

INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD

Carmen Batanero, Juan Jesús Ortiz y Luis Serrano

batanero@ugr.es, jortiz@ugr.es, lserrano@ugr.es,

En recuerdo a M. Jesús Cañizares y a su trabajo de investigación en la Didáctica de la Probabilidad

RESUMEN

La introducción generalizada de la probabilidad en los diversos niveles educativos ha ocasionado un gran auge en la investigación sobre didáctica de la probabilidad. En este trabajo hacemos un breve resumen sobre el estado actual de dicha investigación..

ABSTRACT

The presence of probability at the different educational levels explains the growth of research in probability education. In this work we present a brief summary of current state in this research.

INTRODUCCIÓN

Hacer una panorámica de la investigación sobre didáctica de la probabilidad no es una tarea sencilla, debido a la explosión experimentada en estos estudios en las últimas dos décadas. Mientras que hasta 1980 los trabajos en el tema eran muy escasos, y limitados al campo de la psicología (Shaughnessy, 1982), la situación actual es muy diferente, como se recoge en Jones, y Thornton (2005).

En lo que sigue, reflejamos nuestra visión personal sobre los principales temas investigados en relación a la didáctica de la probabilidad, remitiendo al lector al excelente libro de Jones (2005) para un estado de la cuestión actualizado sobre la investigación, el currículo, el aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad en los niveles no universitarios.

INVESTIGACIÓN SOBRE DESARROLLO COGNITIVO

Los estudios de Piaget e Inhelder (1951) inician el análisis detallado de las etapas en la adquisición de las ideas de aleatoriedad y probabilidad, el razonamiento combinatorio, distribución y convergencia, así como de la capacidad de cuantificación de probabilidades en niños y adolescentes. Estos estudios indican que en el estadio

preoperacional (4-7 años) los niños rechazan la idea de azar o la conciben de una forma determinista; tienen dificultad para diferenciar certeza e incertidumbre, carecen de estrategias combinatorias y al comparar probabilidades sólo toman en cuenta los casos favorables. En el periodo de las operaciones concretas (7-11) los niños adquieren progresivamente una comprensión del azar, pero aún confían demasiado en la posibilidad de controlarlo. Comienzan a ser capaces de enumerar situaciones combinatorias sencillas, aunque la estrategia no es siempre completa o consistente. Sus estrategias de comparación de probabilidades se amplían, usando tanto los casos favorables como los desfavorables, sin llegar al razonamiento proporcional completo. No llegan a reconocer la ley de los grandes números.

Finalmente en la etapa de operaciones formales (a partir de 12 años) los chicos progresivamente conciben el azar como ausencia de patrones e impredecibilidad, adquieren la intuición de la convergencia, llegan a usar proporciones en la comparación de probabilidades y alcanzan la capacidad de enumeración combinatoria.

Posteriormente, algunas de estas conclusiones son debatidas por Fischbein (1975), cuyos trabajos constituyeron uno de los primeros puentes de unión entre la psicología y la educación matemática. Interesado no solo por la formación de los conceptos formales, sino por la aparición de intuiciones parciales sobre los conceptos estocásticos, se preocupó también del efecto de la instrucción. Sus investigaciones (e.g. Fischbein y Gazzit, 1984), apoyaron decididamente la conveniencia de adelantar la educación estocástica y mostraron que, sin instrucción, es difícil que se desarrolle un razonamiento estocástico adecuado, incluso una vez que se alcanza la etapa de las operaciones formales. Los trabajos de Green (1983) sintetizan estas investigaciones, proporcionando un cuestionario, donde recoge versiones de papel y lápiz de las tareas propuestas por Piaget y Fischbein, permitiendo evaluar el desarrollo cognitivo en probabilidad de los chicos de 11 a 16 años.

