

# Cosmología relativista

¿Cuándo es preciso RG?

$$rc^2 \approx GM$$

$$rc^2 = G \rho r^3$$

$$r = \frac{c}{\sqrt{G \rho}} = 3.7 \times 10^{28} \text{ cm} \approx 10^4 \text{ Mpc}$$

Pero... El Universo no es un agujero negro.

# Fluidos relativistas

$$f(x^i, p^i, t)$$

$f d\tau_r d\tau_p$  = número de partículas en  $d\tau_r d\tau_p$

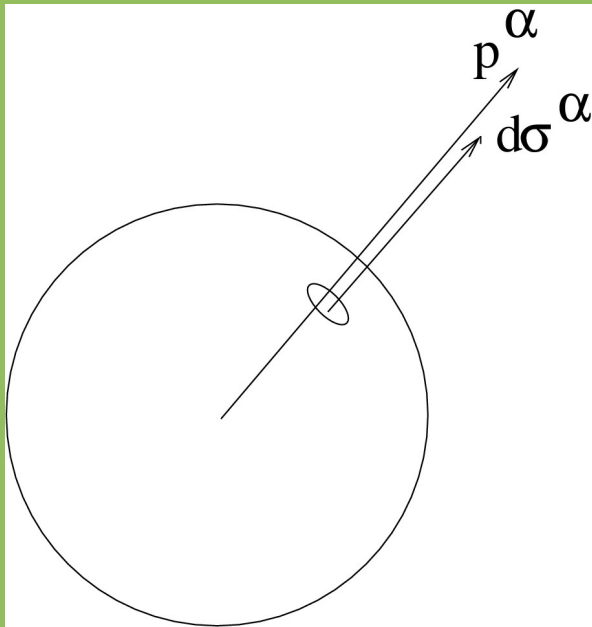
$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2}}$$

$$d\tau_r = \frac{d\tau_r'}{\Gamma}$$

$$d\tau_p?$$

# Hiperesfera en el espacio de momentos

$$d\sigma_0 = dp_1 dp_2 dp_3 = d\tau_p$$
$$p_0 = E$$



$$E = \Gamma E'$$
$$d\tau_p = \Gamma d\tau_p'$$

$\frac{d\tau_p}{E}$  es un escalar

$$d\tau_r d\tau_p = d\tau_r' d\tau_p'$$

# Flujos de transporte

$$\Phi^\alpha(G) = \int_p G p^\alpha f \frac{d\tau_p}{E}$$

$$J^\alpha = \int_p p^\alpha f \frac{d\tau_p}{E}$$

$$J^0 = \int_p f d\tau_p = n$$

Si clásico

$$J^i = n \langle \vec{v}_i \rangle$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \int_p \frac{p^\alpha p^\beta}{E} f d\tau_p$$

$$\tau^{00} = \int_p E f d\tau_p = \epsilon$$

$$P = \frac{1}{3} \tau^{ii}$$

# Fluidos perfectos

- Son aquellos en los que se puede encontrar en cada punto un observador que vea su microentorno isótropo.
- A este observador llamamos “observador mojado”.
- Para él las integrales anteriores son muy fáciles de resolver.

# Flujos en fluidos perfectos

$$J^\alpha = (n, 0, 0, 0)$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = \tau^{00} = \int_p f E d\tau_p = n \langle E \rangle$$

$$P = \frac{1}{3} \int_p \frac{p^2}{E} f d\tau_p = \frac{1}{3} n \langle \frac{p^2}{E} \rangle$$

# Partículas materiales

$$\epsilon = n \langle E \rangle = mn \langle \gamma \rangle$$

$$P = \frac{1}{3} n \left\langle \frac{p^2}{E} \right\rangle = \frac{1}{3} n \left\langle \frac{m^2 \gamma^2 v^2}{\gamma m} \right\rangle = \frac{1}{3} mn \langle \gamma v^2 \rangle$$

Gas frío

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} v^2 \quad \epsilon = mn + \frac{1}{2} mn \langle v^2 \rangle$$

$$\gamma v^2 \approx v^2 \quad P \approx \frac{1}{3} mn \langle v^2 \rangle$$

$$\epsilon = mn + \frac{3}{2} P$$

Ecuación de estado del gas frío

# Gas caliente

$$P = \frac{1}{3} mn \langle \gamma v^2 \rangle \approx \frac{1}{3} mn \langle \gamma \rangle = \frac{\epsilon}{3}$$

