SIGNIFICADOS DE LAS MEDIDAS DE POSICIÓN CENTRAL PARA LOS ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Belén Cobo

Tesis Doctoral

Directora: Dra. Carmen Batanero Bernabeu

GRANADA, 2003

RESUMEN

En esta investigación presentamos un estudio teórico-experimental sobre el significado y la comprensión de las medidas de posición central en la Educación Secundaria Obligatoria, que analiza los tipos de problemas, representaciones, procedimientos de cálculo, definiciones, propiedades y argumentaciones relacionados con estos objetos, tanto en su faceta institucional como personal.

El estudio experimental comienza con un análisis epistémico de libros universitarios, que permite determinar el *significado institucional de referencia* de las medidas de posición central para nuestro trabajo. Seguidamente, se hace un análisis detallado de las directrices curriculares para la educación secundaria en España y otros países y un estudio cualitativo de una muestra de 21 libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria, a partir de lo cual identificamos el *significado local* de las medidas de posición central en nuestro estudio.

La parte experimental consiste en un estudio comparado de evaluación del significado personal que los estudiantes de 1º y 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria atribuyen a estos conceptos. Para llevarla a cabo, hemos construido un cuestionario, justificando su validez de contenido en función del estudio teórico.

Los datos de una muestra de 312 alumnos se han analizado desde diversos puntos de vista. El análisis cuantitativo incluye los índices de fiabilidad y generalizabilidad del cuestionario, comparación de puntuaciones totales y puntuaciones en diferentes ítems en los dos grupos de estudiantes, análisis cluster y factorial para determinar su estructura de relaciones. Un análisis cualitativo de los elementos de significado usados correcta e incorrectamente por ítems y en el total de la prueba, sirve para determinar las tendencias generales del significado personal en los dos grupos. Un estudio semiótico detallado del proceso de resolución de cuatro estudiantes muestra la variabilidad del significado personal de los alumnos.

La investigación muestra el carácter multidimensional del significado y de la comprensión de los promedios, sugieren significados personales diferenciados para el mismo nivel de enseñanza y complementa por tanto las teorías que definen diferentes niveles jerárquicos de comprensión. Asimismo proporcionamos información detallada de errores y conflictos semióticos relacionados con los diferentes elementos de significado de los promedios.

INDICE

INTRODUCCIÓN

En los últimos decretos curriculares para la educación primaria y secundaria se incluyen contenidos estadísticos en prácticamente todos los países, aunque en la realidad docente estos contenidos no se enseñan con la profundidad que merecen. En el mejor de los casos, la enseñanza de la estadística es un pretexto para aplicar otros temas matemáticos y ejercitar la capacidad de cálculo o representación gráfica, olvidando el trabajo con datos reales y los aspectos de razonamiento estadístico.

En la Universidad la situación no es mejor. Aunque la estadística es una materia obligatoria en la mayor parte de los estudios universitarios o de formación profesional, es una asignatura considerada difícil y poco interesante para los alumnos, quienes presentan unas actitudes negativas que dificultan su aprendizaje. Parte de esta situación puede deberse a la falta de preparación estadística previa de los alumnos que finalizan la educación secundaria. Consideramos por tanto urgente la incorporación real de la enseñanza de la estadística en los niveles preuniversitarios.

Un problema que dificulta esta incorporación es el hecho de que la investigación didáctica sobre estadística es incipiente y comparativamente mucho menor que la realizada sobre otros temas del currículo matemático, como es la aritmética, geometría o incluso la probabilidad. Los conceptos estadísticos no recibieron interés por parte de Piaget y otros psicólogos que continuaron los estudios piagetianos de desarrollo evolutivo de las ideas matemáticas en niños y adolescentes. Tan sólo los estudios recientes de Watson y Moritz (1999, 2000) intentan paliar la falta de conocimiento sobre cómo los estudiantes adquieren y progresan en la comprensión espontánea de conceptos estadísticos.

Uno de los conceptos que más interés ha suscitado, dentro de la investigación en educación estadística son los promedios, sobre cuya comprensión y cálculo se han realizado diversas investigaciones que describen errores y concepciones erróneas en estudiantes de diversas edades, particularmente en alumnos universitarios. Estas investigaciones, sin embargo, no parten de un análisis epistemológico profundo de los conceptos – ni siquiera en el nivel elemental en que se enseñan en la educación primaria o secundaria-, han tocado puntos aislados de su comprensión y los instrumentos de evaluación empleados no se basan en un análisis de la enseñanza recibida por los estudiantes participantes en estas investigaciones.

Interesada por la mejora de la enseñanza de mis alumnos y en general de otros alumnos de secundaria, y motivada por integrarme en un equipo de investigación en el que pudiese abordar problemas próximos a mi trabajo profesional como profesora de secundaria, ingresé hace unos años en el Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Progresivamente, con ayuda de mis profesores, mi tutora, otros miembros del equipo de investigación y mis compañeros en el centro de trabajo, me fui centrando en la estadística y más concretamente en el problema abordado en esta Memoria.

En ella nos planteamos un estudio comparado de evaluación del aprendizaje de las medidas de posición central en los alumnos de los cursos Primero y Cuarto de

Educación Secundaria Obligatoria. Nos fundamentamos para ello, tanto en las investigaciones previas, como en el marco teórico de Godino (Godino, 1996b; Godino y Batanero, 1994; 1998a), en el que se tiene en cuenta una doble perspectiva, institucional y personal sobre el significado y comprensión de los objetos matemáticos. La decisión de tomar como objeto de estudio las medidas de posición central, se basa en las siguientes consideraciones:

- Como hemos indicado, es el tema de estadística en el que hemos encontrado mayor número de investigaciones previas, lo que permitirá dar un fundamento apropiado a la nuestra y al mismo tiempo completar las anteriores.
- Las medidas de posición central son objeto de enseñanza desde la educación primaria y sin embargo, siguen apareciendo errores y dificultades incluso en el nivel universitario.
- Son el fundamento de gran cantidad de conceptos y métodos estadísticos: dispersión, momentos, correlación y regresión, análisis de varianza, parámetros de las distribuciones de probabilidad, etc. Es por ello urgente conocer las dificultades de los alumnos en el tema, para fundamentar las propuestas didácticas que ayuden a resolverlas.

Las preguntas que sobre este tema nos hemos planteado y a las que tratamos de dar una respuesta, al menos parcial, con este trabajo son las siguientes:

1. ¿Cuál es el significado de las medidas de posición central?

A pesar de que esta pregunta parece tener una solución clara e inequívoca, argumentaremos a lo largo del trabajo que los objetos matemáticos son entidades complejas y su significado depende del contexto institucional en que se usan.

Para dar una primera respuesta a la pregunta, nos hemos ceñido al campo de la estadística descriptiva univariante, siendo conscientes que presentamos un significado limitado que se enriquece en la estadística multivariante e inferencial, así como en el cálculo de probabilidades. En el Capítulo 2 describiremos este significado que tomaremos como *significado institucional de referencia*, y que determinamos partiendo del análisis de algunos libros universitarios de estadística descriptiva. Previamente presentaremos nuestro marco teórico y la categorización en el mismo de tipos de elementos de significado, que nos servirán de base para el estudio.

2. ¿Cómo podemos usar nuestro marco teórico para sintetizar la investigación realizada hasta la fecha en relación a los promedios? ¿Cuáles son los elementos cuya comprensión aún no ha sido objeto de estudio?

En el Capítulo 3 presentamos una revisión bibliográfica de las principales investigaciones llevadas a cabo sobre las medidas de tendencia central, organizada en torno a los elementos de significado considerados en nuestro marco teórico e identificados en el análisis conceptual. Esto nos permite concluir la falta de estudios globales de la comprensión del concepto y al mismo tiempo, fundamentará la construcción de nuestro cuestionario, que incluye ítems tomados de diversas investigaciones previas.

3. ¿Qué parte del significado institucional de referencia es objeto de enseñanza en la Educación Secundaria? ¿Cuáles son los elementos de significado (campos de problemas, algoritmos y procedimientos, representaciones, conceptos y propiedades y argumentos que son incluidos en este nivel educativo?

En el Capítulo 4 llevamos a cabo un estudio curricular, analizando en primer lugar los documentos oficiales en España y otros países. Seguidamente llevamos a cabo un estudio cualitativo del tema en una muestra de 22 libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. Esto nos permite identificar los elementos de significado que se presentan con mayor frecuencia en dichos textos, así como los que están ausentes. Por un lado este estudio definirá el *significado local* de las medidas de posición central en nuestro estudio que usaremos en la construcción del cuestionario. Por otro lado, nos permite identificar algunos huecos en la enseñanza que podrá servir para mejorar los libros de texto de este nivel educativo.

4. ¿Cuál es el significado personal sobre los promedios de los estudiantes de educación secundaria obligatoria al iniciar y finalizar esta etapa educativa? ¿Cuáles son los elementos de significado en que encontramos mayor dificultad inicial y cuáles resultan más intuitivos? ¿Qué progresión se observa en el aprendizaje entre estos dos niveles educativos? ¿Qué elementos continúan siendo difíciles al finalizar la etapa?

Para dar respuesta a estas preguntas hemos abordado la construcción de un instrumento de evaluación (cuestionario) que tenga en cuenta los diferentes elementos de significado identificados en el estudio curricular (significado local). En lo posible hemos tomado ítems de investigaciones previas, aunque variando el formato a fin de completarlos y permitir respuestas abiertas. Con ello podremos también comparar nuestros resultados con los de otros investigadores.

En el Capítulo 5 se describe la construcción y prueba del cuestionario, mediante una muestra piloto, así como las modificaciones realizadas sobre el cuestionario final, para el que dispusimos de dos versiones diferentes y dos tipos de cuestionario, ya que algunas preguntas sólo iban destinadas a los alumnos de cuarto curso. Como consecuencia de la construcción del cuestionario presentamos también en el Anexo 1 un banco de ítems que puede resultar útil en la construcción de nuevos cuestionarios o situaciones didácticas.

En el Capitulo 6 presentamos los resultados de un estudio detallado de las respuestas de 168 alumnos de 1º curso y 144 alumnos de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria. El análisis cuantitativo nos permite comparar la dificultad relativa de los ítems y su diferencia en las dos muestras analizadas, así como el efecto del curso, sexo y centro sobre los resultados. El estudio multivariante nos sugiere que la comprensión de las medidas de posición central no progresa según un patrón unidimensional, sino que, por el contrario, tiene un carácter multidimensional, de acuerdo a nuestro marco teórico. El estudio cualitativo detallado de las respuestas a diferentes ítems nos permite describir las tendencias en el significado personal de los estudiantes sobre los promedios. Este estudio se completa con el análisis semiótico de las respuestas de cuatro estudiantes, que sirve para explicar la dificultad de algunas de las tareas y mostrar, a la vez, la variabilidad del significado personal de estos alumnos.

Somos conscientes de que nuestro trabajo aporta una información limitada a las preguntas planteadas y en este sentido abre nuevas líneas de investigación para otros educadores que se interesen por la enseñanza de la estadística. Pensamos, sin embargo, que los resultados expuestos, así como el estado de la cuestión y bibliografía proporciona una información útil, tanto para otros investigadores, como para los profesores de matemáticas de Educación Secundaria. Con ello creemos haber cumplido los objetivos planteados al iniciar esta investigación

CAPÍTULO 1.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

1.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo nos proponemos contextualizar nuestro objeto de estudio, que es *la comprensión de las medidas de posición central* y, en particular, nos interesamos por *la problemática específica que presenta este tema para los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria.*

Como se ha indicado en la introducción, el interés por este tema proviene de mi propia experiencia como profesora de Secundaria, tanto por el hecho constatado de que la estadística es una materia, que a pesar de su inclusión en el currículo, recibe poca atención, como por mi creencia en su importancia para la formación de los estudiantes. Asimismo nos guiamos por la constante búsqueda de elementos que puedan mejorar nuestra enseñanza, y en consecuencia el aprendizaje de nuestros alumnos.

> La investigación supone una continuación de otras llevadas a cabo en el Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada. Se inscribe en la línea de investigación, en la que se han realizado otras tesis doctorales sobre la enseñanza de la estadística, aunque éstas se han centrado en el nivel universitario (Estepa, 1993; Vallecillos, 1994; Sánchez-Cobo, 1999). También se conecta con los trabajos de Tauber (2001) y Estrada (2002b) realizados en otras universidades españolas.

Antes de desarrollar los fundamentos de nuestra investigación, creemos importante mostrar el contexto en que se inserta. Comenzaremos realizando unas reflexiones sobre la importancia de la estadística como materia cultural indispensable en la formación de los alumnos, apoyándonos en la opinión de educadores y estadísticos que han reflexionado sobre este tema. Seguidamente analizamos brevemente el estado de la educación estadística como campo de investigación, describiendo algunos de los congresos y publicaciones específicos. Dedicamos un apartado al análisis exploratorio de datos, donde se inscribe el estudio de las medidas de posición central, y por ser también el enfoque que se recomienda desde las directrices curriculares vigentes para la enseñanza de la estadística en secundaria. Finalmente presentamos los objetivos y metodología de la investigación.

1.2. LA ESTADÍSTICA COMO MATERIA CULTURAL

Comenzaremos el capítulo con unas consideraciones sobre la importancia de la estadística y su papel en la formación de los alumnos. La estadística es hoy día una herramienta multidisciplinar, esencial para el gobierno de las naciones y para el avance de la ciencia. En la actualidad su campo de aplicación es tan amplio que la American Statistical Association preparó un libro para mostrarlo, en colaboración con el Nacional Council of Teachers of Mathematics (Tanur, 1992), en el que se clasifican las aplicaciones en cuatro grandes secciones:

- *Mundo biológico*: Estudios referentes a los seres vivos, ciencias de la salud, genética, ecología, fabricación de medicamentos, tecnologías de la alimentación y psicofisiología.

- *Mundo político*: Elecciones, números índice, producción, comercio, economía, y planificación.
- *Mundo social*: Comunicación, deporte, educación, demografía, turismo y ocio.
- *Mundo físico*: Recursos naturales, consumo, energía, meteorología y teoría de errores.

Como se deduce de este libro, la estadística es una materia fundamental en una variedad de áreas de conocimiento, algunas de las cuales encuentran los alumnos durante su formación secundaria. Asimismo, la mayoría de estudiantes universitarios deben seguir un curso básico de estadística y con frecuencia encontrarán datos y estudios estadísticos en su futura vida profesional.

Además, en la sociedad moderna, cualquier ciudadano se encuentra a diario con conceptos estadísticos en la prensa, la televisión y otros medios de comunicación, o Internet, donde se aplican a diversos hechos para describirlos, por ejemplo, en los estudios de mercado, descripción de nuevos descubrimientos o resultados de elecciones.

En consecuencia, es evidente el interés de la estadística en la formación de los estudiantes, si queremos que lleguen a conocer y apreciar la importancia de los métodos estadísticos y a entender y valorar mejor el complejo mundo en que vivimos. En el informe Cockcroft (1985) se sugiere que la estadística es una materia cultural imprescindible en la formación del individuo y Holmes (1980) resalta su utilidad en la vida cotidiana. Begg (1997) añade que la estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de ordenadores, trabajo cooperativo, a las que se da gran importancia en los nuevos currículos.

En los últimos años se ha venido forjando el término "statistics literacy" para reconocer el papel del conocimiento estadístico en la formación elemental. El hecho de que el VI Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Estadística, celebrado en la Ciudad del Cabo en Julio del 2002, tuviese como lema "El desarrollo de una sociedad estadísticamente culta", así como las dos ediciones (tercera en preparación) del Foro Internacional de Investigación sobre Razonamiento, Pensamiento y Cultura Estadística (1999, Kibbutz Be'eri, Israel; 2001, Armidale, Australia; 2003, USA) y las numerosas publicaciones y proyectos sobre el tema, son un claro indicador de esta importancia (Moreno, 1998; Gal, 2002; Murray y Gal, 2002).

El objetivo principal no es convertir a los futuros ciudadanos en "estadísticos aficionados", puesto que la aplicación razonable y eficiente de la estadística para la resolución de problemas requiere un amplio conocimiento de esta materia y es competencia de los estadísticos profesionales. Tampoco se trata de capacitarlos en el cálculo y la representación gráfica, puesto que los ordenadores hoy día resuelven este problema. Lo que se pretende es proporcionar una *cultura estadística,*

> "*que se refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante*" (Gal, 2002, pp. 2-3).

El razonamiento estadístico es también una componente esencial del aprendizaje. Este tipo de razonamiento incluye, según Wild y Pfannkuch (1999), cinco componentes fundamentales:

- Reconocer la necesidad de los datos: La base de la investigación estadística es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos que han sido recogidos en forma adecuada. La experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no es fiable y puede llevar a confusión en los juicios o toma de decisiones.

- Transnumeración: Los autores usan esta palabra para indicar la comprensión que puede surgir al cambiar la representación de los datos. Al contemplar un sistema real desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración: (1) a partir de la medida que "captura" las cualidades o características del mundo real, (2) al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos; (3) al comunicar este significado que surge de los datos, de forma que sea comprensible a otros.
- Percepción de la variación. La recogida adecuada de datos y los juicios correctos a partir de los mismos requieren la comprensión de la variación que hay y se transmite en los datos, así como de la incertidumbre originada por la variación no explicada. La estadística permite hacer predicciones, buscar explicaciones y causas de la variación y aprender del contexto.
- Razonamiento con modelos estadísticos. Cualquier útil estadístico, incluso un gráfico simple, una línea de regresión o un resumen puede contemplarse como modelo, puesto que es una forma de representar la realidad. Lo importante es diferenciar el modelo de los datos y al mismo tiempo relacionar el modelo con los datos.
- Integración de la estadística y el contexto: Los resultados han de interpretarse en función de las preguntas y problemas originales. Es también un componente esencial del razonamiento estadístico.

La cultura no es solamente conocimiento y capacidad. La parte emocional, sentimientos, valores, actitudes, es también un componente importante de la educación. Una persona puede ser, por ejemplo, brillante en la resolución de problemas estadísticos y poseer un vasto conocimiento de conceptos y desconocer las aplicaciones de la estadística y el papel que juega en la sociedad. Podría conocer todo esto, y sin embargo, odiar la materia, menospreciar su valor o estar convencido que su mayor utilidad es la posibilidad de usarla para manipular la verdad.

Gal y colaboradores (1997) definen las actitudes como *una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio*. Son bastante estables, se expresan positiva o negativamente (agrado/desagrado, gusto/disgusto) y pueden referirse a elementos vinculados externamente a la materia (profesor, actividad, libro, método de enseñanza, etc.). Según Gal y Ginsburg (1994) las actitudes y creencias y especialmente las negativas, pueden tener un impacto directo en el clima de la clase y llegar a constituir un auténtico bloqueo del aprendizaje si no se controlan.

Estrada (2002a) analiza y extiende todas estas razones, insistiendo en la necesidad de la educación estadística de los alumnos e incluyendo, además, la importancia de la formación de las actitudes hacia la materia. Esta importancia es también reconocida en los diseños curriculares vigentes en la actualidad que incluyen objetivos actitudinales en cada bloque de contenido.

1.3. LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA COMO CAMPO DE INVESTIGACIÓN

La educación estadística se está configurando actualmente como una línea de investigación con características propias, como se describe en Batanero (2001) y como demuestra la existencia de las conferencias *ICOTS* (*International Conference on Statistical Education*): ICOTS-1, 1982, Sheffield; ICOTS-2, 1986, Victoria, Australia; ICOTS-3, 1990, Dunedin, Nueva Zelanda; ICOTS-4, 1994, Marrakesh; ICOTS-5, 1998, Singapur; ICOTS-6, 2002, Ciudad del Cabo. La importancia de estos congresos se pone de manifiesto en el hecho de que en la última edición se han presentado más de 300 trabajos, incluyendo el desarrollo curricular, la formación en primaria, secundaria y universidad, desarrollo de recursos y software educativo, papel de la tecnología, investigación y estudios comparativos internacionales.

Además, se han celebrado una serie de conferencias satélites del *ICME* (*International Congress of Mathematics Education*), llamadas *Round Table Conference* sobre temas específicos de educación estadística, que han sido los siguientes: "Estadística en la escuela" (Viena, 1973; Varsovia, 1975, Calcuta, 1977), "La enseñanza universitaria de la estadística en los países en vías de desarrollo (La Haya, 1968), "Enseñanza de la estadística y ordenadores", (Oisterwijk, 1970; Camberra, 1984; Granada, 1996), y "Formación de profesores" (Budapest, 1988); “Formación de investigadores en el uso de la estadística” (Tokio, 2000) y actualmente se prepara la próxima sobre “Desarrollo curricular en estadística” para 2004. Todas estas conferencias han producido un valioso material en forma de proceedings, algunos de los cuales están disponibles en Internet y el resto pueden conseguirse a través del Instituto Internacional de Estadística.

En 1991 nace *IASE (International Association for Statistical Education),* como sociedad científica y profesional cuyo objetivo principal es el desarrollo y mejora de la educación estadística en el ámbito internacional. Esta sociedad, que cuenta en la actualidad con unos 600 miembros, organiza una serie de conferencias, como los ICOTS, Round Table Conferences y las conferencias satélites a las reuniones del Instituto Internacional de Estadística. También publican libros sobre educación estadística y la revista electrónica *Statistics Education Research Newsletter*, iniciada en Mayo del año 2002, que pretende ser el principal vehículo para impulsar la investigación en el área.

Otras sociedades de estadística o de educación están también organizando secciones especificas de educación estadística, como, por ejemplo, la *ASA* (*American Statistical Association*) *AERA* (*American Educational Research Association)*, *Royal Statistical Society*, en Inglaterra, *Sociedad Estadística Japonesa, la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, *Sociedad Argentina de Estadística, Sociedad Chilena de Estadística, Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa.* También podemos encontrar revistas dirigidas al profesorado, como *Teaching Statistics*, *Induzioni* y *Journal of Statistical Education*.

En definitiva, no es sólo en didáctica de la matemática donde encontramos investigaciones sobre este tema, sino que por el contrario es en esta área donde la educación estadística ha recibido menos interés por el momento. Esta tendencia, no obstante, está comenzando a cambiar ya que tanto en PME (Psicología de la Educación Matemática), como en CERME (Congreso Europeo de Educación Matemática), ICME (Congreso Internacional de Educación Matemática), CIBEM (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática) y RELME (Congreso Latinoamericano de Educación Matemática) se están incluyendo grupos temáticos de educación estadística en los últimos años.

1.4. ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

1.4.1. INTRODUCCIÓN

Una vez descrita la importancia de la educación estadística como materia cultural y área de investigación, pasamos a situar el análisis exploratorio de datos dentro de la estadística moderna. Durante la década pasada las expresiones "análisis de datos", "análisis exploratorio de datos", "visualización de datos" y "manejo de datos" han ido apareciendo en los currículos de las escuelas y las universidades. La emergencia del manejo de datos en las matemáticas escolares se ha debido, en parte, a los informes curriculares americanos para reformar la educación matemática (NCTM, 1991a; 2000) y, en parte a los desarrollos de muchos proyectos de currículos escolares que han incluido importantes componentes de análisis de datos, así como a las recomendaciones de diversos autores (Holmes, 1980; Biehler, 1986; Batanero, Estepa y Godino, 1991; Vasco, 1994).

El punto de arranque de este tema se puede encontrar en lo que tradicionalmente se ha llamado estadística descriptiva, según Shaughnesy y cols. (1996), aunque el análisis exploratorio de datos va más allá. Su significado actual enfatiza la organización, descripción, representación, análisis y modelización de datos, y da gran importancia a las representaciones visuales tales como diagramas y gráficos.

Hay, por otro lado, diferentes connotaciones del "análisis de datos" en los distintos lugares del mundo. Por ejemplo, en la cultura francesa, *l'analyse de données*, se identifica a menudo con el análisis multivariante y otras interpretaciones incluyen el análisis inferencial, análisis exploratorio y análisis informal de los mismos. Creemos, por tanto, necesario, clarificar el sentido que le daremos en este trabajo y situarlo dentro de estas otras corrientes.

El análisis exploratorio de datos fue introducido por Tukey (1962, 1977) y ha sido descrito por Gutiérrez (1994) como un híbrido entre los métodos estadísticos exploratorios e inferenciales. En esta aproximación al análisis de datos, no se da prioridad a los tests de hipótesis sobre la exploración de las colecciones de datos.

A pesar de que, desde hace muchos siglos, se han coleccionado conjuntos de datos numéricos, particularmente censos, el origen de la estadística en su sentido actual es reciente y se puede situar en el trabajo de John Graunt (1662) "Natural and Political Observations on the London Bills of Mortality". Graunt fundó el registro universal de nacimientos, matrimonios y muertes de Inglaterra, por encargo del Estado y otros países europeos siguieron este ejemplo. La idea de una oficina central de estadísticas tuvo que esperar hasta Leibnitz en Alemania alrededor de 1685.

A partir de ahí, el análisis estadístico y la modelización probabilística se fue aplicando a un número creciente de fenómenos científicos y humanos. Durante el siglo XIX las colecciones de datos y su análisis tenían propósitos políticos y la modelización estadística de fenómenos científicos se desarrolló muy deprisa. Aparecieron puntos de vista nuevos y controvertidos de los fenómenos sociales desarrollados por científicos, como Quetelet, y por matemáticos que aplicaron la modelización estadística al análisis de decisiones de jurados, como Laplace y Poisson.

Hasta llegar al siglo XX solo existía la estadística descriptiva, que, a pesar de sus limitaciones, hizo grandes aportaciones al desarrollo de las ciencias experimentales. A partir de esa época, comienza la inferencia estadística clásica, con los trabajos de Fisher, Pearson y sus colaboradores y progresivamente se incorporaría la aportación de la escuela bayesiana. Gutierrez (1994) señala que los avances del cálculo de probabilidades llevaron a la creación de la estadística teórica, que en cierto modo, se alejó de las ideas estadísticas primitivas centradas en el análisis y recogida de datos. De este modo, en los años 60, la mayor parte de los libros de texto se ocupaban especialmente de los modelos inferenciales clásicos o bayesianos con respecto a conjunto simple de datos y hubo una tendencia a la matematización, junto con un descuido en la enseñanza de los aspectos prácticos del análisis de datos.

Un factor motivador y facilitador del análisis de datos ha sido el desarrollo de los ordenadores. El uso de los primeros computadores para trabajos estadísticos data de los años 1840, mientras que fue con el Censo de Estados Unidos en 1890 cuando se demostró claramente la potencialidad de las máquinas para procesar grandes conjuntos de datos. Los avances tecnológicos han facilitado el acceso a la información, y la presentación de los datos en los medios de comunicación es una constante en la cultura contemporánea. Su efecto en la educación se recoge en los Proceedings de la IASE Round Table Conference, celebrada en 1996 en Granada (Garfield y Burrill, 1997), así como en las secciones sobre tecnología de los congresos ICOTS.

Puesto que los ordenadores permiten analizar grandes muestras y gran número de variables con rapidez y fiabilidad, ya no hay que limitarse a los métodos estadísticos basados en distribuciones conocidas, cuya principal aplicación eran las pequeñas muestras. Tampoco hay que restringirse a analizar una o unas pocas variables, porque el tiempo de cálculo se ha eliminado y es preferible aprovechar toda la información disponible. Gutiérrez (1994) indica que, debido a ello, surgen cuatro corrientes diferentes en el análisis de datos, que describimos brevemente a continuación.

1.4.2. CORRIENTES ACTUALES EN EL ANÁLISIS DE DATOS

Análisis exploratorio de datos (AED)

Es una reformulación de la estadística descriptiva clásica, junto con un cambio de filosofía sobre los fines de la misma. En Batanero y cols. (1991) se indica que en el análisis exploratorio de datos se concede una importancia similar a los dos componentes de los datos estadísticos: la "regularidad" o "tendencia" y las "desviaciones" o "variabilidad". La regularidad es la estructura simplificada del conjunto de observaciones: la media o mediana en una distribución, la línea de regresión, en una nube de puntos,.... Las diferencias de los datos con respecto a esta estructura (diferencia respecto a la media, respecto a la línea de regresión) son las desviaciones o residuos de los datos.

En la inferencia clásica se supone que estas desviaciones siguen un patrón aleatorio. De acuerdo con la teoría de errores, la distribución de estos residuos sería normal con media cero. El estudio se centra en buscar un modelo, dentro de una colección dada, para expresar la regularidad de las observaciones. Por ejemplo, en un estudio de regresión lineal se trata de elegir la recta que represente lo mejor posible la nube de puntos. Asimismo, se definen unos ciertos coeficientes cuyo fin es probar la "bondad" de ajuste del modelo mediante un contraste de hipótesis. En este ejemplo sería el coeficiente de correlación.

Por el contrario, en el análisis exploratorio de datos se concede una importancia similar a los dos componentes de los datos que hemos citado. En lugar de imponer un modelo a las observaciones, se genera dicho modelo desde las mismas. Por ejemplo, cuando se estudian las relaciones entre dos variables, el investigador no solamente necesita ajustar los puntos a una línea, sino que estudia los estadísticos, compara la línea con los residuos, estudia la significación estadística de la razón de correlación u otros parámetros para descubrir si la relación entre las variables se debe o no al azar. Si se piensa que es posible extraer nueva información de los residuos, se reanalizan éstos, tratando de relacionarlos con otras variables.

Un punto importante en el análisis exploratorio de datos es que no se trata de un conjunto de métodos aunque se han creado algunas técnicas, especialmente gráficas, asociadas a él, sino de una filosofía de aplicación de la estadística. Esto lo podemos ver en el ejemplo anterior en el que una misma técnica -la regresión lineal- la podemos aplicar con enfoque exploratorio o confirmatorio.

Esta filosofía consiste en el estudio de los datos desde todas las perspectivas y con todas las herramientas posibles, incluidas las ya existentes. El propósito es extraer cuanta información sea posible, generar "hipótesis" nuevas, en el sentido de conjeturar sobre las observaciones de las que disponemos. Como contrapartida, tales "hipótesis" no quedan contrastadas en sentido estadístico del término al finalizar el análisis, por lo que sería preciso la toma de nuevos datos (una replicación) sobre el fenómeno y efectuar sobre ellos un análisis estadístico confirmatorio con el fin de contrastarlas.

Dentro del AED se tiene preferencia por los métodos robustos, que permiten acomodar a los datos una posible clase de modelos estocásticos, y que no son muy exigentes respecto a las hipótesis iniciales de estos modelos. Se concede un especial interés a la resistencia al cambio en los resúmenes o resultados de los análisis cuando se producen pequeñas variaciones en los datos. Así se le da preferencia a la mediana por ser altamente resistente para situar la muestra, mientras que la media no lo es tanto. A veces se precisa también hacer un cambio en los datos (aplicarle una transformación, una función) como ayuda para el análisis.

Análisis inferencial de datos (AID)

Es la estadística inferencial clásica basada en el contraste de hipótesis. Se formulan hipótesis antes de tomar los datos, con el único fin de ponerlas a prueba. Fisher, Pearson y Newman entre otros inician esta corriente, partiendo de la Estadística Descriptiva clásica, basándose en los momentos, las distribuciones de frecuencia, etc., y formulando modelos para realizar inferencias acerca de una familia de distribuciones de probabilidad. Surgieron así los modelos estadísticos y los métodos de estimación.

El AID pretende la explicación y predicción estadística, e implica la modelización estadística. Utiliza tanto la deducción como la inducción. Los fundamentos de este análisis fueron creados por Fisher en su artículo *On the mathematical foundations of theoretical statistics,* publicado en 1922. Posteriormente Fisher introduce el diseño de experimentos y el Análisis de Varianza, que tuvieron gran aceptación en la investigación agronómica. En los años cuarenta se desarrollaron los métodos de muestreo que condujeron a la obtención de grandes masas de datos y a la definición de los conceptos de fiabilidad, sesgo, etc. Aunque en la actualidad es probablemente la corriente de análisis de datos más empleada, son numerosas las críticas al uso inadecuado de la inferencia en la investigación (Vallecillos, 1994).

Análisis inicial de datos (IDA)

Esta filosofía del análisis de datos fue propuesta por Chatfield (1985) y consiste en un análisis inicial de tipo informal exploratorio con el fin de obtener una percepción de los datos. Según el propio Chatfield no es posible dar una definición del IDA, pues abarca una amplia gama de actividades y métodos y cada estadístico tiene sus preferencias de unas sobre otras. Se extiende al estudio de los datos cualitativos, el estudio descriptivo, e incluso al uso informal de métodos inferenciales, sin pretender realmente llegar a un contraste formal de las hipótesis.

Los dos principales objetivos son la descripción de los datos y la formulación de modelos. El primero de estos objetivos es suficiente cuando se aplica a toda la población, cuando la muestra es muy grande o cuando los datos no tienen suficiente calidad para justificar el uso de la inferencia. En otros casos, los resultados del análisis inferencial informal pueden aconsejar si es preferible tomar o no una nueva muestra en la que llevar a cabo un estudio de tipo clásico para contrastar las hipótesis que hayan surgido durante la fase inicial. Las cuatro fases de este método son las siguientes:

- Escrutinio de datos, donde se valora la estructura y calidad de los mismos: número de observaciones, número y tipo de variables, posibles errores, credibilidad y completitud. Generalmente se usan tablas y gráficos estadísticos.

- Manejo de datos multivariantes. Los resúmenes de datos se completan con estudios de correlación. Generalmente, debido a que hay muchas variables, hay que usar otras técnicas de análisis, como análisis de componentes principales, análisis de conglomerados, análisis de correspondencias, etc. Estas técnicas se usan con fin exploratorio, para explorar la estructura de interrelaciones en el conjunto de datos.
- Uso informal de métodos inferenciales. Se usan los tests clásicos con fines exploratorios para entender mejor los datos y lograr nuevas ideas cuando no se poseen hipótesis previas o se desea explorar los datos en su totalidad. A veces se sabe que las conclusiones no son válidas pero se quiere tener alguna información sobre el problema o alguna guía para continuar la investigación. Puede ser útil también como elemento preliminar de un test de significación formal. Por ejemplo, si los datos son claramente significativos o no significativos o cuando se observa en los datos falta de aleatoriedad, el test puede carecer de sentido.
- Formulación de modelos. El IDA está principalmente interesado en generar hipótesis. Los modelos que genera están basados en el mismo análisis aunque pueden tener también algunas bases teóricas a priori. Son siempre provisionales y un primer paso en el bucle formulación-toma de nuevos datos-depuración del modelo.

En comparación con el AED, el IDA está más integrado en la estadística, se ocupa más de los procedimientos de recogida de datos, del uso de resúmenes y de la formulación de modelos. Es una ampliación de la Estadística Descriptiva clásica a la que se unen algunas técnicas inferenciales usadas informalmente.

Análisis cruzado de datos (ACD)

Rao (1989) propone este análisis que combina en cierto modo todos los anteriores. Los datos pueden tener origen diverso: observaciones directas, conocimiento sobre fenómenos o muestreo. El ACD pretende indagar los datos registrados en los que pueden existir defectos tales como errores, datos atípicos, etc.

La primera fase es la depuración de los datos. Los datos sometidos a examen se dividen en observaciones directas, conocimiento previo del fenómeno e información a priori sobre el fenómeno. El primer paso se utiliza, no sólo para descubrir los fallos, sino también las características de los mismos que faciliten la formulación de modelos, que es el núcleo del ACD. Rao sugiere las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se han obtenido los datos? ¿Están libres de errores de medida, observación y grabación?
- ¿Hay correspondencia entre los conceptos y definiciones y las medidas tomadas?
- ¿Son datos auténticos? ¿Hay observaciones descartadas direccionalmente por el investigador? ¿Hay datos espúreos?
- ¿A qué población se refieren los datos? ¿Hay no respuestas? ¿Es una población homogénea o mixta? ¿Están registradas todas las unidades relevantes?
- ¿Cuál es la información a priori sobre el problema y los datos?

La siguiente fase es la especificación, que comprende la construcción y la validación de modelos para los datos. Sobre la base de estos modelos se lleva a cabo el AID que comprende la estimación de los parámetros, el contraste de hipótesis, la predicción de futuras observaciones y la toma de decisiones. Finalmente el análisis de datos debe también proporcionar información para promover nuevas cuestiones y planificar nuevas investigaciones.

1.4.3. CARACTERÍSTICAS EDUCATIVAS DEL ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

La emergencia del Análisis Exploratorio de Datos (AED) representa un cambio en el sistema de valores y en la actitud respecto al enfoque más tradicional de la Estadística, que aparecen implícitos en el currículo de la enseñanza de la estadística y la probabilidad. Se espera que en el currículo se vayan incluyendo ejemplos sencillos, ideas y técnicas del AED que reemplacen las, más bien aburridas, técnicas de la Estadística Descriptiva, sustituyéndolas por ejemplos más interesantes del análisis de datos reales, en los que los estudiantes se puedan involucrar de manera más activa en procesos de descubrimiento de características relevantes de los sistemas de datos.

En lo que sigue se presentan algunas ideas de diversos investigadores para discutir sobre cómo la evolución de los currículos de estadística puede cambiar con la emergencia del Análisis Exploratorio de Datos. Se citan también problemas, obstáculos y nuevas oportunidades de desarrollo de las concepciones de la estadística que relacionen las ideas del AED con otras áreas del currículo y desarrollen actitudes más conscientes de los profesores hacia esta materia.

Importancia de las representaciones gráficas

El nuevo uso de las representaciones gráficas es, quizás, la mayor contribución del AED al currículo y lo que más posibilidades da de relación con otras áreas de la matemática. El AED está relacionado con un movimiento general en Estadística que potencia y valora el uso de las representaciones gráficas como una buena herramienta de análisis y no sólo como un medio de comunicación. Estadísticos como por ejemplo E. Pearson han reconocido este carácter de los gráficos como herramienta del trabajo científico (Biehler, 1986).

Las representaciones gráficas de datos tienen una historia considerable, desde el trabajo pionero de Willian Playfair (1759-1823) hasta las innovaciones contemporáneas de John Tukey o Cleveland. Playfair destacó por sus comentarios sobre qué se puede entender por "the psychology of the graphic method". Florence Nightingale también destacó esta importancia inventando diagramas estadísticos, que se usaron para potenciar los efectos producidos por los cambios en las condiciones sociales. (Shaughnessy, Garfield, Greer, 1996).

Sin embargo, en los currículos actuales y en la actitud de los profesores todavía predomina la postura contraria, dándose poca importancia a los gráficos. El análisis de datos ha venido basándose fundamentalmente en el cálculo de estadísticos, restando importancia a la visualización de la representación de los mismos y equiparando el análisis con el modelo confirmatorio, cuyo único propósito consiste en poner a prueba una determinada hipótesis, suponiendo que el conjunto de valores se ajusta a un modelo preestablecido, sin pretender explorar cualquier otra información que puede deducirse de ellos (Batanero, Estepa y Godino, 1991).

Una idea fundamental subyacente al AED es que el uso de diversas y múltiples representaciones de datos implica el desarrollo de nuevos conocimientos e intuiciones. Por ejemplo pasando de tablas a gráficos, de listas de números a representaciones como la del gráfico del tronco, reduciendo los números a una variedad discreta en un mapa estadístico para facilitar la exploración de la estructura total, construyendo gráficos como el de la caja que hace posible la comparación de varias muestras. (Biehler, 1986). Esta experiencia con gráficos también puede contribuir a mejorar la comprensión crítica, debido a que éstos se utilizan como herramientas que ayudan a centrar la atención en aspectos particulares de los datos y no en la mera presentación de los mismos.

El AED ha desarrollado también nuevos sistemas de representación. De ellos, son los diagramas de tronco y los gráficos de la caja los más usados en secundaria. El currículo tradicional de la estadística descriptiva se puede transformar en la dirección del AED, usando las representaciones gráficas con un espíritu investigador. Es esencial, sin embargo, proporcionar un soporte a la actitud investigadora contra la tendencia, de la mayor parte de las transposiciones didácticas, de reducir el conocimiento a técnicas.

Por otra parte, como ya muestran algunos libros, estas presentaciones, o leves modificaciones de las mismas, pueden también enriquecer algunas partes del currículo en las que la probabilidad y la inferencia son el objetivo principal. Visualizar la variabilidad de los datos, representando distintos ejemplos de variables estadísticas mediante una colección de diagramas de la caja puede ser una de las aplicaciones. Por tanto, estas representaciones pueden usarse para iniciar una comparación, interacción y reestructuración fructuosa de la experiencia adquirida con estos diagramas en una fase exploratoria, y en el contexto de la variabilidad aleatoria los gráficos de la caja son una forma interesante de introducir los intervalos de confianza (Biehler, 1994).

Según este autor esto se puede combinar con el uso de test estadísticos. Los estudiantes pueden experimentar cómo los resultados de los test se relacionan con las interpretaciones visuales de la variabilidad y la diferencia entre grupos. Desde la interpretación de la estadística clásica podría no aceptarse este uso ya que las hipótesis y los criterios de los test se deben elegir antes de mirar en los datos. Desde un punto de vista del AED, la práctica se mantiene y extiende mientras se admite que los niveles de significación no pueden interpretarse en el sentido usual de la inferencia. En los datos reales, los gráficos se usan para buscar y modificar las hipótesis en las que basar los test. Se considera que éstos contienen potencialmente más información que la que se puede detectar con los test. Esta discusión va más allá del nivel de educación secundaria y es un problema abierto a reconsiderar en la enseñanza de la estadística.

Enfoque multivariante

En la mayor parte de los currículos de secundaria se estudian sólo las variables estadísticas unidimensionales y si se tratan las bidimensionales se hace más bien desde una perspectiva de manejo de técnicas y aparece como una categoría ontológica diferente a la de los datos unidimensionales. Pero actualmente, la mayor parte de los cuerpos de datos incluyen observaciones asociadas a varias facetas de un fenómeno o experimento particular. Por ello, en sentido amplio, los datos tienen siempre un carácter multivariante.

Según Batanero (2001), la emergencia y aplicación actual del AED está muy relacionada con la emergencia y diseminación de los métodos multivariantes en la práctica estadística de hoy. El papel que puede jugar en la enseñanza secundaria es un problema aún abierto. Los datos multivariantes han entrado ya en algunas escuelas a través de cursos de informática en los que se hace exploración de datos. Además, la exploración de los datos es de interés actual y puede, gradualmente, acabar dentro de la imagen de la estadística y la probabilidad que se enseña en las clases de estadística hoy, en las que el análisis de datos no concierne a los casos individuales sino a las "leyes de la media".

Los presupuestos del AED van más allá de la concepción bivariante, haciendo posible también el estudio multivariante a un nivel elemental. Si los gráficos de la caja se usan para comparar varios conjuntos de datos, puede ser un primer paso en la dirección multivariante. También los diagramas del tronco reemplazan los valores individuales de los datos, pero muestran un retrato estructurado de ellos. Esto facilita localizar el objeto al que pertenece cada valor.

Esta posibilidad puede extenderse, según Biehler (1991), añadiendo etiquetas a algunos de los valores del gráfico, o sustituyendo los dígitos en las hojas por etiquetas apropiadas, o por símbolos para los valores de alguna segunda variable. Estas características constituyen una relación con los datos completamente diferente de la que se obtiene con la estadística clásica.

Resumiendo, los datos unidimensionales son tratados dentro de un contexto abierto de relaciones potenciales con otras variables. Esta "ontología" del AED es diferente del enfoque usual de la probabilidad. Usualmente, la probabilidad se introduce usando simulaciones de dados o monedas con las que se enseña a los estudiantes que nada se puede predecir y que la variabilidad de los resultados no puede ser "explicada" o relacionada con otras variables en contraste con las situaciones determinísticas.

Hay ciertamente buenas razones a favor de empezar la instrucción de la probabilidad a partir de situaciones aleatorias casi ideales, pero mantener una separación estricta entre situaciones totalmente aleatorias y situaciones totalmente determinísticas durante todo el currículo no es deseable porque la mayor parte de las situaciones reales son una mezcla de ambas.

El AED trata principalmente estas situaciones intermedias, donde no está claro, al principio, qué aspecto de los datos podría interpretarse o tratarse como aleatorio. El AED se podría ver como una nueva oportunidad para llenar el vacío existente entre los dos extremos del determinismo o aleatoriedad completos.

Sin embargo hay que tener en cuenta posibles dificultades de los estudiantes, por ejemplo que ellos detecten falsas relaciones entre resultados de un experimento aleatorio y otras variables como circunstancias específicas espacio-temporales o habilidades operatorias (Biehler, 1997). Esta inclinación a buscar conexiones puede ser adecuada en principio, pero quizás no sea apropiada en algunas situaciones.

El AED y los objetivos educativos

Una meta importante de la educación estadística es vencer la imagen pública de la falta de utilidad de la estadística. Ir más allá de la mera descripción de datos y del uso arbitrario de los mismos para apoyar argumentos se considera, a menudo, como uno de los principales objetivos de la enseñanza de la estadística. Con el AED los estudiantes pueden aprender qué es lo que proporciona la estadística y bajo qué condiciones.

Según Biehler (1991), el AED no proporciona los resultados inequívocos, precisos y "finales" que sí ofrece la inferencia estadística, ya que a menudo la multiplicidad y los diversos grados de incertidumbre en los resultados obtenidos pueden ser, en parte, contradictorios. La dimensión abierta, subjetiva e hipotética de la investigación y el conocimiento científico aparecen de forma clara. Qué puede significar un diagrama o en qué dirección se podría continuar investigando requiere comunicación y discurso.

El experto en una materia no queda "obligado hacia una idea" por un resultado del AED, sino que se puede aceptar como un participante en la comunicación. Ésta es necesaria entre los expertos en análisis de datos y los expertos en la materia que se está investigando. Enfatizar este aspecto de la aplicación de las matemáticas en el currículo es importante desde el punto de vista educativo. Es importante resaltar ciertas tensiones existentes. La primera es la tensión entre la estadística como "ciencia exacta" (objetiva, rigurosa, independiente de la cultura, con orientación técnica) y la estadística como un "producto social" (producida a partir de las respuestas humanas a una variedad de situaciones). La segunda la existente entre el AED y la estadística descriptiva e inferencial. Quizás se podrían describir las dos tensiones citadas de forma algo diferente. La estadística y el análisis de datos son esencialmente actividades sociales. La comunicación y cooperación tienen un papel importante, en particular si se intenta conseguir certeza y objetividad, un fin que no se puede lograr si se usan únicamente las reglas lógicas.

La cuestión sería si enseñar el AED puede ser un modo de resaltar estas características en el currículo, por ejemplo mediante discusiones de clase sobre el tema. Por supuesto se puede trabajar el AED en conexión con la estadística inferencial. Pero supondría una actitud diferente hacia los test estadísticos y otros métodos, quizás más siguiendo el espíritu de Fisher o el de la interpretación de la estadística como teoría de decisión.

Otras características

Batanero y cols. (1991) señalan las siguientes características educativas adicionales en el AED:

- Hay un empleo preferente de los estadísticos de orden, por ser sensibles a la mayor parte de los datos, paliando así el efecto producido por los valores atípicos, escasos y muy alejados de la norma.
- No se necesita una teoría matemática compleja. Como el análisis de datos no supone que éstos se distribuyen según una ley de probabilidad clásica, no utiliza sino nociones matemáticas muy elementales y procedimientos gráficos fáciles de realizar. En este punto se aleja de la estadística descriptiva tradicional, ya que la representación o el cálculo no son un fin, sino un medio de descubrir la información oculta en los datos.
- La escala en la que una de las variables es observada y registrada no es única. A veces, transformando los valores originales a una nueva escala se puede lograr que sean más manejables. De este modo se incluye también el empleo de otros contenidos matemáticos, especialmente los referidos al concepto de función.
- Existe la posibilidad de generar situaciones de aprendizaje referidas a temas de interés al alumno. Usualmente se trabaja sobre ficheros de datos que han sido codificados previamente ya que se pretende estudiarlos mediante cuantas perspectivas y técnicas se tengan al alcance. Estos conjuntos de datos pueden ser obtenidos por los mismos estudiantes, mediante la realización de una encuesta a sus compañeros sobre temas diversos o incluyendo valores de variables relacionadas con otras áreas curriculares obtenidos en anuarios, publicaciones estadísticas o en Internet.

El anterior análisis sugiere la conveniencia de incluir el análisis exploratorio de datos en los niveles no universitarios, y particularmente en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN Y SU IMPORTANCIA

Una vez situado el estudio en un contexto más general, pasamos a formular la cuestión central que nos planteamos en esta investigación, que podría enunciarse de la siguiente forma:

¿Que tipos de problemas, representaciones, procedimientos de cálculo, definiciones, propiedades y argumentaciones relacionados con las medidas de posición central serían adecuados para cada uno de los tramos de la educación secundaria?

Para contestar a esta pregunta se realiza esta investigación que consta de dos partes, un análisis teórico y una parte experimental. En los dos casos nos basamos en un marco teórico sobre el significado y la comprensión de los conceptos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1998a) en el que se diferencian distintos tipos de elementos (campos de problemas, lenguaje, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos). Este marco, en el que también se distingue entre la faceta personal y la institucional del conocimiento, se describe en el capítulo 2.

El análisis teórico tiene los siguientes objetivos:

O1. Llevar a cabo un análisis del contenido matemático para determinar los campos de problemas, representaciones, procedimientos, definiciones y propiedades y argumentaciones que constituyen el significado de referencia de las medidas de posición central, en la introducción al análisis exploratorio de datos.

El interés de este objetivo se deduce de que este significado de referencia nos proporcionará una pauta para analizar el currículo de secundaria y los libros de texto. Para este estudio se partirá de textos elementales de estadística, como Calot (1974), Ríos (1991), Nortes Checa (1993), Freixa y otros (1992) o Moore (1995). También partimos del estudio que hemos hecho sobre el Análisis Exploratorio de Datos y otras corrientes dentro del Análisis de Datos siguiendo el texto de Gutiérrez Cabriá (1994). Asimismo tendremos en cuenta los trabajos de Batanero (2000c), Cobo y Batanero (2000) y nuestra Memoria de Tercer Ciclo (Cobo, 1998).

O2. Analizar el significado de las medidas de posición central en el currículo de secundaria.

Este estudio se llevará a cabo analizando los siguientes documentos: DCB del MEC y de la Junta de Andalucía, los Decretos de Enseñanza Secundaria del MEC y de la Junta de Andalucía y los Estándares Curriculares del NCTM (1991a, 2000). Asimismo se analizará una muestra suficientemente amplia de libros de texto.

El interés se deduce de que el análisis nos permitirá conocer los campos de problemas, representaciones, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentaciones que sobre las medidas de posición central se contemplan en dichos currículos. Asimismo nos proporcionará criterios para la elaboración de nuestros instrumentos de evaluación cuyo contenido deseamos se ajuste a este *significado institucional pretendido* de los promedios en la enseñanza secundaria.

O3. Analizar las investigaciones sobre el tema o sobre otros relacionados, para fundamentar nuestro estudio y comparar con nuestros resultados.

El análisis se realizará desde el punto de vista del significado evaluado en las diferentes investigaciones. La importancia de este objetivo es asegurar que conocemos, tanto los instrumentos, como los resultados de las investigaciones anteriores con las que podremos comparar la nuestra. Asimismo, al finalizar el análisis dispondremos de un banco de ítems potencialmente útiles en la construcción de nuestros instrumentos de evaluación.

El estudio experimental contempla los siguientes objetivos:

O4. Diseñar un cuestionario para evaluar la comprensión de los estudiantes de secundaria en este tema, que contemple los tipos de elementos diferenciados en el marco teórico y se corresponda con el significado institucional pretendido para la enseñanza secundaria.

El interés de este objetivo es que el instrumento construido tendrá en cuenta los diferentes componentes del significado pretendidos en la enseñanza y podrá proporcionar información sobre la comprensión de los diferentes elementos y su interrelación. Pretendemos que el instrumento tenga una validez de contenido explicitable y complemente los usados en otras investigaciones previas.

O5. Estudiar las tendencias en el significado personal de los alumnos de E.S.O. sobre las medidas de tendencia central, a partir el análisis de las respuestas de una muestra de estudiantes al cuestionario de evaluación.

El interés de este objetivo es proporcionar a los profesores de secundaria obligatoria información sobre la comprensión alcanzada por los alumnos. Asimismo, puesto que pensamos completar puntos no tratados en las investigaciones previas, los resultados tendrán un interés teórico.

O6. Analizar la variabilidad en el significado personal sobre los promedios de estos estudiantes, mediante el estudio semiótico de las respuestas de un grupo reducido de estudiantes.

Este estudio complementará el de las tendencias generales y permitirá un mayor detalle sobre la evaluación del significado personal, revelando algunos posibles conflictos semióticos que expliquen los diferentes grados de comprensión de los estudiantes.

Por otro lado, tanto este objetivo como el anterior podrán poner de relieve la estructura multidimensional de la comprensión de los estudiantes sobre los promedios.

O7. Comparar el significado personal de los estudiantes que comienzan y finalizan la E.S.O. mediante el análisis comparativo de dos muestras de alumnos de primer y cuarto cursos respectivamente.

Esta comparación completa los análisis anteriores y servirá para evaluar el progreso de los estudiantes con la situación actual de enseñanza del tema.

1.6. DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA

Una vez descritos los objetivos de la tesis, pasamos a explicitar la metodología, que también se apoya en nuestro marco teórico que se describirá en el capítulo 2.

1.6.1. ENFOQUE GENERAL Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Esta es una investigación que analiza principalmente variables cualitativas, como los elementos de significado institucional y personal de las medidas de posición central en la Educación Secundaria. Ocasionalmente, sin embargo, haremos uso de algunas técnicas cuantitativas, particularmente estudiaremos los índices de dificultad de los ítems del cuestionario de evaluación y el número total de respuestas correctas. Realizaremos algunos contrastes de hipótesis para evaluar las diferencias en los dos grupos y el efecto de algunas variables controladas.

La investigación se ha desarrollado en distintas etapas, cada una de las cuales posee un fin en sí misma, se corresponden con los objetivos de nuestra investigación y se enmarcan en la agenda de investigación asociada a nuestro marco teórico. Respecto a este punto, Godino (1999) desarrolla una metodología de análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos que comprende tres facetas o dimensiones:

- Análisis epistémico (centrado en la naturaleza de los distintos componentes del conocimiento matemático a estudiar en una institución particular). En nuestro trabajo abordaremos el análisis epistémico, dentro del análisis conceptual que se describe en el capítulo 2, cuyo principal objeto es determinar el *significado de referencia,* y en el análisis curricular realizado en el capítulo 4 para determinar el *significado local de las medidas de posición central* en la Educación Secundaria Obligatoria. Esta primera fase se llevó a cabo durante los años 1999 y 2000, una vez finalizada la Memoria de Tercer Ciclo (Cobo, 1998). Posteriormente ha sido revisada a la luz de nuevas lecturas y como consecuencia de la elaboración de los instrumentos de evaluación y el análisis de las categorías de respuestas de los estudiantes.

- Análisis semiótico-cognitivo (centrado en los procesos de interpretación de significados institucionales por parte de sujetos interpretantes). En nuestro estudio realizaremos este tipo de estudio en la evaluación de los significados personales de los alumnos, que se describe en el resto de la memoria. Ya durante el año 2001 iniciamos la construcción de un cuestionario de evaluación que tuviese en cuenta el significado institucional pretendido, identificado en la fase anterior, y tomamos datos de una primera muestra piloto de estudiantes. Estos resultados fueron analizados y utilizados para revisar el cuestionario a lo largo del año 2002, en el que se tomaron y analizaron los datos definitivos. Durante los primeros meses del año 2003 se llevó a cabo el estudio de casos, que se basa fundamentalmente en el análisis semiótico. Los informes se han ido elaborando y refinando a lo largo de toda la investigación.
- Análisis didáctico (centrado en la interacción entre las funciones docentes, discentes y los distintos componentes epistémicos y cognitivos, así como en la negociación de significados). Puesto que el volumen de datos obtenidos en las etapas anteriores ha sido ya importante y aporta una información novedosa y relevante para la acción didáctica, hemos decidido no realizar este tipo de análisis en nuestro trabajo, quedando abierto a otras investigaciones futuras.

Por otro lado, y de acuerdo con Godino (1996a), consideramos la Educación Matemática como un sistema social heterogéneo y complejo en el que es necesario distinguir tres componentes o campos:

- La acción práctica reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desarrollados principalmente en instituciones escolares. Este es principalmente el trabajo del profesor reflexivo, así como de los diseñadores curriculares.
- La investigación científica, que trata de comprender el funcionamiento de los sistemas didácticos y, en cierta medida, predecir su comportamiento, generalmente llevada a cabo en los departamentos universitarios por profesores o investigadores.
- La tecnología didáctica que se propone poner a punto materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles, para mejorar la eficacia de la instrucción matemática.

Aunque nuestro trabajo se encuadra preferentemente en el segundo de estos campos, también participa de los otros dos. Mi experiencia previa como profesora de Secundaria hace que el objetivo final perseguido sea la mejora de mi propia práctica docente, a través de una reflexión sobre el proceso de aprendizaje de mis estudiantes respecto al campo conceptual sobre el que hemos centrado la investigación. Por otro lado, los cuestionarios y respuestas de alumnos que hemos obtenido como parte de esta investigación podrían encuadrarse dentro del tercer apartado.

El enfoque general de la investigación es descriptivo y exploratorio, con algunos elementos interpretativos y explicativos, puesto que evaluamos el efecto de algunas variables controladas sobre las dependientes de nuestro estudio y también porque tratamos de interpretar bajo nuestro marco teórico las respuestas obtenidas y relacionarlas con los resultados de otras investigaciones. No es sin embargo una investigación experimental, puesto que no se realiza un control y manipulación de variables independientes, sino que se engloba en la investigación cuasi - experimental (Cook y Campbell, 1979).

Siguiendo las clasificaciones que propone Bisquerra (1989) podemos clasificar nuestro trabajo como investigación aplicada, puesto que va encaminada a la resolución de un problema práctico, que es la mejora de la enseñanza de las medidas de posición central en la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Según la manipulación de las variables sería más bien una investigación "ex post facto", ya que hemos tratado de descubrir fenómenos que ocurren en forma natural, pero se han medido diversas variables para analizar su posible efecto. No ha habido manipulación experimental de las variables (manipulación atributiva, según Trujillo, 1999). Por sus fuentes, es empírica, aunque con algunos elementos de investigación bibliográfica.

Según Trujillo (1999) se trata de un diseño de encuesta transversal, puesto que tomamos los datos de varias muestras que se comparan en una sola ocasión. Es un diseño ortogonal o equilibrado pues el número de sujetos en cada muestra es muy similar.

1.6.2. POBLACIONES Y MUESTRAS

En la terminología de Azorín y Sánchez Crespo (1986) el universo de nuestro estudio o población de estudiantes sobre la que se centra la investigación son los estudiantes de E.S.O., ya que en su currículo se da un peso importante a la comprensión y uso de conceptos estadísticos. La población objetivo, de la que se han tomado las muestras son los estudiantes de los cursos primero y cuarto, en la provincia de Granada. Hemos restringido la población por consideraciones operativas y porque pensamos que estos estudiantes tienen unas características similares a las de los de otras regiones españolas.

De esta población hemos tomado muestras intencionales (Giglione y Matalon, 1989), aunque procurando una representatividad de tipos de centro educativo y nivel social del alumnado. Las edades de estos estudiantes son de 13 y 16 años, lo que nos permitirá comparar los resultados obtenidos con los de las investigaciones previas que analizamos en el capítulo 3. Tomamos una primera muestra piloto formada por un total de 53 alumnos y una muestra definitiva formada por 312 alumnos, de cinco centros de secundaria de la provincia de Granada, todos ellos públicos. Hemos intentado diversificar la muestra, dentro de lo posible, contando con estudiantes con diferentes contextos socioculturales, pensando que esta situación podía ofrecernos una variabilidad mayor de respuestas. Los centros participantes están ubicados, dos en la capital, uno de ellos en la zona centro; el tercero en el área metropolitana y los dos restantes en pueblos de la provincia, uno interior y otro costero.

La participación de los centros fue voluntaria. Los alumnos respondieron a los cuestionarios como una actividad más a desarrollar en la clase de Matemáticas. La investigadora se desplazó personalmente a los centros participantes para explicar a los profesores la finalidad del cuestionario y ellos llevaron a cabo la recogida de datos, dentro de una de sus clases de matemáticas. Al comenzar la actividad se les explicó a los alumnos la finalidad del cuestionario y se les pidió su participación, lo que hicieron de buena gana y con interés. De esta muestra se seleccionaron cuatro alumnos (dos en cada grupo) para llevar a cabo el estudio de casos. El criterio seguido fue seleccionar alumnos que argumentaran claramente sus respuestas y hubiesen tratado de contestar a la mayor parte de los ítems. En cada grupo se tomó un alumno con un buen porcentaje de respuestas correctas y otro que, habiendo proporcionado respuestas a la mayoría de los ítems, hubiese logrado sólo un número pequeño de respuestas correctas. El objetivo era comparar los razonamientos y comprensión en estos dos extremos, así como la diferencia de razonamientos en los ítems comunes en los dos grupos de estudiantes.

Agradecemos a estos alumnos, centros y a los profesores la colaboración prestada, sin la cual esta investigación no podría haber sido finalizada.

1.6.3. INSTRUMENTOS

Para este trabajo se diseñó un cuestionario orientado a la evaluación del significado personal que los estudiantes asignan a las medidas de posición central, trata de evaluar los siguientes tipos de comprensión, que se corresponden con los diversos tipos de elementos de significado contemplados en nuestro marco teórico:

- Comprensión conceptual de las propiedades básicas y definición de media, mediana y moda.
- Comprensión de representaciones verbales, numéricas simbólicas y gráficas.
- Comprensión procedimental (abarcando la identificación de los campos de problemas y la comprensión y competencia en cálculo y procedimientos de resolución de problemas).
- Comprensión argumentativa: Tipo de argumentaciones dadas por los alumnos, su consistencia y validez.

Estos tipos de comprensión se analizan en base a ítems que tienen en cuenta diversos campos de problemas, y teniendo en cuenta el análisis matemático y curricular realizado en la primera etapa de la investigación, así como los elementos de significado identificados en dichos análisis. En la construcción del instrumento se partió de ítems utilizados en investigaciones previas y se tuvieron en cuenta las siguientes fases, que se describen con mayor detalle en el Capítulo 5:

- Elaboración de un banco de ítems. De cada investigación encontrada sobre el tema, hemos traducido todos los ítems empleados, analizado los elementos que se evalúan y elaborado una tabla de contenidos. En algunos casos hubo que modificar el formato, estructura o contenido del ítem.
- Selección de ítems para cubrir los diferentes componentes de significado, teniendo en cuenta la información que se obtiene al cruzar los resultados del análisis de ítems y el contenido que se pretendía evaluar.
- Prueba piloto del cuestionario y estudio de la dificultad de los ítems y tipos de respuestas. Elaboración primera de categorías de respuesta, en base a los elementos de significado utilizados en ellas por los alumnos.
- Revisión de la prueba.

El instrumento construido lo encuadramos dentro de la teoría psicométrica *de maestría de dominio* (Thorndike, 1989), ya que podemos considerar que la puntuación total en la prueba está relacionada con el grado de maestría o habilidad de los sujetos en un dominio dado de conocimientos, en este caso, sobre los promedios. En la fase final se utilizaron dos versiones equivalentes del cuestionario para evitar que las preguntas finales acumulasen no respuestas.

El cuestionario construido también presenta un valor en sí mismo. Como veremos en la revisión de las investigaciones previas presentada en el capítulo 3, las diversas investigaciones referidas al tema no presentan un instrumento de evaluación sistemático sobre los diferentes elementos del significado de las medidas de posición central. En consecuencia, nos hemos visto obligadas a construir nuestro propio instrumento.

Esta información se complementa posteriormente con el análisis semiótico de las respuestas de cuatro estudiantes (dos en cada grupo) que nos permite acercarnos con mayor profundidad a sus formas de razonamiento, identificar cómo se ponen en relación los diferentes elementos de significado y determinar algunos conflictos semióticos (Godino, 2002), que explican la dificultad de algunas de las tareas propuestas.

1.6.4. TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE DATOS

Se han empleado diversas técnicas tanto cualitativas como cuantitativas, dependiendo de las fases de la investigación. Para el estudio de los libros de texto, así como para la identificación de los elementos de significado implícitos en las respuestas de los alumnos al cuestionario se realiza un análisis de contenido. Fox (1981) indica que el análisis de contenido comienza por elegir la unidad de contenido a analizar. Luego se elabora un conjunto de categorías, junto con un fundamento lógico que sirva para asignar las unidades a estas categorías. En los programas de investigación cualitativa, el análisis de datos implica un proceso en varias etapas en el que el fenómeno global es dividido en unidades, éstas son clasificadas en categorías y a continuación ensambladas y relacionadas para conseguir un todo coherente (Goetz y Lecompte, 1988).

La metodología para el análisis de datos cualitativo es más compleja, en el sentido de que se encuentra menos estandarizada. *"El análisis de datos cualitativos* representa*, en cierto modo, un problema para el investigador*" Gil Flores (1994, p. 39). Este autor cita como fuentes de estos problemas, la indefinición de los métodos de análisis, la importancia de la componente creativa, la pluralidad de enfoques y el escaso tratamiento del tema en la bibliografía de investigación. Nosotros hemos seguido las recomendaciones de este autor, así como de Miles y Huberman (1984), y Huberman y Miles (1994), dividiendo el proceso en tres etapas: la reducción de datos, la disposición de datos y la obtención y verificación de conclusiones.

La primera operación ha sido la separación de segmentos o unidades de análisis, en varios niveles. Esta segmentación de los datos en unidades relevantes y significativas es considerada como una de las prácticas más características del análisis de datos cualitativos. Las unidades de análisis primarias han sido los capítulos de los textos seleccionados dedicados al tema de promedios y las respuestas de los estudiantes a cada ítem.

Para cada uno de estos contenidos se han identificado unidades secundarias de análisis. Estas unidades han sido párrafos elegidos si cumplen algunos de los siguientes criterios: a) Contienen explícitamente las definiciones, propiedades, representaciones, argumentos o campos de problemas relacionados con los promedios; b) requieren el uso implícito o explícito de los mismos.

Este análisis se llevó a cabo de forma inductiva, a partir del cual se definen variables estadísticas que recogen, para el caso de los libros de texto la presencia y para el caso de las respuestas de los alumnos el uso correcto o incorrecto de los diversos elementos de significado para cada tarea y alumno. A partir de estas variables se presentan tablas de frecuencia de aparición de los diferentes elementos.

Las variables obtenidas del cuestionario se han analizado con técnicas estadísticas. El estudio descriptivo comprende la obtención de tablas de frecuencia de respuestas obtenidas para cada uno de los ítems, así como puntuaciones totales en los diversos componentes, índices de dificultad y discriminación. Se han calculado también los coeficientes de fiabilidad y generalizabilidad para cada muestra y para el conjunto de alumnos.

Hemos utilizado el análisis de varianza univariante y multivariante factorial, para estudiar el efecto del sexo, nivel, centro y tipo de cuestionario.

Se ha llevado a cabo un estudio de asociación entre distintos componentes del instrumento, por medio de análisis cluster y factorial para estudiar la unidimensionalidad de la prueba.

1.6.5. HIPÓTESIS DEL ESTUDIO

Una vez planteado un problema de investigación, los métodos para tratar de obtener respuestas al mismo dependerán de su naturaleza. Pero el trabajo científico no tiene lugar en el vacío. Se proyectan en él ideas determinadas que se interpretan con ayuda de teorías. Por tanto, vale la pena examinar las hipótesis y cómo han sido generadas a lo largo de la investigación.

Bunge (1985) denomina *hipótesis factual* a las proposiciones que se refieren a hechos no sujetos hasta el momento a experiencia y corregibles a la vista del nuevo conocimiento. Se contraponen a las proposiciones empíricas o datos en que cualquier hipótesis va más allá de la evidencia (datos) que trata de explicar. El centro de la actividad cognoscitiva de los seres humanos son las hipótesis. Los datos se acumulan para utilizarlos como evidencia en favor o en contra de las mismas y su misma recogida implica un núcleo hipotético subyacente. Otra característica es que las hipótesis no pueden quedar establecidas por la sola experiencia: los datos no pueden validar sino sólo refutar las hipótesis.

Bunge sugiere las siguientes condiciones de formulación de las hipótesis factuales: 1) Tienen que ser bien formadas (formalmente correctas) y significativas (no vacías semánticamente); 2) deben estar fundadas en alguna medida en el conocimiento previo o en caso de ser totalmente novedosas, ser compatibles con el cuerpo de conocimiento científico; 3) deben ser empíricamente contrastables mediante los procedimientos objetivos de la ciencia, es decir los datos empíricos controlados por técnicas y teorías científicas.

Siguiendo estos supuestos, nuestra investigación partió de una serie de hipótesis, en un principio definidas en forma difusa y que han ido configurándose y perfilándose a lo largo del trabajo; particularmente al finalizar nuestra Memoria de Tercer Ciclo (Cobo, 1998) y posteriormente al finalizar la primera fase de estudio teórico. En ese momento se inició una etapa de reflexión sobre lo aprendido en la primera fase del estudio y de diseño de la nueva etapa. A continuación describimos estas hipótesis, que no deben entenderse en el sentido de hipótesis estadísticas, sino como las expectativas iniciales sobre los resultados del trabajo.

Ya la Memoria de Tercer Ciclo apuntó a la diversidad de comprensión de los estudiantes sobre las preguntas que entonces les planteamos. La lectura de los antecedentes de nuestro trabajo y su clasificación e interpretación a la luz del marco teórico utilizado (Capítulo 3), así como los resultados de otros trabajos planteados dentro de nuestro mismo marco por otros profesores (en particular Ortiz, 1999; Tauber, 2000) nos indicaban la complejidad de los conceptos estadísticos. Nuestras primeras hipótesis, que planteamos a continuación, hacen referencia a que esta complejidad se presentaría en el significado institucional (de referencia y pretendido) sobre el tema.

H1: El significado de las medidas de posición central, incluso en su nivel descriptivo y univariante tiene un carácter complejo, debido a la multiplicidad de elementos y su interrelación, lo que hace difícil la secuenciación de su enseñanza.

H2: Asimismo es complejo el significado presentado sobre estos conceptos en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y encontraremos una variedad de significado presentado sobre los mismos conceptos en distintos libros de texto dirigidos al mismo nivel educativo.

Estas hipótesis se justifican por los resultados similares que sobre otros conceptos estadísticos y probabilísticos han sido obtenidos por Ortiz (1999) y Sánchez- Cobo (1999) en sus estudios sobre los libros de texto. Para tratar de analizarlas se llevó a cabo el estudio conceptual (Capítulo 2) y curricular (Capítulo 4).

Por otro lado, esperábamos que esta complejidad del significado institucional de las medidas de posición central se reflejase en los significados personales de los estudiantes sobre el tema, desde diversos puntos de vista. Algunas investigaciones (como las de Watson y Moritz, 1999, 2000) sugieren que la comprensión de los promedios pasa por una serie de estadíos de desarrollo, siguiendo modelos neopiagetianos.

Sin llegar a contradecir totalmente estos supuestos, nuestra idea es que las etapas en la comprensión definidas por estos autores para los promedios (y en general para otros conceptos estadísticos presentados en otros trabajos suyos) es demasiado simplista y no toma en cuenta la riqueza del significado institucional del concepto. Cuando el profesor ha de planificar la enseñanza, más que interesarse por un grado de comprensión (¿cuánto?) se preocupa por las dificultades, concepciones erróneas y falta de comprensión de aspectos particulares (¿qué?).

Partimos del supuesto básico de que la rica variedad de los significados personales no ha sido suficientemente explorada en las investigaciones previas, que han utilizado ítems con respuestas cerradas correspondientes a categorías muchas veces artificiales, o que se han limitado a clasificar las respuestas de los estudiantes como correctas o incorrectas. A continuación planteamos estas ideas sobre el significado personal de los estudiantes en forma de hipótesis.

H3. Al plantear a los alumnos tareas no convencionales (en el sentido de que requieren interpretación y no sólo cálculo) encontraremos una amplia gama de dificultades, incluso para los alumnos que ya han tenido instrucción sobre el tema.

H4. Los alumnos utilizan correctamente un gran abanico de elementos de significado de las medidas de posición central, incluso cuando no lleguen a obtener la solución correcta a las tareas planteadas. Las soluciones correctas pueden obtenerse a partir de razonamientos variados, que indican una diversidad de significados personales sobre el tema.

H5. Observaremos una mejora en el conocimiento (mejor ajuste entre significados personales e institucionales) en los alumnos que finalizan la Educación Secundaria Obligatoria, pero éste no será homogéneo en todas las tareas o en todos los elementos de significado usados por los alumnos.

H6. Analizada la multidimensionalidad de las respuestas de los alumnos al cuestionario, observaremos la existencia de diferentes factores que sugieren capacidades diferenciadas o tipos diferenciados de conocimiento (en contraposición a una teoría unidimensional de desarrollo según estadíos).

H7. La dificultad de las tareas sobre promedios se puede explicar por la complejidad semiótica de las mismas y la existencia de conflictos semióticos en los estudiantes, durante el proceso de resolución de los problemas.

Para tratar de analizar estas hipótesis hemos recogido abundantes datos de los estudiantes, a partir de sus respuestas abiertas al cuestionario, que analizamos con las técnicas descritas en la sección 1.6.4. Éstas incluyen métodos cualitativos y cuantitativos, univariantes y multivariantes. Presentaremos con detalle las técnicas y los resultados de las mismas, así como nuestra interpretación de ellos. Finalmente, en el capítulo de conclusiones volveremos sobre todas estas hipótesis para realizar una discusión de las mismas, en vista de los datos recogidos, y para ver en qué medida estos datos las apoyan o contradicen.

1.6.6. LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Somos conscientes de que esta evaluación del significado personal es parcial, debido a que el tiempo limitado de que disponíamos nos ha hecho seleccionar sólo algunos de los elementos de significado. Por otro lado, y fijados unos elementos de significado dados, las posibles preguntas y tareas que podemos proponer sobre los mismos son muy numerosas, incluso podríamos decir que potencialmente infinitas, ya que podemos variar el contexto, el formato y otros elementos de los ítems de la prueba. Aceptando estas limitaciones, creemos que el cuestionario elaborado nos permite realizar un primer acercamiento a la comprensión de diversos elementos del significado personal, por el uso que se hace de ellos, pudiendo además, al pedirles argumentaciones, acceder a los razonamientos seguidos por los alumnos.

Asimismo, la muestra utilizada es intencional y de tamaño moderado, puesto que hemos preferido realizar un estudio cualitativo exhaustivo de las respuestas, lo que nos ha obligado a limitar su tamaño. Aún así, los altos coeficientes de generalizabilidad sugieren que nuestras conclusiones se podrán extender a otras muestras de alumnos similares a las de nuestro estudio, siempre que se utilicen tareas comparables o similares.

CAPÍTULO 2.

FUNDAMENTOS

2.1. INTRODUCCIÓN

En este Capítulo presentamos los fundamentos de nuestro trabajo, comenzando por el modelo teórico propuesto por Godino (1999), que presenta tres dimensiones: Epistemológica, semiótico-cognitiva e instruccional, cada una de las cuales se apoyan respectivamente en la teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998a); teoría de las funciones semióticas (Godino, 1998) y, teoría de las trayectorias didácticas (Godino, 1999). Una versión revisada y ampliada del marco teórico se presenta en Godino (2002). A continuación aplicaremos este marco teórico para realizar un análisis epistémico de las medidas de posición central, limitándonos a su uso en estadística descriptiva y análisis exploratorio de datos univariante.

Como hemos indicado en el Capítulo 1 al describir la metodología, no entraremos en la perspectiva instruccional, sin dejar de reconocer su importancia. Para este trabajo concreto hemos preferido centrarnos en los dos primeros componentes. En todo caso, nos parece interesante mostrar una panorámica completa del marco teórico, que permitirá centrar y fundamentar mejor nuestro trabajo.

Una de las características de este modelo es que problematiza la naturaleza de un objeto matemático. Como indican los autores, en el trabajo matemático los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). El punto crucial en los procesos de instrucción matemática no está, sin embargo, en el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, incluso aunque ésta sea también importante, sino en la comprensión de su semántica, es decir, en la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y situaciones-problemas de cuya resolución provienen. Esta modelización tiene en cuenta, entre otros, los siguientes supuestos:

- Diversidad de objetos puestos en juego en la actividad matemática, tanto en el plano de la expresión como en el del contenido.
- Diversidad de actos y procesos de interpretación.
- Diversidad de contextos y circunstancias espacio-temporales y psicosociales que determinan y relativizan estos procesos.

Se parte del supuesto de que un mismo término o expresión matemática, como por ejemplo, "la media", puede tener distinto significado para diferentes personas o instituciones. Es por ello que, cuando queremos reflexionar sobre la dificultad que el aprendizaje de ciertos conceptos tiene para los alumnos, es necesario comenzar por hacer un análisis epistemológico de su significado y precisar el *significado de referencia* que estos términos recibirán en nuestra investigación.

Como indica Godino (1996b), "*el problema de la comprensión está íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen* *tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto? ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo se desarrollan estos componentes?* (pg. 418).

A continuación, detallamos los elementos principales del marco teórico, indicando cuáles de ellos tomaremos como fundamentos de nuestra investigación. En la sección 2.3. aplicamos este marco teórico para describir el *significado de referencia* de las medidas de posición central en esta tesis, que se determina a partir del estudio y análisis de una muestra de libros de texto de estadística aplicada, destinados a estudiantes de primeros cursos universitarios. Posteriormente usaremos el modelo para determinar el significado institucional pretendido de los promedios en la enseñanza secundaria (capítulo 4) y en la evaluación de los significados personales de los estudiantes (capítulos 5 y 6).

2.2. MARCO TEÓRICO

2.2.1. CAMPOS DE PROBLEMAS Y SIGNIFICADO DE UN OBJETO MATEMÁTICO

Este modelo teórico toma los siguientes supuestos como base:

- Las matemáticas constituyen un quehacer humano, que tiene la finalidad de dar respuesta a cierta clase de situaciones problemáticas internas o externas a la propia matemática. Los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc.), surgen de esta actividad y evolucionan progresivamente.
- Las matemáticas se pueden ver como un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problemas y sus soluciones. De acuerdo a Vygostky (1977), los sistemas de símbolos dados por la cultura no sólo tienen una función comunicativa, sino un papel instrumental que modifican al propio sujeto que los utiliza como mediadores.
- La matemática es también un sistema conceptual lógicamente organizado. La organización lógica de los conceptos, los teoremas y las propiedades también explica el gran número de problemas implicados en el aprendizaje de las matemáticas. Un sistema no se reduce a la suma de componentes aislados, porque lo que constituye un sistema son precisamente las interrelaciones entre sus componentes (Godino y Batanero, 1998b).

Los autores presentan el objeto matemático, como emergente de un sistema de prácticas, tomando esta idea de Chevallard (1991), quien llamó praxema a los "*objetos materiales ligados a las prácticas*" y usó esta noción para definir el objeto como un "*emergente de un sistema de praxemas*", más concretamente como:

> "*Un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito*" (pag. 8).

Se parte de la situación-problema como noción primitiva, considerándola como cualquier circunstancia en la que se deben realizar actividades de matematización, que incluye, según Freudenthal (1991) lo siguiente:

- Construir o buscar soluciones de un problema que no son inmediatamente accesibles;
- Inventar una simbolización adecuada para representar la situación problemática y las soluciones encontradas, y para comunicar estas soluciones a otras personas;
- Justificar las soluciones propuestas (validar o argumentar);
- Generalizar la solución a otros contextos, situaciones-problemas y procedimientos.

Cuando una clase de situaciones-problemas tiene soluciones y procesos de resolución similares o relacionados, hablamos de un campo de problemas. En esta investigación nos centraremos en los campos de problemas y en las actividades de las que emerge progresivamente el objeto matemático designado con el término "media", y posteriormente las otras medidas de tendencia central, moda y mediana. Describiremos, para aclarar nuestros conceptos teóricos, el campo de problemas asociado a la media, partiendo de Batanero (2000b), quien considera el siguiente problema:

P1. Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6'2, 6'0, 6'0, 6'3, 6'1, 6'23, 6'15, 6'2 ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

Este es un ejemplo particular de una clase de problemas: *estimación de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida.* Si planteamos este problema a los alumnos de secundaria, la mayoría sumará los valores y dividirá por ocho para obtener el valor 6'1475. Es fácil imaginar otros problemas que tienen esta misma solución. En muchas situaciones necesitamos medir una cantidad X desconocida de una cierta magnitud. Pero debido a la imperfección de nuestros instrumentos, en mediciones sucesivas obtenemos distintos números como medidas de X. No tenemos ninguna razón para pensar que el verdadero valor esté más cercano a uno u otro de los datos obtenidos.

El problema consiste en determinar, a partir de un conjunto de medidas $x_1, x_2,..., x_n$ la mejor estimación posible del verdadero valor X desconocido. Según Plackett (1970), los astrónomos de Babilonia plantearon este problema, que fue resuelto en la Edad Media por Tycho Brae calculando la suma total de las observaciones y dividiendo por el número de datos. Esta práctica se ha conservado hasta nuestros días, dando origen a lo que hoy conocemos por media aritmética.

Para enunciar y resolver el problema P1, los sujetos utilizan representaciones simbólicas de los objetos matemáticos abstractos (números, operaciones,...). Por ejemplo, es una práctica habitual usar la expresión (1) para expresar la solución del problema P1 en su enunciado general. En esta expresión los símbolos representan el número de datos, los valores obtenidos en las distintas mediciones, su suma, la división y el resultado obtenido:

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + ...+ x_n)/n \qquad (1)$$

Una característica de la actividad matemática es que, una vez hallada la solución de un problema, se trata de extender ésta a otros casos diferentes de la situación concreta particular. Con relación al problema P1, se puede generalizar la expresión (1) para un valor arbitrario n, a un número infinito de valores, en variables aleatorias discretas o continuas, obteniéndose las expresiones (2) y (3).

(2) $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \mu$$

(3) $$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

Sumar un conjunto dado de valores y dividir por el número de valores, sumar una serie, hallar una integral o escribir las expresiones anteriores son ejemplos de *prácticas matemáticas*, es decir de acciones llevadas a cabo para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, mostrar que la solución es correcta y generalizarla a otros contextos y problemas.

Aunque en cada problema concreto de estimación de la magnitud de interés, el instrumento de medición, el número de medidas tomadas y los valores concretos obtenidos varían, las expresiones (1) a (3) son aplicables de forma general para el cálculo de la mejor estimación del valor desconocido. Estas prácticas han dado lugar poco a poco al concepto que hoy conocemos como "media aritmética", primeramente como útil implícito en la solución de problemas prácticos, más tarde como objeto de estudio en sí mismo. El estudio y caracterización de sus propiedades llevó progresivamente a la aplicación del concepto en la solución de otras situaciones problemáticas como las siguientes:

P2. Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

En la situación P2 y otras similares se necesita obtener una cantidad equitativa a repartir para conseguir una distribución uniforme, y como en el ejemplo, se toma la media aritmética. Este tipo de problemas surge con frecuencia al obtener la "renta per cápita", la velocidad media durante un viaje o la calificación final en un examen compuesto de varios exámenes parciales.

P3. Al medir la altura, en cm., que pueden saltar un grupo de escolares, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes. ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?

	Altura saltada (en cm.)									
Alumno	*Ana*	*Bea*	*Carol*	*Diana*	*Elena*	*Fanny*	*Gia*	*Hilda*	*Inés*	*Juana*
Antes del entrenamiento	*115*	*112*	*107*	*119*	*115*	*138*	*126*	*105*	*104*	*115*
Después del entrenamiento	*128*	*115*	*106*	*128*	*122*	*145*	*132*	*109*	*102*	*117*

El problema P3 muestra otra aplicación típica de la media, que consiste en servir de elemento representativo de un conjunto de valores dados x_i, cuya distribución es aproximadamente simétrica. En el ejemplo P3 usaríamos la altura media saltada antes y después del entrenamiento para ver si éste ha producido algún efecto.

Para representar un conjunto de datos se toma la media por sus propiedades de localización central, por ser "centro de gravedad" del espacio de valores muestrales o poblacionales. Si la distribución es muy asimétrica, el valor más frecuente (moda) o el valor central en el conjunto de datos ordenados (mediana) podrían ser más representativos. Vemos que cuando añadimos condiciones a un campo de problemas surgen conceptos relacionados con el de interés, con el cual guardan diferencias y semejanzas que es necesario investigar. De los primitivos problemas extra matemáticos, pasamos posteriormente a problemas internos a la misma matemática, como estudiar las diferentes propiedades de las medidas de posición central.

P4. La altura media de los alumnos de un colegio es 1'40. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la altura de los 4 primeros es de 1'38, 1'42, 1'60, 1'40. ¿Cuál sería la altura más probable del quinto estudiante?

En otras ocasiones se necesita conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población. Por ejemplo, al predecir la esperanza de vida o el beneficio esperado en una inversión en bolsa, se toma la media de la variable en la población como predicción, como valor esperado, por sus propiedades muestrales derivadas del teorema central del límite. Del concepto de valor esperado se derivan muchos modelos de predicción, como los distintos tipos de regresión. Así, cuando predecimos el peso de una persona en función de su altura, usamos el peso promedio de todas las personas que en la población tienen la altura dada. En este caso, el valor buscado será la media en distribuciones simétricas, pero en distribuciones asimétricas o bimodales, la moda o la mediana podrían sustituirla.

Problemas como los P1 a P4 y otros problemas, primero prácticos y más tarde teóricos, han llevado a la definición del concepto de media, a la identificación de sus propiedades, más tarde a la definición de otras medidas de posición central, como la mediana o moda, que son preferibles a la media en algunas situaciones concretas. Además, ha sido necesario "probar" o "demostrar" la validez de estas soluciones y propiedades, para aceptarlas como parte del conocimiento matemático. Otros posibles problemas asociados a la media que no estudiamos en este trabajo serían hallar la “razón que mide la contribución relativa de un grupo respecto a cada elemento” (Cortina, 2002) o la “señal en un proceso aleatorio –frente al ruido o variabilidad” (Konold y Pollatsek, 2001).

2.2.2. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO

Cuando nos preguntamos por el *significado* de la media o de las medidas de posición central observamos de las descripciones anteriores, que este significado tiene un carácter complejo. En el trabajo matemático se pueden identificar los siguientes tipos de entidades: Enunciados de problemas, ejercicios; notaciones, símbolos, texto ordinario; operaciones, algoritmos; definiciones de conceptos, enunciados de proposiciones; demostraciones, comprobaciones.

En correlación con estas entidades, se definen los siguientes tipos primarios de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática y que llamaremos *elementos de significados*:

- *Campos de problemas*: Entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (situaciones-problemas, aplicaciones) de donde surge el objeto. En nuestro caso los problemas tipo P1 a P4 y sus generalizaciones formarían parte del campo de problemas asociados a las medidas de posición central.

- *Algoritmos y procedimientos*: Modos de actuar ante situaciones o tareas (procedimientos, algoritmos, operaciones). Cuando un sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, o comunicar la solución a otras personas, validar y generalizar la solución a otros contextos y problemas, etc., realiza distintos tipos de algoritmos. Sería característico en la solución de problemas de promedios sumar una serie de valores y dividir por el número de sumandos, encontrar el valor más frecuente en una tabla de frecuencias, calcular las frecuencias acumuladas y hallar el valor al que corresponde la mitad del número total de datos, o integrar el producto de la variable por la función de densidad en un cierto dominio.

- *Lenguaje*: Representaciones materiales utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos). Las notaciones, gráficos, palabras y en general todas las representaciones del objeto abstracto, como los términos "media", "valor medio", "promedio", $E(X)$, $\sum x_i p_i$ μ, $\int xf(x)dx$, que podemos usar para referirnos al concepto. El papel relevante del lenguaje -sistemas de signos, dados por la cultura- como mediadores entre los estímulos del medio y las respuestas del sujeto es resaltado por Vygotsky (1977), quien presenta, asimismo, la actividad como elemento esencial de su teoría del aprendizaje. Estos sistemas de signos no sólo tienen una función comunicativa sino un papel instrumental que modifica al propio sujeto que los utiliza como mediadores. El análisis semiótico de la actividad matemática realizado por Rotman (1988) apoya también la íntima interdependencia entre el pensamiento y el lenguaje matemático.

- *Definiciones y propiedades*: ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones). En las descripciones anteriores de la actividad matemática hemos visto que el sujeto, al resolver el problema, no sólo realiza acciones sobre los símbolos u objetos materiales con los que opera, sino que en dicha actividad necesita evocar diferentes conceptos matemáticos que previamente conoce y en los que se apoya para resolver el problema, mediante sus definiciones o descripciones. Incluimos aquí las definiciones y propiedades características y sus relaciones con otros conceptos. Por ejemplo, en su investigación, Strauss y Bichler (1988) encuentran una proporción importante de niños de entre 8 y 12 años que eran capaces de comprender y aplicar adecuadamente las propiedades a) c) y d) siguientes de la media, mientras que el resto de ellas resultaron demasiado abstractas:
  a) La media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución;
  b) La suma de las desviaciones de cada valor a la media es igual a cero;
  c) El valor medio es influenciado por los valores de cada uno de los datos;
  d) La media no tiene por qué ser igual a uno de los valores de los datos;
  e) El valor obtenido de la media de números enteros puede ser una fracción, que no tenga sentido en el contexto de los datos;
  f) Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media;
  g) El valor medio es representativo de los valores promediados.

- *Argumentos*: Finalmente, todas estas acciones y objetos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o explicar a otro la solución y que pueden ser deductivas, o de otro tipo. Incluimos aquí las demostraciones que empleamos para probar las propiedades del concepto y que llegan a formar parte de su significado y los argumentos que empleamos para mostrar a otras personas la solución de los problemas. La forma más característica de validación en matemáticas es de tipo deductivo y esta es la más extendida en los libros de nivel universitario. Este tipo de argumentación se completa o sustituye, dependiendo del nivel educativo por otras como la búsqueda de contraejemplos, generalización, análisis y síntesis, simulaciones con ordenador, demostraciones informales, etc.

Esta diferenciación de elementos en el *significado de un objeto matemático* es opuesta y complementaria a su carácter unitario. Por ello puede contribuir a enfocar desde un punto de vista más completo la problemática del diseño de situaciones didácticas y la evaluación de los conocimientos del sujeto, en donde se deben tener en cuenta estos diversos elementos de significado.

2.2.3. DIMENSIONES INSTITUCIONAL Y PERSONAL DEL CONOCIMIENTO

En general los problemas no aparecen de forma aislada, sino que los mismos problemas son compartidos dentro de cada institución, y las soluciones encontradas dependen de los instrumentos y prácticas sociales disponibles.

Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. Puesto que se comparte la misma problemática, las prácticas sociales son compartidas, y suelen tener rasgos particulares, generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento, por lo que están ligadas a la institución, a cuya caracterización contribuyen. Así, problemas similares a P1 de estimación de una cantidad desconocida son compartidos en instituciones de investigación experimental, como la física, astronomía o la agronomía y también en las instituciones escolares, pero los instrumentos disponibles son muy diferentes en uno y otro caso, de modo que el significado de un concepto matemático varía según la institución considerada.

Los matemáticos y estadísticos profesionales constituyen una institución interesada en resolver, entre otros, problemas de promedios. Son los productores del "saber matemático" y podemos incluir en ella a todos aquellos que están realizando investigaciones dirigidas a la obtención de nuevo conocimiento matemático, pero existen otras instituciones diferentes que también podrían estar interesadas en la media, aunque podría atribuirle un significado más restringido al que recibe dentro de la matemática, por ejemplo:

(I1) En la educación primaria, los únicos instrumentos disponibles son los conocimientos numéricos de los alumnos, así como el uso de material didáctico o calculadoras en esta etapa y los currículos proponen que se enseñe a los alumnos:

- La definición de la media, mediana y moda en el caso más simple, empleando una notación sencilla (se evita el sumatorio y la ponderación);
- Algunos ejemplos de aplicación, limitando el cálculo de las medidas de tendencia central a conjuntos sencillos de datos, y haciéndolo manualmente o con calculadora.
- Discriminación respecto de otras medidas de tendencia central (mediana, moda).

(I2) En la educación secundaria (y en la universidad) se amplía la definición de la media, trabajándose primero con medias ponderadas y luego con medias de variables aleatorias discretas y continuas. Se enuncian y demuestran algunas propiedades de los promedios y se presentan aplicaciones a situaciones problemáticas más realistas y complejas. Por ejemplo, en la universidad se introduce la noción de media o esperanza matemática de una distribución de probabilidad y se muestra que la media es un parámetro que define algunas distribuciones de probabilidad, como la normal; al iniciar el estudio de la inferencia, distinguimos varias medias: media de la muestra, media de la población, media de la media muestral en todas las muestras de tamaño dado.

(I3) En la "vida diaria" encontramos la media en los medios de comunicación y el trabajo profesional, por ejemplo, cuando analizamos los números índices de la evolución de la bolsa, precios, producción, empleo y otros indicadores económicos.

Como podemos ver, en los ejemplos anteriores se presentan una diversidad de prácticas significativas, de las que algunas sólo son realizadas por estadísticos profesionales y otras, pueden ser realizadas también por alumnos. Al considerar una cierta institución escolar, como la educación secundaria, el significado construido por un alumno particular, en un momento del proceso de aprendizaje puede no corresponder exactamente al significado del objeto en la institución dada, por lo que conviene distinguir entre *significado institucional* y *significado personal* de un objeto matemático. Esto nos lleva a diferenciar entre *prácticas institucionales o personales*.

Las prácticas institucionales son aquellas aceptadas en el seno de una institución que puede ser por ejemplo, la institución que agrupa a los estadísticos profesionales, o la institución de los educadores estadísticos. De acuerdo a la institución en la que se desarrolle la práctica, el nivel de ésta puede ser mayor o menor, es decir, las prácticas que se desarrollan en el seno de la institución educativa no siempre coinciden con las que se desarrollan en la institución estadística, porque generalmente en la primera se manejan conceptos estadísticos menos elevados en el sentido de la formalización y del grado de conocimiento que se requiere para aplicarlos.