Otros autores (e.g. Truran, 1995; Serrano, 1996; Cañizares, 1997) han estudiado también la influencia de las creencias previas y concepciones animistas de los niños, su capacidad de percepción de lo aleatorio y comparación de probabilidades. La importancia que estos trabajos tienen para los profesores es que permiten seleccionar de una forma racional el tipo de tareas probabilísticas que podemos proponer a nuestros alumnos en función de su edad. Los instrumentos de evaluación contruidos en estas investigaciones son también útiles para valorar los conocimientos y modos de razonamientos de nuestros alumnos. Las investigaciones piagetianas también se

completan con el estudio del desarrollo evolutivo de los niños sobre otros conceptos (Tarr y Jones, 1997; Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz, 1999; Watson y Moritz, 2004) utilizándose, en algunos, casos entornos tecnológicos para explorar dichas concepciones (Pratt, 1998; 2000).

INVESTIGACIÓN SOBRE TOMA DE DECISIONES

Trabajos como los recogidos en Kahneman, Slovic y Tversky. (1982), que tocan entre otros puntos el razonamiento correlacional, la inferencia, la probabilidad condicional y regla de Bayes, inician los estudios psicológicos sobre toma de decisiones en situación de incertidumbre. Su programa de investigación, se basa en la idea de racionalidad acotada y describe los sesgos de razonamiento que ocurren como resultado de un proceso cognitivo (que denominan heurística) que lleva a una conclusión incorrecta, bien por usar un modelo inapropiado de la situación o por falta de estructuras cognitivas específicas. Los autores suponen que las heurísticas y sesgos son resistentes a la enseñanza y se dan incluso en sujetos con alta preparación matemática.

Otra perspectiva diferente (Nisbett y Ross, 1980) es considerar que podemos adquirir un razonamiento estadístico intuitivo correcto sobre conceptos abstractos, por ejemplo, comprender la Ley de los Grandes Números y aplicarlo para resolver los problemas cotidianos, siempre que reconozcamos la situación como aleatoria. La enseñanza podría mejorar nuestro razonamiento estadístico natural, que se adquiere por la experiencia repetida en resolución de problemas. (Sedlemeier, 1999).

Más recientemente, Gigerenzer (1994) sugiere que nuestra mente está mejor equipada para resolver problemas de probabilidad cuando la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias absolutas, en lugar de usar porcentajes o proporciones, porque se asemeja más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de *muestreo natural* a lo largo de nuestra experiencia (por ejemplo un médico en su consulta). Una representación adecuada de los problemas probabilísticos facilita el cálculo de probabilidades y produce soluciones acertadas a los problemas tratados, produciendo buenos resultados incluso en problemas que involucran el teorema de Bayes.

ENSEÑANZA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Ya que la probabilidad forma parte del currículo, las investigaciones realizadas en contextos educativos específicos aumentan, y son frecuentes aquellas que tratan de

evaluar el aprendizaje, tanto a nivel escolar como universitario. Por ejemplo, Tauber, Batanero y Sánchez (2005) diseñan una secuencia de aprendizaje basada en el uso de ordenadores, donde los estudiantes adquieren los diferentes elementos del significado de la distribución normal, a partir de resolución de problemas de análisis de datos. La tecnología introduce nuevos significados en los conceptos que se trata de enseñar, y ello lleva también a nuevas formas de evaluación, basadas en trabajos abiertos y tareas complejas de análisis de datos (Batanero, Tauber. y Sánchez, 2004). Un enfoque similar es seguido por Alvarado y Batanero (2006) para el estudio del aprendizaje del Teorema Central del Límite. También se han analizado las concepciones espontáneas de los sujetos adultos sobre conceptos estocásticos avanzados (Ruiz, Albert y Batanero, 2006), así como la resistencia de ciertas concepciones incorrectas y heurísticas tras un aprendizaje basado en el cambio conceptual (Sáenz, 1995; 1998; Barragués, 2002; Guisasola y Barragués, 2002).

Otras investigaciones se centran en la evaluación de la capacidad de los estudiantes para resolver problemas de probabilidad, las variables que afectan la dificultad de las tareas y los posibles errores o conflictos en el proceso de resolución (Cañizares, 1997; Lonjedo y Huerta, 2004, 2005; Díaz, 2005; Díaz y de la Fuente, en prensa).