$\epsilon = 3P$  Ecuación de estado del gas caliente



# Observador seco

$$J^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha J'^\beta = n \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma v_0 & 0 & 0 \\ \Gamma & \Gamma v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Gamma v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J^\alpha = n \Gamma (1, v_0) = n U^\alpha$$

$$U_\alpha U^\alpha = -1$$

# Tensor energía-momento

$$\tau^{\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma}^{\alpha} \Gamma_{\delta}^{\beta} \tau^{\prime\gamma\delta} = \begin{pmatrix} \Gamma^2(\epsilon + P v_0^2) & \Gamma^2 v_0(\epsilon + P) & 0 & 0 \\ \Gamma^2 v_0(\epsilon + P) & P + \Gamma^2 v_0^2(\epsilon + P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Para cualquier matriz de Lorentz

$$\tau^{ij} = P \delta_{ij} + (P + \epsilon) \Gamma^2 v_{0i} v_{0j}$$

$$\tau^{i0} = \Gamma^2(\epsilon + P) v_{0i}$$

$$\tau^{00} = \Gamma^2(\epsilon + P v_0^2)$$

Forma covariante:

$$\tau^{\alpha\beta} = P \eta^{\alpha\beta} + (P + \epsilon) U^{\alpha} U^{\beta}$$

# T E-M

Tensor de Minkowski

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de Lorentz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma & (\Gamma \vec{v}_0) \\ (\Gamma \vec{v}_0) & \left( \delta + \frac{\Gamma - 1}{v_0^2} \vec{v} \vec{v} \right) \end{pmatrix}$$

# Ecuación de Boltzmann

$$v^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + F^\alpha \frac{\partial f}{\partial p^\alpha} = \Pi$$

Es covariante y contiene la fórmula clásica (todo ella multiplicada por  $\gamma$ )

$$\Gamma [d\tau_r d\tau_p] dt = \Gamma [d\tau_r d\tau_p] \gamma d\tau$$

El término de colisiones también está multiplicado por  $\gamma$

$$p^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha p'^\beta$$

$$p'^\beta = \Lambda_\alpha^\beta p^\alpha$$

$$\frac{\partial p'^\beta}{\partial p^\alpha} = \Lambda_\alpha^\beta$$

$$\frac{\partial f}{\partial p^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial p'^\beta} \frac{\partial p'^\beta}{\partial p^\alpha} = \Lambda_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial p'^\beta}$$

El gradiente en  $p$  es un auténtico vector covariante

# Ecuación de continuidad

hacemos  $\int_p (\text{Boltzmann}) G \frac{d\tau_p}{E}$

y el término de colisiones desaparece

Hagamos  $G \equiv 1$

$$\int_p p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{d\tau_p}{E} = \int_p mF^\alpha \frac{\partial f}{\partial p^\alpha} \frac{d\tau_p}{E}$$

$$\frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

Si las fuerzas no dependen del momento

# MHD relativista

$$F^\alpha = \frac{q}{m} \psi^\alpha_\beta p^\beta$$

Fuerza electromagnética

$$\Psi^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tensor de Faraday

$$\frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

No se modifica

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{n}{\sqrt{1-v_0^2}} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{n \vec{v}_0}{\sqrt{1-v_0^2}} \right) = 0$$

Notación “bastarda”

!

# Ecuación de energía-momento

Haciendo  $G = p^\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tau^{\alpha\beta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tau_{total}^{\alpha\beta} = 0$$

$$\tau_{total}^{\alpha\beta} = \tau^{\alpha\beta} + \tau_{EM}^{\alpha\beta}$$

$$4\pi \tau_{EM}^{\alpha\beta} = \Psi_{,\gamma}^\alpha \Psi^{\beta\gamma} - \frac{1}{4\pi} \eta^{\alpha\beta} \Psi_{,\gamma\delta} \Psi^{\gamma\delta}$$

# Tensor energía-impulso EM

$$\tau_{EM}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( \begin{array}{cc} 0 & (\vec{E} \times \vec{B}) \\ \left( \begin{array}{c} \vec{E} \\ \times \\ \vec{B} \end{array} \right) & (-\vec{E} \vec{E} - \vec{B} \vec{B}) \end{array} \right) + \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \delta_{\beta}^{\alpha} \quad \text{Regla nemotécnica}$$

$$\epsilon_{EM} = \tau_{EM}^{00} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \quad \text{Densidad de energía electromagnética}$$

$$3 P_{EM} = \tau^{ii} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = \epsilon_{EM} \hat{i}$$

Presión hidrostática  
electromagnética



# Expresión bastarda

$$\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \vec{v}_0 + \frac{\nabla P + \frac{\partial P}{\partial t} \vec{v}_0}{\Gamma^2(\epsilon + P)} = 0$$

movimiento

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Gamma^2(\epsilon + P)) + \vec{v}_0 \cdot \nabla (\Gamma^2(\epsilon + P)) = \frac{\partial P}{\partial t} - \Gamma^2(\epsilon + P) \nabla \cdot \vec{v}_0$$

Conservación de energía

# Entropía

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = U^\alpha \frac{\partial\sigma}{\partial x^\alpha}$$

mojado

seco

$$Td\sigma = pd\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{\epsilon}{n}\right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = 0$$