Por otro lado, siguiendo a los autores, consideraremos que una práctica es *personal* cuando la realiza una persona, como por ejemplo, en el caso de nuestro trabajo consideraremos que una práctica es personal cuando la realice un solo alumno.

En consecuencia, existe un sistema de prácticas institucionales o personales significativas asociadas a cada campo de problemas e institución o persona. El objeto matemático se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo o tipo de problemas matemáticos. Este proceso emergente es progresivo a lo largo del tiempo, hasta que en determinado momento es reconocido como tal por la institución, aunque luego sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado. Por otro lado, el conocimiento sobre cada objeto matemático (como la media) no ha sido siempre igual al actual, sino que se ha desarrollado lentamente a lo largo del tiempo, ya que a medida que se han ido resolviendo problemas progresivamente diferentes y más complejos, el objeto se desarrolla y completa en su significado. Consideremos, por ejemplo, el siguiente enunciado:

P5. Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 80. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?

No podemos ahora resolver este problema por medio de la media aritmética simple (60+80)/2=70, sino que necesitaríamos ampliar el concepto al de media ponderada: (60·4+70·6)/10=66. Como cualquier otro concepto, la media y otras medidas de tendencia central han tenido un lento desarrollo dentro de la matemática hasta el momento en que fueron reconocidos como conceptos matemáticos e incluidos en la enseñanza. Durante este desarrollo ha sufrido transformaciones progresivas según se ha ido ampliando el campo de problemas asociado.

Este carácter progresivo de la construcción de los objetos en la ciencia tiene su paralelismo en el aprendizaje del sujeto y en la invención de nuevas ideas matemáticas. La emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje, y son estos objetos los constituyentes del conocimiento subjetivo.

La didáctica de la matemática ha puesto de manifiesto cómo el aprendizaje del sujeto es también un proceso lento y progresivo que con frecuencia se asemeja a la construcción de los objetos en la ciencia. Para las medidas de posición central no hay todavía un estudio comprehensivo del desarrollo a diversas edades, aunque el trabajo de Watson y Moritz (2000) es un primer paso en este estudio. Como veremos en nuestra exposición, en realidad estos conceptos son bastante elaborados, de modo que el conocimiento que un sujeto puede adquirir fuera del ámbito escolar es necesariamente muy limitado y restringido. Ello posiblemente haya influido en la falta de interés por el desarrollo de los mismos por parte de la psicología.

El sistema de prácticas de donde emerge un objeto institucional o personal se define como el *significado institucional o personal* del objeto dado. Además, dentro del significado institucional se considera una subdivisión. Por una parte, se tiene el *significado institucional de referencia*, que puede ser, por ejemplo, el significado que se da desde la institución de estadísticos profesionales, o el significado asignado por los libros de texto. Por otra parte, se tiene el *significado institucional local*, que en nuestro caso será el correspondiente al fijado para la construcción de los instrumentos de evaluación.

2.2.4. SIGNIFICADO Y COMPRENSIÓN

La importancia de la noción de significado que hemos descrito se debe a que de ella se deduce una teoría de la comprensión (Godino, 1996b). Este autor sugiere que para analizar los fenómenos ligados a la comprensión es preciso responder a dos preguntas: *qué* comprender, y *cómo* lograr la comprensión. Un modelo de la comprensión tendrá dos ejes: uno descriptivo, que indicará los aspectos o componentes de los objetos a comprender, y otro procesual que indicará las fases o niveles necesarios en el logro de la 'buena' comprensión. En esta investigación nos centramos principalmente en el eje descriptivo.

La comprensión personal de un concepto es, en nuestro trabajo, la "apropiación" del significado de dicho concepto. No haremos una distinción explícita entre comprensión y conocimiento, aunque en trabajos posteriores Godino (2002) diferencia en el conocimiento las componentes de competencia y comprensión. Ahora bien, puesto que el significado de un objeto no se concibe como una entidad absoluta y unitaria sino compuesta y relativa a los contextos institucionales, la comprensión de un concepto por un sujeto, en un momento y circunstancias dadas, implicará la adquisición de los distintos elementos que componen los significados institucionales correspondientes.

En la clase de matemáticas el profesor sigue las directrices curriculares, los libros de texto y materiales didácticos que marcan un significado particular restringido para la media y las medidas de posición central. Al realizar la evaluación, el profesor considera que el alumno "conoce" o "comprende" las medidas de tendencia central si hay un ajuste entre el significado institucional y el personal construido por el sujeto.

Si no hay acuerdo entre estos dos significados decimos que el tema es difícil para el alumno. Por esto, también en la comprensión debemos diferenciar una dimensión personal e institucional. En las instituciones escolares se organizan procesos educativos para determinados alumnos, y se asigna al profesor la tarea de ayudar a los estudiantes a adquirir unas propiedades y relaciones culturalmente aceptadas para los términos y expresiones matemáticas.

Godino (1996b) indica que la comprensión deja de ser meramente un proceso mental y se convierte en un proceso social y que podemos considerar que un alumno "comprende" suficientemente los promedios desde el punto de vista de la enseñanza secundaria y que no los comprende desde el punto de vista de unos estudios universitarios.

Evaluación de la comprensión

Además, en Godino (1996b) se indica que la comprensión personal correspondería a la parte inobservable del conocimiento (sería un constructo, en términos psicológicos), mientras que el significado, como conjunto de prácticas, es, por lo menos potencialmente, observable.

Asimismo concibe la evaluación como el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales, y con este sentido se toma en esta investigación. La evaluación de la comprensión de un sujeto tiene que ser relativizada a los contextos institucionales en que dicho sujeto participa. Una institución (escolar o de otro tipo) dirá que un sujeto 'comprende' el significado de un objeto si dicho sujeto es capaz de realizar las distintas prácticas que configuran el significado de dicho objeto institucional, además de fundamentarlas y reflexionar sobre el proceso seguido.

Cuando se quiere caracterizar el significado de un objeto en una institución o para una persona, las prácticas observables son los indicadores empíricos que nos permiten esta caracterización. En consecuencia, la comprensión personal de un individuo sobre un cierto objeto matemático deberá ser inferida mediante el análisis de las prácticas realizadas por la persona en la resolución de tareas problemáticas o ítems de evaluación que sean característicos para ese objeto.

2.2.5. FUNCIONES SEMIÓTICAS Y SUS TIPOS

Las entidades elementales que hemos descrito en la sección anterior (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades y argumentos) no aparecen aisladas en la actividad matemática, sino que se ponen en relación durante la misma. Habitualmente, en el trabajo matemático usamos unos objetos en representación de otros, en especial de los objetos abstractos, existiendo una correspondencia, con frecuencia implícita, entre el objeto representante y el representado.

Para tener en cuenta estas relaciones entre elementos, además de la dimensión institucional, se tiene en cuenta en nuestro marco teórico la faceta semiótico-cognitiva. Esta noción permite también describir el razonamiento matemático como secuencia de funciones semióticas encadenadas.

En Godino y Batanero (1998b), se describe la noción de *función semiótica,* tomando esta idea de Humberto Eco, como una "correspondencia entre conjuntos", que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- Un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido.

Con frecuencia las funciones semióticas vienen dadas por uno de sus tres componentes, quedando los otros dos implícitamente establecidos. El signo, por tanto, no explicita la correspondencia entre expresión y contenido, sino que alguien debe hacer una posible *interpretación*. Cuando la interpretación que hace un alumno no está de acuerdo con lo esperado desde la institución de enseñanza, se produce un *conflicto semiótico* que explica muchas de las dificultades y errores observados en el aprendizaje.

Los cinco tipos de entidades primarias consideradas pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas, alguna de las cuales pueden interpretarse claramente como procesos cognitivos específicos (generalización, simbolización, etc.). Consideremos algunos ejemplos en las respuestas de algunos alumnos a uno de los ítems en nuestro cuestionario de evaluación:

Ítem: Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1.2 hijos por familia. Explícanos qué significa para ti esta frase.

- En la respuesta *"que han sumado y lo han dividido y les ha salido 1.2"*, las expresiones "sumado" "dividido" hacen referencia a acciones concretas, es decir, poner en relación un elemento lingüístico con una acción. "1.2" es una expresión simbólica que hace referencia, a un número decimal (el número 1.2, que es un concepto abstracto);
- En la respuesta *"pienso que significa que el número de hijos por familia suele ser de 1 a 2",* las palabras "familia", "hijos" hacen referencia a objetos fenomenológicos; a familias reales e hijos reales que son imaginados por el alumno que da la respuesta.
- En el siguiente caso, el alumno, para resolver otro problema usa símbolos numéricos para referirse a los datos del problema (número de hijos, por tanto es un elemento fenomenológico), pero también para referirse a acciones (suma, división) y a los conceptos subyacentes (concepto de suma, división y media aritmética).

$$\frac{8+8+4+4+4+4+4+4+4+4}{10} = \frac{16+16+16}{10} = \frac{48}{10} = 4'8 \text{ horas}$$

- El mismo enunciado de la tarea hace referencia a una situación real. Es la descripción de la situación, pero no la misma situación. Por tanto el lenguaje se pone en correspondencia con un problema.
- En otras ocasiones un problema podría usarse como referencia a otro diferente, como cuando usamos la simulación para resolver un problema de probabilidad. Resolvemos un problema (la simulación) pero en realidad estamos haciendo referencia a otro (la situación real).

Estos son sólo algunos de los ejemplos posibles de este tipo de correspondencias que se emplean en la actividad matemática y desencadenan procesos interpretativos por parte de los sujetos. En algunas ocasiones los alumnos no establecen la correspondencia semiótica en la forma que espera el profesor y esto desencadena conflictos semióticos que explican en gran parte los errores de los alumnos en la solución de las tareas.

Además, es preciso distinguir entre *significados elementales o sistémicos*, definiéndolos de la siguiente manera:

- *Significado elemental*: El contenido de la función semiótica, es un objeto preciso, determinable sin ambigüedad en las circunstancias espacio-temporales fijadas. Es el caso de los ejemplos que acabamos de presentar, cada uno de los cuales tiene un significado elemental.
- *Significados sistémicos:* Cuando la función semiótica hace corresponder a un objeto matemático el sistema de prácticas de donde proviene tal objeto (Godino y Batanero, 1994; 1998b). Este significado sistémico de un objeto matemático se concibe como una entidad compuesta y organizada (sistema), cuyos elementos estructurales son los que hemos descrito.

El significado sistémico de un objeto tiene un carácter teórico y trata de explicar la complejidad de los procesos didácticos, pero no puede ser descrito en su totalidad. Es sólo una entidad teórica. Para cada investigación particular fijaremos un *significado de referencia*, describiendo con detalle sus elementos, que servirá para comparar con los resultados de la investigación. En nuestro caso describiremos en este capítulo 4 el significado de referencia, mediante un análisis epistémico, relativo al conocimiento institucional.

También puede interesar describir algunos *significados locales* que son más restringidos que el significado de referencia y pueden tener utilidad para construir un cuestionario de evaluación, o para planificar una enseñanza. En nuestro caso fijaremos un significado local para la construcción del instrumento de evaluación, a partir del análisis curricular que se describe en el capítulo 4.

2.2.6. AGENDA DE INVESTIGACIÓN ASOCIADA AL MARCO TEÓRICO

Godino y Batanero (1998) proponen una agenda de investigación que se puede describir en términos de tres tipos diferentes de problemáticas, atendiendo a la finalidad del estudio y que presentamos en la tabla 2.2.1, tomada de Godino (1999).

- En la s*emiometría* se contempla la caracterización de los elementos de significado y funciones semióticas en las cuales un objeto se pone en juego en un contexto y circunstancias fijadas.
- La e*cología de significados* es el estudio de las condiciones de soporte de un objeto, su dependencia de otros objetos y de las funciones o papeles que desempeña en relación con los restantes objetos del sistema.
- La d*inámica de significados* analiza el cambio de los distintos elementos estructurales del significado de un objeto en el transcurso del tiempo.

Por otro lado, en relación con el objeto de estudio, el autor considera:

El a*nálisis epistémico,* o proceso de identificación de los componentes del significado institucional del objeto. Puede ser determinado a partir del análisis de textos producidos por la institución o de la observación de sus prácticas y puede ser usado como *significado institucional de referencia* para las investigaciones.

Este análisis epistémico debe ser previo al análisis cognitivo y didáctico, porque permitirá identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de un contenido matemático. En nuestro caso realizaremos un análisis epistémico, a partir de libros de texto universitarios para determinar el significado institucional de referencia de nuestra investigación. Posteriormente haremos un estudio curricular para fijar el significado local base de la construcción del cuestionario de evaluación.

Puesto que analizamos los conceptos de media, mediana y moda, sus elementos de significado y relación con otros conceptos, realizamos un estudio epistémico, tanto desde el punto de vista de la semiometría, como del de la ecología.

En el a*nálisis cognitivo,* relativo al conocimiento personal, se identifican tanto los elementos de significado utilizados por los sujetos (significado personal) y las funciones semióticas que establecen en su trabajo al resolver problemas o en los procesos de comunicación. Este tipo de análisis puede servir para formular y evaluar hipótesis sobre puntos críticos del proceso instruccional en los cuales puede haber disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados o cambios en el proceso de estudio. En el caso que nos ocupa en esta investigación, usaremos este tipo de análisis en la evaluación de los alumnos participantes. El análisis se llevará a cabo desde el punto de vista semiótico y ecológico, ya que estudiamos el significado que los alumnos atribuyen a las medidas de posición central y las relaciones que establecen entre éstas y otros objetos.

En el análisis instruccional *se caracterizan las diversas funciones docentes y discentes, así como el desarrollo de una secuencia didáctica específica. En nuestro trabajo no haremos este tipo de estudio.*

Tabla 2.2.1. Agenda de investigación

Finalidad Objeto de estudio	SEMIOMETRÍA (Medición)	ECOLOGÍA (Relación)	DINÁMICA (Cambio)
ANÁLISIS EPISTÉMICO (Objetos institucionales)	¿Qué significa el objeto para la institución?	¿Con qué otros objetos se relaciona y de qué depende el objeto en la institución?	¿Cómo cambia el significado del objeto para la institución?
ANÁLISIS COGNITIVO (Cognición) (Objetos personales)	¿Qué significa el objeto para la persona?	¿Qué relaciones establece la persona entre el objeto y otros objetos matemáticos?	¿Cómo cambia el significado del objeto para la persona?
ANÁLISIS INTRUCCIONAL (Instrucción)	¿Qué puede hacer el profesor para ayudar al alumno a estudiar el significado institucional del objeto en un contexto instruccional?	¿De qué factores depende la implementación del proceso de estudio?	¿Cuáles han sido las trayectorias didácticas de cada componente del proceso de estudio?

2.3. ANÁLISIS EPISTÉMICO

2.3.1. INTRODUCCIÓN

De acuerdo al marco teórico adoptado, el significado de los objetos matemáticos puede variar en distintas instituciones. Un punto importante en nuestro estudio será describir el significado institucional de referencia que sirve de pauta de comparación para la construcción de los instrumentos de evaluación y la interpretación de las respuestas de los alumnos al mismo. Este será el objetivo del resto del capítulo.

Para la determinación de dicho significado hemos partido de textos de estadística descriptiva como los de Calot (1974), y textos introductorios de estadística aplicada, dedicados a alumnos de primeros cursos de universidad en especialidades no científicas, sin estudios previos de estadística, como los de Guilford, y Fruchter (1978), Batanero y cols. (1988), Ríos (1991), Spiegel (1991), Valeri (1992), Nortes Checa (1993), Graham (1994), Moore (1995), Sánchez Carrión (1995), Peña y Romo (1997), Peña (2001) y Batanero y Godino (2001).

El análisis se aplica al conjunto de los contenidos en dichos libros, y es por tanto un significado construido para esta investigación, que no coincide con ninguno de los mostrados en dichos libros, pero engloba a todos ellos. De este modo tomamos como significado de referencia uno algo más amplio que el que podría estudiarse en la educación secundaria, aunque no excesivamente formalizado. Somos conscientes que nuestro estudio no agota el significado de las medidas de posición central, puesto que nos estamos restringiendo a su uso en estadística descriptiva y análisis exploratorio de datos, sin entrar en las cuestiones de inferencia, ya sea clásica o paramétrica, ni en el análisis multivariante.

Desde el punto de vista del análisis exploratorio de datos, la moda, la media y la mediana son promedios o medidas de centralización, es decir, valores típicos o representativos que señalan las tendencias o características del mismo.

Como cualquier resumen estadístico, se refieren al conjunto de datos globalmente y no a ninguno de sus valores aislados, por lo que permiten sintetizar la información, permitiendo apreciar características relevantes de la distribución. Su comprensión requiere tener en cuenta la esencia de la perspectiva estadística (Biehler, 1997), que consiste en atender a las características de los agregados y no a las de los individuos. Decir que un colectivo dado tiene una cierta tendencia o referirse a uno de sus resúmenes estadísticos, implica la percepción del colectivo como colección de individuos idénticos que varían respecto a la propiedad de interés. La comprensión de dicho estadístico implicará también la de la variabilidad de los datos respecto a su valor.

Los términos *media, moda y mediana* designan un sistema de prácticas, cuyos elementos característicos describimos en las secciones siguientes.

2.3.2. CAMPOS DE PROBLEMAS

Como hemos indicado, en nuestro marco teórico se considera que los objetos matemáticos son fruto de la construcción humana, cambian a lo largo del tiempo y pueden ser dotados de significados diversos por personas o instituciones diferentes. Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o colectivos específicos implicados en el estudio de ciertas clases problemas. En algunos casos estas instituciones pueden ser extra matemáticas, e incluso un problema particular surge inicialmente en una institución extra matemática, aunque posteriormente la comunidad matemática se interesa por su solución y la aplica a otros problemas o contextos. En consecuencia, los objetos matemáticos son entidades culturales socialmente compartidas.

El campo de problemas del que emergen los objetos matemáticos designados como *media*, *moda* y *mediana*, y posteriormente otras medidas de posición central, puede resumirse en las situaciones que describimos a continuación.

Campos de problemas asociados a la media

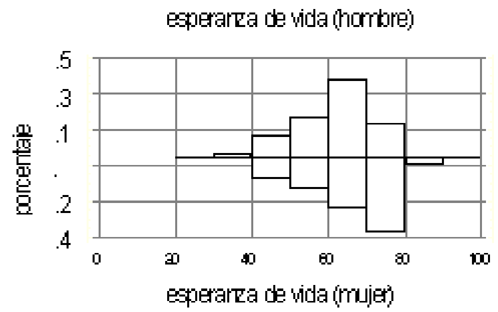
PM1. Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores.

Un ejemplo es el problema P1 que hemos presentado en la sección 2.2.1., donde indicamos que este es el campo de problemas del que originariamente surge la idea de media. Este ejemplo se incluye también en el texto de Batanero y Godino (2001). En este contexto se toma la media como solución por sus propiedades como estimador, tales como ser insesgado o tener mínima varianza.

PM2. Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme.

También en este caso se presentó en la misma sección el problema P2, tomado del mismo texto.

PM3. Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados cuya distribución es aproximadamente simétrica. Generalmente la idea es comparar dos distribuciones, como se muestra en el ejemplo siguiente en que se comparan dos histogramas correspondientes a una distribución aproximadamente simétrica. La media es aquí una buena solución, porque los datos se concentran aproximadamente alrededor de la misma. Presentamos a continuación un ejemplo.



En las figuras representamos los datos sobre esperanza de vida en hombres y mujeres. Escribir un informe de media página razonando en base a esos gráficos si es verdad que las mujeres tienen una esperanza de vida mayor que los hombres (Batanero y Godino, 2001)

PM4. Conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica. El problema P4 (sección 2.2.1) tomado de Batanero y Godino (2001), es un ejemplo.

Campos de problemas asociados a la mediana

PME1. Encontrar un resumen estadístico de posición central, en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa. Cuando la variable es muy asimétrica, tiene valores atípicos o presenta varias modas, el valor medio de una colección de datos no aporta información suficiente, por lo que interesa dividir el conjunto en dos, con el mismo número de efectivos, buscando un valor central. Ejemplos típicos presentados en los textos analizados de este tipo de variables son la renta per cápita, salario y otras variables económicas.

> En una distribución asimétrica la media está muy alejada del centro y se sitúa en la cola de la distribución. Por ejemplo, la distribución de precios de las viviendas está muy sesgada hacia la derecha... Los informes sobre los precios de las viviendas, salarios y otras distribuciones fuertemente sesgadas dan la mediana como valor típico en lugar de la media
> (Moore, 1995, pg. 40)

PME2. Encontrar un resumen estadístico de posición central para variables ordinales. Cuando se estudian variables cualitativas ordinales, las diferencias del valor numérico de la variable no corresponden a diferencias de la magnitud medida y la mediana puede representar los datos más coherentemente que la media. Por ejemplo, al considerar el orden de llegada a la meta en una competición.

Este es un caso particular de un tipo de situaciones más general y abstracto -el campo de problemas de reducción de datos ordinales-, común en muchas aplicaciones de la estadística, y, en particular, cuando queremos realizar comparaciones entre dos conjuntos de datos ordinales. Cuando la variable que queremos resumir viene medida en una escala ordinal, incluso aunque codificásemos los datos como valores numéricos, los cálculos con los mismos, por ejemplo, para representar los datos por la media aritmética, serían inapropiados.

La solución pasa por ordenar los datos y tomar como representante del conjunto de datos el valor de la variable que ocupa la posición central, porque hay tantos valores inferiores como superiores a éste. Aunque podría haberse utilizado también la moda como representante de este conjunto de datos, la moda sólo tiene en cuenta la frecuencia de aparición de un valor de la variable, pero no su ordenación. La mediana proporciona, por tanto una información más completa que la moda cuando es posible calcularla.

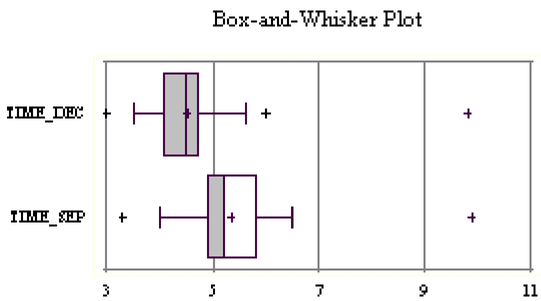
Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1	**I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S**
Grupo 2	S S I I A N A N I I S N A S I N N

¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

(Godino, 1999)

PME3. Efectuar comparaciones de dos o más colecciones de datos usando gráficos de caja. En este tipo de gráfico se representan cinco puntos de las distribuciones: mínimo, máximo, mediana y cuartiles, así como las medias y valores atípicos. La determinación de estos estadísticos es, entonces, necesaria para la construcción del gráfico.



Supongamos que queremos estudiar si existe o no diferencia en el tiempo que tardan unos alumnos en correr 30 metros en Septiembre y en Diciembre (después de 3 meses de entrenamiento). Analiza los dos gráficos que reproducimos a continuación. ¿Qué conocimientos estadísticos y sobre el gráfico necesitan los alumnos en cada caso para resolver el problema? (Batanero y Godino, 2001)

Campos de problemas asociados a la moda

PMO1. Obtener como valor representativo de una colección de datos, el más frecuente de ellos, en situaciones en las que lo que interesa fundamentalmente es el valor dominante del conjunto. Como indica Calot (1988), la moda es una característica de tendencia central que es fácil de calcular, puesto que sólo necesita la clasificación de las observaciones y posee un significado concreto como valor dominante. La moda depende de todas las observaciones sólo por su frecuencia relativa y no por su valor. Su mayor inconveniente es que si la variable es continua no está bien definida, ya que la clase modal dependerá de la amplitud de los intervalos de clase. Además, algunas distribuciones pueden presentar varias modas. Pero, en algunos casos, se utiliza por su fácil cálculo, si no se requiere una gran precisión.

PMO2. Encontrar el valor representativo en datos cualitativos. En los datos cualitativos esta es la única medida de posición central que es posible calcular. Este es el caso del siguiente ejemplo:

Barrera	Número	Porcentaje
Falta de apoyo administrativo	10	43.5
tiempo	5	21.7
dinero	4	17.4
apatía	3	13.1
Falta de compensación	1	4.3
Total	23	100

Los siguientes datos muestran las dificultades encontradas para llevar a cabo un cierto tipo de programas de salud en Florida. ¿Cuál considerarías la "barrera típica" ¿Por qué?
(Johnson, 1992, pg. 45)

2.3.3. LENGUAJE Y REPRESENTACIONES

Son las palabras, notaciones y todas las representaciones del objeto abstracto y sirven para representar a los conceptos y propiedades, así como para describir los problemas y sus datos. Su importancia se debe a que en el trabajo matemático los usamos normalmente en función o representación de los objetos abstractos o de las situaciones en las que intervienen, existiendo una correspondencia semiótica entre el objeto representante y el objeto representado. Podemos diferenciar tres tipos, siguiendo a Ortiz (1999).

Términos y expresiones verbales

Un primer tipo son las palabras y frases que usamos para describir los conceptos, sus operaciones y transformaciones. Según Orton (1990) hay muchos aspectos del lenguaje que pueden afectar al aprendizaje de las matemáticas, ya que muchos alumnos no entienden los términos que empleamos en clase como parte del vocabulario matemático o le atribuyen un significado no acorde con el que pretendemos darle en la clase de matemáticas.

Rotherry (1980) diferencia tres categorías de palabras usadas en la enseñanza de las matemáticas:

1. Palabras específicas de las matemáticas que, normalmente, no forman parte del lenguaje cotidiano. Una de las características distintivas del discurso sobre las matemáticas es el uso generalizado del vocabulario técnico. Los matemáticos han desarrollado una serie de términos específicos para comunicarse entre sí, que pueden causar problemas en las clases de matemáticas en caso de que los alumnos no lleguen a dominarlo (Pimm, 1987). En esta categoría podríamos incluir la expresión *medidas de posición central, variable estadística, efectivo, distribución de frecuencias, frecuencia absoluta y relativa, acumulada, escala (de ordenadas, de abscisas), histograma, diagrama de barras, gráfico de sectores, polígono acumulativo, gráficos de caja, gráficos de tallo y hojas, curva de distribución, gráfico de puntos, variables discretas, continuas, ordinales, cualitativas, par, impar, lineal, diagrama diferencial, intervalos de clase, extremos, marca de clase, clase modal, clase mediana, suma ponderada.*

2. Palabras que aparecen en las matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos. Pimm (1987) indica que la mayor parte de las clases de matemáticas se desarrollan en una mezcla de lenguaje corriente y lenguaje matemático (es decir usando términos ordinarios del lenguaje con un sentido matemático). A causa de interpretaciones lingüísticas diferentes se producen innumerables confusiones cuando el profesor emplea términos "del dialecto matemático" y los alumnos lo interpretan de acuerdo al lenguaje ordinario. Algunos de estos términos serían: *media, mediana, moda, dispersión, datos, tendencia, población, máximo, carácter, ordenados, solución, valor, superior, inferior, pendiente, correspondencia, simétrica, desviación (a la media), media aritmética, valor medio, valor esperado, promedio.*

3. Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos. Hemos encontrado los siguientes: *central, variación, individuo, creciente, decreciente, observaciones, clasificación, definido (bien, mal), amplitud, valor dominante, frecuente, fórmula.*

Observamos el gran número de términos, casi todos con sentido específico o con sentido que no coincide con el coloquial que aparecen asociados al tema, incluso sin sobrepasar el análisis exploratorio de datos. El profesor debe tener en cuenta este vocabulario y asegurar su comprensión por parte de los alumnos.

Notaciones y símbolos

Hemos analizado también las notaciones simbólicas empleadas, que son un elemento característico del lenguaje matemático (Socas y cols., 1984). Las notaciones no sólo se emplean para representar los conceptos sino para realizar operaciones con los mismos y constituyen una forma abreviada y precisa para denotar conceptos o proposiciones.

Cockroft (1985) considera que las matemáticas constituyen un poderoso medio de comunicación, para lo cual se necesita hacer uso de la notación simbólica, pero *esto "puede también hacer las matemáticas difíciles de entender y usar"* (p. 4). En los estándares del N.C.T.M. (1991a) se indica que la comunicación juega un papel fundamental al permitir a los alumnos construir vínculos entre sus nociones intuitivas y el lenguaje de las matemáticas.

Otro fin muy importante de los símbolos es automatizar las manipulaciones rutinarias. Esto se hace separando los símbolos de sus conceptos asociados y manipulándolos de acuerdo con hábitos adquiridos, sin atender a sus significados. Aunque, en cualquier momento, podemos volver a reasignar significados a los símbolos.

El simbolismo juega un papel potente, porque permite trabajar a un alto nivel de complejidad mediante una compresión del conocimiento en la que el simbolismo juega un papel central (Tall, 1993). La habilidad de algunos símbolos para trabajar dualmente, evocando bien un proceso de cálculo de un resultado, o un objeto que puede manejarse en un ámbito superior es particularmente adecuado para reducir el esfuerzo cognitivo. Este uso ambiguo del símbolo como proceso y objeto puede causar una gran dificultad al estudiante de secundaria.

Skemp (1980) diferencia las siguientes funciones de los símbolos matemáticos: Comunicación, registro del conocimiento, formación de nuevos conceptos, confección de clasificaciones múltiples correctas, explicación, facilitar la actividad reflexiva, mostrar estructuras matemáticas, automatizar las manipulaciones rutinarias, recuperar información de la memoria y actividad creativa.

En consecuencia se deduce la importancia de los símbolos en el aprendizaje. Sin embargo, el uso apropiado de la notación matemática reviste especial dificultad. Si el lenguaje matemático es un instrumento indispensable y precioso para el adulto, constituye uno de los obstáculos importantes para el razonamiento del niño y estas dificultades tienen repercusiones tanto en el plano del aprendizaje como en el afectivo, según Mialaret (1977). Los significados de estos símbolos suelen variar según su disposición espacial, lo que suele representar un problema para los niños porque no son siempre usados consistentemente. Otro problema es que la lectura del simbolismo matemático no siempre procede de izquierda a derecha (Dickson y cols., 1991). Las investigaciones didácticas señalan claramente la disociación que existe entre el reconocimiento de la palabra y su utilización correcta. Esta distinción corresponde a lo que Mialaret denomina comprensión pasiva (reconocimiento) y comprensión activa (evocación y utilización) del lenguaje matemático.

Sin querer ser exhaustivos, reproducimos, a continuación, algunos de los ejemplos encontrados:

Con relación a la media: $\bar{x}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$, μ, $E(X)$, $\int x f(x)dx$

En relación a la mediana; M, Me, P50, Q_2, F^{-1} (1/2), D_5

En relación a la moda: Mo
En relación a la función de distribución $F(x_i)=1/2$; $F(x_i - 0)<1/2<F(x_i + 0)$,

Auxiliares en los cálculos; $c_i = \frac{e_i + e_{i-1}}{2}$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1} < n/2 < n_1 + \ldots + n_i$

$\sum_{i=1}^{n} | x_i - a | \cdot f_i$, $\quad \mathrm{Me} = \mathrm{L_i} + \frac{\mathrm{N}/2 - \mathrm{F_{Me-1}}}{\mathrm{f_{Me}}} \cdot \mathrm{C}$

Tablas estadísticas y gráficos

Además del lenguaje y los símbolos, encontramos con frecuencia representaciones de tipo diverso, que analizamos en este apartado. Sanz (1990) denomina con el término "expresiones gráficas" los pictogramas, fotografías, esquemas o diagramas usados en los libros de texto, es decir todo lo que no sea expresión verbal o expresión simbólica específica del lenguaje matemático.

Otte (1983) enfatiza el equilibrio entre texto e imágenes en el texto matemático y el contraste entre la proporción de texto y material visual en los libros de texto escolares y los escritos para el nivel universitario. La diversidad de imágenes en estos últimos es muy grande: tablas y gráficos, diagramas y fotografías. En esta diversidad de imágenes hay latente una variedad de intenciones y formas de trabajo implícitas y explícitas, convenciones y claves. Por ejemplo se pueden codificar secuencias temporales y causales.

En el caso de la estadística, son elementos característicos las tablas y gráficos. En la Tabla 2.3.1 listamos los tipos de tablas y gráficos que hemos encontrado en relación a las medidas de posición central, bien como parte del tema en cuestión o en otros temas, dentro de enunciados de problemas o propiedades que se refieren a las medidas de posición central. Sólo hacemos referencia a las distribuciones univariantes, aunque también en el tema de distribuciones bivariantes aparecen frecuentemente referencias a estas medidas, particularmente a las medias de las distribuciones marginales y condicionadas.

Tabla 2.3.1. Tablas y gráficos estadísticos en el tema de medidas de posición central

Una sola variable		Comparación de variables	
Tablas	Gráficos	Tablas	Gráficos
• Listados de datos: ▪ Ordenados/ no • Tablas de frecuencia: ▪ Datos agrupados/no ▪ Intervalos iguales/ distintos ▪ Extremos coincidentes /no ▪ Un intervalo abierto /no ▪ Recuentos en la tabla /no	• Diagrama de barras • Diagrama de frecuencias acumuladas • Gráficos de caja • Gráficos de puntos • Gráfico de sectores • Histogramas • Pictogramas • Polígono de frecuencias • Polígono acumulativo • Tallo y hojas	• Listado de datos	• Diagrama de barras: ▪ Adosados ▪ Apilados • Gráficos de caja • Gráficos de puntos • Histogramas • Tallo y hojas • Pirámides población • Polígono acumulativo

Gráficas de modelos materiales

Finalmente, en Johnson (1992) hemos encontrado representaciones gráficas de modelos materiales de la media, en particular los que usan la metáfora del punto de equilibrio de una balanza, para indicar la caracterización de la media como centro de gravedad de la distribución. Reproducimos estas representaciones en la Figuras 2.3.1 y 2.3.2

Figura 2.3.1. Representación de la media como punto de equilibrio en una balanza

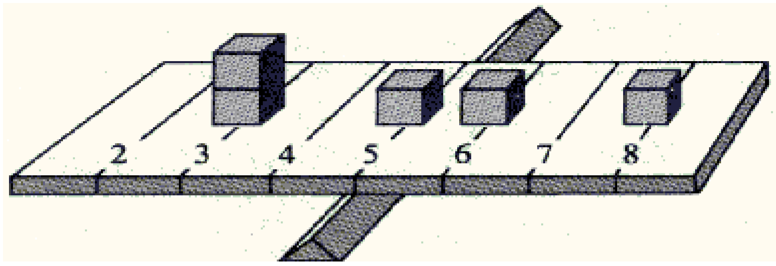
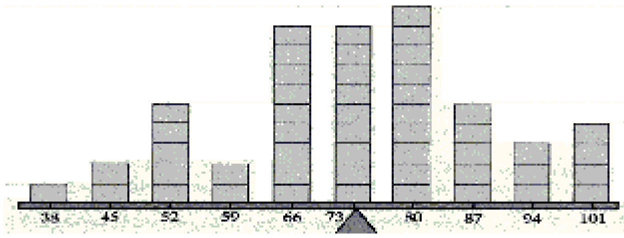


Figura 2.3.2. Representación de la media como punto de equilibrio en una balanza



2.3.4. ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS

Las situaciones-problemas relacionadas con los promedios se puede resolver utilizando técnicas generales de cálculo, como, por ejemplo, sumar los datos y dividir por el número total de ellos.

Estas técnicas se adaptan al tipo de medida de tendencia central, la forma de presentación de los datos y a los distintos tipos de variable que se maneje, discreta o continua y son objeto explícito de enseñanza. A continuación las detallamos para cada uno de los promedios.

Media

AM1. Variable discreta con datos aislados. La media se calcula sumando todos los datos y dividiendo por el número total de ellos. Es la técnica más sencilla, pues se deduce directamente de la definición, como se ve en el siguiente ejemplo:

$$\overline{x} = \frac{6+3+8+6+2}{5} = \frac{25}{5}$$ (Johnson, 1992, pg. 69)

AM2. Variable discreta con los datos presentados en una tabla de frecuencias. En este caso para calcular la media se multiplica cada valor de la variable por su frecuencia relativa y se suman todos los productos obtenidos: $\overline{x} = \sum_{n}^{i=1} x_i \cdot f_i$. Es más compleja, puesto que requiere que el alumno sepa interpretar directamente la tabla de frecuencias y comprender la idea de ponderación.

x	f	xf
1	5	5
2	9	18
3	8	24
4	6	24
Total	28	71

La media en este ejemplo se halla aplicando la fórmula

$$\overline{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{71}{28} = 2.536$$

(Johnson, 1992, pg. 70)

AM3. Variable continua o discreta con datos agrupados en clases.

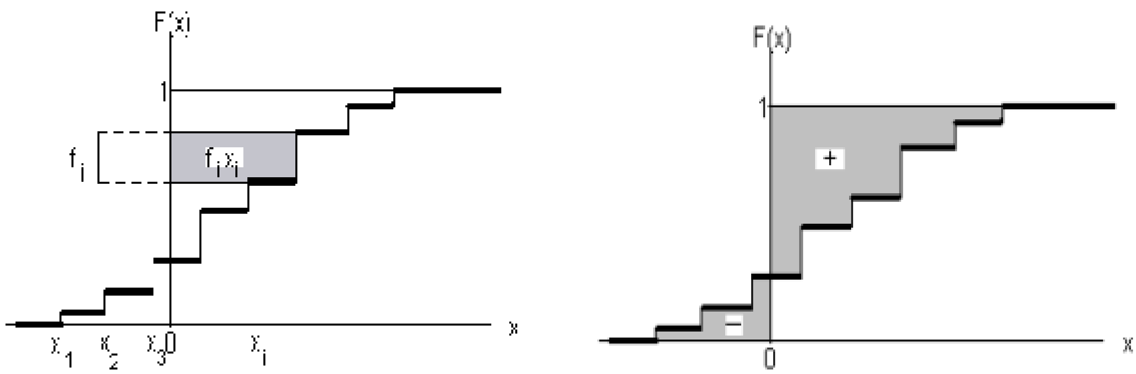
En este tipo de variables, no se conocen los valores concretos de los datos, sino sólo la clase a la que pertenecen (e_{i-1} , e_i) y su número en cada una de ellas.

Para el cálculo de la media se utiliza una variable auxiliar, discreta, cuyos valores son las marcas de clase $c_i = \frac{e_i + e_{i-1}}{2}$ y sus frecuencias las de la clase correspondiente. La media entonces se calcula mediante el algoritmo anterior AM2. A las dificultades descritas del mismo, hay que añadir que el valor que ahora se obtiene es sólo aproximado y que la aproximación depende de los intervalos de clase obtenidos.

AM4. Cálculo gráfico.

Para una variable discreta que toma los valores x_i con las frecuencias relativas f_i, en su diagrama acumulativo, el producto $f_i x_i$ es igual al área marcada cuando x_i es positivo y al opuesto de esta área si x_i es negativo, como vemos en la Figura 2.3.3.

Figura 2.3.3. Cálculo gráfico de la media



Por tanto, la media, que es la suma de todos los productos $f_i x_i$, es igual a la diferencia de las áreas marcadas. El gráfico reproducido, así como el método de cálculo ha sido tomado de Calot, 1988, pg. 72 y 73.

AM5. Cálculo mediante calculadora u ordenador. Siguiendo las indicaciones del modelo de calculadora o programa de ordenador de que se trate. No obstante, como forma general, se introducen todos los valores de los datos, junto con su frecuencia correspondiente, en la memoria de la calculadora. A partir de ahí, se puede calcular, entre otros parámetros, la media de este conjunto de datos. El alumno ahora no necesita conocer el algoritmo, ni entenderlo, sino sólo introducir los datos correctamente en la calculadora. Un ejemplo de problema relacionado con este elemento es el siguiente:

> Usa un ordenador para calcular los salarios medios del ejercicio 2.23. Si usas MINITAB en el problema 2.53 puedes encontrar un programa que te ayude
> (Johnson, 1992, pg. 80).

AM6. Inversión del algoritmo de cálculo de la media. En determinadas ocasiones, disponemos de un conjunto de valores del que falta conocer un dato y, en cambio, conocemos su media. Para averiguar el dato que falta es necesario invertir el algoritmo usado para calcular la media, conocida, mediante la siguiente fórmula.

$$x_i = n \cdot \overline{x} - \left(x_1 \cdot f_1 + \ldots + x_{i-1} \cdot f_{i-1} + x_{i+1} \cdot f_{i+1} + \ldots + x_n \cdot f_n\right)$$

Un problema relacionado se presenta a continuación.

> El Ayuntamiento de un pueblo quiere estimar el número promedio de niños por familia. Dividen el número total de niños de la ciudad por 50 (que es el número total de familias) y obtienen 2.2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
> a) La mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 niños
> b) En la ciudad hay más familias con 3 niños que familias con 2 niños
> c) Hay un total de 110 niños en la ciudad
> d) Hay 2,2 niños por adulto en la ciudad
> e) El número más común de niños por familia es 2
> Batanero y Godino (2001)

AM7. Construir una distribución para una media dada. Al contrario de la mayoría de las técnicas anteriores, en las que se calcula la media de una distribución conocida, en este caso, lo que se conoce es el valor de la media y se debe buscar una distribución cuya media sea ese valor. Para ello se debe conocer y saber utilizar el algoritmo de cálculo directo, puesto que esto requiere deshacerlo y, además, tener en cuenta que la media es el valor más probable al elegir uno al azar de una población, de modo que la distribución más sencilla que se puede construir es la formada por tantos valores iguales a la media como elementos tenga que tener la distribución. Un ejemplo se presenta en Batanero y Godino (2001):

> Actividad 3.5. Un anuncio de cajas de cerillas indica que el número medio de cerillas por caja es 35. Representa una gráfica de una posible distribución del número de cerillas en 100 cajas de modo que la media sea igual a 35. (pg. 3-2).

Mediana

Para la mediana el algoritmo de cálculo no es único, sino que también depende del tipo de datos, de la forma de presentación de los mismos, e incluso del número de ellos. El valor obtenido no siempre es único, lo que puede causar dificultades a los alumnos. Para el cálculo, distinguiremos entre datos no agrupados y agrupados en clases.

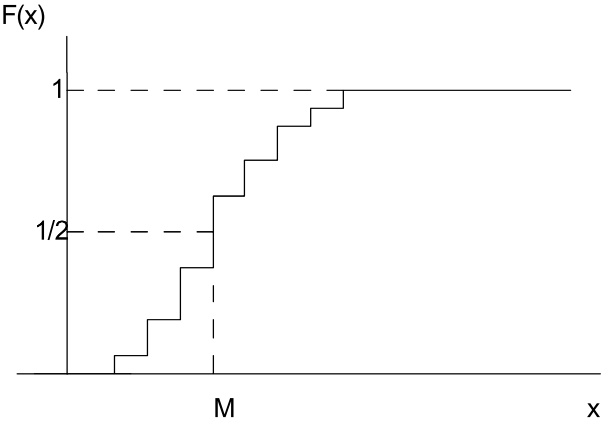
AME1. Datos no agrupados en clases, *número de datos impar*. La mediana es el valor de la variable, individuo u observación que ocupa el centro de la lista de valores, supuestos estos éstos ordenados por valores crecientes o decrecientes de la variable.

AME2. Datos no agrupados en clases, número de valores par, la mediana es la media aritmética de los dos valores que se encuentren en el centro de la tabla. Estos dos casos se presentan en todos los libros y creemos no precisa un ejemplo explicativo.

Si *los valores se presentan en una tabla de frecuencias*, es útil calcular las frecuencias acumuladas para hallar la mediana. El cálculo de la mediana se puede hacer en este caso gráficamente a partir del diagrama acumulativo de frecuencias. Una vez realizada la gráfica, procedemos al cálculo de la mediana. Para ello basta tener en cuenta que la frecuencia acumulada que corresponde a la mediana ha de ser igual a $n/2$, o bien, que la frecuencia relativa acumulada es igual a 1/2. En general, la ecuación F(M) = 1/2 no tiene solución, puesto que la función F(x) varía por saltos y es posible que nos encontremos en uno de los dos casos siguientes:

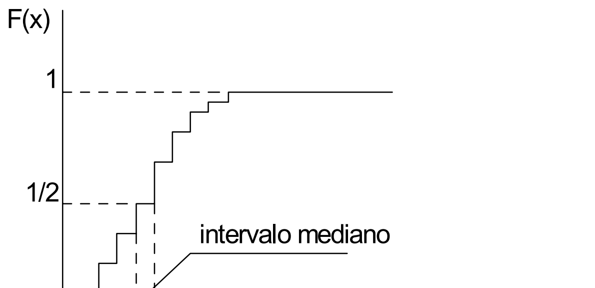
*AME3***.** Si ningún valor posible x_i corresponde en la gráfica a una frecuencia relativa acumulada $F(x_i)=1/2$ se considera como valor de la mediana el valor x_i tal que:
$F(x_i - 0)<1/2<F(x_i + 0)$, es decir tal que $n_1 + n_2 + ... + n_{i-1} < n/2 < n_1 + ... + n_i$

El valor 1/2 corta a la gráfica precisamente en el salto que tiene la curva de distribución para uno de los valores de la variable.
Ello es debido a que, en este caso todos los valores de la variable comprendidos entre el lugar n_{i-1} y n_i son iguales a x_i y uno de ellos ocupa exactamente el lugar $n/2$.
Por tanto este valor x_i cumple la definición de mediana y es el único valor que la cumple (Calot, 1988, pg. 57).



Determinación de la mediana

AME4. Si uno de los valores x_i corresponde a $F(x_i) = 1/2$ (lo que ocurre solamente si el total n de la población es par), la mediana está indeterminada entre los valores x_i y x_{i+1}, ya que cualquiera de los valores de x incluidos en el intervalo (x_i,x_{i+1}) cumple la definición de mediana. El intervalo (x_i,x_{i+1}) se denomina mediano y suele tomarse como mediana la media aritmética de estos dos valores, lo que tampoco queda justificado en ninguna de las definiciones. (Calot, 1988, pg. 57)



Determinación del intervalo mediano

En la tabla estadística, la mediana se determina a partir de la columna que da las frecuencias (o las frecuencias absolutas) acumuladas, repitiendo el proceso que hemos descrito y finalizando, por tanto, en uno de los casos anteriores.

*AME5***.** *Datos agrupados en clases.* La agrupación de los datos implica el trabajo con valores aproximados, en lugar de con los datos originales. Por ello, los valores obtenidos para los diferentes estadísticos, como la mediana, son sólo valores aproximados.

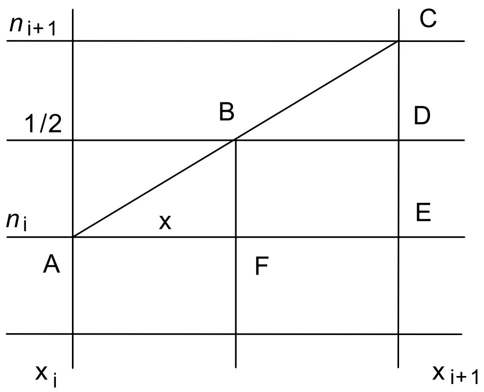
Si los datos están agrupados en clases, se calculan las frecuencias acumuladas de las clases, comenzando el proceso obteniendo la clase mediana. Una vez calculadas estas frecuencias, se representa el polígono acumulativo de frecuencias y, mediante éste, se determina, gráfica o analíticamente, el valor de la variable cuya frecuencia acumulada es *n/2.* Dicho valor es la mediana.

La ecuación F(M)=1/2 tiene siempre en este caso una raíz única que, en general, se sitúa entre dos extremos de clase, o bien coincide con uno de ellos. La determinación de su valor no es, sin embargo, sencilla, puesto que se trata de resolver una ecuación que no está dada mediante una expresión algebraica. El alumno debe recurrir a un procedimiento gráfico o numérico. La clase número i es la clase mediana si:

$F(e_{i-1}) < 1/2 < F(e_i)$, es decir si: $n_1 + ... + n_{i-1} < 1/2 < n_1 + ... + n_i$.

En Batanero y Godino (2001) se explica la siguiente forma de determinar la clase mediana a partir de las frecuencias absolutas acumuladas o de las frecuencias acumuladas y por interpolación lineal se obtiene la mediana.

$$Me=x_i+x$$



$$\frac{x}{AE}=\frac{BF}{CE}$$

$$\frac{x}{x_{i+1}-x_i}=\frac{\frac{1}{2}-n_i}{n_{i+1}-n_i}$$

Puesto que $x_{i+1}- x_i$ es la amplitud del intervalo, CE la frecuencia en el intervalo mediano y BF la diferencia entre 1/2 y la frecuencia relativa acumulada en el intervalo mediano, obtenemos la cantidad que hay que sumar al extremo inferior del intervalo mediano para calcular la mediana.

AME6. Datos presentados mediante un gráfico. El cálculo dependerá del tipo de gráfico.

Si los datos se encuentran representados en un diagrama de tronco, se efectúa un recuento desde el tallo menor (arriba), anotando el número de hojas de cada tallo y acumulándolo a los anteriores, hasta que se supere el valor de *n/2,* siendo n el número total de datos; en ese momento se comienza el mismo recuento empezando por el tallo mayor (abajo) hasta llegar al tallo en que nos detuvimos antes.

La mediana se encontrará en el tallo cuyo recuento supera el valor de *n/2*, y sólo habrá que buscar el dato central de los valores de la distribución que se encuentra en este tallo.

Este método tiene la ventaja de que se visualiza con bastante la claridad el significado de mediana como medida de posición de un conjunto de datos. Está basado en la búsqueda, entre todos los datos ordenados, de aquel que ocupa la posición central.

Si los datos se presentan con otro formato gráfico, por ejemplo un diagrama de barras o un histograma, el cálculo de la mediana implica tener en cuenta que ésta es el valor que divide a la población en dos partes de igual tamaño, longitud total de barras o superficie, respectivamente, en los casos anteriores. En el siguiente ejemplo, tomado de

Batanero y Godino (2001), se usa la curva empírica de distribución, obtenida del programa Statgraphics para el cálculo de mediana y otros estadísticos de orden.

En la figura presentamos las frecuencias acumuladas de altura de 1000 chicas.

a) Calcula aproximadamente la mediana máximo y mínimo.

b) ¿Entre qué límites varía el 50 por ciento de los valores centrales?

c) ¿Cuál es el valor de la altura tal que el 70 % de las chicas tiene una altura igual o inferior (percentil del 70%)?

d) Si una chica mide 1.65, ¿En qué percentil está?

e) Compara tu altura con la de estas chicas ¿Qué porcentaje de chicas son más altas/bajas que tú?

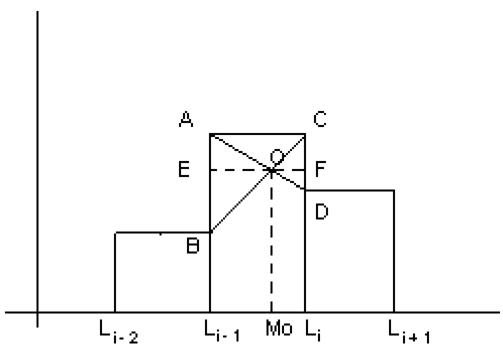
f) ¿Qué valores de la estatura considerarías atípicos en esta distribución?

Moda

En cuanto a la moda, el algoritmo de cálculo depende de los datos, que se trate de una variable discreta con valores aislados, o de una variable continua o discreta con valores agrupados en intervalos. Además, ésta no es única siempre, cada moda corresponde a un máximo local de la distribución de frecuencias.

AMO1. Variable discreta con datos aislados. Se determina qué valor o valores son los que se repiten con mayor frecuencia. Este método no precisa ejemplos explicativos y aparece en todos los libros.

AMO2. Variable discreta con datos aislados, presentados en una tabla de frecuencias. La moda será aquél valor o valores que presenten una frecuencia máxima. Este método no precisa ejemplos explicativos y aparece en todos los libros.



AMO3. Variable discreta con datos agrupados en clases o variable continua. El procedimiento es el mismo que en el caso anterior, salvo que la tabla de frecuencias estará formada por clases. Si todas las clases tienen el mismo tamaño, se buscará cuál o cuáles de ellas presentan una frecuencia mayor para determinar la/s clase/s modal/es. A continuación se determina la moda mediante el método que reproducimos de Calot (1988):

siendo

L_{i-1}= límite inferior de la clase modal

$$Mo = L_{i-1} + c \cdot \frac{f_i - f_{i-1}}{2f_i - f_{i+1} - f_{i-1}}$$

c = amplitud de la clase modal
f_i = frecuencia absoluta de la clase modal
f_{i-1}= frecuencia absoluta de la clase anterior a la clase modal
f_{i+1}= frecuencia abs. de la clase siguiente a la clase modal

$$\frac{EO}{FO} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{EO}{EO+FO} = \frac{AB}{AB+CD}$$

$$EO + FO = c$$
$$AB = f_i - f_{i-1}$$
$$AB + CD = f_i - f_{i-1} + f_i - f_{i+1} = 2f_i - f_{i+1} - f_{i-1}$$
$$\frac{EO}{c} = \frac{f_i - f_{i-1}}{2f_i - f_{i+1} - f_{i-1}}$$

Si las clases tienen distinta amplitud, se deberá buscar el máximo de frecuencia por unidad de amplitud, lo que nos permitirá determinar la clase modal. A continuación se aplica la fórmula:

$$Mo = L_{i-1} + c_i \cdot \frac{k_i - k_{i-1}}{(k_i - k_{i-1}) + (k_i - k_{i+1})}$$

siendo
L_{i-1}= límite inferior de la clase modal
c = amplitud de la clase modal
k_i = altura del rectángulo de la clase modal
k_{i-1}= altura del rectángulo de la clase anterior a la clase modal
k_{i+1}= altura del rectángulo de la clase siguiente a la clase modal

Si se modifican los tamaños de las clases, la moda puede pasar de una a otra, según los extremos de clase que se consideren, lo que puede hacer pensar que se trata de una medida un tanto inestable.

AMO4. Cálculo a partir de un diagrama de barras o histograma. Se determina la barra de mayor altura y ésta será la/s moda/s o intervalo/s modal/es. Estaremos en uno de los casos anteriores, según el tipo de variable.

2.3.5. DEFINICIONES

Hemos encontrado diversos tipos de definiciones para el mismo concepto, algunas de las cuales enfatizan diferentes aspectos del significado de los conceptos o remiten a diferentes formas de cálculo.

Media

DM1. La media es la suma ponderada de cada uno los valores de la variable multiplicado por su frecuencia. Esta definición enfatiza el significado de la media como *reparto equitativo* y como *mejor estimador* de una cantidad desconocida, así como el algoritmo de cálculo, y presenta la media como una operación con los datos. Un ejemplo es el siguiente:

> La media de una variable estadística es la suma ponderada de los valores posibles por las frecuencias $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot f_i$
>
> Calot, 1988, pg. 64

DM2. La media es el promedio aritmético de un conjunto de datos. En esta definición se relaciona la media con otros promedios y se enfatiza su carácter de valor central.

> *Características de posición o tendencia central:* Son los valores alrededor de los cuales se agrupan los datos. Dentro de esta clase se incluye a la media, mediana y la moda.
> Batanero y Godino, 2001

Mediana

Existen diferentes definiciones equivalentes de la mediana, que reproducimos a continuación:

DME1. Si suponemos ordenados de menor a mayor todos los valores de una variable estadística, se llama mediana al valor de la variable tal que existen tantos datos con valores de la variable superiores o iguales como inferiores o iguales a él. Esta definición enfatiza la idea de *centro* de la distribución.

> La mediana o valor mediano o valor central de una serie numérica es el valor que ocupa el punto central cuando la serie está ordenada creciente o decrecientemente.
> Nortes Checa, 1993

DME2. La mediana es el valor de la variable estadística que divide en dos efectivos iguales a los individuos de la población supuestos ordenados por valor creciente del carácter. Esta definición resalta la igualdad de frecuencias arriba y debajo de la mediana.

> También se define la mediana como el valor de la variable, tal que, supuestos ordenados todos los valores numéricos de la variable en orden creciente, la mitad son inferiores a él y la otra mitas iguales o superiores.
> Nortes Checa, 1993

DME3. La mediana es el valor de la variable estadística tal que la ordenada del diagrama acumulativo de frecuencias absolutas es igual a n/2, siendo n el número de datos. Igual que la anterior y además relaciona con la idea de frecuencia acumulada y polígono acumulativo. Esta definición se recoge en Calot (1998).

DME4. La mediana es el valor de la variable estadística tal que la ordenada de la curva de distribución empírica (representación gráfica de las frecuencias relativas acumuladas) es igual a 1/2. Enfatiza la idea de mediana como solución de una ecuación en la que interviene la función de distribución. Esta definición se recoge en Calot (1998).

Todas estas definiciones enfatizan que la mediana es un valor central y, como medida de tendencia central, presenta ciertas ventajas frente a la media en algunas distribuciones ya que no se ve afectada por valores extremos de las observaciones. Por ello es adecuada para distribuciones asimétricas o cuando existen valores atípicos.

Moda

DMO1. La moda es el valor más frecuente de la variable estadística. Esta definición enfatiza que en la moda lo importante son las frecuencias y no el valor de la variable. Aparece en todos los libros consultados. Por ejemplo:

El único estadístico que se puede utilizar en presencia de variables nominales es la moda, que como su nombre indica, es el valor-categoría que más se lleva
(Sánchez Carrión, 1995).

DMO2. La moda es el valor que corresponde al máximo del diagrama diferencial (diagrama de barras o histograma), aparece en Calot (1988). Hace referencia a la representación gráfica de la variable.

De las dos definiciones se deduce que la moda puede no existir, o si existe, puede no ser única, como se observa en los siguientes ejemplos:

- El conjunto de datos: 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18, tiene moda 9.
- El conjunto de datos: 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16, no tiene moda.
- El conjunto de datos: 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9, tiene dos modas, 4 y 7.

Lo que representa una dificultad para los estudiantes que, ante estas definiciones esperan, en primer lugar que exista y además que sea única.

2.3.6. PROPIEDADES

Las medidas de posición central pueden ser contempladas desde diversos puntos de vista: Como el resultado de un cálculo (el valor obtenido en el cálculo de la mediana), como operador que a una distribución asigna un número (el algoritmo u operación con los datos) y como un resumen estadístico o parámetro que caracteriza una distribución. Para cada uno de estos puntos de vista podemos analizar sus propiedades. Alguna de ellas coinciden para media, mediana y moda y otras no, lo cual puede causar problemas de comprensión o confusiones en los alumnos. Haremos el análisis conjuntamente para las tres medidas, indicando si la propiedad se cumple o no. En estas propiedades a veces se presentan explícitamente en los libros y otras se proponen ejercicios o problemas de los que el alumno debe deducirlas.

Propiedades Numéricas

N1. La media, mediana y moda de un conjunto de datos son siempre valores pertenecientes al rango de la variable. Nunca se puede obtener un valor mayor que el máximo de los datos ni menor que el más pequeño. No hemos encontrado esta propiedad explícitamente, pero sí implícitamente en los diversos ejemplos y ejercicios presentados.

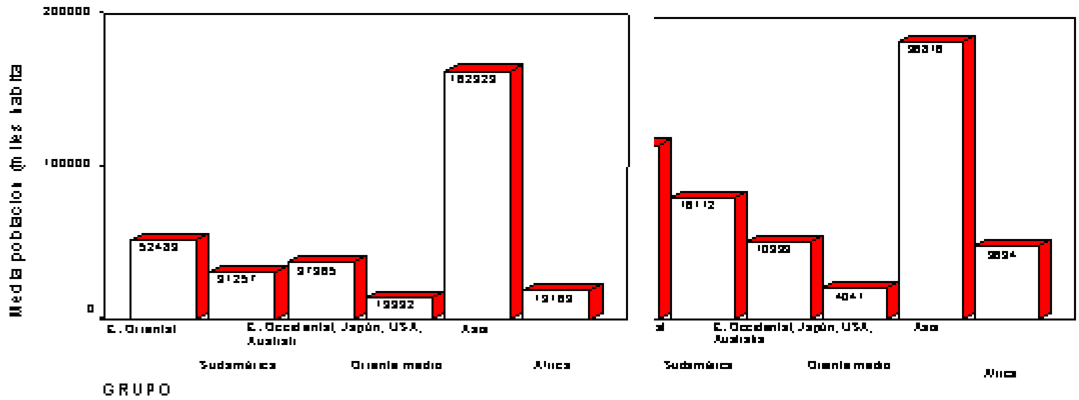
N2. Mientras la moda siempre coincide con uno de los valores dados, la media y mediana no tienen por qué coincidir con los valores de los datos, e incluso podría ser un número perteneciente a un conjunto numérico más amplio que el dado. Esta propiedad aparece implícita o explícitamente en todos los libros consultados.

N3. En el cálculo de la media se tienen en cuenta todos valores de los datos, pero no en la mediana y la moda. La hemos encontrado explícitamente en Peña (2001).

Aunque desde un punto de vista puramente descriptivo, las tres medidas de centralización proporcionan información complementaria, sus propiedades son muy distintas: La media utiliza todos los datos y es, por tanto, preferible, si los datos son homogéneos.... Por el contrario la mediana utiliza menos información que la media, ya que sólo tiene en cuenta el orden de los datos y no su magnitud (pg. 61).

N4: El valor numérico de la media cambia cuando se cambia cualquier dato. Algunos cambios en los datos no cambian siempre el valor de la moda o mediana. El siguiente ejercicio implica el reconocimiento de esta propiedad.

En las siguientes gráficas hemos representado el número promedio de habitantes en cada país, clasificados por zonas, usando dos promedios diferentes: media y mediana.
a) Explicar lo que representa cada uno de estos promedios
b) Elige el gráfico que mejor representa los datos argumentando la elección.
c) ¿Por qué los gráficos son tan diferentes? ¿Cuál de los dos promedios acentúa más las diferencias entre grupos de países?



(Batanero y Godino, 2001)

Propiedades algebraicas

Son aquellas que se deducen al considerar la media, mediana o moda como una operación sobre el conjunto de datos.

A1. Operación interna. Mientras que la moda puede considerarse una operación interna, ya que conserva el conjunto numérico del cual se han tomado los datos, el cálculo de la media y la mediana no es una operación interna en el conjunto numérico utilizado, puesto que ésta puede tomar un valor distinto a todos sus elementos. Es una formalización algebraica de la propiedad N1.

A2. La media, mediana y moda, consideradas como operaciones algebraicas, no tienen elemento neutro ni simétrico. Cualquier dato que se añada al conjunto hace variar el valor de la media, incluso se trata del cero. Esta propiedad no la hemos encontrado expresamente en los libros, pero la hemos considerado al haber sido señalada en las investigaciones sobre comprensión de los promedios.

A3. No tienen la propiedad asociativa para el caso general. Si una población está formada por dos subpoblaciones de medias $\bar{x}_1$ y, la mediana $\bar{x}$ no se deduce únicamente de $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ y de las proporciones de la composición. Se puede sólo afirmar que $\bar{x}$ está comprendida entre $\bar{x}_1$ y. No la hemos encontrado explícitamente, pero está implícito, por ejemplo, en el cálculo de la media ponderada.

A4. Son operaciones conmutativas. El orden de aparición de los datos no afecta al valor de la media, mediana o moda. Sólo aparece implícitamente.

A5. Conservan los cambios de origen y escala. Si se suma, resta, multiplica o divide cada elemento del conjunto de datos por un mismo número, esta operación se traslada a la media, mediana y moda. Por tanto, éstas se expresan en las mismas unidades que los datos. Un ejemplo es el siguiente.

> La edad media de un grupo de niños es 5,6 años. ¿Cuál será el tiempo medio si expresamos los datos en meses? ¿Cuál será la edad media de los niños dentro de 3 años?
> Batanero y Godino (2001)

A6. La media de la suma de dos o más variables, es igual a la suma de las medias de dichas variables. Esta propiedad no se cumple en la mediana o moda.

> La media aritmética de la suma de dos variables, X e Y, es igual a la suma de las medias aritméticas de cada una de las variables, y también, en general se cumple para cualquier número de variables
> Batanero y Godino, 2001

A7. La moda puede no existir o, si existe, no ser única. La media y mediana siempre existen en datos numéricos. Se recoge explícitamente en Calot (1988).

Propiedades estadísticas

Son aquellas que se deducen cuando consideramos el promedio como un resumen de los datos, es decir, respecto a la información que nos proporciona del conjunto de datos. Son las siguientes:

E1. La media, mediana y moda son representantes de un colectivo, por lo que proporcionan información de todo el conjunto y no de elementos concretos. Esta propiedad aparece en todos los libros, bien en forma explícita o implícita:

> *Características de posición o tendencia central:* Son los valores alrededor de los cuales se agrupan los datos. Dentro de esta clase se incluye a la media, mediana y la moda.
> Batanero y Godino, 2001, p.3-1.

E2. La media coincide con el centro del conjunto de datos, semejante al centro de gravedad. Si los datos representasen unidades de peso, colocadas sobre la recta numérica, la media sería el punto de equilibrio de la misma. Esto no se cumple en mediana y moda. Hemos encontrado esta propiedad explícitamente recogida en Johnson (1993), cuando se presentan las gráficas 2.3.1 y 2.3.2. También se especifica en Peña (2001):

> La media es el centro de los datos, en el sentido de equilibrar los valores por exceso y por defecto. En este sentido es el centro geométrico o "centro de gravedad" del conjunto de datos de la variable (pg. 60).

E3. En distribuciones simétricas, la media coincide con la mediana y la moda (en distribuciones unimodales). En estas distribuciones, los datos se distribuyen uniformemente a lo largo del recorrido de forma que las medidas de centralización quedan situadas en el centro del mismo. Si la distribución es asimétrica a la derecha el orden en que aparecen es moda-mediana-media, y si es asimétrica a la izquierda el orden es media-mediana-moda (para distribuciones unimodales). Si la distribución es asimétrica es preferible la mediana a la media como medida de tendencia central. En la mayor parte de los libros consultados se plantean ejercicios a propósito de esta propiedad.

E4. La media es un estadístico poco resistente, muy sensible a la variación en los datos, especialmente a los valores atípicos. Esto la hace menos recomendable, en distribuciones en las que éstos aparecen, que otras medidas como la mediana. La mediana y la moda son estadísticos más resistentes.

> Como medida de tendencia central, la mediana presenta ciertas ventajas frente a la media en algunas distribuciones ya que no se ve afectada por valores extremos de las observaciones. *La mediana es invariante si se disminuye una observación inferior a ella o si se aumenta una superio*r, puesto que sólo se tienen en cuenta los valores centrales de la variable. Por ello es adecuada para distribuciones asimétricas o cuando existen valores atípicos.
>
> Batanero y Godino, 2001

E5. La suma de las desviaciones de un conjunto de datos de su media es cero. La suma de los valores absolutos de las desviaciones es mínima respecto a la mediana.

> La media aritmética es el centro de gravedad de la distribución de la variable, es decir, la suma de las desviaciones de los valores con respecto a ella es igual a cero.
>
> Nortes Checa, 1993. pg. 63

E6. Es respecto a la media, cuando la suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima.

Esta propiedad indica que el error que cometemos para cada uno de los valores de los datos, al substituirlo por su media queda anulado, en el sentido que los errores positivos se compensan con los negativos. La hemos encontrado, por ejemplo, en Johnson (1992):

> La media es representante en el sentido de que suma de las cantidades en que los valores altos exceden a la media es igual a la suma de las cantidades en que los valores bajos se alejan de ella. (pg. 74)

E7. Para datos agrupados en intervalos con alguno de ellos abierto también es preferible la mediana a la media. Existe la moda, pero no la media. Esta propiedad se recoge en Calot (1988).

E8. Existe moda/s tanto para variables cuantitativas como cualitativas. Aparece en todos los libros consultados.

E9. En distribuciones no unimodales, la mediana es mejor representante del conjunto de datos que la media. Esta propiedad no la hemos encontrado en los libros analizados, sin embargo, apareció al analizar los ítems para la construcción del instrumento de evaluación, lo que nos llevó a incluirla en nuestro significado institucional, pues la consideramos una propiedad digna de tener en cuenta.

Como resumen mostramos en la tabla 2.3.6.1 las propiedades de media, mediana y moda, que muestra la complejidad de estos conceptos, a pesar de su aparente sencillez.

Tabla 2.3.6.1. Propiedades de Media, Mediana y Moda

	Media	Mediana	Moda
Propiedades numéricas			
Pertenece al rango de la variable	Sí	Sí	Sí
Coincide con un valor de los datos y pertenece al mismo conjunto numérico	No	No	Sí
Se tienen en cuenta en los cálculos todos los valores de los datos	Si	No	Sí
Cualquier cambio en los datos cambia su valor	Sí	No	No
Propiedades algebraicas			
Es una operación interna	No	No	Sí
Tienen elemento neutro y simétrico	No	No	No
Asociativa	No	No	No
Conmutativa	Sí	Sí	Sí
Conserva las transformaciones lineales	Sí	Sí	Sí
Es isomorfismo respecto a la suma	Sí	No	No
Siempre existe y toma un único valor en datos numéricos	Sí	No	No
Propiedades estadísticas			
Representan a un colectivo	Sí	Sí	Sí
Coincide con el centro de gravedad	Sí	No	No
En distribuciones simétricas coinciden	Sí	Sí	Sí
Resistente	No	Sí	Sí
Iguala la suma de desviaciones	Sí	No	No
Suma de cuadrados de desviaciones mínima	Sí	No	No
Definida si un intervalo es abierto	No	Sí	Sí
Definida para variables cualitativas	No	No	Sí
Definida para datos ordinales	No	Sí	Sí
Mejor representante en distribuciones no unimodales	No	Sí	No

2.3.7. ARGUMENTOS

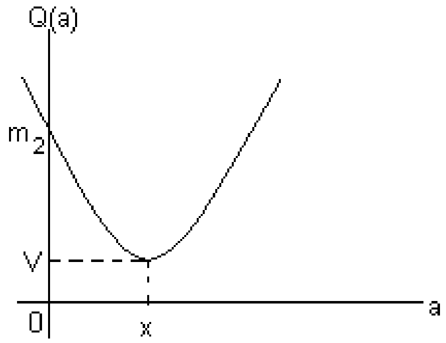
Todas las definiciones, propiedades, problemas y algoritmos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o demostrar las propiedades y relaciones. Hemos encontrado los siguientes tipos de argumentos:

Argumento 1: Comprobación de casos particulares y contraejemplos: Por ejemplo, para mostrar que la media no tiene la propiedad asociativa, se hace una razonamiento similar al siguiente:

> La media de dos o más conjuntos de datos no coincide, en general, con el resultado de hacer la media de las medias de los conjuntos iniciales. Esto ocurrirá únicamente si los tamaños de los conjuntos de datos son iguales.
>
> Por ejemplo, dados los conjuntos de datos:
>
> X={1,1,3,4,4,4,5,6,8,9} con media $\overline{x} = 4.5$
>
> Y={1,1,2,2} con media $\overline{y} = 1.5$
>
> *La media de 4.5 y 1.5 es 3, mientras que la media del conjunto formado por todos los datos anteriores es 4.2, evidentemente mayor que la anterior, puesto que el conjunto X tiene más peso que él Y debido a su mayor tamaño.*

Argumento 2: Uso de gráficos*, cuando la argumentación verbal o simbólica se apoya en las propiedades visuales de un gráfico auxiliar, como en el siguiente ejemplo tomado de Calot (1988), donde en realidad la propiedad no se demuestra formalmente.*

Es respecto a la media, cuando la suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima. siendo a un valor cualquiera



$$Q(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a)^2$$

$$Q'(a) = -2\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - a) = 0 \Rightarrow a = \overline{x}$$

Este mínimo alcanzado es la varianza, V

Argumento 3: Razonamientos algebraicos deductivos, La forma más característica de validación en matemáticas es de tipo deductivo y esta es la más extendida en los libros de nivel universitario. Por ejemplo en el libro de Calot (1988, pg. 61) podemos encontrar una demostración deductiva de que es respecto a la mediana que la suma de desviaciones absolutas de los datos tiene su mínimo. Este tipo de demostraciones es altamente especializado, hace uso abundante de los símbolos y convenios, así como de las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos, como el siguiente ejemplo, tomado del citado texto:

La media de la suma de dos o más variables, es igual a la suma de las medias de dichas variables:
Sean las variables: x_i, y_i, z_i, con medias $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, respectivamente. Consideremos una nueva variable $t_i = x_i + y_i + z_i$, su media será:

$$\overline{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i + z_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$$

Argumento 4: Razonamientos verbales deductivos, basados en propiedades previas:

Este tipo de argumentación se completa o sustituye, por razonamientos verbales no completamente formalizados, o bien por la búsqueda de contraejemplos, generalización, etc. El siguiente ejemplo está tomado de Calot (1988).

La mediana está comprendida entre el valor mínimo y el valor máximo de los datos. Nunca podemos obtener un valor fuera del rango de la variable, puesto que su propia definición de elemento central que divide a la población en dos mitades iguales obliga a ello.

2.4. CONCLUSIONES DEL MARCO TEÓRICO Y DEL ESTUDIO EPISTÉMICO

El análisis epistémico de los elementos del significado sistémico, realizado a partir de algunos libros de texto de nivel introductorio en la Universidad revela la complejidad del tema, tanto en lo que respecta a la media, como a la mediana y la moda, en virtud de la gran cantidad y variedad de elementos de significado que intervienen, incluso en este nivel elemental, en que no tenemos en cuenta la inferencia, ni la estadística bivariante o multivariante.

Hemos visto que hay distintas definiciones y métodos de cálculo, numerosas propiedades tanto numéricas, como algebraicas y estadísticas, representaciones verbales, simbólicas, tabulares y gráficas, así como tipos de argumentación que hacen que su estudio sea más complejo de lo que pueda parecer a simple vista. Ello confirma los supuestos de nuestro marco teórico, en el que la comprensión tiene diferentes componentes correspondientes a los tipos de elementos de significado.

Una primera consecuencia es que el diseño de la instrucción y la evaluación del aprendizaje debe tener en cuenta estos diferentes tipos de significado y comprensión, ya que no podemos esperar que, enseñando, por ejemplo, a los alumnos a calcular los promedios puedan deducir y comprender por sí mismos sus diversas propiedades o adquieran la competencia suficiente para usar correctamente el promedio más adecuado en situaciones problemáticas sencillas. Es asimismo necesario que los alumnos adquieran capacidad de expresión simbólica y gráfica y de argumentación, si queremos hacerlos estadísticamente competentes.

Pensamos, por ello, que es necesario analizar con detenimiento la ubicación de este tema dentro del currículo, y reconsiderar con detalle los elementos de significado incluidos, atendiendo a la dificultad que presentan para los alumnos en el tramo de edad en el que está previsto.

Es por ello que hemos abordado la tarea de investigar la dificultad real del logro de la competencia y comprensión del tema por parte de estos alumnos, con objeto de proporcionar información para el profesor que debe enseñar estos contenidos. Asimismo, pensamos que se necesita mucha labor de diseño curricular para secuenciar convenientemente este contenido, incluyendo sus diversos componentes.

CAPITULO 3.

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. INTRODUCCIÓN

Una vez descritos los objetivos y el marco teórico de nuestro trabajo, en este capítulo presentamos una síntesis personal y resumen de las principales investigaciones relacionadas con la nuestra, con una doble finalidad:

a) Identificar aquellos elementos del significado de las medidas de posición central cuya comprensión no ha sido suficientemente investigada, o que no ha sido investigada en alumnos de secundaria, y mostrar de este modo la originalidad de nuestro trabajo, que completará los puntos en que la investigación analizada es deficiente.
b) Recopilar y clasificar, en relación con los diferentes elementos del significado de las medidas de posición central, los ítems usados en investigaciones anteriores que sean potencialmente útiles para nuestro trabajo. Esto ha permitido posteriormente construir un banco de ítems, a partir del cual se han seleccionado los que se usan en el cuestionario de evaluación.

En consecuencia, este estudio será básico para la construcción de nuestro instrumento de evaluación y también para la interpretación de los resultados obtenidos al aplicarlo, puesto que nos permitirá comparar con otras investigaciones previas.

Para valorar el análisis que vamos a realizar, hay que tener en cuenta los siguientes puntos señalados en Batanero y cols. (1994), en cuanto a la investigación en educación estadística, que todavía continúan siendo válidos:

- Aunque hay una cantidad importante de investigación sobre conceptos de probabilidad, que empieza con Piaget e Inhelder alrededor de 1950, hay muy poco sobre el campo más amplio de conceptos estadísticos y la investigación realizada es mucho más incompleta. Esto apoya nuestra decisión de analizar la comprensión de conceptos estadísticos por parte de los estudiantes de secundaria.
- La mayor parte del trabajo de investigación en este campo no considera el problema de la enseñanza, sino que se centra en el uso o la comprensión de las ideas de estadística y probabilidad. Se ha investigado muy poco sobre la práctica normal de las clases, sobre los libros de texto, la enseñanza o sobre criterios de evaluación sistemática.
- Los sujetos investigados han sido niños muy pequeños, estudiantes mayores de 18 años, o sujetos adultos en contextos no escolares. Hay pocas investigaciones centradas entre 12 y 16 años, rango de edad importante a tener en cuenta, que consideraremos en nuestro trabajo.
- Los psicólogos como Nisbet, Ross, Tversky, Kahneman, etc., son los que han realizado la mayor parte de las investigaciones, más que los educadores estadísticos, aunque esto está

cambiando desde la pasada década, especialmente a raíz de la celebración de los congresos internacionales de educación estadística y de la creación del IASE.

Aunque hemos encontrado un cierto número de investigaciones relacionadas con nuestro tema específico de investigación, esto es, la enseñanza y aprendizaje de las medidas de posición central en alumnos de secundaria, mostraremos que todavía es necesario continuarla. Las investigaciones se han centrado en evaluar la capacidad de cálculo o aspectos aislados de la comprensión, mientras que en nuestro caso pretendemos realizar un estudio del significado sistémico de estos conceptos.

En lo que sigue, presentaremos un resumen de estas investigaciones, organizado y clasificado en relación a nuestro marco teórico. Hemos ampliado también el estado de la cuestión que presentamos, incluyendo un rango mayor de edades, la literatura de tipo psicológico y otros conceptos relacionados con el que nos ocupa: la representación gráfica y tabulación de datos y las características de dispersión. Todos ellos están relacionados con las medidas de posición central, por lo que las dificultades descritas pueden explicar, al menos en parte, los errores de los estudiantes en el tema estudiado.

Hemos encontrado también algunos estados de la cuestión sobre el tema de las dificultades en el aprendizaje de la estadística, como el incluido en el libro de Hawkins y cols. (1992) y el realizado por Batanero y cols. (1993) y Batanero (2000a). Para preparar éste que nos ocupa partimos del último trabajo citado y del de Tormo (1993), completándolos con investigaciones más recientes, como las de Watson y Moritz (2000) y Carvalho (2001).

3.2. INVESTIGACIONES SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LAS MEDIDAS DE POSICIÓN CENTRAL

Al planificar la enseñanza del tema o al tratar de evaluar el aprendizaje de los alumnos, debemos tener en cuenta los cinco tipos de elementos que constituyen el significado sistémico de un objeto matemático y que hemos descrito anteriormente. La comprensión de un concepto no puede reducirse a conocer las definiciones y propiedades, sino a reconocer los problemas donde debe emplearse, las notaciones y palabras con que lo denotamos y en general todas sus representaciones, habilidad operatoria en los diferentes algoritmos y procedimientos relacionados con el concepto y capacidad de argumentar y justificar propiedades, relaciones y soluciones de problemas. A continuación describimos los resultados de investigaciones que han resaltado dificultades en cada unos de estos puntos en relación a las medidas de tendencia central.

3.2.1. INVESTIGACIONES SOBRE LA CAPACIDAD DE CÁLCULO Y LA COMPRENSIÓN DE ALGORITMOS

Cálculo de medias ponderadas

Además de ser uno de los principales conceptos estadísticos, y base en la construcción de otros, como momentos, etc., la media tiene muchas aplicaciones en cuestiones prácticas de la vida diaria, especialmente la media ponderada. Basta recordar conceptos como los índices de precios, la esperanza de vida o la renta per cápita. El cálculo de la media ponderada parece sencillo. Sin embargo Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que incluso alumnos universitarios no ponderan adecuadamente los valores en problemas de media ponderada y en ocasiones usan la media simple.

Estos autores dividen el conocimiento sobre la media en funcional, computacional y analógico. El primero de ellos es muy importante cuando se trata del aprendizaje del concepto, puesto que al considerarse la media como un concepto de la vida real, permite que los estudiantes la entiendan como un representante del conjunto de datos. Así, si la media representa la distribución, su valor debe tener sentido en el contexto, pero esto no siempre es fácil de captar para los estudiantes. Si la comprensión del concepto es de tipo computacional, cualquier resultado se puede admitir como válido, lo que se nota por ejemplo cuando hay un valor cero en la distribución y no se tiene en cuenta en el cálculo de la media, o cuando no se ponderan los valores al calcular la media. Para el conocimiento computacional, centrado en los algoritmos de cálculo, las capacidades aritméticas de los estudiantes son las que más influyen en la determinación de un resultado razonable. Por último, el conocimiento analógico incluye imágenes visuales del concepto de media. Por ejemplo, la de la balanza, que puede ayudar a corregir errores frecuentes, como el del cálculo correcto de la media ponderada.

En nuestro marco teórico asumimos y ampliamos estos tipos de conocimiento: el conocimiento computacional se podría equiparar al conocimiento de algoritmos y procedimientos; el conocimiento funcional al de los campos de problemas que la media resuelve y el analógico incluiría las definiciones y algunas propiedades. Faltarían el conocimiento representacional (uso del lenguaje y representaciones) y argumentativo (capacidad de argumentación) que no tienen en cuenta Pollatsek, Lima y Well (1981).

Cálculo a partir de tablas de frecuencia

Las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada y la selección de los correspondientes pesos no son fácilmente identificados por los estudiantes. Las tablas de frecuencia son una estructura matemática compleja que incluye una variada información: clases, extremos y marcas de clase, frecuencias absolutas y relativas, acumuladas y ordinarias. No es extraño que los alumnos confundan estos conceptos, lo que provoca errores en la interpretación y también en el cálculo de los estadísticos.

Li y Shen (1992) analizan los proyectos de estadística realizados por los estudiantes. Como parte de estos proyectos algunos construyen tablas de frecuencias y calculan la media a partir de los datos agrupados. Los autores indican que cuando los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debería ponderarse de modo distinto y se limitan a calcular la media de todas las marcas de clase. Este mismo error encuentra Calvalho (2001) en su trabajo sobre aprendizaje cooperativo de la estadística, que comentamos más adelante.

Comprensión del algoritmo de cálculo

En otros casos, aunque el alumno realice los cálculos correctamente, el algoritmo se aplica de forma mecánica sin comprender su significado. Cai (1995) encontró que mientras la mayoría de alumnos de 12-13 años en su investigación eran capaces de aplicar adecuadamente el algoritmo para calcular la media, sólo algunos pueden determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos conocida su media, es decir, son capaces de invertir el algoritmo.

Incluso encontrando el valor desconocido, fueron pocos los que lo hicieron a partir de un uso comprensivo del algoritmo, multiplicando el valor medio por el número de valores para hallar la suma total y de ahí el valor faltante, sino que la mayoría simplemente usó el ensayo y error, hasta hallar el valor pedido.

Russell e Mokros (1990), tras realizar una investigación sobre ideas previas de los estudiantes acerca de valores representativos de un conjunto de datos, como la media, obtienen como uno de los resultados que la introducción del algoritmo de cálculo, sin tener en cuenta los conocimientos informales previos de los estudiantes, provoca una especie de "corto-circuito" que da lugar a que éstos abandonen sus intuiciones sobre representatividad y se queden únicamente con un algoritmo fácil de aplicar, aunque carente de significado.

Errores frecuentes en el cálculo de promedios

Carvalho (1996), realizó una investigación con una muestra de 182 alumnos de 7º de Educación Básica (2º de ESO), a los que les pidió que resolvieran tareas similares a las que realizan en clases de matemáticas principalmente de cálculo de promedios, sugiere que algunos de ellos, al calcular la media, suman las frecuencias absolutas en lugar de los valores de la variable. Para la mediana toman el valor central de la serie de frecuencias absolutas. Observa que el número de respuestas incorrectas es mayor si se presentan los datos en forma de gráfico, en lugar de contenidos en una tabla. Sugiere que es la dificultad de los alumnos en la interpretación de los gráficos lo que explica esta diferencia.

Otros errores de cálculo en media, mediana y moda encontrados por Carvalho (1998; 2001) al analizar las producciones escritas por un grupo de 182 alumnos de 13-14 años resolviendo tareas estadísticas de las que habitualmente encuentran en sus clases son:

- Moda: Tomar la mayor frecuencia absoluta.
- Mediana: No ordenar los datos para calcular la mediana; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; equivocarse al calcular el valor central; tomar como mediana el valor central de las frecuencias de la tabla.
- Media: Hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media.

Diferenciación de algoritmos de cálculo de la mediana según tipo de datos

En realidad, el cálculo de la mediana es complejo porque el algoritmo de cálculo es diferente, según tengamos un número par o impar de datos, y según los datos se presenten en tablas de valores agrupados o sin agrupar (Cobo y Batanero, 2000) y también el valor obtenido es diferente, según se aplique uno u otro algoritmo. Esto puede resultar difícil para los alumnos, bastante acostumbrados a un único método de cálculo y una única solución para los problemas matemáticos.

Como indica Schuyten (1991), incluso los alumnos universitarios encuentran difícil aceptar que se pueda emplear dos algoritmos diferentes de cálculo para el mismo promedio y que puedan obtenerse valores distintos para el mismo parámetro, al variar la amplitud de los intervalos de clase. Por ejemplo, desde la definición de la mediana como "valor de la variable estadística que divide en dos efectivos iguales a los individuos de la población supuestos ordenados por el valor creciente del carácter", hasta su cálculo basado en la gráfica de frecuencias acumuladas, intervienen una serie de pasos no siempre suficientemente comprendidos.

Estepa (1993) sugiere también que cuando los alumnos calculan la mediana, partiendo de las representaciones gráficas de las frecuencias acumuladas se encuentran con varios obstáculos:

- Para el caso de las variables discretas, esta representación gráfica corresponde a una función en escalera, es decir, con discontinuidades de salto, que los alumnos no han manejado hasta ese momento.
- Por ese motivo, el valor de la mediana está con frecuencia indeterminado, pues hay más de un valor de la variable que podría corresponder a la definición de mediana. Esto es fuente de confusión y desconcierto.
- Los alumnos no tienen suficiente dominio del manejo de desigualdades que aparecen asociadas a la definición de mediana y a su cálculo.
- En el caso de las variables continuas, dependiendo de la amplitud del intervalo, varía el valor de la mediana, lo que también ocurre con los otros estadísticos. Pero el alumno está

acostumbrado a que en la clase de matemáticas muchos problemas tienen una única solución. Esto es parte del contrato didáctico que falla para el caso de la estadística.

Estrategias de cálculo

Para Gattuso y Mary (1996) la comprensión conceptual no va paralela al número de años de instrucción en la materia en cuestión. A pesar de que la media es algo cotidiano y la mayoría de los adultos y los estudiantes saben calcularla en situaciones sencillas, no hay una buena comprensión del concepto y no son capaces de usarla en situaciones en las que es conveniente hacerlo. Analizando las respuestas de estudiantes de secundaria y universitarios, con o sin instrucción previa sobre la media, estas autoras han observado que las estrategias preferidas por los de mayor edad eran más algebraicas y además obtenían mejores resultados cuando calculaban medias de conjuntos de datos agrupados, mientras que los más jóvenes preferían usar el conjunto de datos sin agrupar, aunque mostraron un nivel de éxito superior en los problemas de cálculo "inversos", es decir, aquellos en los que se conoce la media y se deben averiguar algunos de los datos iniciales. La dificultad en el uso del cero para el cálculo de la media permanece en todos los niveles educativos estudiados.

Efecto del contexto y presentación de los datos

Gattuso y Mary (1998) analizan la evolución de la comprensión del algoritmo de cálculo de la media ponderada de los alumnos de 14 a 17 años, usando problemas con diferentes contextos y forma de representación. Las tareas presentadas fueron: Cálculo de medias ponderadas, efecto que el cambio de un dato produce sobre la media, hallar un valor que falta en un conjunto de datos para obtener un promedio dado y analizar las desviaciones con respecto a la media.

Identifican las siguientes variables didácticas que afectan a la dificultad de las tareas: Formato (tabla, serie de números, gráfico), valores de los datos que provocan la aparición de medias no enteras, si los valores de las variables son o no mucho mayores que los de las frecuencias (lo que influye en que el alumno discrimine los dos conceptos); si una de las frecuencias es mucho mayor que las otras (de modo que se fuerce a tener en cuenta las frecuencias). Observaron el efecto de estas variables y también la mejora con la instrucción al encontrar diferencias en las estrategias usadas por los distintos grupos, si bien éstas no fueron muy persistentes en el tiempo. Detectaron algunos errores como, por ejemplo, utilizar fórmulas incorrectas para calcular la mediana, o no tener en cuenta el peso de los distintos valores de la variable.

Además, la forma de presentar los datos influye en los resultados obtenidos, puesto que aunque los alumnos sean competentes en la interpretación de datos en diversos formatos, su habilidad en el cálculo de las medidas de tendencia central es mayor cuando los datos se presentan agrupados en tablas que cuando se dan en forma gráfica.

En resumen, los resultados de las investigaciones que hemos descrito muestran que el estudio de la capacidad de cálculo y comprensión de los algoritmos se centra preferentemente en la media, siendo mucho más incompleta en el caso de mediana y moda. También muestran que el conocimiento de las reglas de cálculo por parte de los estudiantes no implica necesariamente una comprensión real del algoritmo. Si los alumnos adquieren sólo el conocimiento de tipo computacional, desligado del conocimiento sobre los otros tipos de elementos descritos es probable que cometan errores predecibles, salvo en los problemas más sencillos.

Además, el proponer el algoritmo de cálculo prematuramente puede influir negativamente en la comprensión del concepto. Tormo (1993) llega a la conclusión que los estudiantes desarrollan nociones intuitivas sobre el promedio en cuanto a medida de localización. Por ello se debería trabajar sobre las ideas intuitivas que tienen los alumnos para ayudarles a desarrollar caminos nuevos que les permitan enriquecer los conceptos que ya tienen asimilados.

3.2.2. INVESTIGACIONES SOBRE LA COMPRENSIÓN DE PROPIEDADES

Un segundo punto investigado por algunos autores es la comprensión de propiedades. Como pusimos de manifiesto en el análisis epistémico presentado en el capítulo 2, las medidas de posición central pueden considerarse desde tres puntos de vista diferentes, cada uno de los cuales induce una serie de propiedades:

- Como un valor numérico: el número obtenido al calcular la media, mediana y moda, respectivamente. Desde este punto de vista se deducen una serie de propiedades numéricas.
- Como una transformación de los datos, que algunos alumnos asimilan a la idea de operación, aunque en realidad no siempre se trata de una operación interna en el conjunto de referencia. Paralelamente, aparecen las propiedades algebraicas.
- Como un resumen de los datos, que puede ser un parámetro, si se refiere a una población o un estadístico si se refiere a una muestra. En nuestro caso, puesto que no nos planteamos problemas de inferencia nos limitamos a su consideración como estadístico. Finalmente esta visión da lugar a una serie de propiedades estadísticas.

Diferentes autores han analizado la comprensión de propiedades, aunque no se ha hecho un estudio sistemático, y no se han separado explícitamente los tres tipos. Además, prácticamente se concentran en la media, siendo muy raros los casos de estudio de propiedades de mediana y moda. A continuación analizamos estas investigaciones.

Propiedades algebraicas

Pollatsek, Lima y Well (1981), tras un trabajo de investigación pionero para la enseñanza de la estadística, concluyen que, incluso un concepto aparentemente sencillo, básico y de frecuente aparición, como la media, presenta numerosas dificultades para estudiantes de entre 18 y 22 años, que no pueden explicarse por la falta de atención o motivación. Por ello, estos autores afirman que la media es un buen punto de partida para explorar las estructuras cognitivas necesarias para trabajar los conceptos estadísticos. Sugieren también que los errores de cálculo son debidos a la falta de comprensión de las propiedades de los promedios. Los estudiantes asignan a estos estadísticos propiedades erróneas y ello les lleva al fallo en la resolución de problemas.

Mevarech (1983) sigue la sugerencia de los autores anteriores, y observa que una explicación posible de los errores descritos por Pollatsek y cols. (1981) es que los estudiantes suelen creer que un conjunto de números, junto con la operación media aritmética constituye un grupo algebraico. Cuando comienzan a estudiar la media, mediana y moda por primera vez ya conocen ciertas operaciones aritméticas como la suma y multiplicación, e inconscientemente aplican a la operación de "promediar" algunas propiedades de las anteriores operaciones que no se cumplen en el caso de los promedios.

En su investigación, llevada a cabo con 103 estudiantes universitarios de primer curso, encuentra un alto porcentaje de alumnos que atribuyen alguna de estas propiedades a la media aritmética cuando, en realidad, no las posee. Por ejemplo estos estudiantes piensan que la media tiene la propiedad asociativa y cuando tienen que hallar la media de un conjunto grande de números, lo dividen en partes hallando primero la media de cada parte y luego promediando el resultado obtenido. Podemos comprobar que esta propiedad, en general, no es cierta, si hallamos primero la media de tres números diferentes y luego promediamos los dos primeros y hacemos la media del valor obtenido con el último elemento. En otros casos no tienen en cuenta el cero en el cálculo de la media, como si fuese un elemento neutro o bien se piensa que la media debe ser un elemento del mismo conjunto numérico del que se toman los datos, es decir que posee la propiedad de clausura.

