (q_0 - 1)\left(-1 + \sqrt{2q_0 z + 1}\right)}{H_0 R_0 q_0^2 (1 + z)}$$

Para k=-1, 0, 1. Para k=o la expresión se simplifica

$$r_1 = \frac{2}{R_0 H_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + z}}\right)$$

Ejemplo numérico

Considérense tres universos, con $q_0 = 0.1$ (abierto) $q_0 = 0.5$ (crítico) y $q_0 = 1$ (cerrado)

Calcúlese $R_0\, y\, t_0$

Considérense objetos a $z = 0.01, 1, 10, 1000$

y calcúlese para los tres universos: $r_{1,}\, d_L\, , d_D$

El Universo curvo

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi\varepsilon_0 R_0^3}{3\mathrm{R}} - k$$

Einstein-Friedmann

para R muy pequeño k será despreciable

$$\frac{8\pi\varepsilon_0}{3} = 2\mathrm{q}_0 H_0^2 \text{ luego}$$

$$\frac{8\pi\varepsilon_0}{3}\frac{R_0^3}{R} = 2q_0 H_0^2 \frac{k}{H_0^2(2\mathrm{q}_0 - 1)}\frac{R_0}{R} = \frac{2\mathrm{q}_0}{|2\mathrm{q}_0 - 1|}\frac{R_0}{R}$$

Hay que comparar con $|k|$

La curvatura empieza a ser importante para a=1/4 si k<1. Si el Universo es cerrado la curvatura es importante en el futuro.

Era de la luz

$\epsilon = 3P \qquad P \propto R^{-4} \qquad \epsilon \propto R^{-4}$

$$R^2 = 2\sqrt{\frac{8\pi}{3}\left[\epsilon R^4\right]}\,t - kt^2$$

Si k= 0 $R \propto t^{1/2}$

$R^2 = \dfrac{k}{H^2(q-1)}$ Si k=0, q=1 (no a 1/2 como antes)

$\Omega = q$ (antes $\Omega = 2q$)

Horizonte en CMB

En la métrica de RW hagamos $dt=0$, $dr=0$, $d\varphi=0$

$$ds=Rrd\theta$$

La distancia al horizonte es

$$d_H\approx t\approx\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3/2}\left(\frac{2}{3}H_0^{-1}\right)=\frac{1}{(1+z)^{3/2}}\frac{2}{3}H_0^{-1}$$

$$r_1=\frac{2}{R_0H_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)\longrightarrow r\approx\frac{2}{R_0H_0}$$

$$s=\frac{2}{H_0z}\theta$$

Con $s=d_H$ resulta: $\theta\approx\frac{1}{3}z^{-1/2}=0.01\,rad\approx1^o$