En un fluido perfecto  
el flujo es isentrópico

# El sonido

$$\epsilon = 3P \quad P \rightarrow P + P' \quad \vec{v}_0 \rightarrow 0 + \vec{v}' \quad \nabla P = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \Gamma = 1$$

$$\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \vec{v}_0 + \frac{\nabla P + \frac{\partial P}{\partial t} \vec{v}_0}{\Gamma^2 (\epsilon + P)} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{\nabla P'}{4P} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \vec{v}_0 + \frac{\nabla P + \frac{\partial P}{\partial t} \vec{v}_0}{\Gamma^2 (\epsilon + P)} = 0$$

$$\frac{\partial (3P')}{\partial t} + 4P \nabla \cdot \vec{v}' = 0$$

$$\nabla^2 P' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (3P')$$

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58$$

# Ecuaciones del campo de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -8\pi \tau_{\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta} = -8\pi \left( \tau_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tau^{\lambda}_{\lambda} \right)$$

$$R = R^{\alpha}_{\alpha} \quad \text{Curvatura escalar}$$

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta} \quad \text{Tensor de Ricci}$$

$$R^{\lambda}_{\alpha\varphi\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\varphi}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\varphi}} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\varphi} \Gamma^{\lambda}_{\beta\eta} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} \Gamma^{\lambda}_{\varphi\eta} \quad \text{Tensor de curvatura de Riemann}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\epsilon} \left( \frac{\partial g_{\epsilon\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\epsilon\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\epsilon}} \right) \quad \text{Conexión afín}$$

# Continuidad en RG

$$J^{\alpha}_{;\alpha} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{g} J^{\alpha}) = 0$$

$$\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\delta}_{\delta\lambda} J^{\lambda} = 0$$

$$g = -\det(g_{\alpha\beta})$$

$$\tau^{\alpha\beta} = P g^{\alpha\beta} + (P + \epsilon) U^{\alpha} U^{\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} U^{\alpha} U^{\beta} = -1$$

$$\tau^{\varphi\alpha}_{;\alpha} = 0$$

# Energía-momento en RG

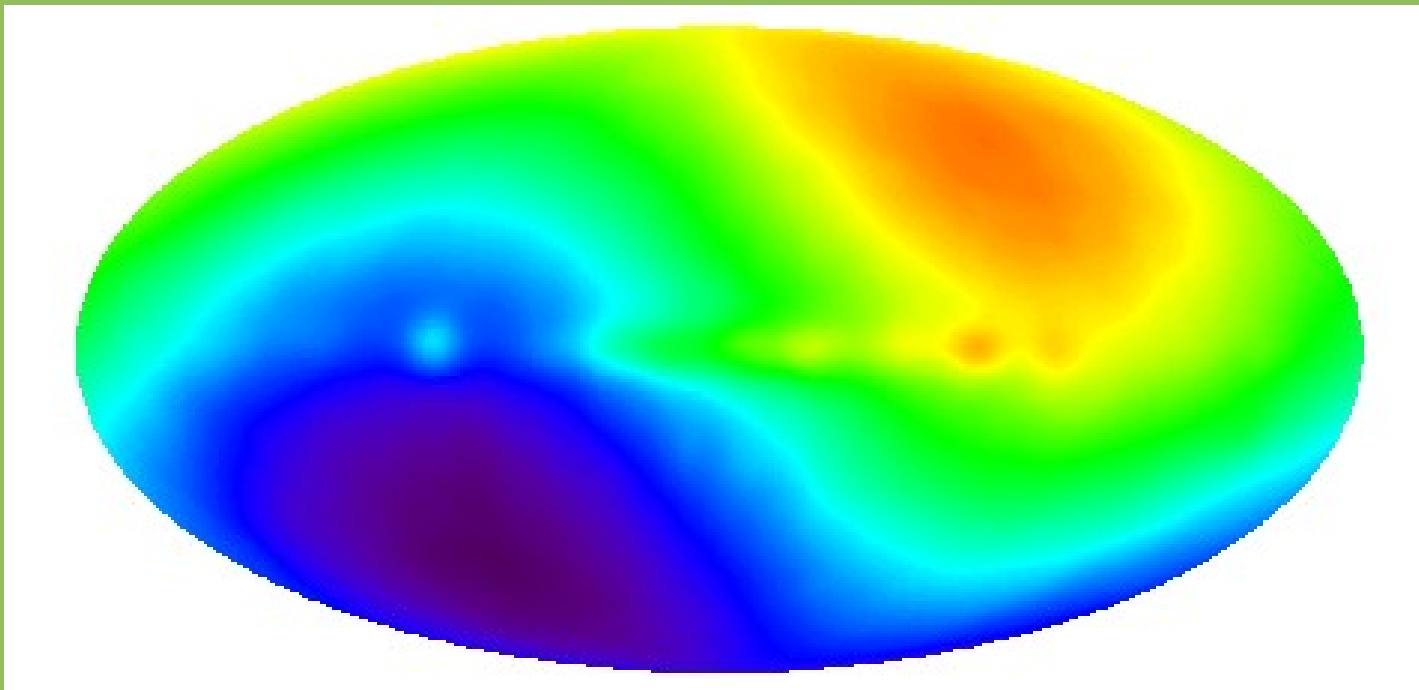
$$\tau^{\varphi\alpha}_{;\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x^\lambda} g^{\lambda\alpha} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \sqrt{g} (P + \epsilon) U^\lambda U^\alpha \right) + \Gamma_{\varphi\lambda}^\alpha (P + \epsilon) U^\varphi U^\lambda = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x^\lambda} g^{\lambda\alpha} + \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (P + \epsilon) \right) U^\lambda U^\alpha + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (U^\lambda U^\alpha) (P + \epsilon) + \left( \Gamma_{\varphi\lambda}^\alpha U^\varphi U^\lambda + \Gamma_{\varphi\lambda}^\varphi U^\lambda U^\alpha \right) (P + \epsilon) = 0$$