Dificultad relativa de comprensión de diversas propiedades

Strauss y Bichler (1988) investigaron el desarrollo evolutivo de la comprensión de la media en alumnos de 8 a 12 años, distinguiendo una serie de propiedades, en las que no diferencia su tipo (algebraico, numérico o estadístico):

a) La media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución.
b) La suma de las desviaciones de los datos respecto de la media es cero, lo que hace que sea un estimador insesgado.
c) El valor medio está influenciado por los valores de cada uno de los datos. Por ello, la media no tiene elemento neutro.
d) La media no tiene por qué ser igual a uno de los valores de los datos.
e) El valor obtenido de la media puede ser un número no entero (ello puede no tener sentido para la variable considerada), como cuando decimos que el número medio de hijos es 1,1.
f) Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media.
g) La media es un "representante" de los datos a partir de los que ha sido calculada.

Para cada una de estas propiedades, los autores citados emplearon diversas tareas con las que evaluar su comprensión intuitiva, variando el tipo de datos (continuos, discretos) y el medio de presentación (verbal, numérico y concreto). Aunque una proporción importante de niños parecieron usar espontáneamente estas propiedades, algunos no tenían en cuenta el cero para calcular la media, o bien suponían que la media podría estar fuera del rango de variación de la variable, o que debería coincidir con uno de los valores de los datos.

No encontraron efectos significativos respecto al tipo de datos o medio de presentación empleado. Sus resultados sugieren una mejora de la comprensión con la edad, y diferencias de dificultad en la comprensión de las propiedades, siendo más fáciles las a), c) y d) que las b), f) y g). Hacemos notar que las propiedades a), c) y d) son numéricas, la propiedad f) es algebraica y las propiedades b) y g) son estadísticas. Una hipótesis que nos formulamos es que las propiedades estadísticas serían las más difíciles de comprender, porque los alumnos no tienen referente de comparación de este tipo de propiedad con lo que conocen hasta el momento, mientras que para las propiedades numéricas y algebraicas pueden usar sus conocimientos sobre los conjuntos numéricos y sus operaciones.

Roth y Zawojewski (1991) realizaron una investigación sobre el efecto de la edad en la comprensión de las siete propiedades identificadas por Strauss y Bichler (1988), y el de los diferentes formatos presentados a los sujetos. Además de encontrar una importante influencia de la edad sobre la comprensión de la media, también observaron que la contextualización de las tareas facilita mucho su resolución al permitir utilizar otros conocimientos y capacidades menos abstractas que las únicamente numéricas.

Sin embargo, propiedades tales como que la suma de desviaciones respecto a la media es cero, que la media es un valor representativo de los valores promediados o que hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media, continuaron siendo demasiado abstractas para una proporción importante de alumnos de 14 años. Del mismo modo, las propiedades relacionadas con el valor cero o la representatividad de la media resultan más difíciles para los alumnos que las de localización y elaboran una explicación, porque las propiedades relacionadas con la localización están más basadas en el cálculo que las de representatividad, que requieren de otros conocimientos previos.

Un estudio sobre las dificultades de comprensión de las propiedades de los promedios, realizado por Batanero y otros (1997), muestra que la población estudiada, profesores de primaria en formación, encuentran dificultades en entender el efecto de los ceros en el cálculo de promedios y no diferencian los casos en que hay que suprimir o no un valor atípico antes de calcular el promedio. La conclusión a la que llegan estos autores es que la aproximación al estudio de los estadísticos de posición central basada en la definición algorítmica y el cálculo en colecciones de datos descontextualizados no permite que los alumnos lleguen a una comprensión integral del concepto de promedio.

Propiedades estadísticas

La idea de representante de un conjunto de datos es importante en las aplicaciones prácticas, por ejemplo, al comparar dos conjuntos de datos respecto a una misma variable de interés. Russell y Mokros (1991), en una investigación en la que intentaban explorar las ideas previas de los estudiantes sobre lo que es un valor típico, representativo o medio, encontraron que los alumnos más jóvenes desarrollan una idea de media como un indicador razonable del centro de la distribución, lo que supone un paso muy importante para la comprensión de otra idea más compleja, la de representatividad. Parece ser que los estudiantes empiezan a desarrollar esta idea analizando los datos y pensando en la relación que existe entre éstos y su valor típico.

Estos resultados se contradicen con los obtenidos por Strauss y Bichler (1988) o los de Leon y Zawojewski (1991), para los que el concepto de representatividad sólo surge cuando se domina la idea de tendencia central. Russell y Mokros (1991) opinan que en la vida cotidiana aparecen situaciones en la que se encuentra de forma intuitiva la noción de representatividad, lo que permite a los estudiantes relacionar ésta con la representatividad estadística e ir familiarizándose con ella. Algunos de estos ejemplos son las notas medias en exámenes, repartos equitativos, esperanza de vida, etc.

Como indican Mokros y Russell (1995), hasta que los niños no conciben el conjunto de datos como un todo, y no como un agregado de valores, no podrán comprender las ideas de resumen de los datos o representante de los datos, que se refiere al conjunto global y no a ninguno de sus valores aislados. Si la media aritmética es un parámetro estadístico utilizado para resumir información de un conjunto de datos, entender el concepto de media aritmética implica reconocerle el papel representante del conjunto de datos. La idea de *representatividad* no es inmediata, antes de llegar a ella los alumnos deben captar la idea del conjunto de datos como una unidad.

Siguiendo con la idea de la media como un valor "típico" o "representativo" de los datos, Campbell (1974) observa que, debido a ello, se tiende a situarla en el centro del recorrido de la distribución, propiedad que es cierta para distribuciones simétricas. Pero cuando la distribución es muy asimétrica la media se desplaza hacia uno de los extremos y la moda o la mediana serían un valor más representativo del conjunto de datos. Esto no es siempre comprendido por algunos alumnos quienes invariablemente eligen la media como mejor representante de los datos sin tener en cuenta la simetría de la distribución o la existencia de valores atípicos, como hemos observado en nuestra propia experiencia. Batanero y cols. (1997) también encuentran una confusión generalizada respecto a las posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas en los futuros profesores.

Propiedades de la mediana

Respecto a la comprensión de la mediana Barr (1980), según los resultados obtenidos en un estudio llevado a cabo con estudiantes de entre 17 y 21 años, indica que los alumnos interpretan la mediana como el centro de "algo" pero no siempre comprenden a qué se refiere ese "algo" porque no saben realmente que una tabla de frecuencia es sólo un resumen de los datos y no son capaces de pasar de la tabla a la lista de valores, que es una representación alternativa de los datos. Incluso si se les dan los datos en forma de lista no ven la necesidad de ordenarlos para calcular la mediana, porque no entienden que la mediana es un estadístico que se refiere al conjunto ordenado de datos.

Por otro lado, Zawojewski (1986) indica que los estudiantes tienen dificultad en considerar la mediana como representante del conjunto de datos y en crear conjuntos que tengan como mediana una fijada de antemano. En esta tarea casi todos los estudiantes investigados usaron inicialmente la mediana como uno de los datos, lo que indica que para ellos no hay mucha diferencia entre las medidas de tendencia central y los mismos datos. Los estudiantes se concentran sólo en ciertas reglas aprendidas sobre la definición de las medidas de tendencia central.

Como resumen, observamos que la investigación sobre comprensión de propiedades de los promedios es todavía muy escasa, y se abren nuevas líneas de trabajo, entre ellas analizar la comprensión de las propiedades de mediana y moda. También resulta de interés analizar el tipo de explicaciones escritas dadas por los alumnos como respuesta a los ítems presentados y realizar una clasificación de las mismas, lo que podría aportar información adicional a la clasificación de Strauss y Bichler obtenida a partir de entrevistas clínicas.

3.2.3. INVESTIGACIONES SOBRE LA IDENTIFICACIÓN DE LOS CAMPOS DE PROBLEMAS

No sirve de nada conocer las definiciones de las medidas de posición central y saber calcularlas si luego no se reconocen los problemas relacionados con estos conceptos ni se aplican en su resolución.

Pollasek y cols. (1981) propusieron el siguiente problema, para tratar de determinar las concepciones de los alumnos universitarios sobre el valor esperado de una observación de una variable aleatoria, de la que se conoce su esperanza matemática:

> *La media en fluidez verbal de una clase de un colegio es de 400. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la puntuación de los 4 primeros es de 380, 420, 600, 400. ¿Cuál sería aproximadamente la puntuación esperada para el quinto estudiante?*

La respuesta correcta a este ítem es 400, el valor esperado en la población. Sin embargo, son pocos los alumnos que, en la investigación citada, dieron una respuesta correcta al problema. Generalmente buscaban un valor de la puntuación del quinto sujeto tal que, sumada a las cuatro anteriores, dé una media de 400. Pollatsek y cols. (1981) observan que los estudiantes esperan que la media de la muestra sea idéntica a la de la población, es decir, no aprecian la variabilidad aleatoria de la misma.

La comprensión de la idea de "valor típico" implica, según Russel y Mokros (1991), tres tipos diferentes de capacidades:

- Dado un conjunto de datos, comprender la necesidad de emplear un valor central, y elegir el más adecuado.
- Construir un conjunto de datos que tenga un promedio dado.
- Comprender el efecto que, sobre los promedios (media, mediana o moda), tiene un cambio en todos los datos o parte de ellos.

Russell y Mokros (1991) estudiaron las concepciones que un grupo de alumnos de 10 a 14 años tiene sobre los valores de tendencia central, empleando para ello tareas que trataban las capacidades anteriores, de las cuales la más difícil fue la segunda. Respecto al problema de usar la media como representante de un conjunto de datos, resulta aún más difícil para los alumnos construir un conjunto de datos que tenga un promedio dado.

Goodchild (1988) proporcionó a los estudiantes cajas de cerillas en las que se había impreso la frase "contenido medio 35 cerillas" y pidió a sus alumnos construir una distribución hipotética del contenido de 100 cajas. Lo que más le sorprendió fue que las distribuciones construidas por los alumnos, no tenían forma acampanada como la distribución normal. Goodchild sugirió que ello se debe a la falta de comprensión de la media como medida de posición central de la distribución. Al mismo tiempo, llegó a la conclusión de que los estudiantes comprenden mejor aquellas propiedades de la media asociadas a la localización que las asociadas a la idea de representatividad.

Estepa y Batanero (1994), en una investigación realizada con alumnos del curso preuniversitario observaron casos de alumnos que basan la comparación de dos conjuntos de datos en valores aislados, en lugar de usar los promedios. Por ejemplo, se fundan en la comparación de los máximos o los mínimos, o bien en la comparación de totales, o la inspección visual de la distribución global.

Más recientemente, Cai (1995) en otra investigación realizada con 250 estudiantes de 6º curso (11-12 años) en Estados Unidos, observa que, mientras que el 88% de los alumnos conocen el algoritmo de cálculo de la media, sólo el 50% de ellos son capaces de aplicar este concepto para resolver un problema abierto. Para ella, este resultado muestra que la enseñanza consigue una comprensión pobre de la media, lo que puede significar que se debería revisar la forma de trabajar en el aula puesto que quizás se está poniendo demasiado énfasis en la enseñanza de los algoritmos en detrimento de otras cuestiones importantes.

De nuevo vemos que la investigación sobre la comprensión de los campos de problemas de los promedios es más escasa que la investigación sobre capacidad de cálculo o comprensión del concepto. Además también se ha centrado preferentemente en la media, y no en la mediana o moda.

3.2.4. INVESTIGACIONES SOBRE LA COMPRENSIÓN DE REPRESENTACIONES Y CAPACIDAD DE ARGUMENTACIÓN

Los términos matemáticos con que designamos los conceptos tienen un significado preciso, pero éste no siempre coincide con el asignado al término en el lenguaje coloquial. Russell y Mokros (1991) clasificaron en cuatro categorías los significados incorrectos atribuidos por los estudiantes a la palabra "media": Valor más frecuente (en realidad esto sería una confusión con la palabra "moda"), "valor razonable" (significado coloquial del término), "punto medio" (confusión con la mediana) y "algoritmo" (es un significado restringido, donde la media se ve sólo como el algoritmo de cálculo). Cada uno de estos aspectos puede ser cierto en un caso dado, pero puede ser inapropiado en otro. Acaban el artículo señalando la necesidad de usar diferentes contextos y representaciones en la enseñanza de un concepto matemático.

Watson y Moritz (2000), analizan el significado intuitivo dado por los estudiantes al término "promedio" en las clases y hallan un gran número de ellos para los cuales éste es simplemente un valor en el centro de la distribución (es una idea próxima al concepto de mediana). Pocas veces se relaciona la palabra "promedio" con la moda y menos aún con la media aritmética. Las siguientes definiciones de "promedio" fueron obtenidas en entrevistas realizadas por Watson y Moritz (2000): *"Significa igual", "que es normal", "no eres realmente bueno, pero tampoco malo"*.

Al preguntar que quiere decir que el número medio de niños por familia es 2'3, obtienen respuestas correctas y otras como las siguientes: *"Que tienen dos niños grandes y otro que no ha crecido todavía", "que en las familias australianas el número más frecuente de niños es 2'3", "el '3 es un niño que tiene que crecer para hacerse mayor. Por ejemplo, tiene 3 años ahora y cuando cumpla 10, contará como 1 y entonces el número promedio de niños será 3".* Los estudiantes fueron influenciados por publicidad incorrecta en la televisión en que se sugería este tipo de interpretación. Para el profesor los enunciados sobre los promedios pueden parecer muy claros, pero estas respuestas indican la necesidad de poner atención al significado que las palabras y valores numéricos tienen para los estudiantes en relación a contextos específicos.

Eisenbach (1994) plantea a estudiantes universitarios de un curso introductorio de estadística el significado de la frase: "*¿Qué quiere decir que el salario medio de un empleado es 3.600 dólares?"* obteniendo respuestas como "*que la mayoría de los empleados gana alrededor de 3.600 dólares",* o que *"es el salario central; los otros trabajadores ganan más o menos de 3600 dólares",* que muestran la confusión terminológica entre las palabras "media", "mediana" y "moda".

Ya hemos indicado que la idea de promedio no se puede comprender hasta tanto se visualice el conjunto de datos como un todo y también que la forma de presentación de los datos (tabla, gráfico, datos sin tabular) incide en la dificultad de las tareas. Reading y Pegg (1996) estudiando la forma en que los niños de grados 7 a 12 (12-18 años) reducen los conjuntos de datos observaron que algunos alumnos que eran capaces de dar un resumen de datos presentado en forma numérica, fracasaron en la tarea cuando los datos se presentaban por medio de un gráfico estadístico. También observaron que los niños mostraban dificultad a la hora de dar un argumento o justificar su respuesta de por qué se elegía un cierto promedio, al plantearles el siguiente problema:

Como parte de un proyecto los estudiantes de una clase miden cada uno su número de calzado, obteniéndose los siguientes datos:

6	*6*	*6*	*7*	*7*	*7*	*7*	*8*	*8*	*8*	*8*	*8*	*8*	*9*	*9*
9	*9*	*9*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*2*	*2*	*3*	

Si te preguntan cuál sería el mejor número para representar este conjunto de datos, ¿Qué número o números elegirías? Explícanos por qué has elegido ese(esos) número(s).

En su investigación clasifica a los alumnos en 8 niveles diferentes de respuesta, pero, incluso los estudiantes de nivel 6 y 7 que son capaces de proporcionar un resumen como la media, son incapaces de argumentar el por qué de su decisión, más allá de dar la definición del concepto. Solo una pequeña parte de los estudiantes de su investigación (nivel 8) fueron capaces de justificar la elección de las medidas de valor central y dispersión relacionándolas con características del conjunto de datos.

En resumen pensamos que es importante analizar la comprensión por parte de los alumnos de las diferentes representaciones de los promedios y también saber qué tipos de representaciones usan espontáneamente en preguntas abiertas, aspectos que no han sido tratados en las investigaciones citadas.

3.2.5. DESARROLLO EVOLUTIVO DE LA COMPRENSIÓN DE PROMEDIOS

Tras todas estas investigaciones, han sido Watson y Moritz (1999, 2000) los primeros que han realizado un estudio extenso del tema, desde una perspectiva diferente a los anteriores. Tradicionalmente se partía de las dificultades y los errores de los estudiantes, para analizar la comprensión de los parámetros estudiados. Sin embargo, en este trabajo se analiza cómo va evolucionando la comprensión de estos conceptos basándose en los siguientes supuestos:

(a) La comprensión de un determinado concepto por una persona pasa por diversos estadíos que se manifiestan en sus respuestas.
(b) En un momento determinado, la complejidad de los razonamientos de un sujeto está relacionada con el estadío en el que se encuentra.

Tomando como modelo del desarrollo evolutivo el neopiagetiano debido a Biggs y Collis (1982, 1991) clasifican las respuestas de los alumnos en una jerarquía que refleja la estructura de los resultados de aprendizaje observados en el dominio de contenidos de las tareas. Definen las siguientes categorías de respuestas esperadas, dentro de este modelo:

- Respuestas pre-estructurales: No incluyen ninguna idea clara de promedio. Los alumnos responden a las tareas con respuestas no relacionadas con este concepto.
- Respuestas uni-estructurales: Cuando se da una respuesta simple que es relevante en el dominio de contenido.
- Respuestas multi-estructurales: Cuando la respuesta incluye dos o más aspectos del dominio de contenido, pero no se conectan unas con otras.
- Respuestas relacionales: Cuando el estudiante tiene una comprensión integrada de las relaciones involucradas en la tarea.

Basándose en estos presupuestos, y centrados en la evolución de los conceptos de media, mediana y moda, Watson y Moritz (1999) realizaron un estudio con 2250 sujetos y edades comprendidas entre 3º curso de primaria y el curso de orientación universitaria (8 a 18 años). No proporcionan datos sobre la enseñanza de los promedios que han recibido los alumnos de la muestra. Los resultados revelan que los niños empiezan mostrando un uso coloquial y progresan en su comprensión de los promedios siguiendo las etapas anteriormente descritas.

Los autores no analizan separadamente la comprensión de elementos de significado, sino sólo la comprensión global, siguiendo las etapas anteriores. Por otro lado el cuestionario es muy restringido: Se limita a dos ítems de opciones múltiples para evaluar la comprensión del uso cotidiano de promedios y otros dos ítems para evaluar la capacidad de aplicación y cálculo.

Los autores hacen referencia a que algunas propiedades de la media, como la de representatividad, que no aparecen en los contextos cotidianos, sólo la ponen de manifiesto los estudiantes más avanzados. Estos autores defienden que la representatividad es un concepto básico para la comprensión de las medidas de tendencia central, al permitir entender el significado de cada una de ellas y, a la vez, determinar las características del conjunto de datos.

Por otro lado, consideran que la mediana es la medida de tendencia central que necesita más investigación, puesto que, aunque la idea intuitiva que antes aparece, la de centro, es la que se asocia más tarde al concepto de mediana, el uso correcto de este parámetro presenta muchas dificultades para los alumnos. Además, en la vida cotidiana, el concepto de mediana aparece menos que el de media o moda. En cuanto a la moda, aunque sí es un concepto de uso frecuente en el entorno de los estudiantes, si tienen que elegir una de estas tres medidas de tendencia central para describir una distribución, suelen optar por la media, aunque no sea la más adecuada, puesto que están más familiarizados con su cálculo en el aula. No obstante, es menos frecuente en las aulas trabajar además del cálculo de los parámetros, lo que éstos representan, cuestión fundamental para una buena comprensión de los mismos.

En su nueva investigación Watson y Moritz (2000) tratan de confirmar los resultados obtenidos en el trabajo anterior, realizando 137 entrevistas, 97 de ellas a una muestra inicial de estudiantes entre 3º curso de Primaria y 3º Curso de Secundaria (8 a 15 años). Para llevar a cabo un estudio longitudinal, se vuelve a entrevistar a 22 de estos estudiantes a los 3 años y a 21 de los estudiantes a los 4 años. No proporcionan datos sobre la enseñanza de los promedios que han recibido los alumnos de la muestra. Las cuestiones sobre las que se realiza la entrevista son las siguientes, alguna de las cuales hemos adaptado para nuestro cuestionario:

1. ¿Has oído alguna vez la palabra "media"?¿Dónde? ¿Qué significa? En una investigación se obtuvo que los niños ven en promedio 3 horas de televisión al día. ¿Qué significa aquí la palabra promedio?

2. ¿Cómo crees que obtuvieron este promedio (3 horas de televisión al día)? Dame un ejemplo de cuánta televisión podría haber visto la gente y como se puede obtener el promedio a partir de ello.

3. Un periódico dice que el número medio de hijos por familia es 2.3 Explícanos qué significa para ti esta frase. ¿Cómo es que la media es 2.3 y no un número entero? El número medio de hijos entre 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias?

4. Otro estudio mostró que 25 estudiantes ven una media de 8 horas de televisión a la semana y 75 adultos ven una media de 4 horas de televisión a la semana. ¿Cuántas horas ven en promedio la televisión las 100 personas?

A partir del análisis de los protocolos, mejoran su jerarquía de comprensión de los promedios, definiendo los siguientes 6 niveles de desarrollo evolutivo:

- Pre-promedio: No se llega a usar la idea de promedio, ni siquiera en lenguaje coloquial o en contextos cotidianos. Los estudiantes no llegan a ver los datos como algo que pueda ser resumido. Responden a las preguntas sobre tareas simples inventando historias imaginativas.
- Uso coloquial de la media: Se usa el término promedio o media en el lenguaje ordinario, interpretándolo como normal o bueno, se emplean ideas imaginarias en el contexto de la tarea para apoyar respuestas uni-estructurales. Se relaciona con la idea de suma, pero no se conoce el algoritmo correcto, no se comprende el significado, pocos progresos en tareas complejas
- Respuesta multi-estructural: Se usan varias ideas como máximo, mínimo y suma más división para describir la media en situaciones sencillas, aunque no se es capaz de aplicarlo en situaciones complejas. Se producen errores en los algoritmos de cálculo o se confunden media, mediana y moda. Existen conflictos cognitivos entre el cálculo de la media y el concepto.
- Media como representante: Se asocia la media con su algoritmo en situaciones sencillas. Recurren al algoritmo de cálculo para describir los conceptos. Se relaciona el algoritmo con la posibilidad de un resultado no entero. Se expresa alguna idea de representatividad para la estimación o predicción en un conjunto de datos. No se sabe aplicar en contextos complejos sin ayuda y con frecuencia se prefiere usar las características visuales de los gráficos en lugar de sus promedios.
- Aplicación en un contexto complejo. Además de las capacidades del nivel anterior es capaz de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media o calcula medias ponderadas (no las dos cosas a la vez). No tiene clara la idea de distribución, raramente usan la media para comparar más de un conjunto de datos.
- Aplicación en dos o más contextos complejos. Además del anterior, es capaz a la vez de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media y calcular medias ponderadas.

Comprende la idea de distribución. Usan la media frecuentemente para comparar dos o más conjuntos de datos.

Sus datos sugieren que los estudiantes progresan en estos niveles sucesivos conformen aumentan en edad. Asimismo, un mismo estudiante progresa de una entrevista a otra en el estudio longitudinal. También observaron que los alumnos de cursos más altos muestran una evolución menor que los de cursos más bajos y que, aunque un nivel de escolaridad más elevado no debe ser sinónimo de mejores rendimientos de los alumnos, los resultados obtenidos en la investigación pueden revelar una cierta ineficacia en la forma de abordar la enseñanza de la estadística, en el sentido de que no se estimula suficientemente a los estudiantes para que sigan evolucionando a partir del estadío en el que se encuentran al inicio del proceso. Sin embargo, esto puede ser también un efecto de las tareas usadas, que sean demasiado sencillas para los chicos mayores, puesto que han usado la misma tarea para un amplio rango de edad.

Puesto que las tareas planteadas por los autores fueron muy limitadas, sus conclusiones podrían estar afectadas por el cuestionario y creemos por tanto interesante completar su estudio con un cuestionario más completo que tenga en cuenta los diversos elementos de significado de los promedios.

3.2.6. EFECTO DE LA ENSEÑANZA SOBRE LA COMPRENSIÓN DE PROMEDIOS

La investigación más seria sobre el aprendizaje de promedios la encontramos en Carvalho (2001), aunque su objetivo no es en sí el aprendizaje de los promedios, sino el efecto que el trabajo cooperativo en parejas (grupo experimental) tiene sobre el desarrollo de la capacidad lógica y sobre el aprendizaje de conceptos estadísticos elementales. Para ello proporciona a los alumnos lo que la autora llama "tareas estadísticas no habituales" que corresponden a problemas sencillos y abiertos sobre estadística. Los problemas habituales serían los recogidos en los libros de texto y empleados en clase por los profesores portugueses que se limitan a tareas de cálculo y representación gráfica.

Trata también de comparar con el aprendizaje de alumnos que trabajan con metodología y tareas tradicionales (grupo de control). Otra finalidad es comparar el éxito relativo de diferentes formas de agrupar a los alumnos, según coincidan o no en su desarrollo lógico y sus conocimientos estadísticos. Todo ello se basa en una serie de instrumentos de evaluación para situar a los alumnos de los grupos control y experimental en sus niveles correspondientes, respecto a estos dos aspectos y para formar las parejas del grupo experimental en forma conveniente. Estos mismos instrumentos servirán para evaluar el progreso en el post-test.

A lo largo de dos cursos escolares repite la experiencia en la que participaron 533 alumnos, manteniéndose y mejorándose los resultados en el segundo año del experimento. La autora graba el trabajo en parejas de los alumnos y analiza la trascripción de los protocolos, tanto desde el punto de vista de errores, como del progreso del aprendizaje.

Los niños que trabajaron en forma cooperativa mostraron un avance más claro, tanto en el desarrollo lógico, como en sus competencias estadísticas que sus compañeros. También encontró que es preferible formar parejas de alumnos heterogéneas en cuanto a sus capacidades y conocimientos y que esto beneficia no sólo al alumno que se encuentra en nivel inferior, sino también a su compañero.

La investigación muestra finalmente que el contenido estadístico causa dificultades a los alumnos, incluso cuando trabajan en parejas y en tareas no habituales. Aunque realizan las tareas, el aprendizaje es con frecuencia memorístico y no se llega a una comprensión profunda. La autora describe las estrategias y errores de los alumnos, algunos de los cuales hemos descrito a lo largo de esta exposición.

3.3. COMPRENSIÓN DE TABLAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Otro punto que interesa a nuestro trabajo es la comprensión de tablas y gráficos. En la sociedad actual nos enfrentamos a la necesidad de manejar grandes cantidades de datos para tomar decisiones, de ahí la importancia de la forma en que se presentan, a menudo mediante gráficos, y de saber interpretarlos adecuadamente y con sentido crítico para evitar confusiones o, incluso, posibles engaños.

Gal (2002) sugiere que la familiaridad con los gráficos y tablas y su interpretación es parte de la cultura estadística del ciudadano adulto, que debe ser capaz de leerlos, y tener familiaridad con las convenciones seguidas en su construcción. También debe darse cuenta que diferentes tablas o gráficos pueden dar una imagen distinta de los mismos datos, y que intencionalmente se puede distorsionar una tendencia en los datos con un gráfico.

La importancia de los gráficos dentro del análisis de datos es también resaltada por Ben-Zvi (2000), quien sugiere que: *"El análisis exploratorio de datos es la disciplina de organización, descripción, representación y análisis de datos, con una fuerte confianza en las herramientas analíticas y visuales. Su objetivo principal es dar sentido y buscar más allá de los datos para que, de esta manera, junto a la inferencia, se puedan explorar nuevos datos." (Pág. 130)*

Los profesores suponen a veces que estos conceptos son muy sencillos y dedican poco tiempo a su enseñanza. Sin embargo, elaborar una tabla de frecuencias o un gráfico supone, ya, una primera reducción estadística, pues se pierden los valores originales de cada uno de los datos individuales pasándose a la distribución de frecuencias. Este concepto es complejo, al referirse al agregado (población o muestra) y no a los datos particulares. Hay que tener también en cuenta que en una tabla o gráfico aparecen (o pueden aparecer) distintos tipos de frecuencias: absolutas, relativas, porcentajes y frecuencias acumuladas.

Por otro lado Tufte (1983) indica que los gráficos estadísticos han tenido una aparición histórica relativamente reciente, alrededor de 1750 cuando Playfair idea alguno de los gráficos estadísticos más populares, como el gráfico de barras, histograma, de sectores o de líneas. El resurgimiento de los gráficos es sobre todo obra de Tukey con su filosofía del análisis exploratorio de datos y la introducción de nuevos gráficos. Están apoyados en conocimientos matemáticos variados, como, por ejemplo, las coordenadas cartesianas. Asimismo requieren una diversidad de capacidades, visual- artística, estadística- empírica y matemáticas.

Autores como Pereira-Mendoza y Mellor (1990) defienden la necesidad de estudios centrados en el análisis de las dificultades con que se encuentran los estudiantes al manejar gráficos. La literatura acerca de este tema revela que, aunque la capacidad de los alumnos para leer gráficos va aumentando con los años de escolaridad, no ocurre lo mismo con su interpretación, construcción y realización de predicciones basadas en la información aportada por los mismos. Además, como indica Ponte (1991), el uso de ordenadores facilita la construcción de gráficos, pero no ayuda a su interpretación, por lo que parece necesario dedicarle la suficiente atención a este tema.

Reading y Pegg (1996), en una investigación centrada en la clarificación de lo que se entiende por "pensamiento estadístico", hacen un análisis de las respuestas de un grupo de estudiantes a dos tareas de respuesta abierta. En una de las tareas los datos se presentan sin agrupar, mientras que en la otra se dan mediante un gráfico. Los autores encuentran que hay dos pautas de razonamiento distintas y que la forma en que se presentan los datos tiene influencia sobre la elección del método de manejo de los mismos que se va a emplear. Parece que la comprensión de los datos es mejor cuando éstos se presentan sin agrupar, en lugar de hacerlo gráficamente.

Son escasas las investigaciones sobre la comprensión de estos tipos de frecuencias por parte de los alumnos, pero sí abundan las relacionadas con la comprensión de los gráficos cuyos resultados podrían también extenderse a las tablas estadísticas. A continuación hacemos un resumen de los mismos.

Teorías sobre niveles de comprensión de gráficos

La destreza en la lectura crítica de datos es una componente de la alfabetización cuantitativa y una necesidad en nuestra sociedad tecnológica, ya que encontramos tablas y gráficos en la prensa, comercio, así como en distintas asignaturas del currículo. Los gráficos pueden utilizarse para comunicar información y como instrumento de análisis de datos, así como para retener en la memoria una gran cantidad de información en forma eficiente (Cazorla, 2002). Además, las nuevas tecnologías posibilitan realizar gráficos estadísticos de modo rápido y eficaz. A continuación resumimos las teorías de diversos autores que han analizado la comprensión gráfica.

Más allá del conocimiento técnico necesario (por ejemplo, es necesario conocer los convenios de construcción de un gráfico de caja para poder leerlo), algunas investigaciones ponen de manifiesto la existencia de diferentes niveles de comprensión de gráficos y que no todos los alumnos alcanzan el nivel más alto.

En esta sección, analizaremos las dificultades más comunes que tienen los estudiantes a la hora de extraer información de un gráfico o de una tabla, los factores que inducen esas dificultades, y el conocimiento previo necesario en los alumnos para poder comprender las relaciones matemáticas que se expresan por medio de un gráfico, con objeto de estudiar la forma de mejorar la comprensión de estos objetos.

Bertin (1967) describe las siguientes etapas en el proceso de lectura de un gráfico:

- Identificación externa, a través de las etiquetas alfanuméricas o referentes conceptuales o del mundo real relativos a la información que transmite el gráfico.
- Identificación interna, referente a las dimensiones relevantes de variación en el contenido pictórico del gráfico y de las dimensiones visuales que corresponden a la variable conceptual y la escala.
- Percepción de la correspondencia, usando niveles particulares de cada dimensión visual para obtener conclusiones sobre los niveles particulares de cada escala conceptual.

A partir de ello define diversos tipos de preguntas posibles o niveles de lectura de un gráfico:

- Nivel elemental o de extracción de datos, cuando la información se refiere a la relación entre un elemento de un eje X y otro de un eje Y.
- Nivel medio o extracción de tendencias, cuando la información se refiere a la relación entre dos subconjuntos de datos que pueden ser definidos a priori y verbalmente o visualmente.
- Nivel superior, o comprensión profunda de la estructura de los datos, comparando tendencias o agrupamientos y efectuando predicciones.

Curcio (1987) revisa el trabajo de Bertin y a partir de él define tres tipos de elementos o factores que requieren conocimiento previo, a saber:

- Las palabras claves tales como el título del gráfico, las etiquetas de los ejes y de las escalas, son algunos puntos que requieren de un conocimiento previo para comprender las relaciones expresadas en el gráfico.
- El contenido matemático presente en el gráfico, tal como los sistemas numéricos

empleados, coordenadas cartesianas, áreas, longitud y las operaciones y relaciones fundamentales contenidas en él.

- La forma o el tipo de gráfico utilizado, tales como gráfico de barras, de líneas, pictogramas, etc. También es importante conocer las convenciones con las que se realiza el gráfico, para poder realizar una lectura correcta y poder realizar predicciones que se ajusten a la realidad.

Curcio (1989) describe tres niveles distintos de comprensión de los gráficos, que pueden aplicarse a las tablas y gráficos estadísticos y dependen de la complejidad de las tareas involucradas:

a) "Leer los datos": Este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo. Se refiere a la capacidad de leer las etiquetas y escalas del gráfico, comprender a qué se refieren y leer los valores representados. En una tabla de frecuencias sería leer los rótulos, valores de las variables y frecuencias que les corresponden.

b) "Leer dentro de los datos": Incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas. Por ejemplo, en un diagrama de barras sería la capacidad de determinar la moda, o comparar dos diagramas de barras de una misma variable en dos grupos. Ello supone la habilidad de comparación, además de la lectura del gráfico.

c) "Leer más allá de los datos": Requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico. Por ejemplo, en una nube de puntos sería estimar un valor de la variable dependiente para un valor de la independiente no incluido en el gráfico.

Encontró que las principales dificultades aparecen en los dos niveles superiores ("leer dentro de los datos" y "leer más allá de los datos"). También mostró el efecto de la edad y el curso escolar sobre la comprensión de los gráficos.

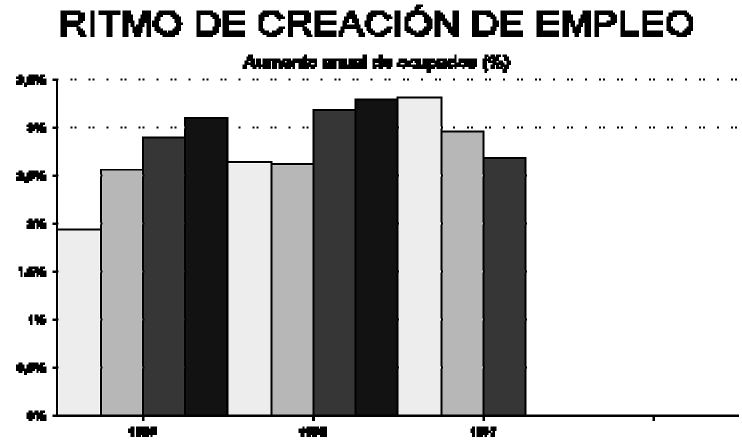
Una teoría relacionada con estos tres niveles de comprensión de gráficos es la de Wainer (1992). Este autor clasifica el tipo de preguntas que se pueden plantear a partir de un gráfico, en tres niveles:

- *Nivel elemental*. Preguntas relacionadas únicamente con la extracción de datos directamente del gráfico.
- *Nivel intermedio*. Preguntas relacionadas con la evaluación de tendencias basándose en una parte de los datos.
- *Nivel superior*. Preguntas acerca de la estructura profunda de los datos presentados en su totalidad, usualmente comparando tendencias y viendo agrupaciones.

Un ejemplo de estos niveles podría ser, sobre el gráfico de la figura 3.1, plantear preguntas del tipo: "¿Qué proporción de aumento de empleo se produjo en el 2º trimestre de 1996?", para el nivel elemental; "A lo largo de año 1996, ¿cómo ha evolucionado la creación de empleo?", para el nivel medio; y "Qué períodos de tiempo han sufrido la misma evolución en la creación de empleo?, para el nivel superior.

La base epistemológica de su formulación se basa en la distinción hecha por Peirce. Todas las cosas se pueden ordenar en mónadas, díadas y tríadas, es decir relaciones de primera, segunda y tercera clase. Las relaciones de primera clase consideran una sola cosa por sí misma, por ejemplo el color rojo. Las de segunda clase una cosa en relación con otra, por ejemplo una manzana roja. Las de tercera conectan dos cosas mediadas por una tercera, como una manzana cayendo de un árbol. Todas las demás relaciones se pueden reducir a estas tres, mientras que éstas son irreducibles una a las otras. Estas relaciones vienen a expresar una idea similar a la de los niveles de Wainer, de modo que las preguntas de nivel elemental se corresponderían con relaciones de primera clase, las de nivel intermedio con relaciones de segunda clase y las de nivel superior con las de tercera clase.

Figura 3.1. Gráfico de barras



Gerber, R. y cols. (1995) distinguen siete categorías sobre la comprensión de gráficos, que describen las diferencias en las habilidades de los estudiantes para interpretarlas.

Categoría 1. Los estudiantes no se centran en los datos, sino más bien en características idiosincrásicas de los mismos, que relacionan con su comprensión limitada del mundo de forma bastante imprecisa. No sólo tienen dificultades en interpretar el contenido de los gráficos, sino que son incapaces de procesar la información contenida en ellos de forma coherente.

Categorías 2 y 3. Se centran en los datos representados pero de forma incompleta. Se diferencian entre ellas en el foco de atención y en cómo se interrogan los datos. En la categoría 2 se centran en aspectos parciales de los datos, mientras que en la 3 se fijan en todo el conjunto, si bien en ambas aparecen dificultades para comprender el significado del gráfico.

En la categoría 2 no aprecian el propósito de cada gráfico. Por ejemplo en una pirámide de población interpretan las edades como distintos países en lugar de como propiedades de la población.

En la categoría 3 aprecian el propósito del gráfico pero no comprenden aspectos específicos que son clave para entender la representación. Los estudiantes describen porciones discretas de los datos, más que patrones y regularidades. No hacen una interpretación global.

Categorías 4, 5 y 6. Representan vistas estáticas de los gráficos, aunque aumenta la precisión de la información cualitativa extraída de ellos. Se diferencian en el proceso de obtención de la información.

En la categoría 4 se reflejan patrones que generan los gráficos. Si un gráfico representa varias variables, los estudiantes son capaces de analizarlas una a una, pero no en su conjunto. Si tienen varios gráficos los analizan de uno en uno, pero no son capaces de utilizarlos todos simultáneamente para obtener más información.

En la categoría 5 los gráficos representan relaciones entre varias variables y los estudiantes pueden hacer comparaciones centrándose en todas ellas y no en una sola.

En la categoría 6 los estudiantes usan los gráficos para apoyar o refutar sus teorías. Van más allá de buscar similitudes y diferencias y pueden usar distintos tipos de representaciones para apoyar las informaciones.

Categoría 7. Por último, aquí los estudiantes son capaces de hacer extrapolaciones. Por ejemplo, con la variable tiempo. Son capaces de ver tendencias a partir de los gráficos y hacer predicciones usando los datos presentados en ellos.

Todos estos trabajos son analizados, sintetizados y completados en Friel, Curcio y Bright (2001) quienes tratan de formular una teoría de la comprensión gráfica, partiendo de sus trabajos anteriores. Como señalan los autores, ha habido muchos estudios sobre lo que constituye en sí un gráfico, y hay una gran variedad de ellos. La idea es transmitir información mediante puntos, líneas o áreas en una superficie bidimensional. Lo común a los gráficos estadísticos es que de algún modo intentan representar cantidades (Wainer, 1992). El gráfico se compone de varios elementos estructurales:

- El *marco* del gráfico, que incluye los ejes, escalas, rejillas, marcas de referencia y proporciona información sobre las unidades de medida y los datos que se miden. El marco más sencillo es en forma de L, como por ejemplo en los gráficos de barras o diagramas de barra. Otros gráficos, como el de tallo y hojas usan marcos en forma de T, coordenadas polares, tri o multidimensionales.
- Los *especificadores* del gráfico son los elementos usados para representar los datos, como las barras (en el diagrama de barras) o los puntos (en el diagrama de dispersión). No todos los especificadores son igualmente sencillos de comprender. Los autores sugieren el siguiente orden de dificultad: Posición en una escala homogénea (gráficos de línea, de barras, de puntos, algunos pictogramas e histogramas); posición en una escala no homogénea (gráficos polares, gráficos bivariantes); longitud (gráficos poligonales o estrellados sin ejes de referencia, árboles), ángulo o pendiente (gráfico de sectores, discos), área (círculos, pictogramas), volumen (cubos, algunos mapas estadísticos), color (mapas estadísticos codificados mediante color).
- El título y las etiquetas son otros elementos importantes.

Aunque todos los gráficos tienen estos elementos, cada gráfico particular tiene su propio lenguaje, que el alumno debe conocer para poderlo interpretar y aquí reside una de las dificultades específicas de los gráficos estadísticos, que los convierte en objetos de enseñanza, en sí mismos, y no sólo en representación de otro objeto (la distribución).

Sentido gráfico

Analizando lo expresado en los párrafos anteriores, podemos deducir una relación estrecha entre la lectura tomada de un modo general y la lectura de un gráfico, por lo que podríamos tomar un gráfico como un objeto semiótico. Generalmente, cuando pedimos a nuestros alumnos que interpreten o realicen un gráfico, asumimos que ellos son capaces de realizar la traducción de la realidad al gráfico que la está representando o a la inversa, pero ellos no siempre son capaces de realizar en forma adecuada esta traducción debido a que en muchos casos tienen carencias en sus conocimientos previos o en su experiencia para construir e interpretar gráficos.

Pero, esta capacidad de interpretación puede ser construida de la misma manera que se construye la relación entre el significado de una palabra y su referente. Diversos estudios han mostrado que el gráfico, como la palabra, es un objeto semiótico independiente cuya relación con el fenómeno debe ser establecido a través de un largo proceso de trabajo. Algunos autores (Roth y McGinn, 1997; Wilensky, 1991; Ausubel y Novak, 1983) afirman que la capacidad para graficar y utilizar gráficos como dispositivos retóricos es una función de la experiencia, que se va desarrollando a través del tiempo.

Friel, Curcio y Bright (2001) sugieren que el *sentido gráfico* incluye la lectura de los gráficos, la consideración de qué implica su construcción como instrumentos para estructurar los datos y la elección óptima de un gráfico para la situación dada. El sentido gráfico se desarrolla gradualmente como consecuencia de crear gráficos y usar otros ya construidos en una variedad de tareas que impliquen la construcción de significado a partir de los datos. Organizan estos comportamientos en seis etapas:

1. Reconocer los componentes del gráfico, las relaciones entre sus componentes y el impacto de los mismos sobre la presentación de la información en un gráfico.
2. Usar el lenguaje del gráfico cuando se razona sobre información representada gráficamente.
3. Comprender las relaciones entre una tabla, un gráfico y los datos que se analizan.
4. Responder a los diferentes niveles de preguntas asociadas con la comprensión gráfica e interpretar información representada en un gráfico.
5. Reconocer cuando un gráfico es más útil que otro, en función del juicio requerido y de los datos representados.
6. Ser consciente de la propia relación con el contexto del gráfico, cuyo fin es la interpretación para dar sentido a lo representado en el gráfico y evitar la personalización de los datos.

Errores en tablas y gráficos

Li y Shen (1992) muestran ejemplos de elección incorrecta del tipo de gráfico en los proyectos estadísticos realizados por los estudiantes de secundaria. Algunos alumnos utilizaron un polígono de frecuencias con variables cualitativas, o un diagrama de barras horizontal para representar la evolución del índice de producción industrial a lo largo de una serie de años. Este problema se agrava por la disponibilidad de "software" para la representación gráfica y el desconocimiento del modo correcto en que debe ser empleado por parte de los alumnos. Con frecuencia la elección de las escalas de representación son poco adecuadas para el objetivo pretendido. Los autores incluyen, además, una lista de errores de carácter técnico entre los cuales destacamos los siguientes:

- Omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos.
- No especificar el origen de coordenadas.
- No proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes.

Otras veces, el empleo inadecuado del "software" gráfico se debe a las concepciones incorrectas del estudiante, como al obtener un diagrama de sectores en los que éstos no son proporcionales a las frecuencias de las categorías. Li y Shen indican que es de sentido común no comparar 30 sillas y 50 Kg de carne. Sin embargo, presentan un ejemplo de proyecto realizado por los alumnos sobre la industria textil en que se comparan cantidades heterogéneas en un mismo gráfico.

Como hemos indicado anteriormente, Estepa (1990) observa las dificultades de los alumnos al interpretar la gráfica de frecuencias acumuladas de variables discretas, debido a que presenta discontinuidades de salto y su inversa no es una aplicación: En esta correspondencia un punto puede tener más de una imagen, o varios puntos pueden tener la misma imagen.

Uso de gráficos en análisis exploratorio de datos

La posibilidad de usar ordenadores en el aula nos permite aplicar de forma más frecuente los gráficos y tablas, pero esto implica dos puntos muy importantes: Por un lado, se puede obtener muy fácilmente cualquier tipo de gráfico si tenemos un programa apropiado para hacerlo, pero por otro lado, no siempre se poseen las herramientas cognitivas necesarias para poder comprenderlos. Mientras que la construcción de un gráfico desde un determinado programa es sencilla, los alumnos podrían tener dificultades en elegir el tipo de gráfico adecuado, o bien no ser capaces de modificar las opciones por defecto e incluso tener dificultades en la interpretación del gráfico.

Ben-Zvi y Friedlander (1997) diseñan un currículo de estadística basado en el ciclo PCAI (Plantear, reColectar, Analizar e Interpretar) que ha sido descrito por diversos autores como componentes del razonamiento estadístico y utilizando una hoja de cálculo. Utilizan actividades estructuradas y proyectos estadísticos. Las primeras están basadas en situaciones problemáticas abiertas, en las que los estudiantes deben investigar aplicando el ciclo PCAI, están basadas en datos de la vida real y permiten introducir nuevos conceptos y métodos estadísticos mediante el trabajo en grupo de los alumnos. En los proyectos, también se trabaja en pequeños grupos investigando sobre la cuestión planteada por los estudiantes, quienes sugieren hipótesis, diseñan el estudio, recogen y analizan los datos, interpretan los resultados y obtienen conclusiones.

Durante la investigación se analizó el uso e interpretación de los gráficos, identificando cuatro categorías:

- *Uso acrítico:* Los estudiantes ignoran los modelos sugeridos por sus representaciones gráficas, relacionando solamente aspectos obvios o extremos. Los métodos estadísticos son percibidos como meras rutinas. Las opciones por defecto del software son aceptadas y empleadas de una manera acrítica, proporcionando, por lo general, información errónea.
- *Uso significativo de una representación:* Los estudiantes utilizan una herramienta gráfica o numérica apropiada y explican su elección. Generalmente, dicha elección está basada en aspectos intrínsecos, tales como el tipo de datos o el método que implica su pregunta de investigación. Son capaces de modificar y transformar sus representaciones, y a través de ellas, interpretan y justifican su pregunta de investigación e interpretan los resultados.
- *Manejo significativo de representaciones múltiples:* En este caso, los alumnos toman decisiones en la selección de gráficos, toman en consideración cuál es la contribución de éstos a su investigación y en consecuencia, realizan cambios en el análisis de datos. Éste incluye una gran variedad de métodos gráficos y numéricos e ilustran diferentes aspectos por múltiples representaciones. Realizan inferencias y los resultados obtenidos les sirven para organizar y reorganizar los datos.
- *Uso creativo:* Éste es el tipo menos frecuente, pero sucede cuando el alumno busca métodos de presentar y justificar sus ideas que no siempre son los más comunes, pero que expresan más claramente sus pensamientos.

3.4. OTROS CONCEPTOS

3.4.1. CARACTERÍSTICAS DE DISPERSIÓN

El estudio de una distribución de frecuencias no puede reducirse al de sus promedios, ya que distribuciones con medias o medianas iguales pueden tener distintos grados de variabilidad. Para Campbell (1974) un error frecuente es ignorar la dispersión de los datos cuando se efectúan comparaciones entre dos o más muestras o poblaciones.

Wild (1999) formula un modelo de pensamiento estadístico en base a cinco puntos: Fundamentos, modos de pensamiento, actitudes y disposiciones, cuestionamiento y técnicas. Las bases para un “pensamiento estadístico” se fundamenta en cuatro elementos: Tener en cuenta la variación, construcción y razonamiento sobre modelos, tener algún conocimiento básico tanto en el dominio estadístico como en el dominio del contexto y síntesis o integración. El pensamiento estadístico está basado fundamentalmente en la idea de variación; todo trabajo estadístico consiste en una serie de procesos interconectados de identificación, caracterización, cuantificación, control y reducción de la variación (Snee, 1990). Es por ello que cobran gran importancia las investigaciones sobre comprensión de la variación y dispersión.

Una medida de la dispersión en la desviación típica, que mide la intensidad con que los datos se desvían respecto de la media. Loosen y cols. (1985) hicieron notar que muchos libros de texto ponen mayor énfasis en la heterogeneidad entre las observaciones que en su desviación respecto de la posición central. Como señalan Loosen y cols. (1995), las palabras empleadas, como variación, dispersión, diversidad, fluctuación, etc. están abiertas a diferentes interpretaciones. Es claro para el profesor, pero no para el estudiante, cuándo estas palabras se refieren a una diversidad relativa a la media o en términos absolutos.

En un experimento, estos autores tomaron 154 estudiantes de primer curso de psicología, que no habían recibido ese curso una instrucción específica sobre la dispersión, mostrándoles dos conjuntos diferentes de bloques A y B. Las longitudes de los bloques en el conjunto A fueron 10, 20, 30, 40, 50 y 60 cm. y las longitudes de los bloques en el conjunto B fueron 10, 10, 10, 60, 60 y 60 cm.

Al preguntar a los sujetos cual de los dos conjuntos presentaba mayor variabilidad, se obtuvieron las siguientes respuestas: el 50% pensó que el conjunto A era más variable, el 36% que era más variable el conjunto B y el 14% que los dos conjuntos presentaban igual variabilidad. Loosen y cols. interpretaron estas respuestas como prueba de que el concepto intuitivo de variabilidad se equipara al de "no semejanza", es decir, cuánto varían unos valores respecto a otros, más que cuánto varían los valores respecto a un punto fijo. En este sentido el conjunto A ciertamente debe ser considerado mas variable que el B, aunque la desviación típica es mayor en el conjunto B.

Mevarech (1983) encontró en alumnos universitarios las mismas dificultades en el cálculo de la varianza que en el cálculo de la media. En particular, los estudiantes suponen que el conjunto de datos junto con la operación de cálculo de la varianza tiene una estructura de grupo.

3.4.2. RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Otro punto que según Green (1992) puede influenciar el razonamiento estadístico es el razonamiento proporcional, que se considera como uno de los componentes del pensamiento formal, adquirido en la adolescencia. Las nociones de comparación y covariación están en la base subyacente al razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de las ideas de razón y la proporción. El desarrollo incompleto del mismo en la adolescencia obstaculiza el pensamiento cuantitativo y su aplicación en álgebra, geometría, probabilidad y estadística.

Diversas investigaciones han mostrado, sin embargo, que la adquisición de las destrezas de razonamiento proporcional es insatisfactoria en la población en general. Estas destrezas se desarrollan mas lentamente de lo que se había supuesto; incluso hay evidencias de que una gran parte de las personas nunca las adquieren. No entraremos en un análisis completo del concepto, que iría más allá de los objetivos de nuestro trabajo, limitándonos a citar algunos de sus resultados más conocidos.

Los niños adquieren progresivamente la comprensión de la idea de fracción, a partir de sus diferentes significados, que no son todos igualmente sencillos de comprender para ellos. Entre estos significados tenemos (Cid, Godino y Batanero, 2003):

- La fracción como una parte de un todo: Una porción de una región sombreada respecto al total o un vaso no completamente lleno respecto a su capacidad. Este sería, por ejemplo, el significado de un percentil.
- La fracción como relación de una parte de elementos de un conjunto discreto respecto al total de elementos del conjunto. Por ejemplo la fracción de chicas en una clase o en el contexto de probabilidad, la probabilidad de obtener una bola negra en un conjunto de bolas blancas y negras.
- La fracción como resultado de una operación de dividir. Por ejemplo, dividir tres tabletas de chocolate entre 5 niños.
- La fracción como comparación del número de elementos de dos conjuntos distintos o de dos medidas. Por ejemplo la longitud de la mesa es 3/5 de la longitud de la pizarra. Este sentido aparece en las escalas de los gráficos estadísticos.
- La fracción como un número, como un punto en la recta numérica: El número 3/4 y su posición en la recta.

Cada una de estas ideas se va desarrollando progresivamente y ha sido estudiada en diferentes investigaciones. Progresivamente el niño las va adquiriendo y enriquece el significado que atribuye a las fracciones.

Desarrollo de la idea de fracción

Las primeras ideas de fracción como parte de un todo son de naturaleza geométrica e imprecisa. Un niño puede decir "*esta caja de cerillas está medio llena*" cuando, en realidad sólo quedan unas pocas cerillas en la caja. "Medio" es para el niño algo que no está completo, pero tampoco vacío.

En los experimentos de Piaget y cols. (1960) se pide a los niños dividir en partes iguales figuras de papel o arcilla, doblándolas o cortándolas para efectuar un reparto equitativo. Comienzan dividiendo en partes iguales o tercios figuras pequeñas y regulares para progresar poco a poco hacia tareas más complejas. En algunos casos los niños realizan estas tareas antes de comprender la idea de mitad, tercio y sexto aunque físicamente tengan dificultad en realizar la división de la figura en partes iguales.

Para comprender la relación parte-todo el niño debe entender que una región entera se puede dividir en partes, que el mismo todo se puede dividir en diferente número de partes iguales, y las partes de la partición agotan el todo, todas las partes son iguales; cada parte en si misma se puede considerar como un todo y el todo se conserva, aún cuando se haya dividido en partes.

Comparación de fracciones

La comparación de fracciones es un tema sobre el que se ha realizado una extensa investigación, partiendo del trabajo de Piaget e Inhelder (1951) quienes se interesan en cómo los niños comparan probabilidades. Un problema de comparación de probabilidades implica un problema asociado de comparación de fracciones. Según Piaget e Inhelder los niños avanzan en esta tarea siguiendo las etapas clásicas en su teoría.

En el *periodo de las operaciones concretas* los niños pueden resolver problemas que impliquen comparación de fracciones donde, bien el numerador o el denominador son iguales en ambas fracciones (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias). Posteriormente pasan a resolver problemas en que los términos de la fracción se pueden poner en correspondencia mediante una proporción.

Los adolescentes progresan rápidamente incluso cuando las fracciones a comparar tienen diferente denominador. Esto se observa con niños a partir de 12-13 años en incluso a partir de 10 años con la ayuda de la instrucción.

Los porcentajes y las proporciones aparecen frecuentemente en artículos de investigación relacionados con la discusión estadística. Conceptos fundamentales de estadística, desde la comparación de conjuntos de datos hasta el muestreo, se basan en consideraciones de proporcionalidad. La necesidad del razonamiento proporcional para la comprensión de muchas ideas estadísticas, por ejemplo, frecuencia relativa, porcentaje, percentil y sus rangos, sabiendo que éste es un concepto difícil en matemáticas y que se alcanza entrada la adolescencia.

Ilusión de linealidad

La fuerte presencia de la proporcionalidad en las aplicaciones de las matemáticas puede ocasionar también una concepción errónea, cuando los alumnos generalizan abusivamente y encuentran relaciones lineales y proporcionalidad donde no la hay. Esta creencia es analizada por De Bock y cols. (1998) en relación a una diversidad de dominios en aritmética, geometría, álgebra, probabilidad y física. Muestra que los alumnos tienen una tendencia a aplicar funciones lineales (en lugar de otro tipo de funciones) al resolver diversos tipos de problemas.

Estos autores sugieren que esta ilusión puede explicar algunas concepciones erróneas en probabilidad y estadística, tales como la “paradoja de los cumpleaños”, concepciones erróneas sobre las probabilidades binomiales e incluso la heurística de la representatividad.

3.5. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE LAS INVESTIGACIONES PREVIAS

En los apartados anteriores hemos tratado de clasificar y sintetizar las investigaciones relacionadas con nuestro trabajo. Incluso a pesar de lo resumido de la descripción, podemos observar la existencia de una gran variedad de dificultades y errores en relación a los conceptos estadísticos elementales. En una revisión de la literatura de investigación Garfield y Ahlgren (1988) enunciaron otras razones para explicar algunas de las dificultades surgidas en la enseñanza de los conceptos estadísticos:

- La diferencia fundamental entre la naturaleza de las matemáticas y de la estadística, ya que los estudiantes con frecuencia esperan una solución única a los problemas en lugar de la mayor creatividad necesaria en estadística.
- El énfasis que se da en la enseñanza a los cálculos estadísticos, con una menor preocupación por la comprensión conceptual.
- La existencia de intuiciones falsas que los estudiantes llevan a la clase de estadística y que no se tienen en cuenta en la enseñanza (las falsas intuiciones en estadística se han documentado y explorado menos que las de probabilidad).

Centrándonos en las investigaciones sobre comprensión de promedios, que hemos clasificado de acuerdo a nuestro marco teórico, este capítulo nos ha permitido observar que las investigaciones se han concentrado sobre aspectos puntuales y se centran preferentemente en la media.

Incluso para este concepto, la investigación sobre comprensión de las propiedades de la media no es completa, puesto que no se tienen en cuenta todas sus propiedades elementales de una forma sistemática, ni se diferencia entre propiedades numéricas, algebraicas y estadísticas. Los tipos de tarea son muy cerradas, salvo algunas excepciones. La mayoría de los autores han utilizado ítems de respuestas múltiples que pueden producir respuestas estereotipadas. En el caso de respuestas abiertas, el interés se ha centrado en definir niveles (4 o 6 niveles) de comprensión de los promedios, suponiendo que esta comprensión es un constructo unidimensional. Por tanto, la mejora en la comprensión de un elemento de significado (por ejemplo de una propiedad) automáticamente debería llevar implícita la mejor comprensión global de todos los demás elementos.

Pensamos que esta es una postura muy simplista, puesto que ya hace tiempo se han abandonados las teorías que asumían la transferencia en el aprendizaje de conceptos. Por otro lado no hay tampoco una investigación sistemática sobre comprensión de representaciones de los promedios o sus campos de problemas o sobre la capacidad argumentativa sobre los mismos.

Finalmente el rango de edad de estas investigaciones es muy variado, pero predominan las investigaciones con alumnos universitarios. Además el contexto escolar y cultural es muy diferente del de nuestros alumnos.

Todo ello nos lleva a concluir la necesidad de un estudio sistemático de evaluación de la comprensión de los promedios que tenga en cuenta los distintos elementos de sus significado y cómo los alumnos los usan y ponen en relación en tareas abiertas. Este es el objetivo de la investigación que abordamos en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 4.

ANÁLISIS CURRICULAR

4.1. INTRODUCCIÓN

El análisis de datos es un tema relativamente nuevo en educación matemática comparado con el álgebra o la geometría. Hasta hace pocos años, el trabajo significativo sobre estadística en las clases de secundaria no ha sido posible, los datos reales eran demasiado complejos y su análisis con medios tradicionales demasiado lento. El rápido desarrollo de los ordenadores ha dado ímpetu a la estadística aplicada, incrementado el énfasis puesto en el análisis de datos en los currículos.

Por otro lado, el interés por la formación estadística básica del ciudadano, independientemente de su profesión, clase social o nivel educativo ha aumentado en los últimos años. Como resalta Ottaviani (1999), los estadísticos sienten la necesidad de difundir la estadística no sólo como un conjunto de técnicas cuantitativas, sino también como cultura que proporciona la capacidad de sintetizar información sobre conjuntos de datos y guiar la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Es lo que se conoce como "statistical literacy" (que hemos traducido por cultura estadística).

Según Gal (2002) es la "*cultura que nos lleva a la imagen del subconjunto mínimo de habilidades básicas que esperamos de todos los ciudadanos en contraposición a un conjunto más avanzado de conocimientos y capacidades que sólo algunos pueden adquirir*" (p. 2).

Una vez descrito el significado institucional de referencia en el capítulo 2, hemos de delimitar una parte del mismo, que constituirá el significado local empleado en nuestro trabajo. Éste será usado para la construcción de los instrumentos de evaluación y la interpretación del trabajo de los estudiantes.

Para tener una base científica en la delimitación del significado local, hemos llevado a cabo un análisis curricular, que incluye un estudio del currículo tanto en España como a nivel internacional, así como un análisis de libros de texto. Este último nos servirá para determinar cuáles de los elementos de significado de referencia descritos en el capítulo 2 son efectivamente propuestos en los libros de texto.

4.2. PANORAMA INTERNACIONAL DE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

En primer lugar analizaremos la perspectiva de la enseñanza de la estadística en secundaria a nivel internacional. Starkings (1996) presenta algunos ejemplos de cómo ciertos proyectos de investigación en diversos países están contribuyeron a implantar este tema.

El proyecto Statistics en Canadá, citado por esta autora, ha producido un conjunto de materiales curriculares relacionados con el censo para informar a los estudiantes de los usos de los datos del censo y su importancia. Estos materiales se han preparado en los dos idiomas, francés e inglés y se han enviado a todas las escuelas, contribuyendo a aumentar el interés no sólo por la elaboración del censo, sino por la enseñanza de la estadística. Más recientemente, se han extendido estas experiencias en Inglaterra, Italia, U.S.A., Sudáfrica, Portugal y Reino Unido (Connor, 2002).

Vasco (1994) describe un proyecto de educación estadística en Colombia en el que participó, basado en el enfoque general de teoría de sistemas. El aprendizaje se inicia con el estudio de los sistemas de datos. En este contexto, la estadística en cualquier nivel se inicia a través del encuentro de los estudiantes con sistemas de datos de la vida real, en los cuales se deben investigar las relaciones existentes. Un sistema de datos tiene un autor y, por tanto, obedece a una intención y puede tener fallos. Los estudiantes deben indagar sobre la bondad de los datos, el uso que puede dárseles, la forma de resumirlos y las decisiones que pueden adoptarse a partir de ellos.

En Inglaterra y Gales, el Acta de Reforma Educativa estableció un currículo nacional por primera vez en 1988, que incluía un apartado especialmente dedicado al análisis de datos. En él no se considera aceptable el limitarse a enseñar a los alumnos a realizar cálculos sin que comprendan su finalidad, sino que la actividad debe ser para ellos significativa. Entre las habilidades que el estudiante debe adquirir, se encuentra la capacidad de comunicar e interpretar ideas estadísticas. Estas ideas fueron implementadas en proyectos como el Schools Council Project on Statistical Education, que desarrollaba un currículo basado en el trabajo sobre proyectos.

En el informe Cockroft (1985), también hay referencias expresas a la enseñanza de la estadística, tanto en la enseñanza primaria, como en la Enseñanza Secundaria. Para la enseñanza primaria la referencia en relación al apartado 239, sobre trabajo gráfico se dice que:

> “ *En los años de primaria ha de prestarse atención a los diversos métodos de representación gráfica de los datos matemáticos y de la interpretación de la información así presentada*" (p.106).

Mas adelante sugiere que además de dibujar gráficos, se ha de insistir en su interpretación. Además los niños deben representar relaciones matemáticas, y realizar juegos donde intervengan las representaciones.

En cuanto a la enseñanza secundaria, el Informe Cockroft hace referencia a la enseñanza de la estadística en varios apartados. Los contenidos los expresa bajo el epígrafe *Gráficas y Representación Pictórica*, incluyendo:

- *Recogida, organización y tabulación de datos.*
- *Construir, leer e interpretar gráficos y cuadros sencillos y extraer de ellos información específica.*
- *Extraer información presentada de forma tabular, por ejemplo, el coste de una llamada telefónica.*
- *Poder interpretar un diagrama de flujo sencillo.* (p.170)

Asimismo, bajo el título: *ideas estadísticas*, incluye los siguientes objetivos:

- *Fomentar una actitud critica ante las estadísticas presentadas por los medios de comunicación.*
- *Apreciar las ideas básicas de aleatoriedad y variabilidad; conocer el significado de la probabilidad y las apuestas en casos sencillos.*
- *Hacer hincapié en la importancia de la probabilidad en los hechos de la vida diaria y en los juegos de azar sencillos. En el caso de muchos alumnos, no será adecuado que emprendan ejercicios en que intervenga la probabilidad compuesta.*
- *Comprender la diferencia entre las diversas medidas de centralización y el fin para el que se usa cada una.*
- *Prestar atención a los diferentes usos de la palabra "promedio" que se hacen en los periódicos. No se pretende que todos los alumnos utilicen necesariamente las*

palabras media, mediana y moda (p.172).

Estándares del NCTM

En 1989, el National Council of Teachers of Mathematics, publicó los Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, que fueron seguidos por los Professional Teaching Standards en 1991 y los Assesment Standards en 1995. Por primera vez se definió con claridad el contenido de la estadística y probabilidad en los niveles K-12 (Burrill, 1996). Los Estándares Curriculares del N.C.T.M. proponen, para la Estadística, un tratamiento basado en el análisis de datos y en la experimentación por parte del propio alumno, especialmente en los niveles obligatorios de enseñanza.

Para los niveles 5-8 (10-13 años), el Estándar 10, dedicado a la Estadística, propone como objetivos a conseguir en esta etapa:

- *Recoger, organizar y analizar datos de forma sistemática.*
- *Elaborar, leer e interpretar tablas y diversas representaciones gráficas.*
- *Formular inferencias y argumentos convincentes que se basen en el análisis de datos.*
- *Evaluar argumentos que estén basados en el análisis de datos.*
- *Llegar a apreciar los métodos estadísticos como medios potentes en la toma de decisiones.*

Se da mucha importancia a que los estudiantes entiendan los conceptos y procesos usados para el análisis de datos, dado que su uso en la sociedad actual es cada vez más extenso tanto para realizar predicciones como para tomar decisiones. Así, pues, el trabajo de la estadística en las clases debe centrarse en la participación activa de los estudiantes en el proceso completo, desde la formulación de preguntas clave, pasando por la recogida, organización y representación de datos, análisis de los mismos y elaboración de conjeturas, hasta la comunicación de la información obtenida de una manera clara y precisa.

El uso de programas informáticos puede ayudar notablemente a la organización y representación de los datos. La tecnología hace que se pueda dedicar más tiempo a explorar la esencia de la estadística: El análisis de datos desde diversos puntos de vista, la formulación de inferencias y la construcción y evaluación de argumentos.

Se propone la utilización de gráficos de la caja como un buen medio de describir conjuntos de datos y mostrar, tanto valores medios y de posición, como variación entre ellos.

Para los niveles 9-12 (14-18 años), el Estándar dedicado a Estadística establece como objetivos los siguientes:

- *Asimilar y extraer inferencias a partir de diagramas, tablas y gráficas que recogen datos de situaciones de mundo real.*
- *Entender y aplicar medidas de centralización, dispersión y correlación.*
- *Analizar el efecto que producen las transformaciones en la variable estadística sobre las medidas de centralización y dispersión.*

A partir de aquí se han desarrollado diferentes proyectos curriculares, como el Quantitative Literary Project, o el desarrollado por el TERC con el nombre de "Used Numbers", que delinearon aún más los conceptos estadísticos que debían ser enseñados.

En estos proyectos, las exploración de los datos y la integración de las técnicas de análisis de datos para proporcionar diferentes modos de aproximar conceptos estadísticos es una tendencia común. Incluso en los primeros niveles se sugiere que los alumnos recojan sus propios datos. Hasta el grado 9 (14 años) hay poco uso de la tecnología. Para algunos cálculos se sugiere el uso de calculadoras científicas y sólo aparecen referencias ocasionales a los ordenadores. El análisis de datos se usa también para que los alumnos adquieran práctica en el cálculo numérico, por ejemplo, con fracciones o decimales.

Hay discrepancia respecto al nivel apropiado en el que debiera enseñarse la media. Su cálculo no suele iniciarse hasta el 6º nivel (11 años). Tareas más complejas, como calcular o estimar la media a partir de la representación gráfica de una distribución no se incluye hasta el nivel 9 (14 años). Aunque se hace bastante énfasis en la representación gráfica y el uso de sistemas múltiples de representación no se propicia, en general, la creatividad de los estudiantes para que produzcan sus propios datos.

A pesar de que la estadística puede considerarse a la vez un arte y una ciencia, ya que existen diferentes modos de expresar y reducir los datos, hay también un cuerpo acumulado de conocimiento sistematizado. Las técnicas de análisis de datos se basan en una ciencia que guía los procedimientos y en leyes generales que modelan el proceso de razonamiento. En los currículos se observa, sin embargo, casos de procedimientos incorrectos o incompletos y uso desmedido de la terminología, ignorando la ciencia soporte.

No se ha pensado bien, en general, el lugar del currículo donde introducir los conceptos. Por ejemplo, para el caso de la mediana se usa informalmente en el nivel 1 y se enseña en el nivel 2, en Everyday Mathematics; en grado 4 en Investigations; en grado 6 en Mathematics in Context y en grado 9 en Cove Plus.

El concepto de variabilidad, por otro lado, es prácticamente ignorado hasta el grado 9 (14 años), con un énfasis particular en el rango y los cuartiles. Rara vez se consideran, a la vez, las medidas de posición central y dispersión como pares de estadísticos resumen que, conjuntamente, ayudan a comprender la distribución y se hace poca referencia al concepto de valor atípico.

Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

En este nuevo documento la estadística y probabilidad se ven reforzadas y aparecen a lo largo del currículo en los diferentes niveles educativos. Para el nivel K-2 (5 años) propone que el currículo incluya experiencias con análisis de datos para que los alumnos sean capaces de:

- *Clasificar objetos de acuerdo a sus atributos y organizar datos sobre los objetos.*
- *Representar datos usando objetos concretos, dibujos y gráficos.*

Se indica que las actividades informales de clasificación y recuento pueden proporcionar un inicio de la comprensión y análisis de los datos por parte de los niños. Se les animará a plantearse preguntas, organizar las respuestas y crear representaciones para sus datos, así como a razonar y comprobar sus ideas comparándolas con los datos.

En los grados 3 a 5 (8-10 años) los niños deben ser capaces de:

- *Diseñar investigaciones para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de recogida de datos afectan al conjunto de datos.*
- *Recoger datos de observación, encuestas y experimentos.*
- *Representar datos en tablas, gráficos de línea, puntos y barras.*
- *Reconocer las diferencias al representar datos numéricos y categóricos.*
- *Usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos.*
- *Comparar distintas representaciones de los mismos datos y evaluar qué aspectos importantes del conjunto de datos se muestra mejor con cada una de ellas.*
- *Proporcionar y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos y diseñar estudios para estudiar mejor las conclusiones y predicciones.*

En los grados 6 a 8 (11-13 años) los alumnos deben ser capaces de:

- *Formular preguntas, diseñar estudios y recoger datos sobre una característica compartida por dos poblaciones o de diferentes características en una población.*
- *Seleccionar, crear y usar representaciones gráficas apropiadas, incluyendo histogramas, gráficos de caja y diagramas de dispersión.*
- *Encontrar, usar e interpretar medidas de posición central, incluyendo la media y el rango intercuartílico.*
- *Discutir y comprender la correspondencia entre conjuntos de datos y sus representaciones gráficas, especialmente los histogramas, tallos y hojas, gráficos de cajas y diagramas de dispersión.*
- *Usar observaciones sobre las diferencias en dos o más muestras para hacer conjeturas sobre las poblaciones de donde se tomaron las muestras.*
- *Hacer conjeturas sobre la posible relación entre dos características de una muestra a partir del diagrama de dispersión, aproximando una línea de ajuste.*
- *Usar conjeturas par formular nuevas cuestiones y planificar nuevos estudios para responderlas.*

En los grados 9 a 12 (14-18 años) los alumnos deben ser capaces de:

- *Comprender las diferencias entre varios tipos de estudios y qué inferencias pueden legítimamente deducirse de ellos.*
- *Conocer las características de los estudios bien diseñados, incluyendo el papel de la aleatorización en encuestas y experimentos.*
- *Comprender el significado de los datos cuantitativos y categóricos, de los datos univariantes y bivariantes y del término variable.*
- *Comprender los histogramas, gráficos de cajas paralelos y gráficos de dispersión y usarlos para representar datos.*
- *Calcular estadísticos básicos y comprender la diferencia entre estadístico y parámetro.*
- *Ser capaz de representar la distribución de datos continuos univariantes, describir su forma, seleccionar y calcular los estadísticos resumen.*
- *Ser capaz de representar datos continuos bivariantes, describir su forma y determinar los coeficientes de regresión, las ecuaciones de regresión y los coeficientes de correlación, con ayuda de la tecnología.*
- *Representar y discutir datos bivariantes cuando uno al menos es categórico.*
- *Reconocer cómo afectan las transformaciones lineales de los datos univariantes a su forma, posición central y dispersión.*
- *Identificar la tendencia en los datos bivariantes y hallar la función que modeliza los datos transformar los datos para que puedan ser modelizados.*
- *Usar las simulaciones para explorar la variabilidad de los estadísticos muestrales de una población conocida y para construir las distribuciones en el muestreo.*
- *Comprender cómo los estadísticos muestrales reflejan el valor de los parámetros poblacionales y usar las distribuciones en el muestreo como base para inferencias informales.*
- *Evaluar informes publicados que se basan en datos para examinar el diseño del estudio, la adecuación del análisis de datos y la validez de las conclusiones.*
- *Comprender cómo las técnicas básicas de estadística se usan para monitorizar procesos característicos en lugares de trabajo.*

En estos niveles se pretende que progresivamente los niños sean capaces de ver el conjunto de datos como un todo, describir su forma y usar las características estadísticas, como el rango y las medidas de tendencia central para comparar conjuntos de datos. Deben considerar que los datos son muestras recogidas de poblaciones mayores y llevar a cabo investigaciones y proyectos, considerando el ciclo: formular preguntas, recoger datos y representarlos.

Analizarán si sus datos proporcionan la información necesaria para responder sus preguntas. Podrían recoger sus datos o usar otros disponibles en la escuela o en la ciudad, por ejemplo, datos del censo o sobre el tiempo o datos disponibles en Internet. La experiencia con una variedad de gráficos les permitirá comprender los valores en los ejes horizontal y vertical, la utilidad de las escalas y cómo representar el cero en una gráfica. Deberían también usar software y ordenadores que les ayuden a representar un gráfico, por ejemplo, la hoja electrónica.

Como veremos, este currículo no sólo es más completo que el español, sino que presenta una metodología más activa en línea con las investigaciones recientes en didáctica de la estadística. Creemos que en España debieran tenerse en cuenta la directrices de países como Estados Unidos o Inglaterra que favorecen la enseñanza de la estocástica.

4.3. EL CURRÍCULO EN ESPAÑA.

En España, la situación de la estadística en la enseñanza obligatoria es la que se presenta a continuación. Las últimas reformas de la enseñanza no universitaria conceden una valoración altamente positiva a la estadística, dedicando un peso mayor a su estudio, bajo la influencia de otros currículos en países vecinos, así como de la sugerencia de diversos autores nacionales y extranjeros.

El Real Decreto de enseñanzas mínimas para la Educación Primaria (BOE. 26-Junio-91) establece como uno de los objetivos generales a conseguir:

6. Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

Este objetivo se desarrolla en el bloque de contenidos referido a la organización de la información, precisando lo referente a conceptos, procedimientos y actitudes.

Conceptos:

- Representación gráfica.
- Tablas de datos.
- Tipos de gráficos estadísticos.

Procedimientos:

- Exploración sistemática, descripción verbal e interpretación de gráficos sencillos.
- Recogida y registro de datos.
- Elaboración de gráficos con pocos datos.

Actitudes:

- Actitud crítica ante informaciones y mensajes gráficos y tendencia a explorar todos los elementos significativos.
- Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico como forma de representar muchos datos.
- Sensibilidad y gusto por las cualidades estéticas de los gráficos.

En cuanto a los criterios de evaluación, especifica:

10. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos del entorno.

11. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos y comprobar el resultado.

En Andalucía, el Decreto de Educación Primaria (BOJA. 20- junio-92), no aporta nada nuevo con respecto al correspondiente Decreto del M.E.C. Únicamente presenta ciertas recomendaciones en cuanto a la importancia y la orientación de este tema:

"La recogida, organización y presentación de datos así como la interpretación y las posibles predicciones basadas en los mismos, son conocimientos que tienen cada vez más importancia en nuestro medio lo que hace deseable su aprendizaje y utilización.

Ha de considerarse que las sencillas actividades estadísticas pueden representar para los alumnos de estas edades aplicaciones de las matemáticas al medio real, prestando significado al mismo, haciéndolo más inteligible. Al mismo tiempo representan ocasiones para la exploración matemática ya que implican la formulación de preguntas, conjeturas, la búsqueda de relaciones, la toma de decisiones sobre qué información hace falta y cómo obtenerla, etc."

El Real Decreto 1007/91 de 14 de junio (BOE. 26-junio-91) establece los aspectos básicos del currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Como objetivos generales del área de matemáticas, directamente relacionados con el tema que nos ocupa, establece los siguientes:

1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, utilizando técnicas de recogida de datos, procedimientos de medida, las distintas clases de números y mediante la realización de los cálculos apropiados a cada situación.

5. Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, y para representar esa información de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc., analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.

Entre los contenidos, presenta un apartado de *"Interpretación, representación y tratamiento de la información"* que incluye, como conceptos, el tratamiento de datos estadísticos, parámetros centrales y de dispersión; como procedimientos, la utilización e interpretación del lenguaje gráfico, la elección adecuada de parámetros, la detección de errores y la interpretación de datos relativos a una muestra estadística.

Por último, como criterios de evaluación para este tema sugiere que se valore la presentación e interpretación adecuadas de informaciones estadísticas. Con fecha posterior, el Real Decreto 1345/91 de 6 de septiembre (BOE. 13 de septiembre 91) establece definitivamente el currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, perfilando con mayor detalle las orientaciones anteriores.

Dentro de los objetivos generales de esta etapa educativa se proponen aquí los siguientes:

b) Interpretar y producir con propiedad, autonomía y creatividad mensajes que utilicen códigos artísticos, científicos y técnicos, con el fin de enriquecer sus posibilidades de comunicación y reflexionar sobre los procesos implicados en su uso.

c) Obtener y seleccionar información, utilizando las fuentes en las que habitualmente se encuentra disponible, tratarla de forma autónoma y crítica, con una finalidad previamente establecida y transmitirla a los demás de manera organizada e inteligible.

Los objetivos de área propuestos ahora coinciden con los descritos arriba correspondientes al Decreto 1007/91. En cuanto a los contenidos, ya aparecen orientaciones más precisas sobre las cuestiones a tratar. En el apartado de "Interpretación, representación y tratamiento de la información, especifica los siguientes contenidos sobre lo previsto con anterioridad:

- *Gráficas estadísticas usuales.*
- *Parámetros centrales y de dispersión como resumen de un conjunto de datos estadísticos.*
- *Algoritmos para calcular parámetros centrales y de dispersión sencillos.*

Con posterioridad, el Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre (B.O.E. de16/01/2001), viene a modificar el 1007/91 relativo al establecimiento de las enseñanzas mínimas correspondientes a la E.S.O. Con respecto a los objetivos, introduce uno nuevo que hace mención explícita a la Estadística:

7. Emplear los métodos y procedimientos estadísticos y probabilísticos para obtener conclusiones a partir de datos recogidos en el mundo de la información.

En cuánto a los contenidos, el tema de las medidas de tendencia central lo encontramos por primera vez en el curso segundo, haciendo referencia únicamente a la media aritmética y moda, y especificando, en los criterios de evaluación que los alumnos deben ser capaces de "*obtener e interpretar la tabla de frecuencias y el diagrama de barras así como la moda y la media aritmética de una distribución discreta sencilla, con pocos datos y utilizando, si es preciso, una calculadora de operaciones básicas".*

En Tercer curso los contenidos aparecen agrupados en bloques temáticos entre los que encontramos uno de Estadística y Probabilidad. Aquí sí se habla de parámetros de centralización, sin especificar ni descartar ninguno, mientras que en los criterios de evaluación se perfila más esta cuestión, mencionando explícitamente "*los parámetros estadísticos más usuales: moda, mediana y media aritmética"*.

En Cuarto curso se incluye como contenidos no sólo lo relativo al cálculo, sino que se especifica también la interpretación de los parámetros de centralización en distribuciones discretas y continuas, incorporando el uso de la calculadora.

El Decreto 106/92 de junio (BOJA. 20/6/92) establece las enseñanzas de Enseñanza Secundaria Obligatoria en Andalucía.

Según este Decreto, debido a la creciente importancia que vienen mostrando los medios de comunicación, se hace necesario que los alumnos y alumnas, a lo largo de esta etapa, se capaciten para interpretar la información emitida por ellos. Establece, pues, entre otros objetivos, el siguiente:

- *Utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en diversas situaciones de "la realidad".*

Se aclara además, que resulta imprescindible para desenvolverse en la sociedad actual, dominar procedimientos básicos como técnicas de recogida de datos y representaciones gráficas y numéricas de los mismos. Entre los contenidos relacionados con nuestro tema de estudio encontramos:

En el bloque 1 de números y medidas:

Profundización en la proporcionalidad de magnitudes empleando distintos tipos de *notación: decimal, fracción y porcentaje.*

En el bloque 2 de funciones y representación gráfica:

Lectura e interpretación de un fenómeno dado mediante una gráfica. Obtención de conclusiones cualitativas y cuantitativas sobre el fenómeno descrito.

En el bloque 5 de tratamiento de la información estadística y del azar:

Representaciones gráficas de las distribuciones de frecuencias a través de polígonos de frecuencia, histogramas, ..

Obtención de parámetros de centralización y dispersión.

Se indica como necesario la consideración de los problemas derivados de elegir, para representar un conjunto de datos, una de las medidas de centralización, y decidir cuál de ellas es la más adecuada a cada caso. Esta decisión debe ir apoyada en la interpretación exploratoria de datos además de en los parámetros de dispersión.

En la Orden de 28 de Octubre de l993, por la que se establecen criterios y orientaciones para la elaboración de Proyectos Curriculares de Centro, secuenciación de contenidos y distribución horaria de materias optativas en la Educación Secundaria Obligatoria, en el bloque de Tratamiento de la información Estadística y del Azar, se especifica que el manejo de datos, su organización, presentación, representaciones gráficas e interpretación, son actividades de gran importancia en nuestra época, fuertemente marcada por la información y la tecnologías. Por ello, los alumnos deben conseguir una cierta destreza en estas técnicas. Concretamente, se indica que los alumnos ser capaces de:

- *Interpretar informaciones que aparezcan en medios de comunicación.*
- *Comenzar a reconocer la dificultad de una toma de datos para propósitos estadísticos.*

Como recomendaciones de tipo metodológico, indica que no se debe trabajar únicamente en el dominio de técnicas, sino que en todo momento el alumno debe saber qué se está haciendo. Se deben proponer análisis de datos basados en diferentes medidas de centralización: media, mediana y moda. Además, la especial motivación que supone para estos alumnos los temas relacionados con el entorno, deportes, modas, etc, favorece la propuesta de investigaciones y estudios de tipo estadístico.

El Decreto 148/2002 de 14 de mayo, que modifica el anterior (Decreto 106/1992) y establece las enseñanzas correspondientes a la E.S.O. en Andalucía, insiste en la necesidad de la adaptación de los ciudadanos y ciudadanas a nuevas situaciones derivadas de la sociedad actual tan cambiante y su capacitación para recibir, procesar y emitir información cada vez más tecnificada. Desde esta perspectiva, indica, hay que cuestionarse qué conceptos y procedimientos matemáticos son potencialmente útiles para la formación integral de las personas y las demandas que la sociedad les plantea.

Entre los objetivos que plantea encontramos varios relacionados más o menos directamente con el tema objeto de nuestro estudio:

1. *Utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en diversas situaciones de la realidad.*
2. *Comprender e interpretar distintas formas de expresión matemática e incorporarlas al lenguaje y a los modos de argumentación habituales.*
3. *Reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser formulados en términos matemáticos, utilizar diferentes estrategias para resolverlos y analizar los resultados utilizando los recursos apropiados.*

Los contenidos, al igual que en el Decreto anterior, se relacionan agrupados por bloques temáticos, uno de los cuales es el de *Tratamiento de la información estadística y del azar*. Como cuestión general se indica, entre otras cosas, que:

- *El dominio de técnicas de cálculo irá acompañado de la expresión clara de lo que se está haciendo.*
- *Se propondrán análisis de datos basados en las diferentes medidas de centralización: media, mediana y moda.*

Este Decreto aporta unas orientaciones muchos más precisas que el anterior en cuánto a los contenidos y la forma de abordarlos, en concreto, para el curso segundo, donde aparece por primera vez en la etapa, contenidos concretos sobre las medias de centralización, señala:

- *Las medidas de centralización: media, moda y mediana. Se orientarán las intervenciones, más que a realizar cálculos reiterados, a reconocer la necesidad de este tipo de medidas y a indicar en qué sentido hay dependencia entre una descripción de los datos y el uso de una u otra medida. Al comparar tablas de datos con ayuda de las medidas de centralización se propicia la elaboración de conjeturas y la necesidad de establecer otros tipos de medidas que describan más adecuadamente la colección de informaciones disponibles. La posibilidad o no de calcular las diferentes medidas de centralización, a partir de tablas de datos, permitirá establecer distinciones entre los datos (cuantitativos y cualitativos, agrupados o no) y un acercamiento intuitivo a la noción de dispersión.*

En el curso de Tercero no se proponen contenidos de estadística, que se retoman en Cuarto, en las dos opciones A y B, comenzando con una revisión de lo anterior para continuar con las medidas de dispersión, por lo que las medidas objeto de nuestro estudio sólo se incluirían en esta revisión de lo tratado en Segundo y, por supuesto, en las relaciones e implicaciones que tienen en el tema de la dispersión.

En todos estos Decretos, salvo quizás en este último, se puede apreciar que queda sin precisar con demasiada exactitud qué enfoque dar al tratamiento de estos temas. No obstante, analizando los objetivos que se persiguen, el énfasis puesto en la interpretación de datos y gráficos y ciertas aclaraciones en cuánto a la utilización del análisis exploratorio de datos, se observa cómo este enfoque aparece por primera vez en las orientaciones curriculares de la Estadística en España.

En cuanto a los contenidos, es en esta etapa educativa, de 12 a 16 años, en la que está previsto que se trabajen los parámetros de centralización y las medidas de posición, que es el tema que nos ocupa, así como el análisis de conjuntos de datos, utilizando representaciones gráficas e interpretaciones de las mismas, cálculos de parámetros, obtención de conclusiones a partir de ellos, detección de errores en los datos, etc.

Respecto al Análisis de Datos, en nuestros currículos se hace una muy breve mención al tema, y no de manera demasiado explícita. Únicamente, en el Real Decreto 106/92 (BOJA de 20 junio 92) se indica, al tratar el tema de los parámetros de centralización: *"La valoración crítica del grado de representatividad del parámetro de centralización elegido, debe llevarse a cabo mediante la interpretación exploratoria de los datos y utilizando la información aportada por los parámetros de dispersión".* No obstante esta ausencia, en los libros de texto sí están empezando a aparecer contenidos relativos al Análisis de Datos: gráfico del tronco, gráfico de la caja, algunas de sus posibilidades en el estudio de conjuntos de datos, ...

4.4. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

4.4.1. INTRODUCCIÓN

Como hemos indicado al describir nuestro marco teórico, el significado de un concepto matemático varía según la institución considerada y los instrumentos semióticos disponibles en la misma. Al considerar la institución escolar, donde se fijan unos significados determinados para los conceptos a enseñar, el significado construido por un alumno en particular, en un momento de su proceso de aprendizaje, puede no corresponderse con el asignado por dicha institución. Por otro lado, tampoco el significado en una institución escolar, como por ejemplo, la enseñanza secundaria, se tiene que corresponder exactamente con el atribuido por la de los matemáticos profesionales.

En lo que sigue trataremos de caracterizar el significado que, de las medidas de posición central se presentan en los libros de texto destinados a la enseñanza secundaria, que tomaremos como *significado institucional local* para nuestro trabajo.

Describiremos, en primer lugar, los objetivos de este análisis, y la metodología seguida para llevarlo a cabo y a continuación los resultados encontrados, relativos a la forma en que se tienen en cuenta en los libros de texto los distintos tipos de elementos de significado que hemos descrito en nuestro marco teórico. Todo ello será utilizado en la construcción del cuestionario de evaluación, cuyo contenido estará basado en el significado institucional local que se contempla sobre las medidas de posición central en la enseñanza secundaria.

4.4.2. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO.

Objetivos del análisis y su interés

Como hemos indicado anteriormente, el objetivo principal de esta investigación es determinar qué dificultades encuentran los estudiantes de secundaria en su proceso de construcción de las medidas de posición central, media, mediana y moda. Está claro que estas dificultades están relacionadas con la enseñanza recibida y con el significado institucional de los conceptos que se ha mostrado al alumno. Por ello, las dificultades que queremos evaluar deben referirse a los problemas y tareas concretas que se proponen a estos alumnos, los algoritmos de cálculo y otras prácticas en la resolución del problemas, las representaciones, propiedades, definiciones y las validaciones presentadas.

Un objetivo importante es, por tanto, determinar el significado institucional que de las medidas de posición central se presenta en la enseñanza secundaria, que será luego comparado con los significados personales, determinados a través de los sistemas de prácticas empleados, tal y como se ha explicado en el marco teórico.

En el capítulo 2 hemos llevado a cabo un análisis epistémico y hemos presentado el *significado de referencia* que se da a las medidas de posición central desde la institución matemática y cursos universitarios de estadística, que no coincide exactamente con el de la institución de enseñanza secundaria.

En los apartados que siguen pretendemos caracterizar este último, mediante un análisis de los libros de texto, puesto que éstos constituyen uno de los recursos más utilizados en el aula y, por tanto, que más influyen en qué, cómo y durante cuánto tiempo se trabaja un determinado contenido con los estudiantes. Este análisis completará el estudio realizado sobre el currículo de secundaria.

Diversos autores señalan la importancia de este recurso didáctico: Por ejemplo, el informe Cockroft (1985) afirma que *los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula*, opinión que compartimos, desde nuestra experiencia docente.

Rico (1990) señala que el libro de texto es una herramienta mediante la cual el profesorado mantiene y transmite el saber institucionalizado, haciendo de puente entre éste y el estudiante, hasta el punto de que la carencia del mismo puede ser uno de los factores que hagan fracasar un intento de cambio de currículo. No obstante, apunta que, a veces, el esfuerzo para que los estudiantes se adapten al libro de texto llega a ser excesivo y que la imagen que presenta del conocimiento es algo estática. Coincidimos que el profesor en el aula utiliza otros recursos y suprime o añade contenidos a los presentados en los libros de texto. No obstante, el análisis de una muestra amplia y representativa de los libros nos da una idea bastante clara de lo que los alumnos reciben en la enseñanza.

Chevallard (1991) sugiere que los libros de texto presentan dos características importantes: Ofrecer una concepción legitimada del saber a enseñar e institucionalizar una forma de progresión del conocimiento de los estudiantes. Por otro lado, como afirman Robert y Robinet (1989), pensamos que el estudio de los libros de texto nos permite conocer, de manera indirecta, la concepción del profesorado sobre un contenido específico, puesto que al tomar la decisión de utilizar uno u otro texto, se está posicionando y compartiendo lo que éste propone.

Según Ortiz (1996, 1999), un libro de texto se considera como un segundo nivel de transposición didáctica, después del primer nivel que lo constituirán los currículos y programas oficiales. Si en un texto aparece un significado sesgado, éste puede llegar a transmitirse a los alumnos, debiendo el profesor que los usa mantener una permanente vigilancia epistemológica sobre el contenido de los libros de texto. En Ortiz y cols. (2000, 2002) se muestran ejemplos de estos problemas en relación a la enseñanza de la probabilidad.

Todos estos puntos nos han llevado a realizar el análisis que presentamos en este capítulo, que sigue el marco teórico y la pauta del trabajo de Ortiz (1999), aunque el análisis se realiza con menor profundidad. Tomando los elementos de significado institucional de referencia de las medidas de posición central, descrito en el capítulo 2, intentaremos caracterizar aquellos que aparecen con más frecuencia en una muestra de libros de texto de amplia difusión.

Muestra empleada

Para llevar a cabo el análisis, hemos tomado 22 libros de texto seleccionados, que incluyen entre sus temas contenidos relativos a estadísticos de posición central, media, mediana y moda, del segundo ciclo de la E.S.O. En concreto hemos tomado 14 libros de texto de 3º curso de E.S.O. y 8 libros de 4º curso de E.S.O. Los libros analizados se presentan en la tabla 4.4.2.1.

La selección de los libros se ha hecho teniendo en cuenta los cursos en los que se incluyen temas específicos que traten de las medidas de centralización en la Enseñanza Secundaria Obligatoria que son tercero y cuarto curso.

Aunque el currículo que se propone en Andalucía los contenidos relativos a los estadísticos que nos ocupan, media, mediana y moda, se deben trabajar en el primer ciclo de la E.S.O., y hacer una revisión en 4º, la mayor parte de las editoriales proponen estos temas en los libros de 3º y 4º de ESO, y más frecuentemente, en 3º, por lo que hemos incluido una muestra mayor de libros de este nivel. Debido a esto, nosotros nos hemos centrado en estos dos cursos, intentando incluir un abanico de editoriales que abarque las más conocidas y utilizadas entre los docentes, y también algunas obras recientes con un ámbito de difusión menor, pero que presentan un enfoque novedoso. Los libros han sido publicados entre 1994 y 1999 y corresponden a 17 editoriales diferentes, lo que creemos representa bien los libros de texto de este nivel escolar.