CURRÍCULO Y FORMACIÓN DE PROFESORES

A pesar de que la probabilidad se incluye de una forma oficial en el currículo, no siempre se enseña, y muchos profesores hacen un énfasis excesivo en la enseñanza de fórmulas, en lugar de seguir las directrices actuales que recomiendan el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas y experimentación con fenómenos aleatorios. Los estudios sobre libros de texto indican que es difícil para los profesores encontrar un apoyo para cambiar el enfoque tradicional, ya que éstos presentan a veces una visión sesgada o incompleta del tema (Ortiz, 1999; Cañizares, Ortiz, Batanero, y Serrano, 2002; Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2005).

Las actitudes de los profesores (Estrada, 2002; Azcárate, Serrado y Cardeñoso, 2006), sus creencias y conocimientos sobre la probabilidad (Cardeñoso, 1998; Ortiz y cols., 2006) y su conocimiento profesional (Azcárate, 1995) son también objeto de investigación reciente. Los resultados indican la influencia que sobre la enseñanza tienen las concepciones deterministas (Meletiou, 2003) y la falta de formación docente sobre estos temas (Gattuso y Pannone, 2002), presentando en algunos casos incluso conocimientos erróneos sobre algunos conceptos (Stohl, 2005).

Por otro lado, la naturaleza dual de la probabilidad, las circularidades en la definición desde el punto de vista clásico, frecuencial o subjetivo aumentan la dificultad de la enseñanza, puesto que una comprensión completa no puede restringirse a uno solo de estos puntos de vista (Steinbring, 1991; Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Es por ello que, paralelamente al cambio del currículo surge la necesidad de formación didáctica de los profesores que incluye, además del conocimiento estadístico los siguientes componentes básicos (Batanero, Godino y Roa, 2004):

- La reflexión epistemológica sobre la naturaleza del conocimiento estocástico, su desarrollo y evolución.
- Análisis de las transformaciones del conocimiento para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza.
- Estudio de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas que permitirá orientar mejor la tarea de enseñanza y evaluación del aprendizaje.
- Análisis del currículo, situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos.

Respecto al uso de la tecnología, Sánchez (2002) mostró que algunos futuros profesores manifestaban dificultades en la utilización adecuada del software para fomentar la comprensión de los alumnos y consideraban que las simulaciones eran útiles sólo después de estudiar la probabilidad de manera teórica; en otros casos pasan por alto las ideas previas correctas de los estudiantes, centrándose sólo en sus errores (Stohl, 2005).

SISTEMATIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La exposición anterior muestra que la investigación en didáctica de la probabilidad, que forma parte de la relacionada con la educación estadística comenzó en forma dispersa, desde diferentes grupos que poco a poco tratan de conectarse. En 1994 se creó un grupo de trabajo sobre estadística y probabilidad dentro de los congresos internacionales sobre Psicología de la Educación Matemática (PME), que estuvo trabajando hasta el año 2000. En la actualidad, existen grupos de educación estadística en ICME (International Congress on Mathematics Education), CERME (European Research in Mathematics Education Conference), AERA (American Educational Research Association), RELME (Congresos Latino Americanos de Matemática

Educativa), CIBEM (Congresos Iberoamericano de Educación Matemática) y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, entre otros.

Sin dejar de reconocer la contribución desde estos grupos, el principal impulsor de la investigación ha sido el Instituto Internacional de Estadística (ISI, <http://isi.cbs.nl>) que en 1948 establece el *Comité de Educación*, marcando el comienzo de un programa sistemático de apoyo a la educación. En 1991 se crea *IASE (International Association for Statistical Education)* (<http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/>) que desde su constitución, toma conciencia de la importancia de la investigación y la necesidad de difusión de sus resultados, creando, para ello la revista *Statistics Education Research Journal* (<http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/>), Otras revistas como *Teaching Statistics*, y *Journal of Statistics Education*, se orientan principalmente a profesores (en los niveles de educación básica, secundaria y universitaria, respectivamente).