# Cosmología Relativista

- Principio cosmológico
- Homogeneidad e isotropía ¿en el tiempo de quién?
- En el tiempo de los observadores cayentes.
- Los observadores cayentes están definidos en todos los puntos.
- Tienen la misma película del Universo.
- Desplazándolas pueden sincronizar sus relojes





# El tiempo cósmico

- El tiempo cósmico está bendecido por la RG
- Termómetros como relojes.
- Observadores fundamentales.
- Galaxias fundamentales.
- Si un observador ve el Universo Isótropo, otro que se mueva con respecto a él, no lo verá isótropo.
- EL CMB es un buen ejemplo.

# El Universo Perfecto

- Un fluido perfecto es aquel en el que podemos encontrar en cada punto un observador que ve su microentorno isótropo.
- En el Universo podemos encontrar en cada punto un observador que lo ve todo isótropo.

# Principio cosmológico

- El Universo es un fluido perfecto.
- El Universo es un fluido “pluscuamperfecto”
- Principio cosmológico: Hay observadores cayentes que ven el Universo isótropo, huelga decir que homogéneo.
- Los observadores cayentes tienen la descripción más sencilla del Universo.
- Además pueden utilizar el tiempo cósmico.
- Pero nosotros no somos observadores fundamentales.

# Curvatura homogénea

- No sólo hay homogeneidad para funciones termodinámicas
- $T(t)$ ,  $P(t)$ , ... composición química, ...
- ...número de seres vivos...
- También debe haber homogeneidad en los tensores de curvatura.
- La curvatura es homogénea pero no estacionaria.
- Busquemos una métrica

# Métrica de Robertson Walker

$$dl^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right)$$

Elemento de arco espacial

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2g_{0r} dt dr + 2g_{0\theta} dt d\theta + 2g_{0\varphi} dt d\varphi + dl^2$$

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2$$

$$ds^2 = -dt^2 + R^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right)$$

Métrica de  
Robertson-Walker

# El espacio espacial

$$g_{ij} = R^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g^{ij} = R^{-2} \begin{pmatrix} 1-kr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1-kr^2} \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1-kr^2) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r(1-kr^2)\sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$$

# Geodésicas

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{kr}{1-kr^2} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 - r(1-kr^2) \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 - r(1-kr^2) \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0$$

# Geodésicas radiales

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{kr}{1-kr^2} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{k}{R^2} r = 0$$

$$\left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = \frac{1-kr^2}{R^2}$$

$$r = r_0 \sin \left( s \frac{k^{1/2}}{R} \right)$$

Si  $k=1$ ,  $r$  vuelve a ser 0 para  $s = 2\pi R$

$R$  es el radio del Universo (!)



# Geodésicas radiales en espacio-tiempo

- Las galaxias fundamentales son cayentes: siguen geodésicas.
- Existen geodésicas radiales. Las galaxias fundamentales siguen geodésicas radiales.
- Podemos suponer que no hay variación en las coordenadas angulares.
- En ellas podemos emplear el tiempo cósmico. Su tiempo y nuestro tiempo pueden ser el mismo.

# Desplazamiento al rojo cosmológico

Galaxia observada	$(r_1, \theta_1, \varphi_1)$	pulsos emitidos en $t_1$ y $t_1 + \delta t_1$
Nosotros	$(0, \theta_1, \varphi_1)$	pulsos recibidos en $t_0$ y $t_0 + \delta t_0$

procesos luminosos:  $d\tau = 0$

$$dt^2 = R^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

De Robertson  
-Walker

Primer pulso: 
$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_1)$$

Segundo pulso: 
$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R} = f(r_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R}$$

# Z cosmológico

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R}$$

$$\int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{R} + \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0} \frac{dt}{R} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0} \frac{dt}{R} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R}$$

$$\int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{R} = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R} \quad \frac{t_1 + \delta t_1 - t_1}{R(t_1)} = \frac{t_0 + \delta t_0 - t_0}{R_0} \quad \frac{\delta t_1}{R(t_1)} = \frac{\delta t_0}{R_0}$$