Tabla 4.4.2.1. Libros de textos incluidos en el análisis

Número	Título	Autores	Editorial	Edición
1	Matemáticas 3º ESO. Serie nuestro mundo	J. Colera, J.E. García, I. Gaztelu y M. J. Oliveira	Anaya	1998
2	Matemáticas 3º ESO	J. R. Vizmanos y M. Anzola	Sm	1996
3	Sigma. Matemáticas 3º ESO	J. R. Vizmanos y M. Anzola	Sm	1999
4	Matemáticas 3º ESO	V. Frías y otros	Edelvives	1995
5	Matemáticas 3º ESO. Proyecto Adara	I. Lazcano y J.F. Sanz	Edelvives	1998
6	Fractal. Matemáticas 3º ESO	F. Álvarez y A. Ruíz	Vicens Vives	1996
7	Educación Secundaria. Matemáticas 3º ESO	F. Alvarez y otros	Vicens Vives	1994
8	Matemáticas 3º ESO	A.J. Ramírez y otros	Ecir	1995
9	Matemáticas 3º ESO	Grupo Edebé	Guadiel	1998
10	Matemáticas 3º ESO	A. Miñano y J.A. ródenas	Bruño	1998
11	Matemáticas 3º ESO	J. M. Arias y J.A. pérez	Casals	1995
12	Matemáticas 3º ESO	C. González y otros	Editex	1998
13	Matemáticas 3º ESO	J.L. Sánchez y J. Vera	Oxford	1998
14	Matemáticas 3º ESO	J.F. Gutiérrez	Donostiarra	1996
15	Matemáticas 4º ESO. Opción A. Proyecto 2000	L. Rico y otros	Algaida	1994
16	Matemáticas 4º ESO. Opción B. Proyecto 2000	L. Rico y otros	Algaida	1994
17	Matemáticas 4º ESO. Opción A	C. Amigo y otros	McGraw-Hill	1997
18	Matemáticas 4º ESO. Opción A	J. L. Sánchez y J. Vera	Oxford	1998
19	Matemáticas A 4º ESO	J.M. Arias y otros	Casals	1996
20	Secundaria 2000. Matemáticas A 4º ESO	J.A. Almodóvar, J. Gil y A. Nortes Checa	Santillana	1998
21	Miríada XXI. Opción B. Matemáticas 4º ESO.	M. J. Ovejero y otros	McGraw-Hill	1999
22	Construir las Matemáticas 4º ESO	R. Pérez y otros.	Proyecto Sur	1999

Metodología del análisis

Para el análisis de los libros de texto, se han seleccionado aquellos capítulos en los que se tratan las medidas de centralización que nos ocupan y algunos otros conceptos relacionados con nuestro estudio, como son representaciones gráficas de conjuntos de datos, estadísticos de orden, como cuartiles, percentiles, etc., y medidas de dispersión.

Una vez hecha la selección de capítulos, se ha realizado un análisis de contenido de los mismos, en el que se han llevado a cabo los siguientes pasos:

- En primer lugar, se ha realizado una lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema, clasificando y agrupando las diferentes definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas e intentando determinar los elementos de significado que contienen: Campos de problemas, contextos, definiciones, algoritmos de cálculo, propiedades, etc. Todo ello como guía para establecer el significado que, desde la institución escolar, se da a estos conceptos.
- Para determinar los elementos de significado hemos partido del análisis epistémico presentado en el capítulo 2 que, como ya se ha dicho, constituye nuestro significado institucional de referencia y hemos ido determinando cuáles de ellos aparecen en los distintos libros de texto.
- Posteriormente, se han elaborado tablas comparativas que recogen los elementos de significado presentes en los diferentes textos en relación con cada contenido. Esta presentación de la información nos facilitará el análisis y la extracción de conclusiones al respecto, que se presenta a continuación.

El proceso de análisis ha sido inductivo y cíclico, como se recomienda en el análisis de datos cualitativo (Gil Flores, 1994; Huberman y Miles, 1994). Fueron necesarias varias lecturas, la elaboración progresiva de las categorías, la comparación de casos incluidos y excluidos en las mismas y la revisión sucesiva hasta llegar a los resultados que presentamos.

4.4.3. CAMPOS DE PROBLEMAS PRESENTADOS EN LOS LIBROS

Del análisis de los libros, hemos encontrado los siguientes tipos diferenciados de problemas, que en su conjunto definen el campo de problemas relativos a las medidas de posición central que se incluyen en ellos y que nos permiten determinar el significado institucional local de nuestro trabajo. A continuación describimos estos campos de problemas, así como los contextos en que se presentan, que permitirán hacerlos significativos a los alumnos.

Campos de problemas relacionados con la Media

PM1. Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores.

A pesar de que, como se ha descrito en el Capítulo 2, este es el campo de problemas del que surge históricamente la primera idea de media, en el análisis de libros de texto realizado, sólo hemos encontrado uno que presenta un ejemplo de este campo de problemas. Incluso en este caso, no se resalta específicamente que la media proporcione una solución a este tipo de problemas, ya que no se trata de un ejercicio resuelto, sino que sólo se presenta como idea subyacente en uno de los problemas propuestos para que resuelvan los alumnos, que reproducimos a continuación.

Hemos escogido 50 bolsas de pasta alimenticia en un supermercado. Todas ellas llevan impreso "Peso neto: 250 g" en la etiqueta. Después de pesarlas con precisión, hemos obtenido los siguientes resultados, expresados en gramos.

243	269	226	249	255	240	266	230	236	250
252	261	242	240	270	240	251	228	259	262
260	231	261	268	252	259	250	249	243	256
230	250	252	259	236	249	243	256	230	250
249	243	256	230	250	252	274	268	270	233

¿Qué peso podemos esperar que tenga una bolsa de pasta alimenticia de esta marca?

Matemáticas 3º ESO. Guadiel, Grupo Edebé, pg. 150

En este ejemplo, identificamos un caso típico de problema de estimación de una cantidad de una cierta magnitud, en presencia de errores de medida, que con frecuencia encontrarán los alumnos en el futuro, por ejemplo, al realizar las prácticas de física.

Pensamos que este tipo de problema debiera presentarse con mayor frecuencia en la enseñanza de las medidas de posición central, al ser comprensible para los alumnos de estas edades y porque permite construir la idea de media como mejor estimador de una cantidad desconocida. Esta es una idea muy potente que es utilizada con frecuencia en diferentes modelos estadísticos, por ejemplo, cuando los alumnos estudien la regresión lineal, que se incluye en el currículo de Bachillerato.

PM2. Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme

Al contrario que en el caso del problema anterior, la idea de media como reparto equitativo la hemos encontrado en casi todos los textos estudiados, en concreto en 18 de los 22 libros que hemos analizado. La idea de distribución uniforme no aparece de forma explícita, es decir, no se alude explícitamente a esta propiedad de la media.

Sin embargo, en algunos problemas en los que se debe calcular la media de un conjunto de datos está implícita la idea de uniformar los valores de una variable. A continuación transcribimos uno de estos ejemplos, en el que también se pide a los alumnos decidir, entre la media, mediana y moda, cuál sería el mejor representante de un conjunto de datos.

El comercio

En un pequeño comercio hay cinco empleados cuyos sueldos mensuales son: 80000, 80000, 80000, 100000 y 400000 pesetas.

a) Halla la moda y la mediana e interprétalas.
b) ¿Cuánto cobran entre todos los empleados al mes? Si esta cantidad se repartiera por igual, ¿cuánto cobraría cada uno? ¿Alguno de ellos cobra este sueldo medio?
c) ¿Qué valor de los tres: moda, mediana o media, crees que representa mejor los sueldos de los empleados de este pequeño comercio?
d) ¿Cuál es el mayor sueldo? ¿Y el menor? ¿Cuál es la diferencia entre estos dos valores?

3º Matemáticas. Secundaria. Edelvives, pg.328

PM3. Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados cuya distribución es aproximadamente simétrica

Estos problemas son los que más frecuentemente hemos encontrado en los textos analizados, no *sólo porque están presentes en todos ellos, sino porque es muy alta la frecuencia de aparición en los ejemplos y problemas, tanto resueltos como propuestos. Es por ello que creemos que esta es la principal aplicación que se presenta de la media, como número que representa un conjunto de datos, e incluso en muchos casos se presenta explícitamente. Reproducimos un ejemplo a continuación, en el que, incluso explícitamente se alude a que la media proporciona una solución para esta clase de problemas.*

Un alumno ha obtenido en cinco exámenes las siguientes calificaciones: 5, 7, 6, 7 y 9. La nota media se calcula así:

$$\text{Nota media} = \frac{5+7+6+7+9}{5} = 6.8$$

La media resume la trayectoria escolar en un solo dato: -6.8-; y en ello estriba su ventaja.

Fractal 3. Matemáticas. Vicens Vives, pg. 260

PM4. Estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica.

A pesar de que esta es una de las principales aplicaciones de la media y que los alumnos de esta edad podrían perfectamente entenderlo, no hemos encontrado un texto que haga referencia a esta situación. Pensamos que los libros de texto podrían presentar ejemplos de este campo de problemas, en contextos tales como la esperanza de vida, tiempo esperado para realizar una tarea, u otros similares.

Campos de problemas relacionados con la Moda

Asimismo, hemos analizado los libros de texto, para identificar cuáles son los campos de problemas que se presentan en relación a la Moda, identificando los que describimos a continuación.

PMO1. Obtener un valor representativo de una colección de datos en situaciones en las que lo que interesa fundamentalmente es el valor dominante del conjunto

En este caso el elemento más representativo es el más frecuente. Podemos afirmar que éste es el campo de problemas más frecuentemente tratado en los textos, con respecto a la moda. Aparecen en 17 de ellos, lo que hace suponer que se considera que ésta es su principal funcionalidad. A continuación reproducimos uno de los ejemplos, en el que se está dando la definición de moda usando esta característica.

Al preguntar a 12 alumnos cuántas horas dedican semanalmente a la práctica de algún deporte, éstos respondieron: 2, 3, 5, 1, 2, 4 ,3, 2, 1, 0, 1, 2.

- Construye la tabla de frecuencias absolutas con estos datos
- ¿Cuál es el valor de la variable que se repite más veces?

El valor con mayor frecuencia absoluta y, por tanto, el que más veces se repite es 2. Diremos que 2 es la moda de esta distribución.

Matemáticas 3. ESO. Guadiel, grupo edebé, pg. 144

PMO2. Encontrar el valor representativo en datos cualitativos.

Hay muchas colecciones de datos cualitativos en los que el único parámetro de tendencia central que se puede calcular es la moda y esta es una de las principales utilidades de la moda como valor central.

Sin embargo, sólo en la mitad de los libros de texto analizados hemos encontrado este tipo de problemas. Por tanto, esta ventaja de la moda frente a la media y la mediana, pasa desapercibida en el resto de los libros. Uno de los ejemplos encontrados se incluye a continuación, aunque la idea de representatividad no está explícita, sino implícita.

> En unas elecciones para delegado de curso se presentan 4 candidatos con los siguientes resultados:
>
> | | Juan | Nuria | Susana | David |
> |---|---|---|---|---|
> | Votos | 3 | 5 | 18 | 4 |
>
> Al tratarse de una variable cualitativa, podríamos afirmar que en esta votación "ha estado de moda Susana".
>
> Mo = Susana
>
> 3 Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria. Bruño, pg.252

Campos de problemas relacionados con la Mediana

En relación con la Mediana, hemos identificado en los libros los campos de problemas que describimos a continuación.

PME1. Encontrar un resumen estadístico de posición central, en situaciones en las que la media o no es suficientemente representativa.

La mediana es preferible a la media en determinadas situaciones, como cuando el conjunto de datos presenta valores extremos. No obstante, sólo hemos encontrado ocho libros de texto que contemplen este tipo de problemas en los que el parámetro más adecuado es la mediana.

Pensamos que ello puede contribuir a que el alumno se forme la idea falsa de que podemos utilizar la media como medida de posición central en cualquier circunstancia; o bien que piense que la media no se ve afectada por los valores atípicos.

A continuación presentamos un ejemplo de este campo de problemas.

> Hay distribuciones para las que la media no sirve como resumen representativo de las mismas. Entonces, es preciso buscar otros parámetros que las representen. Esto haremos para la siguiente situación.
>
> - Los sueldos mensuales de los trabajadores de una empresa son los siguientes (en miles de pesetas):
>
>   80 80 80 80 80 100 100 200 340 450 500
>
> La media de todos ellos es de 190.000 ptas. Este sueldo medio no representa bien a los de la lista anterior, fíjate en que hay nada menos que siete sueldos mucho más bajos que la media; sin duda, los cinco trabajadores que ganan 80.000 ptas. no estarían muy de acuerdo en ser representados por el sueldo medio.
>
> En estos casos es mejor utilizar la mediana para resumir la distribución. La mediana es igual a 100.000 ptas.
>
> Matemáticas·4 Opción A. McGraw-Hill, pg 192

PME2. Encontrar un resumen estadístico de posición central, para variables ordinales

Respecto a las variables ordinales, hay que tener en cuenta que una variable categórica no corresponde a una escala de medida de intervalo o razón. Por tanto es siempre más adecuado usar la mediana como medida de posición central para este tipo de casos.

Este tipo de problemas responde a una de las definiciones dadas de la mediana, lo que puede explicar la alta frecuencia de aparición en los libros de texto. En concreto, en 17 del total analizado hemos encontrado ejemplos similares al siguiente:

Sondeo de opinión
Se ha realizado una encuesta a un grupo de alumnos y alumnas sobre la realización de actividades deportivas en su Centro de Enseñanza por la tarde y el resultado ha sido el siguiente:

Opiniones	f_i	*Porcentaje*	*Porcentajes acumulados*
Totalmente de acuerdo	*20*		
De acuerdo	*12*		
Indiferente	*7*		
En desacuerdo	*7*		
Totalmente en desacuerdo	*5*		

a) Completa la tabla.
b) Halla la mediana y la moda de esta distribución.
c) Fíjate en la columna de los porcentajes acumulados y observa la modalidad que corresponde al 50%. ¿Qué observas? ¿Te sirve esta columna para calcular la mediana?
d) Di si te parece cierta la afirmación: el 50% o más de la población está por lo menos de acuerdo. Razona tu respuesta.

3º Matemáticas Secundaria. Edelvives, pg.324

PME3. Efectuar comparaciones de datos usando gráficos como el de la caja

Otro de los problemas frecuentes a la hora de trabajar con datos es el de comparar dos conjuntos de ellos con respecto a la misma característica. El gráfico de la caja es una herramienta muy útil en estos casos y la mediana es uno de los parámetros más significativos para ello. Sin embargo, sólo dos de los libros de texto analizados tratan este tipo de problemas.

Calcula la mediana de la variable macroeconómica "producción en el sector primario" de las provincias de la España húmeda (Asturias, Cantabria, Galicia y País Vasco). Compárala con la mediana de la misma variable en las Comunidades de Castilla-La Mancha y Castilla-León. ¿Qué variaciones encuentras? Justifica las diferencias encontradas.

Matemáticas 4º. Opción A. Proyecto 2000. Algaida, pg.192

Conclusiones sobre los campos de problemas presentados

En la tabla 4.4.3.1. hacemos un resumen de la aparición de los campos de problemas analizados en los diferentes libros de texto.Como podemos ver en la tabla, hay algunos campos de problemas que apenas aparecen en los libros de texto, a pesar de su importancia y de que podrían ser fácilmente comprensibles por los alumnos.

En el caso de la media, es curioso observar cómo el problema del que surge la primera idea de media, estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores, no aparece más que en uno de los libros analizados, punto que nos ha llamado la atención porque no creemos que pueda presentar una dificultad especial en los estudiantes de estas edades.

Tabla 4.4.3.1. Campos de problemas que presentan los libros analizados

	Libros de texto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
CAMPOS DE PROBLEMAS	PM1																				×		
	PM2				×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×			×	×	×		×	×
	PM3	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×		×	×
	PM4																						
	PME1	×			×		×	×			×	×						×		×	×		×
	PME2	×	×	×	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×	×	×		×	
	PME3															×	×						
	PMO1	×	×	×		×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×		×		×	×	×
	PMO2	×			×		×				×	×	×	×				×		×		×	

No ocurre así con el último campo de problemas relativo a la media, PM4. En este caso, el tener que estimar un valor de máxima probabilidad en un conjunto presenta una doble dificultad, por un lado los estudiantes no están habituados a efectuar estimaciones y por otro, la probabilidad también es un concepto que les resulta difícil. No obstante, aunque no se presentasen como problemas, creemos que sería adecuado presentar algunos ejemplos de aplicación de la media en este tipo de problema, por ejemplo, al hablar de la esperanza de vida o de la duración estimada de un examen o de una lámpara.

En cuánto a la mediana, hay que destacar el poco uso que se hace de ella en los libros de texto para efectuar comparaciones de conjuntos de datos, siendo como es éste un aspecto de la mediana que, creemos, sería positivo explotar al realizar análisis exploratorios de datos. Por otro lado, encontramos que se presenta con mayor frecuencia la mediana como estadístico útil para variables ordinales que cuando la media del conjunto no es demasiado representativa. Creemos que se está desaprovechando un aspecto de la mediana que puede ayudar a los estudiantes a entender la oportunidad de usar una u otra medida de centralización para representar un conjunto de datos.

Para la moda, los dos campos de problemas, aparecen prácticamente con la misma frecuencia, sin que haya diferencias significativas entre uno y otro.

Contextos presentados

Las situaciones de tipo aleatorio tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Puesto que la estadística es un tema en el que es fácil conectar con el entorno y la vida cotidiana de los estudiantes, pensamos debiera aprovecharse esta oportunidad, siguiendo las recomendaciones actuales sobre la enseñanza de la estadística.

Si queremos que los alumnos aprecien la utilidad de este tema, sería necesario presentar una variedad de contextos de aplicación y situaciones en las que los parámetros de centralización pueden resultar muy útiles a la hora de obtener información acerca de un tema concreto. Para valorar hasta qué punto se tiene esto en cuenta, se ha realizado un análisis de los contextos en los que se presentan los problemas y ejercicios en los libros de texto, así como las aplicaciones de los estadísticos que nos ocupan.

En la tabla 4.4.3.2 se muestran los contextos y su aparición en los libros de texto analizados. En nuestra opinión los autores de los libros analizados son conscientes de este punto, puesto que los contextos que hemos encontrado en los libros son muy variados y, además, todos ellos presentan un porcentaje alto de aparición. Estos libros no se limitan a los juegos de azar o a situaciones escolares y familiares, sino que también se incluyen aplicaciones al mundo físico (fabricación industrial, meteorología), biológico (características escolares, salud), social (encuestas de opinión, deporte) y político (economía, consumo). Es decir, se tienen en cuenta los cuatro grandes grupos de aplicaciones de la estadística citados por Tanur (1992).

Tabla 4.4.3.2. Contextos que presentan los libros analizados

TEXTOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Cont-1. Situaciones escolares	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×	
Cont-2. Características corporales	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Cont-3. Deporte	×	×	×	×	×		×	×	×	×		×	×	×			×	×	×		×	×
Cont-4 Economía salarios	×			×	×	×	×	×		×	×	×		×	×	×	×					×
Cont-5 Consumo, precios, ...	×			×	×	×	×		×	×	×									×	×	×
Cont-6. Juegos		×	×	×										×							×	
Cont-7. Tráfico	×	×		×				×		×	×	×		×			×	×				
Cont-8. Meteorología		×	×	×	×		×		×	×	×	×			×	×	×				×	×
Cont-9.Salud		×	×		×						×	×									×	
Cont-10. Fabricación industrial		×	×	×	×	×	×		×	×		×			×	×	×	×				×
Cont-11. Ocio			×	×	×			×			×			×			×				×	
Cont-12. Sondeos de opinión				×		×				×							×					
Cont-13. omposición familias	×	×	×	×			×	×	×	×			×	×	×	×	×		×		×	

4.4.4. ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS PARA LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS.

En segundo lugar hemos analizado los diferentes algoritmos de cálculo que se presentan en los libros para cada uno de los tres resúmenes estadísticos, comparando con los descritos en nuestro análisis epistémico previo (significado de referencia).

La mayoría de las situaciones problema anteriores se presentan en los textos mediante ejemplos resueltos en los que se utilizan diversas técnicas específicas para el cálculo de los promedios o para la representación gráfica de los datos, que el alumno debe aprender. En esta sección se presenta un análisis de las mismas como elementos actuativos que se ponen de manifiesto al tratar de resolver los problemas y que son, asimismo, objeto de enseñanza.

Los libros de texto analizados presentan las técnicas concretas para resolver las situaciones planteadas, bien de forma explícita incluyendo ejemplos resueltos, o bien dando únicamente indicaciones para que sean los propios estudiantes quienes realicen las tareas en problemas propuestos.

El cálculo de los estadísticos estudiados depende de la forma de presentación de los datos y del tipo de variable que se maneje. Este aspecto se tiene en cuenta en la mayoría de los textos analizados, que diferencian, explícitamente, unos casos de otros.

Cálculo de la Media

En todos los libros analizados aparecen explícitamente como objeto de enseñanza las técnicas para el cálculo de la media. Además, en la mayoría de los libros se dedica al cálculo de la media una extensión mucho mayor que a otros aspectos, lo que nos hace pensar que es uno de los puntos a los que se le concede más importancia. En todos los libros se presentan los tres casos siguientes:

AM1. Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados

En todos los libros se presenta el algoritmo de cálculo para valores aislados, que consiste en la suma de todos los valores, dividiendo por el número de datos. Generalmente se introduce con una notación sencilla, sin emplear símbolos algebraicos, como en el caso siguiente:

> Se quiere estudiar el efecto secundario que tiene la vacuna contra la meningitis. Para ello se toma la temperatura a cuatro niños. Los resultados obtenidos, en grados, son los siguientes:
>
> $$\bar{x} = \frac{37{,}1° + 36{,}5° + 38° + 37°}{4} = 37{,}15°$$
>
> 3º Matemáticas. Edelvives. Proyecto Adara, pg. 236

AM2. Cálculo de la media de una variable discreta con datos presentados en tablas de frecuencias

En este caso, se precisa aplicar el algoritmo de cálculo de la media ponderada, y el alumno debe identificar y discriminar los valores de la variable y los de las ponderaciones. Los libros presentan este algoritmo, justificándolo como modo de simplificar los cálculos, como se muestra en el ejemplo siguiente:

Como la muestra tomada es muy pequeña, el grado de fiabilidad de los resultados es muy bajo. Por este motivo realizamos otra observación en una muestra mayor y encontramos el resultado de la tabla:

Temperatura x_i	Nº de niños f_i
37º	2
37,5º	4
38º	6
38,5º	4
39º	2

Con el fin de facilitar el cálculo podemos multiplicar cada valor de la variable estadística por su frecuencia absoluta correspondiente, sumar los resultados y dividir por el tamaño de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{37 \cdot 2 + 37{,}5 \cdot 4 + 38 \cdot 6 + 38{,}5 \cdot 4 + 39 \cdot 2}{18} = 38°$$

3º Matemáticas. Edelvives. Proyecto Adara, pg. 236

En otros casos, como el que reproducimos a continuación, la tabla de frecuencias está sólo implícita, pero se presenta el algoritmo de cálculo de la media ponderada, para simplificar los cálculos.

Ejercicio resuelto
La media de 4 números es 5,4. La media de otros 6 números diferentes es 4,3. Encuentra:
a) Cuánto suman los 4 primeros números.
b) Cuánto suman los otros 6 números juntos.
c) La media de todos los números juntos.

a) Si la media de 4 números es 5,4, la suma total de los 4 números es 5,4·4=21,6.
b) Si la media de los otros 6 números es 4,3, la suma total de los 6 números es 4,3·6=25,8.
c) La suma de los 10 números es 21,6*25,8=47,4. La media de todos los números es 47,4/10 = 4,74.

Matemáticas 3 secundaria. S.M. pg.269

AM3. Cálculo de la media de una variable continua o discreta con datos agrupados en intervalos de clases

Todos los libros presentan este caso y sugieren la sustitución del valor de la variable para cada uno de los datos por la marca de clase, ya que el valor de los datos no se conoce con exactitud. El cálculo se realiza usando el algoritmo de cálculo de la media ponderada, aunque generalmente no se hace alusión a que el valor obtenido de esta manera es aproximado, como vemos en el ejemplo que reproducimos a continuación:

En el caso de que la variable sea continua, la media se calcula a partir de la marca de clase o valor medio de cada intervalo.
Ejemplo
Se están estudiando las precipitaciones caídas en España en un determinado mes. Para ello se registran los litros por metro cuadrado caídos en diferentes provincias.

Litros por metro cuadrado	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
c_i	15	25	35	45	55	65
Nº de provincias	4	2	3	1	2	1

La precipitación media la calcularemos de la siguiente forma

$$\overline{x} = \frac{15\cdot 4 + 25\cdot 2 + 35\cdot 3 + 45\cdot 1 + 55\cdot 2 + 65\cdot 1}{13} = 33{,}5\,l/m^2$$

3º Matemáticas. Edelvives. Proyecto Adara. pg. 236

AM4. Cálculo gráfico

Al contrario de lo que sucede con las técnicas anteriores, el cálculo de la media de un conjunto de datos apoyándose en un diagrama de frecuencias acumuladas no se ha encontrado en ningún libro de los estudiados. Es posible que los autores tengan en cuenta la dificultad que para los estudiantes supone añadir la lectura de gráficos al cálculo de la media.

AM5. Cálculo con calculadora u ordenador

Algo más de la mitad de los libros de texto analizados hacen referencia a la posibilidad de hallar parámetros estadísticos como la media utilizando una calculadora científica y de ellos, todos salvo uno, muestran además la forma de hacerlo, generalmente mediante algún ejemplo.

En el resto ni siquiera se hace referencia a esta función de las calculadoras. Como ejemplo podemos ver el siguiente:

2. La calculadora

También se puede usar la calculadora para la obtención de la media y la desviación típica. Cada modelo de calculadora tiene una nomenclatura y unos procedimientos propios. Lee con atención las orientaciones que te damos a continuación e investiga en tu calculadora cómo se realizan las funciones que describimos a continuación e investiga en tu calculadora cómo se realizan las funciones que describimos. Para ello consulta el manual o pregunta a tu profesor o profesora.

La llamadas calculadoras científicas suelen tener funciones estadísticas. Se reconocen porque, bajo o encima de algunas teclas, tienen anotaciones del tipo:

$$\sum x \ , \ \sum x^2 \ , \ \bar{x} \ , \ \sigma_n$$

¿Cómo se pueden utilizar para calcular la media y la desviación típica a partir de una tabla de frecuencias? Veámoslo:

- Procura que la calculadora se encuentre en disposición de efectuar cálculos estadísticos. En tal caso suele presentar en la parte superior de la pantalla la notación SD. En cada modelo, estos se consigue de un modo distinto.
- Para realizar los cálculos de un trabajo nuevo hay que asegurarse que no se tienen datos de otro en memoria. Para ello se pulsa la tecla **n** . Si sale 0 en la pantalla, indica que no hay datos acumulados. En caso contrario, se deben eliminar los que hay memorizados, normalmente con la secuencia de teclas **INV** , **AC** .
- Los datos se introducen como se indica a continuación:
  Escribimos el primer dato y pulsamos la tecla **x** , a continuación escribimos su frecuencia y pulsamos la tecla **DATA**, y así sucesivamente hasta que hayamos cargado todos los datos.
- Por último, pulsando cualquiera de las teclas n , $\sum x$, $\sum x^2$, $\bar{x}$, σ_n se obtienen los valores del número de datos, su suma, la suma de sus cuadrados, la media aritmética y la desviación típica.

Elige cualquiera de los ejercicios del tema en donde se requiera el cálculo de la media y la desviación típica y hállalas, ayudado por la calculadora. Ante algún problema, consulta el manual o pregunta a tu profesor o profesora.

Construir las Matemáticas. 4º E.S.O. Proyecto Sur, pg. 546

AM6. Inversión del algoritmo de cálculo de la media

Sólo en seis de los libros analizados encontramos este tipo de práctica y en todos los casos como uno de los ejercicios a resolver y no como técnica específica de estudio.

En el resto de los textos no aparece ninguna práctica en este sentido, lo que puede ser debido a que se considere que es demasiado difícil en este nivel, o lo que creemos más probable, a su consideración de trivial, por lo que no es necesario que se explicite. Nosotros, no obstante, creemos no sólo que es conveniente trabajarlo explícitamente, sino que ello es necesario para mejorar la comprensión de la media por parte de los estudiantes. A continuación reproducimos un ejemplo.

Para hallar la nota de una evaluación, se hace la media de cuatro exámenes.
Si en los tres primeros tengo una media de 4.2, ¿qué nota tengo que sacar en el último para aprobar?
Matemáticas 3º. Anaya. Serie nuestro mundo. Pg.297

AM7. Construir una distribución de media dada.

Si la práctica anterior aparecía en pocos de los libros estudiados, ésta aparece aún menos, sólo en tres de ellos y también como problemas a resolver por los alumnos. Pensamos que este es uno de los elementos más complejos dentro de las prácticas relacionadas con el cálculo de la media, puesto que intervienen varios de sus elementos de significado y no es fácil, para los estudiantes, conjugarlos todos. En todo caso podría ayudar a alcanzar una mejor comprensión, tanto del concepto, como de la idea de distribución.

El siguiente ejemplo muestra una de las actividades propuestas:

> Elabora una serie de 15 datos con valores entre 5 y 20 cuya media sea 15.
>
> Matemáticas 3º E.S.O. Ecir, pg.158

Cálculo de la Mediana

Como hemos descrito en el análisis del significado de referencia (capítulo 2), en el caso de la mediana, las técnicas específicas de cálculo varían más en función de la forma en que se presenten los datos que en el caso de la media y la moda. Hemos encontrado en los libros las siguientes técnicas de cálculo:

AME1. Cálculo de la mediana con datos no agrupados en clases, número de datos impar

En este caso la mediana se determina directamente de su definición y es el más sencillo. El alumno simplemente tiene que ordenar los datos y tomar el valor central.

AME2. Cálculo de la mediana con datos no agrupados en clases, número de datos par

Es el caso de indeterminación, donde la mediana es la media aritmética de los dos valores centrales. Ejemplos del cálculo de la mediana de un conjunto de datos aislados aparecen en todos los textos analizados, tanto un número par como impar. Posiblemente se deba a que parece ser la técnica de cálculo que se deriva de forma más natural de las definiciones usadas para este estadístico.

> Para calcular la mediana ordenamos los datos y comenzamos a contar por los extremos. Si tenemos un número impar de datos quedará uno en el centro, que es la mediana. Si tenemos un número par de datos, la mediana es la media aritmética de los dos centrales.
>
> El peso en kilogramos de siete alumnos es el siguiente:
>
> 53, 59, 47, 54, 46, 59, 94
>
> Los ordenamos
>
> 46, 47, 53 , **54**, 59, 59, 94
>
> La mediana es 54 kg, que es el valor que ocupa el lugar central.
>
> El peso en kilogramos de ocho alumnos es el siguiente:
>
> 50, 63, 48, 64, 62, 47, 56, 63
>
> Los ordenamos
>
> 47, 48, 50, **56**, **62**, 63, 63, 64
>
> Ahora, como son pares hay dos centrales, 56 y 62, la mediana es la media aritmética de ambos:
>
> $$\frac{56+62}{2}=59 \text{ kg}$$
>
> Matemáticas. ESO 3 . Casals, pg 271

AME3-AME4. Cálculo de la mediana a partir datos presentados en una tabla de frecuencias; casos de un número par e impar de valores

El cálculo de la mediana con datos en tablas de frecuencias supone mucha mayor complicación, puesto que en este caso es preciso partir del diagrama acumulativo de frecuencias, que los alumnos deben saber construir o al menos interpretar y realizar el cálculo gráficamente. En el cálculo gráfico de la mediana hemos distinguido dos casos, puesto que la técnica de cálculo para cada uno de estos casos es diferente:

- Si ningún valor de los datos x_i corresponde a una frecuencia relativa acumulada $F(x_i)=1/2$ (AME3), en donde puede aplicarse directamente la definición de mediana como valor que deja por debajo N/2 datos o una frecuencia relativa igual a 1/2. En este caso basta buscar directamente en el gráfico el punto en que la ordenada es igual a 1/2 o a N/2.
- Cuando uno de los valores se corresponde a $F(x_i)=1/2$ (AME4), estamos en el caso de indeterminación, porque en este caso tanto x_i como x_i cumplen la definición de mediana y se toma como mediana la media aritmética de estos dos valores.

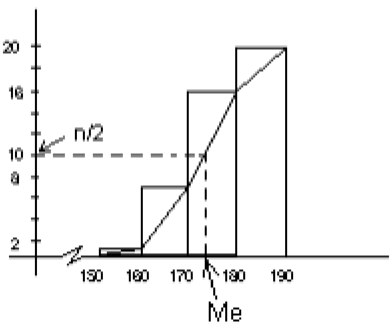
Añadimos a esto la dificultad de que la gráfica de frecuencias acumuladas es una función escalonada, que los alumnos han encontrado poco hasta este momento al trabajar con funciones.

Sólo en dos de los libros de texto analizados hemos encontrado el uso de los gráficos para calcular la mediana, igual que ha ocurrido en la media, lo que puede explicarse, de nuevo, por la dificultad que comportan los gráficos para estudiantes de estas edades. Uno de los pocos ejemplos encontrados, lo presentamos a continuación:

También se puede obtener la mediana gráficamente.
Cuando se trata de intervalos mediante aproximación, construyendo el polígono de frecuencias acumuladas, trazando por n/2 una horizontal hasta cortar a la poligonal y bajando después la perpendicular sobre el eje OX nos determina ME.

Para la estatura tenemos:

Estatura	f_i	F_i
150-160	1	1
160-170	7	8
170-180	9	17
180-190	3	20



Matemáticas 4º Curso Opción A. Secundaria 2000. Santillana, pg. 207

AME5. Datos agrupados en clases

Mientras que en todos los textos estudiados se propone el cálculo del intervalo mediano para esta forma de presentación de los datos, sólo en uno de ellos se aborda el cálculo de la mediana dentro de este intervalo. Por supuesto que este cálculo tiene una gran dificultad, porque implica la idea de interpolación que no es familiar para estos alumnos. A continuación incluimos el único caso que hemos encontrado.

ACTIVIDAD RESUELTA

1. Encuentra la talla mediana en la distribución estadística de la página anterior.

El intervalo o clase mediana es [165,170] ya que es el primer intervalo cuya frecuencia acumulada, $F_i = 26$, sobrepasa a la mitad del número de individuos N/2 = 15.

Para obtener la mediana exacta utilizamos la siguiente expresión:

L_i = extremo inferior de la clase mediana

$$\boxed{Me = L_i + \frac{N/2 - F_{Me-1}}{f_{Me}} \cdot C}$$

C = amplitud de la clase mediana

f_{Me} = frecuencia absoluta de la clase mediana

F_{Me-1}= frecuencia absoluta de la clase anterior a la mediana

$$Me = 165 + \frac{15-14}{12} \cdot 5 = 165{,}42 \text{ cm es la talla mediana.}$$

Matemáticas. 3^er^ Curso. ESO. Editex, pg.237

AME6. Calculo de la mediana a partir de datos presentados en un gráfico, diagrama de tronco.

El cálculo de la mediana a partir del diagrama de tronco lo hemos encontrado en sólo dos textos de los analizados, que en realidad es el mismo, puesto que se trata la opción A y opción B de la misma editorial y coinciden en este tema. Pensamos que este método de cálculo debiera estar presente en todos los libros de texto, debido a su carácter intuitivo, ya que es posible aplicar directamente la definición de mediana y conecta, por tanto, definición con método de cálculo. A continuación reproducimos el ejemplo encontrado.

Una empresa fabrica rollos para empapelar, de 5 metros de largo. Con objeto de detectar anomalías en la longitud de los rollos, se toman lotes de 40 y se comprueban las longitudes. La tabla 4 muestra sus medidas en la representación del tronco y las hojas.

Tabla 4. Medidas de 40 rollos de papel de empapelar.
Unidad del tronco: decímetro.
Unidad de la hoja: centímetro.

Datos			Mediana
6	49	233466	
(19)	50	0000111222333555679	505
15	51	11227	
10	52	03399	
5	53	0022	
1	54	1	

El 50% de los datos se alcanzan en los 505 cm.

ESO. Matemáticas 4°. Opción B. Algaida. Proyecto 2000. pg. 189

Cálculo de la Moda

También en este caso, las técnicas de cálculo que hemos encontrado en los libros de texto analizados son diferentes para las distintas formas de presentar el conjunto de datos, diferenciándose las que describimos a continuación.

AMO1-AMO2. Cálculo de la moda en una variable discreta con datos aislados o presentados en una tabla de frecuencias, respectivamente.

En el conjunto de libros de texto analizados, las técnicas de cálculo de la moda se centran básicamente en el caso de variables discretas, tanto con datos aislados como presentados en una tabla de frecuencias, apareciendo en casi la totalidad de ellos.

En ambos casos basta aplicar la definición de moda y por tanto se conecta definición y algoritmo de cálculo. Esta es precisamente una de las ventajas de la moda, la facilidad de cálculo, respecto a media o mediana. Un ejemplo se presenta a continuación.

Las notas en matemáticas de una clase están indicadas en la siguiente tabla. ¿Cuál es la moda?

Notas x_i	Nº de alumnos frecuencia absoluta f_i
1	2
2	2
3	4
4	5
5	8
6	**9**
7	3
8	4
9	3
	40

La moda es la nota que tiene mayor frecuencia absoluta. Por tanto la moda es 6:

Mo = 6

Matemáticas 3 secundaria. sm, pg. 266

AMO3. Cálculo de la moda de una variable discreta con datos agrupados en intervalos de clase.

Es menos frecuente que los libros presenten el cálculo de la moda para el caso de variables continuas o agrupadas en clases, aunque sí lo hemos encontrado en, más o menos, la mitad de los textos. En este caso no se calcula el valor exacto, sino que se toma la marca de clase como valor aproximado de la moda.

Los pesos de 50 recién nacidos están reseñados en la siguiente tabla. ¿Cuál es la moda?

Peso (kg) Clases	Nº de niños
[1,5-2)	2
[2-2,5)	7
[2,5-3)	9
[3-3,5)	**15**
[3,5-4)	11
[4-4,5)	5
[4,5-5)	1
	50

La clase o intervalo que tiene mayor frecuencia se llama clase modal o intervalo modal.
La moda estará en la clase: [3-3,5)
Como aproximación al valor de la moda tomamos la marca de la clase modal.
Por tanto, la moda es 3,25 kg.

Mo = 3,25 kg

Matemáticas 3 secundaria. sm, pg. 266

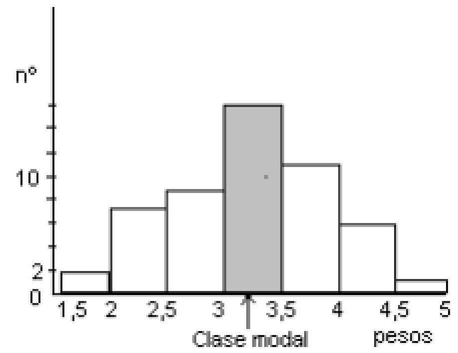
AMO4. Cálculo a partir de un diagrama de barras o histograma.

Este estadístico es el único, de los que nos ocupan, para cuyo cálculo se propone en los libros de texto analizados el uso de los gráficos, posiblemente porque la dificultad de lectura del diagrama de barras o del histograma para determinar la moda o la clase modal, respectivamente, es menor que para la determinación de la media y mediana.

Hacemos notar, no obstante, que para datos agrupados se reduce a la determinación del intervalo modal o bien se toma la moda como el centro de dicho intervalo. Lo hemos encontrado en algo más de la mitad de los libros estudiados.

Los pesos de 50 recién nacidos están reseñados en la siguiente tabla. ¿Cuál es la moda?

Peso (kg) Clases	Nº de niños
[1,5-2)	2
[2-2,5)	7
[2,5-3)	9
[3-3,5)	**15**
[3,5-4)	11
[4-4,5)	5
[4,5-5)	1
	50



Matemáticas 3 secundaria. sm, pg. 266

La tabla 4.4.3.3 muestra un resumen de los diferentes algoritmos cálculos que, para las medidas de posición central, se utilizan en los distintos libros de texto analizados.

Tabla 4.4.3.3. Algoritmos y procedimientos que presentan los libros analizados

	LIBROS DE TEXTO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ALGORITMOS Y PROCEDIMIENTOS	AM1	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	AM2	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	AM3	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	AM4																						
	AM5	×	×		×					×	×	×		×		×	×	×	×	×	×		×
	AM6	×					×		×					×								×	×
	AM7	×							×												×		
	AME1	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	AME2	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	AME3																						
	AME4																						
	AME5									×			×								×	×	
	AME6															×	×						
	AMO1	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×			×	×		×	×	
	AMO2	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
	AMO3		×	×	×	×			×	×	×	×	×	×	×			×	×			×	
	AMO4		×	×	×		×	×		×				×	×				×			×	

A la vista de la tabla podemos concluir que hay determinadas técnicas de cálculo que no se tratan en los libros de texto. En el caso de la media y la mediana ocurre con el cálculo gráfico, posiblemente debido a la dificultad que entraña el mismo uso de los gráficos. No es tan llamativo para la moda, pero hay que decir que, en este caso hemos considerado como cálculo gráfico el que se basa en la determinación del intervalo modal en un histograma, aunque no se llegue a determinar el valor exacto de la moda.
Todos los libros sin excepción tratan las tres primeras técnicas de cálculo de la media: datos no agrupados, datos discretos y continuos agrupados en tablas de frecuencias. Asimismo

todos ellos tratan el cálculo de la mediana con datos no agrupados, tanto en el caso de número par como impar de valores, es decir, incluyen el caso de indeterminación. El resto de técnicas de cálculo de media y mediana son poco tratados.

4.4.5. LENGUAJE Y REPRESENTACIONES

Otro punto que hemos analizado son los términos, símbolos y representaciones tabulares o gráficas empleadas en el tema.

Este tipo de elementos de significado de un objeto matemático sirve para representar las definiciones y propiedades de dicho objeto, así como los problemas y datos. En la terminología que Vergnaud (1982) utiliza para describir un concepto, serían el conjunto de representaciones simbólicas usadas para representar un concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere. Desde el marco teórico de nuestro estudio su importancia se debe a que en el trabajo matemático usamos normalmente unos objetos concretos (las representaciones) en función o representación de los objetos abstractos o de las situaciones en las que intervienen, existiendo una correspondencia semiótica entre el objeto representante y el objeto representado.

Términos y expresiones verbales

Entre las palabras usadas en los libros analizados para presentar y hablar de los conceptos que nos ocupan, hemos encontrado las siguientes con mayor frecuencia de aparición:

- *Parámetros estadísticos*, *parámetros centrales* y *medidas de centralización* para referirse a la media, mediana y moda. En este caso se trata de palabras con sentido matemático preciso que no se usan en el lenguaje ordinario. El maestro debe estar seguro de que el alumno comprende su significado.
- La *media* se presenta con este nombre en todos los textos, pero en algunos también se utiliza la palabra *promedio* como sinónimo de ésta. En este caso se trata de palabras que tienen el mismo sentido en el lenguaje ordinario.
- Para la *mediana y* la *moda* se utilizan estos términos para el caso de distribuciones discretas, e *intervalo o clase mediana* o *intervalo y clase modal*, indistintamente, cuando se trata de distribuciones continuas o discretas con valores agrupados en intervalos. La palabra mediana es un ejemplo de lenguaje cuyo sentido cambia en la clase de matemáticas.
- En el caso de la moda se habla también de *distribución unimodal*, *bimodal*, *multimodal*, para referirse a conjuntos con una sola moda, con dos, o con varias, respectivamente.
- Para nombrar un conjunto de datos de habla de *distribución estadística*, o *distribución de datos*, cuyos valores se representan por $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$; *serie estadística* de valores x_1, x_2, $x_3, ..., x_n$; y *variable estadística*.
- En todos los textos se habla tanto de *población* como de *muestra* a la hora de referirse a un conjunto de datos para analizar, sin detenerse en la diferencia entre una u otra, a pesar de ser conceptos altamente complejos que los alumnos tienden a confundir.

Notaciones y símbolos

Hemos analizado también las notaciones simbólicas empleadas, que son un elemento característico del lenguaje matemático (Socas y cols., 1984).

Las notaciones usadas en los libros de texto de nuestra muestra son, para la media: $\bar{x}$, para la mediana: *M* y *Me* y para la moda *Mo*. Todas ellas se usan en el doble sentido de resultado y proceso, que puede ser difícil de diferenciar para los alumnos.

Para los datos se utiliza x_i, para las frecuencias absolutas, f_i, n_i, y, en algunos casos F_i. Para el total de datos *N* o *n*.

Estos símbolos se combinan en fórmulas que sirven para enseñar un procedimiento de cálculo, para explicar un razonamiento o incluso para definir un concepto Las *fórmulas* que aparecen en los libros analizados son las siguientes:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{N}, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{N}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i, \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} Fi \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$ para la media.

Hacemos notar aquí la dificultad del uso del sumatorio, con el que los alumnos de estas edades no están familiarizados. Además es necesario el uso de subíndices, es decir que se hace alusión a una secuencia de valores o lo que es lo mismo, a una función de variable discreta.

En los ejemplos siguientes, el uso del subíndice es diferente, puesto que no se trata de números naturales, sino que hay un convenio de lectura al referirse al intervalo modal.

$Mo = L_i + \dfrac{f_{Mo} - f_{Mo-1}}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (_{Mo} - f_{Mo+1})} \cdot c$, para el cálculo de la moda en el caso de datos agrupados en intervalos, siendo L_i el límite inferior de la clase modal, f_{Mo} la frecuencia de la clase modal y f_{Mo-1} y f_{Mo+1} las frecuencias de la clase anterior y posterior a la clase modal, respectivamente y c la amplitud del intervalo modal. La notación es claramente ambigua en este ejemplo y puede llevar a dificultades, puesto si f_{Mo} es la frecuencia de la clase que contiene la moda, el alumno podría interpretar f_{Mo-1} es la frecuencia modal menos la unidad. Lo mismo ocurre en el siguiente caso, en que se usa la expresión que reproducimos.

$Me = L_i + \dfrac{\frac{N}{2} - F_{Me-1}}{f_{Me}} \cdot c$, para el cálculo de la mediaba en el caso de datos agrupados en intervalos, siendo L_i el límite inferior de la clase mediana, F_{Me-1} la frecuencia acumulada de la clase anterior a la mediana, f_{Me} la frecuencia de la clase mediana y c su amplitud.

Otras representaciones

Además del lenguaje y los símbolos, en los libros de texto aparecen con frecuencia representaciones de tipo diverso, que analizamos en este apartado. En nuestro estudio, en cuanto a las presentaciones y gráficos usados para presentar los datos en las actividades y ejemplos referidos a la media, moda y mediana, las más frecuentes que hemos encontrado son:

- Conjuntos de datos aislados, presentados sin formato.
- Tablas de datos.
- Tablas de frecuencias y de frecuencias acumuladas.
- Tablas de datos agrupados en intervalos.
- Diagramas de barras, histogramas, polígonos de frecuencias y polígonos de frecuencias acumuladas.
- Curva de distribución.
- Recta numérica para reforzar la idea de valor central de la mediana.
- Gráfico de la caja.
- Gráfico de tronco.

La tabla siguiente presenta un resumen de los elementos lingüísticos encontrados en nuestro análisis:

Tabla 4.4.5.1. Lenguaje que utilizan los libros analizados

LIBROS DE TEXTO		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
LENGUAJE	Verbales	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	Tablas	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	Símbolos	×	×	×		×	×		×	×	×	×	×	×	×			×	×	×	×	×	×
	Gráficos	×	×	×	×		×	×				×	×	×		×	×	×	×	×	×	×	×

La forma de presentar los datos no es un tema trivial y que haya que pasar por alto. Al observar la tabla se aprecia que, en algunos textos, faltan ciertos elementos, concretamente gráficos y representaciones simbólicas. Una de las dificultades que encuentran los estudiantes a la hora de analizar un conjunto de datos es, precisamente, la presentación de los mismos, especialmente en el caso en que vengan dados en forma gráfica. En el capítulo de antecedentes se presentan resultados de investigaciones sobre este punto, que revelan la dificultad que plantea a los estudiantes la lectura de gráficos.

4.4.6. DEFINICIONES Y PROPIEDADES.

Para cada uno los conceptos media, mediana y moda, hemos analizado las definiciones y propiedades presentadas explícitamente al alumno, así como el uso implícito que se hace de ellas en los libros analizados.

Mientras que, tanto los campos de problemas como los procedimientos y representaciones los encontramos presentes, en mayor o menor medida en todos los libros de texto analizados, de éstos elementos lo que sí aparece como constante en todos ellos son las definiciones. Sin embargo, sólo algunas de las propiedades aparecen y, generalmente, no de forma explícita sino como resultados o conclusiones de problemas resueltos o como propuestas a los alumnos para que ellos mismos las obtengan. A continuación analizamos las definiciones presentadas en los libros.

Definiciones de la Media

DM1. La definición de la media como la suma ponderada de cada uno de los valores de la variable, multiplicado por su frecuencia

Esta definición, enfatiza el algoritmo de cálculo $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i$, y presenta la media como una operación con los datos. Es la de mayor frecuencia de aparición en los libros de texto, apareciendo en 19 de los 22 analizados.

Como ejemplo incluimos la siguiente:

> La **media aritmética** o **media** de una variable estadística es el resultado que se obtiene al dividir la suma de todos los datos entre el número total de datos. Se representa por $\bar{x}$
>
> La fórmula para obtener la media aritmética es : $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{N}$
>
> Matemáticas A. 4º ESO. Casals, pg.191

DM2. Definición de media, como promedio aritmético de un conjunto de datos

En esta definición se relaciona la media con otros promedios y se enfatiza su carácter de valor central. Únicamente la hemos encontrado en 2 textos, Uno de ellos se reproduce a continuación.

La **media aritmética**, $\overline{x}$, es el promedio de todos los valores que toma la variable.
Matemáticas 4ª Opción A. Oxford Educación. Pg. 197

Definiciones de la Mediana

DME1. Mediana como centro de la distribución.

Es la definición en la que de enfatiza la idea de orden en los datos y posición central en dicha ordenación. Sólo 9 del total de los libros analizados, es decir, el 40% define la mediana como el valor que ocupa la posición central del conjunto de datos, es decir con tantos valores por encima como por debajo. A continuación mostramos un ejemplo.

La mediana de una distribución es el valor que ocupa la posición central al ordenar los datos.
Matemáticas ESO 3. Casals, pg. 270

DME2. La mediana es el valor de la variable estadística que divide en dos efectivos iguales

Esta otra definición, que enfatiza la división del conjunto de datos en dos efectivos iguales mediante la mediana, la hemos encontrado en la mitad de los textos estudiados. Se enfatiza la igualdad de frecuencias por arriba y debajo de la mediana, como en el caso siguiente.

La mediana de un conjunto de datos es una valor tal que la mitad de los datos son menores o iguales que él y la otra mitad son mayores o iguales.
Matemáticas 3º ESO. Guadiel, pg. 144

DME3. El valor de la variable estadística tal que la ordenada del diagrama acumulativo de frecuencias absolutas es igual a n/2

En este caso se hace alusión a la idea de frecuencia acumulada y a su representación gráfica. No lo hemos encontrado como definición de mediana en ninguno de los libros estudiados, tan sólo como una forma de cálculo de la misma.

DME4. La mediana como el valor de la variable estadística tal que la ordenada de la curva de distribución empírica es igual a 1/2

Es una variante de la definición anterior, haciendo referencia a la frecuencia relativa acumulada. Tampoco lo hemos encontrado en ninguno.

Definiciones de la Moda

DMO1. La moda es el valor más frecuente de la variable estadística

En todos los textos revisados la moda se define como el valor más frecuente de la variable estadística, que es una definición sencilla de comprender y puede usarse para determinar visualmente la moda a partir de las representaciones gráficas. Un ejemplo es el siguiente:

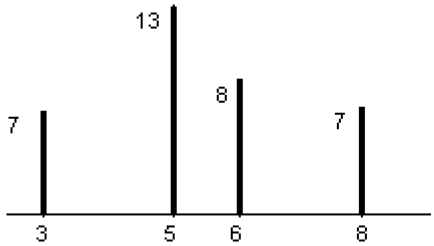
La moda de un conjunto de datos es el dato que tiene mayor frecuencia.
Sigma matemáticas. 3 Secundaria. S.M., pg. 225

DMO2. Sólo en uno de ellos aparece también definida como *el valor que corresponde al máximo del diagrama de barras o histograma*, definición en la que se enfatiza la idea de frecuencias como función de los valores de los datos. En el caso que nos ocupa no se trata de

una definición explícita, sino que introduce la moda respondiendo a esta idea a partir de ejemplos:

> Ejemplo 1
> En una clase hay 35 alumnos. Después de una prueba escrita, han resultado las notas siguientes:

x_i	n_i
3	7
5	13
6	8
8	7



> El diagrama de barras pone claramente de manifiesto que hay una nota, el 5, que ha salido muchas más veces que las otras; es la nota más frecuente. Dicha nota recibe el nombre de *moda* de los valores observados.
>
> Matemáticas. Educación secundaria 3. Vicens Vives, pg. 139

En la tabla 4.4.6.1 el resumen de las definiciones encontradas en los distintos libros de texto para los conceptos de media, mediana y moda.

Tabla 4.4.6.1. Definiciones que presentan los libros analizados

	LIBROS DE TEXTO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
DEFINICIONES	DM1	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×		×	×	×	×		×	×		×
	DM2													×					×				
	DME1				×	×			×			×		×	×		×	×	×	×			×
	DME2	×	×	×	×	×	×	×		×	×		×		×	×	×				×	×	
	DME3									×			×										
	DME4																						
	DMO1	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	DMO2							×															

Como se puede apreciar en la tabla, tanto en el caso de la media, como en la mediana y la moda, hay una definición que predomina bastante sobre las demás, lo que nos indica gran homogeneidad en los libros a la hora de presentar estos conceptos.

Se trata de la definición a partir del algoritmo, para el caso de la media, enfatizando la idea de media como operación, en lugar de centrarse en la idea de media como representante, que sería a nuestro juicio más adecuada.

En el caso de la mediana la definición preferente es como valor que divide a la muestra en dos grupos con igual número de efectivos. En este caso se enfatiza bien la idea de valor central.

Para la moda lo predominante es definirla como el valor de máxima frecuencia. En ninguno de estos dos casos se introduce a partir de gráficos.

Una vez analizadas las definiciones estudiaremos las propiedades introducidas explícita o implícitamente, clasificándolas en numéricas, algebraicas y estadísticas.

Propiedades numéricas

N1. La media, la mediana y la moda de un conjunto de datos son siempre valores pertenecientes al rango de la variable.

Esta propiedad, que se deduce fácilmente de las distintas definiciones y que puede comprobarse sin dificultad en todos los problemas, únicamente la hemos encontrado explicitada con respecto a las tres medidas en uno de los textos y en otro de ellos sólo para la media. Esto puede deberse a que la mayoría de los autores la considere evidente, lo que, sin embargo, para los estudiantes puede no ocurrir, como se ha puesto de manifiesto en la investigación de Tormo (1993, 1995), quien indica que algunos alumnos no comprenden esta propiedad.

Estimación de los parámetros

Antes de efectuar los cálculos, tanto si lo haces con papel y lápiz como si lo haces con una calculadora científica, debes estimar entre qué posibles valores estarán los parámetros que desees calcular.

En cualquier caso, y por rara que sea una distribución, tanto la media como la moda y la mediana estarán acotadas entre los valores mínimo y máximo de los datos.

Matemáticas secundaria 3º sm. pg. 267

N2. La mediana y la media pueden no coincidir con ninguno de los valores de los datos, mientras que la moda siempre es uno de estos valores.

Esta propiedad se explicita sólo en uno de los textos analizados, que es el que reproducimos a continuación. Sin embargo Watson y Moritz (2000) muestran en su trabajo como los alumnos interpretan en ocasiones que el valor medio debe coincidir con alguno de los datos.

La media aritmética:

- Es una medida de tendencia central.
- Su valor siempre está situado entre los valores extremos.
- Puede o no coincidir con alguno de los valores dados.
- Es representativa de los valores dados.
- Puede ser un número que no tenga sentido en el contexto propuesto.

Matemáticas Opción A. 4º curso. Secundaria 2000. pg. 208

N3. En el cálculo de la media y la moda intervienen todos los valores de los datos, no así en el caso de la mediana.

En 5 textos de los analizados hemos encontrado referencia a esta propiedad, como en el ejemplo siguiente en que se pregunta a los alumnos que analicen esta propiedad.

CUESTIONES

21. ¿Influyen todos los datos en el cálculo de la media, la mediana o la moda?

....

Sigma matemáticas. 3º secundaria. S.M., pg. 238

N4. La moda y la mediana son, en ocasiones, invariantes si cambian algunos de los *datos, mientras que la media sí se ve afectada por cualquier cambio en los datos.*

Esta propiedad sólo la hemos encontrado, y en este caso como resultado de problemas, en 5 de los libros estudiados y en relación a la media y únicamente en uno de ellos citan también a la mediana y la moda, que es el que reproducimos.

> **CUESTIONES**
>
> **23.** Cuando una distribución tiene algún valor muy extremo y poco significativo, ¿alterará mucho el valor de la media? ¿Y de la moda?
> ....
>
> Sigma matemáticas. 3º secundaria. S.M. pg. 238

La siguiente tabla presenta un resumen de la presencia de las propiedades numéricas en los libros de texto.

Tabla 4.4.6.2. Propiedades numéricas que presentan los libros analizados

LIBROS DE TEXTO		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
PROPIEDADES NUMÉRICAS	N1		×																		$\bar{x}$		
	N2																				×		×
	N3		×	×		×						×		×									×
	N4		×	×				$\bar{x}$										×				$\bar{x}$	×

Aunque con una baja frecuencia de aparición, hemos encontrado presentadas las propiedades numéricas en algunos de los libros de texto como tales, es decir, explícitamente y no tanto como resultados obtenidos a partir de ejercicios o problemas.

Propiedades algebraicas

En cuanto a las propiedades algebraicas, las únicas que hemos encontrado son las que describimos a continuación.

A5: las medidas de tendencia central conservan los cambios de origen y escala. En doce de los libros hemos encontrado este enunciado como propiedad de la media y sólo en cuatro se presenta también referida a la mediana y a la moda. Un ejemplo se presenta a continuación.

> **PROFUNDIZA**
> **26. Investiga.** ¿Qué le ocurre a $\bar{x}$ y a ⑨ si a todos los datos les sumamos un mismo número? Comprueba tu conjetura con estos datos: 3, 5, 6, 3, 4, 2, 3.
> **27. Investiga.** ¿Qué le ocurre a la media y a la desviación típica si a todos los datos los multiplicamos por un mismo número? Comprueba tu conjetura con estos datos: 3, 5, 6, 3, 4, 2, 3.
>
> Matemáticas Andalucía 3º Anaya. pg. 297.

A7: La moda puede no existir o, si existe, no ser única, mientras que la media y la mediana siempre existen. Esta propiedad aparece en quince de los textos, aunque sólo referida a la moda, sin hacer mención a la misma para la media o la mediana.

> Una distribución puede no tener moda (si todos los datos se repiten el mismo número de veces). También puede ocurrir que una distribución tenga una moda (**unimodal**), dos modas (**bimodal**), tres modas (**trimodal**), etc.
>
> Matemáticas 3º Secundaria. sm, pg.266

Las restantes propiedades sólo las hemos encontrado en algunos de los textos, como muestra la tabla y con un tratamiento bastante tangencial. Incluimos a continuación el enunciado de estas propiedades para facilitar la interpretación de la tabla 4.4.4.6 al lector.

A1. La moda es una operación interna, mientras que la media y la mediana no.

A2. La media, mediana y moda, consideradas como operación, no tienen elemento neutro ni simétrico.

A3. No tienen la propiedad asociativa.

A4. Son conmutativas.

A6. La media de la suma de dos o más variables e s la suma de las medias. En el caso de la mediana y la moda no se cumple.

Tabla 4.4.6.3. Propiedades algebraicas que presentan los libros analizados

LIBROS		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
PROPIEDADES ALGEBRAICAS	A1				$\bar{x}$			×														$\bar{x}$	
	A2																						
	A3	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$															$\bar{x}$			
	A4			$\bar{x}$																		×	
	A5	$\bar{x}$	$\bar{x}$		$\bar{x}$		$\bar{x}$	$\bar{x}$	×		$\bar{x}$			×	×	$\bar{x}$	$\bar{x}$				×		
	A6																						
	A7		Mo	Mo	Mo	Mo				Mo	Mo		Mo	Mo		Mo	Mo	Mo	Mo	Mo		Mo	

Propiedades Estadísticas:

Si las propiedades numéricas y algebraicas aparecen poco tratadas en los textos estudiados, tampoco las propiedades estadísticas aparecen suficientemente estudiadas. De todas ellas, las que más encontramos son las que se describen a continuación.

E1. La media, mediana y moda son representantes de un colectivo.

Tan solo esta propiedad tiene una alta frecuencia de aparición, en 17 de los 21 libros analizados. No obstante, pensamos que, precisamente esta es una de las que deberían estar presentes en todos los textos, puesto que se trata de una característica esencial que da sentido al estudio de las medidas de posición central.

E8. Existe moda/s para variables cuantitativas y cualitativas.

Esta es otra también aparece, pero ya tan sólo la encontramos explicitada en 9 de los libros, lo que nos parece un porcentaje bajo, tratándose de una propiedad importante para decidir la oportunidad del uso de esta medida de posición en lugar de la media o la mediana, en determinadas distribuciones. Por ejemplo, el siguiente texto, presenta las dos propiedades:

En cursos anteriores hemos visto que las tablas y las gráficas estadísticas de una distribución nos dan una visión clara de su comportamiento. En muchas ocasiones, son tantos los datos que resulta complicado obtener conclusiones, es por eso, que es conveniente reducir todo el conjunto de datos a unos cuantos valores numéricos, que por sí solos, pueden dar una idea cuantitativa global de los resultados obtenidos.

Comenzaremos por aquellos valores alrededor de los cuales se encuentran situados los distintos valores de la distribución. Se conocen con el nombre de **medidas de centralización** y las más importantes son: la **media aritmética**, la **moda** y la **mediana**.

....

Actividades

7. En la quiniela de la semana pasada había seis 1, tres X y el resto, 2. ¿Cuál es la moda?

Miríada XXI. Matemáticas 4º ESO. McGraw-Hill, pg.185 y 188

E4. La media es un estadístico menos resistente que la mediana y la moda.

Esta propiedad aparece sólo en siete de los libros analizados, a pesar de que es fundamental para poder elegir uno de los tres parámetros de centralización como el representante más adecuado de una distribución, a la vista de sus características.

Las demás propiedades estadísticas de las medidas de posición central aparecen en muy pocas ocasiones como puede apreciarse en la tabla 4.4.6.4, y con un tratamiento tangencial. Estas propiedades son las siguientes:

E2. La media coincide con el centro de gravedad del conjunto de datos.

E3. En distribuciones simétricas, la mediana, la media y la moda coinciden.

E5. La suma de las desviaciones de un conjunto de datos con respecto a su media es cero.

E6. Es respecto a la media cuando la suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima.

E7. Es preferible a la mediana en distribuciones con datos agrupados en los que al menos un intervalo es abierto.

E9. En distribuciones con más de una moda, la mediana es el mejor representante del conjunto de datos.

Tabla 4.4.6.4. Propiedades estadísticas que presentan los libros analizados

LIBROS DE TEXTO		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
PROPIEDADES ESTADÍSTICAS	E1	×			×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×		×	×
	E2	×												×							$\bar{x}$		×
	E3						×		×			×		×									×
	E4		×	×			×				×	×						×				×	×
	E5	×						×	$\bar{x}$														
	E6							×															
	E7																						
	E8	×			×	Mo	×			Me	×	×		×				×	×	×		×	
	E9																			×			

En definitiva hay un escaso tratamiento de las propiedades estadísticas de los promedios en los libros de texto, con excepción de su cualidad de representantes del conjunto de datos, y esto no en todos los libros.

4.4.7. ARGUMENTOS

Los libros usan diversas formas de justificar los resultados o propiedades. Las demostraciones y justificaciones de las propiedades de las medidas de posición central más usuales, como se indica en el análisis del significado de referencia, son cuatro:

Arg1. Comprobación de casos particulares y contraejemplos

Cuando para justificar una propiedad o la forma de hacer un cálculo se muestra cómo se cumple dicha propiedad en un caso particular. En otros casos con un contraejemplo se invalida una ley.

Es mucho más frecuente la aparición de casos particulares, tanto para justificar propiedades, como para presentar definiciones posteriores, o ilustrar técnicas de cálculo. Sólo en algún caso aislado se hemos encontrado el uso de contraejemplos para justificar propiedades. Por ejemplo, en el cuadro siguiente se muestra cómo se usa una situación particular para ejemplificar una técnica de cálculo presentada anteriormente de forma general, y con la simbolización elegida por los autores:

ACTIVIDAD RESUELTA

1. Encuentra la talla mediana en la distribución estadística de la página anterior. El intervalo o clase mediana es [165,170] ya que es el primer intervalo cuya frecuencia acumulada, $F_i = 26$, sobrepasa a la mitad del número de individuos $N/2 = 15$.

Para obtener la mediana exacta utilizamos la siguiente expresión:

L_i = extremo inferior de la clase mediana

$$Me = L_i + \frac{N/2 - F_{Me-1}}{f_{Me}} \cdot C$$

C = amplitud de la clase mediana

f_{Me} = frecuencia absoluta de la clase mediana

F_{Me-1}= frecuencia absoluta de la clase anterior a la mediana

$$Me = 165 + \frac{15-14}{12} \cdot 5 = 165{,}42 \text{ cm}$$ es la talla mediana.

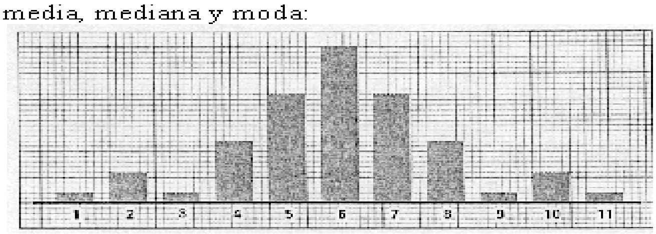
Matemáticas. 3er Curso. ESO. Editex, pg.237

Arg2. Uso de gráficos como justificación.

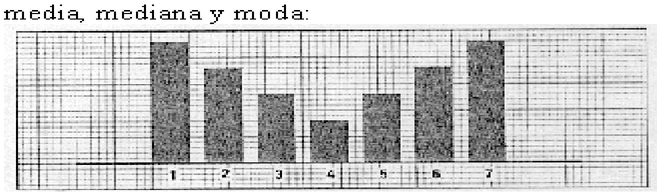
Se aplica como validación cuando por medio de ella se muestra visualmente la verdad o falsedad de una afirmación o de una propiedad. En el ejemplo siguiente se muestra cómo se parte de un gráfico para tratar la propiedad de la coincidencia de moda, mediana y media sólo en el caso de distribuciones simétricas:

Para entrenarse: Verdadero o falso

4. Coinciden media, mediana y moda:



5. Coinciden media, mediana y moda:



Fractal 3. Matemáticas. Vicens Vives, pg. 270

Arg3. Razonamientos algebraicos.

Este tipo de razonamientos, de los más utilizados en matemáticas, aquí apenas aparecen, posiblemente debido a que el manejo del lenguaje algebraico es muy limitado en estas edades.

Sólo en un texto hemos encontrado uno de estos usos, y simplificado al máximo:

> *Ejemplo 1*: A lo largo de una evaluación se han efectuado 4 pruebas escritas. Un alumno ha obtenido las puntuaciones siguientes*:*
>
> 5, 7, 4, 2
>
> Si queremos resumir las cuatro puntuaciones en un solo número, ¿cuál puede ser éste?; ¿qué criterio adoptamos?
>
> En muchas ocasiones nos interesará que las desviaciones o diferencias "por debajo de la media" y "por encima de la media" sean iguales. Ello significa que si sumamos todas las diferencias entre las puntuaciones obtenidas y la media, se obtendrá cero. Apliquemos este criterio a nuestro caso:
>
> Designando por x la media que buscamos, deberá verificarse la ecuación siguiente:
>
> $$5 - x + 7 - x + 4 - x + 2 - x = 0$$
>
> Educación Secundaria. MATEMÁTICAS 3. Vicens Vives, pg. 134

Arg4. Razonamientos verbales deductivos.

Otro elemento, muy usado para validar propiedades, es el de los razonamientos deductivos. Esta forma de validar una propiedad presenta la ventaja, con respecto al uso de casos particulares de que sí permite generalizar los resultados y, sin embargo, como muestra la tabla 4.4.7.1., su aparición es menos usual, posiblemente debido a que requieren un nivel de abstracción mayor, lo que conlleva ciertas dificultades para los alumnos.

El ejemplo anterior también ilustra el uso de este tipo de razonamientos, como complemento, en este caso, al algebraico, de mayor dificultad.

Tabla 4.4.7.1. Argumentos que presentan los libros analizados

	TEXTOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ARGUMENTOS	ARG1	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×		×	×	×	×
	ARG2		×	×			×	×	×					×		×	×	×					×
	ARG3							×															
	ARG4		×	×	×	×	×	×	×			×	×							×	×	×	

La tabla 4.4.7.1 muestra la frecuencia de aparición de los elementos validativos descritos en los libros que hemos analizado. Como se puede ver en la tabla, no todos los tipos de argumentos se utilizan, de manera significativa, en los libros de texto del nivel educativo que hemos analizado. La comprobación de casos particulares, y eventualmente, el uso de algún contraejemplo, sí que es de uso frecuente, posiblemente debido a que se trata de razonamientos sobre casos concretos, lo que resulta más fácil a los estudiantes de estas edades, que si se argumenta con un nivel mayor de abstracción. No obstante, encontramos el problema de que se generalizan propiedades con demasiada rapidez a partir de uno o varios casos particulares que las verifiquen, lo que puede dar lugar a pensar que esta forma de razonar es correcta, lo cual, como sabemos no es cierto y, sin embargo, se da con demasiada frecuencia, especialmente entre los estudiantes más jóvenes.

4.5. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS CURRICULAR

En este capítulo se describe el análisis curricular llevado a cabo, con una primera parte dedicada al análisis de las orientaciones curriculares para la enseñanza secundaria obligatoria, tanto en España como a nivel internacional y otra segunda donde analizamos los libros de texto de este nivel educativo.

Una primera conclusión del análisis curricular es que no se presta a la estadística tanto interés como el que hemos encontrado en otros países, y en particular en el último documento de Estándares Curriculares de los Estados Unidos, en que la estadística aparece como una constante desde el jardín de infancia hasta la universidad y los contenidos son mucho más amplios y detallados que los españoles. En dicho currículo se enfatiza la necesidad de un cambio en la metodología y se propone centrar la estadística alrededor del trabajo con datos reales. Los alumnos deben trabajar con proyectos, recogiendo sus propios datos a partir de encuestas, experimentos y observaciones. Los conceptos estadísticos deben presentarse sólo como respuesta a problemas de análisis de datos, para dotarlos de significado. Todo esto está de acuerdo con nuestro marco teórico.

Creemos que sería importante reforzar los contenidos estadísticos en el currículo español en la línea sugerida por los estándares (NCTM, 2000), no tanto por seguir las tendencias de otros países, sino para adaptar la enseñanza a las necesidades de la sociedad de la información y preparar a los ciudadanos para los retos a que deberán enfrentarse en su trabajo futuro.

Una segunda parte del análisis se dedica a los textos. En correspondencia con el objetivo planteado y después de realizar un análisis exhaustivo de una amplia muestra de libros de texto, hemos podido identificar los elementos de significado más comunes presentados en ellos sobre las medidas de posición central, determinando de esta manera el significado institucional local. Esto nos permite presentar una panorámica del contenido que los autores de los libros consideran más adecuado para este nivel educativo y compararlo asimismo con nuestro análisis del significado de referencia realizado en el capítulo 2.

Hemos realizado una clasificación de los elementos encontrados, los cuales hemos resumido en las tablas presentadas a lo largo del capítulo. El análisis revela que en los libros de texto de esta etapa educativa, se da mucha más importancia a las definiciones y al cálculo de las medidas de posición central que al estudio de sus propiedades, puesto que el porcentaje de texto, ejemplos y ejercicios dedicados a ambos es notablemente mayor que el dedicado a éstas.

Una de las primeras consecuencias que este hecho puede tener es que, aunque los estudiantes consigan manejar perfectamente los procedimientos de cálculo, pueden no alcanzar una comprensión completa de estas medidas, sus posibilidades de uso, las ventajas de una sobre las otras y la conveniencia, por tanto, de elegir unas u otras según la situación, ya que hay elementos de significado que no se adquieren de manera espontánea y que no se tratan explícitamente.

Hay que destacar también la importancia que tiene el lenguaje en este proceso de enseñanza aprendizaje y que se pone de manifiesto en este análisis con la gran variedad de elementos empleados por los distintos libros de texto. Es necesario, pues, tratar de manera consciente este tema que, en muchas ocasiones, parece trivial y, sin embargo, entraña dificultades para los estudiantes.

En cuanto a los campos de problemas, hemos constatado que hay situaciones de las que emergen los estadísticos de tendencia central y que no hemos encontrado aquí, por lo que debemos llamar la atención sobre este punto, ya que su tratamiento explícito podría contribuir a enriquecer la significatividad del aprendizaje de estos conceptos. Tampoco se trabaja con proyectos, sino que los problemas propuestos son puntuales y no se relacionan entre sí.

De este significado de referencia seleccionaremos, en el capítulo 5, los elementos que se adecuen a lo que pretendemos evaluar en nuestro estudio. Por tanto constituye una base para garantizar la validez de contenido del instrumento de evaluación que construimos para nuestro trabajo y que analizaremos en dicho capítulo.

CAPÍTULO 5.

CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO Y ESTUDIO PILOTO

5.1. INTRODUCCIÓN

Como hemos indicado en el capítulo 2, donde se describe el marco teórico adoptado, la evaluación de la comprensión de un sujeto se concibe como el estudio de la correspondencia existente entre el significado institucional efectivamente presentado en la enseñanza y el significado personal construido por él, identificando los puntos en que hay acuerdo y aquellos en que el sujeto presenta dificultades o errores. Es importante, entonces, que la evaluación del aprendizaje de un tema cubra una muestra representativa de los diversos elementos de significado presentados a los alumnos en la enseñanza recibida.

Puesto que el fin de nuestro trabajo era realizar una evaluación de la comprensión que los estudiantes de secundaria muestran de los diferentes elementos de significado de las medidas de posición central analizadas en los capítulos anteriores y, ya que no todos han sido tenidos en cuenta en las investigaciones previas, nos vimos en la necesidad de construir nuestro propio cuestionario de evaluación.

El objetivo principal al hacerlo fue disponer de un instrumento con el que, en un corto espacio de tiempo (sobre una hora y media), pudiéramos recoger datos para aproximarnos a la comprensión que muestran estos estudiantes, en relación con la mayor cantidad posible de elementos de significado incluidos en la enseñanza durante el periodo de Educación Secundaria Obligatoria.

De este objetivo principal se deducen otros. El primero de ellos consiste en estimar la proporción de alumnos que resuelve correctamente cada una de las tareas propuestas en el cuestionario. Asimismo, deseamos comparar la dificultad que presenta cada una de ellas, identificando los índices de dificultad observados en los alumnos en cuestión. También deseamos estimar la proporción de los que usan correcta o incorrectamente los elementos de significado considerados en el estudio, y mostrar tanto las características en la comprensión en el grupo, como su variabilidad.

Por otro lado, en esta investigación han participado alumnos de cursos diferentes. Aunque todos ellos tienen unos primeros conocimientos sobre los promedios adquiridos en la Educación Primaria, somos conscientes de que éstos son limitados y se reducen a la idea de media y moda y su cálculo con variables discretas, en particular para los alumnos sin instrucción. Hemos querido, sin embargo aportar información sobre las ideas intuitivas y comprensión mostrada por los estudiantes al inicio de la Educación Secundaria, respecto a esta parte del cuestionario.

En consecuencia, un tercer objetivo es analizar las posibles diferencias de comprensión de una parte abreviada del cuestionario entre los alumnos que comienzan y acaban la Educación Secundaria Obligatoria y en particular, analizar si se encuentra una mejora significativa en los que han recibido instrucción durante la Educación Secundaria.

En este capítulo describimos el proceso seguido al construir el cuestionario, analizamos el mismo y describimos los resultados de un estudio piloto llevado a cabo con la intención de hacer una primera prueba del cuestionario e iniciar la definición de las categorías de análisis de las respuestas de los alumnos, que se completa en el capítulo 6.

5.2. CRITERIOS Y METODOLOGÍA DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO

El cuestionario construido está orientado a la evaluación del significado personal que los estudiantes asignan a las medidas de posición central, con especial énfasis en los elementos de significado. Incluye una serie de ítems que pretenden evaluar la comprensión de los siguientes tipos de elementos:

a) Comprensión de las propiedades básicas y definiciones de media, mediana y moda.
b) Reconocimiento de representaciones verbales, simbólicas y gráficas. Dificultad que se induce por un cambio en el tipo de representación.
c) Cálculo y procedimientos de resolución de problemas. Comprensión de los algoritmos de cálculo frente a su aplicación automática.
d) Argumentaciones de los alumnos para apoyar sus respuestas y hasta qué punto son completas y consistentes.

Todos estos elementos se han relacionado con diversos campos de problemas de los que se deriva la idea de promedio. Es decir, los ítems elegidos presentan aplicaciones en los principales campos de problemas que hemos identificado en los capítulos anteriores, atendiendo también al contexto y a la forma de representar los datos.

Técnica y método de recogida de datos

La técnica de recogida de datos empleada en esta investigación se engloba en la *medición* según la definición dada por Fox (1981). Al tratar de evaluar la comprensión que muestran los alumnos sobre un determinado concepto y sobre los diversos elementos de significado que lo configuran hemos de tener en cuenta que tratamos de evaluar un *constructo inobservable*.

No podemos observar directamente esta comprensión, por lo que sus características deben ser inferidas de las respuestas de los alumnos a los ítems que configuran el cuestionario. Según Dane (1990) la medición se refiere al caso en que, por medio de las preguntas planteadas a los encuestados, pretendemos obtener una estimación de conocimientos y capacidades de los sujetos, que no son accesibles por simple observación.

El instrumento construido lo encuadramos también dentro de la teoría psicométrica *de maestría de dominio* (Thorndike, 1989), ya que podemos considerar que la puntuación total en la prueba está relacionada con el grado de maestría o habilidad de los sujetos en un dominio dado de conocimientos, en este caso, sobre las medidas de posición central.

En el proceso de elaboración del cuestionario se han tenido en cuenta las recomendaciones de Scott (1988), Osterlind (1989), Thorndike (1989) y Linn (1988) y se han seguido las siguientes fases:

- En primer lugar, se delimitó el contenido a evaluar con este instrumento. Esto se realizó a partir del análisis de los diversos elementos del significado institucional considerado en la Enseñanza Secundaria Obligatoria, esto es, del estudio curricular realizado en el capítulo 4. En este estudio, que fue apoyado por el análisis del significado institucional (capítulo 2), donde se identificaron los distintos elementos de significado que interesaba diferenciar en la comprensión de los promedios.
- Se especificó el formato de los ítems, decidiendo que la mayoría fuesen de respuesta abierta, pidiendo la justificación de la misma. Esta decisión se tomó teniendo en cuenta el tiempo disponible, que sería el correspondiente a una o dos sesiones de clase, el número

de ítems y que se deseaba que los alumnos se expresasen libremente, huyendo de respuestas estereotipadas.

- Elaboración de un banco de ítems. Partiendo de las investigaciones más relevantes sobre el tema, hemos traducido todos los ítems empleados, analizado los elementos que se evalúan y elaborado una tabla de contenidos. Esta parte la describimos con más detalle en la siguiente sección.
- Selección de ítems para cubrir los diferentes componentes de significado identificados en el análisis curricular, teniendo en cuenta la información que se obtiene al cruzar los resultados del análisis de ítems y el de dicho análisis curricular. Asimismo nos hemos basado en el estudio previo de las investigaciones sobre el tema.
- Prueba del cuestionario en una muestra piloto durante el curso 2000-2001. Análisis de los resultados y elaboración primera de categorías de respuestas a cada ítem. Estudio de la dificultad comparada de las preguntas en los dos grupos de estudiantes (1º y 4º de ESO). Todos estos resultados se describen al final de este capítulo.
- Revisión de la prueba y elaboración del cuestionario definitivo cuyos resultados se describen en el Capítulo 6.

5.3. ELABORACIÓN DEL PRIMER BANCO DE ITEMS

Tras analizar las medidas de centralización desde el punto de vista de su significado, institucional tanto de referencia como local, hemos pretendido elaborar un cuestionario que nos permitiera evaluar el significado personal de estas medidas en los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria.

Para formar un banco de ítems, comenzamos haciendo una revisión y selección de aquellas investigaciones relacionadas con este tema que incluyen una parte experimental y en las que se describen los cuestionarios o tareas empleadas.

Tablas 5.3.1. Investigaciones utilizadas para construir el banco de ítems

	INVESTIGACIONES	Nº de ítems
1.	Watson y Moritz (1999). The development of concepts of average	4
2.	Watson (2000). The longitudinal development of understanding of averages.	4
3.	Tormo (1993). Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años.	10
4.	Cai (1995). Beyond the computational algorithm: students'understanding of the arithmetic average concept.	2
5.	Carvalho y César (1998). Peer interaction in an unusual statistical task.	2
6.	Reading y Pegg (1996). Exploring understanding of data reduction.	2
7.	Garfiel y Konold (1992). Statistical reasoning assessment.	9
8.	Zawojeswski (1986). The teaching and learning proceses of junior high school students under alternative modes of instruction in the measures of central tendency.	16
9.	Godino (1999/00). Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática	3
10.	Eisenbach (1994). What does mean mean?	1
11.	Gattuso (1996). Development of concepts of the arithmetic average from High School to University.	3
12.	Cobo (1998). Estadísticos de orden en la educación secundaria	3

A partir de estas investigaciones, y traduciendo los enunciados de las tareas a nuestro idioma, elaboramos un banco con los ítems utilizados en las mismas, que incluimos en el Anexo 1. Para su identificación, en el Anexo 1 y la construcción de las tablas se han numerado, en primer lugar, las investigaciones encontradas, tal y como se relacionan en el mismo anexo, y como se presentan en la Tabla 5.3.1.

Dentro de cada una de estas investigaciones se le ha asignado una numeración doble a cada ítem: el primer dígito indica el artículo en el que se ha encontrado y el segundo se corresponde con el lugar en el que aparece en la investigación correspondiente. Por ejemplo, el ítem 1.2. es el segundo que aparece en la investigación 1. En total el banco de ítems consta de 59 ítems cuyo significado hemos analizado en esta investigación.A continuación realizamos un análisis de los ítems, tomando como referencia, del mismo modo que hicimos para los libros de texto, los elementos de significado institucional de referencia en el análisis epistémico para las medidas de centralización (capítulo 2). El objetivo fundamental de este análisis fue determinar los elementos de significado evaluados por cada uno de los ítems. De este modo tendríamos una pauta para seleccionar los que configurarán nuestro cuestionario de modo que se cubrieran los diferentes elementos de significado cuya comprensión se pretendía evaluar.

Para cada ítem del banco de ítems hemos analizado su contenido, identificando qué elementos, campos de problemas, definiciones, propiedades, algoritmos de cálculo, representaciones y argumentaciones, incluye en relación a la media, a la mediana y a la moda. El análisis fue revisado varias veces hasta llegar a un acuerdo sobre el significado evaluado por cada uno.

Por otro lado, el análisis efectuado en los capítulos 3 y 4 nos proporciona información sobre qué elementos de significado de los previstos para la Educación Secundaria Obligatoria se han estudiado con mayor extensión en las investigaciones anteriores a la nuestra y cuáles están aún poco investigados. Todo ello nos servirá para comparar nuestros resultados con los de los estudios previos y extenderlos en lo que sea posible.

Ejemplos de análisis de ítems

Como se ha dicho arriba, en el Anexo 1 incluimos el banco de ítems, junto con las tablas que resumen el significado evaluado por cada uno de ellos, identificado a partir del análisis descrito. En lo que sigue presentamos algunos ejemplos que muestran como se ha llevado a cabo este análisis.

Ítem 1.1. *Si alguien te dice que estás en el promedio de tu clase, ¿qué significa?*

Para esta cuestión, hemos considerado que son posibles respuestas a la misma cualquiera de las definiciones de los promedios que conocen los estudiantes, media, mediana o moda. Asimismo, consideramos que no contiene otros elementos de significado como cálculos, propiedades, etc., salvo las representaciones usadas que son de tipo verbal.

Ítem 2.2. *Un estudio concluye que "los estudiantes de primaria australianos ven la TV un promedio de 3 horas al día. ¿Qué piensas de ese promedio (3 horas de TV) al día? Da un ejemplo de cuánto puede ver la TV alguna gente. Muestra cómo han podido averiguar este promedio los investigadores*"

Para este ítem hemos considerado que las respuestas de los alumnos pudieran involucrar los siguientes campos de problemas:

- PM4, *conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población*, puesto que si se considera la media como el promedio del que se habla, ésta sería el valor más probable. Esta interpretación es la que esperamos de la media, puesto que no decimos si la distribución es o no simétrica, aunque si el alumno la supone simétrica podría también aparecer el siguiente elemento.

- *PM3, obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados cuya distribución es aproximadamente simétrica.* Esta respuesta sólo es previsible si, como hemos dicho antes, el alumno considera que se encuentra frente a una distribución simétrica, aunque no quede dicho de forma explícita en la situación planteada.
- *PME1, encontrar un resumen estadístico en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa*, para el caso que el alumno piense en la mediana como el promedio citado, por suponer la posible presencia de valores atípicos, o que se trate de una distribución no simétrica, etc.
- *PMO1*, *obtener como valor representativo de una colección de datos, el más frecuente de ellos*, si se considera la moda como el promedio en cuestión.

Como algoritmos y procedimientos, pueden aparecer en las respuestas los siguientes, ya que los alumnos deberían realizar un cálculo con números sencillos para buscar el ejemplo:
AM1, cálculo de la media de variables discretas con datos aislados
AM7, buscar una distribución de media conocida
AME1, cálculo de la mediana de un número impar de datos no agrupados en clases
AME2, cálculo de la mediana de un número par de datos no agrupados en clases
AMO1, cálculo de la moda de una variable discreta con datos aislados.

Las representaciones son, en este caso, como en el anterior, verbales, aunque también podrían aparecer elementos simbólicos o numéricos si los alumnos los usan al efectuar operaciones en la búsqueda del ejemplo.

Entre las definiciones y propiedades contenidas en las respuestas pueden aparecer, por un lado, cualquiera de las definiciones de las tres medidas de posición central; y por otro, la propiedad E1, "*los promedios son representantes de un colectivo*" ya que esta idea está implícita en la respuesta que debe proporcionar el alumno.

De un modo análogo se han analizado todos los ítems, contando en total con 12 investigaciones revisadas y un conjunto de 59 ítems. Los resultados se presentan en las tablas contenidas en el Anexo 1, en las que se puede observar la aparición de los elementos de significado en cada uno de ellos.

Las argumentaciones usadas no se han podido analizar, puesto que formarían parte de los razonamientos que deben dar los alumnos para justificar sus respuestas a los ítems y no se puede saber a priori cuáles serán utilizadas, aunque en principio no esperamos argumentos formales deductivos.

5.4. DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO PILOTO

Una vez finalizada la construcción del banco de ítems y su análisis, se procedió a realizar una selección de los mismos para cubrir el contenido que se pretendía. Esto se llevó a cabo mediante un proceso iterativo de comparación entre el contenido evaluado por cada ítem, el contenido que se pretendía cubrir y el que se iba poco a poco completando al añadir ítems a la prueba.

Cuando estuvimos satisfechas con el conjunto de ítems seleccionados, en una serie de revisiones sucesivas se completaron algunas de ellos, ya que determinados elementos de los que queríamos evaluar no aparecían en ninguna de las investigaciones previas. Añadimos preguntas de invención propia y otras elaboradas a partir de cuestiones o ejercicios incluidos en los libros de texto analizados en el capítulo 4.

Una vez que se llegó a un cuestionario que parecía cubrir totalmente el contenido pretendido, se procedió a homogeneizar la presentación y a cambiar el contexto en los casos en que éste no fuese familiar al alumno. En la redacción de los enunciados se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos indicados por Brent (1989): Evitar detalles innecesarios, relevancia de las preguntas formuladas para el estudio, nivel de lectura adecuado, brevedad, evitar las cuestiones negativas, evitar cuestiones sesgadas o interdependientes, claridad y falta de ambigüedad, que la respuesta sea razonable para el sujeto y pueda darla, evitar hipótesis implícitas, nivel apropiado de abstracción, asegurar que las preguntas tienen el mismo significado para todos los sujetos.

El cuestionario piloto consta de una primera parte que pretende evaluar, en poco espacio de tiempo, una variedad lo más completa posible de elementos del significado institucional pretendido en la enseñanza secundaria. Está compuesta por 16 ítems, con un total de 27 subítems seleccionados de nuestro banco de ítems, aunque se han modificado ligeramente algunos con la intención de unificar el formato de presentación de las cuestiones y adecuarlos al contexto de los estudiantes de la muestra. A continuación se analiza el contenido de cada uno de ellos.

Ítem 1

Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1.2 hijos por familia. Explícanos qué significa para ti esta frase.
Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1.2? Justifica tu respuesta.

Centrado en la media, surgida de los campos de problemas "obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para tener una distribución uniforme" y "conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población", se ha tomado de Watson (2000), adaptándolo a nuestro contexto y eliminando el formato original, de respuesta múltiple. Se ha añadido una cuestión nueva, la segunda, que nos permitirá evaluar más elementos de significado que los que contenía el ítem inicial.

Incluye, implícitamente, las definiciones de media y moda, además de distintas propiedades, numéricas: "La media es un valor perteneciente al rango de la variable", "la media no tiene por qué ser uno de los valores de los datos", algebraicas: "El cálculo de la media no es operación interna", y estadísticas: "La media es un representante del conjunto de datos".

Como elemento de cálculo más relevante, este ítem requiere que, para una media dada, se busque una distribución, lo que implica que se conozca bien el algoritmo de cálculo de este parámetro y se sepa aplicar a la inversa. También se podría resolver por ensayo y error, calculando la media con datos aislados.

Ítem 2

Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.

María y Pedro dedican además1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes?
¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades : hacer deporte y escuchar música?

Este ítem también se ha elaborado a partir de uno tomado de Watson (2000). Se pretende evaluar si los estudiantes son capaces de calcular una media ponderada, pero además, averiguar si conocen y manejan la propiedad siguiente: "La media de la suma de dos o más variables es la suma de las medias de éstas". Por supuesto, para calcular la media ponderada deben conocer y aplicar los algoritmos de cálculo correspondientes. También incluye, implícitamente, definiciones de media, y la propiedad de ésta de no ser asociativa, vista como operación algebraica. Las representaciones son verbales y numéricas.

Ítem 3

Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? *¿Por qué piensas eso?*

Tomado de Tormo (1993), pretende evaluar si los estudiantes tienen en cuenta la propiedad: "La suma de las desviaciones de los datos con respecto a la media es nula". Aquí se pone de manifiesto el efecto de la balanza, la media como punto de equilibrio, de forma que unos datos deben exceder lo que a otros les falta para alcanzar este punto.

La presentación del ítem contiene únicamente elementos verbales, lo que puede suponer una dificultad para los estudiantes, más acostumbrados a manejar situaciones numéricas. No obstante, creemos que puede ser interesante averiguar si son capaces de entender y solucionar este tipo de situaciones. Para paliar un poco esa dificultad se le presenta en un contexto familiar para ellos.

Se presenta bajo la forma de ejemplo de uno de los campos de problemas de los que emerge la idea de media, obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para una distribución uniforme.

Ítem 4

Tenemos ***seis números*** *y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por* ***seis****. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?*

También tomado de Tormo (1993) incluye, como elementos de significado más relevantes, las propiedades de la media de "ser un valor perteneciente al rango de la variable" y "ser el centro de gravedad de la distribución", lo que obliga a todos los datos del conjunto a estar comprendidos entre los valores extremos de éste.

Se presenta en un contexto abstracto e implícitamente aparece la definición de media como algoritmo. Presenta la dificultad añadida de que se habla de una serie de números no conocidos, lo que obliga a construir una distribución para una media dada. Posiblemente el alumno deba calcular la media con datos aislados. Los elementos de representación son verbales y numéricos

Ítem 5

El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano? ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg.? En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

Se trata de un ítem de cálculo, tomado de Godino (1999), con el que se pretende medir, además de las competencias en el cálculo de la mediana, tanto con un número par de valores como impar, si los estudiantes manejan adecuadamente la presencia de valores atípicos. Se presenta la mediana como promedio más adecuado para una distribución en la que, debido a la presencia de un valor atípico, la media no es demasiado representativa.

Este ítem contempla dos propiedades numéricas: "*En el cálculo de la moda y la media intervienen todos los valores de los datos, mientras que en el de la mediana no*" y "*la media cambia siempre que cambia algún dato, mientras que la mediana puede no cambiar*". También contempla propiedades estadísticas: "*Los promedios son representantes de un colectivo", "La media y mediana coinciden únicamente en distribuciones simétricas"* y *"La media es menos resistente que la mediana".* Por otro lado, en cuanto a las definiciones de mediana, contiene de manera implícita, las que giran en torno a la idea de elemento central que divide a la población en dos partes iguales, y con respecto a la media, la centrada en la idea de promedio aritmético de un conjunto de valores.