Otro hito para el desarrollo del campo fue la puesta en marcha de las conferencias internacionales sobre enseñanza de la estadística (ICOTS), la primera de las cuales se organizó en 1992, continuando cada cuatro años. En 2006 se ha celebrado ICOTS-7, en Brasil (<http://www.maths.otago.ac.nz/icots7/>), centrado en la idea de cooperación, en sus diferentes formas:

- El aprendizaje a partir del trabajo cooperativo con proyectos o actividades de análisis exploratorio de datos de los alumnos en la clase de estadística, apoyado por las recientes teorías de aprendizaje que resaltan el valor de la interacción social y el discurso en la construcción del conocimiento.
- La cooperación entre organismos oficiales o sociedades de estadística y educadores, para facilitar el uso de datos estadísticos como recurso didáctico, para incrementar la valoración de la estadística y el trabajo estadístico o para asegurar la colaboración de los ciudadanos en encuestas y censos.
- La necesaria colaboración entre profesores (de diferentes niveles educativos) e investigadores en educación estadística en la recogida de datos sobre la enseñanza o en la evaluación del aprendizaje, así como en la interpretación del análisis de estos datos.
- Las posibilidades de intercambio, fomentadas desde diversos organismos nacionales e internacionales, por medio de proyectos nacionales o internacionales que posibilitan la supresión de las barreras físicas y el trabajo a distancia de estudiantes, profesores e investigadores.
- La importancia de tener en cuenta simultáneamente los puntos de vista global y

local en la enseñanza de la estadística, puesto que, aunque la sociedad como un todo sigue unas ciertas tendencias que no debemos ignorar, el respeto a las minorías, la atención a la diversidad, los aspectos afectivos, que constituyen la variabilidad educativa, son también esenciales.

Entre los congresos en marcha, destacamos el Joint ICMI /IASE Study: Statistics Education in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education (http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/) centrado en la problemática de la formación de profesores de matemáticas en el campo específico de la estadística.

¿CÓMO CONTINUAR?

Es indiscutible que tanto la probabilidad como la estadística se han consolidado a lo largo del siglo XX como base del método científico y de la toma de decisiones. Esta influencia se observa también en el aumento notable del uso de ideas de probabilidad y estadística en diferentes disciplinas. Sin embargo, la investigación que acabamos de reseñar indica que muchos conceptos fundamentales de probabilidad, incluso los aparentemente elementales, se usan incorrectamente o no se comprenden. Por otro lado, la cultura en probabilidad (Gal, 2005) requiere no sólo conocimientos, sino actitudes que lleven a los estudiantes a interesarse por mejorar su conocimiento, incluso finalizado su aprendizaje en la escuela o universidad. Como sugirió Laplace, el aprendizaje de la probabilidad nos ayuda a evitar ilusiones en la toma de decisiones y por ello “*no hay ciencia más digna de nuestro estudio ni más útil para que se incluya en el sistema público de educación*” (Laplace, 1986/1825, pp. 206-207).

La multiplicidad de problemas de investigación abiertos requiere incrementar el número de investigadores interesados por resolverlos. Esperamos que esta exposición anime a algunos de los lectores a iniciarse en este campo.

Agradecimiento: Trabajo apoyado por el proyecto SEJ2004-00789, MEC, Madrid y FEDER y Grupo PAI FQM-126,. Junta de Andalucía

REFERENCIAS

Alvarado, H. y Batanero, C. (2006). Designing a study process of the central limit theorem for engineers En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia), Brasil:

- International Association for Statistical Education. CD ROM.
- Azcárate P.(1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
- Azcárate, P., Serradó, A. y Cardeñoso, C. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in Compulsory education En A. Rossman y B. Chance (Eds.); *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia), Brasil: International Association for Statistical Education. CD ROM
- Barragués, J. I. (2002). *La enseñanza de la probabilidad en primer ciclo de universidad. Análisis de dificultades y propuesta alternativa de orientación constructivista*. Tesis doctoral. Universidad del País Vasco.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12. On line: <http://www.amstat.org/publications/jse/>
- Batanero, C., Henry, M. y Parzys, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.
- Batanero, C., Tauber, L. y Sánchez, V. (2004). Students' reasoning about the normal distribution. En D. Ben-Zvi y J.B. Garfield (Eds), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking* (pp. 257-276). Dordrecht: Kluwer..
- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Cañizares. M. J. y Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO*, 14, 99-114.
- Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997). Subjective elements in children's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the XXI Conference on the Psychology of Mathematics Education*(v.2, pp. 49-56). University of Lahti.
- Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1999). Comprension de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*. 37, 37-55.
- Cañizares, M. J., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2002). Probabilistic language in Spanish textbooks. En B. Phillips (Ed.), *ICOTS-6 papers for school teachers* (pp. 207-211). Cape Town: IASE.