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\delta t_0 - \delta t_1}{\delta t_1}$$

$$z = \frac{R_0}{R} - 1$$

# Distancia propia

Hacemos  $dt=0$

$$ds = R \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Distancia propia  $d_1 = R \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = Rf(r_1)$

$$f(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} r_1 & \text{for } k=1 \\ r_1 & \text{for } k=0 \\ \sinh^{-1} r_1 & \text{for } k=-1 \end{cases}$$

# ¿Ley de Hubble?

si en el Universo actual es  $k = 1$  entonces  $d_1 = Rr_1$

la distancia propia presente sería  $d_1 = R_0 r_1$

derivando  $\dot{d}_1 = \frac{\dot{R}}{R} d_1$

Que parece la ley de Hubble pero  $\dot{d}_1$  no es  $z$  a no ser que las distancias sean muy pequeñas como para que

$$\dot{d}_1 = Hd_1 \approx \frac{1}{R(t_1)} \frac{R_0 - R(t_1)}{t_0 - t_1} d_1 = z$$

# Distancias

- Hay dos formas básicas de medir distancias:
- a) comparando la luminosidad (previamente conocida) con el flujo recibido.
- b) Comparando el tamaño real (previamente conocido) con el tamaño angular observado.
- Si aplicamos ambos métodos obtenemos la distancia de luminosidad y la distancia de diámetro.
- Su relación con la distancia propia depende de la curvatura.

Distancia de luminosidad  $d_L = (1+z) R_0 r_1$

Distancia de diámetro  $d_D = \frac{R_0 r_1}{1+z}$

# Relaciones aproximadas

$$R = R_0 \left( 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right)$$

$$\frac{R_0}{R} = 1 + H_0(t_0 - t) + \left( 1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \dots$$

$$z = H_0(t_0 - t) + \left( 1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \dots$$

$$t_0 - t = \frac{1}{H_0} \left( z - \left( 1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + \dots \right)$$

$$f(r) \approx r = \int_t^{t_0} \frac{dt}{R} = \frac{1}{R_0} \left( (t_0 - t) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t)^2 + \dots \right) = \frac{1}{R_0 H_0} \left( z - \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right)$$

$$d = \frac{1}{H_0} \left( z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right)$$

De interés observacional



# El Universo Perfecto

$$U^0=1 \quad U^i=0 \quad J^\alpha \equiv (n, 0, 0, 0) \quad g = R^6 r^4 (1 - kr^2)^{-1} \sin^2 \theta$$

$$\frac{d}{dt}(nR^3) = 0$$

$$nR^3 = \text{constante}$$

Ecuación de continuidad

# Energía-momento

$$\Gamma_{00}^{\mu} = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial x^i} = 0$$

$$\frac{-\partial P}{\partial t} + \frac{\sqrt{1-kr^2}}{R^3 r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left( \frac{R^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \right) (\epsilon + P) \right) = 0$$

$$R^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left( R^3 (\epsilon + P) \right)$$

Puede dar T(R) pero no R(t)

# Para fotones

$$\epsilon = 3P \quad R^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left( R^3 (\epsilon + P) \right)$$

$$PR^4 = \text{constante}$$

Como:  $P \propto T^4$

$$T \propto R^{-1}$$

# Para materia

$$\epsilon = mn + \frac{3}{2}nT$$

$$R^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left( R^3 (\epsilon + P) \right)$$

$$PR^5 = \text{constante}$$

Como:  $n \propto R^{-3}$

$$TR^2 = \text{constante}$$

# Entropía

Expresión general

$$dS = \frac{1}{T} d(\epsilon V) + \frac{1}{T} P dV = \left( \frac{\epsilon + P}{T} + \frac{V}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial V} \right) + \frac{V}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT$$

Si  $P = P(V, T)$  y  $\epsilon = \epsilon(V, T)$

De la igualdad de las derivadas cruzadas

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\epsilon + P}{T} + \frac{V}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial V} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{V}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\epsilon + P}{T} + \frac{V}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial V}$$

$$dS = \frac{\partial P}{\partial T} dV + \frac{V}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT$$

$$ndV + Vdn = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\epsilon + P}{T} + \frac{V}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial V}$$



si  $\epsilon = 3P$  y  $\epsilon = \epsilon(T, \text{only})$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{4P}{T} \longrightarrow P \propto T^4 \longrightarrow \epsilon \propto T^4$$

Paso a magnitudes intensivas, por barión

$$dS = \frac{\partial P}{\partial T} dV + \frac{V}{T} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT$$

$$d\sigma = -\frac{\partial P}{\partial T} \frac{1}{n^2} dn + \frac{1}{Tn} \frac{\partial \epsilon}{\partial T} dT$$