Aparecen implícitamente las definiciones de media y mediana.

Se presenta en un contexto familiar para los estudiantes y de frecuente aparición en los libros de texto, y con una redacción que incluye elementos verbales y numéricos, creemos que sin demasiadas dificultades de interpretación.

Ítem 6

Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1	I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S
Grupo 2	S S I I A N A N I I S N A S I N N

¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?.

Este ítem, como el anterior, esta tomado de Godino (1999), y se centra, fundamentalmente en la mediana y su relación con los otros promedios. Se trata de una variable ordinal que no admite el cálculo de la media, por lo que los únicos parámetros de centralización que se pueden hallar como resumen de los datos son la mediana y la moda. Han de calcular la mediana con un número impar de datos aislados.

En este contexto, para comparar los dos grupos sería más recomendable la mediana, puesto que divide a la población en dos partes de igual tamaño y, además, se basa en los datos ordenados y estamos, precisamente, frente a una variable ordinal. No obstante, los estudiantes pueden optar por utilizar la moda como promedio más apropiado, por lo que, como se puede apreciar en la tabla resumen, tenemos en cuenta que este ítem incluye también elementos de significado relativos a este otro parámetro.

En cuánto a las propiedades, contiene una numérica: "*para el cálculo de la mediana no se tienen en cuenta todos los valores de los datos, sólo su posición una vez ordenados*"; otra algebraica: "*La mediana y la moda existen para variables ordinales, mientras que la moda no existe en este caso*"; y dos estadísticas: "*Los promedios son representantes de un colectivo" y "existe moda y mediana en variables cualitativas ordinales*". Incluye representaciones de tipo verbal y simbólico.

Ítem 7

Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía ______________ Juan ________________ Pablo________________

¿Es la única posibilidad? Explica cómo has obtenido tus resultados

Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

Este ítem se ha tomado de Gattuso (1996) y presenta dos subítems. El primero se centra en *encontrar* una distribución para una media dada y si la solución es o no única, pidiéndose argumentos que justifiquen las respuestas para codificarlos como justificaciones o argumentaciones utilizados por los alumnos. Esta parte, incluye elementos de cálculo de la media para variable discreta con datos aislados, dando una distribución para que se cumpla la condición. También incluye el campo de problemas de la media como solución al problema de conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población y la definición de media como suma ponderada de cada valor de la variable por su frecuencia.

El segundo subítem tiene como objetivo valorar si conocen la propiedad de la media de tener en cuenta todos los valores de los datos, incluido el cero. Además, esta pregunta incluye otras propiedades de la media: "En el cálculo de la media intervienen todos los valores", "*la media cambia cuando cambia algún dato*" y "*el cálculo de la media, como operación algebraica, es conmutativa y no tiene elemento neutro*". La presentación contiene elementos verbales y numéricos.

Ítem 8

Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

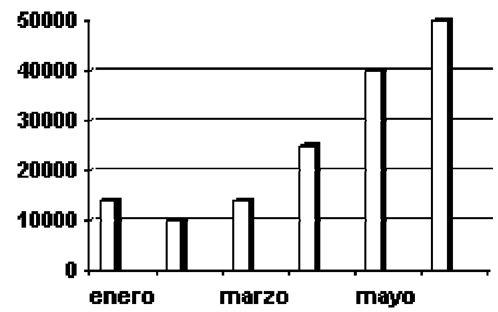
6.2 6.3 6.0 15.2 6.2 6.1 6.5 6.2 6.1 6.2

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿ Qué harías para calcularlo ?

Tomado de Garfiel y Konold (1992), aunque modificando la presentación de las cuestiones para hacerlo más abierto, se trata de uno de los problemas típicos de los que emerge la idea de media como estimación de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida.

Aunque es la media la respuesta correcta la cuestión planteada, se espera que los alumnos puedan optar por la mediana o la moda, de modo que hemos considerado que este ítem incluye definiciones, algoritmos de cálculo y procedimientos relativos a las tres medidas, en el caso de una variable discreta con datos aislados. Contiene también algunas propiedades: *"la media y la mediana puede no coincidir con ningún valor de los datos, mientras que la moda siempre es uno de ellos", " la media cambia al cambiar algún dato", "el cálculo de la moda, desde el punto de vista algebraico, es una operación interna, mientras que el de la media y la mediana no lo es", "los tres promedios, media, mediana y moda, son representantes de un colectivo"* y *"la suma de las desviaciones de un conjunto respecto a su media es cero"*. Las representaciones son verbales y numéricas.

Ítem 9



Observa este diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa *bocatta* durante los últimos 6 meses del año pasado:

a) Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.
b) Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

Este ítem se ha tomado de Zawojeswki (1986). Se centra en el cálculo de la media y la mediana a partir de un gráfico, concretamente un diagrama de barras, siendo estos los elementos de significado que contiene, junto con las definiciones correspondientes, en cada caso. La dificultad principal que presenta está precisamente en el formato gráfico, puesto que, como se ha dicho antes, la lectura de gráficos es uno de los aspectos que, según investigaciones realizadas, resultan difíciles a los alumnos. Las representaciones son gráficas y verbales.

Ítem 10

El siguiente conjunto de datos muestra las edades en que contrajeron matrimonio las mujeres en una muestra de 100 mujeres,

edad	*frecuencia*
15-19	*4*
20-24	*38*
25-29	*28*
30-34	*20*
35-39	*8*
40-44	*1*
45-49	*1*

¿Cuál es la media, mediana y moda de la edad de estas mujeres? Haz los cálculos que necesites en este mismo cuestionario.

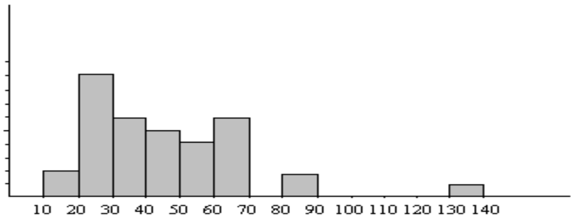
El objetivo del mismo es comprobar la capacidad de cálculo de la media, mediana y moda de un conjunto de datos agrupados en intervalos y presentados en una tabla de frecuencias absolutas. Este ítem se ha tomado del cuestionario que se construyó para nuestra Memoria de Tercer Ciclo (Cobo, 1998), si bien se ha añadido el cálculo de la media y la moda. Se ha eliminado el formato de respuesta múltiple con la intención de no influir en las respuestas.

Los elementos de significado que contiene son, principalmente algorítmicos, en un contexto de los de frecuente aparición en los libros de texto. Presenta dos propiedades como consecuencia de las respuestas que los estudiantes deben dar, una numérica: "*La moda es siempre uno de los valores de los datos, mientras que para la media y la mediana no es cierto, en general"* y otra algebraica, relacionada con ésta: "*El cálculo de la moda es una operación interna, mientras que el de la media y el de la mediana no lo son"*. En cuánto a las representaciones, tiene un formato de datos presentados en tabla de valores agrupados en intervalos.

Una segunda parte de la prueba consta de 6 cuestiones abiertas en las que los alumnos deben realizar razonamientos mediante la interpretación de promedios y sus propiedades en diferentes tipos de representaciones, debiendo poner en relación estos tres tipos de elementos en una misma tarea. Para la selección de las tareas se ha partido del cuestionario previo elaborado para nuestra Memoria de Tercer Ciclo (Cobo, 1998). Se han elegido las mismas situaciones, aunque cambiando el formato para proponer cuestiones abiertas y el tipo de gráficos para adaptarlos a la muestra de alumnos a la que está destinado, añadiendo preguntas relacionadas con todos los promedios, puesto que éste sólo se ocupaba de la mediana.

Ítem 11

Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.



Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes

media = 45.3 euros

Si____ No ____

Razona la Respuesta

Este ítem se elaboró a partir de uno tomado de Garfield y Konold (1992), para incluirlo en nuestra Memoria de Tercer Ciclo. Se ha modificado el formato de pregunta de modo que se convierta en un ítem abierto que permita total libertad en las argumentaciones y justificaciones de las respuestas aportadas por los alumnos.

Contiene bastantes elementos de significado, aún tratándose de una cuestión aparentemente breve. Por un lado, los datos se presentan en forma gráfica, y aunque es uno de los gráficos de aparición más frecuente en los libros de texto de secundaria, hay una primera tarea de interpretación del mismo. Por otro lado, al hablar de mediana, es necesario calcularla a partir del gráfico, con lo que ya aparecen algoritmos de cálculo. Por último, la afirmación que se hace relaciona la *mediana* con la *mayoría*, lo que puede dar pié a una confusión entre mediana y moda, que habrá que analizar si se produce o no, en función de las respuestas de los alumnos.

De manera implícita, incluye las definiciones de mediana y moda, que se deben tener en cuenta para contestar, aunque no se expliciten, y la de la media, puesto que su valor viene dado en el ítem.

En cuanto a las propiedades, aparecen fundamentalmente algunas de las estadísticas como "*los promedios son representantes de un colectivo*" y "*sólo en distribuciones simétricas coinciden media, mediana y moda*" y "*la media es menos resistente que la mediana y la moda al cambiar alguno de los datos, o al aparecer valores atípicos*"

Ítem 12

Juana piensa que, en el gráfico anterior, el alto valor de 133 euros debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda.

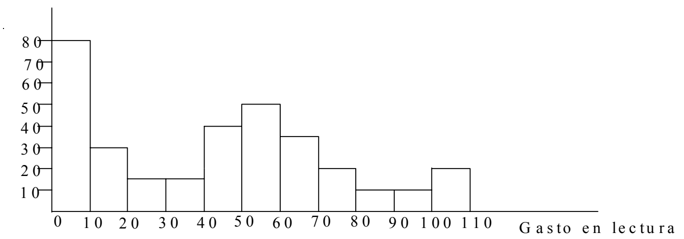
Si ____ No ____

Razona la respuesta

Este ítem, basado en el anterior, contiene todos los elementos ya descritos, pero hace hincapié, especialmente, en la propiedad de la mediana y la moda de ser más resistentes que la media cuando aparecen valores atípicos, como es este caso, propiedad que se pone claramente de manifiesto si se vuelven a hacer los cálculos suprimiendo el valor más alto, 133 euros.

Ítem 13

Un grupo de estudiantes hizo este otro histograma del dinero gasta cada semana en material de lectura.



Estadísticos calculados:

Media = 29 Euros. Mediana = 25 Euros

Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura, en el gráfico anterior porque la mayor parte de los estudiantes no gastaron nada o muy poco y el segundo grupo gastó entre 50 y 60 euros cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la mediana en su lugar para representar el gasto semanal "promedio" en material de lectura.

Si ____ No ____

Razona la respuesta

Este ítem se tomó también de Garfield y Konold (1992), pero esta vez sólo se ha modificado el formato del mismo para unificarlo con los que forman esta segunda parte del cuestionario, más abierta. Como todos los ítems de esta parte, está basado en un gráfico, de modo que la primera tarea consiste en interpretarlo. En cuanto al tema de los promedios, se trata de una distribución bimodal, por lo que se presenta la mediana como mejor representante de los datos que la media, cuestión que tienen que argumentar los alumnos.

Contiene definiciones de los promedios, de forma implícita, puesto que se ponen en juego los dos y es necesario tenerlas en mente; y como propiedades: "*para la media y la moda se tienen en cuenta todos los valores de los datos, mientras que para la mediana no", "sólo coinciden media, mediana y moda en distribuciones simétricas*" y "*la media es menos resistente que la mediana y la moda"*.

Las representaciones son gráficas, verbales y numéricas.

Ítem 14

Manuel dice que esta distribución tiene dos modas y sugiere que puedes obtener más información de estos datos si los divides en dos subgrupos y calculas el promedio en cada grupo por separado.

Si ____ No ____

Razona la respuesta

Este ítem está basado en el gráfico anterior y contiene los mismos elementos de significado ya descritos, a los que hay que añadir ahora el efecto que tiene la existencia de dos modas en una distribución sobre los otros promedios, apareciendo éstas como más adecuadas para resumir los datos que la media o la mediana, poco representativas en estos casos. Sólo tiene representaciones verbales.

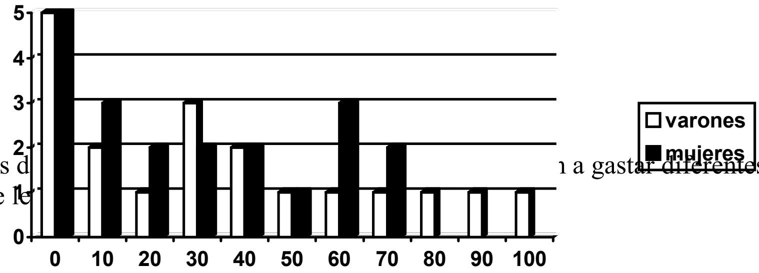
Ítem 15

Lola sugiere hacer el estudio en pesetas. ¿Cuál sería en ese caso el valor de la media?

De nuevo basado en los datos del ítem 13, la diferencia con los anteriores estriba en que la cuestión central de éste es la propiedad que la media de conservar cambios de origen y escala, en concreto en esta situación sólo cambia la escala. Se pretende analizar si los alumnos conocen y aplican esta propiedad o intentar rehacer todo el problema con las nuevas unidades. Sólo tiene representaciones verbales.

Ítem 16

Antonio quiere investigar las diferencias en los hábitos de gasto en varones y mujeres. Compara las cantidades gastadas en material de lectura en varones y mujeres, construyendo los gráficos siguientes:



Antonio cree que sus d... a gastar diferentes cantidades de dinero en material de le...
Si ____ No ____
Razona la respuesta

Este último ítem, tomado de la misma fuente que los anteriores, y modificado no sólo en el formato, sino también en el tipo de gráfico, tiene como objetivo fundamental averiguar qué uso hacen los alumnos de los promedios y los gráficos para comparar dos distribuciones.

Presenta la dificultad del tipo de gráfico, más complejo que los anteriores, puesto que contiene dos conjuntos de datos, por lo que es posible que a los alumnos les cueste más interpretar. En cuánto a los promedios, se centra exclusivamente en la mediana, y se pretende, por un lado que encuentren su valor en el gráfico, y por otro, que la utilicen como elemento de comparación de los dos conjuntos de datos. Las representaciones son gráficas, verbales y numéricas.

5.5. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO EVALUADOS. VALIDEZ DE CONTENIDO DEL CUESTIONARIO PILOTO

Como indican Carmines y Zeller (1979), toda investigación en la que se recogen datos empíricos tiene un componente aleatorio. En la investigación educativa no todos los alumnos responden igual a la misma prueba ni a preguntas semejantes en las que se varíe alguna variable del enunciado. Las lógicas limitaciones de tiempo y recursos hacen necesario en el trabajo experimental sobre un cierto contenido matemático, un proceso de muestreo, intencional o aleatorio de las posibles situaciones y contextos mediante los que puede enseñarse este contenido, de los tiempos, profesores y alumnos.

Las fuentes de error en la investigación pueden ser de naturaleza determinista y aleatoria. Los sesgos, de naturaleza determinista, aunque de magnitud desconocida, se derivan de nuestros procedimientos de investigación, tanto en la selección de la muestra, como en la elaboración de los instrumentos y en la toma de datos. Suelen afectar al valor de las variables siempre en la misma dirección, no disminuyen, en general, al aumentar el tamaño de la muestra y pueden ser evitados cambiando los métodos utilizados. La ausencia de sesgo se conoce como *validez.*

Los errores aleatorios son debidos a la variabilidad del material experimental y suelen afectar al valor de las variables, unas veces por exceso y otras por defecto, por lo que, al aumentar el tamaño de la muestra pueden disminuirse y también mediante la precisión o *fiabilidad* del instrumento. Cuando es necesario construir un instrumento para la recogida de datos, se requiere que el autor proporcione información sobre la validez y fiabilidad del instrumento. Esto significa que se brinda información sobre si el instrumento realmente mide lo que se pretende, es decir, sobre la ausencia de sesgo sistemático. En este apartado informaremos sobre la validez y en el próximo capítulo sobre la fiabilidad del cuestionario.

Hay diferentes definiciones de validez. La acepción de validez que mejor se adapta a nuestra investigación es la de validez de contenido y es una cuestión de grado, puesto que no puede reducirse a cero o uno. Para estudiar la validez de contenido el investigador debe comprobar que el instrumento constituye una muestra adecuada y representativa de los contenidos que se pretenden evaluar con él (Muñiz, 1994). Este ha sido el propósito del análisis conceptual previo basado en la determinación de los diversos elementos del significado institucional, así como el estudio de los libros de texto, que se tuvo en cuenta en la elaboración del instrumento. Asimismo, el análisis a priori de los ítems nos ha permitido mostrar los elementos de significado sobre los que se recoge información con cada uno de los ítems del cuestionario. Es respecto a este conjunto de elementos de significado que podemos asegurar una validez de contenido de la prueba.

Para mostrar con mayor claridad el contenido cubierto en el cuestionario, y la validez de contenido respecto al mismo, presentamos las tablas 5.1 a 5.3, en las que describimos los elementos de significado que esperamos los alumnos apliquen en la resolución de cada uno de los ítems del cuestionario. Prácticamente todos los elementos obtenidos en el análisis curricular presentado en el capítulo 4 están cubiertos con la prueba y se han añadido algunos nuevos.

Tabla 5.5.1. Definiciones y propiedades en los ítems

	Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Definiciones	DM1. Media como algoritmo	×	×		×	×		×	×		×	×	×	×	×		
	DM2. Media como promedio	×	×			×				×							×
	DME1. Mediana, valor central					×	×		×			×	×	×	×		×
	DME2. Mediana,dos partes					×	×			×	×			×	×		
	DMO1. Moda, valor más frecuente	×				×	×		×		×	×	×	×	×		×
	DMO2. Moda, diagrama diferencial											×	×	×	×		
Propiedades	N1. Valor en el rango	×			×												
	N2. Coincidencia con datos	×							×		×						
	N3. Intervienen todos los valores					×	×	×				×	×	×	×		
	N4. Cambios al cambiar un dato					×		×	×					×			
	A1. Operación interna	×							×		×						
	A2. No elemento neutro							×									
	A3. No asociativa		×														
	A4. No conmutativa							×									
	A5. Cambios origen y escala															×	
	A6. Media de la suma		×														
	A7. Moda puede no ser única													×	×		
	E1. Representantes de un colectivo	×				×	×		×			×	×	×	×		
	E2. Media, centro de gravedad			×	×												
	E3. Posición en distribucione simétr.					×						×	×	×	×		
	E4. Media poco resistente					×						×	×	×			
	E5. Suma desviaciones a la media			×	×				×								
	E8. Definidas según tipo de variable						×										
	E9. Mejor representante (bimodal)													×	×		

Hemos encontrado algunas pequeñas diferencias con los elementos de significado encontrados en el análisis de libros de texto realizado en el capítulo 4, como por ejemplo, el campo de problemas relacionado con la media de “conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población”, que no lo habíamos encontrado en ninguno de los textos analizados pero que sí hemos incluido en el cuestionario de evaluación construido. Cuando analicemos los resultados nos detendremos en este punto para ver si la ausencia de este elemento en los libros de texto, y posiblemente en la enseñanza, puede tener alguna relación con la dificultad de las preguntas que lo contengan. Lo mismo ocurre en el cálculo de la media a partir de gráficos o la propiedad de la media de no tener elemento neutro, que no aparecían en los libros de texto y sí en nuestro cuestionario.

Tabla 5.5.2. Representaciones y contextos en los ítems

ÍTEMS		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Representaciones	Verbales	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Símbolos						X										
	Gráficos									X		X		X	X		X
	Numéricos/tablas	X	X		X	X		X	X		X	X	X	X			X
Contextos	Cont-1							X		X		X	X	X	X	X	X
	Cont-2					X	X										
	Cont-3			X													
	Cont-4										X						
	Cont-10																
	Cont-11			X	X				X								
	Cont-12																
	Cont-13	X	X														

Tabla 5.5.3. Campos de problemas y algoritmos en los ítems

ITEMS		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Campos de problemas	PM1. Media mejor estimación								X								
	PM2. Media, reparto equitativo	X		X													
	PM3. Media en distrib. simétr.												X				
	PM4. Media, valor probable	X						X									
	PME1. Mediana, si media no representativa					X						X	X	X	X		
	PME2. Representante datos ordinales						X										
	PME3. Mediana para comparar conjuntos de datos																X
	PMO1. Moda como valor más frecuente						X					X	X	X	X		
	PMO2. Moda para datos cualitativos						X										
Algoritmos	AM1. Media datos aislados	X			X	X		X	X								
	AM2. Media ponderada		X							X	X						
	AM3. Media datos agrupados										X	X	X	X	X		
	AM4. Cálculo gráfico media									X							X
	AM6. Invertir algoritmo media	X	X		X			X									
	AM7. Buscar distribución dada la media	X			X			X									
	AME1. Mediana datos aislados (nº impar)					X	X										
	AME2. Mediana datos aislados (nº par)					X			X								
	AME3. Mediana, tabla frecuencias									X	X						
	AME5. Mediana datos agrup.										X	X	X	X	X		
	AME6. Cálculo gráfico mediana									X	X	X					X
	AMO1. Moda, datos aislados						X		X								
	AMO2. Moda, datos en tabla										X						
	AMO3. Moda, datos agrupados										X						
	AMO4. Cálculo gráfico moda									X		X	X	X	X		X

Hay algunos elementos que no hemos incluido en el cuestionario y que tampoco los encontramos en los libros analizados. Se trata de propiedades o algoritmos de cálculo de un nivel superior al que se puede pretender que alcancen alumnos del tramo educativo por el que nos interesamos aquí y que aparecen en el análisis del significado de referencia del capítulo 2, pero no en los libros de texto.

También hemos tenido en cuenta controlar las principales causas que producen problemas con la validez de contenido y que, según Cook y Campbell (1979) son:

- Inadecuada explicación o definición pre-operacional de los constructos. En nuestro caso, el constructo "significado personal de los promedios" ha sido suficientemente explicado y definido a partir del desglose de los componentes básicos de estos constructos o elementos de significado.
- Sesgo de operación única**.** Utilizar un solo ejemplar o medida de la variable. Nuestro cuestionario contiene una variedad de preguntas cada una de las cuales puede considerarse un indicador del significado personal de los estudiantes.
- Adivinanza de las hipótesis dentro de las condiciones experimentales, por parte de los sujetos, que intentan imitar el comportamiento que se espera de ellos. Esto es difícil en nuestro caso.
- Aprensión ante la evaluación. Los sujetos no desean ser evaluados realmente por el investigador, por considerar que se entromete en su intimidad, o quieren aparentar ciertas cualidades (competencia, etc) que no poseen. En nuestro caso sucede todo lo contrario, pues se motivó a los alumnos a colaborar y respondieron bien.
- Expectativas del investigador quien puede, sin quererlo, falsear las conclusiones. Hemos tratado de disminuir este riesgo, ateniéndonos a los resultados objetivos obtenidos.
- Interacción de diversas variables independientes. Es por ello que analizamos las posibles diferencias entre cursos; otras posibles variables concomitantes están aleatorizadas en los grupos.
- Generalización restringida, al no haber considerado adecuadamente aspectos relevantes del problema. Para evitar este sesgo, nos limitamos a generalizar a alumnos similares a los participantes en el estudio.

5.6. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA PILOTO Y CODIFICACIÓN DE LOS DATOS

5.6.1. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

Puesto a punto el cuestionario piloto, se hizo una primera prueba del mismo con dos cursos de Enseñanza Secundaria Obligatoria. Decidimos pasar la prueba en los cursos Primero y Cuarto que marcan el comienzo y final de dicha etapa educativa. Mientras que el primer grupo de alumnos nos puede indicar los conocimientos adquiridos sobre los promedios en la Educación Primaria al comparar con el segundo, podemos evaluar el progreso de los alumnos durante su formación secundaria.

No obstante, algunos de los ítems sólo se han incluido en el cuestionario destinado a los alumnos de cuarto curso, al considerar que sus contenidos difícilmente podrían ser conocidos por los alumnos de primero. En este caso se indica al analizar el ítem.

La muestra estuvo compuesta por 24 alumnos de primer curso y 29 alumnos de cuarto curso de dos centros públicos de la ciudad de Granada, con un perfil de alumnado lo suficientemente variado, en cuánto a condiciones familiares, sociales, académicas, etc., que pudiese constituir una buena muestra para el ensayo piloto. Los alumnos completaron el cuestionario durante una de las sesiones de su clase de matemáticas, en presencia de sus profesores o profesoras, que colaboraron con nosotros en la recogida de datos.

Al comenzar la sesión se explicó a los estudiantes la finalidad del cuestionario y la forma en que habrían de completarlo, pidiéndoles que explicaran con detalle sus respuestas.

Una vez recogidos los datos, se realizó un análisis de contenido de las respuestas dadas por los alumnos a cada una de las preguntas planteadas en los diferentes ítems de la prueba. Puesto que las éstas eran abiertas, las respuestas no se limitan a dos opciones (correctas/incorrectas) sino que tenían libertad para emplear los diferentes elementos de significado previstos en el análisis a priori de los ítems.

Por ello, dentro de las respuestas correctas diferenciamos el uso de cada uno de los elementos de significado previstos en el análisis a priori, de modo que en una misma pregunta un alumno podría usar uno o más elementos como parte de la misma. Asimismo, hemos realizado una clasificación de los diferentes errores, pudiendo un alumno cometer más de un error en un mismo apartado. Por esta razón, en los totales de respuestas que aparecen en las tablas resumen que se presentan más adelante, se encuentran casos de ítems en los que el número de respuestas supera al número de sujetos que responden a los cuestionarios.

Como sugieren Miles y Huberman (1984) el análisis de datos cualitativos es un proceso iterativo, por lo que, en lugar de efectuarse al final de la investigación, el análisis se va realizando desde el comienzo, y se revisa cuando sea necesario. Los datos son "palabras", en lugar de números, es decir, atributos, acciones, procesos, etc. En un principio se desea conservar todo su sentido, aunque después se pueda necesitar categorizar para identificar puntos comunes.

Por ello, el proceso de categorización ha sido inductivo y progresivo, conforme se leen y analizan las respuestas obtenidas, aunque hemos comenzado a partir del análisis a priori de los ítems. Sin embargo, muchas veces los alumnos proporcionan respuestas no esperadas, por lo que ha sido preciso realizar varias lecturas, comparar las respuestas semejantes, decidir los elementos de significado que se utilizan en cada una de ellas y finalmente llegar a las categorías que se presentan en las tablas.

Estas categorías se toman como provisionales en la fase piloto y serán refinadas en la muestra definitiva. A continuación presentamos una descripción de las respuestas obtenidas en cada apartado de los diferentes ítems, con ejemplos de las mismas.

5.6.2. DESCRIPCIÓN DE LAS CATEGORÍAS Y RESULTADOS POR ÍTEMS

Resultados en el ítem 1

a)Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1.2 hijos por familia. Explícanos qué significa para ti esta frase.
b) Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1.2 ? Justifica tu respuesta.

En el apartado a) queremos que los alumnos expresen con sus propias palabras su interpretación de un valor medio cuyo resultado es no entero, a pesar de que la variable de referencia es entera. Ha sido tomado de Watson (2000) y se han obtenido los siguientes tipos de respuesta, que tienen en cuenta, tanto el cálculo, como las propiedades que usan los alumnos:

- Idea de media como solución al problema de hacer un reparto equitativo (PM2). Ejemplo: *"quiere decir que al menos cada familia tiene un hijo, algunos tienen 2 o 3, y otras no tienen ninguno, pero al hacer esa media sale ese porcentaje".*
- Propiedad de media como representante de los datos (E1), o también la media como valor más probable en una población (PM4). Ejemplo: *"pienso que significa que el número de hijos*

por familia suele ser de 1 a 2".

- Cálculo correcto de la media de una variable discreta con datos aislados (AM1), que también supone el uso correcto de la definición (DM1). Ejemplo: *"que han sumado y lo han dividido y le han salido 1.2".*
- Incorrecta, confundiendo media y moda, lo que supone un error en la definición de media DM1. Ejemplo: *"que han hecho la media y lo más frecuente es entre 1 o 2 hijos en Andalucía".*
- Enfatizan que la media no es una operación interna (A1). Para ilustrar puede servir el mismo ejemplo anterior.
- Incorrecta, confundiendo media y valor mínimo. Supone un error en el elemento N1, la media está en el rango de variación de la variable. Ejemplo: "*cada familia tiene como mínimo 1.2 hijos".*

En la tabla 5.6.1 se presenta un resumen de los resultados obtenidos en la que hacemos notar que la mayor parte de los alumnos realiza un cálculo correcto y reconoce diversas propiedades numéricas de la media (reparto equitativo; no ser operación interna), aunque también en algunos casos se presentan algunos errores, estos son poco frecuentes. Los resultados son muy similares en los dos cursos.

Tabla 5.6.1. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas en el Ítem 1a

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Media como reparto equitativo (PM2)	11 (37.9)		8 (34.7)	2 (8.7)
Media como representante/valor más probable (E1/PM4)	2 (6.9)		1 (4.3)	
Definición media/cálculo datos aislados (AM1/DM1)	5 (17.2)		4 (16.4)	
Confunde media y moda (DM1)		3 (10.3)		
Media no es operación interna (A1)	3 (10.3)	1(3.4)	3 (13)	1 (4.3)
Media en el rango de variación (N1)		1(3.4)		

En el apartado b) los alumnos deben construir una distribución de datos que tenga un valor medio dado. Esta actividad es relativamente compleja, puesto que supone, además del conocimiento del algoritmo de cálculo de la media, la comprensión de la idea de distribución, como propiedad de un colectivo. Hemos encontrado las siguientes respuestas:

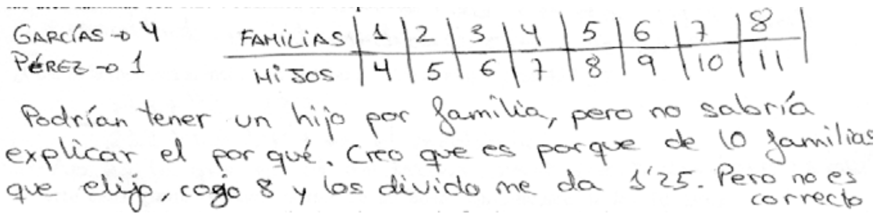
- Respuesta correcta, basada en la inversión del algoritmo de cálculo de la media, pero sin dar una distribución concreta que cumpla la condición (AM6). Esta ausencia de distribución puede deberse al enunciado de la cuestión, puesto que se pregunta por *las otras 8 familias* y no por cada una de ellas. Ejemplo: *"Las otras 8 familias tienen que sumar un total de 7 niños. Porque al hacer esa media necesitamos 12 niños".*
- Incorrecta, con errores de cálculo, aunque con un planteamiento algebraico de inversión del algoritmo correcto (AM6). Ejemplo:

$$1.2 = \frac{4+1+x}{10} \qquad \bar{x} = \frac{10+4+1}{1.2} = \frac{15}{1.2} = 12.5$$

- Encontrar una o varias distribuciones que tengan como media el valor dado (AM7). Ejemplo: *"De las 8 familias, que 7 de ellas tengan 1 hijo y la octava que no tenga hijos, ..."*
- Incorrecta por no tener en cuenta la propiedad del la media de no ser operación interna (A1), puesto que aportan una distribución de valores no enteros, no acorde a la situación planteada. Ejemplo: "*Podrían tener de 1 a dos niños. Porque la media es de 9.6 niños entre las 8 familias*:

Familia	*1ª*	*2ª*	*3ª*	*4ª*	*5ª*	*6ª*	*7ª*	*8ª*
Nº hijos	*2*	*1*	*1*	*1.6*	*1*	*1*	*1*	*1*

- Otros errores como no dar una distribución con estas condiciones, sino el valor de una media no pedida.


GARCÍAS → 4
PÉREZ → 1

FAMILIAS	1	2	3	4	5	6	7	8
HIJOS	4	5	6	7	8	9	10	11

Podrían tener un hijo por familia, pero no sabría explicar el por qué. Creo que es porque de 10 familias que elijo, cojo 8 y los divido me da 1'25. Pero no es correcto

Tabla 5.6.2. Resultados en el Ítem 1b

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Inversión del algoritmo de la media (AM6)	7 (24.1)		6 (26.1)	2 (8.7)
Dar una distribución de media dada (AM7)	11 (37.9)		8 (34.7)	
Media como operación interna (A1)		1 (3.4)		
Errores de cálculos aritméticos		3 (10.3)		
Otros errores		8 (27.3)		4 (17.3)

Hemos presentado los resultados de la segunda parte del ítem 1 en la Tabla 5.6.2. También en este caso la mayor parte de los estudiantes presenta un razonamiento numérico correcto. Una cuarta parte ha invertido el algoritmo de la media y una tercera parte han dado una distribución que se ajusta a lo pedido mostrando una comprensión de las ideas de distribución, y media como reparto equitativo, pero sin llegar a la inversión del algoritmo.

Los principales errores se producen porque no se ha comprendido el enunciado y se da un valor no pedido de la media, errores de cálculo, que se producen en su mayoría en los alumnos de 4º y en algún caso no se comprende que la media no es una operación interna. Aunque hay más errores en los alumnos de 4º, los de primero han dado menos respuestas.

Ítem 2

Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.

María y Pedro dedican además1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes?

¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?.

La ponderación correcta en el cálculo de la media, supone capacidad de aplicar la ley distributiva al sumar un conjunto de valores numéricos repetidos y también de percibir que la operación promedio no tiene la propiedad asociativa. Para comprobar si los alumnos comprenden estas propiedades y las aplican al cálculo de la media ponderada hemos utilizado este ítem.

En el primer apartado, las respuestas obtenidas han sido las siguientes:

- Correcta, mediante el cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados (AM1). Este elemento no estaba previsto en el análisis a priori y supone el uso de la definición correcta DM2. Ejemplo:

$$\frac{8+8+4+4+4+4+4+4+4+4}{10} = \frac{16+16+16}{10} = \frac{48}{10} = 4'8 \text{ horas}$$

- Correcta, mediante el cálculo de una media ponderada (AM2), que supone el uso de la definición DM1 en forma correcta. Ejemplo:

$$m = \frac{2.8+8.4}{10} = 4'8 \text{ horas/estudiante}$$

- Incorrecta, al calcular la media sin ponderar los pesos relativos a cada valor de la variable (error en AM2). Ejemplo: *"1.2 horas de media"*.
- Incorrecta, por un planteamiento incorrecto del problema, aplicando incorrectamente un razonamiento proporcional. Ejemplo:

He hecho los calculos con proporciones y con el resultado he sumado las medias.

$$\frac{7 \text{ días}}{4\ h} = \frac{2 \text{ días}}{1'1\ h} \qquad 1'1\ h + 8h = \boxed{9'1\ h}$$

Los resultados (Tabla 5.6.3) muestran que la tercera parte de los estudiantes de 4º han calculado bien la media ponderada, mientras que son muy pocos los de 1º que llegan a calcularla.

Una parte de los alumnos muestra dificultades en ponderación, por lo que asocian incorrectamente la propiedad asociativa a la operación de promediar, haciendo una generalización incorrecta de esta propiedad que ellos conocen para la suma y el producto.

Asimismo encontramos un número importante de otros errores, por aplicación incorrecta de razonamiento proporcional, debido a que el enunciado del problema guarda ligera semejanza con los relacionados con dicho tema. Son más frecuentes en los alumnos de 1º que, además, producen menos respuestas.

Tabla 5.6.3. Resultados en el Ítem 2a

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Definición de media (promedio)/cálculo con datos aislados (DM2/AM1)	5 (17.2)			5 (21.7)
Definición de media (algoritmo)/cálculo de media ponderada (DM1/AM2)	11 (37.9)	4 (13.8)	2 (8.7)	4 (17.4)
Errores varios no relacionados con los promedios		7 (24.1)		4 (17.4)

En el apartado b) encontramos las siguientes respuestas:

- Correcta, como cálculo de la media de una variable discreta con valores aislados (AM1) y definición de la media (DM2).
- Correcta, como cálculo de una media ponderada (AM2) y definición de la media (DM1).
  Los ejemplos, en ambos casos, son similares a los del apartado anterior correspondientes a las mismas categorías de respuestas.
- Incorrecta por confundir la media con el total (error en DM2) y tratan de calcular qué tiempo dedica cada estudiante, dividiendo el total de horas por el número de estudiantes. A continuación aplican incorrectamente la propiedad asociativa (error en A3). Ejemplo: *"Hacen una media escuchando música de 0.875 horas porque 1 hora: 2 estudiantes, 3 horas: 8 estudiantes, lo sumo = 0.875 horas de media.*

- Confusión de media con total (error en DM2), suma de totales (que sería correcto) y cálculo de la media a partir del total, que supone un conocimiento del algoritmo (AM6). Ejemplo: *"sumo las horas y las divido entre los estudiantes y obtengo el nº de horas que están escuchando música todos juntos que es 0.4h"*.
- Incorrecta, con errores en el planteamiento del problema o no relacionados con los promedios. Por ejemplo:

  música los 10 estudiantes?
  3 : 8 = 0'37 => 37 minutos
  1 h + 37 minut = 1 h 37 minut.
  $\frac{1\text{ h } 37\text{ min}}{10} = \boxed{13 \text{ minutos}}$

  Este alumno confunde la media con el total (error en DM2); aplica incorrectamente la propiedad asociativa y además convierte erróneamente las unidades de tiempo (error no relacionado con los promedios).

Tabla 5.6.4. Resultados en el Ítem 2b

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media con datos aislados (AM1),	5 (17.2)			
Cálculo de media ponderada (AM2),	11(37.9)	1 (3.4)	3(13)	4 (17.4)
Definición de media (promedio) (DM2)	5 (17.2)	5 (17.2)		
Definición de media (algoritmo) (DM1)	11(37.9)		3(13)	4 (17.4)
Propiedad asociativa (A3)		1 (3.4)		
Inversión algoritmo de la media (AM6)		4 (13.8)		
Errores no relacionados con los promedios		5 (17.2)		3 (13)

Por último, en el apartado c) deben ser capaces de operar con promedios para hallar la media de la suma. Queremos ver si los alumnos comprenden y son capaces de aplicar la propiedad de que la media de la suma de variables es igual a la suma de las medias. Encontramos las siguientes respuestas:

- Respuesta correcta, aplicando la propiedad de que la media de las sumas de dos variables coincide con la suma de las medias (A6). Ejemplo: *"Dedican 1.6 horas cada fin de semana a hacer deporte y escuchar música"*, tras haber calculado previamente las medias de las dos variables: 1.2 y 0.4, respectivamente.
- Correcta, haciendo un cálculo de media ponderada (AM2), sin aplicar la propiedad anterior. Ejemplo:

  25'6 + 26 = 51'6
  51'6 | 10
  5'16 h
  Dedica 5'16 horas cada fin de semana a escuchar musica y ha hacer deporete.

- Incorrecta, al no considerar que el cálculo de la media, como operación algebraica, es asociativa, cuando no lo es (error en A3). Ejemplo*: (4'8+2'4)/2=3'6*.
- Incorrecta, con errores en el cálculo de una media ponderada de las dos variables consideradas (error en AM2). Ejemplo:

  4'5 horas + 0'875 horas = 5'375 horas
  5'375 horas : 10 estudiantes = 0'5375 horas.

Tabla 5.6.5. Resultados en el Ítem 2c

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Media de suma como suma de medias (A6)	3 (10.3)			2 (8.7)
Cálculo de media ponderada (AM2)	4 (13.8)	5 (17.2)	2 (8.7)	2 (8.7)
Media no es asociativa (A3)		4 (13.8)	4 (17.4)	

Encontramos las principales dificultades en la ponderación y la propiedad asociativa por lo que estos resultados sugieren que estas dos propiedades son difíciles para los alumnos. En este caso el problema ha resultado difícil, pues han sido pocos los alumnos que llegan a una solución correcta, lo que confirma la dificultad de la idea de media ponderada sugerida, entre otros por Pollatsek (1981).

Ítem 3

Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca?
¿Por qué piensas eso?

Una interpretación posible de la media es como reparto equitativo y otra como mejor estimación de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida. Estas dos interpretaciones se apoyan en la propiedad de que la suma de las desviaciones de los datos a la media es nula. Es decir, cada dato que está por encima de la media, debe compensarse con otros por debajo de ella. El ítem tomado de Tormo (1993) trata de evaluar la comprensión de esta propiedad. Hemos encontrado las siguientes respuestas:

- Correcta, considerando que la media emerge del campo de problemas que pretende obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto en una distribución uniforme (PM2) y centro del gravedad de una distribución (E2). Ejemplo: *"Es igual porque al final se quedaron todos con la misma harina"*
- Correcta, aplican la propiedad "la suma de desviaciones sobre y bajo la media son iguales" (E5). Ejemplo: *"Es igual porque la cantidad de harina que dan los que tienen mucha es igual a la cantidad de harina que los que la reciben".*
- Incorrecta, con un error subyacente de obviar el hecho de que la media permite hacer un reparto equitativo (error en PM2) y en no comprender la propiedad de suma de desviaciones a la media. Ejemplo: *"Fue menor ya que al final tendrán que tener todos la misma cantidad".*

Tabla 5.6.6. Resultados en el Ítem 3

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Media como reparto equitativo (PM2)	2 (6.9)	3 (10.3)	4 (17.4)	9 (39.1)
Media en el centro de gravedad (E2)	2 (6.9)	3 (10.3)	4 (17.4)	9 (39.1)
Suma de desviaciones (E5)	6 (20.7)	3 (10.3)	1 (4.3)	5 (21.7)

Fueron pocos (27.7 %) los alumnos de 4º que dan una solución correcta a este ítem, que resultó difícil, en concordancia con los resultados de Tormo (1993). De las respuestas proporcionadas son escasas las que manifiestan un error en este ítem, pero muchos alumnos dejan la respuesta en blanco.

En primer curso el ítem todavía resultó más difícil, puesto que solo un 21.3% producen respuestas correctas y, aunque en este grupo son más los alumnos que intentan una respuesta, hay un gran número de errores.

En consecuencia, las ideas de centro de gravedad y reparto equitativo, así como la propiedad de suma de desviaciones no resultan intuitivas a los alumnos.

Ítem 4

Tenemos ***seis números*** *y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por* ***seis****. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?*

Hemos insistido en este ítem en la idea de distribución para analizar si los alumnos pueden dar una distribución de valores, conocida la media y el máximo. Las respuestas obtenidas en esta pregunta son las siguientes:

- Correcta, haciendo uso del cálculo de la media de un conjunto de valores aislados (AM1), tras buscar una distribución que cumplan la condición impuesta (AM7). Ejemplo:

$$\frac{5+3+4+4+4+4}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

- Incorrecta, al aplicar un algoritmo de cálculo incorrecto (error en AM1). Ejemplo: *"Si es posible, porque sí se puede hacer. Por ejemplo, cogemos cuatro veces el 5 y una vez el 4, lo sumamos y lo dividimos entre 6 y el resultado es 4".*
- Incorrecta, dando una distribución que no se corresponde con la condición pedida, o planteando que es imposible que exista una distribución así (error en AM6 y AM7). Ejemplo: "*No es posible porque entre 6 números donde el mayor es 5 no pueden sumar 24".*
- Incorrecta, respondiendo algo sin relación con el problema planteado. Ejemplo: *"No es posible porque en todo caso saldría –4 y no 4".*

Tabla 5.6.7. Resultados en el Ítem 4

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media con valores aislados (AM1)	13(44.8)	2 (6.9)	10(43.5)	1 (4.3)
Invertir el algoritmo de la media/dar una distribución para media dada (AM6/AM7)	13(44.8)	3 (10.3)	10(43.5)	8 (34.7)
Errores no relacionados con los promedios		4 (13.8)		2 (8)

En este caso una proporción importante de alumnos da una solución correcta, proporcionando una distribución para la media dada, con lo que comprenden el cálculo de la media con datos aislados y la inversión del algoritmo. Los resultados son similares en ambos cursos.

El número de errores es mayor en alumnos de primer curso, sobre todo al intentar dar una distribución partiendo de la media.

Respecto a los errores, la mayor diferencia ocurre al dar la distribución pedida. Algunos alumnos también aplican un algoritmo de cálculo incorrecto y en otros casos se da una solución no relacionada con el problema.

Ítem 5

El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano? *¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg.?* *En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.*

En el ítem 5 valoramos el conocimiento de la mediana y su cálculo en datos aislados sin ordenar. En el apartado a) de este ítem se han obtenido como respuestas las siguientes:

- Correcta, calculando la mediana de una variable discreta con datos aislados (AME1) y aplicando, de forma implícita, su definición (DME2). Ejemplo: *"la mediana es 19".*
- Incorrecta, no se comprende la definición de mediana, puesto que calculan su valor sin ordenar previamente los datos (error en DME2). Ejemplo: *"la mediana es 16".*
- Incorrecta, confundiendo la mediana con la media y haciendo el cálculo de esta última (error 6). Ejemplo: "*Yo creo que el peso mediano es la media, por lo tanto la calculo. 179÷9=19.8 kg".*

Tabla 5.6.8. Resultados en el Ítem 5a

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo mediana nº impar de datos aislados (AME1)	10(34.5)		5 (21.7)	2 (8.7)
Definición de mediana como centro (DME2)	10(34.5)	2 (6.9)	5 (21.7)	
Confundir mediana y media (DM2)		15(51.7)		12 (52.2)
Cálculo media, datos aislados (AM1)	15(51.7)		12(52.2)	

La tercera parte de los alumnos de 4º curso y la quinta de los de 1º curso han aplicado correctamente la definición de mediana como centro del conjunto de datos y han sido capaces de calcularla, lo que supone ordenar primero el conjunto de valores.

Por otro lado la mitad de cada grupo ha confundido media y mediana, pero sin embargo, han sido capaces de calcular correctamente la media.

Hay un número pequeño de errores consistentes en confundir la idea de mediana como centro, no ordenando el conjunto de datos y errores en el cálculo.

En el apartado b) las respuestas que aparecen son las mismas que en el a), con la diferencia de que, para calcular la mediana ahora lo deben hacer con un número par de datos, en lugar de impar que era en el apartado anterior (AME2).

La tabla 5.6.9. muestra un resumen de los resultados. En este caso baja ligeramente las respuestas correctas, posiblemente por la dificultad de calcular con un número par de datos. Aumentan en primer curso los errores referidos a la idea de media como centro, posiblemente por incluir un valor atípico.

Tabla 5.6.9. Resultados en el Ítem 5b

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo de mediana nº par de datos (AME2)	5 (21.7)		4 (13.8)	2 (8.7)
Definición de mediana como centro(DME2)	8 (27.6)	2 (6.9)	4 (13.8)	12 (52.2)
Error definición, confundir mediana y media (DM2)		17(58.6)		8 (34.8)
Cálculo media, datos aislados (AM1)	17(58.6)		8 (34.8)	

En el apartado c) lo que se pretende es averiguar si son capaces de elegir un buen representante de los datos en presencia de valores atípicos, lo que hace que sea preferible la mediana a la media. Las respuestas son las siguientes:

- Correcta, basándose en la presencia del valor atípico (E4/N3). Ejemplo: *"Aproximadamente sería buena si no fuera por el de 43 kg que se diferencia mucho de los demás. Digo esto porque todos los números son parecidos".*
- Correcta, basándose en la distribución del conjunto de datos y su posible simetría (E3). Ejemplo: *"No, porque hay niños que pesan muy poco y otros que pesan mucho".*
- Incorrecta y sin tener en cuenta el valor atípico (error en E4/N3). Ejemplo: *"Si, porque la*

media aritmética te ayuda a observar mejor los datos".

- Incorrecta basándose en el resultado obtenido y su presunta proximidad a los datos (error en E3). Ejemplo: *"Sí, porque así el resultado se acercará a todos los datos".*
- Incorrecta y justificando la respuesta únicamente en la posibilidad de cálculo del parámetro. Ejemplo:*"Sí, porque sumas todos los resultados y los divides por el número de datos y sale la media aritmética".* Error de aplicación de N3

Esta parte del ítem aparece como la más difícil de contestar puesto que, como muestra la tabla, el número de respuestas correctas, en 4º, es sensiblemente más bajo que en los apartados anteriores, mientras que aumenta el número de errores. En 1º lo que se reduce es el total de respuestas dadas por los alumnos, otra prueba de la dificultad de realizar la elección de representantes de datos.

Tabla 5.6.10. Resultados en el Ítem 5c

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
La media es menos resistente a valores atípicos/intervienen todos valores (E4/N3)	2 (6.9)	4 (13.8)	1(4.3)	3 (13)
En distribuciones no simétricas no coinciden media y mediana (E3)	4 (13.8)	8 (27.6)		
Otros errores no relacionados con los promedios		3 (10.3)		3 (13)

Ítem 6

Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1	I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S
Grupo 2	S S I I A N A N I I S N A S I N N

¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?.

En este ítem se ha intentado evaluar si los alumnos utilizan los parámetros estadísticos para tomar decisiones acerca de un conjunto de datos y, si lo hacen, por cuál de ellos optan en el caso de una variable ordinal como la que se propone aquí.

Este ítem lo hemos incluido sólo en el cuestionario pasado en 4º de ESO, puesto que pensamos que los alumnos de 1º no tienen suficientes conocimientos para contestarlo. Se han obtenido las siguientes respuestas. En el apartado a):

- Correcta: Entienden la mediana como un resumen estadístico adecuado para un conjunto de datos ordinales (PME2). Ejemplo: *"El segundo grupo ha obtenido mejores notas:*
  Grupo 1: 5I 7A 3N 8S
  Grupo 2: 5I 3A 5N 4S"
- Optan por la moda, como valor más frecuente, para representar este conjunto de datos, sin ser la medida más adecuada en el contexto del problema (PMO1). Ejemplo: "*El grupo 1. Son más niños y han suspendido el mismo número de alumnos que el grupo 2, que tiene menos niños".*

  Esta elección es comprensible, porque los alumnos no están familiarizados con datos ordinales y lo tratan como nominales, para los cuales la moda sería un valor representativo valido. Tomaremos como correcto el uso de este elemento de significado en este contexto, aunque no sea la mejor elección posible.

- Incorrecta, al convertir la variable en numérica, y calcular la media, que no es adecuada para datos ordinales (error en A8).

Ejemplo:

"

Grupo 1	*0 5 5 8 8 10 10 0 0 0 5 5 5 8 10 10 0 5 5 10 10 10 10*
Grupo 2	*10 10 0 0 5 8 5 8 0 0 10 8 5 10 0 8 8*

Media del grupo 1: 5,6

Media del grupo 2: 4,8. Ha obtenido mejores notas el grupo 1"

- Incorrecta, al no usar ningún parámetro estadístico para tomar una decisión, no reconociendo los promedios como valores representativos (error en E1) y en particular, no reconociendo el campo de problemas PME2 (la mediana como representante de datos ordinales). Ejemplo: *"El grupo 1, porque tienen los mismos I pero más S".*
- Incorrecta, usando razonamientos no relacionados con el problema. Como ejemplo puede servir el anterior.

Tabla 5.6.11. Resultados en el Ítem 6a

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Mediana, representante para ordinales (PME2)	3 (10.3)	
Moda como valor más frecuente (PMO1)	12 (41.4)	
Moda siempre definida (error en A8)		2 (6.9)
Mediana como representante datos ordinales(E1; PME2)		1 (3.4)
Otros errores		10 (34.5)

Podemos ver, según las respuestas obtenidas, que el uso de la estadística en contextos como este para tomar decisiones no es demasiado frecuente, puesto que sólo la mitad, aproximadamente, de los alumnos responden a partir de un parámetro estadístico. Incluso cuando usan un parámetro, la mayor parte elige la moda como parámetro más representativo de esta situación, en lugar de la mediana que sería más apropiada, puesto que divide a la población en dos partes de igual tamaño y además se trata de una variable ordinal.

También hay un porcentaje elevado de respuestas con errores no relacionados con el problema, lo que puede indicar que ha resultado ser un ítem difícil para estos alumnos.

En el apartado b) encontramos las siguientes respuestas:

- Optan por la moda, como valor más frecuente, para representar este conjunto de datos, sin ser la medida más adecuada en el contexto del problema (PMO1), igual que en el apartado anterior. Se puede ver el mismo ejemplo incluido en el apartado a de este ítem.
- Incorrecta, al tratar de usar la media en lugar de la mediana como parámetro para representar una variable ordinal, cuando el cálculo de la primera no es posible (error en A8). Ver ejemplo dado para este mismo error en el apartado a del ítem.

Tabla 5.6.12. Resultados en el Ítem 6b

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Moda como valor más frecuente (AMO1)	10 (34.5)	
Mediana existe en variables ordinales (A8)		1 (3.4)
Otros errores		5 (17.2)

Se repite elegir la moda en lugar de la mediana como parámetro más representativo y, si en el apartado anterior había pocas respuestas en que se eligiese la mediana, aquí no aparece ninguna, como se puede ver en la tabla. Pensamos que este tipo de tarea no ha sido propuesta en la enseñanza recibida y los alumnos han recurrido a la idea de moda para resolverlo.

Ítem 7

Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía ______________ Juan ________________ Pablo________________

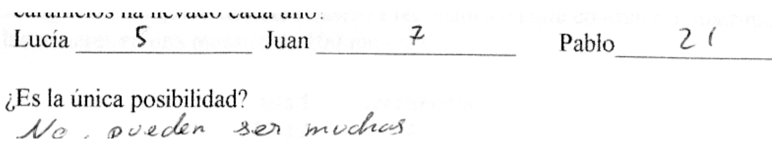
¿Es la única posibilidad? Explica cómo has obtenido tus resultados

Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

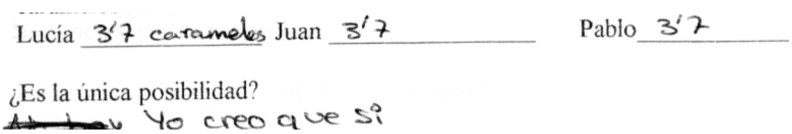
Este ítem incluye dos primeros apartados en los que se debe dar una distribución para la media conocida y argumentar si hay solución única o puede haber varias distribuciones correctas. Esta parte de argumentación es la que lo diferencia del apartado b) del ítem 1, en el que sólo se pedía dar una distribución de media conocida. También se introduce la idea de que un valor nulo afecta a la media para ver si los alumnos asignan erróneamente un elemento neutro a la operación de promediar.

En el apartado a) de este ítem hemos encontrado las siguientes respuestas:

- Correcta, con definición correcta de la media como algoritmo (DM1) dando una distribución que tiene como media la indicada (AM7), como única posibilidad, o como una de varias posibles distribuciones. Ejemplo:


caramelos ha llevado cada uno?
Lucía 5 Juan 7 Pablo 21
¿Es la única posibilidad?
No, pueden ser muchas

- Incorrecta, con confusión de media y total (error en DM1). Dan una distribución que no cumple la condición pedida (error en AM7). Ejemplo:


Lucía 3'7 caramelos Juan 3'7 Pablo 3'7
¿Es la única posibilidad?
Yo creo que sí

- Correcta, media como valor más probable (PM4). Son las respuestas que dan como solución los valores "11, 11, 11".

Tabla 5.6.13. Resultados del ítem 7a

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Media como valor más probable (PM4)			4 (17.4)	
Dar distribución de media dada (AM7, DM1)	25(86.2)	1 (3.4)	13(56.5)	1 (4.3)

En este caso un gran porcentaje de alumnos en ambos grupos, particularmente el primero han sido capaces de resolver el problema, proporcionando una distribución que cumple los requisitos pedidos.

En el apartado b) las respuestas encontradas son:

- Correcta, considerando la media como el valor más probable al tomar un elemento de la población (PM4) y conocimiento del algoritmo inverso (AM6). Ejemplo: *"Sumando tres veces la media y dividiéndola ente 3"*.
- Correcta, utilizando el algoritmo de cálculo de la media invertido (AM6). Ejemplo: *"Multiplicando el número de caramelos de la media por el número de personas y me da el número de caramelos total"*.
- Incorrecta, con errores en la inversión del algoritmo de cálculo de la media (error en AM6). Ejemplo:

3 personas — 11 caramelos
1 persona — 3'7 caramelos.

Tabla 5.6.14. Resultados del ítem 7b

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Media como valor más probable (PM4)	15 (51.7)		1 (3.4)	
Invertir algoritmo de la media (AM6)	6 (20.7)		8 (34.7)	

Los resultados obtenidos en esta parte del ítem muestran un porcentaje muy elevado de respuestas correctas, mejorando incluso los porcentajes del ítem 1b, muy similar a éste. Esto confirma la idea de que los estudiantes presentan un razonamiento numérico correcto. Se aprecia una diferencia entre ambos cursos en el reconocimiento de la media como valor más probable de una distribución, que hemos encontrado en un porcentaje importante de las argumentaciones utilizadas por los estudiantes de 1º para justificar sus respuestas, lo que indica que van adquiriendo una comprensión de la media que incluye distintos componentes de los estudiados.

En el último apartado de este ítem se incluye un dato con valor 0 para evaluar si los estudiantes conocen la propiedad de la media de cambiar al variar cualquiera de los datos y la no existencia de elemento neutro en el cálculo de la media, visto éste como una operación algebraica. Se han obtenido estas respuestas:

- Correcta, aplicando correctamente la propiedad de la presencia de un valor cero en el cálculo de la media (A2) y con conocimiento del algoritmo inverso (AM6). Ejemplo: *"Ese niño no debería contar, pero si cuenta es: 11· 3=33, 33÷4=8.25"*.
- Correcta, calculando simplemente la media con todos los datos, incluyendo el valor nuevo, lo que supone utilizar la propiedad de que la media cambia al variar un valor de los datos (N4). Ejemplo: *"La media es 33÷4=8.25"*.
- Incorrecta, sin tener en cuenta la presencia del valor cero, es decir, considerándolo como elemento neutro, lo que supone además no tener en cuenta que, al cambiar un dato, la media cambia (error en A2 y en N4). Ejemplo: *"Sigue siendo de 11 porque al no llevar caramelos no cambia ningún resultado"*.

Tabla 5.6.15. Resultados del ítem 7c

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
La media no tiene elemento neutro (A2)	18 (62.1)	6 (20.7)	8 (34.7)	2 (8.7)
Cálculo media datos aislados (AM1)	2 (6.9)	6 (20.7)		2 (8.7)
Cambia el valor al cambiar un dato (N4)	2 (6.9)	6 (20.7)		2 (8.7)

Los resultados que se resumen en la tabla 5.6.15, muestran que los estudiantes de 4º conocen y aplican correctamente, en un porcentaje elevado, la propiedad de no existencia de elemento neutro en el cálculo de la media. No obstante, también aparece un porcentaje considerable de errores en esta misma propiedad, así como de no tener en cuenta la variación que produce en la media el cambio en los datos. En 1º se registra un total de respuestas inferior, aunque en porcentaje, la proporción de respuestas correctas y de errores no varía mucho con respecto a las de 4º.

Ítem 8

> Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:
>
> 6.2 6.3 6.0 15.2 6.2 6.1 6.5 6.2 6.1 6.2
>
> Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿ Qué harías para calcularlo ?

En este ítem se intenta averiguar si los alumnos reconocen en este problema, la media, como solución. Las respuestas obtenidas han sido las siguientes:

- Correcta, con la idea de que la media surge de la situación de estimar una medida a partir de diversas mediciones en presencia de errores (PM1), apreciando la propiedad E5 (la media minimiza la suma de errores). Ejemplo: *"Calcularía su media"*.
- Correcta, con la idea de que la media surge de la situación de estimar una medida a partir de diversas mediciones en presencia de errores (PM1), apreciando la propiedad E5 y explicitando el algoritmo de cálculo de la media (AM1). Ejemplo: *"Sumaría todos los resultados y los dividiría por el número de pesos. La suma de todos los resultados es de 71, dividido entre 10, me da 7.1"*.
- Incorrecta, no aprecia el campo de problemas PM1 y no aprecia la propiedad E5. Da la moda como solución: *"Cogería los datos más frecuentes"*.
- Incorrecta, por no hacer uso de la estadística, sino de la idea de errores en la medición. Error en la propiedad E1, relacionada con la idea de que los parámetros de centralización son representantes de un conjunto de datos y permiten obtener información del mismo. Ejemplo: *"Calcular el error relativo o absoluto"*.

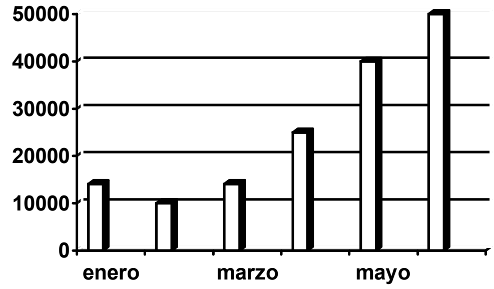
Tabla 5.6.16. Resultados del ítem 8

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media de datos aislados (AM1)	2 (6.9)		4 (13.8)	
Media como mejor estimación si hay errores (PM1)	10 (34.5)		2 (8.7)	
Suma de desviaciones a la media (E5)	10 (34.5)		2 (8.7)	
Confundir media con moda (DM1)		6 (20.7)		1 (4.3)
Media es representante de un conjunto (E1)		5 (17.2)		7 (18.1)

Como se puede apreciar en la tabla 5.6.16, sólo la mitad, aproximadamente, de los alumnos de 4º relacionan este problema con la media y únicamente un quinto de los de 1º lo hacen. Aparece un porcentaje bastante elevado de respuestas erróneas, fundamentalmente en 4º, cuyos alumnos muestran un conocimiento pobre del uso de la media, puesto que optan por la moda para resolver esta situación, o bien, ni siquiera usan la estadística. En primero, además se aprecia que el número de respuestas, tanto correctas como incorrectas, es escaso, lo que puede indicar que estos alumnos no han sabido abordar el problema.

Ítem 9

La presentación de la distribución en forma gráfica nos va a permitir analizar las dificultades que los estudiantes presentan al interpretar gráficos y al realizar los cálculos de parámetros estadísticos a partir de ellos.

> Observa este diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa *bocatta* durante los últimos 6 meses del año pasado:
>
> 
>
>
> a) Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.
> b) Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

En el apartado a) hemos obtenido las siguientes respuestas:

- Correcta, convirtiendo el gráfico en una variable numérica, discreta, con datos presentado en una tabla y aplicando el algoritmo de cálculo de la media adecuado a esta nueva situación (AM1). Ejemplo:

  $\frac{14000 + 10000 + 13000 + 25.000 + 40.000 + 50.000}{6} = \boxed{25.000 \text{ bocadillos}}$

- Correcta, sin especificar el modo de hallarla, estimando a partir del gráfico (AM4). Ejemplo: *"Unos 25000 bocadillos de media".*
- Incorrecta, bien por dar un valor de la media que no se corresponde, o bien por convertir el gráfico en valores numéricos y no calcular la media (errores en AM1). Ejemplo:

  Enero → 14.000 Marzo → 14.000 Mayo → 40.000
  Febrero → 10.000 Abril → 25.000 Junio → 50.000

Tabla 5.6.17. Resultados del ítem 9a

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media de datos aislados (AM1)	8 (27.6)	1 (3.4)	7 (24.1)	1 (4.3)
Cálculo a partir de un gráfico (AM4)	3 (10.3)			1 (4.3)
Errores no relacionados con el tema		14 (48.3)		1 (4.3)

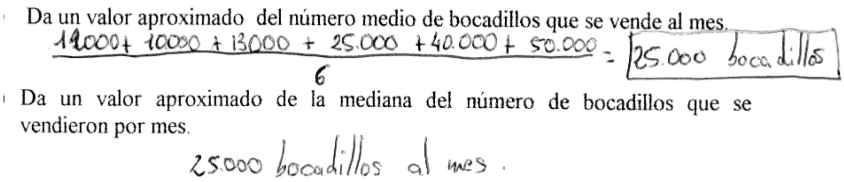
En el apartado b) hemos encontrado:

- Respuesta correcta o, al menos, los dos valores entre los que se encuentra la mediana (AME3/4). Ejemplo:

  1000 13000 15000 | 24000 40000 50000

  Unos 19500 bocadillos

- Incorrecta, por confundir mediana con media (error en definiciones de media y mediana DM2, DME1). Ejemplo:


Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.

$\frac{14000 + 10000 + 13000 + 25.000 + 40.000 + 50.000}{6} = \boxed{25.000 \text{ bocadillos}}$

Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

25000 bocadillos al mes.

- Incorrecta, dando valores de la mediana que no se corresponden con los datos del problema. Ejemplo: *"25.000"*. Error en cálculo AME3/4

Tabla 5.6.18. Resultados del ítem 9b

	4º ESO (n=24)		1º ESO (n=29)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo de mediana a partir de gráfico (AME6)	6 (20.7)			1 (4.3)
Confundir mediana con media (DME2)		2 (6.9)		2 (8.7)
Otros errores		9 (31)		1 (4.3)

Las tablas 6.5.17 y 6.5.18 muestran la dificultad que el uso de gráficos tiene para estos alumnos, puesto que, como se puede ver, el porcentaje del respuestas totales es muy bajo en los dos cursos, aunque lo es aún más en 1º. De estas pocas respuestas obtenidas la mayoría son, además, erróneas, fundamentalmente debido a un cálculo incorrecto de la mediana o a otros errores derivados de no interpretar adecuadamente el gráfico. Entre las respuestas correctas, hay un porcentaje importante que se obtiene al traducir el gráfico a valores numéricos y calcular la media a partir de ellos, lo que muestra que este formato les resulta más fácil de manejar a los alumnos de la muestra.

Ítem 10.

El siguiente conjunto de datos muestra las edades en que contrajeron matrimonio las mujeres en una muestra de 100 mujeres,

edad	*frecuencia*
15-19	*4*
20-24	*38*
25-29	*28*
30-34	*20*
35-39	*8*
40-44	*1*
45-49	*1*

¿Cuál es la media, mediana y moda de la edad de estas mujeres? Haz los cálculos que necesites en este mismo cuestionario.

Se trata de un ítem en el que fundamentalmente se evalúa la competencia de cálculo que muestran los estudiantes. Se han obtenido las siguientes respuestas en el cálculo de la media:

- Reconocer, en el caso de la media, que se trata de una media ponderada (DM1), pero no llegar a calcularla por no saber calcular la media en datos agrupados en intervalos de clase (error en AM5). Ejemplo: *"Aquí se usa la media aritmética ponderada"*.
- Calculo incorrecto de la media en datos agrupados (error en AM2) y no se reconoce que se trata de una media ponderada. Ejemplo: *"La media es 30-34"*.

En el cálculo de la moda:

- Indicar correctamente el intervalo modal, sin hallar el valor de la moda (AMO3). Ejemplo: *"Moda 20-24"*.
- Incorrecta, dando un intervalo modal que no es correcto (error en AMO3). Ejemplo: *"Mediana 30-34 y moda 30-34"*.

En el cálculo de la mediana:

- Incorrecta, dando un intervalo mediano que no es correcto (error en AME5). Ejemplo: *"Mediana 30-34 y moda 30-34"*.

Tabla 5.6.19. Resultados del ítem 10

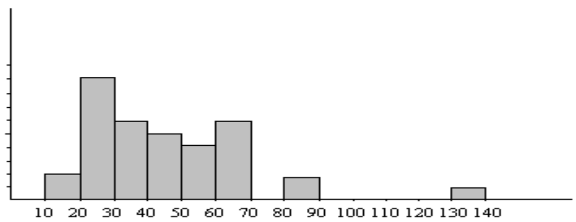
	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media con datos agrupados (AM3)	3 (10.3)	5 (17.2)
Cálculo de moda con datos agrupados (AMO3)	5 (17.2)	4 (13.8)
Cálculo de mediana datos agrupados (AME5)	1 (3.4)	2 (6.8)

La tabla 6.5.18 muestra un porcentaje muy bajo de respuestas a este ítem y, además, en el caso del cálculo de la media y la mediana, un porcentaje de errores que, casi, duplica al de aciertos. La moda sí parecer ser más fácil de calcular, puesto que hay más respuestas correctas que errores, aunque la diferencia no es mucha.

Este ítem se le ha pasado sólo a los alumnos de 4º, puesto que para poder contestarlo se requieren unos conocimientos que los de 1º aún no han estudiado.

Ítem 11

Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.



Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes
media = 45.3 euros

Si____ No ____
Razona la Respuesta

Este ítem contiene distintos elementos de significado, aún tratándose de una cuestión aparentemente breve. Por un lado, los datos se presentan en forma gráfica, lo que ya supone una primera tarea de interpretación del mismo. Por otro lado, al hablar de mediana, es necesario calcularla a partir del gráfico, con lo que ya aparecen algoritmos de cálculo, y además, la afirmación que se hace relaciona la *mediana* con la *mayoría*, lo que puede dar pié a una confusión entre mediana y moda, lo que implicaría la presencia errores en las definiciones de ambos parámetros.

Las respuestas encontradas han sido las siguientes:

- Cálculo de la mediana a partir de un gráfico (AME6), en algunos casos de forma correcta, y en otros con diversos errores. Por ejemplo: *"Sí, porque la mediana se calcula hallando el 50% de los euros gastados, y da de 40 a 50"*; o bien, *"No, porque la mediana es 87"*.
- Uso de las definiciones de mediana, la que incluye la idea de centro y la que divide a la población en dos partes iguales, DME1 y DME2, respectivamente. Estas respuestas están relacionadas con la confusión entre mediana y moda. Por ejemplo: "*... la mediana es el término central de entre todos*" o "*La mediana era el 50%, es decir, la mitad"*.
- Definición de moda como valor más frecuente de la variable (DMO1). En el contexto de este ítem, esta respuesta constituye un error puesto que provoca una confusión entre mediana y moda. Ejemplo: "*La mediana sí es 47 euros porque es el 50% del gasto semanal*",

cuando lo que el texto dice es que la moda, que se corresponde con la mayoría, es 47, mientras que si se calcula la mediana, su valor es otro.

- Errores derivados de no tener en cuenta la propiedad de los parámetros de centralización de que sus valores coinciden únicamente en las distribuciones simétricas y no en otros casos como el del ítem que nos ocupa (E3). Ejemplo: "*Sí, porque el valor que hay entre los resultados es la media*".

Tabla 5.6.20. Resultados del ítem 11

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Cálculo gráfico de la mediana (AME6)	2 (8)	14 (56)
Definición de mediana, idea de centro (DME1)	3 (12)	5 (20)
Definición de Me como valor que divide a la población en dos partes iguales (DME2)	5 (20)	2 (8)
Confusión ente mediana y moda, uso de la definición de moda (DMO1)		9 (36)
Coincidencia de parámetros en distribuciones simétricas (E3)		3 (12)

En la tabla 5.6.20 se muestra los resultados obtenidos. Destaca el alto porcentaje de errores en el cálculo de la mediana, lo que confirma la dificultad que entraña la presentación de los datos en forma gráfica. En cuánto a las definiciones de mediana, la que más aparece y menos errores presenta es la relacionada con la idea de que divide la población en dos partes de igual tamaño, más que la que aporta la idea de centro de la distribución, lo que puede hacernos pensar que se trata de una definición más intuitiva para los alumnos de estas edades. También encontramos un porcentaje importante de estudiantes que confunden mediana con moda, así como algunos que piensan que los parámetros de centralización pueden coincidir aunque la distribución no sea simétrica, lo que supone un error o un desconocimiento de la propiedad correspondiente.

Ítem 12

> Juana piensa que, en el gráfico anterior, el alto valor de 133 euros debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda.
>
> Si ____ No ____
> Razona la respuesta

Este ítem, continuación del anterior, contiene todos los elementos ya descritos, pero hace hincapié, especialmente, en la propiedad de la mediana y la moda de ser más resistentes que la media cuando aparecen valores atípicos.

Las respuestas encontradas han sido:

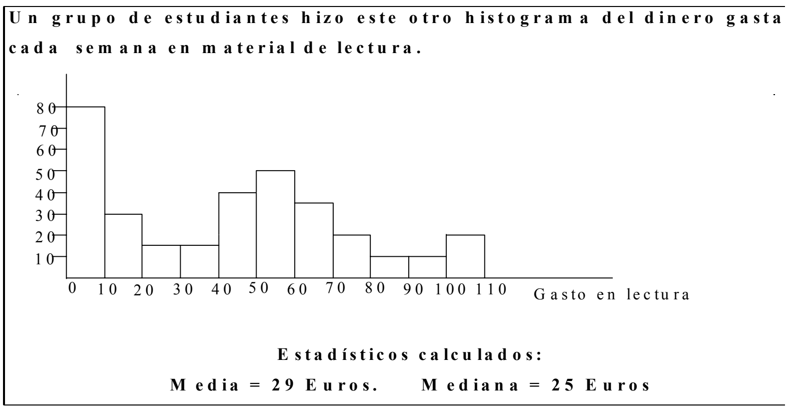
- Uso, correcto o incorrecto de la propiedad de la mediana y moda de ser más resistentes que la media a la presencia de valores atípicos (E4). Un ejemplo de uso correcto puede ser: "*Sí, porque no hay nadie, o casi nadie, que utilice el 133 y por ello, si lo quitas del gráfico no alteraría nada*", mientras la siguiente es una respuesta errónea: "No, e*s un dato más y si lo quitas obtendrás diferente media y moda*".
- Un tipo de respuesta relacionada con la anterior, pero desde el punto de vista numérico, la propiedad de que en el cálculo de la media se tienen en cuenta los valores de todos los datos, mientras que la moda y la mediana no ocurre esto (N3). Por ejemplo: "*No, porque eso también es parte de los datos y se tiene que tener en cuenta para los tres cálculos*".

Tabla 5.6.21. Resultados del ítem 12

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Media menos resistente a valores atípicos (E4)	3 (12)	14 (56)
La media tiene en cuenta todos los datos (N3)	3 (12)	18 (72)

Los resultados que se muestran en la tabla 5.6.21, reflejan, por el alto porcentaje de errores, la dificultad de los alumnos al tratar los valores atípicos presentes en un conjunto de datos, fundamentalmente respecto a la influencia que éstos tienen en el cálculo de los parámetros media, mediana y moda.

Ítem 13



Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura, en el gráfico anterior porque la mayor parte de los estudiantes no gastaron nada o muy poco y el segundo grupo gastó entre 50 y 60 euros cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la moda en su lugar para representar el gasto semanal "promedio" en material de lectura.

Si ____ No ____

Razona la respuesta

Como todos los ítems de esta parte, está basado en un gráfico, de modo que la primera tarea consiste en interpretarlo. Se trata de una distribución bimodal, por lo que se presenta la mediana como mejor representante de los datos que la media, cuestión que debían argumentar los alumnos. Como además se dan los valores sólo de la media y la mediana, deben de calcular la moda, a partir del gráfico.

Las respuestas obtenidas han sido las siguientes:

- Uso, correcto o incorrecto de la propiedad de la mediana y moda de ser más resistentes que la media a la presencia de valores atípicos (E4). Por ejemplo: "*Sí, porque la media es un indicador aproximado y no define precisamente la realidad*".
- Errores derivados de no tener en cuenta la propiedad de los parámetros de centralización de que sus valores coinciden únicamente en las distribuciones simétricas y no en otros casos como el del ítem que nos ocupa (E3). Ejemplo: "*No, porque la media no tiene que coincidir con la mediana y no sería un resultado del todo fiable*".
- El uso de la propiedad de la mediana de ser el representante más adecuado en el caso de distribuciones bimodales (E9). Por ejemplo: "*Sí, porque se ve en la gráfica su utilización*".

Tabla 5.6.22. Resultados del ítem 13

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Mediana mejor representantes en distribuciones bimodales (E9)	5 (20)	3 (12)
Media menos resistente a valores atípicos (E4)	6 (24)	5 (20)
Coincidencia de parámetros en distribuciones simétricas (E3)	5 (20)	

La elección del parámetro más adecuado para representar un conjunto de datos es una cuestión que entraña dificultad para los alumnos, más acostumbrados a calcularlos cuando se les pide, o a interpretar los resultados obtenidos. En este ítem, en el que se intentaba comprobar esto, los resultados vienen a constatar la afirmación, pues el porcentaje de respuestas dadas al problema es muy bajo en comparación con otros ítems del cuestionario y, casi están igualados los aciertos y los errores.

Ítem 14

> Manuel dice que esta distribución tiene dos modas y sugiere que puedes obtener más información de estos datos si los divides en dos subgrupos y calculas el promedio en cada grupo por separado.
>
> Si ____ No ____
>
> Razona la respuesta

Este ítem está basado en el gráfico anterior y contiene los mismos elementos de significado ya descritos, a los que hay que añadir ahora el efecto que tiene la existencia de dos modas en una distribución sobre los otros promedios, apareciendo éstas como más adecuadas para resumir los datos que la media o la mediana, poco representativas en estos casos.

Las respuestas obtenidas son:

- Cálculo de la media a partir del gráfico (AMO4). Ejemplo: "*Sí, son los valores más altos*".
- Conocimiento y uso de la propiedad de la moda de no ser única, tanto de forma correcta como errónea (A7). Ejemplo: "*No, solo hay una moda*".

Tabla 5.6.23. Resultados del ítem 14

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Cálculo gráfico de la moda (AMO4)	1 (4)	9 (36)
La moda puede no ser única (A7)	5 (20)	13 (52)

Relacionado con el anterior, en las respuestas a este ítem aparecen bastantes errores en el tratamiento de un conjunto de datos para elegir y calcular el promedio más adecuado. Parece ser que, puesto que la mediana y la media son únicas para una distribución, los estudiantes extienden esta propiedad a la moda, puesto que casi la mitad de ellos no reconocen que puede haber dos modas.

Ítem 15

> Lola sugiere hacer el estudio en pesetas. ¿Cuál sería en ese caso el valor de la media?

De nuevo basado en los datos del ítem 13, la diferencia con los anteriores estriba en que la cuestión central de éste es la propiedad que la media de conservar cambios de escala. Se pretende ver si los alumnos conocen y aplican esta propiedad o intentan rehacer todo el problema con las nuevas unidades.

Las únicas respuestas obtenidas son aquellas en las que aplica de forma correcta esta propiedad (A5), o bien, las que contienen errores respecto a la misma. Ejemplo: *"Sería el mismo sólo que en pesetas*".

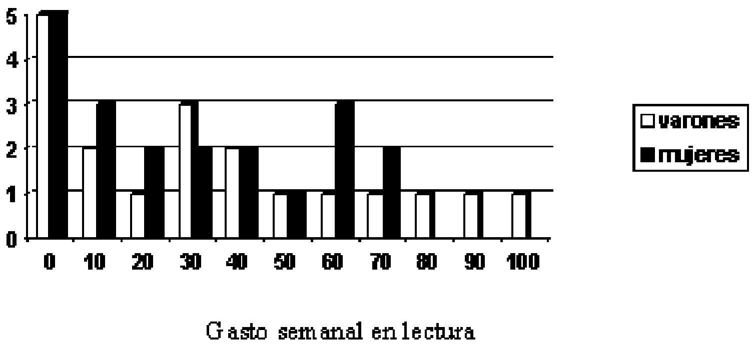
Tabla 5.6.24. Resultados del ítem 15

	4º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
La media conserva cambios de escala (A5)	23 (92)	1 (4)

La media tiene la propiedad de que se ve afectada por los mismos cambios de origen y escala que se apliquen a los datos, propiedad que, de forma explícita o intuitivamente, la mayoría de los alumnos conocen y aplican correctamente, como demuestra el alto porcentaje de respuestas correctas que aparece en la tabla 6.5.24.

Ítem 16

Antonio cree que sus dibujos muestran que los varones y mujeres tienden a gastar diferentes cantidades de dinero en material de lectura.



Si ____ No ____ Razona la respuesta

Este último ítem pretendía averiguar qué uso hacen los alumnos de los promedios y los gráficos para comparar dos distribuciones. Presenta la dificultad del tipo de gráfico, más complejo que los anteriores, puesto que contiene dos conjuntos de datos, por lo que es posible que a los alumnos les cueste más interpretar la información.

En cuánto a los promedios se pretende, por un lado, que encuentren su valor en el gráfico, y por otro, que los utilicen como elemento de comparación de los dos conjuntos de datos.

Las únicas respuestas obtenidas hacen relación a la comparación de muestras usando los gráficos, no habiendo encontrado ninguna en la que se aborde el cálculo de ningún parámetro a partir de los mismos. Ejemplo correcto: "*Sí, ya que en la gráfica las mujeres gastas más, ...*" y un ejemplo de respuesta incorrecta: "*No, están muy igualados*".

Tabla 5.6.25. Resultados del ítem 16

	4º ESO (n=24)	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto
Los gráficos permiten efectuar comparaciones entre conjuntos de datos	16 (64)	3 (12)

A la vista de los resultados que muestra la tabla 5.6.25, podemos afirmar que un porcentaje alto de alumnos reconocen la posibilidad que ofrece el gráfico de efectuar comparaciones entre los dos conjuntos de datos, pero, en cambio, no utilizan ningún parámetro que sea representativo de los mismos, limitándose a hacer descripciones de conjunto.

Resumen de resultados

Para resumir los resultados presentamos, en la tabla 5.6.24, las frecuencias y porcentajes de respuestas correctas en cada ítem y grupo.

Tabla 5.6.24. Dificultad comparada de los ítems

ÍTEM	4º ESO (n=29)	1º ESO (n=24)
1a	21 (72.4)	16 (66.7)
1b	18 (62.1)	14 (58.3)
2a	16 (45)	2 (8.7)
2b	16 (45)	3 (12.5)
2c	7 (24.1)	6 (25)
3	8 (27.7)	5 (21.3)
4	13(44.8)	10 (43.5)
5a	10(34.5)	5 (21.7)
5b	8 (27.7)	4 (13.8)
5c	6 (20.7)	1 (4.2)
6a	15 (51.7)	
6b	10 (34.5)	
7a	25(86.2)	13(56.5)
7b	21 (72.4)	9 (38.1)
7c	20 (69)	8 (33.3)
8	12 (41.4)	6 (25)
9a	11 (37.9)	7 (29.2)
9b	6 (20.7)	0
10 (media)	3 (10.3)	
10 (moda)	5 (17.2)	
10(mediana)	1 (3.4)	
11	10 (34.5)	
12	6 (20.7)	
13	16 (45)	
14	10 (34.5)	
15	23 (79.3)	
16	16 (45.1)	

Como conclusión observamos una gama variada de dificultad, que para 4º curso va desde un 3,4%, en el ítem 10, a un 86,2% en el ítem 7ª; y para 1º curso, desde un 0%, en el ítem 9b a un 66,7% en el ítem 1a. Lógicamente, en los ítems comunes, la dificultad ha sido mayor para los alumnos más jóvenes, aunque en algunos (ítems 1b, 4 y 2c) apenas hay diferencias lo que sugiere, en el caso de los dos primeros, que fueron sencillos (calcular una distribución de media conocida y propiedad de la suma de desviaciones a la media) y que son lo suficientemente intuitivos como para incluirlos en la enseñanza; en el otro caso (cálculo de medias ponderadas) pensamos que no ha habido una mejora real con la enseñanza.

Para los alumnos de 1º curso, que no habían estudiado el tema, se han encontrado porcentajes relativamente altos de respuestas correctas en los ítems 1a, 1b, 4 y 7a, indicando elementos de significado de fácil comprensión, incluso antes de la instrucción.

Asimismo, se han encontrado ítems que son bastante difíciles incluso finalizada la enseñanza (2c, 5b, 5c, 9b, 10 y 12). Respecto al ítem 10, muchos alumnos manifiestan conocer el cálculo, pero luego no llegaban a realizarlo, no quedando claro si realmente aporta información sobre la capacidad de cálculo. Como, además, requería bastante tiempo su ejecución, se decidió eliminarlo del cuestionario definitivo.

Respecto al resto de los ítems, decidimos mantenerlos en el cuestionario, teniendo en cuenta la amplia variedad de información proporcionada sobre el uso de elementos de significado, que seguramente se ampliaría en la muestra definitiva. Se optó también por añadir el cálculo de la moda en el ítem 9, con lo que éste pasó a tener tres apartados.

En resumen, para el estudio definitivo, nos quedamos con un cuestionario compuesto por 15 ítems (25 subítems) para los alumnos de cuarto curso y 8 ítems (17 subítems) para los de primero. Este cuestionario es el mismo que se usó para el estudio piloto, eliminando el ítem 10 y añadiendo el cálculo de la moda en el ítem 9. Los ítems 11 a 16 en el cuestionario definitivo se renumeran como 10 a 15.

Se prepararon dos versiones diferentes de cada cuestionario: Versión A, semejante al piloto y versión B, invirtiendo el orden de las preguntas, para controlar el efecto del posible efecto de cansancio al cumplimentar el cuestionario que puede influir en el número de respuestas en los ítems finales del cuestionario. La idea era usar los dos tipos en cada grupo de la muestra final participante en el estudio, repartiendo un mismo número de cuestionarios de cada versión, aleatoriamente, dentro de cada grupo.

En el Anexo 2 se presentan los cuestionarios construidos, tanto la versión piloto como la definitiva.

5.7. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS DE ÍTEMS Y ESTUDIO PILOTO

En este capítulo hemos analizado con detalle el proceso de construcción del cuestionario de evaluación utilizado en el trabajo, elaborado tomando como base el significado institucional y el análisis de libros de texto.

En primer lugar, la construcción del instrumento de evaluación nos ha llevado a organizar un banco de ítems (un total de 59) tomados de investigaciones previas, analizados respecto de los elementos de significado presentados en el análisis del significado de referencia (capítulo 2), y que se incluye como Anexo 1. Pensamos que este banco de ítems, junto con su análisis es una aportación de nuestro trabajo, puesto que puede ser de utilidad, como nos lo ha sido a nosotras, tanto para construir otros instrumentos de evaluación para investigaciones posteriores, como para elaborar pruebas de evaluación que el profesorado puede pasar a sus alumnos y controlar el grado de dominio de estos conceptos alcanzado tras el proceso de enseñanza aprendizaje.

Por otro lado, hemos construido un cuestionario que amplía notablemente el contenido evaluado respecto a otros instrumentos utilizados en investigaciones previas, en lo que se refiere al tema de los promedios. En la sección 5.2 se describen los criterios y metodología de construcción y en la sección 5.4 se presenta un análisis a priori de los ítems que proporciona, como consecuencia, una primera categorización de elementos de significado que prevemos que los alumnos utilizarán para responder a los ítems y que definen el contenido evaluado.

En cuánto a la validez del cuestionario, podemos afirmar que, tal y como se puede ver en las tablas 5.5.1 a 5.5.3, las preguntas que lo componen cubren prácticamente todos los elementos de significado de las medidas de tendencia central introducidos en la Educación Secundaria Obligatoria. Ello nos permitirá obtener información original respecto al razonamiento sobre promedios, diferenciar los diferentes tipos de comprensión (fenomenológica, procedimental, conceptual, argumentativa, representacional) que muestran los estudiantes respecto de este tema, así como describir la comprensión de algunos elementos específicos que no habían sido hasta ahora objeto de estudio.

Se presentan también resultados de una muestra piloto, que nos ha servido para comparar la dificultad relativa de los diferentes ítems y subítems en cada curso, llegando a la decisión de rechazar uno de ellos que, siendo difícil, sólo aportaba resultados respecto a la comprensión procedimental. Estos datos también nos han servido para iniciar una primera categorización de respuestas en los diversos ítems, que confirma y amplía nuestro análisis a priori del cuestionario y que proporciona unos primeros datos de interés para los profesores que han de enseñar el tema.

En resumen, tanto el análisis de los datos de la muestra piloto, como el análisis de contenido del cuestionario sugieren el carácter multidimensional del significado y comprensión de los promedios, en el sentido de que cada pregunta evalúa componentes diferenciados del significado de los conceptos que nos ocupan. De confirmarse esta hipótesis –no acorde con los resultados de otras investigaciones que indican una comprensión en etapas, siguiendo las teorías neopiagetianas– la implicación práctica es que cada uno de los tipos de elementos de significado –campos de problemas, procedimientos, representaciones, argumentos, definiciones y propiedades– debe ser objeto específico de enseñanza.

Pensamos que el intentar obtener datos que apoyen o contradigan estas expectativas tiene suficiente interés en el campo de la didáctica de la estadística. Ello nos ha animado a continuar con el estudio previsto, y a tomar datos de una muestra más amplia, cuyos resultados se presentan en el capítulo 6.

CAPÍTULO 6.

RESULTADOS DEL ESTUDIO DE EVALUACIÓN

6.1. INTRODUCCIÓN

Una vez finalizada la elaboración de los cuestionarios y analizados los datos de la muestra piloto, según el proceso descrito en el capítulo 5, se inició la toma de datos para el estudio final de evaluación. La finalidad pretendida era analizar el significado personal que los alumnos que inician (1º curso) y finalizan (4º curso) la Educación Secundaria Obligatoria asignan a las medidas de posición central. En esta evaluación se tendrían en cuenta, no sólo la dificultad de las tareas planteadas, sino también qué tipos de elementos de significado usan los estudiantes al responder a cuestiones abiertas.

En este capítulo analizamos, desde diversas perspectivas, los datos obtenidos, comparando también los dos grupos (estudiantes de 1º y 4º cursos, respectivamente), con el fin de describir sus características generales (tendencias y variabilidad).

Comenzaremos con la descripción de la muestra y el estudio comparado de resultados de dificultad y discriminación en cada ítem en los dos grupos de alumnos que la componen. Presentaremos a continuación los resultados sobre puntuación global, así como un estudio entre la relación de respuestas a los diversos ítems.

La parte más importante del capítulo se dedica al estudio de los elementos de significado que hemos identificado en las respuestas abiertas. Comenzamos con un análisis detallado de los elementos de significado usados en cada uno de los ítems, destacando, tanto los correctos, como los errores de comprensión. Seguidamente haremos un estudio global de los diversos elementos de significado utilizados por cada alumno en el total de la prueba, comparando los dos grupos. Con todo ello se describen las tendencias más generales en la comprensión del grupo de alumnos.

El capítulo finaliza con un estudio detallado de las respuestas de cuatro alumnos, mediante un análisis semiótico que nos permite mostrar, con mayor profundidad, la comprensión de estos estudiantes sobre los diversos elementos de significado.

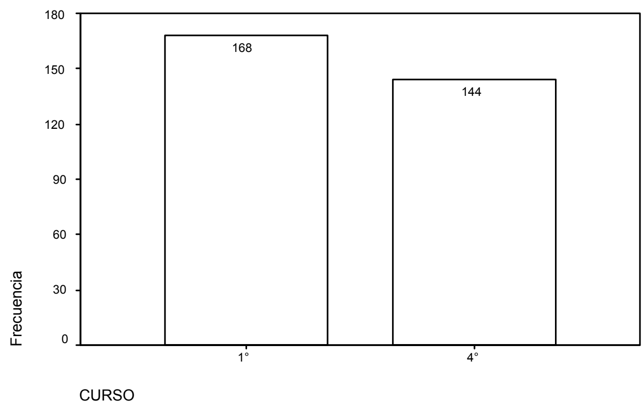
Estos alumnos han sido seleccionados, en los dos grupos, entre aquellos con mayor y menor número de soluciones correctas en el cuestionario y dentro de éstos últimos, entre aquellos que han aportado respuestas suficientemente argumentadas a la mayoría de los ítems. De este modo queremos proporcionar alguna información sobre la variabilidad en el significado personal de los estudiantes de la muestra respecto de las medidas de tendencia central.

6.2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

La muestra final estuvo compuesta por 312 alumnos, 168 de 1º de E.S.O (13 años) y 144 de 4º de E.S.O (16 años), de cinco centros de secundaria de la provincia de Granada, todos ellos públicos. Hemos intentado diversificar la muestra, dentro de lo posible, disponiendo de estudiantes con diferentes contextos socioculturales, pensando que esta situación podía ofrecernos una variabilidad mayor de respuestas que si todos los alumnos pertenecían a centros de similares características. Para ello elegimos dos centros ubicados en la capital (centros 2 y 4), el primero de ellos en la zona centro; el tercero en el área metropolitana (centro 1) y los dos centros restantes ubicados en pueblos de la provincia de Granada, uno interior (centro 3) y otro costero (centro 5).

Aunque nuestra intención era obtener el mismo número de alumnos para cada curso, la variabilidad del tamaño de los diferentes grupos de alumnos nos llevó a una ligera variación entre el número de participantes de los cursos de 1º y de 4º. Los alumnos, al igual que en la muestra piloto, completaron el cuestionario en una de las sesiones de su clase de matemáticas, colaborando con nosotros sus profesores para que respondieran a las tareas con interés y esfuerzo. Se explicó a los alumnos el fin de la toma de datos, pidiéndoles su ayuda. Asimismo se les dieron instrucciones claras sobre la forma de completarlo, rogándoles explicaran sus respuestas.

Figura 6.2.1. Distribución de la muestra por curso



Una vez recogidos los datos, se procedió a su codificación y grabación en un fichero de datos para su posterior tratamiento estadístico con el programa SPSS. Para cada uno de los alumnos se consideró, como variables independientes, el curso (primero o cuarto), género, centro y tipo de cuestionario (versión A o B). A continuación describimos las características más notables de la muestra.

En cuánto al género, como puede verse en el gráfico de la figura 6.2.2, aunque la elección no ha sido intencionada, el reparto entre hombres y mujeres de la muestra global ha resultado muy equilibrado, al contar con casi la mitad en cada grupo. Lo mismo ocurre con la distribución del género, dentro de los dos cursos, como puede apreciarse en la figura 6.2.3.