- Cardeñoso, J. M. (1998). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de las concepciones sobre aleatoriedad y probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.
- Díaz, C. (2005). Conflictos semióticos en el cálculo de probabilidades a partir de tablas de doble entrada. *Biaix*, 24. 84-91
- Díaz, C. y de la Fuente (En prensa). Dificultades en la resolución de problemas bayesianos: un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática*
- Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*, Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24.
- Gal, I. (2005). Democratic access to probability: Issues of probability literacy. En G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. (pp. 39-63). New York: Springer.
- Gattuso, L. y Pannone, M. (2002). Teacher's training in a statistic teaching experimentation. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*, (pp. 685-692). Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education.
- Gigerenzer (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright & P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp.129-161). Chichester: Wiley.
- Green, D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years, En D. E. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of ICOTS I* (pp. 766-783): Sheffield: Teaching Statistics Trust.
- Guisasola, J. y Barragués, J. I. (2002). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. *Enseñanza de las ciencias*, 20 (2), 285-302.
- Jones (Ed.) (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 65-92).. New York: Springer.
- Jones, G. A. y Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school:*

- Challenges for teaching and learning* (pp. 65-92).. New York: Springer.
- Kahnenmatt, P., Slovic y A. Tversky (Eds.) (1982), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Laplace, P. S. (1986). *Essai Philosophique sur les Probabilités*. Paris: Christian Bourgeois (trabajo original publicado en 1825).
- Lonjedo, M, A. y Huerta, P. (2004) Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos En Castro, E. y De la Torre, E. (Eds.), 2004, *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (pp 229-238). Universidade da Coruña.
- Lonjedo, M, A. y Huerta, P. (2005). The nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem resolution. *Proceedings of CERNE IV*. On line: <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/wg5litofpapers>.
- Meletiou, M. (2003). On the formalist view of mathematics: impact on statistics instruction and learning En A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of Third European Conference in Mathematics Education*. Bellaria, Italy: European Research in Mathematics Education Society.
- Nisbett, R. y Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgments*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Ortiz J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Ortiz, J. J. Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Huesca; SEIEM. CD ROM.
- Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Pratt, D. (1998). The coordination of the meanings for randomness. *For the learning of mathematics*, 18(3), 2-11.
- Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 602-625.
- Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (1996). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433-446

- Ruiz, B., Albert, A. y Batanero, C. (2006). An exploratory study of students' difficulties with random variables En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahia,) Brasil: International Association for Statistical Education. CD ROM.
- Sáenz, C. (1995). *Intuición y matemática en el razonamiento y aprendizaje probabilístico*, Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid.
- Sáenz, C. (1998). Teaching probability for conceptual change. *Educational Studies in Mathematics*, 35 (3). 233-254.
- Sánchez, E. S. (2002). Teachers' beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* CD ROM. Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education.
- Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de conceptos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 10(1), 7-25.
- Shaughnessy, J. M. (1982). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: MacMillan.
- Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, C. (2005). Randomness in textbooks: the influence of the deterministic thinking. *Proceedings of CERME 4*. On line; <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/SerradAzcCarde.pdf>
- Steinbring, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching. Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 503-522.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). Nueva York: Springer..
- Tarr, J. E., y Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students'

thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9, 39-59.

Tauber, L., Batanero, C., y Sánchez, V. (2005). Diseño, implementación y análisis de enseñanza de la distribución normal en un curso universitario, *EMA*, 9, 2005, 2, 82-105

Truran, K. M. (1995). Animism: A view of probability behaviour. In B. Atweh & S. Flavel (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth Annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia (MERGA)* (pp. 537-541). Darwin, N. T.: MERGA.

Watson, J. y Moritz, J. (2004). Fairness of a dice: A longitudinal study of students' beliefs and strategies for making judgements. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34,280-304.