$d\sigma = 0$  en el Universo

$$\frac{\partial P}{\partial T} \frac{dn}{n} = \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \frac{dT}{T}$$

No sólo para fotones;  
Para cualquier partícula relativista !

$$\frac{1}{3} \frac{dn}{n} = \frac{dT}{T}$$

$$\frac{n^{1/3}}{T} = \text{constante}$$

Como :  $n \propto R^{-3}$

$$T \propto R^{-1}$$

Ley de enfriamiento válida para casi toda la historia del Universo (salvo para las partículas materiales hoy; sí para los fotones del CMB)

# Entropía absoluta

si  $n$ ,  $\epsilon$  y  $P$  dependen de  $V$

$$S = \frac{V(\epsilon + P)}{T}$$

El sueño de un termodinámico

$$\sigma = \frac{\epsilon + P}{nT} = \frac{4}{3} \frac{\epsilon}{nT} = \frac{4}{3} \frac{aT^3}{n} \approx \frac{\text{número de fotones}}{\text{número de bariones}}$$



$$\varepsilon = aT^4 \quad \text{para fotones}$$

$$\varepsilon = \frac{7}{16} aT^4 \quad \text{para neutrinos}$$

$$\varepsilon = \frac{7}{8} aT^4 \quad \text{para electrones y positrones}$$

# El fondo cósmico de neutrinos

Antes del desacoplamiento de los neutrinos

$$\epsilon = \left( 6 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{7}{8} + 1 \right) aT^4 = \frac{43}{8} aT^4 \quad \longrightarrow \quad \sigma = \frac{43}{6} \frac{aT^3}{n}$$

Entre desacoplamiento y aniquilación

$$\epsilon = \left( 2 \times \frac{7}{8} + 1 \right) aT^4 = \frac{11}{4} aT^4 \quad \longrightarrow \quad \sigma = \frac{11}{3} \frac{aT^3}{n}$$

Tras aniquilación

$$\epsilon = aT^4 \quad \longrightarrow \quad \sigma = \frac{4}{3} \frac{aT^3}{n}$$

$$\frac{11}{3} \frac{aT_{antes}^3}{n} = \frac{4}{3} \frac{aT_{tras}^3}{n} \quad \frac{T_{tras}}{T_{antes}} = \left( \frac{11}{4} \right)^{1/3} \approx 1.4 \quad T_{neutrinos} \approx 2K$$

# Bariones y fotones

Entre la Igualdad y la Recombinación

$$\epsilon = mn + \frac{3}{2}nT + aT^4$$

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{aT^3}{n} \approx n_\gamma / n$$

$$P = nT + \frac{1}{3}aT^4$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} \frac{dn}{n} = \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \frac{dT}{T}$$

$$(1 + \sigma) dn = 3n(1/2 + \sigma) dT/T$$

Hoy  $n_\gamma = 4 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$  mientras que  $n = 6 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-3}$

$\sigma = 10^9 - 10^{10}$  (universo caliente).  $\sigma$  es constante

$$dn/n = 3 dT/T$$

$$n \propto T^3$$

$$TR = \text{constante}$$

Ley muy constante en la historia del Universo

# Ecuaciones de Einstein

$$\tau^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (P + \varepsilon) U^\mu U^\nu$$

$$\tau_\lambda{}^\lambda = 3P + \varepsilon$$

Tras larga, fácil y placentera deducción:

$$3 \frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi(\varepsilon + 3P)$$

$$R \ddot{R} + 2 \dot{R}^2 + 2k = 4\pi R^2(\varepsilon - P)$$

$$2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{r^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi P$$

$$\frac{8\pi\varepsilon}{3} R^3 = \dot{R}^2 R + kR$$

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon R^3) = -3 R^2 \dot{R} P$$

Ecuación de Einstein-Friedmann

Ecuación de conservación de energía

# Conclusiones ¿buenas?

Hace falta ecuación de estado. Cualquiera que esta sea:

$$3 \frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi(\epsilon + 3P) \quad \epsilon > 0, P > 0 \text{ luego } \ddot{R} < 0 \text{ Como observaciones } \dot{R} > 0 \text{ Big-Bang}$$

$$\frac{d}{dt}(\epsilon R^3) = -3R^2 \dot{R} P \quad \epsilon \text{ decrece más rápidamente que } R \text{ crece}$$

$$\frac{8\pi\epsilon}{3} R^3 = \dot{R}^2 R + kR \quad \epsilon R^3 \text{ acabará siendo cero} \quad \dot{R}^2 + k = 0$$