Figura 6.2.2. Distribución de la muestra por género

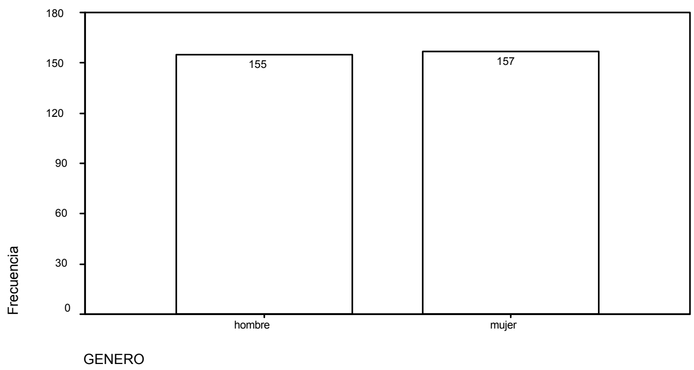
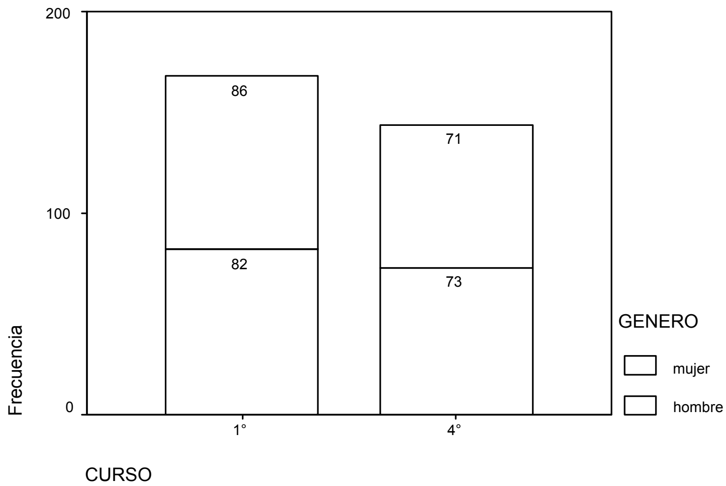


Figura 6.2.3. Clasificación de la muestra según curso y género



Pensamos que esta muestra recoge bien las características de los alumnos de los centros de Educación Secundaria Obligatoria de la provincia de Granada y puesto que esta provincia no se diferencia substancialmente de otras provincias andaluzas, las conclusiones podrían generalizarse a la población objeto de nuestro estudio.

6.3. DIFICULTAD COMPARADA DE ÍTEMS

Respecto a las respuestas obtenidas, en primer lugar hemos estudiado los resultados en cada uno de los ítems para analizar su dificultad. Para ello hemos diferenciado entre respuestas correctas e incorrectas, sin tener en cuenta los procedimientos, argumentos o errores concretos cometidos. Se han tomado también las respuestas en blanco como incorrectas puesto que eran poco numerosas y después de analizar su aparición, comprobamos que no se concentran en los ítems finales del cuestionario, ni tenían un peso excesivo. Por ello creemos que no son debidas a falta de tiempo o interés sino a que, realmente los alumnos que dejaron alguna pregunta en blanco no sabían dar una respuesta correcta.

Siguiendo a Muñiz (1994), entenderemos por *índice de dificultad* de un ítem (ID) la proporción de sujetos que lo aciertan de aquellos que han intentado resolverlo. Es decir, si A es el número de sujetos que aciertan el ítem y N el número de sujetos que han intentado resolverlo, diremos que: $\mathrm{ID} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}$. En consecuencia, cuanto mayor es este valor significa que el ítem es más fácil para los alumnos y ha sido respondido por una mayor proporción de los mismos.

A continuación, analizamos los resultados que se presentan en la tabla 6.3.1, en relación con el índice de dificultad que presentó cada ítem. En esta tabla y otros análisis posteriores hemos preferido separar los cálculos para cada grupo, para poderlos comparar entre sí y también porque pensamos que, lógicamente, la dificultad ha de ser mayor en los alumnos más jóvenes.

Dicho índice osciló entre un 0.04 de respuestas correctas para los alumnos de primer curso en el ítem 9.3 (cálculo de la mediana a partir de un diagrama de barras) y un 0.69 para los alumnos de cuarto curso en el ítem 1.1 (definición de media e identificación de campos de problemas asociados a la idea de media), lo cual nos permite observar una gran variabilidad en la dificultad de los ítems. También podemos observar cómo algunos elementos de significado fueron alcanzados por una amplia proporción de los alumnos de la muestra, ya que el porcentaje de aciertos gira en torno al 40% o más. No obstante la prueba resultó, en general, difícil.

Tabla 6.3.1. Índice de dificultad y desviación típica de los ítems por curso

	Primer Curso n=168		Cuarto Curso n=144	
	Media	Desv. típica	Media	Desv. típica
P1.1	,63	,48	,69	,46
P1.2	,27	,44	,37	,48
P2.1	,14	,34	,34	,48
P2.2	,12	,32	,38	,49
P2.3	,36	,48	,33	,47
P3	,46	,50	,49	,50
P4	,45	,50	,66	,48
P5.1	,38	,49	,38	,49
P5.2	,22	,42	,32	,47
P5.3	.09	,29	,33	,47
P6.1			,13	,33
P6.2			.04	,20
P7.1	,48	,50	,67	,47
P7.2	,51	,50	,68	,47
P7.3	,53	,50	,61	,49
P8	,39	,49	,67	,47
P9.1	,50	,50	,67	,47
P9.2	,21	,41	,26	,44
P9.3	.04	,21	,20	,40
P10			,26	,44
P11			,15	,36
P12			,34	,48
P13			,27	,45
P14			,45	,50
P15			,49	,50

A la vista de los resultados presentados en la tabla podríamos decir que el ítem 1.1 (sobre la definición de media e interpretación de un valor medio de una distribución de datos enteros) ha resultado ser el más fácil, tanto a los alumnos de 1º como a los de 4º, puesto que es el que ha obtenido un índice de respuestas más alto. Otros ítems fáciles han sido, en primer curso, el 7.1 y 7.2 (buscar una distribución de media dada), 7.3 (influencia de un valor cero en el cálculo de la media) y 9.1 (cálculo de la media a partir de un gráfico). Para cuarto también resultaron sencillos los ítems 7.1, 7.2, 7.3 y 9.1, igual que en 1º, pero además podemos resaltar el 8 (media como estimación de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida) y el 4 (la media es el centro de gravedad de una distribución).

Del mismo modo, encontramos ítems que podemos considerar como difíciles, como el 9.3 (cálculo de la mediana a partir de un gráfico), el 5.3 (elección del mejor promedio para un conjunto de datos), el 2.2 o el 2.1 (cálculo de medias ponderadas) para el curso de 1º, que han obtenido una proporción de respuestas correctas muy baja (0.04, en el cálculo gráfico de la mediana, 0.09 en la elección del mejor promedio, y 0.12 y 0.14 en el cálculo de medias ponderadas).

De todos, el más difícil ha sido el 9.3 que presenta, además del índice de dificultad menor, la variabilidad más baja (desviación típica 0.21). Para 4º curso, el ítem que ha resultado más difícil ha sido el 6, en sus dos apartados 6.1 y 6.2 (uso de la mediana como forma de tomar decisiones a partir de un conjunto de datos ordinales), con un índice de dificultad de 0.13 y 0.04, respectivamente y una desviación típica también baja en ambos casos (0.33 y 0.20, respectivamente), lo que muestra poca variabilidad entre los alumnos que contestan.

En cuánto a las desviaciones típicas, en general se agrupan alrededor de 0.50, lo que no supone, una variabilidad muy elevada, es decir, que existan diferencias demasiado notables en la dificultad encontrada por los alumnos con respecto a la media. Los más homogéneos han sido los ítems de alta dificultad.

Respecto a los resultados de la muestra piloto no hay demasiadas variaciones; algunos ítems resultan más fáciles que en la muestra piloto y viceversa, aunque generalmente los más difíciles son los mismos en cada grupo. En todo caso las diferencias se explican por el tamaño reducido de la muestra piloto. Más adelante estudiaremos con detalle las diferencias por cursos en cuanto a dificultad.

6.4. PUNTUACIÓN TOTAL Y EFECTO DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES

Además de estudiar la puntuación en cada ítem, es interesante estudiar el número de respuestas correctas de cada estudiante, que nos da una idea de la proporción de los contestados correctamente e, indirectamente, de la proporción de elementos de significado correctamente adquiridos en relación con los pretendidos al elaborar el instrumento de evaluación. Para estudiar este aspecto, se puntuó con 1 cada respuesta correcta, sumando todas estas puntuaciones, con lo que cada alumno obtuvo una puntuación total que podría variar entre 0 y 17 respuestas correctas en el grupo de alumnos de primer curso y entre 0 y 25 en los alumnos de cuarto curso. En las Figuras 6.4.1 y 6.4.2 se presentan histogramas de frecuencias de alumnos con las distintas puntuaciones totales obtenidas.

Figura 6.4.1. Puntuación total en la prueba de los alumnos de primer curso

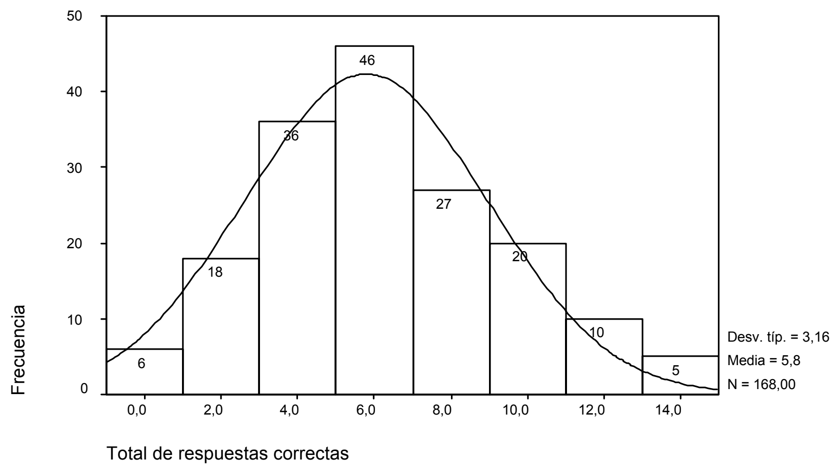
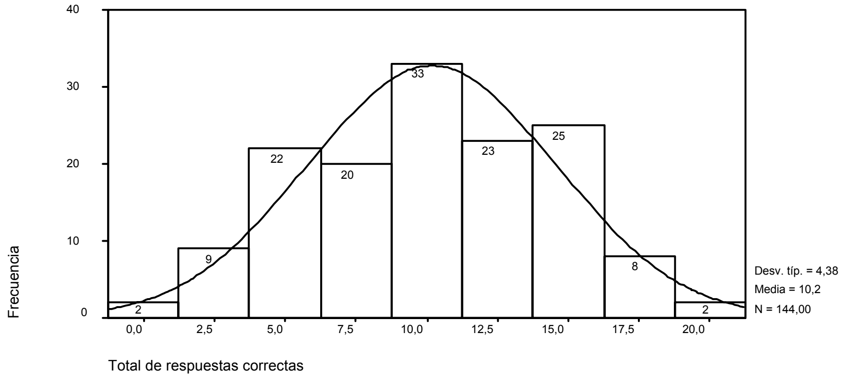


Figura 6.4.2. Puntuación total en la prueba de los alumnos de cuarto curso



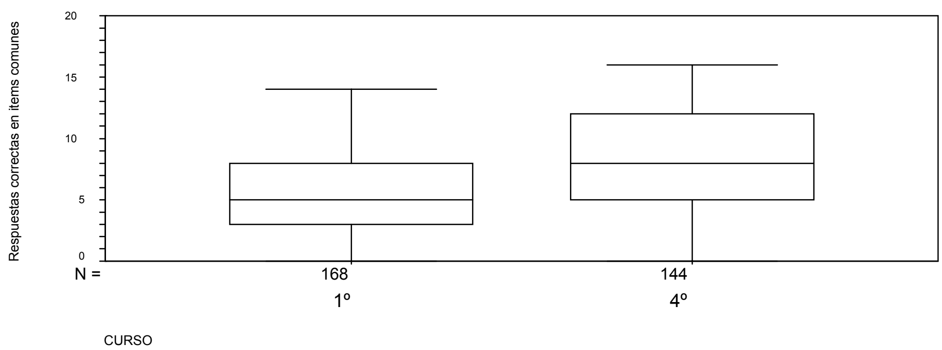
Lo más destacable es que el número medio de respuestas correctas para los alumnos de primero fue sólo de 6 sobre un total de 17 posibles, valor que también coincide con la mediana. Asimismo para los alumnos de cuarto curso se obtiene tan sólo un valor de 10 sobre 25. Todo ello indica no sólo que las preguntas planteadas fueron difíciles para los alumnos a nivel intuitivo (en primer curso), sino que siguen resultando difíciles al finalizar la enseñanza (cuarto curso). Ello se explica porque las tareas que hemos propuesto son preferentemente interpretativas y no algorítmicas, mientras que la enseñanza suele enfatizar la capacidad de cálculo, como hemos visto en el estudio de los libros de texto.

Hay poca variabilidad, puesto que la desviación típica es sólo la mitad del valor de la media, lo que daría un coeficiente de variación menor que la unidad. Es también destacable la forma que presentan las distribuciones, bastante simétricas en los dos cursos. Por otro lado, y si bien para 1º curso la aproximación a la normal es algo mejor que en 4º curso, podemos considerar que el comportamiento de las dos muestras se ajusta bastante a la normal, cuestión necesaria, como veremos más adelante, para poder aplicar algunas técnicas de análisis de los datos.

Efecto de las variables independientes sobre la puntuación total

Nos ha parecido también necesario comparar el número total de respuestas a los ítems comunes a los dos grupos de alumnos (17 subítems), en función de las variables independientes del estudio. Para ello realizaremos, en primer lugar una serie de gráficas de caja paralelas, para los diversos niveles de un mismo factor, en las que podremos apreciar visualmente la existencia o no de diferencias. Posteriormente, confirmaremos estas diferencias mediante un análisis de varianza factorial.

Figura 6.4.3. Número de respuestas correctas en los ítems comunes según curso



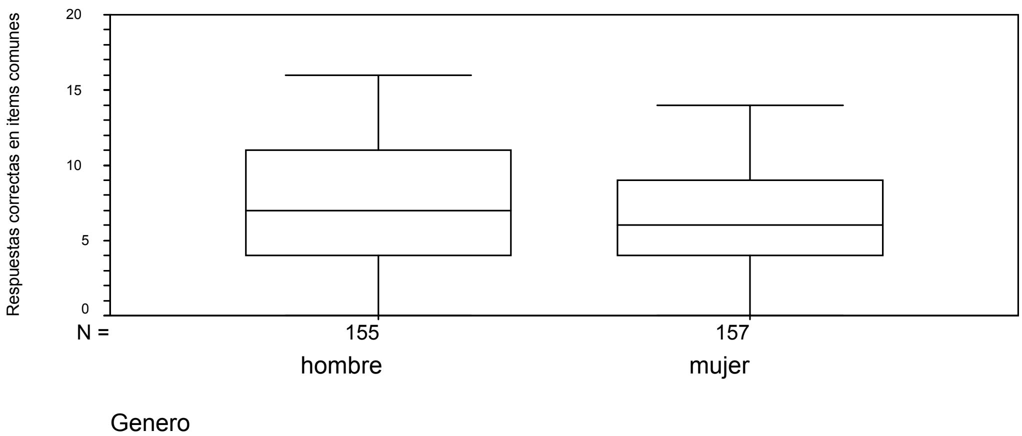
Respecto a las diferencias por curso (Figura 6.4.3), la principal información que nos proporcionan los gráficos es la mejora en el número de respuestas correctas en los alumnos que han tenido instrucción, que se traduce por ejemplo en el mayor valor de la mediana (8 frente a 5), de un total de 17 ítems comunes, aunque la mejora no es todo lo significativa que esperábamos, hecho que también se manifiesta en que son pocos los alumnos que responden correctamente las preguntas comunes, ninguno en el caso de 1º.

Por otro lado, el rango de respuestas correctas en el curso de 1º es menor que en 4º, lo que era de suponer si tenemos en cuenta que los alumnos de 4º curso han llegado en algunos casos al total de respuestas correctas, mientras que los de 1º sólo llegan, en el mejor de los casos a 14.

Observamos que algunos no tuvieron ninguna respuesta correcta, a pesar de no haber dejado las preguntas en blanco. Hacemos notar que 7 casos de alumnos con una cierta proporción de respuestas en blanco fueron eliminados del fichero de datos antes de analizarlos, pues podría tratarse de casos de falta de interés en la respuesta. En todo caso, es un número mínimo de estudiantes, dos con 0 y 1 respuestas correctas en 4º curso y seis en 1º.

Otro dato a destacar es el pequeño sesgo que se produce, en 1º, hacia la derecha de la distribución, de forma que un 75% de los alumnos ha contestado correctamente tan sólo un número de ítems menor o igual a la mitad de ítems planteados como respuestas correctas (8 o menos, de un rango de 17) y sólo un 25% superan este valor intermedio de aciertos. Sin embargo, en 4º, la distribución es casi simétrica, con un valor mediano de 8 respuestas correctas, por lo que la mitad de los alumnos supera la mitad de ítems comunes y un 50% de los alumnos con un número de aciertos entre 5 y 12 en un rango de 16, aunque también hay mayor dispersión en torno al valor central que en 1º, curso en el que encontramos al 50% central de los alumnos entre 3 y 8 respuestas correctas, con un valor mediano de 5.

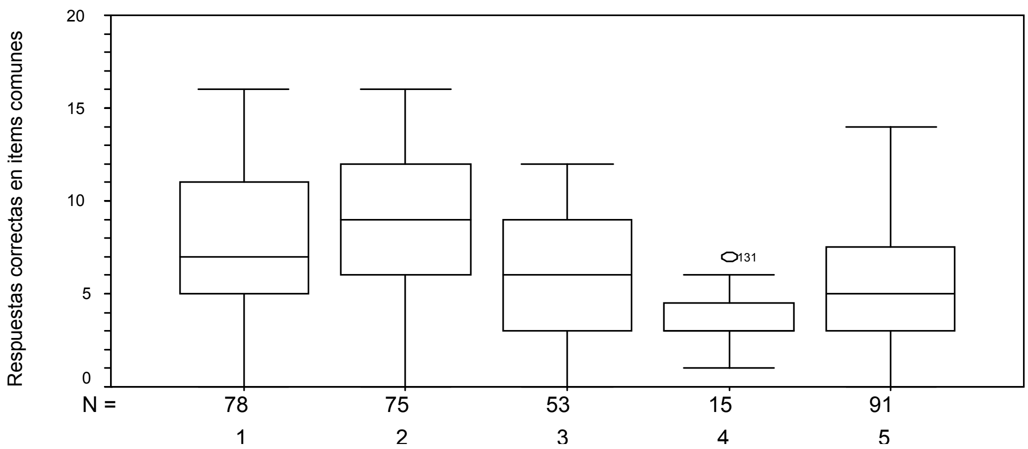
Figura 6.4.4. Número de respuestas correctas en los ítems comunes según el género



En cuánto a las diferencias por género (Figura 6.4.4), el número de respuestas correctas obtenidas por estos últimos es algo mayor que el de las chicas, tanto en el valor máximo como en el tercer cuartil (16 y 11 para los chicos, respectivamente y 14 y 9 para las chicas). Sin embargo la mediana casi coincide y el primer cuartil coincide en los dos casos (7 y 4 en los chicos y 6 y 4 en las chicas, respectivamente), lo que indica que el 50% de ambos grupos que menos aciertos presentan no varían en función del sexo, mientras que cuando el número de aciertos es mayor, la puntuación de los chicos es algo mejor que la de las chicas.

Por otro lado, el comportamiento de las chicas es un poco más uniforme en el sentido de que el número de respuestas correctas se concentra más en torno a la mediana que en el caso de los chicos, en el que se aprecia una mayor dispersión.

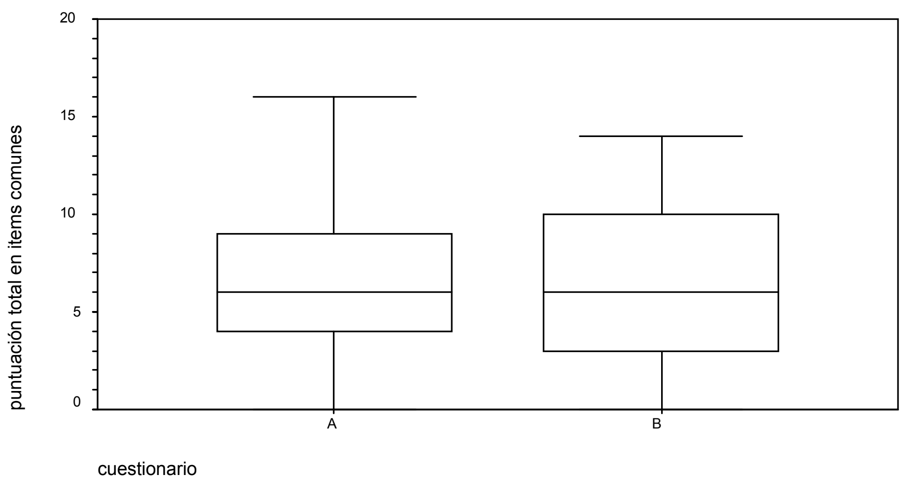
Figura 6.4.5. Número de respuestas correctas en los ítems comunes según centro



Respecto a las diferencias por centro (Figura 6.4.5), podemos observar que los centros 1 y 2 presentan un comportamiento similar porque, aunque la mediana para el segundo es mayor que en el otro (9 y 7), casi coinciden en el rango y en los cuartiles (lo que indica que el 50% de alumnos con un número de respuestas correctas próximo al valor mediano es casi el mismo en los dos centros), así como en la dispersión.

Los otros tres tienen unos resultados más diferenciados en todos los valores significativos, el rango, valores centrales, dispersión de las respuestas, etc., si bien todos se encuentran por debajo de los dos anteriores, lo que indica un rendimiento menor de los alumnos de estos centros frente al cuestionario presentado. Ya habíamos indicado antes que la muestra estaba compuesta por centros de distintas características, con la intención de que no fuese demasiado homogénea. Los resultados aquí presentados son una prueba de esta heterogeneidad, que en todo caso, no es demasiado elevada.

Figura 6.4.6. Número de respuestas correctas en los ítems comunes según tipo de cuestionario



Respecto a las diferencias por cuestionario (Figura 6.4.6) se observa la igualdad de puntuaciones medianas de los alumnos que usaron los dos cuestionarios y prácticamente la misma variabilidad. Por ello, en lo que sigue prescindiremos de la variable cuestionario, considerando las dos versiones como equivalentes para el propósito de nuestro estudio.

Para comprobar si las diferencias apreciadas en las gráficas anteriores son o no estadísticamente significativas, en la Tabla 6.4.7 presentamos los resultados del análisis de varianza factorial con tres factores: género (con dos niveles), curso (también con dos niveles) y centro (tomado como factor aleatorio). Esta prueba permite contrastar la hipótesis de igualdad de dos o más medias en diferentes poblaciones, definidas por una combinación de factores, combinando todas las posibilidades de niveles de los factores. Nos proporciona información sobre si cada uno de los factores es o no estadísticamente significativo. No hemos tenido en cuenta las interacciones, conscientemente, por la dificultad de su posible interpretación para los propósitos de nuestro estudio.

Antes de aplicar la prueba hemos comprobado los supuestos de aplicación del análisis de la varianza. La distribución de la puntuación total puede aceptarse como aproximadamente normal como se observa en las gráficas 6.4.1 y 6.4.2. y debido a que la muestra tiene además un tamaño aceptable, la normalidad se aplicará en la distribución de las medias muestrales. Además la prueba de homogeneidad de varianzas de Levine dio como resultado que las varianzas en los grupos son aproximadamente iguales: (F=0.901; gl= 17, 294; p= 0.574 no significativo). Podemos finalmente asumir la independencia de las respuestas de diferentes sujetos y por tanto, estamos en condiciones de aplicar el análisis de varianza.

Tabla 6.4.7. Resultados del Análisis de varianza de la Puntuación total en función de género y centro

Fuente	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Significación	Potencia observada
CURSO	387,242	1	387,242	36,646	,000	1,000
SEXO	25,634	1	25,634	2,426	,120	,342
CENTRO	707,936	4	176,984	16,749	,000	1,000
Error	3222,936	305	10,567			

a Calculado con alfa = ,05

A la vista de los resultados obtenidos, observamos que sólo el curso y el centro tienen un efecto estadísticamente significativo sobre la puntuación media en el cuestionario, pero no así el género, confirmando las gráficas mostradas. El centro es un factor aleatorio, ya que los institutos tomados son sólo una muestra de todos los posibles. El análisis de varianza proporciona una estimación de la varianza de la puntuación entre centros. Hemos obtenido los siguientes valores: σ^2= 1.009 y σ = 1.004. Por tanto el intervalo de confianza del 95% para la puntuación media en colegios de características similares a las de los participantes en el estudio será (6.83! .3955).

En la tabla 6.4.8 presentamos las medias, desviaciones típicas e intervalos de confianza totales, según curso y centro, con el fin de completar el estudio. Mientras que los alumnos de 1º obtienen en los ítems comunes entre 5.3 y 6.2 respuestas comunes en promedio, de un total de 17, en 4º se obtiene un promedio de entre 7.4 y 8.7 aciertos en estos ítems. Resaltar la escasa diferencia en chicos con tres años más y recién estudiado el tema. Ello confirma nuestra hipótesis sobre la dificultad de las medidas de posición central, incluso en el tramo de la educación secundaria y sugiere la necesidad de investigar formas alternativas de instrucción que permitan a los estudiantes mejorar su comprensión de los promedios.

Tabla 6.4.8. Medias, desviaciones típicas e intervalos de confianza

		Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
				Límite inferior	Límite superior
TOTAL		6.83	,21	6,42	7,2
Curso	Primero	5,79	,24	5,30	6,2
	Cuarto	8,06	,33	7,39	8,7
Centro		6.83	0.2008	6.43	7.23

6.5. EFECTO DE LAS VARIABLES INDEPENDIENTES SOBRE ÍTEMS AISLADOS COMUNES

Aunque no aparezcan diferencias significativas en la puntuación media del cuestionario respecto a género, y las diferencias respecto a curso y centro no sean demasiado notables podría ocurrir que apareciesen diferencias notables en algunos ítems particulares. Para estudiar esta posibilidad, una vez analizado el efecto de las variables independientes sobre la puntuación total hemos realizado un análisis multivariante de la varianza para contrastar en una única prueba las diferencias entre los vectores formados por las puntuaciones a los diferentes ítems.

El análisis multivariante de la varianza extiende el análisis de varianza para el caso en que la variable dependiente es un vector formado por un grupo de variables (en este caso el vector formado por las respuestas a los ítems de los diferentes sujetos). Proporciona un contraste global del efecto de las variables independientes sobre dicho vector, o lo que es lo mismo, de las diferencias entre los centros de gravedad de las dos nubes de puntos formadas por los puntos dados para cada sujeto y grupo por las coordenadas de sus respuestas a los ítems.

Con este tipo de análisis evitamos el problema de comparaciones múltiples, porque en un solo contraste realizamos las comparaciones de los factores (en lugar de hacer 17 contrastes, uno para cada puntuación). El método tiene, además mayor potencia que el análisis de varianza univariante, porque no sólo detecta diferencias en cada una de las coordenadas, sino diferencias espaciales.

Tabla 6.5.1. Contrastes multivariados

Efecto	Lambda de Wilks	F	Gl de la hipótesis	Gl del error	Significación	Potencia observada (a)
CURSO	,731	6,258	17,00	289,00	,000	1,000
CENTRO	,510	3,127	68,00	1136,436	,000	1,000
SEXO	,917	1,546	17,00	289,00	,078	,906

a Calculado con alfa = ,05

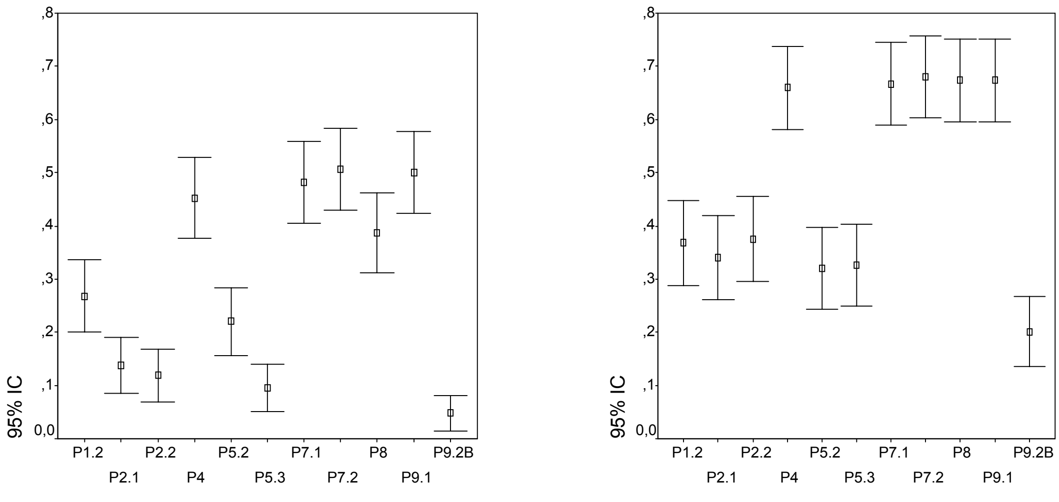
En este caso son significativos los contrastes de curso y centro, lo que implica que debe haber diferencias respecto a curso y centro en ítems particulares. No se obtiene diferencia significativa en la puntuación respecto al género. El análisis multivariante de la varianza proporciona también contrastes aislados para cada uno de los ítems respecto al efecto de los factores analizados. En la tabla 6.5.2 presentamos los contrastes según curso y centro de todos aquellos ítems en que se detectó una diferencia significativa, lo que nos ayudaran a completar el estudio.

Tabla 6.5.2. Pruebas de los efectos inter-sujetos

Fuente	Variable dependiente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación	Potencia observada
CURSO	P1.2	,843	1	,843	4,191	,042	,532
	P2.1	2,956	1	2,956	18,800	,000	,991
	P2.2	4,854	1	4,854	31,670	,000	1,000
	P4	3,682	1	3,682	16,152	,000	,980
	P5.2	,758	1	,758	4,076	,044	,521
	P5.3	4,422	1	4,422	30,716	,000	1,000
	P7.1	2,071	1	2,071	9,700	,002	,874
	P7.2	1,784	1	1,784	7,865	,005	,798
	P8	4,563	1	4,563	23,357	,000	,998
	P9.1	1,987	1	1,987	9,059	,003	,851
	P9.3	1,804	1	1,804	19,372	,000	,992
CENTRO	P1.1	3,113	4	,778	3,575	,007	,869
	P1.2	4,630	4	1,157	5,757	,000	,981
	P2.1	3,762	4	,940	5,980	,000	,985
	P2.2	4,315	4	1,079	7,038	,000	,995
	P3	3,079	4	,770	3,152	,015	,817
	P4	2,928	4	,732	3,211	,013	,825
	P5.2	3,407	4	,852	4,580	,001	,944
	P5.3	2,154	4	,538	3,740	,005	,885
	P7.1	8,404	4	2,101	9,841	,000	1,000
	P7.2	2,594	4	,648	2,858	,024	,773
	P7.3	7,805	4	1,951	8,822	,000	,999
	P8	11,797	4	2,949	15,094	,000	1,000
	P9.1	6,261	4	1,565	7,135	,000	,995
	P9.2	3,315	4	,829	4,795	,001	,953
	P9.3	2,228	4	,557	5,981	,000	,985

a Calculado con alfa = ,05

Figura 6.5.1. Intervalo de confianza para los ítems en que resultaron diferencias significativas según curso



PRIMERO CUARTO

Hay un total de 11 ítems entre los 17 comunes con diferencias significativas según curso y 15 en los que hubo diferencia significativa según centro. Esto indica que la enseñanza ha sido efectiva (diferencias entre cursos) aunque no es homogénea en los distintos centros. Puesto que el centro es un factor aleatorio, no haremos más comentarios, salvo indicar que los índices de dificultad serán variables en estos ítems, respecto al factor centro.

En la figura 6.5.1 representamos gráficamente los intervalos de confianza del 95% para los índices de dificultad de los ítems en que hubo diferencia según curso. Podemos observar que, globalmente, los resultados son mejores en 4º, puesto que al ser mayor el índice de dificultad, como se ha dicho antes, resulta más fácil para los alumnos. Sin embargo, esta mejora no es lineal, en el sentido de este índice no ha aumentado de la misma forma en todos los ítems, habiendo algunos de ellos como el P5.2 que ha aumentado poco, mientras que el P5.3 lo ha hecho bastante.

Podemos afirmar, por lo tanto, que la enseñanza no supone un avance general en la adquisición de los elementos de significado incluidos en la misma, habiendo unos que mejoran bastante y otros lo hacen mucho menos.

Lo que sí se puede constatar a partir de los gráficos es que la relación entre la dificultad de determinados grupos de ítems tiende a mantenerse en los dos cursos. Por ejemplo los ítems 4 (la media es el centro de gravedad de una distribución), 7.1 y 7.2 (buscar una distribución de media dada), 8 (media como estimación de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida) y 9.1 (cálculo de la media a partir de un gráfico), forman un grupo con un grado de dificultad similar en 1º y, para los alumnos de 4º siguen teniendo una dificultad parecida, aunque menor. Lo mismo ocurre con los ítems 1.2 (invertir el algoritmo de cálculo de la media), 2.1 y 2.2 (cálculo de medias ponderadas), 5.2 (cálculo de la mediana de un número par de datos) y 5.3 (elección del mejor promedio para un conjunto de datos), si bien en 1º se aprecia algo más de diferencia entre ellos que en 4º. El ítem 9.2 es el que aparece como más difícil en 1º, y aunque mejora en 4º, sigue siendo el más difícil. Este ítem se refiere al cálculo de la mediana a partir de un gráfico, aspecto que sólo se recogía en dos de los libros de texto analizados.

6.6. FIABILIDAD, DISCRIMINACIÓN Y GENERALIZABILIDAD

Un segundo punto ha sido el estudio de las características de fiabilidad del cuestionario. Según Thorndike (1989), el proceso de medida se propone ligar ciertos conceptos abstractos a indicadores empíricos, en nuestro caso, relacionar el significado personal que los alumnos de la muestra asignan a las medidas de posición central con sus respuestas a los ítems del cuestionario. El análisis de datos se hace sobre las respuestas, ya que son observables. El interés teórico, sin embargo, es el concepto subyacente (significado personal) que no podemos observar directamente, porque los alumnos no son conscientes ello, pero que tratamos de inferir a partir de las respuestas.

Cuando la relación entre los indicadores empíricos (respuestas) y los conceptos subyacentes (significado personal) es fuerte, el análisis de los indicadores nos permite hacer inferencias útiles sobre los conceptos teóricos y evaluar nuestras hipótesis previas sobre los mismos. Para permitir este proceso, un indicador ha de ser fiable. Llamamos fiabilidad a la extensión por la cual un experimento, test u otro procedimiento de medida produce los mismos resultados en ensayos repetidos. La medida siempre produce un cierto error aleatorio, pero dos medidas del mismo fenómeno sobre un mismo individuo suelen ser consistentes. La fiabilidad es esta tendencia a la consistencia o precisión del instrumento en la población medida (Bisquerra, 1989).

Entre los diversos métodos de estimar la fiabilidad de una escala, hemos tomado, en primer lugar, el método de *consistencia interna.* Su cálculo se basa en el análisis relativo de la varianza de la puntuación total del cuestionario y de las varianzas de los ítems particulares, y el coeficiente que lo mide es el alfa de Cronbach. También es una cota inferior de la que se obtendría por el método de la prueba repetida si se comparase el test dado y otro cualquiera paralelo de igual cantidad de ítems (Carmines y Zeller, 1979).

Puesto que estamos proporcionando información para cada grupo por separado, y ya que los alumnos de cuarto curso tienen un cuestionario más completo, se ha calculado la fiabilidad para cada uno de los grupos, separadamente. También se ha calculado la fiabilidad para el conjunto total de alumnos, respecto al cuestionario reducido (ítems comunes), puesto que se están haciendo comparaciones y contrastes sobre este cuestionario reducido para el total de la muestra. Los resultados son los que se presentan en las tablas 6.6.1, 6.6.2 y 6.6.3.

Fiabilidad para el Primer Curso

Para el primer curso (17 ítems) hemos obtenido un valor $\alpha = 0.7076$ para el coeficiente de Cronbach, por lo que consideramos que este valor es suficientemente elevado para nuestro propósito, dado que la prueba no es homogénea, sino que hemos tratado de reflejar en ella una variedad de elementos de significado. También para cada ítem proporcionamos información sobre la forma en que afecta a la fiabilidad global.

Tabla 6.6.1. Resultados del análisis de fiabilidad para primer curso

Ítem	Media sin el ítem	Varianza sin el ítem	Correlación con el total	Alfa sin el ítem
P1.1	5,1548	8,9340	,2881	,6958
P1.2	5,5179	8,5027	,5025	,6723
P2.1	5,6488	8,9598	,4472	,6831
P2.2	5,6667	8,9900	,4652	,6828
P2.3	5,4286	8,7015	,3771	,6854
P3	5,3274	9,9820	-,0728	,7364
P4	5,3333	8,7505	,3393	,6898
P5.1	5,4048	9,2244	,1825	,7078
P5.2	5,5655	9,6963	,0513	,7181
P5.3	5,6905	9,8318	,0451	,7136
P7.1	5,3036	8,3324	,4901	,6711
P7.2	5,2798	8,5859	,3962	,6829
P7.3	5,2560	8,3952	,4674	,6740
P8	5,3988	9,2232	,1819	,7079
P9.1	5,2857	8,4568	,4434	,6770
P9.2	5,5714	9,0727	,3064	,6938
P9.3	5,7381	9,7274	,1716	,7053

Alpha = 0,7076

Observamos también que el ítem 3 correlaciona negativamente con el total de la prueba. Se trata de un ítem que intenta evaluar el conocimiento que los alumnos tienen de la propiedad de que "la suma de las desviaciones de los datos con respecto a la media es nula". Por otro lado, la presentación contiene únicamente elementos verbales, sin la presencia de números o gráficos, lo que lo diferencia del resto de las preguntas del cuestionario. Se presenta bajo la forma de un ejemplo de uno de los campos de problemas de los que emerge la idea de media, obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para una distribución uniforme, siendo sólo 2 los ítems del cuestionario que incluyen este elemento de significado. Aunque el valor negativo que aparece es muy pequeño, -0.07 merece una reflexión, puesto que la varianza sin el ítem es la más elevada de toda la tabla, 0.73. Estos dos valores indican que evalúa componentes diferenciados respecto al resto de los ítems del cuestionario.

Los ítems 5.2 y 5.3 (relacionados con la mediana) obtienen en la correlación con el total de la prueba valores muy cercanos a cero: 0.05 y 0.04 respectivamente, que indica que tampoco se relacionan con el resto.Por lo que respecta a los otros ítems, la correlación con el total de la prueba presenta valores que van desde 0.17 para el 9.3 (estimación de la mediana a partir de un gráfico), hasta el máximo de 0.50 que corresponde al 1.2 (dada la media, encontrar una distribución con dicha media) y que es por tanto un ítem que discrimina los alumnos con mejor y peor comprensión.El resto de los valores (Media sin el ítem, Varianza sin el ítem y Alfa sin el ítem), permanecen muy estables para las diferentes cuestiones. Pensamos que ello señala una contribución homogénea de cada ítem a la fiabilidad de la escala, lo que refuerza la validez del cuestionario para esta investigación.

Fiabilidad para Cuarto Curso

Tabla 6.6.2. Resultados del análisis de fiabilidad para cuarto curso

Ítem	Media sin el ítem	Varianza sin el ítem	Correlación con el total	Alfa sin ítem
P1.1	9,4861	17,5383	,3663	,7486
P1.2	9,8125	17,2583	,4172	,7450
P2.1	9,8403	17,0163	,4914	,7403
P2.2	9,8056	16,8990	,5095	,7388
P2.3	9,8472	17,4590	,3762	,7478
P3	9,6944	17,2626	,3973	,7461
P4	9,5208	17,9716	,2412	,7564
P5.1	9,7986	18,0501	,2129	,7583
P5.2	9,8611	17,1974	,4519	,7430
P5.3	9,8542	17,3562	,4062	,7459
P6.1	10,0556	19,1857	-,0433	,7683
P6.2	10,1389	18,6939	,2514	,7571
P7.1	9,5139	16,9229	,5199	,7385
P7.2	9,5000	17,3986	,3977	,7465
P7.3	9,5694	16,8063	,5296	,7373
P8	9,5069	17,5104	,3652	,7485
P9.1	9,5069	17,3706	,4023	,7462
P9.2	9,9167	18,4406	,1405	,7620
P9.3	9,9792	17,9506	,3101	,7523
P10	9,9236	18,8962	,0214	,7686
P11	10,0278	19,4678	-,1344	,7733
P12	9,8403	18,8205	,0299	,7693
P13	9,9097	18,4603	,1333	,7625
P14	9,7292	17,8352	,2573	,7556
P15	9,6944	18,3116	,1414	,7632

Alpha = 0,7607

Para cuarto curso (25 ítems) hemos obtenido un valor $\alpha = 0.7607$ para el coeficiente de Cronbach, por lo que consideramos que este valor es suficientemente elevado para nuestro propósito. También para cada ítem proporcionamos información sobre la forma en que afecta a la fiabilidad global. En este caso encontramos dos ítems que correlacionan negativamente con el resto de la prueba, el ítem 6.1 (buscar un promedio para una distribución de datos ordinales) y el ítem 11 (efecto sobre los promedios de la presencia de un valor atípico). En ambos casos, además las varianzas sin los ítems obtenidas son las mayores de la tabla. Se trata, de nuevo de cuestiones que evalúan elementos diferenciados con respecto al resto de los ítems de la prueba.

En este curso (4º) encontramos que el ítem 3 que correlacionaba negativamente en 1º, aquí no lo hace. Al introducir nuevos ítems en el cuestionario (ítems del 10 al 15) y ampliar así el universo de elementos de significado introducidos, además de la mejora producida por la enseñanza, los alumnos reconocen elementos de significado comunes con otras cuestiones que no hacen los de 1º.

Por otro lado, la última parte del cuestionario, no contenida en el de 1º, correlaciona muy poco con el resto de las preguntas. Como ya comentamos en el análisis a priori, se trata de un conjunto de 6 tareas abiertas en las que los alumnos deben realizar razonamientos mediante la interpretación de promedios y sus propiedades, en diferentes tipos de representaciones, teniendo que poner en relación estos tres tipos de elementos en una misma tarea, lo que las diferencia del resto de preguntas, más simplificadas en su formato y contenido y puede explicar esta baja correlación.

Análisis de fiabilidad combinado

Finalmente, hemos repetido el análisis combinando las observaciones de los dos cursos y tomando solo las preguntas comunes.

Tabla 6.6.3. Resultados del análisis de fiabilidad combinado

Ítem	Media sin el ítem	Varianza sin el ítem	Correlación con el total	Alfa sin el ítem
P1.1	6,1731	12,6902	,3431	,7798
P1.2	6,5192	12,3019	,4774	,7700
P2.1	6,6026	12,2531	,5564	,7655
P2.2	6,5962	12,1708	,5795	,7638
P2.3	6,4872	12,7008	,3378	,7802
P3	6,3622	13,1835	,1767	,7926
P4	6,2853	12,5775	,3533	,7793
P5.1	6,4519	13,1745	,1880	,7913
P5.2	6,5673	12,9022	,3073	,7821
P5.3	6,6314	12,9473	,3339	,7803
P7.1	6,2660	11,9515	,5471	,7640
P7.2	6,2468	12,3280	,4342	,7730
P7.3	6,2660	12,0737	,5089	,7671
P8	6,3141	12,6020	,3441	,7800
P9.1	6,2532	12,3183	,4358	,7728
P9.2	6,5962	13,3283	,1817	,7901
P9.3	6,7147	13,2592	,3015	,7825

Alpha = 0,7879

A partir del nuevo análisis realizado, podemos ver cómo la correlación de los distintos ítems con el total de la prueba mejora globalmente, oscilando entre el 0,1763 de la pregunta 3 hasta el 0,5795 de la pregunta 2.2, por encima de las cifras obtenidas en los análisis diferenciados por cursos, comentados antes. Por otro lado, y apoyando estos resultados, se observa la disminución de la varianza sin el ítem en todos ellos. Estos cambios se pueden explicar por el aumento del tamaño de la muestra considerada.

Coeficiente de generalizabilidad para primer curso

Adicionalmente hemos calculado dos coeficientes de generalizabilidad para el cuestionario. La teoría de la generalizabilidad extiende la teoría clásica de la medición, según Feldt y Brennan (1991) y permite, por medio del análisis de varianza, analizar diferentes fuentes de error en un proceso de medida. Para Santisteban (1990) el núcleo de esta teoría es el considerar diferentes fuentes de error en las puntuaciones observadas, que pueden ser los mismos sujetos, las preguntas o las condiciones que se aplican.

El coeficiente de generalizabilidad se define con el cociente (1), es decir como cociente entre la varianza verdadera en las puntuaciones de la prueba y la varianza observada que es

$$G = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_e^2} \qquad (1)$$

suma de la varianza verdadera más la varianza debida al error aleatorio. Según Thorndike (1989), la varianza de error depende de cómo definimos el universo de puntuaciones verdaderas y en el análisis de generalizabilidad se consideran ciertas fuentes como parte de la varianza de error en unas condiciones y otras fuentes en otras.

En nuestro caso diferenciaremos dos fuentes para el error aleatorio y calcularemos, por tanto, dos coeficientes de generalizabilidad: la generalizabilidad a otros alumnos de la misma prueba y la generalizabilidad de otros problemas similares a los incluidos en la prueba a los mismos alumnos.

Para realizar este cálculo, hemos obtenido, en primer lugar a partir del análisis de escalas del programa SPSS y del modelo de estimación de Dunn y Clarck (1987) para el análisis de varianza de medida repetida, los siguientes componentes de la varianza. Para ello, partimos de la tabla 6.6.4 de análisis de varianza de medidas repetidas, en que se ha tomado el ítem como factor. De esta tabla obtenemos los cuadrados medios entre sujetos, entre los diferentes ítems y residual, así como sus grados de libertad.

Tabla 6.6.4. Análisis de varianza de medidas repetidas para primer curso

Fuente de variación	Suma cuadrados	G.L.	Cuadrado medio	F	Prob
Entre sujetos	98.2521	167	.5883		
Intra sujetos	542.9412	26.88	.2020		
Entre ítems	83.2647	16	5.2040	30.25	.0000
Residual	459.6765	2672	.1720		
Total	641.1933	2855	.2246		
Media total	.3403				

CM_S = 0.5883 que es un estimador de $b\sigma^2_S + \sigma^2_R$, siendo b el número de ítems
CM_I = 5.204 que es un estimador de $a\sigma^2_I + \sigma^2_R$ siendo a el número de sujetos
CM_R = 0.172 que es un estimador de σ^2_R

De donde, despejando obtenemos las siguientes estimaciones:

Varianza dentro de los sujetos $\sigma^2_s = 0.0246$
Varianza dentro de los ítems $\sigma^2_i = 0.0299$
Varianza residual $\sigma^2_e = 0.172$

Sustituyendo ahora estos componentes de varianza en la fórmula (1) y teniendo en cuenta los tamaños de muestra (17 ítems y 168 alumnos), según si consideramos como fuente de variación los problemas o los alumnos, obtenemos las siguientes estimaciones:

Generalizabilidad respecto a otros ítems:

$$G_i = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2/17} = 0.710$$

Obtenemos un valor próximo al del coeficiente Alfa, lo cual es lógico, puesto que el coeficiente de generalizabilidad a otros ítems coincide con él, ya que se considera los alumnos fijos y la única fuente de variación es la debida a variabilidad entre ítems. Las pequeñas diferencias son debidas a redondeos en los cálculos. Esta es la generalizabilidad de nuestros resultados si a los mismos alumnos les pasáramos otra prueba del mismo número de ítems, variando el enunciado de los mismos, que es lo suficientemente alta para los propósitos de nuestro trabajo.

Generalizabilidad a otros alumnos:

$$G_s = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma_e^2/168} = 0.9670$$

Obtenemos un valor muy alto, para la generalizabilidad a otros alumnos de la misma prueba, lo que indica una muy alta posibilidad de generalizar nuestros resultados a otros alumnos, conservando el mismo cuestionario. Por supuesto, en la hipótesis de que se conserven las características sociológicas y educativas.

Coeficiente de generalizabilidad para cuarto curso

Tabla 6.6.5. Análisis de varianza de medidas repetidas para Cuarto curso

Fuente de variación	Suma cuadrados	G.L.	Cuadrado medio	F	Prob
Entre sujetos	109.6522	143	.7668		
Intra sujetos	759.36	3456	.2197		
Entre ítems	129.6233	24	5.4010	29.4347	.0000
Residual	629.7367	3432	.1835		
Total	869.0122	3599	.2415		
Media total	.4072				

De la misma manera, para el curso de cuarto se obtienen los siguientes coeficientes:
$CM_S = 0.7668$ que es un estimador de $b\sigma^2_S + \sigma^2_R$, siendo b el número de ítems
$CM_I = 5.401$ que es un estimador de $a\sigma^2_I + \sigma^2_R$ siendo a el número de sujetos
$CM_R = 0.1835$ que es un estimador de σ^2_R

De donde, despejando obtenemos las siguientes estimaciones:

Varianza dentro de los sujetos $\sigma^2_s = 0.02333$

Varianza dentro de los ítems $\sigma^2_i = 0.03623$

Varianza residual $\sigma^2_e = 0.1835$

$G_i = \dfrac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2/25} = 0.76067$	$G_s = \dfrac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma_e^2/144} = 0.9661$
Generalizabilidad a otros ítems	Generalizabilidad a otros alumnos

Coeficiente de generalizabilidad para las preguntas comunes

Finalmente, al combinar las preguntas comunes para las dos muestras, se obtienen los cálculos que reproducimos a continuación.

Tabla 6.6.6. Análisis de varianza de medidas repetidas para las muestras combinadas

Fuente de variación	Suma cuadrados	G.L.	Cuadrado medio	F	Prob
Entre sujetos	257.4902	311	.8279		
Intra sujetos	1017.5294	4992	.2038		
Entre ítems	143.7568	16	8.9848	51.17	.0000
Residual	873.7726	4976	.1756		
Total	1275.0196	5303	.2404		
Media total	.40				

$CM_S = 0.8279$ que es un estimador de $b\sigma^2_S + \sigma^2_R$, siendo b el número de ítems
$CM_I = 8.9848$ que es un estimador de $a\sigma^2_I + \sigma^2_R$ siendo a el número de sujetos
$CM_R = 0.1756$ que es un estimador de σ^2_R

De donde, despejando obtenemos las siguientes estimaciones:

Varianza dentro de los sujetos $\sigma^2_s = 0.03837$
Varianza dentro de los ítems $\sigma^2_i = 0.02823$
Varianza residual $\sigma^2_e = 0.1756$

$$G_i = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2/17} = 0.78789$$

Generalizabilidad a otros ítems

$$G_s = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma_e^2/312} = 0.9804$$

Generalizabilidad a otros alumnos

En resumen, mientras que el coeficiente alfa o el coeficiente de generalizabilidad a otros ítems tiene un valor moderado-alto, tanto para los cuestionarios pasados a cada curso, como de la parte común pasada a la muestra global, obtenemos una alta posibilidad de generalizar a otros alumnos, similares a los de nuestro estudio, siempre que se conserve el cuestionario. Lógicamente la fiabilidad y generalizabilidad aumentan, tanto en el cuestionario completo, respecto al reducido, como al aumentar el tamaño de la muestra de alumnos.

6.7. RELACIONES ENTRE RESPUESTAS

Otro punto de interés en nuestro trabajo es analizar las relaciones entre respuestas a los diferentes ítems y si existe relación entre ellos. Con objeto de estudiar este punto, en esta sección describiremos algunas técnicas de análisis multivariante que hemos aplicado a los datos recogidos. Estas técnicas sirven para visualizar la estructura de las respuestas a una prueba. Como sugieren Batanero y Godino (1991), la investigación en el campo de la Educación tiene que afrontar con frecuencia la recogida de datos acerca de múltiples variables que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje. El estudio de dichos datos por medio de técnicas de análisis multivariante, tanto en el enfoque exploratorio como confirmatorio, se revela como imprescindible para comprender adecuadamente el funcionamiento de dichos procesos.

6.7.1. ANALISIS CLUSTER

Un primer estudio ha consistido en realizar un análisis cluster. Con frecuencia la clasificación es el primer paso para la comprensión de un fenómeno complejo, ya que el interés está en determinar, en el conjunto dado, clases tan diferenciadas como sea posible (Cuadras, 1991).

Si con este procedimiento llegamos a determinar la existencia de agrupaciones claramente diferenciadas, podemos lograr un doble objetivo: En primer lugar, las variables pertenecientes a un mismo grupo, podrían estar midiendo el mismo tipo de conocimiento, por lo que sería posible prescindir de alguna de ellas o sustituir todo el grupo por una función de las variables que lo integran. Por otro lado, el número de grupos claramente diferenciados determina el número de características esencialmente diferentes, por lo que este método puede ser un paso previo al análisis factorial. De nuevo realizamos el estudio, primeramente por separado para cada grupo y luego para el global de alumnos.

Para primer curso hemos realizado un análisis cluster de variables (esto es, de las respuestas a los 17 ítems) cuyos resultados se muestran en la Tabla 6.7.1 y en la Figura 6.7.1. Como medida de similaridad hemos usado el coeficiente de correlación (que varía teóricamente entre –1 y +1), puesto que las variables son numéricas y una correlación fuerte y positiva entre dos ítems indica que en realidad las respuestas son similares. Una correlación negativa e intensa, por el contrario indicaría que las respuestas son opuestas.

Parte de estos resultados han sido presentados en Batanero, Cobo y Díaz (en prensa).

Análisis en Primer curso

Tabla 6.7.1. Historial de conglomeración en el análisis cluster para los datos de primer curso

	Conglomerado que se combina		Coeficientes	Etapa en la que el conglomerado aparece por 1ª vez		Próxima etapa
Etapa	Conglomer. 1	Conglomer.2		Conglomer. 1	Conglomer.2	
1	3	4	,709	0	0	5
2	12	13	,476	0	0	3
3	11	12	,456	0	2	11
4	8	9	,411	0	0	14
5	3	5	,378	1	0	6
6	3	16	,346	5	0	9
7	14	15	,330	0	0	12
8	1	2	,323	0	0	9
9	1	3	,317	8	6	10
10	1	7	,314	9	0	11
11	1	11	,304	10	3	12
12	1	14	,298	11	7	13
13	1	17	,224	12	0	14
14	1	8	,168	13	4	15
15	1	10	,131	14	0	16
16	1	6	,100	15	0	0

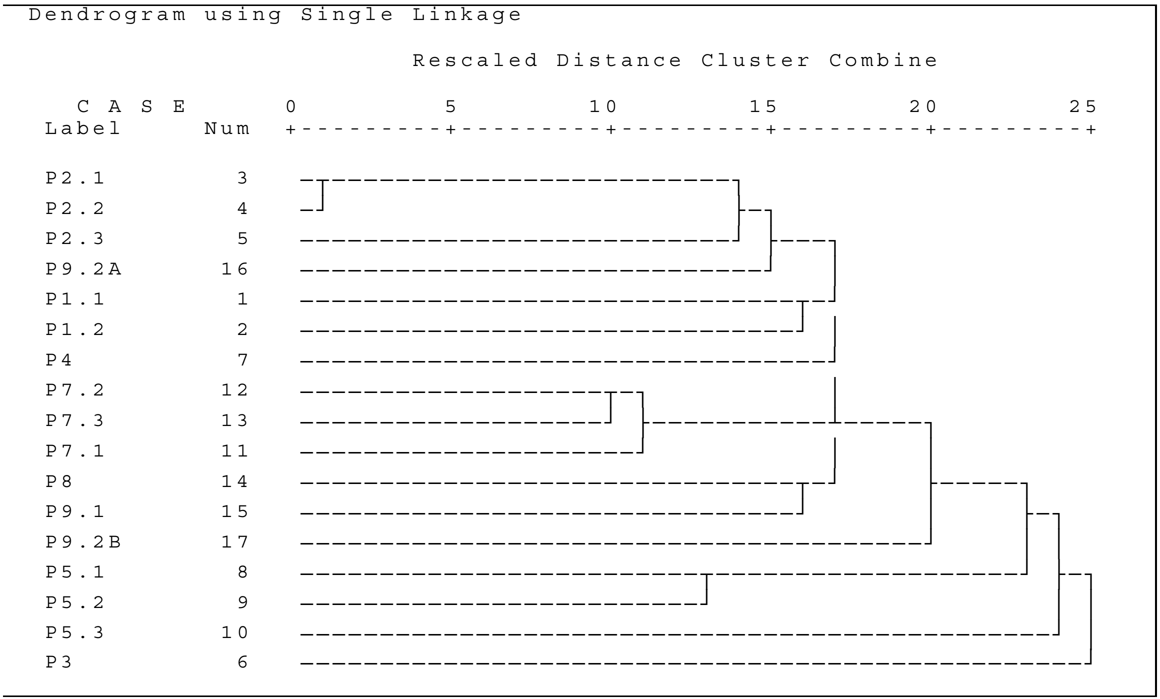
Historial de conglomeración

Como método de aglomeración hemos usado el del vecino más próximo, que es el recomendado cuando se usa como distancia el coeficiente de correlación. De este modo, al formarse los grupos cada variable se une, en primer lugar con la que más correlaciona con ella. Cada grupo, una vez formado, se sustituye por su centro de gravedad y el proceso continua iterativamente hasta agotar las variables. La información de la forma en que se van formando los grupos se presenta en la Tabla 6.7.1 donde podemos observar que las distancias siempre han sido positivas, lo cual es lógico, puesto que todos los ítems miden los mismos conocimientos.

Los subítems que forman parte de un mismo ítem suelen agruparse, aunque no en todos los casos, y, en general, se observan pocas uniones, lo que de nuevo señala que el cuestionario no es unidimensional.

Un primer grupo lo constituyen los ítems 2.1 y 2.2 (media ponderada), 2.3 (media de la suma de dos variables), 9.2 (determinación de la moda a partir de una gráfica), 1.1 (la media no conserva el conjunto de datos), 1.2 (determinar una distribución a partir de la media) y 4 (inversión del algoritmo; la media está contenida entre los extremos), todos ellos relacionados con propiedades de la media, excepto el 9.2, que, de todas formas aparece unido a una distancia mucho mayor.

Figura 6.7.1 Dendrograma para primer curso



Un segundo grupo está formado por las cuestiones 7.1, 7.2 y 7.3 (media como cantidad equitativa y determinación de una distribución a partir de la media), los tres apartados que forman el ítem 7, lo que puede explicar la relación encontrada en las respuestas.

A continuación se unen con ellos el 8 (media como mejor estimador, efecto de valores atípicos) y 9.1 (determinación de la media a partir de un gráfico), que evalúan también elementos relacionados con la media.

Finalmente el 5.1 (cálculo de la mediana) y 5.2 (efecto de los valores atípicos sobre la mediana), centrados ambos en el concepto y propiedades de otro de los estadísticos estudiados.

Los demás ítems aparecen aislados, por lo que parecen evaluar habilidades específicas. Son los ítems 9.3 (cálculo de la mediana a partir de un gráfico), 5.3 (encontrar el mejor promedio para una distribución) y 3 (la desviación a la media es cero).

Análisis en cuarto curso

Por otro lado, repetimos el análisis cluster sólo con los datos de los alumnos de cuarto curso, y con todos los ítems usados por ellos. A continuación analizamos los resultados, que presentamos en la Tabla 6.7.2 y la Figura 6.7.2.

El primer grupo que encontramos en este curso lo forman, igual que ocurre en 1º, los ítems 2.1 y 2.2 (media ponderada), a los que se unen después el 2.3 (media de la suma de dos variables), el 3 (la desviación a la media es cero) y el segundo grupo formado por el 5.1 (cálculo de la mediana) y 5.2 (efecto de los valores atípicos sobre la mediana), centrados ambos en el concepto y propiedades de otro de los estadísticos estudiados. A ellos se unen también, aunque a mayor distancia, el 1.2 (determinar una distribución a partir de la media) y el 1.1 (la media no conserva el conjunto de datos).

Un tercer grupo está formado por las cuestiones 7.1 , 7.2 y 7.3 (media como cantidad equitativa y determinación de una distribución a partir de la media), igual que ocurría en el caso de 1º. A continuación se unen con ellos el 8 (media como mejor estimador, efecto de valores atípicos) y el 9.1 (determinación de la media a partir de un gráfico), que evalúan también elementos relacionados con la media. Estos dos últimos sirven de enlace entre los grupos descritos arriba.

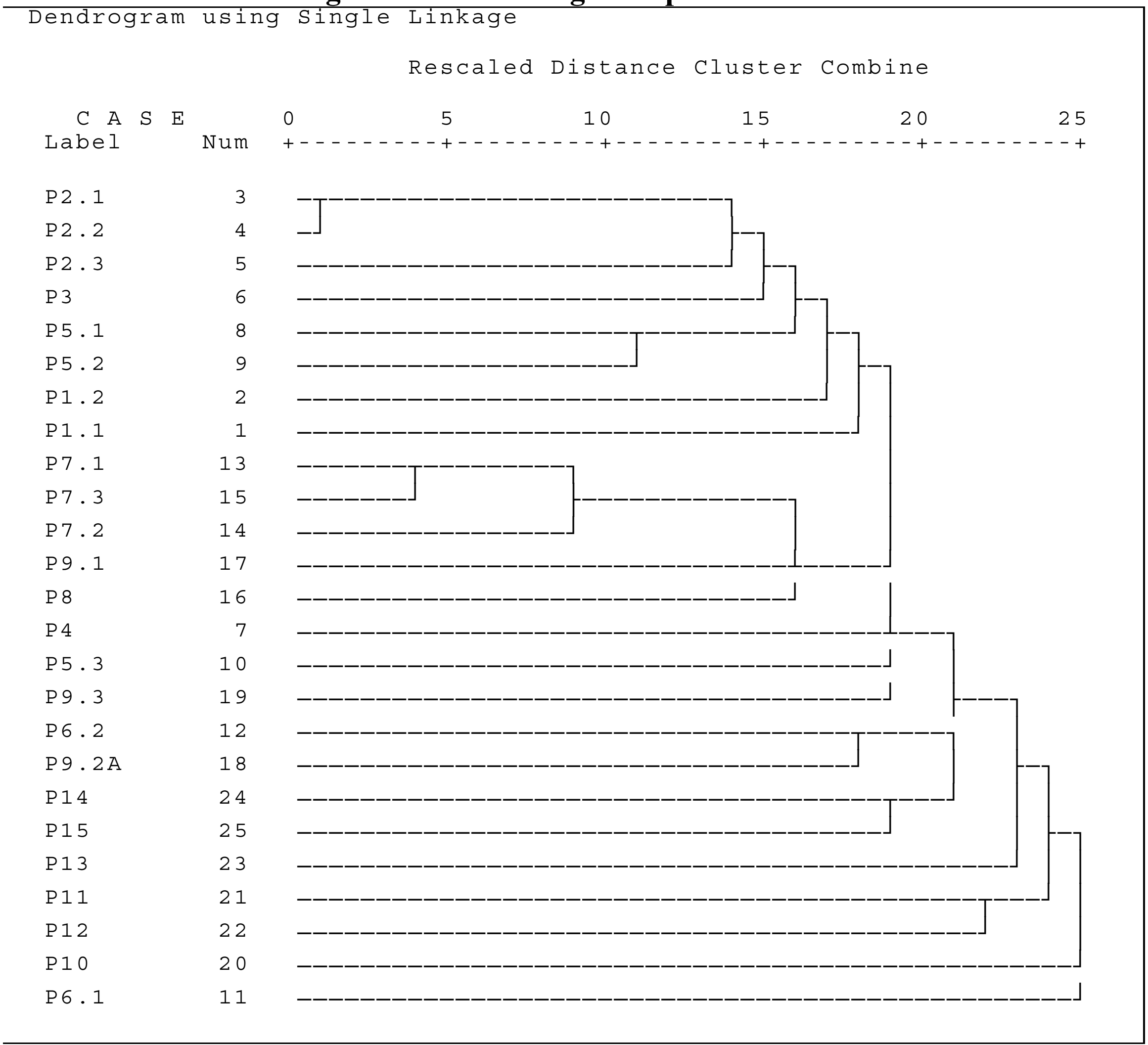
Tabla 6.7.2. Historial de conglomeración para cuarto curso

	Conglomerado que se combina		Coeficientes	Etapa en la que el conglomerado aparece por primera vez		Próxima etapa
Etapa	Conglomer.1	Conglomer.2		Conglomerado 1	Conglomerado 2	
1	3	4	,867	0	0	5
2	13	15	,766	0	0	3
3	13	14	,621	2	0	7
4	8	9	,565	0	0	9
5	3	5	,456	1	0	6
6	3	6	,423	5	0	9
7	13	17	,419	3	0	8
8	13	16	,417	7	0	13
9	3	8	,392	6	4	10
10	2	3	,361	0	9	11
11	1	2	,358	0	10	13
12	12	18	,348	0	0	18
13	1	13	,326	11	8	14
14	1	7	,321	13	0	16
15	24	25	,318	0	0	18
16	1	10	,317	14	0	17
17	1	19	,313	16	0	19
18	12	24	,248	12	15	19
19	1	12	,245	17	18	21
20	21	22	,225	0	0	22
21	1	23	,201	19	0	22
22	1	21	,156	21	20	23
23	1	20	,124	22	0	24
24	1	11	,121	23	0	0

Otros dos grupos los forman el 6.2 (elegir el mejor promedio para una distribución de datos ordinales) y el 9.2 (determinación de la moda a partir de un gráfico), por un lado y el 14 (la media conserva cambios de origen y escala) y 15 (comparación de dos muestras en formato gráfico) por otro, que se unen a su vez entre ellos.

El último lo forman el ítem 11 (presencia de un valor atípico) y el 12 (mejor promedio para una distribución bimodal). Los demás ítems aparecen aislados, por lo que parecen evaluar habilidades específicas.

Figura 6.7.2 Dendrograma para cuarto curso



Análisis combinado

Puesto que los resultados de aglomeración en los ítems comunes cuando hacemos el resultado por separado son similares, hemos considerado conveniente realizar un análisis cluster de los ítems comunes para el total de la muestra, con el fin de comprobar si se mantienen los resultados y darle mayor generalidad. Los datos se presentan en las tabla y figura 6.7.3.

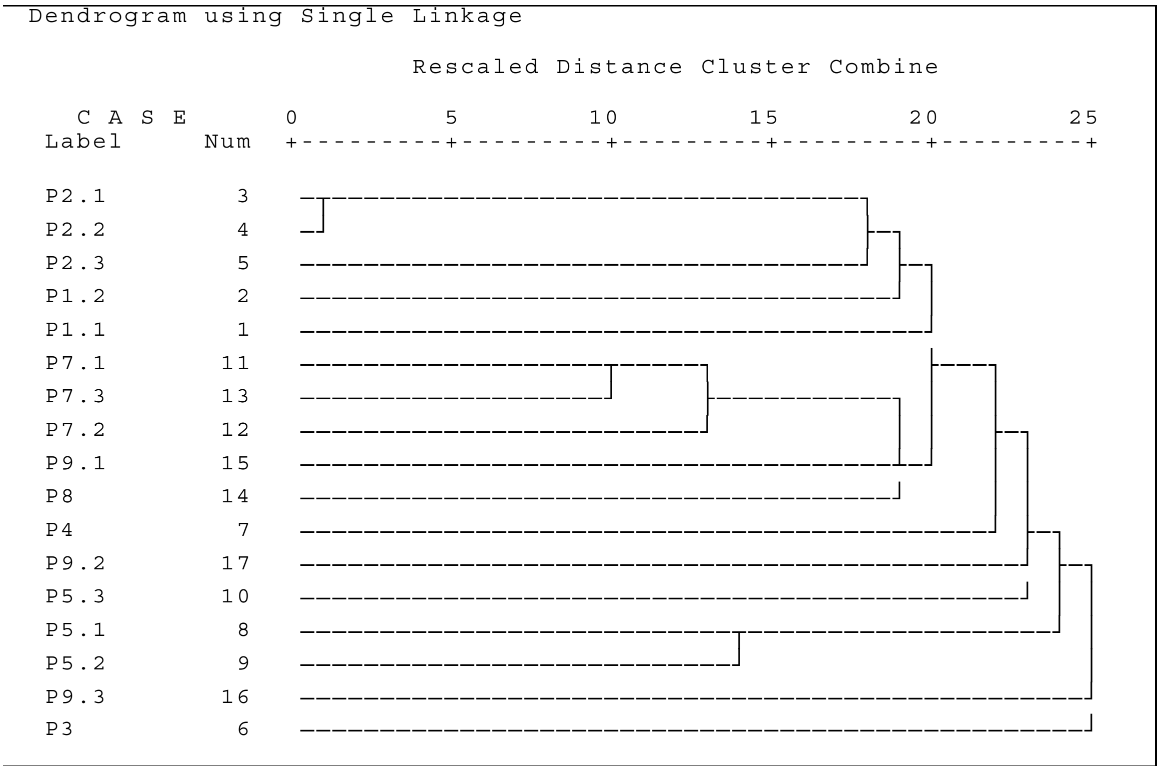
Observamos que los resultados prácticamente repiten los obtenidos en primer curso para estos ítems, por lo que no los comentaremos de nuevo, sino sólo señalar que la estructura de asociaciones entre ítems parece similar en ambos grupos de alumnos, hecho que también confirma el que los ítems con mayor y menor dificultad, de entre los comunes eran los mismos en los dos grupos.

Ello nos sugiere la conveniencia de unir las dos muestras para el análisis factorial, y reducirlo a los ítems comunes, puesto que la estructura de relaciones entre estos apenas se vio afectada en el estudio del 4º curso al añadir los ítems específicos para estos alumnos.

Tabla 6.7.3. Historial de conglomeración para cursos combinados

	Conglomerado que se combina		Coeficientes	Etapa en la que el conglomerado aparece por primera vez		Próxima etapa
Etapa	Conglomer.1	Conglomer.2 2		Conglomerado 1	Conglomerado 2	
1	3	4	,821	0	0	5
2	11	13	,595	0	0	3
3	11	12	,502	2	0	6
4	8	9	,483	0	0	14
5	3	5	,385	1	0	7
6	11	15	,371	3	0	8
7	2	3	,353	0	5	9
8	11	14	,351	6	0	10
9	1	2	,340	0	7	10
10	1	11	,326	9	8	11
11	1	7	,281	10	0	12
12	1	17	,272	11	0	13
13	1	10	,264	12	0	14
14	1	8	,244	13	4	15
15	1	16	,215	14	0	16
16	1	6	,199	15	0	0

Figura 6.7.3. Dendrograma para cursos combinados



La finalidad específica es discutir las teorías de Watson y Moritz (1999, 2000) quienes defienden que el aprendizaje de los promedios sigue un modelo evolutivo neopiagetiano, según los niveles definidos por Biggs y Collis (1982, 1991). En base a ello, definen seis niveles jerárquicos de comprensión de estas características, que se describieron con detalle en la sección 3.2.4. Esta teoría implicaría la unidimensionalidad de las respuestas de los estudiantes, o bien la existencia de tan sólo un número reducido de factores que explicarían la mayor parte de la variabilidad de las respuestas, uno de los cuales dominando claramente la cantidad de varianza explicada.

Nuestro modelo teórico, así como el análisis de los conceptos y análisis a priori de los ítems del cuestionario nos sugieren, por el contrario, la multidimensionalidad de las respuestas de los estudiantes.

6.7.2. ANÁLISIS FACTORIAL

A continuación pasamos a presentar los resultados del análisis factorial de las variables comunes a los dos grupos que componen el cuestionario. Como indica Thorndike (1989), un factor es una nueva variable que se origina por una combinación lineal de las puntuaciones originales de la prueba. La expectativa al llevar a cabo una análisis factorial, es que en un pequeño número de factores se puede incorporar casi toda la información original y por tanto simplifica la descripción de la característica medida.

Nuestros datos tienen los requisitos exigidos de aplicación, pues el número de casos supera a 10 por cada una de las variables analizadas. Es por ello que hemos decidido utilizar conjuntamente los dos grupos y restringirnos a las variables comunes, puesto que además el análisis cluster nos ha indicado que las agrupaciones son similares en los grupos juntos y separados. Las variables tienen unidad experimental, ya que todas ellas se suponen indicadores empíricos de los conocimientos de los alumnos respecto a las medidas de tendencia central. Por otro lado, aplicamos el análisis sólo con finalidad exploratoria.

En primer lugar en la Tabla 6.7.4 presentamos las comunalidades de las variables que han sido medidas mediante el coeficiente de correlación múltiple de cada variable con el resto. Observamos que todos los coeficientes son positivos, lo que sugiere que todas las variables miden algo en común, que es el que hemos denominado conocimiento sobre las medidas de tendencia central. No obstante, hay bastante variabilidad y puesto que no se llega al coeficiente unidad, cada ítem tiene una componente específica, que lo hace valioso dentro de un cuestionario. En algunos casos, la comunalidad no llega al 30% de la varianza explicada (P1.1) lo que apoya, de nuevo, nuestra teoría sobre el carácter multidimensional de las respuestas.

Los ítems más específicos son los p1.1 (interpretación de la media, cuando su valor no pertenece al conjunto numérico de referencia) y p1.2 (dada una media, obtener una distribución), p3 (propiedad de la suma de desviaciones a la media) y p4 (la media varía dentro del rango de la variable) y p9.2 (cálculo de la media a partir de una gráfica).

El método de extracción de valores que hemos empleado es de componentes principales. Este método es el que menos distorsiona los datos, ya que en realidad se trata de hacer un cambio de ejes en el espacio de las variables, tomando como primer eje aquél que maximiza la varianza observada, como segundo el eje ortogonal al primero que maximiza el resto de la varianza y así sucesivamente, hasta obtener el mismo número de ejes inicial.

Tabla 6.7.4. Comunalidades de las variables

	Correlación múltiple
P1.1	,287
P1.2	,398
P2.1	,730
P2.2	,722
P2.3	,634
P3	,344
P4	,437
P5.1	,700
P5.2	,734
P5.3	,631
P7.1	,683
P7.2	,617
P7.3	,653
P8	,531
P9.1	,521
P9.2	,420
P9.3	,536

No obstante, para propósitos prácticos, prescindiremos de los ejes (factores) que expliquen una varianza menor a la unidad, puesto que dichos ejes explicarán menos varianza que las variables originales (cada una de las cuales tiene una varianza unitaria, una vez normalizadas). Con este procedimiento, en la tabla 6.7.5 presentamos los 5 ejes resultantes (factores) que en total explican casi el 56% de la varianza total. Es todavía una proporción pequeña, lo que confirma el carácter multidimensional de las respuestas de los alumnos, lo que concuerda con nuestro marco teórico sobre complejidad del significado de los objetos matemáticos, pues con 5 factores no llegamos a completar el 60 % de la varianza.

Tabla 6.7.5. Varianza total explicada por cada factor

	Autovalores iniciales		
Componente	Total	% de la varianza	% acumulado
1	4,185	24,618	24,618
2	1,595	9,380	33,998
3	1,495	8,797	42,795
4	1,191	7,005	49,801
5	1,112	6,542	56,343

Observamos que en la extracción inicial de factores la varianza del primer factor es bastante mayor que la de los restantes, lo cual es típico si el tamaño de la muestra es suficiente. No obstante, el primer factor explica una parte relativamente pequeña de la varianza (no llega al 25%) y por ello no podemos suponer que el cuestionario sea unidimensional, según Morales (1988). Este autor también indica que a partir del segundo factor debe haber, en los restantes, una reducción acusada de este porcentaje de varianza, lo cual tampoco se cumple en nuestro caso. Prácticamente los factores 2 a 5 explican la misma varianza cada uno.

En nuestro estudio, hemos tenido en cuenta las recomendaciones presentadas en Cuadras (1991) a la hora de decidir si reducimos aún más el número de factores (ya que no existe una única solución en el análisis factorial). Este autor hace las siguientes recomendaciones (p.170) respecto a la matriz de puntuaciones factoriales:

- Cada fila debe tener al menos un cero;
- Si hay m factores comunes, cada columna debe tener un cero;
- Cada par de columnas debe tener varias variables cuyas puntuaciones se anulan en una columna pero no en la otra;
- Si hay más de tres factores comunes, para cada par de columnas una buena parte de las variables debe anularse en ambas:
- Para cada par de columnas debe haber un pequeño número de variables que no se anulan en las dos columnas.

Siguiendo estas recomendaciones y el principio general de que los factores deben ser interpretables, nos hemos quedado con los cinco primeros factores. En la tabla 6.7.5. hemos incluido también el porcentaje de varianza que explica cada uno de los cinco factores retenidos respecto a la varianza explicada por los cinco. Ello nos permite ver ahora con más claridad que el factor de mayor peso es el primero y los otros cuatro tienen una importancia muy similar.Para facilitar la interpretación de los factores retenidos hemos rotado los ejes utilizando el método Varimax, que maximiza la varianza y no distorsiona los datos, al tratarse de una rotación ortogonal. En la tabla 6.7.6 presentamos las puntuaciones factoriales rotadas. Para facilitar la interpretación las variables se presentan en forma decreciente de importancia en los primeros factores y se suprimen los valores de correlaciones de valor absoluto menor que .3 (y explican, por consiguiente, tan sólo el 1% del factor correspondiente). A continuación comentamos los resultados.

Tabla 6.7.6. Matriz de componentes rotados

	Componente				
	1	2	3	4	5
P2.2	,769				
P2.1	,768		,312		
P2.3	,722				-,312
P1.1	,509				
P1.2	,459	,417			
P4	,381	,343			,309
P7.1		,787			
P7.2		,765			
P7.3		,739			
P8		,493		-,306	,421
P9.3			,684		
P9.2			,609		
P9.1		,389	,534		
P5.1				,828	
P5.2				,806	
P5.3					,754
P3	,352				,410

Primer factor. Comprensión conceptual de la definición y propiedades de la media

Incluye los tres apartados del ítems 2 (que son los de mayor peso), los dos apartados del ítem 1, así como los ítems 3 y 4 con un peso menor. Los cuatro primeros aparecían unidos en los diferentes clusters realizados.

Todos ellos son ítems relacionados con el concepto de media, incluyendo la idea de que no es una operación interna, búsqueda de una distribución dada la media, inversión del algoritmo, el caso de que la media no pertenece al conjunto numérico de la variable, cálculo de medias ponderadas, media de la suma de dos variables, suma de desviaciones a la media, valor dentro del rango de la variable, media no operación interna, centro de gravedad. En definitiva supone una comprensión conceptual de la media y sus propiedades. En este grupo de ítems se incluyen los dos utilizados en la investigación de Watson y Moritz (2000), que son el 1 y el 2 y recogen, con ligeras modificaciones los empleados por esta autora en sus entrevistas. Creemos, por tanto, que el factor describe el constructo identificado por Watson y Moritz (2000) y podríamos usar sus niveles de comprensión para clasificar las respuestas de los estudiantes según los niveles descritos, aunque en el caso de nuestros alumnos, los niveles variarían entre el tercero (respuesta multiestructural) y el sexto (aplicación en más de dos contextos complejos).

Segundo factor. Comprensión procedimental de algoritmos no estándares para el cálculo de la media

Dominan en el mismo los tres apartados de la pregunta siete (dar una distribución, dada la media; influencia del cero en el cálculo de la media) y la pregunta 8; también hay alguna influencia de las preguntas 1.2 (hallar una distribución dada la media) y 9.1 (estimación de la media a partir de un gráfico).

En definitiva, los alumnos que dan una respuesta correcta a estos ítems dominan los procedimientos de cálculo de la media, sabiendo elegir el algoritmo adecuado al tipo de datos. Muestran también una comprensión profunda del algoritmo al ser capaces de invertirlo y buscar una distribución dada la media.

Tercer factor. Comprensión gráfica: Estimación de parámetros a partir de una gráfica

Este factor está marcado por los tres apartados del ítem 9, en que se pide estimar media, mediana y moda a partir de la gráfica.

Lo más destacado de este ítem, cuyos tres componentes prácticamente se aíslan del resto, es el hecho de que los estudiantes deben de hacer una lectura "*dentro de los datos*" en la terminología de Curcio (1989), lo que requiere la interpretación e integración de los datos en el gráfico, la habilidad de comparar y operar cantidades.

Requiere también la comprensión de los elementos estructurales del gráfico, incluyendo su marco (ejes, escalas, unidades), especificadores (barras), título y etiquetas (Wainer, 1992).

El gráfico es un objeto semiótico (Friel, Curcio y Bright, 2001) cuya relación con los datos requiere un largo proceso de construcción que los alumnos que han dado respuestas correctas en estos ítems han debido superar.

Cuarto factor. Discriminación media- mediana

Opone las preguntas 5.1 y 5.2 al ítem 8, aunque este tiene menor peso. Los dos apartados del ítem 5 se refieren a la definición y cálculo de la mediana con un número par e impar de valores respectivamente. El ítem 8 se refiere a la interpretación de media como mejor estimación de una cantidad desconocida y su cálculo con datos aislados. Por tanto, el factor descubre la discriminación media-mediana, tanto a nivel conceptual en sus definiciones y propiedades, como procedimental. También expresa la discriminación de los campos de problemas correspondientes.

Quinto factor. Comprensión funcional de las medidas de tendencia central

Finalmente, el último factor está definido por las respuestas a los ítems 5.3 (elección del promedio que mejor representa los datos, 8 (media como estimación de una cantidad desconocida), 3 y 4 (suma de desviaciones y media en el rango de la variable) que se opone al 2.3 (media de la suma); este ultimo con un peso muy pequeño. Señala la capacidad de elección de la medida de tendencia central más adecuada para un conjunto de datos. Ello requiere una comprensión funcional de los promedios, discriminando sus campos de problemas y las propiedades que los hacen preferible en uno y otro caso, así como la comprensión de la idea de promedio como propiedad de un colectivo.

En definitiva, la variedad de factores identificados y su interpretación, que apuntan a la idea de una pluralidad de tipos de comprensión, de acuerdo a nuestro marco teórico, complementa y profundiza los estudios de Watson y Moritz (1999, 2000).

6.8. ANÁLISIS DETALLADO DE ITEMS

Una vez finalizado el estudio cuantitativo de los datos, hemos querido llevar a cabo un estudio cualitativo centrado en los elementos de significado que los alumnos usan para resolver las tareas propuestas. La finalidad es evaluar la comprensión mostrada respecto a cada uno de estos elementos, así como las dificultades y errores asociados. Con todo ello queremos describir las tendencias y variabilidad en el significado personal sobre las medidas de posición central de los alumnos participantes, comparar las diferencias por curso y con el significado institucional pretendido para la Educación Secundaria Obligatoria.

Al igual que hicimos en la muestra piloto, se ha realizado un análisis de contenido de las respuestas dadas por los alumnos a cada una de las preguntas planteadas, identificando en ella los diferentes elementos de significado y diferenciando su uso correcto o incorrecto. Este análisis y sus resultados detallados es uno de los puntos originales de nuestro trabajo, respecto a las investigaciones previas, que consideramos puede brindar información a los profesores que imparten el tema sobre la forma en que se debe abordar su enseñanza.

Puesto que las respuestas son abiertas, en una misma pregunta un alumno ha podido usar uno o más elementos. Por esta razón, en los totales de respuestas que aparecen en las tablas resumen que se presentarán a continuación, aparecen casos de ítems en los que el número de respuestas supera al número de sujetos que responden a los cuestionarios.

En lo que sigue presentamos una descripción de los elementos de significado identificados en las respuestas obtenidas en cada apartado de los diferentes ítems, con ejemplos de su uso. Nuestro interés no es sólo si la respuesta es finalmente correcta o incorrecta, sino también qué elementos han sido correctamente empleados, incluso cuando el alumno no llegue a la solución parcial del problema planteado. Ello se deriva de nuestra concepción de la comprensión como un constructo sistémico y gradual, por la que los alumnos van progresivamente adquiriendo los diferentes elementos de significado y poniéndolos en relación.

6.8.1. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 1

Ítem1

a) Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1.2 hijos por familia. Explícanos qué significa para ti esta frase.
b) Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿Cuántos hijos podrían

tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1.2? Justifica tu respuesta.

Resultados en el Ítem 1a

En este apartado del ítem 1 pedimos a los alumnos que expresen con sus propias palabras su interpretación a la aparición de un valor medio no entero, a pesar de que la variable de referencia es entera. Ha sido tomado de Watson (2000), quien lo usa para clasificar a los alumnos en niveles unidimensionales de comprensión de los promedios. En nuestro caso, analizamos los elementos de significados en las respuesta, obteniendo los siguientes:

Campos de problemas:

- Alumnos que hacen explícitamente alusión al campo de problemas consistente en obtener un reparto equitativo en una distribución de datos (PM2). Ejemplo: *"Que el número de hijos a los que tocaría cada familia de Andalucía sería 1.2"*.
- Alumnos que hacen referencia a la idea de valor más probable en una población (PM4). Ejemplo: *"Que cada familia tiene un hijo y que puede tener otro, pero que no lo tienen todas las familias*". En algunos casos se presentan errores como acotar la distribución en el valor dos "*Que no llega a dos hijos de media. Lo máximo que pueden tener las familias son dos hijos"*.

Algoritmos y procedimientos

- Referencia explícita al cálculo correcto de la media de una variable discreta con datos aislados. (AM1). Ejemplo: "*Que se han sumado el número total de hijos en Andalucía y se han dividido entre el número de familias andaluzas"*.
- Inversión del algoritmo de cálculo de la media , para hallar un dato, dado el valor de la media, calculando el total a partir de la media (AM5), y dando en algunos casos una distribución que se ajuste a dicho total (AM6). *"Cada familia tiene un hijo y cada 5 familias hay una con 2 hijos"*.

Definiciones y propiedades

- Definición de media como suma ponderada de cada valor de la variable por su frecuencia, es decir, como un algoritmo (DM1). Ejemplo: "*Que se han sumado el número total de hijos en Andalucía y se han dividido entre el número de familias andaluzas"*.
- Definición de media como valor representativo de un conjunto de datos (DM2). Ejemplo: *"Significa que por cada familia, si hubiera que repartir todos los hijos, tocaría a cada una un hijo.*
- En algunos casos se produce un error en la definición de la media como valor representativo (DM2), debido a que confunden la media con la moda. Ejemplo: *"Que la mayoría de las familias tienen solo un hijo o dos. Y hay poca gente que tengan más de éstos"*.
- Respuestas que indican un rango de variación para los datos y que la media, mediana y moda de un conjunto de datos son siempre valores perteneciente al rango de la variable (N1): "*Que la suma de hijos dividido por las familias da 1.2, pero eso dice que algunas parejas tienen 2 y otras 4, pero la media es sobre 1 y 2"*.
- Respuesta correcta, enfatizando que la media no es una operación interna (A1). Ejemplo: *"Cada familia tiene un hijo y cada 5 familias hay una con 2 hijos. El 1.2 es tan solo el número de la operación matemática*". En otros casos se produce un error en A1, ya que los alumnos argumentan que no se puede obtener un valor no entero para la media de una variable

entera "*Yo creo que está mal dicho ya que una familia no puede tener un hijo y un poquito, en todo caso podría tener 2*".

- Propiedad de la media como representante de los datos (E1), Ejemplo: *"Esta frase significa para mí que cada familia tiene de media 1.2 hijos, es decir, que cada familia tendrá alrededor de 1.2 hijos, unos tendrán más y otros menos, pero alrededor de esa cantidad"*.
- Error en E1. El mismo ejemplo del error en PM4.

En cuanto a los argumentos usados se ha tratado en todos los casos de la comprobación de casos particulares o contraejemplos, con un tipo de representación verbal. Se pueden ver algunos casos en los ejemplos presentados arriba.

Tabla 6.8.1. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 1a

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas				
Media como reparto equitativo		55 (33,5)		48 (32,4)
Media como valor probable	4 (2,4)	51 (30,4)	3 (2,1)	51 (35,4)
Representaciones				
Verbales		142(84,5)		107(74,3)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media datos aislados	1 (0,6)	23 (13,7)		30 (20,8)
Invertir algoritmo media	2 (1,2)	2 (1,2)	1 (0,7)	2 (1,4)
Definiciones y propiedades				
Definición de media (algoritmo)	14 (8,3)	55 (33,5)	13 (9,0)	48 (32,4)
Definición de media como promedio	8 (4,8)	78 (46,4)	3 (2,1)	53 (36,8)
Valor en el rango				1 (0,7)
Operación interna	50 (29,8)		20(13,9)	35 (24,3)
Representante	8 (4,8)	78 (46,4)	3 (2,1)	53 (36,8)
Argumentos				
Casos particulares y contraejemplos		142(84,5)		107(74,3)

En la tabla 6.8.1. se presentan los resultados obtenidos. Resulta destacable, en el apartado de campos de problemas, que alrededor de un tercio de los alumnos de ambos cursos reconoce la media como valor que se obtiene al hacer un reparto equitativo para obtener una distribución uniforme. Este uso surge, como se explicó en el análisis del significado de referencia del capítulo 2, a partir del estudio y caracterización de las propiedades de la media, lo que supone avanzar un paso más allá de otros usos más intuitivos como puede ser el de "la media como el valor más probable al elegir un elemento al azar de una población", que ha aparecido en un porcentaje similar de la muestra. Sin embargo, hay otra tercera parte que no explicita ninguno de los campos de problemas asociados a esta situación, lo que nos lleva a pensar que, aunque manejen los algoritmos de cálculo correctamente, el uso de la media como herramienta para resolver problemas es aún bastante limitado.

En cuánto a los algoritmos de cálculo usados en las respuestas a esta pregunta, el porcentaje ha sido bastante bajo, lo cuál no debe llevarnos a suponer que no hay un dominio aceptable de los mismos, como se podrá comprobar más adelante, e incluso aquí mismo si se observa la poca cantidad de errores cometidos por quienes los han aplicado. Se trata de un ítem de interpretación de un valor de la media ya calculado, por lo tanto no era necesario volver a explicitar ningún algoritmo. No obstante, determinadas personas han optado por este elemento de significado para justificar sus respuestas.

Uno de los errores encontrados dignos de destacar, aunque no tengan un porcentaje muy elevado de aparición (en torno al 8 o 9% en los dos cursos), es el de confundir media y moda. Este es un error de concepto que se debe tener en cuenta, especialmente en el 4º curso, pues permanece tras la instrucción recibida. A este respecto también merece la pena detenerse en el conocimiento de las distintas definiciones de media. Respecto a la basada en el algoritmo de cálculo, mucho más frecuente en los libros de texto analizados, encontramos un porcentaje similar de alumnos que la ponen de manifiesto en los dos cursos, mientras que la definición que enfatiza la idea de promedio, más intuitiva a nuestro entender, es más frecuente en 1º que en 4º, lo que corrobora nuestra idea inicial de que convendría potenciar esta idea para mejorar y afianzar una comprensión significativa del concepto.

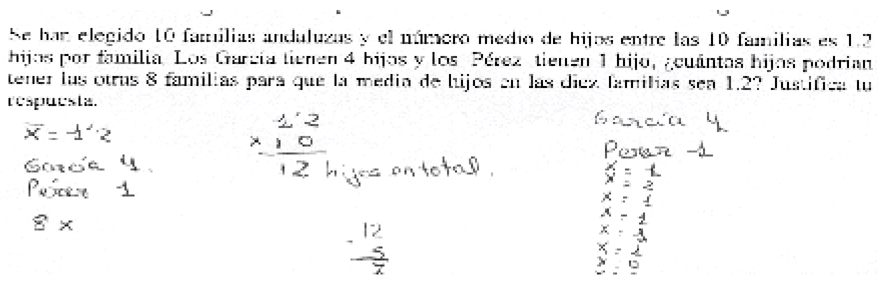
Respecto a las propiedades de la media, destaca, con un alto índice de aparición más elevado incluso en 1º que en 4º, la de ser un representante de una población que aporta información de todo el conjunto y no de elementos concretos. Este resultado contrasta con el obtenido por Watson (1999), que llega a la conclusión de que sólo los estudiantes de niveles más avanzados muestran la idea de representatividad de los promedios. Por el contrario, la de ser un valor que pertenece al rango de la variable no es conocida o, al menos, no se usa por prácticamente ninguno de los alumnos encuestados, a pesar de que la pregunta está orientada a comentar, precisamente, el valor numérico obtenido como media. Otra propiedad, quizás la más directamente relacionada con el interés que suscitaba en nosotros este ítem, la de no ser el cálculo de la media una operación interna en el conjunto de datos, no aparece correctamente en ninguno de los alumnos de 1º y, aunque sí la encontramos como correcta en las respuestas de 4º, no con una frecuencia demasiado alta (tan solo el 24.3%). En cambio, casi un tercio de los alumnos de 1º y un 14% de los de 4º, la usan incorrectamente, lo que revela que se trata de una propiedad difícil, pero que mejora algo con el paso del tiempo y la instrucción.

Resultados en el Ítem 1b

En el apartado b) los alumnos deben construir una distribución de datos que tenga un valor medio dado. Esta actividad es relativamente compleja, puesto que supone, además del conocimiento del algoritmo de cálculo de la media, la comprensión de la idea de distribución, como propiedad de un colectivo que es señalada por Biehler (1997) como esencial en el razonamiento estadístico. Hemos encontrado las siguientes respuestas:

Algoritmos y procedimientos

- Cálculo de la media de un conjunto de datos aislados (AM1). Ejemplo: *"Todos uno, menos una familia que tendrá 0, porque al sumarlos serán 12 y divididos entre 10, 1.2".*
- Inversión del algoritmo de cálculo de la media, para dar una distribución concreta que cumpla la condición (AM6). Ejemplo:


Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1.2? Justifica tu respuesta.