Si  $k=-1$ , expansión indefinida

Si  $k=0$ , Expansión se detiene en tiempo infinito

Si  $k=1$   $\dot{R}$  puede ser 0 antes. Máximo,  $\dot{R} < 0$  Big-Crunch=coalescencia

$$\frac{8 \pi \epsilon}{3} = H^2 + \frac{k}{R^2}$$

Si  $k=0$      $\epsilon_c = \frac{3}{8 \pi} H^2$

Densidad crítica

$$\Omega = \frac{\epsilon}{\epsilon_c}$$

Parámetro de densidad

$$\Omega = 1 + \frac{k}{R^2 H^2}$$

# Era de la materia

$P = w \epsilon$  , Ecuación de barotropía;  $w$ , índice barotrópico

Para fotones, por ejemplo,  $w = 1/3$

Para partículas materiales,  $w = 0, P = 0$

$$\Omega = 2q$$

$$R^2 = \frac{k}{H^2(2q - 1)}$$

$$\dot{a} = H_0^2 \left( 1 - 2q_0 + 2q_0 \frac{1}{a} \right)$$

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \left( 1 - 2q_0 + 2 \frac{q_0}{x} \right)^{-1/2} dx$$

Tiempo de vida del  
Universo

# En era de la materia

$k = -1$ ,  $q < 1/2$ ,  $\Omega < 1$  universo abierto

$k = 1$ ,  $q = 1/2$ ,  $\Omega = 1$  universo crítico  
(plano, de Einstein-de Sitter)

$k = 1$ ,  $q > 1/2$ ,  $\Omega > 1$  universo cerrado (o cíclico)



# Modelos de Friedmann

Primer modelo  $k=0$

$$\dot{a} = H_0 a^{-1/2} \longrightarrow a = \left( \frac{3}{2} H_0 \right)^{2/3} t^{2/3}$$

$$t = (2/3) \frac{1}{H} \longrightarrow t_0 = (2/3) \frac{1}{H_0}$$

$$H = H_0 a^{-3/2}$$

$$\epsilon = mn = \frac{3H_0^2}{8\pi} a^{-3} = \frac{1}{6\pi} t^{-2}$$

$$T = T_0 a^{-2} = T_0 \left( \frac{3}{2} H_0 \right)^{-4/3} t^{-4/3}$$

# Universo cerrado

Cambio de variable:  $1 - \cos \theta = \frac{2q_0 - 1}{q_0} a$

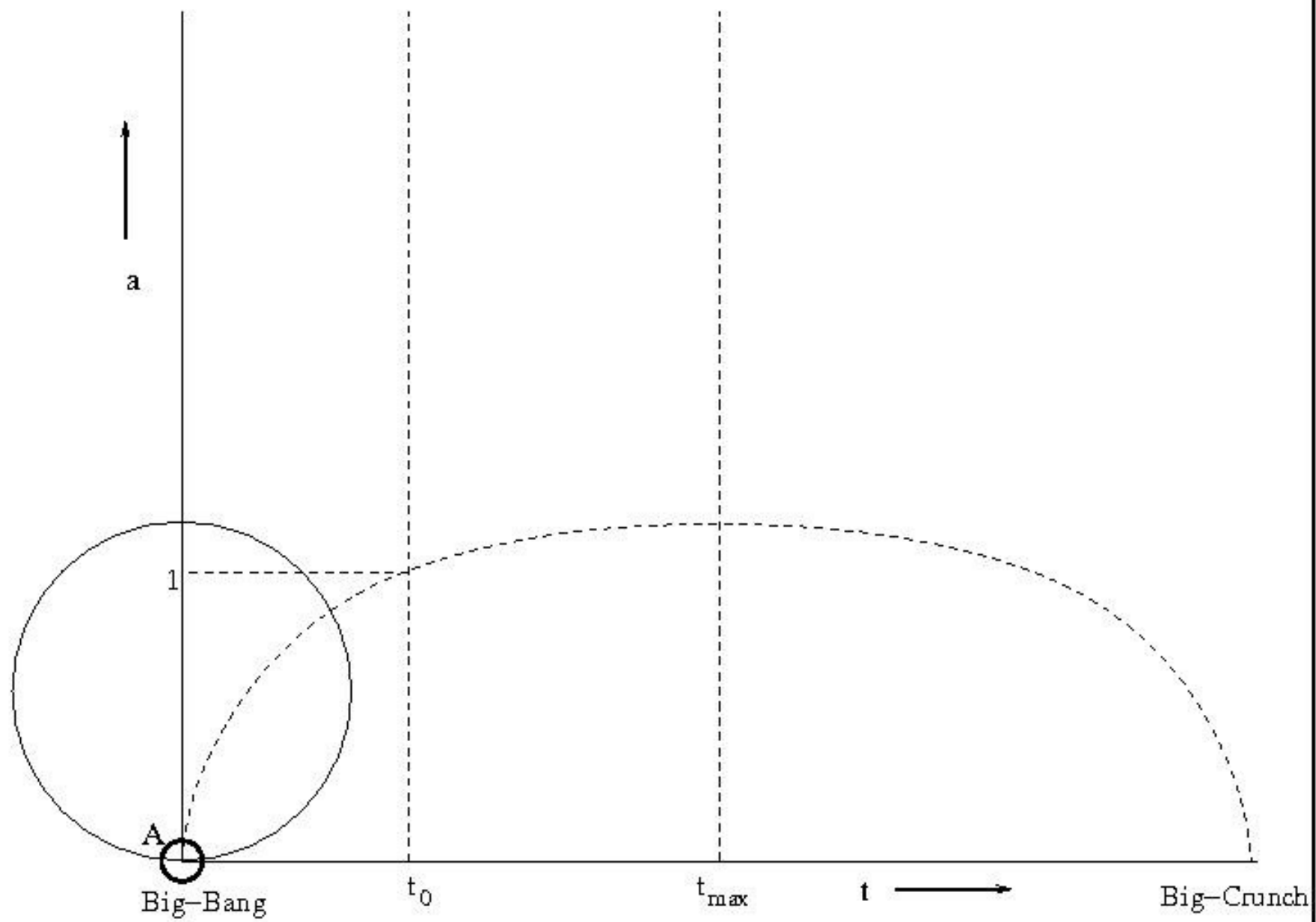
$$tH_0 = q_0 (2q_0 - 1)^{-3/2} (\theta - \sin \theta)$$

$$\begin{cases} X = A \theta - A \sin \theta \\ Y = A - A \cos \theta \end{cases}$$

$$X \equiv t$$

$$A \equiv q_0 (2q_0 - 1)^{-3/2} (\theta - \sin \theta)$$

$$Y = R$$



# Solución analítica

$$t = \frac{q_0}{H_0} (2q_0 - 1)^{-3/2} \left( \cos^{-1} \left( 1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0} a \right) - \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0} a \right)^2} \right)$$

# El universo abierto

$$\theta = i \psi$$

$$1 - \cosh \psi = \frac{2q_0 - 1}{q_0} a$$

$$t = \frac{q_0}{H_0} (1 - 2q_0) - 3/2 \left( \sqrt{\left(1 + \frac{1 - 2q_0}{q_0} a\right)^2} - 1 \cosh^{-1} \left(1 + \frac{1 - 2q_0}{q_0} a\right) \right)$$

# Distancias

$$r_1 = \frac{zq_0 + (q_0 - 1)(-1 + \sqrt{2q_0z + 1})}{H_0 R_0 q_0^2 (1 + z)}$$

Para  $k=-1, 0, 1$ . Para  $k=0$  la expresión se simplifica

$$r_1 = \frac{2}{R_0 H_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right)$$

# Ejemplo numérico

Considérense tres universos, con  $q_0=0.1$  (abierto)  $q_0=0.5$  (crítico) y  $q_0=1$  (cerrado)

Calcúlese  $R_0$  y  $t_0$

Considérense objetos a  $z=0.01, 1, 10, 1000$   
y calcúlese para los tres universos:  $r_1, d_L, d_D$

# El Universo curvo

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi\varepsilon_0 R_0^3}{3R} - k \quad \text{Einstein-Friedmann}$$

para  $R$  muy pequeño  $k$  será despreciable

$$\frac{8\pi\varepsilon_0}{3} = 2q_0 H_0^2 \text{ luego}$$

$$\frac{8\pi\varepsilon_0 R_0^3}{3R} = 2q_0 H_0^2 \frac{k}{H_0^2(2q_0 - 1)} \frac{R_0}{R} = \frac{2q_0}{|2q_0 - 1|} \frac{R_0}{R}$$

Hay que comparar con  $|k|$

La curvatura empieza a ser importante para  $a=1/4$  si  $k<1$ . Si el Universo es cerrado la curvatura es importante en el futuro.



# Era de la luz

$$\epsilon = 3P \quad P \propto R^{-4} \quad \epsilon \propto R^{-4}$$

$$R^2 = 2 \sqrt{\frac{8\pi}{3} [\epsilon R^4] t - kt^2}$$

$$\text{Si } k=0 \quad R \propto t^{1/2}$$

$$R^2 = \frac{k}{H^2(q-1)} \quad \text{Si } k=0, q=1 \quad (\text{no a } 1/2 \text{ como antes})$$

$$\Omega = q \quad (\text{antes } \Omega = 2q \text{ )}$$

# Horizonte en CMB

En la métrica de RW hacemos  $dt=0$  ,  $dr=0$  ,  $d\varphi=0$   
 $ds = R r d\theta$

La distancia al horizonte es

$$d_H \approx t \approx \left( \frac{R}{R_0} \right)^{3/2} \left( \frac{2}{3} H_0^{-1} \right) = \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \frac{2}{3} H_0^{-1}$$

$$r_1 = \frac{2}{R_0 H_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) \longrightarrow r \approx \frac{2}{R_0 H_0}$$

$$s = \frac{2}{H_0 z} \theta$$

Con  $s = d_H$  resulta:  $\theta \approx \frac{1}{3} z^{-1/2} = 0.01 \text{ rad} \approx 1^\circ$