En otros casos se produce un error en AM6, ya que los alumnos no son capaces de invertir el algoritmo para obtener el total, dada la media.

- Encontrar una o varias distribuciones que tengan como media el valor dado (AM7). Como ejemplo puede servir el mismo del punto anterior mostrado para AM6. Error en AM7, cuando el alumno da una distribución que no se ajusta a la media. Ejemplo: *"Podrían tener 1hijo cada una de las otras familias, ya que si cada una de ellas tiene 1hijo, menos una que tiene 4, haces la media y te sale 1.3 hijos"*

Propiedades

- Error por no tener en cuenta la propiedad de la media de no ser operación interna (A1), puesto que aportan una distribución de valores no enteros, no acorde a la situación planteada. Ejemplo: *"No llegarían a tener las otras familias ni un hijo y yo creo que eso no es muy normal"*.

Tabla 6.8.2. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 1b

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media de un conjunto de datos aislados		31(18,5)		25(17,4)
Invertir algoritmo media	20(11,9)	28(16,7)	11 (7,6)	38(26,4)
Buscar distribución dada la media	20(11,9)	31(18,5)	19(13,2)	25(17,4)
Definiciones y propiedades				
Operación interna		2 (1,2)	7 (4,9)	
Representaciones				
Representación verbal		28(16,7)		42(29,2)
Representación simbólica				7 (4,9)
Representación numérica		81(48,2)		56(38,9)
Argumentos				
Argumento deductivo		36(21,4)		28(19,4)
Casos particulares y contraejemplos		28(16,7)		42(29,2)

La tabla 6.8.2. muestra los resultados obtenidos al analizar este ítem. Podemos observar cómo hay una mejora de los resultados en 4º curso en el aspecto fundamental que se pretendía evaluar con esta pregunta, esto es, la capacidad de invertir el algoritmo de cálculo de la media. No sólo hay un porcentaje más alto de respuestas correctas en este apartado, sino que disminuye el de errores. Sin embargo, buscar una distribución conocido el valor de la media resulta difícil tanto a los alumnos de 1º curso como a los de 4º, si tenemos en cuenta el bajo índice de respuestas correctas y el porcentaje de errores que, aunque no muy alto, tampoco es despreciable. Esto concuerda con las investigaciones de Cai (1995), quien indica que mientras la mayoría de los estudiantes de 12-13 años aplican correctamente el algoritmo de cálculo, son pocos los capaces de invertirlo y esto aún hasta los 15-16 años en nuestro caso.

En cuánto a las propiedades, la única puesta de manifiesto y con unos porcentajes mínimos es la de que el cálculo de la media, desde el punto de vista algebraico, es una operación interna.

Los argumentos utilizados para justificar las respuestas a esta pregunta han sido, tanto los de tipo deductivo (ver ejemplo dado para AM1), como los basados en casos particulares (ver ejemplo del error en AM7), aunque en ambos casos, la frecuencia de aparición no ha sido demasiado elevada. En el resto de los casos se han limitado a dar una respuesta sin dar una argumentación de la misma.

Las representaciones usadas difieren algo según los cursos. En 1º sólo se usan la numérica y la verbal, mientras que en 4º ya aparece un pequeño número de alumnos que utilizan la representación simbólica (ejemplo de AM6), lo que no es de extrañar, puesto que ésta supone un cierto nivel de abstracción que los alumnos de 1º aún no suelen poseer.

6.8.2. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 2

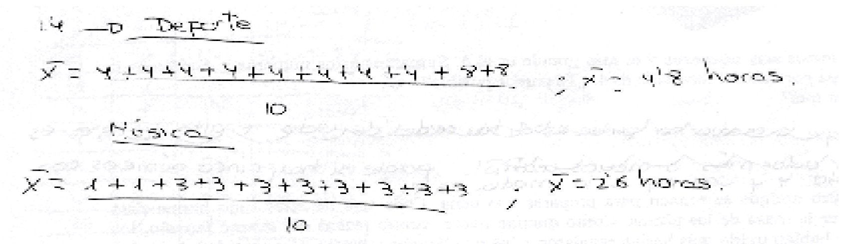
> *Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.*
> *María y Pedro dedican además1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes? ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?.*

Resultados en el Ítem 2a

La ponderación correcta en el cálculo de la media, supone capacidad de aplicar la ley distributiva al sumar un conjunto de valores numéricos repetidos y también percibir que la operación promedio no tiene la propiedad asociativa. Para comprobar si los alumnos comprenden estas propiedades y las aplican al cálculo de la media ponderada hemos utilizado este ítem, que también incluye la media de la suma de dos variables. En el primer apartado, las respuestas obtenidas han sido las siguientes:

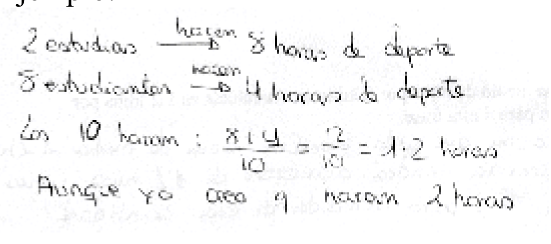
Algoritmos de cálculo

- Cálculo de la media de un conjunto de datos aislados (AM1). Aunque esperábamos que los alumnos usasen la media ponderada, son muchos los casos que prefieren repetir un dato y usar el algoritmo ordinario. Ejemplo:

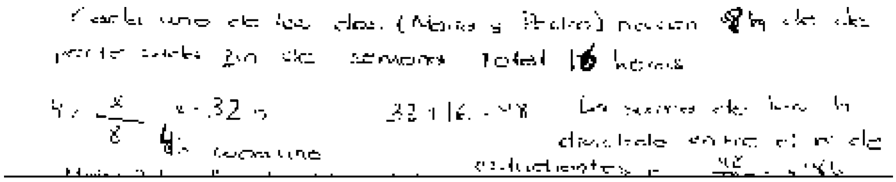

1.4 → Deporte
$\bar{x} = \frac{4+4+4+4+4+4+4+4+8+8}{10}$; $\bar{x} = 4'8$ horas.
Música
$\bar{x} = \frac{1+1+3+3+3+3+3+3+3+3}{10}$; $\bar{x} = 26$ horas.

- Error en AM1, al usar una media simple, sin tener en cuenta las ponderaciones.

Ejemplo:


2 estudiantes $\xrightarrow{hacen}$ 8 horas de deporte
8 estudiantes $\xrightarrow{hacen}$ 4 horas de deporte
Los 10 hacen: $\frac{8+4}{10} = \frac{12}{10} = 1{\cdot}2$ horas
Aunque yo creo q hacen 2 horas

- Cálculo de la media de un conjunto de datos presentados en forma de tabla de frecuencias, calculando el total de cada uno de los dos conjuntos por separado, sumando dichos totales y dividiendo la suma por el número total de datos, o lo que es lo mismo que el cálculo de la media ponderada (AM2) Ejemplo:



Error en AM2. Como ejemplo puede servir el mismo que ilustra el error en AM1.

Definiciones:

- Definición de la media como algoritmo (DM1), queda implícita en todos los casos de cálculo correcto de la media, ya sea a partir de datos aislados, como de la media ponderada.
  Error en la definición de media provocado por la confusión con la moda, error en DM1. Ejemplo: *"El número medio de horas sería 4 horas, porque los 8 estudiantes dedican 4 horas y son mayoría".*

Tabla 6.8.3. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 2a

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Representaciones				
Representación numérica		155(94,5)		96 (66,7)
Representación verbal		11 (6,5)		8 (5,6)
Representación simbólica				16 (11,1)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media datos aislados			1 (0,7)	14 (9,7)
Cálculo media (tabla)	131(78,0)	24 (14,6)	57 (39,6)	35 (23,6)
Definiciones				
Definición media (algoritmo)		24 (14,6)	1 (0,7)	49 (33,1)
Argumentos				
Argumento deductivo		85 (50,6)		59 (41,0)
Casos particulares y contraejemplos		11 (6,5)		8 (5,6)

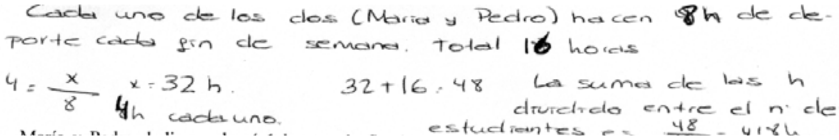
Resultados en el Ítem 2b

En este apartado, se deben hacer los mismos cálculos que en el anterior, para hallar una media ponderada. Los resultados obtenidos son:

Algoritmos de cálculo

- Cálculo de la media de un conjunto de datos aislados (AM1), como ha aoarecido en los ejemplos anteriores.

- Cálculo de la media de un conjunto de datos presentados en forma de tabla de frecuencias, o media ponderada (AM2) Ejemplo:



- Error en AM2 por obtener un total inadecuado o no ponderar debidamente.

Definiciones y propiedades:

- Aparece de nuevo el error en la definición de media provocado por la confusión con la moda (DM1). Ejemplo: *"El número medio de horas sería 4 horas, porque los 8 estudiantes dedican 4 horas y son mayoría".*

Tabla 6.8.4. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 2b

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Representaciones				
Representación verbal		11 (6,5)		8 (5,6)
Representación simbólica				16 (11,1)
Representación numérica		147(87,5)		96 (66,7)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media datos aislados		1 (0,6)		18 (12,5)
Cálculo media ponderada	129(76,8)	21 (12,5)	53 (36,8)	37(25,7)
Definiciones y propiedades				
Definición media (algoritmo)		22 (13,1)	1 (0,7)	55(38,19)
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		85 (50,6)		59 (41,0)
Casos particulares y contraejemplos		11 (6,5)		8 (5,6)

En la tabla 6.8.3. y 6.8.4 podemos ver un resumen de los resultados obtenidos en los dos primeros apartados de esta pregunta, muy similares, que comentaremos conjuntamente.

Lo más relevante de estas dos preguntas era la evaluación de la competencia de los alumnos en el cálculo de una media ponderada, lo que hemos resumido en las tablas de los resultados bajo el epígrafe de cálculo de la media con los datos dados en forma de tabla, que en definitiva no es otra cosa que calcularla ponderando el peso de cada uno de los valores de la variable. Podemos observar la gran cantidad de errores aparecidos en 1os alumnos de 1º y el bajo porcentaje de ellos que hacen el cálculo correcto. En 4º los resultados son distintos, ya aparece en torno a una cuarta parte de los alumnos que calculan correctamente una media ponderada, aunque sigue habiendo más de un tercio de ellos que cometen errores al hacerlo. Como balance global podemos afirmar que, el cálculo de la media ponderada resulta difícil para estudiantes de estas edades, aunque mejora algo con los mayores. Pollatsek, Lima y Well (1981), ya encontraron que la ponderación presenta dificultades incluso en niveles universitarios.

También podemos ver en la tabla que algunas de las respuestas, posiblemente, de alumnos que tienen dificultades con el cálculo anterior, buscan una solución alternativa, convirtiendo éste en un conjunto de datos aislados y usando el algoritmo correspondiente a esta nueva situación, que manejan con más seguridad. Se trata, en casi todos los casos, de alumnos de 4º, lo que revela que ellos han adquirido, al menos, la capacidad de buscar estrategias que les permitan dar con una solución correcta utilizando herramientas que conocen.

Las representaciones numéricas han sido casi las únicas utilizadas por los alumnos de 1º en sus respuestas y las más frecuentes también en 4º, aunque en este último curso aparecen ya algunas con formato algebraico (ver ejemplo de AM1). Sólo alrededor de la mitad de las respuestas están justificadas, siendo el argumento más frecuente el deductivo (ejemplo dado para el error en AM2), con la presencia también de algunos casos particulares.

En cuánto a los argumentos utilizados para los razonamientos predomina el deductivo con situaciones numéricas concretas y, con una frecuencia muy baja, encontramos algunos razonamientos basados en casos particulares.

Resultados en el Ítem 2c

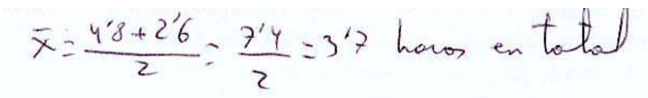
En el último apartado de este ítem es dónde se debe poner de manifiesto el conocimiento de la propiedad de no asociatividad del cálculo de la media. Se han obtenido los siguientes tipos de respuestas:

Algoritmos y procedimientos

- Cálculo de la media de un conjunto de datos presentados en una tabla de frecuencias (AM2). Ejemplo: *"48 + 26 = 74 : 10 = 7.4 es el número medio de horas de cada fin de semana"* .
  Error en AM2, al no tener en cuenta debidamente las ponderaciones. Ejemplo: *"12+4 = 16 horas"*.

Propiedades

- Definición de media como representante, basada en el algoritmo de cálculo. Como ejemplo podemos ver el mismo presentado para ilustrar el cálculo AM2.
- Error en la propiedad de la media de no asociatividad, pensando incorrectamente que la media de la suma ha de ser la media de las medias obtenidas para cada sumando. Ejemplo:



- La media de la suma de dos variables es igual a la suma de las medias de dichas variables (A6). Ejemplo: " $\bar{x}_{total} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 4.8 + 2.6 = 7.4$

  Error en A6 indicando que no es posible el cálculo de la media de la suma con los datos obtenidos. Ejemplo: *"Depende, porque si a 5 estudiantes les gusta más el deporte y a los otros 5 más la música, no podemos saberlo"*.

Tabla 6.8.5. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 2c

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Representaciones				
Representación numérica		139(82,7)		96 (66,7)
Representación simbólica				16 (11,1)
Representación verbal		11 (6,5)		8 (5,6)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media (tabla)	58 (34,5)	4 (2,4)	6 (4,2)	15 (10,4)
Definiciones y Propiedades				
Definición media como algoritmo	58 (34,5)	4 (2,4)	6 (4,2)	15 (10,4)
No asociativa	37 (22,0)		32 (22,2)	
Media de la suma	1 (0,6)	56 (33,3)	2 (1,4)	43 (29,9)
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		79 (47,0)		59 (41,0)
Casos particulares y contraejemplos		11 (6,5)		8 (5,6)

La tabla 6.8.5. nos muestra el resumen de los resultados de la tercera parte de este ítem, centrada en las propiedades de no asociatividad del cálculo de la media y la media de la suma de dos o más variables coincide con la suma de las medias de dichas variables. Llama la atención que ningún alumno de la muestra hace un uso correcto, en sus respuestas a la primera de las propiedades mencionadas, mientras que sí lo hacen incorrectamente algo más de una quinta parte de ellos, tanto en 1º como en 4º. Estos resultados nos llevan a pensar que es una propiedad difícil en estos niveles.

En cuánto a la segunda propiedad, parece que la dificultad es menor, puesto que ya apenas aparecen errores, mientras que la usan correctamente por encima del 20% de los alumnos.

Si nos fijamos en las definiciones y los algoritmos de cálculo puestos en juego en las respuestas a este apartado, se confirman los resultados de las dos preguntas anteriores respecto a la dificultad de la media ponderada, mayor para los alumnos de 1º que para los de 4º, sin ser fácil tampoco en este nivel.

Respecto a las representaciones y los razonamientos utilizados, se vuelve a repetir lo comentado arriba para los dos apartados anteriores.

6.8.3. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 3

Ítem 3

> *Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?*

Uno de los campos de problemas de los que emerge el concepto de media es el de obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme y otro buscar la mejor estimación de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida. Estas dos interpretaciones se apoyan en la propiedad de que la suma de las desviaciones de los datos a la media es nula. Es decir, cada dato que está por encima de la media, debe compensarse con otros por debajo de ella. Mediante este ítem, tomado de Tormo (1993), tratamos de evaluar la comprensión de esta propiedad, al mismo tiempo que estudiar si se reconoce el primero de los campos de problemas citados. Hemos encontrado las siguientes respuestas:

Campos de problemas

- Interpretar la media como la cantidad que se obtiene al hacer un reparto equitativo para obtener una distribución uniforme (PM2). Ejemplo: *"Fue igual porque ellos lo que querían era repartir harina a los que tenían menos para que las cuatro pizzas fueran del mismo tamaño"*.
- Error en PM2. Ejemplo: *"Fue menor porque mayor no puede ser, ya que si tú tienes 3 caramelos no puedes dar 4 porque te faltan. Igual tampoco, porque si no uno no podría haber hecho pizza y lo que querían era igualar la harina a todos para que saliera una pizza del mismo tamaño"*.

Propiedades:

- La media coincide con el centro de gravedad de la distribución (E2). Ejemplo: *"Igual, porque como llevaban más les dieron harina a los otros hasta tener más o menos la misma"*.
- Error en E2. Como ejemplo puede servir el mismo que el mostrado arriba para ilustrar el error en PM2.
- La suma de las desviaciones de un conjunto de datos con respecto a su media es cero (E5). Ejemplo: "*Fue igual porque para compensar a la hora de hacer las pizzas, los que habían*

traído más dieron la misma cantidad que los otros recibieron, es decir, estamos hablando de la misma cantidad de harina".

- Error en E5. Ejemplo: *"Mayor, porque si los que trajeron mucha trajeron 250 gr. y los que trajeron poca trajeron 200 gr., y cada pizza necesitaba 200 gr., los que trajeron poca no le dieron nada a los que trajeron mucha puesto que no tenían que darles*".

Tabla 6.8.6. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 3

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas				
Media como reparto equitativo	47 (28,0)	29 (17,3)	32 (22,2)	21 (14,6)
Representaciones				
Representación verbal		132(78,6)		96 (66,7)
Propiedades				
Centro de gravedad (media)	12 (7,1)	36 (21,4)	2 (1,4)	22 (15,3)
Suma desviaciones a la media	5 (3,0)	19 (11,3)	16 (11,1)	47 (32,6)
Argumentos				
Casos particulares y contraejemplos		132(78,6)		96 (66,7)

Los resultados de las respuestas a este ítem se han resumido en la tabla 6.8.6. Se observa el bajo porcentaje de alumnos, tanto de 1º como de 4º que reconocen correctamente el campo de problemas asociado al concepto de media incluido en la cuestión planteada, así como el porcentaje relativamente alto de errores en el mismo.

En cuánto a las propiedades de la media puestas en juego, destaca la de ser centro de gravedad de la distribución, más frecuente en las respuestas de 1º que en las de 4º, lo que nos hace pensar que hay una intuición mas fuerte a este respecto en los alumnos más jóvenes, si bien es verdad que los mayores tienen menos errores en esta misma propiedad, quizás debido a que la usan menos, tanto correcta como incorrectamente. Este resultado apoya la hipótesis de Tormo (1993) que afirma que los alumnos desarrollan nociones intuitivas relacionadas con los promedios que habría que aprovechar, teniendo en cuenta, además, que proponer el algoritmo de cálculo prematuramente puede tener una influencia negativa en la comprensión de los mismos.

Por el contrario, la propiedad de la suma de las desviaciones de los datos con respecto a su media es más usada por los alumnos de 4º, casi un tercio correctamente, y un porcentaje menor con errores. De todos modos, de acuerdo con Leon y Zawojeswski (1991), continua siendo una propiedad muy abstracta para los alumnos.

Los argumentos usados para explicar o justificar las respuestas han sido, en su totalidad, de tipo verbal. Se puede pensar que, puesto que la presentación de la pregunta también es exclusivamente verbal, hay una cierta tendencia a responder de la misma manera. Lo mismo ocurre con los argumentos, todos ellos basados en casos particulares, como se puede ver revisando cualquiera de los ejemplos mostrados.

6.8.4. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 4

Ítem 4

*Tenemos **seis números** y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por **seis**. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?*

En este ítem, tomado de Tormo (1993), aparece como relevante la idea de distribución con el objetivo de analizar si los alumnos son capaces de dar una distribución de valores, conocida la media y el máximo. Como indican Mokros y Russell (1995), hasta que los niños no conciben el conjunto de datos como un todo, no podrán comprender la idea de promedio. Las respuestas que hemos obtenido son las siguientes:

Algoritmos y procedimientos:

- Cálculo de la media con datos aislados (AM1).
- Error en AM1. Ejemplo: *"Yo creo que sí, buscando decimales. Yo he sumado 3.9 + 3.9 + 3.9 + 3.9 + 3.9 + 5 = 4.0"*
- Cálculo de la media con datos en forma de tabla (AM2). Ejemplo: *"Fácilmente se ve que la suma debe dar 24. Como aquí no se especifica nada de que no se puedan repetir los números sumados: 5 · 4 + 2 · 2 = 24/6 = 4".*
- Invertir el algoritmo de la media (AM6). Puede servir el mismo ejemplo usado para AM2. Error en AM6. Ejemplo: *"No, porque 5 no se puede dividir entre seis y como no se puede dividir, el resultado no es 4".*
- Dar una distribución conocida la media (AM7). Como ejemplo puede servir el mismo mostrado para AM1, puesto que se apuntan los datos con los que posteriormente se ha calculado la media.
- Error en AM7, construyendo una distribución que no responde a la situación presentada. Ejemplo: *"No porque tenemos 6 números y el más grande es el 5, lo que indica que serían 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Si los sumamos obtenemos el número 15 y si éste número lo dividimos entre 6 nos da un número con decimales que no es el 4".*

Definiciones y propiedades:

- La suma de las desviaciones de una distribución con respecto a su media es cero (E5). Ejemplo: *"Sí, porque los otros números pueden ser menores que 5 y contrarrestar el 5, con lo cual sale de media 4".*

Tabla 6.8.7. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 4

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Representaciones				
Representación verbal		106(63,1)		88 (61,1)
Representación simbólica				2 (1,4)
Representación numérica		79 (47,0)		76 (52,8)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media datos aislados	5 (3,0)	33 (19,6)	3 (2,1)	53(36,8)
Cálculo media ponderada		3 (1,8)		5 (3,5)
Invertir algoritmo media	1 (0,6)	20 (11,9)	1 (0,7)	24 (16,7)
Buscar distribución dada la media	83 (49,4)	42 (25,0)	25 (17,4)	42 (29,2)
Propiedades				
Suma desviaciones a la media		4 (2,4)		18 (12,5)
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		55 (32,7)		45 (31,3)
Casos particulares y contraejemplos		106(63,1)		88 (61,1)
Otros				
Respuesta correcta, sin razonamiento	2 (1,2)	8 (4,8)	6 (4,2)	3 (2,1)

En la tabla 6.8.7. podemos ver un resumen de las respuestas obtenidas en esta pregunta. Debemos comenzar observando las correspondientes al objetivo fundamental de la misma, esto es, buscar una distribución dada su media. Vemos que el porcentaje de respuestas correctas supera apenas la cuarta parte de los alumnos de 4º y exactamente esta misma proporción aparece en 1º, lo cual nos da pie a afirmar que no es una tarea fácil para los alumnos de estas edades, lo que coincide con lo señalado por Leon y Zawojewski (1991) para los que el concepto de representatividad y distribución es completo. También Russel y Mokros (1991) indican que es mucho más difícil la tarea de encontrar una distribución dado su promedio, que la contraria. Encontramos una diferencia entre ambos cursos, no tanto en las respuestas correctas, sino en los errores, mucho más numerosos en 1º (alcanza casi un 50%) que en 4º, lo que confirma la dificultad, mayor incluso en alumnos más jóvenes.

Otro pequeño porcentaje (también menor en 1º) da una respuesta correcta alternativa a la comentada arriba, invirtiendo el algoritmo de cálculo pero sin llegar a detallar los datos que formarían la distribución. Aún sumando los porcentajes de ambos tipos de respuestas correctas, apenas se supera la tercera parte de la muestra en 4º , y no se alcanza siquiera en 1º.

Paralelamente a las respuestas correctas comentadas antes, se observa un predominio del algoritmo de cálculo con datos aislados (AM1) sobre el que utiliza las frecuencias correspondientes a cada uno de ellos (AM2), indicando de nuevo la dificultad del cálculo y comprensión de medias ponderada (Pollatsek, Lima y Well, 1981).

Esta pregunta también incluye la propiedad de la suma de desviaciones con respecto a la media que fue una de las de más difícil comprensión en la investigación de Strauss y Bichler (1988) con alumnos de 8 a 12 años y en la de Roth y Zawojewski (1991), con alumnos de 14 años. Vemos que, en nuestro caso, la dificultad persiste a los 15-16 años, incluso habiendo estudiado el tema. A la vista de los resultados de la tabla podemos decir que muy pocos alumnos, especialmente en el caso de 1º, hacen uso de la misma en sus argumentaciones.

En cuánto a las representaciones se vuelve a repetir la exclusividad de la numérica y verbal en 1º, y una pequeña muestra de simbólica en 4º. Y sobre los argumentos destacar el predominio de los basados en casos particulares (ejemplo usado para ilustrar AM1) sobre los deductivos (ver ejemplo de E5).

6.8.5. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 5

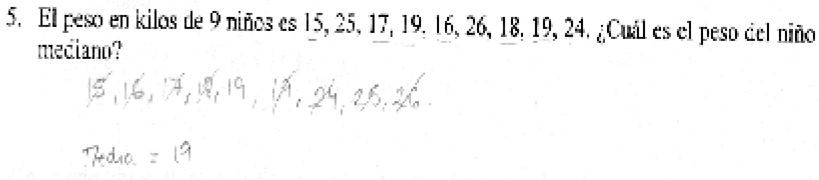
Ítem 5

El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano?
¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg?
En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

En el ítem 5 cambiamos de promedio para centrarnos en el conocimiento de la mediana y su cálculo. En el apartado a) de este ítem se proporciona un número impar de datos de los que se pide que calculen la mediana. Se han obtenido como respuestas las siguientes:

Algoritmos y procedimientos:

- Cálculo de la mediana de un número impar de datos aislados, ordenando los datos y tomando el valor central de la lista ordenada (AME 1). Ejemplo:


5. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19. 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano?

15, 16, 17, 18, 19, 19, 24, 25, 26.

Media = 19

Error en AME1 por no ordenar los datos, antes de tomar el valor central, error que también es encontrado por Calvalho (1998, 2001).

- Cálculo correcto de la media con datos aislados, que se muestra en algunos ejemplos de confusión de media y mediana.

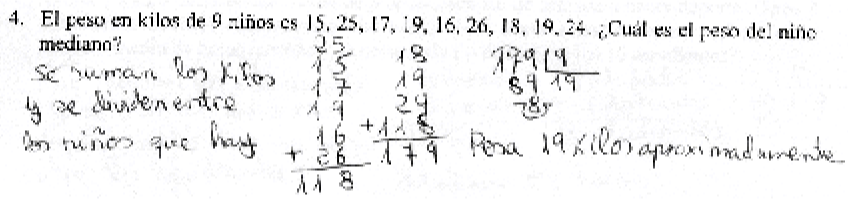
Definiciones y propiedades:

- Definición de la media algoritmo de cálculo (DM1). Aparece en todas las respuestas en las que se realiza un cálculo correcto de la media.


5. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24 ¿Cuál es el peso del niño mediano?

El peso del niño media es 16.

- Confusión de mediana con media, lo que supone un error en la definición de media (DM1), aunque hay un cálculo correcto de la media (AM1). Ejemplo:


4. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano?

Se suman los kilos y se dividen entre los niños que hay

Pesa 19 kilos aproximadamente

- Definición de la mediana como valor que divide a la población en dos partes iguales (DME2) : "*15, 16, 17, 18, 19, 19, 24, 25, 26. El peso del niño mediano es 19".*
- Error en DME2. Ejemplo: *"Depende de la edad porque un niño con 2 años puede pesar 20 Kg y otro niño de 5 años puede también pesar 20 Kg".*
- Error en la definición de moda como valor más frecuente (DMO1). Ejemplo: *"19 kilos, porque hay mayor número de niños que pesan eso".*

Tabla 6.8.8. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 5a

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Representaciones				
Representación verbal		15 (8,9)		
Representación simbólica				2 (1,4)
Representación numérica		161(95,8)		117(81,3)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media datos aislados	3 (1,8)	42 (25,0)		18 (12,5)
Cálculo mediana (número impar datos aislados)	44 (26,2)	64 (38)	26 (18,1)	55 (38,2)
Definiciones y propiedades				
Definición media (algoritmo)	50 (29,8)	42 (25,0)	19 (13,2)	18 (12,5)
Definición mediana (dos partes)	2 (1,2)	64 (38,0)	29 (20,1)	55 (38,2)
Definición moda (más frecuente)	5 (3,0)			
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		81 (48,2)		49 (34,0)
Casos particulares y contraejemplos		15 (8,9)		

La tabla 6.8.8. muestra el resumen de los resultados obtenidos es esta parte del ítem 5, centrada en el cálculo de la mediana. Cabe destacar el porcentaje de cálculos correctos de la mediana efectuados, prácticamente igual para los alumnos de 1º y de 4º, en torno a una tercera parte de la muestra, bastante por debajo de los porcentajes obtenidos en preguntas anteriores en el cálculo de la media, lo que muestra cómo este estadístico resulta más difícil de calcular para los alumnos. Coincide con la dificultad que, para la comprensión de los diferentes algoritmos de cálculo de la mediana, encuentra Estepa (1983) en estudiantes universitarios. Paralelamente encontramos un número no despreciable de errores de cálculo, aunque aquí sí es mayor en 1º que en 4º, por lo que podemos deducir que la instrucción reduce, al menos, el porcentaje de errores cometidos por los alumnos. El error principal (no ordenar los datos al calcular la mediana) coincide con el encontrado por Carbalho (1998, 2001) y también por Barr (1980), quien señala que los alumnos no entienden que la mediana se refiere al conjunto de datos ordenado.

Encontramos también que algunos alumnos confunden mediana y media, aunque calculan ésta última correctamente. Igual que algún caso de confusión entre mediana y moda. En cuánto a las definiciones de mediana y media, aparecen de manera explícita tanto correcta como incorrectamente, así como de forma implícita, en las respuestas que incluyen algoritmos de cálculo de una u otra medidas.

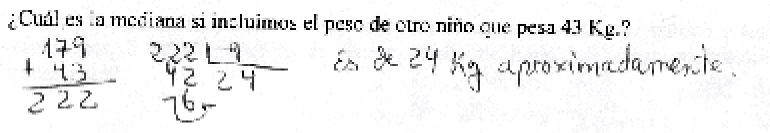
Las representaciones que predominan son las numéricas, así como los argumentos deductivos sobre situaciones numéricas, que en general son correctos.

Resultados en el Ítem 5b

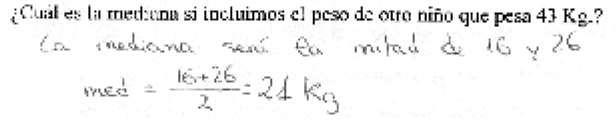
La diferencia de este apartado con el anterior es únicamente el número de datos de la distribución, tratándose en este caso de un número par, lo que supone una dificultad añadida al cálculo de la mediana, pues no puede coincidir ésta con uno de los datos. Las respuestas obtenidas son los siguientes:

Algoritmos y procedimientos

- *Cálculo de la media de un conjunto de valores aislados (AM1) con un cálculo correcto, aunque haya una confusión conceptual entre media y mediana. Ejemplo:*



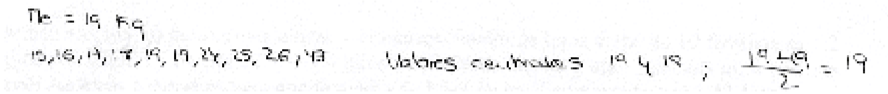
- Cálculo de la mediana de un conjunto par de valores aislados lo que supone, además, resolver el caso de indeterminación (AME 2). Ejemplo: "*También 19* $\frac{19+19}{2}=19$ ".
- Error en AME2 por no haber ordenado los datos, aunque se resuelva el caso de indeterminación. Ejemplo:



Definiciones y propiedades:

- Definición de media como algoritmo (DM1), incluida implícitamente en aquellos alumnos que usan correctamente los algoritmos de cálculo de la media.

- Confusión de mediana con media, lo que supone un error en la definición de media (DM2), aunque hay un cálculo correcto de la media. Para ambos casos se puede ver el ejemplo incluido en AM1.
- Definición de mediana como valor central de la distribución, implícita en aquellos alumnos que calculan correctamente la mediana (DME1). Ejemplo:



- Error en DME1. Ejemplo: *"Depende de la edad porque un niño con 2 años puede pesar 20 Kg y otro niño de 5 años puede también pesar 20 Kg".*
- Confusión de la mediana con la media o la moda. Ejemplo: En uno de los cuestionarios, encontramos que la mediana del apartado anterior se calculó utilizando el algoritmo de la media, confundiéndola por lo tanto con ésta y se obtuvo como resultado *"15+25+17+19+16+26+18+19+24 = 153; 153/9 = 17 Kg."*. La respuesta a este apartado fue "$\frac{153+43}{10} = 19.6\ Kg$".

Tabla 6.8.9. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 5b

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Representaciones				
Representación verbal		15 (8,9)		
Representación simbólica				2 (1,4)
Representación numéric		161(95,8)		108(75,0)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media datos aislados	6 (3,6)	36 (21,4)		16 (11,1)
Cálculo mediana (número par datos aislados)	59 (35,1)	36 (21,4)	18 (12,5)	49 (34,0)
Definiciones y propiedades				
Definición media (algoritmo)	49 (29,2)	36 (21,4)	21 (14,6)	16 (11,1)
Definición mediana (valor central)	2 (1,2)	36 (21,4)	24 (16,7)	49 (34,0)
Definición moda (más frecuente)	2 (1,2)			
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		81 (48,2)		48 (33,3)
Casos particulares y contraejemplos		15 (8,9)		

Este apartado únicamente se diferencia del anterior en el número de datos (par, en este caso), por lo tanto respecto a los resultados obtenidos se puede afirmar prácticamente lo mismo que se ha dicho arriba. La diferencia observada con respecto a los resultados de la primera parte es el menor número de aciertos en el cálculo de la mediana que muestran ahora los alumnos de 1º sobre los de 4º. Esto se debe, posiblemente, a que el número par de valores añade la dificultad de que la mediana no coincide con ninguno de ellos, lo que resulta especialmente complicado para los alumnos más jóvenes. Coincidimos aquí con Schuyten (1991) quien indica que los alumnos encuentran particularmente difícil el hecho de que haya más de un algoritmo diferente de cálculo de la mediana.

Resultados en el Ítem 5c

En esta parte lo que se pretende es evaluar si los estudiantes son capaces de elegir un buen representante estadístico para una distribución en la que aparece un valor atípico, argumentando su elección en base a las propiedades de los estadísticos de tendencia central. Las respuestas que hemos encontrado han sido:

Definiciones y propiedades:

- La media es un estadístico menos resistente que la mediana a la presencia de valores atípicos y en el cálculo de la media intervienen todos los valores, mientras que en el caso de la mediana no es así. (E4 y N3, respectivamente). Ejemplo: "*No, porque al añadirle un último valor muy disperso de los anteriores, al calcular la desviación típica se observa que los datos son muy alejados con respecto a la media".*
  Error en E4 y N3. Ejemplo*: "Sí, ya que todos los bebés tienen un peso similar y la media sería un buen representante".*
- Error en la propiedad de que sólo en distribuciones simétricas coinciden la media y la mediana (E3). Ejemplo: *"Sí, porque si tenemos en cuenta que la mayor medida es 43 Kg, el 29 (mediana obtenida como respuesta al apartado 5b) está más o menos en el centro".*

Tabla 6.8.10. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 5c

	1º ESO (n=164)		4º ESO (n=148)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas				
Mediana si la media no es representativa		15 (8,9)		46 (32.0)
Representaciones				
Representación verbal		62 (36,9)		71 (49,3)
Definiciones y propiedades				
Intervienen todos los valores	29 (17,3)	1 (0,6)	5 (3,5)	44 (30,6)
Representante	4 (2,4)			
Posición promedios distribuciones simétricas	1 (0,6)	2 (1,2)	7 (4,9)	1 (0,7)
Media es poco resistente	29 (17,3)	7 (4,2)	17 (11,8)	45 (31,3)
Argumentos				
Casos particulares y contraejemplos		62 (36,9)		71 (49,3)
Otras				
Correcta, sin razonamiento	16 (9,5)	15 (8,9)	10 (6,9)	7 (4,9)

La tabla 6.8.10 resume los resultados de la última parte de este ítem, más centrada en las propiedades. Podemos observar que en 1º el conocimiento de éstas es muy limitado puesto que son pocas las respuestas correctas y sí aparecen algunos errores. En 4º, tras la enseñanza, la situación mejora aunque son menos de la tercera parte de los alumnos los que reconocen dos de las propiedades que intervienen, la de ser la media menos resistente a los valores atípicos que la mediana y que en el cálculo de ésta última no intervienen todos los valores, muy relacionada con la anterior.

Las otras propiedades previstas en el análisis a priori, apenas si aparecen en las respuestas como puede verse en la tabla resumen, posiblemente porque, como argumento Campbell (1974), se tiende a situar la media en el centro de la distribución y los alumnos no se plantean que un valor atípico influya en su valor (Batanero y cols., 1997).

Encontramos, en cambio, una serie de respuestas correctas, sin ningún tipo de argumentación que las justifique, así como respuestas incorrectas, también sin justificación.

Las únicas representaciones usadas en este apartado del ítem han sido verbales, lo cual no parece extraño ya que los cálculos se han realizado en los apartados anteriores. Los argumentos son, en su totalidad, de tipo uso de casos particulares, encontrando algunas de las repuestas sin justificar de ninguna manera.

6.8.6. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 6

Ítem 6

Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

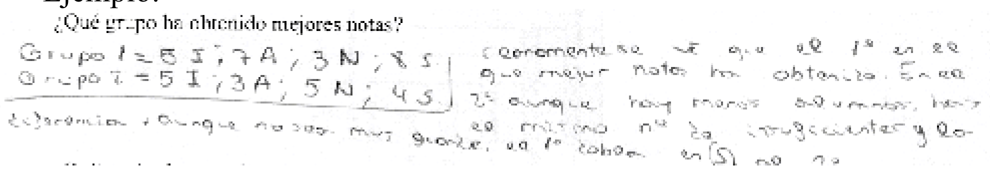
Grupo 1	I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S
Grupo 2	S S I I A N A N I I S N A S I N N

¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?.

En este ítem se ha intentado evaluar si los alumnos utilizan los parámetros estadísticos para tomar decisiones acerca de un conjunto de datos y, si lo hacen, por cuál de ellos optan en el caso de una variable ordinal como la que se propone aquí. Sólo se ha incluido en el cuestionario pasado a alumnos de 4º de ESO, puesto que pensamos que los de 1º no tienen suficientes conocimientos aún para contestarlo. En el apartado a) se han obtenido las siguientes respuestas:

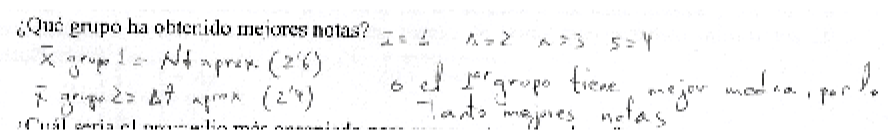
Campos de problemas:

- Campo de problemas asociado a la mediana de encontrar un resumen estadístico par una variable ordinal (PME2). Ejemplo*: "El 2º grupo tiene 9 de 17 con N o S, mientras que el 1º tiene 11 alumnos de 23, con lo que no llega a la mitad".*
- Error en (PME2) al no utilizar un promedio para comparar los conjuntos de datos. Ejemplo:



Propiedades:

- Error en la propiedad de que la mediana, igual que los otros estadísticos de centralización son representantes de un colectivo que nos aportan información del mismo (E1), puesto que toman decisiones sobre el conjunto sin tener en cuenta ningún estadístico. Como ejemplo para ilustrar este error podemos usar el anterior.
- Algunos alumnos no son conscientes de que la moda y la mediana existen para variables ordinales, cosa que no ocurre con la media (E8). Ejemplo:



La tabla 6.8.11. muestra un resumen de los resultados obtenidos, entre los que destacan la pocas respuestas correctas obtenidas. En cambio hemos encontrado un porcentaje importante de respuestas que muestran errores cometidos por los alumnos. Por un lado no reconocen la representatividad de los estadísticos, que pueden servirnos para obtener información resumida de un conjunto de datos y tomar decisiones en base a ellos, y no reconocen el campo de problemas asociado a la mediana de encontrar un estadístico para variables ordinales. Esto coincide con los resultados encontrados por Estepa y Batanero (1994) en alumnos universitarios, quienes al trabajar en análisis exploratorio de datos en algunos casos no usan los promedios, sino que comparan los conjuntos de datos en base a valores aislados. La frecuencia con que ocurre en nuestra muestra es mucho mayor, lo que es lógico si tenemos en cuenta la menor edad de los estudiantes y el hecho de que los libros proponen pocas actividades de análisis exploratorio de datos.

Tabla 6.8.11. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 6a

	4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas		
Encontrar representante de datos ordinales	22 (15,3)	4 (2,8)
Representaciones		
Representación verbal		38 (26,4)
Representación simbólica		2 (1,4)
Representación numérica		14 (9,7)
Algoritmos y procedimientos		
Cálculo mediana datos aislados (impar)		4 (2,8)
Propiedades		
Moda y mediana definidas para datos ordinales	13 (9,0)	
Representante	41 (28,5)	
Argumentos		
Argumento algebraico deductivo		10 (6,9)
Casos particulares y contraejemplos		38 (26,4)
Otras		
Correcta, sin razonamiento	63 (43,8)	15 (10,4)

Tampoco utilizan la moda como posible forma de justificar una decisión en este contexto. Los argumentos utilizados son, básicamente, uso de casos particulares, aunque algunas respuestas intentan utilizar una argumentación de tipo deductivo.

Las representaciones de las pocas respuestas encontradas han sido mayoritariamente verbales, en contraste con la presentación del ítem basado en una tabla. Hemos encontrado también alumnos que asignan valores numéricos a los rangos y calculan la media, no siendo totalmente correcto.

Resultados en el Ítem 6b

En el segundo apartado pretendemos evaluar si son capaces de elegir un promedio correcto, en este caso de variable ordinal, para representar la distribución. Hemos obtenido las siguientes respuestas:

Campos de problemas:

- Campo de problemas de encontrar un resumen estadístico para variables ordinales (PME2). En el ejemplo el alumno hace un uso correcto de la mediana, aunque presenta un error en el uso del coeficiente de variación, que no está definido para datos ordinales: *"Realizaría la mediana y después haría un C.V. para ver el error de una tabla a otra"*.
- Campo de problemas consistente en encontrar el valor más frecuente de una distribución (PMO1), aunque en general está incorrectamente aplicado, porque la moda no es buen representante en este problema: *"La moda, porque si cogemos el número que hay de sobresalientes en el primer grupo y en el segundo, en el primero hay muchos más, aunque haya más niños"*.

Algoritmos y procedimientos:

- Cálculo de la moda de una variable discreta con datos aislados (AMO1), como en el caso anterior. También se producen errores en AMO1.

Propiedades:

- Error en la propiedad de que la mediana, igual que los otros estadísticos de centralización son representantes de un colectivo que nos aportan información del mismo (E1), puesto que toman decisiones sobre el conjunto sin tener en cuenta ningún estadístico. Ejemplo: *" Un pictograma donde se viera el porcentaje de cada nota en los diferentes grupos".*
- Error en la propiedad de que en el caso de variables ordinales sólo existen la moda y la mediana, pero no la media (E8). Ejemplo: *" La media te da todos los datos en conjunto y puedes comparar, al sumarlos todos y dividirlos. La moda no sería un buen representante ya que aunque haya más, existen personas mas disparejas. La mediana tampoco sería fiable, tienes que comparar con los demás valores".*

Tabla 6.8.12. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 6b

	4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas		
Encontrar representante de datos ordinales	1 (0,7)	6 (4,2)
Obtener el valor más frecuente	2 (1,4)	11 (7,6)
Representaciones		
Representación verbal		79 (54,9)
Representación simbólica		1 (0,7)
Algoritmos y procedimientos		
Cálculo mediana datos aislados (par)		6 (4,2)
Cálculo moda datos aislados		11 (7,6)
Definiciones y propiedades		
Definición mediana (valor central)		6 (4,2)
Definición moda		11 (7,6)
La moda siempre está definida	33 (22,9)	
Representante	41 (28,5)	
Argumentos		
Casos particulares y contraejemplos		16 (11,1)

En esta parte, en la que se pide de forma expresa que elijan un promedio, se esperaba que parte de las dificultades encontradas en la primera parte desaparecieran, sin embargo persisten como se puede ver en la tabla 6.8.12, en la que se muestra el resumen de los resultados. Sólo mejora levemente el porcentaje de respuestas correctas al reconocer la mediana como resumen estadístico de un conjunto de valores ordinales. Por otro lado aparecen algunas respuestas en las que se elige la moda como promedio representativo que, sin ser la mejor elección, al menos es una posibilidad de tomar una decisión basada en un argumento estadístico.

6.8.7. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 7

Item 7. Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?
Lucía ______________ Juan ________________ Pablo________________

¿Es la única posibilidad? Explica cómo has obtenido tus resultados

Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

Resultados en el Ítem 7a

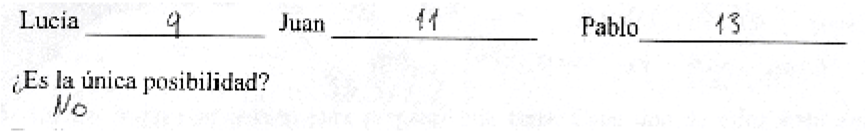
Este ítem incluye dos de sus apartados en los que se debe dar una distribución para la media conocida y argumentar si hay solución única o puede haber varias distribuciones correctas. Esta parte de argumentación es la que lo diferencia del apartado b) del ítem 1, en el que sólo se pedía dar una distribución de media conocida. También se introduce la idea de que un valor nulo afecta a la media para ver si los alumnos asignan erróneamente un elemento neutro a la operación de promediar.En el apartado a) de este ítem hemos encontrado las siguientes respuestas:

Campos de problemas

- Conocer el valor más probable al tomar un elemento al azar de una población (PM4). Ejemplo Todos dan como resultado *"11, 11, 11"*.

Definiciones y propiedades

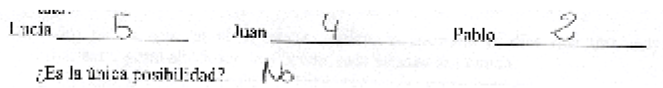
- Definición de media como algoritmo de cálculo (DM1). Este elemento se encuentra implícito en todas aquellas respuestas en las que se da una distribución de media conocida, puesto que supone un conocimiento de esta definición de la media por parte de los alumnos. Como ejemplo nos puede servir el siguiente que ilustra también el algoritmo de cálculo AM7.


Lucia 9 Juan 11 Pablo 13

¿Es la única posibilidad?
No

Algoritmos y procedimientos

- Dar una distribución conocida la media (AM7), los que lo hacen correctamente han de invertir el algoritmo.
- Error en AM7 al dar una distribución que no proporciona la media dada. Ejemplo:


Lucia 5 Juan 4 Pablo 2

¿Es la única posibilidad? No

Tabla 6.8.13. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 7a

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas				
Media como valor probable		42 (25,0)		37 (25,7)
Representaciones				
Representación numérica		151(89,9)		115(79,9)
Algoritmos y procedimientos				
Buscar distribución dada la media	73 (43,5)	81 (48,2)	24 (16,7)	96 (66,7)
Definiciones				
Definición media (algoritmo)		81 (48,2)		96 (66,7)

Si analizamos la tabla 6.8.13, en la que se resumen los resultados encontrados para esta parte del ítem 7, se observa que tanto la búsqueda de una distribución de media conocida, como el conocimiento de la definición de media, ofrece mejores resultados entre los alumnos de 4º que en los de 1º, así como un menor porcentaje de errores. Esto contradice los resultados de Cai (1995) quien encontró que pocos niños de 12-13 años eran capaces de dar una distribución de media dada. En nuestro caso son la mayoría, posiblemente porque los datos son sencillos en este ítem, puesto que como ya comentamos antes, en el ítem 1b sí encontraron dificultad.

Sin embargo, el uso de esta medida para resolver problemas, o lo que es lo mismo, el reconocimiento de campos de problemas asociados, es similar en los dos cursos y bastante bajo, alrededor de la cuarta parte de la muestra. Este valor, muy por debajo de la capacidad de cálculo o el conocimiento de la definición, coincide con los resultados de investigaciones anteriores comentadas en el capítulo 3, como por ejemplo, la de Gattuso y Mary (1996), que defienden que la comprensión conceptual no va paralela al número de años de instrucción en la materia en cuestión, puesto que aunque que la media es algo cotidiano y la mayoría de los adultos y los estudiantes saben calcularla en situaciones sencillas, no hay una buena comprensión del concepto y no son capaces de usarla en situaciones en las que es conveniente hacerlo.En cuánto a las representaciones usadas, han sido exclusivamente numéricas sin, además aportar ninguna justificación a las respuestas dadas.

Resultados en el Ítem 7b

En este apartado se pide expresamente una justificación de la respuesta dada a la pregunta anterior. Se han obtenidos estas respuestas:

Campos de problemas

- Conocer el valor más probable al tomar un elemento al azar de una población (PM4). Ejemplo*: "Sólo sé que cada uno lleva más o menos, pero rondando los 11 caramelos".*

Definiciones y propiedades

- Definición de la media como algoritmo (DM1). El mismo ejemplo mostrado antes puede servirnos para ilustrar el conocimiento de esta definición de media.

Algoritmos y procedimientos

- Invertir el algoritmo de cálculo de la media. (AM6) Ejemplo*: "Dando valores a cada uno de ellos y consiguiendo el resultado 11".*
- Error en AM6.

Observamos aquí que no todos los que dieron la solución fueron capaces de invertir el algoritmo, sino que algunos lo hicieron mediante ensayo y error, y en este sentido nuestros datos se acercan más a los de Cai (1995).

Esta parte del ítem se centraba en las justificaciones de las respuestas al apartado anterior, para las que hemos comentado antes que no habíamos encontrado argumentaciones, posiblemente debido a la presencia explícita de esta pregunta.

Resulta destacable aquí el predominio de las representaciones verbales (en el caso de 1º, las únicas), sobre otras como las simbólicas o las numéricas (ausentes en todas las respuestas).

Contrastan los porcentajes de aciertos mostrados en la tabla resumen correspondiente a esta parte con los de la anterior, más elevados, especialmente en el caso de los algoritmos de cálculo y definiciones. Esto revela que es más fácil para los alumnos contestar correctamente a una cuestión que explicar el porqué de su respuesta.

Tabla 6.8.14. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 7b

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas				
Media como valor probable		39 (23,2)	2 (1,4)	36 (25,0)
Representaciones				
Representación verbal		122(72,6)		94 (65,3)
Representación simbólica				18 (12,5)
Algoritmos y procedimientos				
Invertir algoritmo de la media	63 (37,5)	67 (39,9)	14 (9,7)	51 (35,4)
Definiciones				
Definición media (algoritmo)		67 (39,9)		51 (35,4)
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		18 (10,7)		25 (17,4)
Casos particulares y contraejemplos		122(72,6)		94 (65,3)

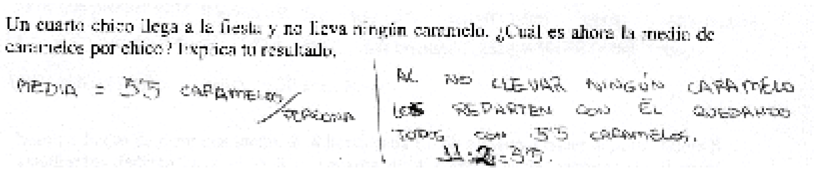
Los argumentos más frecuentes han sido, como en ítems anteriores, los basados en ejemplos particulares, más que en propiedades previas.

Resultados en el Ítem 7c

Por último se intenta evaluar la influencia de un valor cero en la distribución para calcular la media, propiedad cuya comprensión fue investigada por Strauss y Bichler (1988) y Roth y Zawojewski (1991) . Hemos obtenido las respuestas siguientes:

Algoritmos y procedimientos

- Cálculo de la media de un conjunto de datos aislados (AM1). Ejemplo: *"8.25, pues 33 lo he dividido entre 4 ya que se ha sumado un niño más y no ha traído caramelos"*.
- Error en AM1. Ejemplo:



Definiciones y propiedades

- Definición de la media como algoritmo (DM1). Como ejemplo podemos ver el usado para AM1.
- El cálculo de la media, desde el punto de vista algebraico, no tiene elemento neutro (A2). Como ejemplo puede servir el mismo mostrado para AM1.

  Error en A2. Ejemplo: *"Si no lleva caramelos, no come caramelos, y entonces no influye en la media"*.
- La media cambia cuando varía alguno de los datos de la distribución (N4). También el ejemplo usado para AM1 puede servir para ilustrar este tipo de respuestas.
- Error en N4. Ejemplo: *"Si no lleva caramelos, no come caramelos, y entonces no influye en la media"*.

La tabla 6.8.15 muestra un resumen de los resultados obtenidos. El punto central de esta pregunta era valorar el conocimiento de los alumnos de la influencia de un valor cero en un conjunto de datos. Los resultados obtenidos en relación a las propiedades relacionadas con este punto, muestran que los alumnos más jóvenes tienen un conocimiento menor de las mismas, ya que sólo en torno a la tercera parte en total dan una respuesta correcta, mientras que en 4º el porcentaje se eleva en las dos propiedades. Esta fue una de las propiedades de más difícil comprensión en el trabajo de Leon y Zawojeski (1991).

Tabla 6.8.15. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 7c

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Representaciones				
Representación verbal		66 (39,3)		66 (45,8)
Representación simbólica				18 (12,5)
Representación numérica		113(67,3)		24 (16,7)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media datos aislados	44 (26,2)	89 (52,9)	12 (8,3)	88 (61,1)
Definiciones y propiedades				
Definición media (algoritmo)		89 (52,9)		88 (61,1)
Cambia el valor al cambiar un dato	14 (8,3)	39 (23,2)	8 (5,6)	87 (60,4)
Elemento neutro	24 (14,3)	17 (10,1)	8 (5,6)	47 (32,6)
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		43 (25,6)		58 (40,3)
Casos particulares y contraejemplos		66 (39,3)		66 (45,8)

En cuánto a la definición de media y su cálculo, los resultados son muy similares a los del apartado a de este ítem y algo mejores que los del apartado b, puesto que como ya hemos comentado antes, parece que resulta más sencillo responder a una pregunta que justificarla.

Como se viene repitiendo, los argumentos más usados siguen siendo los basados en casos particulares, aunque en 4º se aprecia ya un porcentaje bastante próximo de argumentos de tipo deductivo. En cuánto a las representaciones se diversifican entre las verbales, numéricas y, sólo en 4º, de tipo simbólico.

6.8.8. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 8

Ítem 8.

Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:
6.2 6.3 6.0 15.2 6.2 6.1 6.5 6.2 6.1 6.2
Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿ Qué harías para calcularlo?

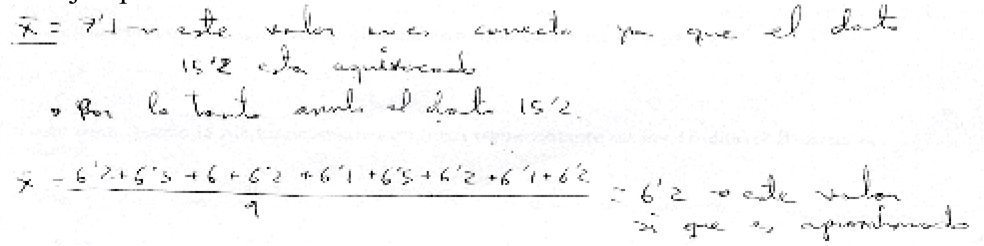
En este ítem, tomado de Garfield y Konold (1992), se intenta averiguar si los alumnos reconocen en este problema, la media, como solución. Las respuestas obtenidas han sido las siguientes:

Campos de problemas

- Estimar una media a partir de diversas mediciones en presencia de errores (PM1). Ejemplo: *"Haría la media de esos valores, ya que todos rondan alrededor de una misma cantidad (menos el 15.2 que se sale un poco de las otras cantidades) o quizás la moda, ya que el valor que más se repite podría coincidir con el peso real más o menos".*

Algoritmos y procedimientos

- Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados (AM1).
- Error en AM1, al no tener en cuenta el valor atípico y tener error en operaciones. Ejemplo:



Definiciones y propiedades

- Definición de media basada en el algoritmo de cálculo (DM1). Ejemplo: "

$$\bar{x} = \frac{6,2 + 6,5 + 6 + 6,2 + 6,1 + 6,5 + 6,2 + 6,1 + 6,2}{9} = 6,2$$

- Definición de la mediana que enfatiza la idea de centro de la distribución (DME1), aunque no sea adecuada para resolver este problema específico, pero la definición es correcta y la idea de que representa mejor que la media a una distribución con valores atípicos también. Ejemplo: *"Lo mejor que se me ocurre es hacer la mediana porque yo creo que por culpa del que ha sacado 15.2, la media no sea correcta, porque por lógica, lo más seguro es que se haya equivocado".* En otros casos aparecen errores en la definición de mediana.
- Error derivado de utilizar la moda en lugar de la media, y dentro de ello, hemos encontrado definiciones correctas e incorrectas de moda utilizada (DMO1).
- Error en la propiedad de la media de ser un representante de un conjunto de datos (E1), puesto que usan cualquier otro elemento no relacionado con la estadística para resolver la cuestión. Por ejemplo: *"Calcular el peso del objeto y después compararlo con la diferencia que exista al redondear".*
- Error en la propiedad de la media de cambiar su valor cuando cambia algún dato (N4). Como ejemplo podemos ver el mismo usado para ilustrar el cálculo AM1.
- La suma de las desviaciones de un conjunto de datos a su media es cero (E5). Ejemplo: *"Primero desechar el peso que no concuerda con ninguno de los otros: 15,2. Después ver la frecuencia absoluta. De esta forma podría pesar 6,2 gramos, pero como la desviación es mínima, se podría calcular la media".*

En la tabla 6.8.16 se muestra el resumen de los resultados obtenidos en este ítem, para el que encontramos que el porcentaje más elevado de respuestas correctas, en los distintos elementos de significado que contiene, se sitúa en el reconocimiento de la media como posible solución al problema de encontrar la mejor estimación de un conjunto de medidas en presencia de errores, si bien, como puede apreciarse en la tabla, los resultados en 4º curso duplican casi los de 1º, debido posiblemente a la mejora producida tras el estudio del tema. Además estos alumnos reconocen el valor atípico y su efecto sobre la media. No obstante, aún quedan casi dos tercios de alumnos de 1º y un tercio de 4º que no reconocen esta utilidad de la media, lo que nos lleva a afirmar que, como hemos visto en otros ítems ya analizados, no es fácil para ellos reconocer los problemas asociados a las medidas que nos ocupan.

Tabla 6.8.16. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 8

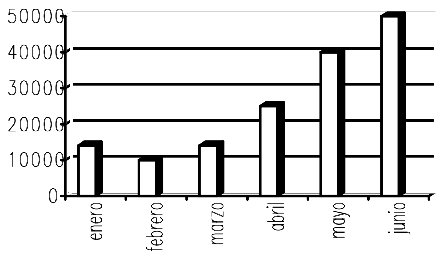
	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas				
Media como mejor estimación		66 (39,2)		96 (66,7)
Representaciones				
Representación verbal		50 (29,8)		78 (54,2)
Representación simbólica				13 (9,0)
Representación numérica		42 (25,0)		37 (25,7)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media datos aislados	24 (14,3)	35 (20,8)	9 (6,3)	50 (34,7)
Definiciones y propiedades				
Definición media (algoritmo)		35 (20,8)		50 (34,7)
Definición mediana (centro)	2 (1,2)		4 (2,8)	
Definición moda (más frecuente)	20 (11,9)		17 (11,8)	
Cambia el valor al cambiar un dato		35 (20,8)	9 (6,3)	50 (34,7)
Representante	25 (14,9)		6 (4,2)	50 (34,7)
Suma desviaciones a la media		35 (20,8)		46 (31,9)
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		24 (14,3)		30 (20,8)
Casos particulares y contraejemplos		50 (29,8)		78 (54,2)

De este hecho se deriva la aparición de algunos errores al utilizar otros estadísticos como solución o al no reconocer que éstos son representantes de un conjunto de datos y, fundamentalmente, el que haya un número importante de alumnos que no han sabido responder a esta pregunta. Respecto a las representaciones usadas y los argumentos, no encontramos en las respuestas obtenidas nada nuevo sobre lo dicho anteriormente para otros ítems.

Son bastantes también los que reconocen la propiedad de la suma de desviaciones, considerada muy abstracta en el trabajo de Strauss y Bichler (1988).

6.8.9. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 9

Item 9. Observa este diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa *bocatta* durante los últimos 6 meses del año pasado:



a) Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.
b) Da un valor aproximado de la moda del número de bocadillos que se vendieron por mes.
c) Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

Este es el primer ítem del cuestionario que presenta los datos en forma gráfica. Nos va a permitir analizar las dificultades que los estudiantes presentan al interpretar gráficos y al realizar los cálculos de parámetros estadísticos a partir de ellos. Hemos encontrado las siguientes respuestas en la parte a:

Algoritmos y procedimientos

- Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados (AM1). Aunque los datos se presentan en forma de gráfico, ha habido estudiantes que los han traducido a valores numéricos y han realizado el cálculo a partir de ellos, realizando, por tanto, una *lectura entre los datos*, en terminología de Curcio (1987). Ejemplo: "*15.000+10.000+15.000+40.000+25.000+50.000=(155.000/6)=25833'33".*
- Error en AM1. Ejemplo: *"15000 + 1000 + 25000 + 40000 + 50000 = 155000: 12 = 12916.6".*
- Estimación directa de la media a partir de un gráfico (AM4). Ejemplo: *"Entre 20000 y 30000 bocadillos más o menos".*
- Error en AM4. Por ejemplo, una persona da como respuesta *"30000"*, elegido como el valor intermedio del eje de ordenadas.

Definiciones y propiedades

- Definición de la media basado en el algoritmo (DM1). Ejemplo: "*15.000+10.000+15.000+40.000+25.000+50.000=(155.000/6)=25833'33".*

Tabla 6.8.17. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 9a

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Representaciones				
Representación verbal		8 (4,8)		22 (15,3)
Representación numérica		139(82,7)		110(76,4)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media datos aislados	19 (11,3)	64 (38,1)	5 (3,5)	67 (46,5)
Cálculo gráfico media	46 (27,4)	20 (11,9)	14 (9,7)	23 (16,0)
Definiciones y propiedades				
Definición media (algoritmo)		74 (44,0)		90 (62,5)
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		47 (28,0)		48 (33,3)
Casos particulares y contraejemplos		8 (4,8L)		8 (5,6)

Los resultados resumidos en la tabla anterior confirman la dificultad de los alumnos para el manejo de gráficos. Cuando se les propone una tarea basada en este formato tienden a convertir los datos en un formato con el que se sienten más seguros, como es el numérico y entonces abordan su resolución. Este hecho aparece en todos los alumnos de la muestra, tanto antes de recibir enseñanza específica (1º) como después de haber estudiado el tema (4º), aunque sí se aprecia una ligera mejoría en los resultados después de la enseñanza. En todo caso aquellos que han resuelto el problema han debido leer el gráfico haciendo una identificación interna y externa, buscando una regla de correspondencia (Bertín, 1967).

Mientras los que han hecho un cálculo directo son capaces de un nivel medio de lectura, extrayendo las tendencias, los que han pasado antes a representación numérica se quedan en un nivel elemental de extracción de datos.

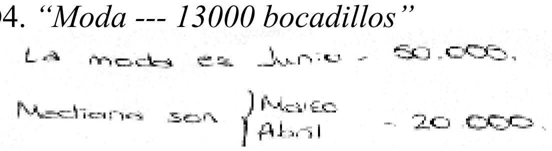
En este ítem encontramos diferencias con los anteriores en relación a los argumentos usados, ya que podemos ver cómo, sin ser muy abundantes, predominan los de tipo deductivo sobre los casos particulares, más frecuentes hasta ahora.

Resultados en los ítems 9b y 9c

Estos dos apartados aparecen en el cuestionario como un solo apartado del ítem, no obstante, nosotros separamos los resultados, presentándolos en dos tablas diferentes, una de ellas centrada en la moda y la otra en la mediana. Hemos encontrado lo siguiente:

Algoritmos y procedimientos

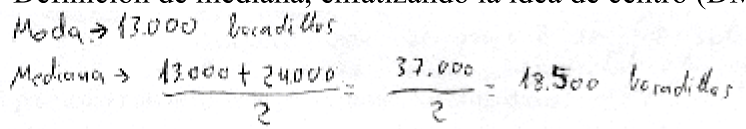
- Cálculo de la moda y de la mediana a partir de un gráfico (AMO4 y AME6, respectivamente). Ejemplo:
- Error en AMO4. *"Moda --- 13000 bocadillos"*



- Error en AME6. Ejemplo: *"Mediana 25000 bocadillos (Abril)"*

Definiciones y propiedades:

- Definición de mediana, enfatizando la idea de centro (DME1). Ejemplo:



- Error en DME 1. Ejemplo: *"Mediana 25000 bocadillos (Abril)"*.
- Definición de moda como valor más frecuente (DMO1). Al calcular la moda a partir del gráfico dado, se encuentra implícito el conocimiento de que la moda es el valor más frecuente del conjunto de datos. Como ejemplo se puede ver el mismo que ilustra el cálculo AMO1.

Tabla 6.8.18. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 9b

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Representaciones				
Representación simbólica				9 (6,3)
Representación verbal		54 (32,1)		57 (39,6)
Representación numérica		77 (45,8)		70 (48,6)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo gráfico moda	40 (23,8)	35 (20,8)	5 (3,5)	24 (16,7)
Definiciones				
Definición moda		40 (23,8)		38 (26,4)
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		8 (4,8)		12 (8,3)
Casos particulares y contraejemplos		5 (3,0)		13 (9,0)

En las tablas 6.8.18 y 6.8.19 se muestran los resúmenes de los resultados obtenidos en estas dos cuestiones. Si en el apartado anterior de este ítem vimos que los estudiantes tendían a convertir los datos en numéricos y, a partir de ahí, calculaban la media, en este caso, especialmente para la mediana, ni siquiera esa estrategia parece ofrecer mucha ayuda. Mientras que la media es una medida con la que los alumnos parecen estar más familiarizados, la mediana les resulta más difícil de hallar, no sólo en formato gráfico, sino incluso con datos numéricos, lo que se ha comprobado ya en otras preguntas del cuestionario. De ahí el bajísimo porcentaje de respuestas dadas y, de ellas, muchas incorrectas, especialmente en 1º curso. Lo mismo ocurre con la definición de mediana, donde encontramos muy pocas respuestas, y de ellas bastantes son erróneas. Estos resultados coinciden con los de Zawojeski (1986) que indica que los estudiantes tienen dificultad en considerar la mediana como representante del conjunto de datos.

Tabla 6.8.19. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 9c

	1º ESO (n=168)		4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
Representaciones				
Representación simbólica				9 (6,3)
Representación verbal		54 (32,1)		57 (39,6)
Representación numérica		77 (45,8)		70 (48,6)
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo gráfico mediana	39 (23,2)	7 (4,2)	40 (27,8)	7 (4,2)
Definiciones				
Definición mediana (centro)	14 (8,3)	4 (2,4)	39 (27,1)	29 (20,1)
Argumentos				
Argumento algebraico deductivo		8 (4,8)		12 (8,3)
Casos particulares y contraejemplos		5 (3,0)		13 (9,0)

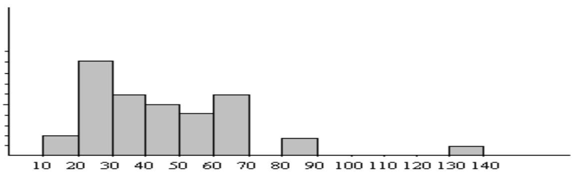
En relación a la moda la situación mejora un poco, aunque sigue apareciendo un número importante de errores, posiblemente derivados del manejo de gráfico, puesto que, por ejemplo, en la definición de moda no hemos encontrado errores, aunque sí pocas respuestas.

6.8.10. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 10

Ítem 10

Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida. ¿Estás de acuerdo?

Si ● No ● Razona la respuesta



Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes

Media = 45.3 euros

Esta pregunta, aunque parece una cuestión aparentemente breve, contiene distintos elementos de significado, principalmente definiciones y cálculo gráfico de promedios. Por un lado, el presentar los datos en forma gráfica ya supone una primera tarea de interpretación del mismo a nivel de *lectura dentro de los datos*, según Curcio (1989). Por otro lado, al hablar de mediana, es necesario calcularla a partir del gráfico, y además la afirmación que se hace relaciona la *mediana* con la *mayoría*, lo que puede dar pié a una confusión entre mediana y moda y esto puede traer como consecuencia la presencia errores en las definiciones de ambos parámetros. as respuestas obtenidas a este ítem son las siguientes:

Campos de problemas

- Encontrar un resumen estadístico cuando la media no es representativa (PME1). Ejemplo: "*No, ya que la mediana debería estar entre 30 y 40, más cercano al 40, pero no podría estar alrededor de 47*".

- Obtener el valor más frecuente de un conjunto (PMO1). Ejemplo: "No, porque la moda es entre 20 y 30".

Algoritmos y procedimientos
- Cálculo de la mediana a partir de un gráfico (AME6). Ejemplo: "*No, ya que la mediana debería estar entre 30 y 40, más cercano al 40, pero no podría estar alrededor de 47*".
- Error en AME6. Ejemplo: *"No, sería 75 porque la mediana es el valor medio de la gráfica".*
- Cálculo gráfico de la moda (AMO4). Ejemplo: *"No, porque la moda es entre 20 y 30".*

Definiciones y propiedades
- Error en la definición de media (DM1). Ejemplo: *"No, porque el valor que le dice eso es la Media y no la Mediana que es el valor medio".*
- Definición de mediana que enfatiza la idea de dividir la población en dos partes iguales (DME2). Ejemplo: *"No, la mediana la utilizamos para hablar de una parte de la población que gasta un valor intermedio entre los que más y los que menos, pero no para hablar de la mayoría de los estudiantes, puesto que éstos serían los que gastan unos 25 €".*
- Error en DME2. Ejemplo: *"No, la mediana no representa apenas datos concretos".*
- Definición de moda como valor más frecuente de la variable (DMO1). Ejemplo: *"No, porque el tío no ha mirado la mediana, lo que pasa es que ha mirado la moda".*

Tabla 6.8.20. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 10

	4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas		
Mediana si media no es representativa		37 (25,7)
Moda como valor más frecuente		45 (31,2)
Representaciones		
Representación verbal		95 (65,9)
Algoritmos y procedimientos		
Cálculo gráfico mediana	11 (7,6)	37 (25,7)
Cálculo gráfico moda		4 (2,8)
Definiciones		
Definición media (algoritmo)	24 (16,7)	
Definición mediana (dos partes)	49 (30,0)	8 (5,5)
Definición moda (más frecuente)		45 (31,2)
Argumentos		
Casos particulares y contraejemplos		95 (65,9)

En la tabla 6.8.20 podemos ver los resultados obtenidos en este ítem, que sólo se propuso a los alumnos de 4º. Los datos demuestran que ha sido una cuestión difícil de responder, puesto que sólo alrededor de una cuarta parte de la muestra ha dado una respuesta correcta, basada en la mediana. La dificultad de este ítem era doble, por un lado la confusión que aparece en el enunciado al nombrar la mediana, dando su valor correcto, y dar como significado de ésta el valor de la mayoría, que en realidad es la moda. Por otro lado, los datos se presentan en forma gráfica, lo que obliga a realizar el cálculo, tanto de la moda (sin calcular), como de la mediana para comprobar si el valor que se da es correcto. Como se puede ver en la tabla, hemos considerado como respuestas correctas aquellas en las que los estudiantes han detectado que al hablar de mayoría, estamos refiriéndonos a la moda, no a la mediana, bién dicho de forma explícita, o bien calculando el valor de la moda y respondiendo en base a este resultado. Tampoco aquí hay un porcentaje de resultados demasiado elevado, aunque sí algo mayor que los que han argumentado basándose en la mediana.

Alrededor de la cuarta parte de los alumnos reconoce un campo de problemas de la mediana y el 30% de la moda. En ambos casos han debido valorar la posición de mediana y moda en el gráfico, lo que supone una lectura *entre los datos*, según Curcio (1989), y *a nivel intermedio*, según Wainer (1992). Además supone la discriminación entre mediana y moda. Una cuarta parte es capaz de calcular la mediana a partir de un gráfico. Por otro lado, ha aparecido un número considerable de confusiones entre la mediana y la media, lo que confirma la dificultad de la situación.

En cuánto a las representaciones usadas para las respuestas, en todos los casos han sido de tipo verbal, a pesar de que el formato del ítem era básicamente gráfico. Sólo han aparecido argumentaciones basadas en casos particulares y contraejemplos.

6.8.11. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 11

Ítem 11

Juana piensa que, en el gráfico anterior, el alto valor de 133 euros debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda. Si ____ No ____ Razona la respuesta

Este ítem, basado en el anterior, hace hincapié en la propiedad de la mediana y la moda de ser más resistentes que la media cuando aparecen valores atípicos. Las respuestas obtenidas en este ítem son:

Definiciones y propiedades

- Definición de media como algoritmo (DM1). Ejemplo: *"Es necesario para sumar los datos de la media"*.
- Propiedad de la moda y la media de tener en cuenta todos los valores, cosa que no ocurre con la mediana (N3). *"No, porque es un dato como los otros y hay que incluirlo. Sólo afectaría a la media."*
- Error en N3. Ejemplo: *"No se puede quitar porque es como otro dato cualquiera y debe estar presente para calcular estos parámetros"*.
- Error en la propiedad de los promedios de ser representantes de un conjunto de datos (E1). Ejemplo: *"No debería quitarse, al igual que no se quita el bajo valor de 10 euros. Si no, estaríamos calculando la media, mediana y moda de un grupo de personas de las que nosotros consideramos su gasto más adecuado o normal. No se pueden eliminar estos datos en estadística, en mi opinión"*.
- La media es menos resistente a los valores atípicos que la mediana y la moda. Ejemplo: E4 "*Sí, ya que está demasiado alejado de los demás valores*". *"No, porque en la mediana no influye este alto valor, aunque en la media, si se mantuviera ese alto valor, podría influir mucho"*.
- Error en E4. Ejemplo: "*No, porque puede influir mucho a la hora de calcular la media y la mediana*".

Tabla 6.8.20. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 11

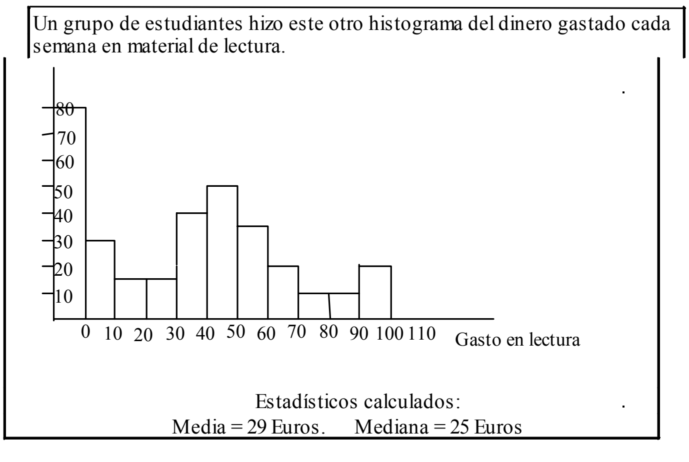
	4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto
Representaciones		
Representación verbal		81 (56,3)
Definiciones y propiedades		
Definición media (algoritmo)		1 (0,7)
Intervienen todos los valores	75 (52,1)	3 (2,1)
Representantes	71 (49,3)	
Media es poco resistente	74 (51,4)	22 (15,3)
Argumentos		
Casos particulares y contraejemplos		81 (56,3)

Los resultados de este ítem, continuación del anterior, se muestran en la tabla 6.8.21. Lo que añade esta pregunta es la influencia de un valor atípico sobre las medidas de posición central, propiedad que sólo un 15% de los alumnos muestran conocer correctamente, mientras que algo más de la mitad lo hacen incorrectamente, y el resto no hace ningún uso de ella.

Otra propiedad relacionada con la anterior es la intervención o no de todos los datos en el cálculo de los distintos estadísticos tratados aquí y el efecto de los valores atípicos. Volvemos a encontrar que más de la mitad de los estudiantes muestran errores en este punto, mientras que muy pocos la conocen correctamente. Los errores cometidos con esta propiedad enlazan, y casi coincide en número, con los encontrados en la de que, tanto la media como la mediana y la moda son representantes de un conjunto de datos, en el sentido de que aportan una información de conjunto y no de un elemento en particular, cuestión que los alumnos manifiestan no dominar, puesto q ue piensan que, si se elimina uno de los datos, la representatividad de los estadísticos se pierde.

Volvemos a encontrar un uso exclusivo de representaciones verbales en las respuestas, así como el empleo únicamente de casos particulares como justificaciones de las mismas.

6.8.12. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 12



Ítem 12. Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura, en el gráfico anterior porque la mayor parte de los estudiantes no gastaron nada o muy poco y el segundo grupo gastó entre 50 y 60 euros cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la moda en su lugar para representar el gasto semanal "promedio" en material de lectura. Si ___ No___ Razona la respuesta

Como toda esta parte del cuestionario, la pregunta se basa en un gráfico, de modo que la primera tarea consiste en interpretarlo. Se trata ahora de una distribución bimodal, por lo que se presenta la mediana como mejor representante de los datos que la media, cuestión que debían argumentar los alumnos. Como además se dan los valores sólo de la media y la mediana, deben de calcular la moda, a partir del gráfico. Las respuestas obtenidas han sido las siguientes:

Campos de problemas

- Mediana como mejor representante de un conjunto de datos en el que la media no es representativa (PME1). Ejemplo: *"Creo que tiene razón porque la mediana es más adecuada en este caso, ya que la media no porque hay muchos datos que son muy bajos y otros que son muy altos y la media se sitúa en el centro donde apenas hay datos".*
- Moda como valor más frecuente en un conjunto de datos (DMO1). Ejemplo: *"Lleva razón porque la mayoría de la gente o gasta nada o gasta 50 €".*

Definiciones y propiedades

- Definiciones de la media (DM1) y de la mediana, enfatizando la idea de centro (DME1). Ejemplo: *"No, porque la media nos indica el* <u>*gasto medio*</u> *de los estudiantes en material de lectura y la mediana el* <u>*valor medio*</u> *entre todos los valores".*
- Error en DM1. Ejemplo: *"Creo que tiene razón porque la mediana es más adecuada en este caso, ya que la media no porque hay muchos datos que son muy bajos y otros que son muy altos y la media se sitúa en el centro donde apenas hay datos. Aunque es verdad que hay muy poca diferencia entre mediana y media".*
- Error en DME1. Ejemplo: "*Así se sabe lo que más o menos se gastan a la mitad de la semana".*
- Definición de mediana como valor que divide en dos partes a la población (DME2). Ejemplo: *"Los valores por encima y por debajo de la mediana están más centrados que si coges como representante la media*".
- Definición de moda como valor más frecuente de la variable (DMO1). Ejemplo: "*Lleva razón porque la mayoría de la gente o gasta nada o gasta 50 €".*
- Error en DMO1. Ejemplo: "*Sí, de las personas que compran libros es el número más repetido".*
- Error en la propiedad de la media de cambiar su valor cuando varía algún dato, cosa que no ocurre con la mediana (N4). Ejemplo: *"Sí, porque hay datos suficientes para hacer la media y la mediana, por eso creo que no falta ningún dato".*
- Los promedios son representantes de un colectivo (E1) y error en la propiedad de los promedios de coincidir sólo en distribuciones simétricas (E3). Ejemplo: *"No, porque al haber mucha dispersión, los datos no están concentrados y hay mucha distancia con respecto a la media, pero como entre la media y mediana hay poca diferencia, opino que la mediana tampoco es un buen indicador, además si los datos están muy alejados unos respecto de los otros, el valor central de los mismos (mediana) no aporta mucho".*
- Error en E1. Ejemplo: *"No es muy segura la media, yo creo que la mediana encaja mejor, aunque tampoco será muy representativa. Ambas no nos indican mucho, ya que hay unos que apenas compran, mientras que los otros gastan mucho".*
- La media es menos resistente a los valores atípicos que la mediana y la moda (E4). Ejemplo: *"Creo que tiene razón porque la mediana es más adecuada en este caso, ya que la media no porque hay muchos datos que son muy bajos y otros que son muy altos y la media se sitúa en el centro dónde apenas hay datos. Aunque es verdad que hay poca diferencia entre mediana y media".*
- Error en E4. Ejemplo: *"No, opino que en este caso hacer cualquier tipo de promedio es poco significativo porque los datos son muy dispersos".*
- En distribuciones bimodales, la mediana más adecuada, como representante, que la media (E9). Ejemplo: *"Estoy de acuerdo con él, ya que hay, o se pueden diferenciar dos grupos:*

los que no gastaron nada o poco y los que gastaron entre 50 y 60. La media no sería muy fiable".

- Error en E9 *"No, porque la media nos indica el gasto medio de los estudiantes en material de lectura y la mediana el valor medio entre todos los valores".*

La elección del parámetro más adecuado para representar un conjunto de datos es una cuestión que entraña dificultad para los alumnos, más acostumbrados a calcularlos cuando se les pide, o a interpretar los resultados obtenidos. Esto tiene relación con la capacidad que poseen de utilizar las medidas de tendencia central como herramientas que permiten resolver problemas, como por ejemplo, resumir los datos de un conjunto en un solo valor, lo cual supone una comprensión insuficiente de estos conceptos.

Tabla 6.8.21. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 12

	4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas		
Mediana si media no es representativa		49 (34,0)
Moda como valor más frecuente		3 (2,1)
Representaciones		
Representación numérica		70 (48,6)
Representación verbal		70 (48,6)
Definiciones y propiedades		
Definición media (algoritmo)	4 (2,8)	1 (0,7)
Definición mediana (centro)	5 (3,5)	5 (3,5)
Definición mediana (dos partes)	3 (2,1)	2 (1,4)
Definición moda (más frecuente)	1 (0,7)	3 (2,1)
Cambia el valor al cambiar un dato	1 (0,7)	
Representante	21 (14,6)	14 (9,7)
Posición promedios distribuciones simétricas	7 (4,9)	
Media es poco resistente	5 (3,5)	24 (16,7)
Mediana mejor representante (bimodal)	36 (25,0)	25 (18,1)
Argumentos		
Argumento algebraico deductivo		1 (0,7)
Casos particulares y contraejemplos		70 (48,6)

Los datos presentados en la tabla 6.8.22, que resume los resultados obtenidos corrobora esta afirmación, basta con mirar el bajo índice de respuestas dadas por los alumno al problema planteado y de éstas, sólo alrededor de la mitad son correctas. Ello coincide con la dificultad de la idea de representante señalada por Strauss y Bichler (1988) y Leon y Zawojeswki (1991). Llama la atención el poco uso que se hace de las definiciones de media, mediana o moda, en contraste con la frecuencia con la que aparece este elemento de significado en otros ítems, en los que no se debe elegir entre los distintos promedios. Las representaciones usadas se reparten entre la numérica y la verbal, con los mismos porcentajes de aparición. Y respecto a los argumentos, el basado en casos particulares ha sido prácticamente el único empleado.

6.8.13. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 13

Ítem 13. Manuel dice que esta distribución tiene dos modas y sugiere que puedes obtener más información de estos datos si los divides en dos subgrupos y calculas el promedio en cada grupo por separado. Si ____ No ____ Razona la respuesta

Este ítem, basado en el gráfico anterior se centra en el efecto que tiene la existencia de dos modas en una distribución sobre los otros promedios, apareciendo éstas como más adecuadas para resumir los datos que la media o la mediana, poco representativas en estos casos. Hemos encontrado las siguientes respuestas:

Campos de problemas

- Moda como valor más frecuente de un conjunto de datos (PMO1). Ejemplo: *"No, ya que la moda es el dato que más frecuencia tiene ..."*.

Algoritmos y procedimientos

- Cálculo de la moda a partir de un gráfico (AMO4). Ejemplo: *"Sí, se podría dividir de 0-50 € y de 50€ a 100 €, así los datos serían más fiables"*.
- Error en AMO4. Ejemplo: *"No, lo que habría que hacer es sumar las dos modas y dividirlo entre 2"*.

Definiciones y propiedades

- Definición de moda como valor más frecuente (DMO1). Ejemplo: *"No, ya que la moda es el dato que más frecuencia tiene ..."*.
- La moda puede no ser única (A7). Ejemplo: *"Sí, al estudiarlos por separado, detallas más y te fijas más en cada uno, no todo en conjunto, que los datos pueden ser menos fiables o exactos. Puede haber, o hay, dos modas ya que el grupo de personas está dividido en dos, uno que no gasta y otro que gasta, y las cantidades de personas son más o menos similares"*.
  Error en A7. Ejemplo: *"No, porque moda sólo hay una ..."*.
- Los promedios son representantes de un colectivo (E1). Ejemplo: *"Al estudiar por separado, detallas más y te fijas más en cada uno, no todo en conjunto, que con los datos pueden ser menos fiables o exactos"*.
- Error en E1 *"Aunque esta es una buena estrategia no nos vale porque nosotros queremos los datos globales y no por partes"*.
- Error en la propiedad de los promedios de coincidir únicamente en distribuciones simétricas (E3). Ejemplo: *"No, porque luego no podrías volver a ponerlos en común, ya que los datos ya no serían los mismos. Esto no se puede hacer"*.

Tabla 6.8.22. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 13

	4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas		
Moda como valor más frecuente		39 (27,1)
Representaciones		
Representación verbal		69 (47,9)
Representación numérica		2 (1,4)
Algoritmos y procedimientos		
Cálculo gráfico moda	3 (2,1)	5 (3,5)
Definiciones y propiedades		
Definición moda (más frecuente)		9 (6,3)
Moda puede no ser única	40(27,8)	39 (27,1)
Representante	5 (3,5)	3 (2,1)
Posición promedios distribuciones simétricas	5 (3,5)	
Argumentos		
Argumento algebraico deductivo		2 (1,4)
Casos particulares y contraejemplos		69 (47,9)

Los resultados obtenidos en este ítem, que se muestran en la tabla 6.8.23, no difieren demasiado de los encontrados en el ítem anterior, lo que no es extraño, puesto que está basado en aquél. Lo que aporta como novedad es la explicitación de la existencia de dos poblaciones mezcladas, cada una de las cuales tiene su moda, propiedad que los alumnos deben conocer y, sin embargo, en las respuestas hemos encontrado tantos errores como aciertos, lo cual nos lleva a pensar que, aunque parece sencilla, no lo es tanto. Debemos tener en cuenta que los alumnos están acostumbrados a que la media y la mediana, cuando existen son únicas, lo cual puede dificultar el asumir que la moda puede no serlo.

Las investigaciones sobre comprensión de la moda a partir de un gráfico son casi inexistentes, posiblemente debido a que se supone un concepto sencillo. Sin embargo, nuestro ítem, tomado de Garfield y Konold (1992), muestra que un gran porcentaje de alumnos tienen dificultad para identificar dos poblaciones mezcladas en un mismo gráfico y suponen que sólo puede haber una moda.

6.8.14. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 14

Ítem 14.Lola sugiere hacer el estudio en pesetas. ¿Cuál sería en ese caso el valor de la media?

De nuevo basado en los datos del ítem 13, la cuestión central de éste es la propiedad que la media de conservar cambios de escala. Se pretende ver si los alumnos conocen y aplican esta propiedad o intentar rehacer todo el problema con las nuevas unidades. Se han obtenido las siguientes respuestas:

Propiedades

- La media conserva cambios de origen y escala (A5). Ejemplo*: "El valor de la media sería igual pero multiplicado por 166.386"*.
- Error en A5. Ejemplo: *"La media tendría que hacerla: primero estructurar una tabla con los datos al completo y después sumar todos los datos y dividirlos por el número de datos que hay"*.

Tabla 6.8.23. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 14

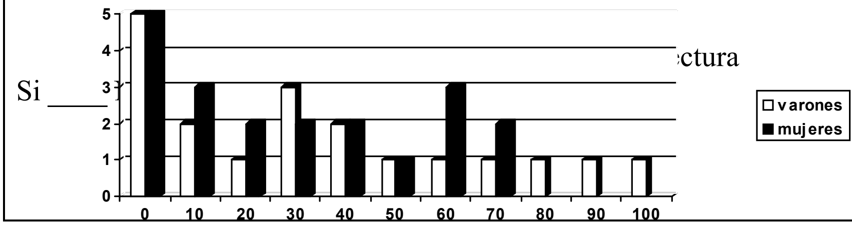
	4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto
Representaciones		
Representación verbal		36 (25,0)
Representación simbólica		2 (1,4)
Representación numérica		43 (29,9)
Propiedades		
Cambios origen y escala	6 (4,2)	65 (45,1)
Argumentos		
Argumento algebraico deductivo		20 (13,9)
Casos particulares y contraejemplos		36 (25,0)

A diferencia de los otros ítems que componen esta segunda parte del cuestionario, más centrado en situaciones problemáticas de elección e interpretación de representantes de un conjunto de datos, los resultados obtenidos en éste, resumidos en la tabla 6.8.24, muestran unos porcentajes de respuestas correctas muy por encima de los encontrados hasta ahora.

Este ítem se centra en la propiedad de la media de conservar los cambios de origen y escala, y los resultados muestran un conocimiento bueno de la misma por parte de los estudiantes. En la tabla aparecen muy pocos errores, lo que nos permite afirmar que, si bien no todos los alumnos conocen la propiedad (contestan alrededor de la mitad de la muestra), los que la usan lo hacen correctamente.

6.8.15. ANÁLISIS DETALLADO DEL ÍTEM 15

Ítem 15. Antonio cree que sus dibujos muestran que los varones y mujeres tienden a gastar diferentes cantidades de dinero en material de lectura.



Esta última cuestión pretendía averiguar qué uso hacen los alumnos de los promedios para comparar dos distribuciones. Los datos son de tipo gráfico, más complejo que los anteriores, puesto que contiene dos conjuntos de datos, de modo que es posible que a los alumnos les cueste más interpretar la información. En cuánto a los promedios se pretende que los utilicen como elemento de comparación de los dos conjuntos de datos, para que no basen sus respuestas únicamente en la interpretación de los gráficos. Hemos encontrado los siguientes resultados:

Campos de problemas

- Error al no reconocer que los promedios puede servir para comparar conjuntos de datos (PME3). Ejemplo: *"Las mujeres gastan más que los varones, sobre todo en intervalos como del 10 al 20, del 20 al 30, de 60 al 70 y sólo contrarrestado del 30 al 40 por los varones"***.**
- Respuesta correcta, pero sin utilizar parámetros estadísticos para tomar la decisión. Ejemplo: *"Claramente se puede apreciar que, aunque en los valores mínimos y máximos de dinero, las diferencias son nulas, las mujeres gastan más dinero en material de lectura. Hay el doble de mujeres que gastan 70 € y el triple de mujeres que gastan 60 €".*
- Respuesta incorrecta, sin utilizar parámetros. Ejemplo: *"No, en este gráfico no se especifica nada".*

Tabla 6.8.24. Frecuencias (y porcentajes) de elementos de significado en el Ítem 15

	4º ESO (n=144)	
Elementos usados	Incorrecto	Correcto
Campos de problemas		
Media o mediana para comparar conjuntos de datos	101(70,1)	
Representaciones		
Representación verbal		101(70,1)
Representación gráfica	41 (28,5)	71 (49,3)
Argumentos		
Casos particulares y contraejemplos		101(70,1)

Los resultados mostrados en la tabla 7.6.25 como resumen de las respuestas obtenidas en este ítem nos permite afirmar que mientras que un porcentaje relativamente alto de alumnos (alrededor de un 50%) reconocen la posibilidad que ofrece el gráfico de efectuar comparaciones entre dos conjuntos de datos, ninguno de ellos utiliza la media o mediana, ni ningún otro parámetro que sea representativo de los mismos para hacer la comparación, limitándose a hacer descripciones de conjunto. Es un ejemplo más de que los estudiantes, aunque dominen correctamente definiciones, algoritmos de cálculo, etc., no manejan los distintos elementos del significado de conceptos como los promedios, puesto que no son capaces de usarlos como medio de resolver adecuadamente un problema.

Este resultado coincide con lo resaltado por Estepa y Batanero (1994), quienes encontraron que, al comparar dos conjuntos de datos, los estudiantes se basan con frecuencia en casos particulares.

6.9. RESUMEN DE LAS TENDENCIAS EN EL SIGNIFICADO PERSONAL

Uno de los objetivos de nuestra investigación (Objetivo 5), expuesto en la sección 1.5, era describir los elementos de significado puestos en juego por los alumnos y evaluar su conocimiento en relación con las medidas de tendencia central.

Puesto que al completar el cuestionario los alumnos tuvieron amplia libertad para trabajar, nos ha permitido realizar una evaluación de los elementos de significado que los alumnos han aplicado para resolver las tareas planteadas y de esta manera poder determinar, al menos en forma aproximada, las características en su significado personal sobre las medidas de tendencia central.

Finalizado el análisis detallado de ítems, hemos estudiado la frecuencia de uso de cada uno de estos elementos en el total de la prueba, que presentamos a continuación agrupándolos en tablas según su tipo: Campos de problemas, representaciones, algoritmos, definiciones y propiedades y argumentos. Los resultados se presentan separadamente para cada grupo, puesto que el cuestionario fue más amplio para los alumnos de Cuarto curso, lo que no permite la comparación directa, ya que no todos los elementos son plausibles de ser utilizados en todas las preguntas. Esta comparación se hará solo en la parte común, por lo que también se presentan conjuntamente los resultados obtenidos por los dos grupos a las respuestas dadas en las preguntas comunes a ambos cuestionarios.

A partir de estas tablas, y para completar el estudio, analizamos en esta sección las conclusiones principales en relación con las tendencias observadas en el significado personal de cada grupo de alumnos y las diferencias entre ellos, que pasamos a describir a continuación.

Hacemos notar que no todos los elementos tienen la misma posibilidad de mostrarse, sino que algunos de ellos se pueden usar a lo largo de los distintos ítems que componen la prueba, mientras que otros son específicos de ítems aislados. Nuestra intención no es comparar la mayor o menor frecuencia de aparición de cada elemento de significado con los demás, sino la frecuencia de uso correcto e incorrecto en cada uno de ellos, en relación a las veces que ha sido utilizado.

6.9.1. SIGNIFICADO PERSONAL PUESTO EN JUEGO POR LOS ALUMNOS DE PRIMER CURSO EN EL TOTAL DE LA PRUEBA

A continuación analizamos los resultados obtenidos en los alumnos de Primer Curso de los que, como hemos dicho anteriormente, pretendemos conocer el significado intuitivo que asignan a nuestro tema, puesto que no han recibido enseñanza explícita del mismo. La tabla 6.9.1 muestra la frecuencia de uso de los elementos de significado identificados en las respuestas al cuestionario de los alumnos de 1º curso.

En ella podemos observar la gran variedad de elementos de significado que han sido puestos en juego por los alumnos. Después describimos los elementos más característicos que han utilizado en forma correcta y que, por tanto, concuerdan con el significado institucional local del tema, que se describió en el capítulo 4. Algunos alumnos habrán hecho un estudio de estadística durante la educación primaria, en otros casos, la comprensión es previa a la instrucción. De cualquier manera, los profesores que enseñan el tema pueden apoyarse en estos conocimientos previos, para construir sobre ellos una comprensión más profunda durante el trabajo con la estadística.

Tabla 6.9.1. Elementos de significado usados en 1º curso (n=168)

	Correctos	Incorrectos
Campos de problemas		
Media como mejor estimación	66	0
Media como reparto equitativo	84	47
Media como valor probable	132	4
Mediana como representante	15	0
Representaciones		
Verbales	887	0
Numéricas	1522	0
Algoritmos y procedimientos		
Cálculo media datos aislados	354	102
Cálculo media ponderada	52	318
Cálculo gráfico media	20	46
Invertir algoritmo media	117	86
Buscar distribución dada media	154	176
Calculo mediana datos aislados impar	64	44
Calculo mediana datos aislados par	36	59
Cálculo gráfico mediana	7	39
Cálculo gráfico moda	35	40
Definiciones y propiedades		
Definición de media como algoritmo	451	72
Definición de media como promedio	156	107
Definición mediana (central)	40	18
Definición mediana (dos partes)	64	2
Definición moda (más frecuente)	40	27
Valor en el rango	0	0
Intervienen todos los valores	1	29
Cambia valor al cambiar el dato	39	14
Operación interna	2	50
Elemento neutro	17	24
No asociativa	0	37
Media suma	56	1
Representante	78	37
Centro de gravedad	36	12
Posición datos Simétricas	2	1
Media poco resistente	7	29
Suma desviaciones	58	5
Argumentos		
Casos particulares y contraejemplos	789	0
Deductivos	650	0

Concordancia entre el significado institucional local previsto y las características en el significado personal de los alumnos del grupo

Campos de problemas

Si comenzamos revisando los resultados mostrados para los campos de problemas de la media, podemos ver cómo el más usado correctamente, en proporción al número total, es el de la media como mejor estimación de un conjunto de medidas en presencia de errores, que se usa únicamente de forma correcta. En el Capítulo 4 vimos que este tipo de problema no se suele incluir en los libros de texto y argumentábamos que podría enriquecer el significado que los alumnos construyen de los promedios, en caso de incluirse. Los datos que ahora presentamos aportan una evidencia empírica de que los alumnos son capaces de comprender este tipo de problema, incluso en primer curso antes de iniciar el estudio de los promedios.

Otro campo de problemas que los alumnos relacionan con la media es el de obtener un valor probable al elegir un elemento al azar de una población aproximadamente simétrica que aparece de forma correcta 132 veces frente a sólo 4 que se usa incorrectamente. Se trata, por tanto, de dos tipos de problemas para los que los alumnos muestran una fuerte intuición que les lleva a reconocerlos correctamente.

Representaciones

El uso de representaciones es siempre correcto, aunque los alumnos de este nivel no han utilizado elementos simbólicos ni gráficos. Sí se puede destacar que el uso de representaciones numéricas duplica, casi, al de representaciones verbales, lo que indica que los estudiantes prefieren éstas, quizás por estar menos habituados a usar el lenguaje ordinario escrito cuando trabajan en matemáticas. En todo caso el uso de los términos media, mediana y moda es correcto.

Algoritmos y procedimientos

Si pasamos a los algoritmos de cálculo y procedimientos utilizados en la resolución de las tareas propuestas, encontramos, respecto a la media que el que mejor dominan es el cálculo de la media de un conjunto de datos aislados, que presenta una frecuencia de uso correcto muy superior a la de errores. Los alumnos usan siempre que pueden este algoritmo, incluso transformando un problema de medias ponderadas en un cálculo simple cuando es necesario.

En contra de lo que habíamos previsto a priori, invertir el algoritmo de la media para hallar un dato no ha resultado demasiado difícil para estos alumnos con escasa formación en el tema, puesto que, como aparece en la tabla, hay bastantes más aciertos que errores. Ello supone un conocimiento bastante profundo del algoritmo, al tener que buscar un total, multiplicando la media por el número de datos y posteriormente despejar una incógnita para encontrar el valor pedido.

En el cálculo de la mediana con datos aislados cuando se trata de un número impar de datos, hay más usos correctos que incorrectos. Se desprende que los alumnos han comprendido que la mediana es el centro de la distribución ordenada de valores, puesto que la respuesta correcta implica la ordenación de la serie y la elección del término central.

Definiciones y propiedades

De las definiciones de la media, encontramos como más usual la basada en el algoritmo de cálculo, puesto que presenta muchísima más frecuencia de uso correcto que incorrecto. Aunque también son mayoría los alumnos que usan la idea de media como representante o promedio, en este caso aumenta bastante la frecuencia de errores.

En nuestra opinión la identificación predominante de la media con un algoritmo responde a la realidad encontrada en los libros de texto, que incluyen mayoritariamente esta definición frente a otras, lo que nos lleva a suponer, además, que también fue más usada en la enseñanza primaria y, por tanto la que más conocen los estudiantes.

Para la mediana, la definición más conocida y usada con menos errores es la que se centra en la división del conjunto en dos partes de igual tamaño y también superan las definiciones correctas a los errores la que la sitúan en el centro ordenado de la distribución, lo que concuerda con el hecho de que los alumnos han calculado con facilidad la mediana para el caso en que está determinada y también el hecho de que no ordenan los datos para su cálculo.

Entre las propiedades encontramos notables diferencias, y menor uso. Algunas propiedades aparentemente abstractas se usan correctamente, aunque sea de forma intuitiva, y con pocos errores, como la de que la media de la suma de dos o más variables coincide con la suma de sus medias, o que la suma de las desviaciones de un conjunto de datos a su media es cero. También la idea de que la media es un representante del conjunto se usa preferentemente en forma correcta, aunque también aparecen algunos errores.

Argumentos

Los alumnos presentan un gran número de argumentos formalmente correctos (aunque puedan conceptualmente tener errores de comprensión de algún concepto), pero en general son poco elaborados, predominando el uso de ejemplos y contraejemplos, como apoyo en su argumentación. Es notable, también el uso de argumentos deductivos formalmente correctos, incluso cuando los elementos de representación empleados son tan sólo verbales y simbólicos.

Diferencias entre el significado institucional local previsto y las características en el significado personal de los alumnos del grupo

Los datos obtenidos también nos permiten identificar algunos puntos en que el significado personal de estos estudiantes no coincide con el que se contemplará posteriormente en la enseñanza. Es importante que el profesor lo tenga en cuenta, pues es sobre estos puntos de descuerdo sobre los que debe centrar su labor formativa.

Campos de problemas

Un resultado que nos ha sorprendido es el hecho que, al hacer referencia al problema de reparto equitativo, en relación a la media, es el campo de problema que mayor dificultad presenta puesto que aparece una frecuencia de uso incorrecto de 47 sobre 131 de uso total, lo que corresponde a un 36% aproximadamente de errores, entre las veces que ha sido utilizado.

En cuánto a la mediana, sólo se ha usado un campo de problemas asociado, el de ésta como representante en distribuciones en las que la media no es suficientemente representativa. En este caso, sólo aparece un uso correcto de la misma, lo que nos lleva a pensar, que la mediana es un concepto altamente elaborado, y no aparece su uso en forma intuitiva tratándose de alumnos que no han estudiado el tema previamente. Esta opinión corrobora la dificultad de comprensión de la idea de mediana incluso en alumnos universitarios que han estudiado su definición, mostrada por Estepa (1993).

Algoritmos y procedimientos

El cálculo de la media ponderada muestran una frecuencia de fallos muy elevada, lo que revela un alto índice de dificultad en este punto, coincidiendo con todas las investigaciones sobre el tema, por ejemplo, las de Pollatsek, Lima y Well (1981) o las de Gattusso y Mary

(1998). Los alumnos que han intentado el cálculo directo, o bien no han tenido en cuenta las ponderaciones o han utilizado ponderaciones incorrectas.

La estimación de la media a partir de un gráfico resulta difícil, ya que presenta más del doble de usos incorrectos que correctos. Sería interesante plantear en la enseñanza ejercicios que refuercen esta capacidad, puesto que en la prensa y medios de comunicación aparecen con frecuencia gráficos, de los que tenemos que detectar su tendencia, como en los gráficos de dispersión.

Al tratar de buscar una distribución de media conocida, aunque con poca diferencia, sí presenta más errores que usos correctos. De todas formas, la frecuencia de aciertos es mayor de lo que esperábamos encontrar. Hacemos notar también que no todos los alumnos invierten el algoritmo de la media, aunque la frecuencia de aciertos es mayor que la de fallos.

Respecto a la mediana, los resultados confirman que el caso del cálculo en un conjunto de datos aislados que mayor dificultad presenta es el de un número par de valores, puesto que no coincide con ninguno de los datos. Es un caso de indeterminación que los alumnos no llegan a resolver intuitivamente.

El cálculo a partir de un gráfico, tanto de la mediana como de la moda, sigue siendo difícil, igual que ocurría para la media. Sin embargo, la diferencia entre errores y aciertos en estas dos medidas es menor que en la primera, lo que nos lleva a pensar que existe una intuición más fuerte de éstas como medidas de posición (que se pueden localizar en un gráfico) que para la media. Recordemos que sólo había un ítem en que se podría llevar a cabo este cálculo a partir de un gráfico.

Definiciones y propiedades

Hay un gran número de errores en la definición de la media como promedio o representante de un conjunto, lo que coincide con el hecho de que los alumnos no identifican la media como solución en el problema de encontrar un representante para un conjunto dado de datos.

Esta es la definición que más errores presenta, aunque los alumnos apenas han usado definiciones de la mediana y moda, por lo que a nivel intuitivo, parecen identificar la idea de promedio con media aritmética, lo que coincide con los resultados de Watson y Moritz (1999, 2000).

Los alumnos hacen pocas referencias a propiedades de los promedios. Posiblemente el nivel de comprensión requerido sobre un objeto para analizar sus propiedades solo se alcance una vez estudiado el tema.Entre las propiedades usadas incorrectamente con una cierta frecuencia destacamos:

- el hecho de que en el cálculo de los promedios intervienen todos los valores (puesto de manifiesto cuando los alumnos no tienen en cuenta los ceros en el cálculo de la media, lo que ya fue señalado por Tormo (1993)
- No ser consciente de que se trata de una operación interna, cuando los alumnos interpretan incorrectamente el dato 1’2 hijos por familia, pensando que se trata de un error de cálculo
- Ser poco resistente a valores extremos, que también se pone de manifiesto.

6.9.2. SIGNIFICADO PERSONAL PUESTO EN JUEGO POR LOS ALUMNOS DE CUARTO CURSO EN EL TOTAL DE LA PRUEBA

A continuación, en la tabla 6.9.2, presentamos los elementos usados por los alumnos de 4º en sus respuestas y comentamos los resultados obtenidos del mismo modo que se ha hecho con los de 1º.

Tabla 6.9.2. Elementos usados en 4º curso **Cuarto (n=144)**

	Correctos	Incorrectos
Campos de problemas		
Media como mejor estimación	96	3
Media como reparto equitativo	69	32
Media como valor probable	124	2
Mediana como representante	46	0
Representante de datos ordinales	10	23
Mediana para comparar conjuntos	0	101
Moda como valor más frecuente	87	2
Representaciones		
Verbales	1371	0
Simbólicas	133	0
Gráfica	77	41
Numéricas	1200	0
Algoritmos y procedimientos		
Cálculo media datos aislados	379	30
Cálculo media ponderada	57	116
Cálculo gráfico media	23	14
Invertir algoritmo media	99	27
Buscar distribución dada media	214	68
Calculo mediana datos aislados impar	55	26
Calculo mediana datos aislados par	59	18
Cálculo gráfico mediana	52	51
Calculo moda datos aislados	11	0
Cálculo gráfico moda	33	8
Definiciones y propiedades		
Definición de media como algoritmo	544	49
Definición de media como promedio	91	43
Definición mediana (central)	97	72
Definición mediana (dos partes)	57	81
Definición moda (más frecuente)	98	18
Valor en el rango	1	0
Intervienen todos los valores	3	80
Cambia valor al cambiar el dato	87	18
Operación interna	79	27
Elemento neutro	47	8
No asociativa	0	32
Cambios origen y escala	65	6
Media suma	43	2
Moda no siempre única	39	40
Moda siempre definida	0	46
Representante	70	188
Centro de gravedad	0	2
Posición datos Simétricas	1	19
Media poco resistente	91	96
Suma desviaciones	111	16
Representante para datos bimodal	25	36
Argumentos		
Casos particulares y contraejemplos	1206	0
Deductivos	565	0

Concordancia entre el significado institucional local previsto y las características en el significado personal de los alumnos del grupo

Campos de problemas

En el apartado de campos de problemas referidos a la media, los datos de la tabla muestran resultados similares a los que aparecieron en 1º curso: La consideración de la media como mejor estimación de un conjunto de medidas en presencia de errores y el valor más probable al elegir un elemento al azar son los más comprendidos al haber sido usados correctamente casi sin excepción.

Si revisamos los datos presentados en el capítulo 4 tras el análisis de libros de texto, podemos los campos de problemas de los que emerge la media como mejor estimación de un conjunto de medidas en presencia de errores, o como valor más probable al elegir un elemento al azar de un conjunto, apenas se contemplan en ellos y, sin embargo, los alumnos la han usado con bastante frecuencia y con pocos errores, lo que nos lleva a pensar que quizás son éstos elementos de significado que se deberían aprovechar en los libros de texto para incorporarlos a la enseñanza.

Los problemas en los que la mediana aparece como mejor representante cuando la media no es representativa son también los más usados en 4º, en relación a la mediana y siempre en forma correcta. Esto supone una comprensión bastante avanzada, pues incluye las ideas de media, mediana y representante, así como la discriminación de propiedades de media y mediana.

Para los campos de problemas relacionados con la moda como valor mas frecuente, parece no haber demasiadas dificultades, como muestra la alta frecuencia de respuestas correctas. También en los libros de texto se contempla de forma casi generalizada.

Representaciones

Respecto a las representaciones, podemos ver que se utilizan todas las presentadas en nuestro análisis, si bien hay una preferencia clara por las verbales y numéricas sobre las otras dos, simbólicas y gráficas, lo que nos da información acerca de las dificultades que estos dos modos de lenguaje presentan para los estudiantes de secundaria. El uso de las representaciones es en general correcto.

Algoritmos y procedimientos

Entre los algoritmos de cálculo de la media, el caso de un conjunto de datos aislados es el que ha obtenido mejores resultados, seguido por la inversión del algoritmo e incluso la búsqueda de una distribución dada la media, que aunque presenta un número considerable de errores, también tiene una alta frecuencia de usos correctos. Los alumnos parecen dominar todas estas técnicas de cálculo.

En el cálculo de la mediana, ya no aparecen apenas diferencias entre el caso de un número par o impar de datos, lo que supone una mejora a partir de la enseñanza, algoritmos que se presentan con una frecuencia similar en los libros de texto y que los alumnos parecen dominar.

En el caso de la moda, no encontramos dificultades apreciables ni cuando se trata de un conjunto de datos aislados ni cuando los datos aparecen en forma de gráfico, también de acuerdo con lo que proponen los textos analizados.

Definiciones y propiedades

La definición de media más usada en forma correcta, con una notable diferencia, es la misma que detectamos en 1º, la que se centra en el algoritmo de cálculo, lo que confirma la idea de que es la más usada en la enseñanza, a la vista del análisis de los libros de texto, y la que permanece en los alumnos. No obstante también hay más respuestas correctas en la definición de media como representante-promedio que incorrectas, lo que apunta a la mejora de la comprensión de la idea de distribución de datos y la media como característica de un colectivo.

De las dos definiciones de mediana, la que enfatiza su posición central dentro del conjunto es la que más frecuencia tiene de uso correcto, aunque con bastantes errores.

La definición de moda como valor más frecuente de la variable, parece haberse adquirido ya sin demasiadas dificultades, después de estudiar el tema.

Entre las propiedades que se han usado correctamente encontramos que el valor de los promedios varía al cambiar uno de los datos, el cálculo de la media no es una operación interna ni tiene elemento neutro, los promedios conservan los cambios de origen y escala, la media de la suma de dos o más variables coincide con la suma de las medias de dichas variables y la suma de las desviaciones de un conjunto de datos a su media es cero. En todas ellas aparecen algunos errores, pero escasos en relación a la frecuencia de usos correctos, por lo que podemos pensar que hay un buen conocimiento de las mismas, a pesar de que, salvo el caso de los cambios de origen y escala, en los libros de texto analizados aparecen con muy poca frecuencia y, como se dijo en el capítulo 4, no siempre de forma explícita, sino como resultados de ejercicios o problemas.

Argumentos

Los argumentos son siempre formalmente correctos. Los preferidos han sido los basados en casos particulares, pues su frecuencia de uso casi duplica los de tipo deductivo, acorde con los usos dados a estos dos tipos en los libros de texto que hemos analizado. Sin embargo en éstos también se usan correctamente con alta frecuencia.

Diferencias entre el significado institucional local previsto y las características en el significado personal de los alumnos del grupo

Al igual que hicimos con los alumnos de 1º curso resaltaremos a continuación las principales diferencias entre el significado personal de los alumnos de 4º curso y el significado institucional local que identificamos en el análisis de los libros de texto.

Campos de problemas

Aunque el número de respuestas correctas sobre el campo de problemas relacionado con la media como resultado de efectuar un reparto equitativo supera en doble a los errores, estos todavía permanecen. Este campo se incluye en bastantes de los libros estudiados y, por tanto, posiblemente en el trabajo de aula, sigue presentado alguna dificultad en 4º, lo que sugiere que se trata de una de las situaciones menos intuitivas y a las que se debería prestar mayor atención.

En el análisis conceptual contemplamos un cuarto campo de problemas asociado a la media, obtener un elemento representativo en una distribución aproximadamente simétrica, incluido en todos los libros de texto analizados salvo en uno de ellos. Llama la atención, sin embargo la ausencia de este elemento entre los utilizados por los alumnos, a pesar de que en nuestro análisis a priori se preveía que podía ser utilizado en uno de los ítems del cuestionario. De nuevo este dato apunta a la dificultad de la idea de distribución.

Los problemas en los que la mediana aparece representante de un conjunto de datos ordinales, presenta más errores que usos correctos, y el uso de ésta para comparar conjuntos de datos, nadie la ha usado correctamente y sí aparecen muchos errores.

La utilización de la mediana para comparar conjuntos de datos no se contempla en muchos de los libros de texto, lo que puede explicar, en parte, los errores de los alumnos. Creemos que éste es un punto en el que se debería reflexionar a la hora de planificar la enseñanza, pues es una de las grandes potencialidades de la mediana, sobre todo en el análisis exploratorio de datos.

Representaciones

Respecto a las representaciones, sólo aparecen errores en los gráficos, aunque con menor frecuencia que el uso correcto. De todos modos ya en el capitulo 3 indicamos como diferentes investigadores como Li y Shen (1992) indican la aparición de errores frecuentes en los gráficos preparados por los alumnos como parte de su trabajo en estadística.

Algoritmos y procedimientos

De nuevo es en el cálculo de la media ponderada donde más dificultades aparecen, en los algoritmos, así como en el cálculo a partir de un gráfico. En los libros de texto, y es de suponer que en la enseñanza, aparece de forma generalizada el cálculo de medias ponderadas, en contra de lo que podríamos pensar al ver los resultados obtenidos. Esto confirma la dificultad que presenta este tipo de cálculo, ya apuntada en otras investigaciones previas, a pesar de la instrucción recibida, lo que se debe tener en cuenta por parte de los profesores a la hora de trabajar con los alumnos.

Las principales dificultades en la cálculo de la mediana se presentan en el cálculo a partir de un gráfico, que presenta casi el mismo número de errores que de aciertos. Estos resultados son acordes con lo su menor presencia en los textos y de nuevo indica la dificultad de interpretación de los gráficos estadísticos, cuando trabajamos a un nivel más allá de la simple lectura de datos (Curcio, 1987).

Definiciones y propiedades

Los alumnos todavía encuentran dificultades con las dos definiciones de mediana, que coinciden con las más frecuentes en los libros de texto, la centrada en la idea de dividir en dos partes iguales el conjunto de datos, y la que enfatiza su posición central dentro del conjunto. Creemos que esta mayor dificultad de comprensión de la mediana, respecto a la media se debe al hecho que en realidad en su definición aparecen dos conceptos asociados: orden y distribución. Como valor central, hace referencia a un conjunto (distribución) y no a una propiedad de cada uno de sus elementos, pero, además, el conjunto ha sido previamente ordenado. En el cálculo de media y moda no hace falta una ordenación previa del conjunto, lo que tampoco es necesario en las operaciones aritméticas que el alumno conoce.

Hay también dificultades en algunas propiedades como que en el cálculo de los promedios intervienen todos los valores, que el cálculo de la media no es una operación asociativa, la moda está definida para todas las variables mientras que la media y mediana sólo existen para las cuantitativas, y que los promedios son representantes de una distribución.

En todos estos casos, los alumnos muestran una frecuencia de usos incorrectos bastante elevada si la comparamos con los usos correctos, que en algunas, como se puede apreciar en la tabla, es nula. Aquí conviene destacar que dos de ellas, la de que la moda está definida para cualquier tipo de variable, mientras que la mediana y la media no, y la de ser los promedios representantes de un conjunto de valores son muy frecuentes en los libros de texto que hemos revisado y, a pesar de todo, se cometen muchos errores por parte de los alumnos, lo que nos indica que se tratan de propiedades difíciles, a las que habría que prestarle una mayor atención en la enseñanza.

Por último encontramos propiedades como la de la moda de no ser siempre única y de la media de ser menos resistente a la presencia de valores atípicos que otros promedios, que presentan una utilización correcta e incorrecta casi igualada por parte de los alumnos y las dos aparecen, al menos, en la mitad de los libros de texto.

6.9.3. EVOLUCIÓN DEL SIGNIFICADO PERSONAL DE LOS ALUMNOS

Para acabar, presentamos conjuntamente los usos correctos e incorrectos de los alumnos de 1º y 4º en los ítems comunes a los cuestionarios de ambos cursos, con intención de poder efectuar una comparación entre ellos y deducir algunas tendencias en la evolución del significado personal. Ahora en los alumnos de 4º curso aparecen menos elementos de significado, puesto que hemos limitado el número de ítems. La tabla 6.9.3 muestra los resultados registrados que pasamos a comentar.

Campos de problemas

Si comenzamos con los campos de problemas, se observa una mejor comprensión de la idea de media como mejor estimación, pues se incrementa la frecuencia de uso correcto, a pesar de ser menor el tamaño de la muestra de alumnos. Hay también mejora en el reconocimiento por parte de los alumnos de 4º del campo de problemas relacionado con la mediana como representante de un conjunto de datos en el que la media no es representativa. Es decir aumenta la capacidad de elección de un promedio adecuado en estas situaciones.

Representaciones

En el caso de las representaciones sí encontramos una diferencia importante, la aparición, en 4º, de representaciones simbólicas, disminuyendo el de las numéricas, lo que indica una mayor capacidad de simbolización y abstracción. Esto es comprensible si tenemos en cuenta que los alumnos de 1º aún no han trabajado este tipo de representaciones, mientras que en 4º ya tienen un cierto manejo de las mismas, no sólo en el estudio de la estadística, sino en general en matemáticas e incluso en otras áreas.

Algoritmos y procedimientos

Respecto a los algoritmos y procedimientos de cálculo sí podemos apreciar más diferencias entre los dos cursos, lo que amplía notablemente la información recogida por separado.

Por una parte, en relación a la media, observamos que los errores en el cálculo de la misma, tanto con datos aislados como de la media ponderada y a partir de un gráfico, se reducen notablemente de 1º a 4º, lo que nos lleva a pensar en un efecto positivo de la enseñanza recibida por estos últimos. No obstante son muchos todavía los errores con medias ponderadas.

También la inversión del algoritmo y la búsqueda de una distribución para una media dada mejora con el avance de los cursos, porque aunque se aprecia una leve disminución del número de usos correctos, no debemos olvidar que la muestra de alumnos de 1º es algo mayor que la de 4º (168 frente a 144, respectivamente), lo que explica esta pequeña bajada en la frecuencia. Sin embargo, donde sí se aprecia una disminución muy importante es en los errores detectados, lo que supone un avance en la comprensión.

Tabla 6.9.3. Elementos usados en toda la muestra

	Primero(n=168)		Cuarto (n=144)	
	Correctos	Incorrectos	Correctos	Incorrectos
Campos de problemas				
Media como mejor estimación	66	0	96	3
Media como reparto equitativo	84	47	69	32
Media como valor probable	132	4	124	2
Mediana como representante	15	0	46	0
Representaciones				
Verbales	887	0	802	0
Simbólicas	0	0	128	0
Numéricas	1522	0	1071	0
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media datos aislados	354	102	379	30
Cálculo media ponderada	52	318	57	116
Cálculo gráfico media	20	46	23	14
Invertir algoritmo media	117	86	99	27
Buscar distribución dada media	154	176	214	68
Calculo mediana datos aislados impar	64	44	55	26
Calculo mediana datos aislados par	36	59	49	18
Cálculo gráfico mediana	7	39	7	40
Calculo moda datos aislados	0	0	0	0
Cálculo gráfico moda	35	40	24	5
Definiciones y propiedades				
Definición de media como algoritmo	451	72	542	21
Definición de media como promedio	156	107	87	43
Definición mediana (central)	40	18	78	67
Definición mediana (dos partes)	64	2	55	29
Definición moda (más frecuente)	40	27	38	17
Valor en el rango	0	0	1	0
Intervienen todos los valores	1	29	0	5
Cambia valor al cambiar el dato	39	14	87	17
Operación interna	2	50	79	27
Elemento neutro	17	24	47	8
No asociativa	0	37	0	32
Media suma	56	1	43	2
Representante	78	37	53	9
Centro de gravedad	36	12	0	2
Posición datos Simétricas	2	1	1	7
Media poco resistente	7	29	45	17
Suma desviaciones	58	5	111	16
Argumentos				
Casos particulares y contraejemplos	789	0	700	0
Deductivos	650	0	532	0

En el caso de la mediana no se aprecia una mejora tan notable, lo que confirma la hipótesis de la dificultad de esta medida sobre otras, que se ha ido comentando a lo largo del trabajo, y que apoyan investigaciones anteriores. Sólo en el caso del cálculo de ésta para un conjunto par de valores aislados muestra un aumento en los usos correctos y una disminución de errores, lo que nos indica que éste punto sí que mejora con el estudio específico del tema, posiblemente porque la idea de tomar el promedio de los dos casos centrales, si hay indeterminación no es intuitiva y sólo se adquiere cuando el profesor la ha sugerido a los alumnos.

Para la moda encontramos que ningún alumno de ninguno de los dos cursos emplea el cálculo de ésta con datos aislados, haciendo una lectura previa del gráfico, sino que directamente la intentan calcular a partir de éste, obteniendo prácticamente el mismo número de respuestas correctas, si tenemos en cuenta la diferencia de tamaño de las muestras, pero el número de errores se reduce notablemente en 4º, lo que supone una mejoría de la comprensión de este elemento, así como una mayor comprensión gráfica, en general.

Definiciones y propiedades

En cuánto a las definiciones se observa, en el caso de la media en 4º curso, un aumento importante, respecto de lo que ocurre en 1º, del uso de la definición basada en el algoritmo de cálculo y una reducción de los errores, en detrimento del uso que se hace de la basada en la idea de promedio o representante de un conjunto de datos. Este hecho refuerza la idea de que la enseñanza enfatiza esta definición de forma que, en muchos casos, es casi la única que se presenta a los estudiantes, mientras que la otra, más intuitiva para ellos, según los resultados obtenidos, y muy importante, desde nuestro punto de vista para una buena comprensión del concepto de promedio, apenas se trabaja en la enseñanza.

En el caso de las definiciones de mediana sólo se usan, en los dos cursos, la del valor que divide en dos partes iguales a la población y la que enfatiza la idea de valor central del conjunto ordenado de datos. No encontramos diferencias notables entre 1º y 4º cursos, lo que puede deberse a que la dificultad que presenta permanece tras la enseñanza, o que ésta no da los frutos que se espera de ella. Lo mismo ocurre para la moda, no hay demasiadas diferencias de uso en los dos cursos.

El conocimiento y uso de las distintas propiedades de los promedios sí parece mejorar tras la enseñanza, pues encontramos 6 de las 12 usadas en las respuestas dadas por los estudiantes que presentan unos resultados sensiblemente mejores en 4º que en 1º, con una frecuencia mayor de usos correctos y una reducción importante de errores. En concreto, se trata de las siguientes propiedades: El valor de los promedios cambia al variar uno de los datos; para el cálculo de la media intervienen todos los datos, no se trata de una operación interna, ni tiene elemento neutro; la media es menos resistente que la mediana o la moda a la presencia de valores atípicos, y la suma de las desviaciones de un conjunto a su media es cero.

Encontramos una de las propiedades con unos resultados llamativos, se trata de que la media es el centro de gravedad de una distribución. En 1º curso la usan correctamente algunos alumnos (36), aunque también cometen errores relacionados con ella 12 personas. Sin embargo en 4º sólo 2 estudiantes la usan y además incorrectamente. Una interpretación posible sería que se trata de una propiedad bastante intuitiva y que, con el transcurso del tiempo y el aumento de elementos de significado que van adquiriendo los estudiantes, la intuición necesaria para reconocerla se va perdiendo.

Argumentos

Los argumentos usados por los dos conjuntos de alumnos de la muestra no varían en función de los cursos y son correctos.

6.10. ESTUDIO DE CASOS

En esta parte del capítulo presentamos el análisis en profundidad de las respuestas al cuestionario dadas por cuatro de los estudiantes de la muestra. Hemos seleccionado dos alumnos de 4º curso y otros dos de 1º, teniendo en cuenta, en cada caso, que todos ellos hayan proporcionado respuestas a todas las preguntas, argumentando con detalle sus razonamientos. Hemos escogido, en cada curso, un alumno o alumna con un buen porcentaje de respuestas correctas y otro con sólo un número pequeño de aciertos y el resto respuestas conteniendo errores.

El objetivo de este análisis era comparar los razonamientos en los dos extremos de comprensión de los promedios en cada uno de los grupos, así como las diferencia en los mismos ítems, que sean comunes a los dos grupos de estudiantes, para analizar la evolución del razonamiento en los alumnos de mayor edad e instrucción.

A continuación presentamos los resultados obtenidos por los estudiantes seleccionados. En cada caso, transcribimos todas las respuestas dadas a los ítems que forman el cuestionario y las separamos en unidades de análisis. Para cada una de las unidades efectuamos un análisis semiótico, según el modelo de Godino (1998, 1999, 2002). El fin de detectar todos los elementos de significado que contienen cada una de ellas, así como los posibles conflictos semióticos que puedan aparecer.

Los resultados se presentan en forma de tablas con tres columnas: la primera en la que se indica la unidad de análisis; la segunda incluye el fragmento de respuesta que constituye la unidad y la última muestra los elementos de significado y conflictos semióticos identificados. Finalizado el análisis de todos los casos que componen cada grupo, presentaremos y analizaremos unas tablas resúmenes.

6.10.1. CASO 1 (18 respuestas correctas de un total de 25)

Este cuestionario fue contestado por una alumna de 4º de E.S.O de uno de los centros que formaron la muestra, sito en el área metropolitana de la ciudad de Granada. Se trata de una estudiante con buen rendimiento académico, aunque sin especial preferencia por temas relacionados con las matemáticas.

Se trata de una alumna con un buen rendimiento y comprensión de los promedios, en el sentido de que contiene un porcentaje elevado de respuestas correctas, habiendo contestado a todas ellas:

Ítem 1. Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1.2 hijos por familia. Explícanos qué significa para ti esta frase.

Que cada familia tiene 1’2 hijos aproximadamente. Que unas familias tendrán 2 hijos, otras 1, ... supuestamente, sería la interpretación de 1’2, ya que no vas a partir a un hijo.

(Respuesta correcta)

U1.1	Que cada familia tiene 1’2 hijos aproximadamente	*Media como reparto equitativo* Definición de media como promedio Idea de representante de un conjunto
U1.2	Que unas familias tendrán 2 hijos, otras 1,	Idea de distribución Media en el rango de la variable
U1.3	supuestamente, sería la interpretación de 1’2, ya que no vas a partir a un hijo.	Media no es operación interna Media como algoritmo

U1.1-U1.2-U1.3	Representación verbal Argumentos basados en ejemplos y casos particulares

Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1.2? Justifica tu respuesta.

Dándole valores y probando:

$$\frac{4+1+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{8} = 1'2$$

(respuesta incorrecta)

U1.4	Dándole valores y probando:	Estrategia de ensayo y error Representación verbal
U1.5	$\frac{4+1+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{8} = 1'2$	Algoritmo de cálculo de la media de un conjunto de datos aislado Representación simbólica y numérica Conflicto semiótico entre el número de elementos de la muestra y el número de datos desconocidos Error en definición de media como algoritmo
U1.4-U1.5		Argumento basado en la búsqueda de un caso particular

Ítem 2. Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.

12 ÷ 10 = 1'2; Una hora con 20 minutos, aproximadamente
(respuesta incorrecta)

U2.1	12 ÷ 10 = 1'2	Cálculo incorrecto de media ponderada Error en la definición de media como algoritmo Error en la propiedad de la media de no ser asociativa (conflicto semiótico) Representación numérica
U2.2	Una hora con 20 minutos, aproximadamente	Incorrecta traducción del sistema decimal al sexagesimal (conflicto semiótico) Representación verbal

María y Pedro dedican además1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes?

$$\frac{8+3}{10} = 1'1$$

hora

(respuesta incorrecta)

U2.3	$\frac{8+3}{10} = 1'1$ hora	Cálculo incorrecto de media ponderada Error en la definición de media como algoritmo Error en la propiedad de la media de no ser asociativa (conflicto semiótico) Confusión entre número de datos y valor de la variable Representación numérica y verbal

¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades : hacer deporte y escuchar música?.

12 h + 11 h = 22h/10 = 2'2 h en otras cosas (respuesta incorrecta)

U2.4	12 h + 11 h = 22h/10 = 2'2 h en otras cosas	Definición de media como algoritmo Total suma igual a suma de totales No identifica la propiedad de la media de la suma de dos variables coincide con la suma de sus medias Representación numérica y verbal

Ítem 3. Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca?

Igual

(respuesta correcta)

¿Por qué piensas eso?

Tiene la misma, si yo le doy 5, él recibe 5. Porque si yo a un persona le doy una cantidad, esa persona tiene la cantidad que yo le he dado, y si doy un boli, la persona a la que se lo doy tiene un boli. Si le doy más se quedará con más.

U3.1	Tiene la misma	Media como reparto equitativo Idea subyacente de media como centro de gravedad
U3.2	si yo le doy 5, él recibe 5	Representación numérica Suma de desviaciones a la media es cero Argumento basado en un caso particular
U3.3	Porque si yo a una persona le doy una cantidad, esa persona tiene la cantidad que yo le he dado. Si le doy más se quedará con más.	Argumento deductivo Representación verbal Argumento deductivo
U3.4	si doy un boli, la persona a la que se lo doy tiene un boli	Representación verbal Argumento basado en un caso particular

Ítem 4. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible?

Sí

(respuesta correcta)

¿Por qué?

Porque esos números pueden ser 5: 1, 2, 3, 4, ... y haciendo los cálculos para cuadrarlos te puede salir 4.

U4.1	Si, porque esos números pueden ser 5: 1, 2, 3, 4, ...	Búsqueda de una distribución de media conocida Representación numérica y verbal Argumentos basados en casos particulares
U4.2	**haciendo los cálculos para cuadrarlos te puede salir 4.**	Algoritmo de cálculo de la media, aunque sin explicitar en qué consiste Representación verbal y numérica Media en el rango de la variable

Ítem 5

El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano?

15, 16, 17, 18, ***19****, 19, 24, 25, 26*
19 Kg
(respuesta correcta)

U5.1	15, 16, 17, 18, **19**, 19, 24, 25, 26	Ordenación de los datos Algoritmo de cálculo de la mediana de un conjunto impar de valores aislados Representación numérica
U5.2	19 Kg	Definición de mediana como valor que divide en dos partes el conjunto de datos

¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg.?

Sigue siendo 19 ya que hay otro 19 que está en medio y no varía
(respuesta correcta)

U5.3	Sigue siendo 19	Cálculo de la mediana de un conjunto par de valores aislados
U5.4	ya que hay otro 19 que está en medio y no varía	Definición de mediana como valor central Representación verbal y numérica Argumento deductivo

En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

No, porque solo hay un valor alto que nos descoloca los datos y nos varía los resultados, ya que está muy disperso el conjunto y el resultado variaría mucho y no sería buen representante
(respuesta correcta)

U5.5	No, porque solo hay un valor alto que nos descoloca los datos	Definición de media como algoritmo Cambia un valor al cambiar un dato Presencia de un valor atípico
U5.6	nos varía los resultados	En el cálculo de la media intervienen todos los

		valores Posición de los promedios en distribuciones no simétricas
U5.7	**ya que está muy disperso el conjunto y el resultado variaría mucho**	La media es menos resistente que la mediana a la presencia de valores atípicos Argumento deductivo
U5.8	**no sería buen representante**	La media es un representante de un conjunto de datos
U5.5 a U5.8		Representación verbal

Ítem 6

Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1	I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S
Grupo 2	S S I I A N A N I I S N A S I N N

¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?

El grupo 1, porque entre más personas han suspendido las mismas que en el grupo 2, que hay menos. En los 2 grupos han suspendido 5, y como el primero tiene más personas, el 1º tiene mejores notas.

(respuesta incorrecta)

U6.1	El grupo 1, porque entre más personas han suspendido las mismas que en el grupo 2, que hay menos.	No reconoce la mediana o moda como posibles representantes del conjunto de datos ordenados para tomar decisiones. Representación verbal Argumento basado en un caso particular
U6.2	En los 2 grupos han suspendido 5, y como el primero tiene más personas, el 1º tiene mejores notas.	No reconoce la mediana o moda como posibles representantes del conjunto de datos ordenados para tomar decisiones. Representación numérica Argumento basado en un caso particular

¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

La media, te da todos los datos en conjunto y puedes comparar, al sumarlos todos y dividirlos. La moda no sería un buen representante ya que, aunque haya más, existen personas más disparejas. La mediana tampoco sería fiable, tienes que comparar con los demás valores.

(respuesta incorrecta)

U6.3	La media, te da todos los datos en conjunto y puedes comparar	Definición de media como promedio La media es un representante del conjunto de datos Error porque la media no está definida
U6.4	**al sumarlos todos y dividirlos.**	Algoritmo de cálculo de la media de un conjunto de datos aislados Definición de media como algoritmo

		Argumento deductivo
U6.5	La moda no sería un buen representante	La moda es un representante del conjunto de datos
U6.6	aunque haya más, existen personas más disparejas	Definición de moda como valor más frecuente No reconoce que la moda sí es resistente a valores atípicos
U6.7	La mediana tampoco sería fiable	La mediana es representante del conjunto de datos No reconoce la utilidad de la mediana para datos ordinales
U6.8	**tienes que comparar con los demás valores.**	Error en la definición de mediana como valor central Argumento deductivo
U6.3 a U6.8		Representación verbal

Ítem 7

Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ 9 _____Juan ______ 11 ______ Pablo_______ 13 ________

(respuesta correcta)

U7.1	9 , 11 , 13	Búsqueda de una distribución de media dada Definición de media como algoritmo Representación numérica

¿Es la única posibilidad?

No

Explica cómo has obtenido tus resultados

Si la media se hace sumando los valores y dividiendo por el número de personas, en este caso 3, y te tiene que dar 11, pongamos a la suma x, por tanto x/3=11, despejas x = 11∃ 3. 33 es la suma de los valores, buscas 3 números que sumen 33 y ya está.

(respuesta correcta)

U7.2	No	Idea de distribución
U7.3	Si la media se hace sumando los valores y dividiendo por el número de personas en este caso 3,	Algoritmo de cálculo de la media de un conjunto de datos aislado Definición de media como algoritmo Representación verbal
U7.4	y te tiene que dar 11, pongamos a la suma x, por tanto x/3=11	Inversión del algoritmo de cálculo de la media
U7.5	despejas x = 11∃ 3 33 es la suma de los valores	Inversión del algoritmo de cálculo de la media
U7.6	**buscas 3 números que sumen 33 y ya está**	Búsqueda de una distribución de media dada
U7.4 a U7.6		Representaciones verbal, numérica y simbólica Argumento deductivo

Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

La media es de 8'25, porque ya no se divide por los 3 chicos, sino entre 4, y sin sumarle ningún valor, ya que lleva 0. Sería la suma de los caramelos 33/ 4 = 8'25
(respuesta correcta)

U7.7	La media es de 8'25, porque ya no se divide por los 3 chicos, sino entre 4	Definición de media como algoritmo La media cambia cuando cambia algún dato Argumento deductivo. Intervienen todos los valores
U7.8	y sin sumarle ningún valor, ya que lleva 0	La media no tiene elemento neutro.
U7.9	Sería la suma de los caramelos 33/ 4 = 8'25	Algoritmo de cálculo de la media.
U7.7 a U7.8		Representaciones verbal y numérica

Ítem 8

Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

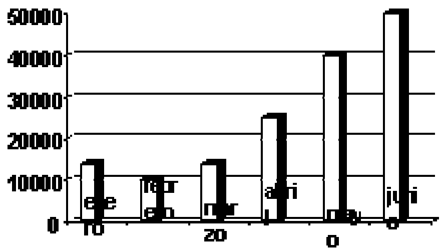
6.2 6.3 6.0 15.2 6.2 6.1 6.5 6.2 6.1 6.2

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿ Qué harías para calcularlo ?

Calcular la moda, ya que una mayoría de las personas les ha salido lo mismo, y las demás se han podido equivocar. Si no, después calcularía la media, para saber si se aleja mucho de la moda y más o menos el margen de error.
(respuesta incorrecta)

U8.1	Calcular la moda	La moda es un representante de los datos
U8.2	ya que una mayoría de las personas les ha salido lo mismo y las demás se han podido equivocar	Definición de moda como valor más frecuente Argumento deductivo
U8.3	Si no, después calcularía la media	Media como mejor estimación Definición de media como promedio La media es un representante de los datos
U8.4	para saber si se aleja mucho de la moda y más o menos el margen de error	La suma de desviaciones de los datos a su media es cero No reconoce el valor atípico (conflicto semiótico) No reconoce que la media es poco resistente (conflicto semiótico)
U8.1 a U8.4		Representación verbal

Ítem 9



Observa este diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa *bocatta* durante los últimos 6 meses del año pasado:

a) Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.

$$\frac{14000+10000+14000+25000+40000+50000}{6}=\frac{153000}{6}=25500$$

El número medio de bocadillos vendidos es de 255000, aproximadamente.
(respuesta correcta)

U9.1	$\frac{14000+10000+14000+25000+40000+50000}{6}=\frac{153000}{6}=25500$	Algoritmo de cálculo de la media. Cálculo de le media a partir de un gráfico Definición de media como algoritmo Representación numérica
U9.2	El número medio de bocadillos vendidos es de 255000, aproximadamente	Representación verbal y numérica

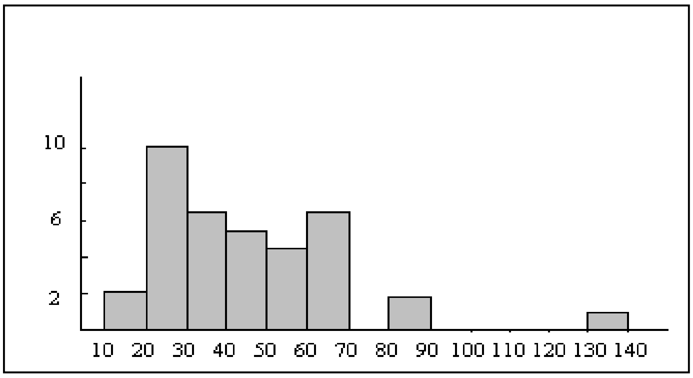
b) Da un valor aproximado de la moda del número de bocadillos que se vendieron por mes.
c) Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

La moda estaría aproximadamente en 50000 (respuesta incorrecta)
La mediana entre 15000 y 25000, aproximadamente, unos 20000 (respuesta correcta)

U9.3	La moda estaría aproximadamente en 50000	Cálculo gráfico de la moda Confusión de valor de la variable con la frecuencia (conflicto semiótico) Definición de moda como valor más frecuente
U9.4	La mediana entre 15000 y 25000, aproximadamente, unos 20000	Cálculo gráfico de la mediana Conflicto semiótico al confundir valor de la variable con la frecuencia Definición mediana como valor central
U9.3 – U9.4		Representaciones verbal y numérica

Ítem 10

Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.



Si ● No ■ Razona la respuesta

Porque gastan más alrededor de 20, 30 y 40 que alrededor de 47, ya que las barras son más altas en esos valores, por lo tanto la mayoría no estaría en 47, sino en menos dinero. La gente se concentra más.
(respuesta incorrecta)

U10.1	Porque gastan más alrededor de 20, 30 y 40 que alrededor de 47, ya que las barras son más altas en esos valores	Lectura del gráfico, aunque con errores derivados de la confusión entre gráfico de barras e histograma Argumento deductivo
U10.2	por lo tanto la mayoría no estaría en 47, sino en menos dinero.	Definición de moda como valor más frecuente Cálculo de la moda a partir de un gráfico Distinción correcta entre moda y mediana, lo que supone un conocimiento correcto de la definiciones correspondientes
U10.3	La gente se concentra más	Reconoce la presencia de valores atípicos
U10.1 a U10.3		Representación verbal

Ítem 11

Juana piensa que, en el gráfico anterior, el alto valor de 133 euros debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda.

Si ● No ■ Razona la respuesta

Porque es una parte de las personas que tienen sus gastos, en ese caso estarías manipulando los datos, escogiendo sólo una parte de las personas para que te salgan los valores más parejos.
Si se ha entrevistado a esas personas las tienes que incluir, no porque esté más alejado y no como los demás debe ser quitado, ya que existe.

(respuesta correcta)

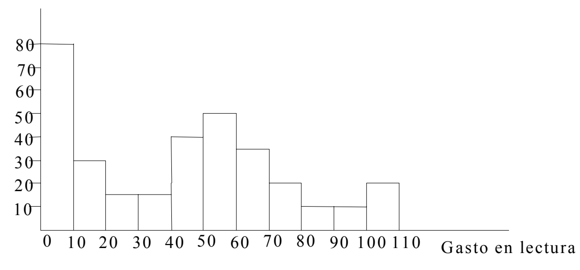
U11.1	Porque es una parte de las personas que tienen sus gastos,	Reconocimiento de la presencia de un valor atípico como parte del conjunto de datos
U11.2	en ese caso estarías manipulando los datos, escogiendo sólo una parte de las personas para que te salgan los valores más parejos.	En el cálculo de la media intervienen todos los valores, pero no tiene en cuenta que con la moda y mediana no ocurre igual. No utiliza las propiedad de ser la mediana y la moda más resistentes a la presencia de valores atípicos que la media Definiciones media, mediana y moda
U11.3	Si se ha entrevistado a esas personas las tienes que incluir, no porque esté más alejado y no como los demás debe ser quitado, ya que existe	Igual que el anterior
U11.1 a U11.3		Representación verbal Argumento basado en un caso particular

Ítem 12

Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura, en el gráfico siguiente porque la mayor parte de los estudiantes no gastaron nada o muy poco y un segundo grupo gastó entre 50 y 60 euros cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la mediana en su lugar para representar el gasto semanal "promedio" en material de lectura.

Si ■ No ● Razona la respuesta

Dinero gastado en material de lectura:



Media = 29 Euros. Mediana = 25 Euros

La mediana sería el mejor representante, ya que los valores se acercan más a ella.
Los valores por encima y por debajo están más centrados y más igualados que si coges como representante la media.
Hay una menor dispersión que con la media, hay bastantes personas que han gastado poco, por lo tanto, el representante tiene que ser menor, (25 o 29).
(respuesta correcta)

U12.1	La mediana sería el mejor representante	La mediana es un representante de un colectivo
U12.2	ya que los valores se acercan más a ella	Mediana como medida de posición central, en el sentido de que los valores se distribuyen en torno a ella
U12.3	Los valores por encima y por debajo	Definición de mediana como valor que divide a la población en dos partes iguales
U12.4	están más centrados y más igualados que si coges como representante la media.	Definición de media como algoritmo Definición de mediana como valor central Argumento deductivo
U12.5	Hay una menor dispersión que con la media,	La mediana como mejor resumen estadístico cuando la media no es suficientemente representativa La media es menos resistente
U12.6	hay bastantes personas que han gastado poco, por lo tanto, el representante tiene que ser menor, (25 o 29)	Reconoce que la distribución no es simétrica y, en ese caso, los promedios no coinciden Argumento basado en casos particulares
U12.1 a U12.6		Representación verbal

Ítem 13

Manuel dice que la distribución anterior tiene dos modas y sugiere que puedes obtener más información de estos datos si los divides en dos subgrupos y calculas el promedio en cada grupo por separado.

Si ■ No ● Razona la respuesta

Al estudiarlos por separado, detallas más y te fijas más en cada uno, no todo en conjunto, que así los datos pueden ser menos fiables o exactos.
Puede haber, o hay, dos modas, ya que el grupo de personas está dividido en dos, uno que no gasta y otro que gasta, y las cantidades de personas son más o menos similare.s

(respuesta correcta)

U13.1	Al estudiarlos por separado, detallas más y te fijas más en cada uno, no todo en conjunto, que así los datos pueden ser menos fiables o exactos.	Reconoce que en la distribución hay dos poblaciones mezcladas
U13.2	Puede haber, o hay, dos modas,	Definición de moda como valor más frecuente La moda puede no ser única
U13.3	ya que el grupo de personas está dividido en dos, uno que no gasta y otro que gasta,	Cálculo de las modas a partir del gráfico Argumento deductivo
U13.4	y las cantidades de personas son más o menos similares	Utiliza el tamaño de los dos grupos como criterio para validar su reparto, lo que no tiene justificación estadística
U13.1 a U13.4		Representación verbal

Ítem 14

Lola sugiere hacer el estudio en pesetas. ¿Cuál sería en ese caso el valor de la media?

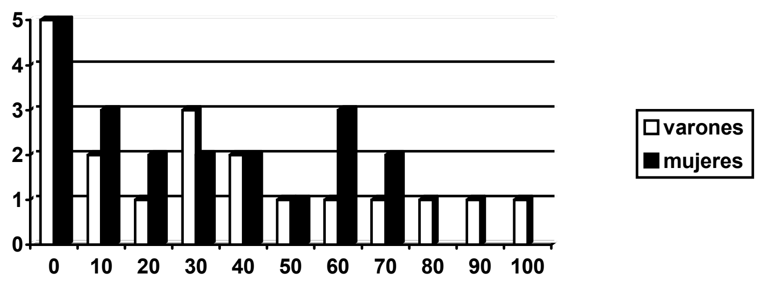
Si ● No ● Razona la respuesta

Media = 29 €
Media = 29 . 166’386 = 4825 pesetas
(respuesta correcta)

U14.1	Media = 29 . 166’386 = 4825 pesetas	El cálculo de la media conserva el cambio de escala Representación numérica

Ítem 15

Antonio cree que sus gráficos muestran que los varones y mujeres tienden a gastar diferentes cantidades de dinero en material de lectura.



Gasto en material de lectura

Si ■ No ● Razona la respuesta

Porque las gráficas nos muestran cómo, por ejemplo, a mayor cantidad de dinero, los hombres gastan más, y las mujeres nada. Hay diferencia también en los valores intermedios, ya que las mujeres gastan mucho más que los hombres (60, 70). Las barras están disparejas, por lo tanto, hay diferencia.
(respuesta correcta)

U15.1	Porque las gráficas nos muestran cómo, por ejemplo, a mayor cantidad de dinero, los hombres gastan más, y las mujeres nada.	Lectura correcta de los gráficos Distribución de datos. Identificación de valores y frecuencia No identifica promedios (media, mediana y moda en gráficos)
U15.2	Hay diferencia también en los valores intermedios, ya que las mujeres gastan mucho más que los hombres (60, 70).	Lectura comparativa de los dos gráficos basada en casos particulares de los datos
U15.3	**Las barras están disparejas, por lo tanto, hay diferencia.**	Lectura global comparativa de los dos gráficos (argumento deductivo)
U15.1 a U15.3		Representación verbal

En definitiva, en la tabla 6.10.1, presentamos un resumen de los elementos empleados por esta alumna, en la que destaca un fuerte predominio de uso correcto en todas sus categorías.

Hemos identificado también los siguientes conflictos semióticos en su trabajo:

Caso 1

- Confusión entre el valor N (número de datos en la muestra), que aparece en el denominador del algoritmo de cálculo de la media, y el número de valores desconocidos de dichos datos (número de incógnitas en el problema). (ítem 1b)
- Confusión entre los sistemas sexagesimal y decimal de numeración. (ítem 2a) Generalización incorrecta de la propiedad asociativa de la media. (ítems 2a y 2b)
- Confusión entre el número de datos N y el valor de la media de un subgrupo de datos. (ítems 2b y 2c)
- No reconoce la comparación de dos conjuntos de datos como campo de problemas de los promedios. (ítem 6)
- Supone definida la media en un conjunto de datos ordinales, no discrimina datos ordinales y numéricos. (ítem 6)
- No reconoce que la moda es resistente a los casos atípicos. (ítem 6)
- No reconoce un valor atípico ni su efecto sobre la media. (ítems 7 y 9)
- Confusión entre valor de la variable y frecuencia. (ítem 9)

6.10.2. CASO 2 (8 respuestas correctas de un total de 25).

Este cuestionario fue contestado por un alumno de 4º de E.S.O del mismo centro que la chica del caso 1. Se trataba de un estudiante con un rendimiento académico suficiente, que afirmaba cierto interés por las matemáticas y con la creencia de ser relativamente bueno en este tipo de razonamientos.

Es un cuestionario que contiene un porcentaje bastante bajo de respuestas correctas, a pesar de haber contestado a todas ellas y, con un número importante de errores.

Ítem 1

Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1.2 hijos por familia. Explícanos qué significa para ti esta frase.

> Que han sumado el número de nacimientos de Andalucía y lo han dividido entre el número de familias. Sale 1'2, aunque no sea una respuesta muy razonable porque no se puede tener 1 hijo y 2 décimas partes de otro.
> (respuesta correcta)

U1.1	Que han sumado el número de nacimientos de Andalucía y lo han dividido entre el número de familias.	Algoritmo de cálculo de la media de un conjunto de datos aislados Definición de media como algoritmo
U1.2	**Sale 1'2, aunque no sea una respuesta muy razonable porque no se puede tener 1 hijo y 2 décimas partes de otro.**	Propiedad de la media de no ser operación interna
U1.2-U1.3		Representaciones verbal y numérica

Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1.2? ? Justifica tu respuesta.

No llegarían a tener las otras familias ni un hijo y yo creo que eso no es muy normal
(respuesta incorrecta)

U1.4	No llegarían a tener las otras familias ni un hijo	Inversión, aunque no explícita, del algoritmo de cálculo de la media Error en media en el rango
U1.5	y yo creo que eso no es muy normal	Error en la búsqueda de una distribución de media dada
U1.4-U1.5		Representación verbal

Ítem 2

Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.

$2 \times 8 = 16$ horas de media entre María y Pedro
$8 \times 4 = 32$ horas los demás. 48 horas de media el fin de semana
(respuesta incorrecta)

U2.1	**$2 \times 8 = 16$ horas de media entre María y Pedro** $8 \times 4 = 32$ horas los demás.	Ponderación correcta de los distintos valores de la variable para el cálculo de la media
U2.2	48 horas de media el fin de semana	Error en el algoritmo de cálculo de la media ponderada Confusión media-total
U2.1-U2.2		Representaciones verbal y numérica

María y Pedro dedican además1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes?

2 horas María y Pedro
$8 \times 3 = 24$ horas los demás alumnos. 26 horas de media escuchan música
(respuesta incorrecta)

U2.3	2 horas María y Pedro $8 \times 3 = 24$ horas los demás alumnos.	Ponderación correcta de los distintos valores de la variable para el cálculo de la media
U2.4	26 horas de media escuchan música	Error en el algoritmo de cálculo de la media ponderada Confusión media-total
U2.3-U2.4		Representaciones verbal y numérica

¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades : hacer deporte y escuchar música?.

48 + 26 = 74 horas de media entre hacer deporte y escuchar música
(respuesta incorrecta)

U2.5	48 + 26 = 74 horas de media entre hacer deporte y escuchar música	Propiedad de la media de que la media de la suma de los variables es la suma de las medias de dichas variables Representaciones verbal y numérica

Ítem 3
Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca?

Menor
(respuesta incorrecta)

¿Por qué piensas eso?

Porque si querían hacer pizzas del mismo tamaño y que alimenten bien traerían bastante, lo que pasa es que algunos tenían un poco más y se lo dieron al que traía menos.

U3.1	Menor,	Error en la propiedad de la media de ser el centro de gravedad de una distribución
U3.2	porque si querían hacer pizzas del mismo tamaño y que alimenten bien traerían bastante, lo que pasa es que algunos tenían un poco más y se lo dieron al que traía menos.	Subyace la idea de que la suma de las desviaciones de los valores a su media es cero. Argumentación basada en casos particulares
U3.1-U3.2		Representación verbal

Ítem 4
Tenemos **seis números** y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por **seis**. El resultado es 4. ¿Te parece posible?
¿Por qué?

Sí, porque si fueran los valores 5, 5, 5, 5, 2, 2, al sumarlo y dividirlo entre seis, da 4.
(respuesta correcta)

U4.1	Sí, porque si fueran los valores 5, 5, 5, 5, 2, 2	Buscar una distribución de media dada Media en el rango
U4.2	al sumarlo y dividirlo entre seis, da 4.	Algoritmo de cálculo de la media de un conjunto de datos aislados

Ítem 5
El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano?

15, 25, 17, 19, **16**, 26, 18, 19, 24
Es 16 kilos
(respuesta incorrecta)

U5.1	15, 25, 17, 19, **16**, 26, 18, 19, 24	Error en el algoritmo de cálculo de la mediana de un conjunto impar de datos aislados
U5.2	Es 16 kilos	Error en definición de mediana como valor central, puesto que no tiene en cuenta la necesidad de que los datos estén ordenados
U5.1-U5.2		Representación numérica

¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg.?

La mediana estaría entre el niño que pesa 16 kilos y 26 kilos
(respuesta incorrecta)

U5.3	La mediana estaría entre el niño que pesa 16 kilos y 26 kilos	Error en el algoritmo de cálculo de la mediana de un conjunto par de datos aislados Error en definición de media como valor central Representación numérica

En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

Sí, porque al hacerla te sale un valor comprendido entre 16 y 26
(respuesta incorrecta)

U5.4	Sí, porque al hacerla te sale un valor comprendido entre 16 y 26	Error en la definición de media como algoritmo Error en la propiedad de que la media es menos resistente que la mediana a la presencia de valores atípicos Error en la propiedad de los promedios de coincidir sólo en distribuciones simétricas Representación verbal y numérica Argumento basado en un caso particular

Ítem 6
Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1	I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S
Grupo 2	S S I I A N A N I I S N A S I N N

¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?

Yo creo que los dos igual, porque tienen el mismo número de insuficientes
(respuesta incorrecta)

U6.1	Yo creo que los dos igual, porque tienen el mismo número de insuficientes	No identifica campos de problemas Error al no utilizar los promedios como representantes de conjuntos de datos para tomar decisiones Argumento basado en un caso particular Representación verbal

¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

Yo creo que sería la media
(respuesta incorrecta)

U6.2	Yo creo que sería la media	Definición de media como promedio Error al no reconocer la mediana como mejor representante para variables ordinales Error al considerar que existe media de variables ordinales Representación verbal

Ítem 7

Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ 11 _____ Juan ______ 11 ______ Pablo_______ 11 ________
(respuesta correcta)

U7.1	11, 11, 11	Media como mejor valor más probable al elegir un elemento de una población Da una distribución uniforme Representación numérica

¿Es la única posibilidad?

No, hay más posibilidades
(respuesta correcta)

Explica cómo has obtenido tus resultados

$\frac{11+11+11}{3} = \frac{33}{3} = 11$ (respuesta correcta)

U7.2	No, hay más posibilidades	Media como representante de un conjunto de datos, sin tener que ser uno de ellos
U7.3	$\frac{11+11+11}{3} = \frac{33}{3} = 11$	Algoritmo de cálculo de la media de un conjunto de datos aislados Definición de media como algoritmo Representación numérica

Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

$\frac{11+11+11+0}{4} = \frac{33}{4} = 8{,}25$ es la media por persona ahora

(respuesta correcta)

U7.4	$\frac{11+11+11+0}{4} = \frac{33}{4} = 8{,}25$	Definición de media como algoritmo Representación numérica La media no tiene elemento neutro Intervienen todos los valores
U7.8	es la media por persona ahora	La media cambia al cambiar un dato

Ítem 8

Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2 6.3 6.0 15.2 6.2 6.1 6.5 6.2 6.1 6.2

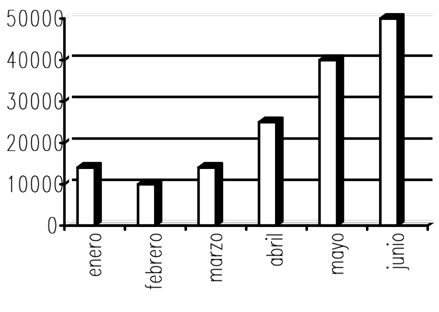
Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿ Qué harías para calcularlo ?

Hacer la media de todos estos valores

(respuesta (respuesta incorrecta)

U8.1	Hacer la media de todos estos valores	Media como mejor estimación de una medida en presencia de errores No reconoce el valor atípico Representación verbal

Ítem 9



Observa este diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa *bocatta* durante los últimos 6 meses del año pasado:

a) Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.

La media es 20500

(respuesta correcta)

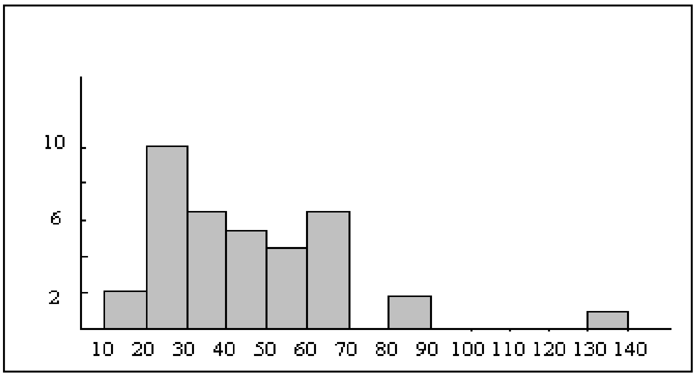
U9.1	La media es 20500	Cálculo de la media a partir de un gráfico Definición de media como promedio Representación numérica

b) Da un valor aproximado de la moda del número de bocadillos que se vendieron por mes.
c) Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

Moda: 50000 (respuesta incorrecta)
Mediana: 25000 (respuesta incorrecta)

U9.2	Moda: 50000	Cálculo de la moda a partir de un gráfico Definición de moda como valor más frecuente Error al confundir frecuencia con variable Representación numérica
U9.3	Mediana: 25000	Error en el cálculo de la mediana a partir de un gráfico Confunde frecuencia y valor de la variable Definición de mediana como valor central Representación numérica

Ítem 10
Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.



Si ● No ■ Razona la respuesta

Porque la mediana sería entre 70 y 80 euros y no hay ningún alumno que gaste ese dinero (respuesta incorrecta)

U10.1	No, porque la mediana sería entre 70 y 80 euros	Error en el cálculo de la mediana a partir de un gráfico Error en la definición de mediana como valor central, puesto que el intervalo 70-80 es el centro del recorrido, pero no de la distribución Error en la definición de moda como valor más frecuente
U10.2	y no hay ningún alumno que gaste	Error en la propiedad de la mediana de no tener que

	ese dinero	coincidir con un valor de la variable Argumento basado en casos particulares
U10.1-U10.2		Representación verbal y numérica

Ítem 11

Juana piensa que, en el gráfico anterior, el alto valor de 133 euros debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda.

Si ● No ■ Razona la respuesta

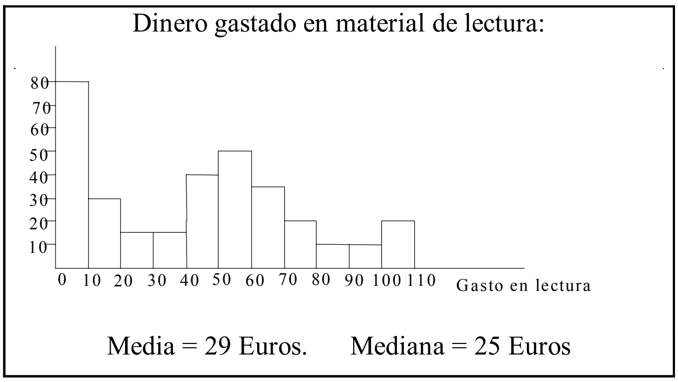
Porque si han realizado un estudio, puede haber respuestas de toda clase y debe aparecer, porque por ejemplo no todos gastan lo mismo

(respuesta incorrecta)

U11.1	Porque si han realizado un estudio, puede haber respuestas de toda clase y debe aparecer	En el cálculo de la media y moda intervienen todos los valores, pero en la mediana no Error en la propiedad de la media de no ser resistente a valores atípicos
U11.2	porque por ejemplo no todos gastan lo mismo	Argumento basado en casos particulares
U11.1-U11.2		Representación verbal

Ítem 12

Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura, en el gráfico siguiente porque la mayor parte de los estudiantes no gastaron nada o muy poco y un segundo grupo gastó entre 50 y 60 euros cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la mediana en su lugar para representar el gasto



semanal “promedio” en material de lectura.

Si ● No ■ Razona la respuesta

No, porque si no utiliza la media no le sale el gasto semanal promedio

(respuesta incorrecta)

U12.1	No, porque si no utiliza la media no le sale el gasto semanal promedio	Error al no reconocer que la mediana es también un promedio que se puede usar como representante en distribuciones en las que la media no es muy adecuada Representación verbal

Ítem 13

Manuel dice que la distribución anterior tiene dos modas y sugiere que puedes obtener más información de estos datos si los divides en dos subgrupos y calculas el promedio en cada grupo por separado.

Si ● No ■ Razona la respuesta

Sólo puede haber una moda, que es la que más se repite
(respuesta incorrecta)

U13.1	No, sólo puede haber una moda	No reconoce dos distribuciones mezcladas Error en la propiedad de la moda de no ser única
U13.2	que es la que más se repite	Definición de moda como valor más frecuente
U13.1-U13.2		Representación verbal

1. Lola sugiere hacer el estudio en pesetas. ¿Cuál sería en ese caso el valor de la media?

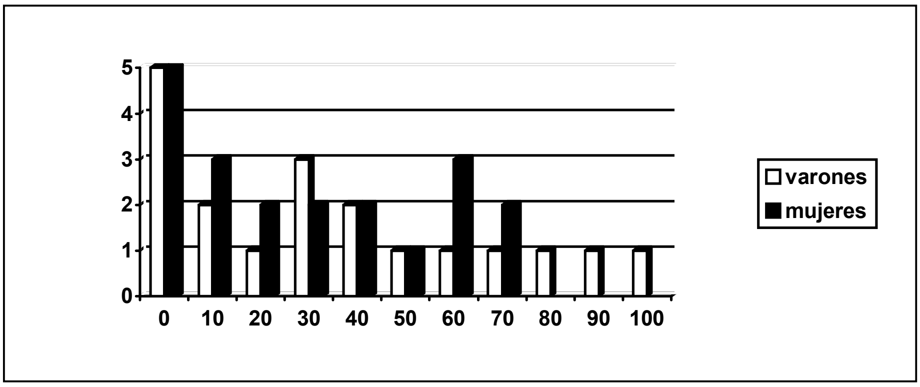
Si ● No ● Razona la respuesta

El valor de la media sería 4285 Ptas. que es igual que 29 euros
(respuesta correcta)

U14.1	El valor de la media sería 4285 Ptas. que es igual que 29 euros	Propiedad de la media de conservar cambios de escala en la variable Representación verbal y numérica

Ítem 15

Antonio cree que sus gráficos muestran que los varones y mujeres tienden a gastar diferentes cantidades de dinero en material de lectura.



Si ■ No ● Razona la respuesta

Porque hay barras que no están al mismo nivel

(respuesta incorrecta)

U15.1	Sí, porque hay barras que no están al mismo nivel	Error al no utilizar los promedios como resumen estadístico que nos permite comparar conjuntos de datos Interpretación correcta de los gráficos Representación verbal Argumento basados en casos particulares

Los datos obtenidos del análisis semiótico de este alumno se resumen, también, en la tabla 6.10.1. Hemos identificado, además, los siguientes conflictos semióticos:

Caso 2

- Considerar la media fuera del rango de la variable (ítem 1b)
- Error en la búsqueda de una distribución que se ajuste a los datos (ítem 1b)
- Confusión de la media con el total (ítem 2)
- No percibir la media como centro de gravedad (ítem 3)
- No ordenar los datos en el cálculo de la mediana (ítem 5)
- No recordar el algoritmo de cálculo de la media (ítems 5 y 10)
- No identificar la comparación de campos de problemas de los promedios (ítem 7)
- No ser consciente de la imposibilidad de calcular la media en un conjunto de datos ordinales (ítem 6)
- No identificar un valor atípico, ni ser consciente de su efecto sobre la media (ítem 8)
- Confundir frecuencia y valor de la variable (ítem 9)
- Error en la definición de moda como valor más frecuente (ítem 10)
- Creer que la mediana ha de ser uno de los datos (ítem 10)
- No identificar la mediana como promedio (ítem 12) que es una confusión terminológica
- No reconocer la posibilidad de más de una moda.

Al comparar todos los elementos usados por los dos alumnos de 4º curso, observamos una abrumadora diferencia en cantidad y variedad de elementos de significado usados por la alumna con mayor proporción de respuestas correctas, en lo que se refiere a comprensión conceptual, procedimental y argumentativa. No así en la identificación de campos de problemas y representaciones, en las que los dos estudiante están muy igualados.

En la comprensión procedimental, apenas aparecen errores en la primera alumna, quien muestra competencia en el cálculo de la media, mediana y moda y cálculo gráfico, así como en la búsqueda de una distribución, frente a su compañero. Incluso usa correctamente el ensayo y error.

En la comprensión conceptual, usa con mucha más frecuencia las definiciones correctas de mediana y usa una o varias veces de forma correcta prácticamente todas las propiedades, mientras que su compañero tiene errores en este aspecto.

Finalmente, sólo la primera llega a usar con frecuencia argumentos de tipo deductivo, lo que supone una mayor comprensión del tema que nos ocupa.

Tabla 6.10.1

	CASO 1 (18 correctas)		*CASO 2 (8 correctas)*	
	Correctos	**Incorrectos**	**Correctos**	**Incorrectos**
Campos de problemas				
Media como mejor estimación	1		1	
Media como reparto equitativo	2			
Media como valor probable			1	
Mediana como representante	1	1		1
Representante de datos ordinales				1
Mediana para comparar conjuntos		1		1
Moda como valor más frecuente				
Representaciones				
Verbales	17		16	
Simbólicas	2			
Gráfica				
Numéricas	17		15	
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media d. aislados	6		3	
Cálculo media ponderada		1		2
Cálculo gráfico media	2		1	
Invertir algoritmo media	1		1	
Buscar distribución dada media	3		1	2
Calculo mediana d.aislados impar	1			1
Calculo mediana d.aislados par	1			1
Cálculo gráfico mediana	1			2
Calculo moda d. aislados				
Cálculo gráfico moda	4		1	1
Ensayo y error	1			
Definiciones y propiedades				
Definición de media como algoritmo	9	4	3	3
Definición de media como promedio	2	1	1	
Definición mediana (central)	4	1		3
Definición mediana (dos partes)	3		1	
Definición moda (más frecuente)	7		2	1
Valor en el rango	2		1	2
Intervienen todos los valores	3	1	1	
Cambia valor al cambiar el dato	2		1	
Operación interna	1		1	1
Elemento neutro	1		1	
No asociativa		2		
Cambios origen y escala	1		1	
Media suma	1		1	
Moda no siempre única	1			1
Moda siempre definida, media no	1			1
Representante	8	2	1	3
Centro de gravedad	1			1
Posición d. Simétricas	2			1
Media poco resistente	2	3	1	3
Suma desviaciones	2			
Representante para d. bimodal				
Argumentos				
Casos particulares y contraejemplos	8		6	
Deductivos	13			

6.10.3. CASO 3 (11 respuestas correctas de un total de 17)

Este cuestionario fue contestado por un alumno de 1º de E.S.O. Se trataba de un estudiante con un buen rendimiento académico, al que le gustan las matemáticas y con la creencia de ser bueno en este tipo de razonamientos.

El cuestionario que contiene un porcentaje bastante alto de respuestas correctas y pocos errores, a pesar de que son pocos aún los conocimientos que los alumnos de este curso (1º) han recibido a través de una enseñanza formal, en la Educación Primaria.

Ítem 1

Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1.2 hijos por familia. Explícanos qué significa para ti esta frase.

> Que hallando la media de hijos de las familias andaluzas hay en cada familia más de un hijo y menos de dos
> (respuesta correcta)

U1.1	Que hallando la media de hijos de las familias andaluzas	Definición de media como algoritmo La media es un representante de un colectivo
U1.2	hay en cada familia más de un hijo y menos de dos	Error en la propiedad de la media de no ser siempre uno de los valores de los datos, o la de no ser operación interna No es capaz de hallar una distribución Media como valor probable
U1.3		Representación verbal

Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1.2? ? Justifica tu respuesta.

> Entre las otras familias tendrían que tener 7 hijos.
> Hay que sumar los hijos de las otras familias que se saben sus hijos (4 y 1), te da 5. Son diez familias, el número total de hijos debe ser doce para que al dividirlo por diez te de 1,2
> (respuesta correcta)

U1.4	Entre las otras familias tendrían que tener 7 hijos.	Inversión del algoritmo de la media
U1.5	Hay que sumar los hijos de las otras familias que se saben sus hijos (4 y 1), te da 5. Son diez familias, el número total de hijos debe ser doce para que al dividirlo por diez te de 1,2	Definición de media como algoritmo No llega a dar una distribución Argumentación de tipo deductivo Representaciones verbal y numérica

Ítem 2

Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.

8 ∃ 2 = 16
4 ∃ 8 = 32
16 + 32 = 48
48 + 10 = 4,8 horas
(respuesta correcta)

U2.1	8 ∃ 2 = 16 4 ∃ 8 = 32 16 + 32 = 48 48 + 10 = 4,8 horas	Cálculo correcto de la media ponderada La media no es asociativa Representación numérica

María y Pedro dedican además1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes?

1 ∃ 2 = 2
3 ∃ 8 = 24
24 + 2 = 28
28 + 10 = 2,8 horas
(respuesta correcta)

U2.2	1 ∃ 2 = 2 3 ∃ 8 = 24 24 + 2 = 28 28 + 10 = 2,8 horas	Cálculo correcto de la media ponderada Representación numérica

¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades : hacer deporte y escuchar música?.

Serían 2,8 + 4,8 = 7,6 horas de deporte y música
(respuesta correcta)

U2.3	Serían 2,8 + 4,8 = 7,6 horas de deporte y música	La media de la suma de dos variables coincide con la suma de sus medias. Representaciones numérica y verbal

Ítem 3

Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca?

Igual
(respuesta correcta)

¿Por qué piensas eso?

Porque si querían hacer las pizzas iguales deberían usar la misma masa

U3.1	Igual, porque si querían hacer las pizzas iguales deberían usar la misma masa	Media como reparto equitativo Suma de desviaciones a la media Representación verbal

Ítem 4

Tenemos **seis números** y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por **seis**. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

Si, porque si sumas 5 + x + x + x + x + x te tiene que dar 24 para que al dividirlo entre 6 te de 4.
Por ejemplo 5 + 5 + 5 + 5 + 2 + 2 = 24
24 + 6 = 4
(respuesta correcta)

U4.1	Si, porque si sumas 5+x+x+x+x+x te tiene que dar 24 para que al dividirlo entre 6 te de 4.	Inversión del algoritmo de cálculo de la media Representaciones verbal, numérica y simbólica Argumento deductivo
U4.2	**Por ejemplo 5 + 5 + 5 + 5 + 2 + 2 = 24**	Busca una distribución de media dada
U4.3	**24 + 6 = 4**	Cálculo de la media de un conjunto de datos aislado

Ítem 5

El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano?

No sé que es la mediana
(respuesta incorrecta)

¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg.?

No sé
(respuesta incorrecta)

En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

No sé
(respuesta incorrecta)

Ítem 7

Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ 30 _____ Juan ______ 2 ______ Pablo_______ 1 ________
(respuesta correcta)

U7.1	30, 2, 1	Búsqueda de una distribución de media dada Definición de media como algoritmo Media como reparto equitativo Representación numérica

¿Es la única posibilidad?

No

Explica cómo has obtenido tus resultados

Si la media son 11 caramelos y son tres personas, el total de caramelos son 33. Tienes que hallar tres números que al sumarlos de 33
(respuesta correcta)

U7.2	No	Idea de distribución Diferentes distribuciones tienen igual media
U7.3	Si la media son 11 caramelos y son tres personas, el total de caramelos son 33. Tienes que hallar tres números que al sumarlos dé 33	Inversión del algoritmo de cálculo de la media Representación verbal y numérica Argumento deductivo

Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

La media es 8,25. Si ahora son cuatro, habría que dividir 33 (que es el número total de caramelos) entre cuatro personas.
33 + 4 = 8,25
(respuesta correcta)

U7.4	La media es 8,25	La media cambia cuando cambia algún dato Representación verbal y numérica
U7.5	Si ahora son cuatro, habría que dividir 33 (que es el número total de caramelos) entre cuatro personas.	Media como algoritmo Inversión del algoritmo de cálculo de la media La media no tiene elemento neutro Representación verbal y numérica Argumento basado en casos particulares
U7.6	33 + 4 = 8,25	Cálculo de la media de un conjunto de datos aislados Representación numérica

Ítem 8

Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2 6.3 6.0 15.2 6.2 6.1 6.5 6.2 6.1 6.2

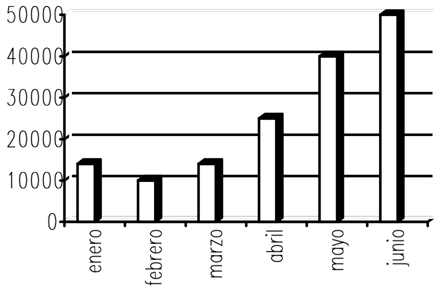
Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿ Qué harías para calcularlo ?

Hallar la media de todos los pesos obtenidos:
6,2 + 6,3 + 6,0 + 15,2 + 6,2 + 6,1 + 6,5 + 6,2 +6,1 + 6,2 = 71
71 + 10 = 7,1
(respuesta incorrecta)

U8.1	Hallar la media de todos los pesos obtenidos:	La media como mejor estimación de un conjunto de medias en presencia de errores No detecta valor atípico No reconoce que la media es poco resistente Representación verbal
U8.2	6,2 + 6,3 + 6,0 + 15,2 + 6,2 + 6,1 + 6,5 + 6,2 +6,1 + 6,2 = 71 71 + 10 = 7,1	Cálculo de la media de un conjunto de datos aislados Definición de media como algoritmo

		Representación numérica

Ítem 9



Observa este diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa *bocatta* durante los últimos 6 meses del año pasado:

a) Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.

13000 + 10000 + 13000 + 25000 + 40000 + 50000 = 151000
151000 + 6 = 25166,6
Al mes se venden 225166 bocadillos (se suman todos los datos y se dividen por seis)
(respuesta correcta)

U9.1	13000+10000+13000+25000+40000+50000=151000 151000 + 6 = 25166,6	Cálculo de la media de un conjunto de datos aislados Cálculo de media a partir de un gráfico Definición de media como algoritmo Lectura correcta del gráfico Representación numérica
U9.2	Al mes se venden 225166 bocadillos (se suman todos los datos y se dividen por seis)	Representación verbal

b) Da un valor aproximado de la moda del número de bocadillos que se vendieron por mes.
c) Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

La moda es el mes de junio porque es el mes en que más bocadillos se venden
La mediana no sé lo que es
(respuesta incorrecta)

U9.3	La moda es el mes de junio porque es el mes en que más bocadillos se venden	Cálculo de la moda a partir de un gráfico Definición de moda como valor más frecuente de la variable Confusión del valor de la variable y etiqueta del caso Representación verbal
U9.4	La mediana no sé lo que es	No conoce la definición de mediana

Este alumno muestra los siguientes conflictos semióticos:

Caso 3

- No percibe que la media no es una operación interna (ítems 1a, 1b)
- No es capaz de hallar una distribución de media dada (ítems 1a, 1b)
- No detecta valor atípico (ítem 8)
- No es consciente de que la media es poco resistente a los valores atípicos (ítem 8)
- No conoce lo que es la mediana ni es capaz de dar un significado intuitivo coloquial al término (ítem 5)
- Confunde el valor de la variable y la etiqueta del caso en el ítem 9c, lo que implica que no es capaz de hacer una lectura a nivel literal del gráfico.

6.10.4. CASO 4 (3 respuestas correctas de un total de 17)

Este cuestionario fue contestado por un alumno de 1º de E.S.O. Se trata de un estudiante con un rendimiento académico intermedio, ni excesivamente bueno, ni demasiado bajo.

El cuestionario que presenta contiene un porcentaje bajo de respuestas correctas y bastantes errores.

Ítem 1

Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1.2 hijos por familia. Explícanos qué significa para ti esta frase.

Que el número de hijos de Andalucía por familia más habitual se sitúa entre 1 y 2 hijos
(respuesta incorrecta)

U1.1	Que el número de hijos de Andalucía por familia más habitual	Confunde media con moda, lo que supone un error en las definiciones de ambas No percibe la media como reparto equitativo
U1.2	se sitúa entre 1 y 2 hijos	No es capaz de dar una distribución dada la media
U1.1-U1.2		Representaciones verbal y numérica

Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1.2? Justifica tu respuesta.

4 + 1 = 5 1,2 % 10 = 12 12 – 7 = 5
Familia 1 Familia 2
Familia 0 Familia 1
Familia 0 Familia 2
Familia 1 Familia 0
(respuesta correcta)

U1.3	4 + 1 = 5 1,2 % 10 = 12 12 – 7 = 5	Inversión del algoritmo de la media Definición de media como algoritmo Representación numérica
U1.4	Familia 1 Familia 2 Familia 0 Familia 1 Familia 0 Familia 2 Familia 1 Familia 0	Búsqueda de una distribución de media dada Representación verbal y numérica

Ítem 2

Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?

10 estudiantes → 12 horas
12 horas + 10 = 1,2 horas
1,2 horas es la media de horas que hacen deporte los estudiantes cada día
(respuesta incorrecta)

U2.1	10 estudiantes 12 horas	Error en la propiedad de la media de no ser asociativa
U2.2	12 horas + 10 = 1,2 horas **1,2 horas es la media de horas que hacen deporte los estudiantes cada día**	Cálculo incorrecto de media ponderada
U2.1-U2.2		Representación verbal y numérica

María y Pedro dedican además1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes?

10 estudiantes → 4 horas de música
4 + 10 = 0,4
0,4 horas dedica cada estudiante a escuchar música
(respuesta incorrecta)

U2.3	10 estudiantes 4 horas de música	Error en la propiedad de la media de no ser asociativa
U2.4	4 + 10 = 0,4 0,4 horas dedica cada estudiante a escuchar música	Cálculo incorrecto de media ponderada
U2.3-U2.4		Representación verbal y numérica

¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades : hacer deporte y escuchar música?.

10 estudiantes 16 horas de actividades libres
16 + 10 = 1,6 horas son las que dedican los estudiantes para las actividades cada fin de semana
(respuesta incorrecta)

U2.5	10 estudiantes 1 6 horas de actividades libres	Error en la propiedad de la media de no ser asociativa
U2.6	16 + 10 = 1,6 horas son las que dedican los estudiantes para las actividades cada fin de semana	Cálculo incorrecto de media ponderada
Representación verbal y numérica		Representación verbal y numérica

Ítem 3
Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca?
¿Por qué piensas eso?

> Igual, porque la regalada es igual a la recibida
> (respuesta correcta)

U3.1	Igual	Media como reparto equitativo Idea subyacente de media como centro de gravedad
U3.2	porque la regalada es igual a la recibida	La suma de desviaciones de un conjunto de datos a su media es cero

Ítem 4
Tenemos **seis números** y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por **seis**. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

> Sí, porque buscando un múltiplo de 4 y de 6 que se puedan obtener con la suma de números menores que cinco (inclusive éste) ya tendrás un resultado
> (respuesta incorrecta)

U4.1	Sí, porque buscando un múltiplo de 4 y de 6 que se puedan obtener con la suma de números menores que cinco (inclusive éste) ya tendrás un resultado	Error en la inversión del algoritmo de cálculo de la media de un conjunto de datos aislados Error en la búsqueda de una distribución dada la media Argumento basado en casos particulares Representación verbal y numérica

Ítem 5
El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano?

> 17, porque haciendo la media puedes tener una aproximación
> (respuesta incorrecta)

U5.1	17	Error en el cálculo de la mediana de un conjunto impar de datos aislados Error en el cálculo de la media
U5.2	porque haciendo la media puedes tener una aproximación	Error en las definiciones de media y mediana, al confundir ambas No percibe la media como operación no interna

¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg.?

> Quizás sería 19, porque haciendo la media te sale 20,18 y como no hay ningún peso que se acerque más que 19, creo que sería 19.

(respuesta incorrecta)

U5.3	Quizás sería 19	Error en el cálculo de la mediana de un conjunto par de valores aislados, aunque el resultado coincida con el correcto
U5.4	porque haciendo la media te sale 20,18	Confunde media con mediana, lo que supone un error en las definiciones
U5.5	y como no hay ningún peso que se acerque más que 19, creo que sería 19.	Error en la propiedad de la media de no ser operación interna
U5.3-U5.4		Argumento basado en casos particulares Representaciones verbal y numérica

En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

Sí, porque puedes tener una aproximación de cómo son los niños de esa familia

U5.6	Sí	Error derivado de no considerar la mediana como representante más adecuado que la media cuando la distribución no es simétrica Error al no reconocer que la mediana es más resistente que la media a los valores atípicos
U5.7	porque puedes tener una aproximación de cómo son los niños de esa familia	Los promedios son representantes de un colectivo Representación verbal

Ítem 7

Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva un cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _____ 12 _____ Juan ______ 15 ______ Pablo_______ 16 ________

(respuesta incorrecta)

U7.1	12, 15, 16	Búsqueda errónea de una distribución de media dada Error en el cálculo de media de datos aislados No percibe la media en el rango Representación numérica

¿Es la única posibilidad?

No, ya que es un resultado aleatorio

Explica cómo has obtenido tus resultados

Pensando en la tabla de números aleatorios y empezando desde un punto cualquiera, 3 número distintos que haciendo la media entre los 3 niños de 11.

(respuesta incorrecta)

U7.2	No, ya que es un resultado aleatorio	Idea de distribución
U7.3	Pensando en la tabla de números	Argumento no relacionado con el tema que nos

	aleatorios y empezando desde un punto cualquiera	ocupa. Posiblemente sea un conflicto semiótico en la comprensión del concepto de aleatoriedad
U7.4	que haciendo la media entre los 3 niños dé 11	Inversión errónea del algoritmo de cálculo de la media, aunque no explicite cómo hacerlo
U7.2-U7.4		Representaciones verbal y numérica

Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

8,25 caramelos, ya que como no ha llevado ninguno, ha de ser menor la media que la anterior
(respuesta correcta)

U7.5	8,25 caramelos	La media cambia al cambiar un dato Cálculo de la media de un conjunto de datos aislados Representación numérica
U7.7	ya que como no ha llevado ninguno	La media no tiene elemento neutro
U7.8	ha de ser menor la media que la anterior	La media cambia al cambiar un dato Argumento deductivo
U7.7- U7.8		Representación verbal

Ítem 8

Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2 6.3 6.0 15.2 6.2 6.1 6.5 6.2 6.1 6.2

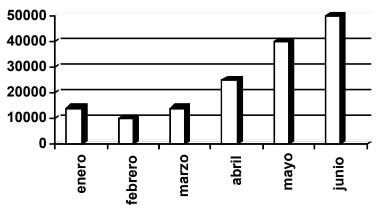
Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿ Qué harías para calcularlo ?

Haría la media aritmética
(respuesta incorrecta)

U8.1	Haría la media aritmética	La media como mejor estimación de un conjunto de medidas en presencia de errores No detecta el valor atípico ni su efecto sobre la media Representación verbal

Ítem 9

Observa este diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa *bocatta* durante los últimos 6 meses del año pasado:



a) Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.

Enero 13000	Marzo 13000	Mayo 40000
Febrero 10000	Abril 25000	Junio 50000

(respuesta incorrecta)

U9.1	Enero 13000 Abril 25000 Febrero 10000 Mayo 40000 Marzo 13000 Junio 50000	Lectura del gráfico Representación numérica

b) Da un valor aproximado de la moda del número de bocadillos que se vendieron por mes.
c) Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

La media de bocadillos que se venden al mes es de 25500 bocadillos. (respuesta incorrecta)
La moda creo que es de 13000 bocadillos, porque en dos meses se repite el mismo número de bocadillos (respuesta incorrecta)

U9.2	La media de bocadillos que se venden al mes es de 25500 bocadillos.	Cálculo media de datos aislados Confusión entre media y mediana, lo que supone errores en las definiciones de ambas
U9.3	La moda creo que es de 13000 bocadillos	Cálculo incorrecto de la moda a partir de un gráfico Definición de moda Error al confundir valor de la variable con frecuencia
U9.4	porque en dos meses se repite el mismo número de bocadillos	Error en definición de la moda como valor más frecuente Argumento deductivo
U9.2-U9.4		Representaciones verbal y numérica

En resumen, hemos detectado los siguientes conflictos semióticos:

Caso 4

- Atribuye erróneamente la propiedad asociativa a la media (ítems 2a, 2b)
- Cálculo incorrecto de medias ponderadas (ítems 2a, 2b)
- Confunde la media con la moda (ítem 1a)
- No percibe la media como reparto equitativo (ítem 1a)
- No es capaz de dar una distribución de media dada (ítems 1a, 4, 7a)
- Errores de cálculo de media y mediana (ítem 5)
- No percibe la media como operación no interna (ítems 5a, 5b)
- Confunde media y mediana (ítems 5a, 5b)
- No percibe que la media es poco resistente a los valores atípicos (ítem 5c)
- No discrimina cuándo la media es buen representante o no (ítems 5c y 8)
- No detecta valores atípicos (ítem 8)
- Confunde frecuencia y valor de la variable (ítem 9c)

En la tabla 6.10.2, presentamos un resumen de los elementos de significado usados correcta e incorrectamente por estos dos estudiantes de 1º curso, que permite mostrar el significado mucho más rico y completo en el estudiante con mayor número de respuestas correctas.

Tabla 6.10.2

	CASO 1 (11 correctas)		*CASO 2 (3 correctas)*	
	Correctos	**Incorrectos**	**Correctos**	**Incorrectos**
Campos de problemas				
Media como mejor estimación	1		1	
Media como reparto equitativo	2		1	
Media como valor probable	1			
Mediana como representante				1
Representante de datos ordinales				
Mediana para comparar conjuntos				
Moda como valor más frecuente				
Representaciones				
Verbales	10		11	
Simbólicas	2			
Gráfica				
Numéricas	10		11	
Algoritmos y procedimientos				
Cálculo media d. aislados	4		2	2
Cálculo media ponderada	2			2
Cálculo gráfico media	1			
Invertir algoritmo media	4		1	2
Buscar distribución dada media	4		1	3
Calculo mediana datos aislados impar				1
Calculo mediana datos aislados par				1
Cálculo gráfico mediana				
Calculo moda d. aislados				
Cálculo gráfico moda	1			1
Definiciones y propiedades				
Definición de media como algoritmo	5		1	4
Definición de media como promedio				3
Definición mediana (central)	1			2
Definición mediana (dos partes)				
Definición moda (más frecuente)	1			
Valor en el rango				
Intervienen todos los valores				1
Cambia valor al cambiar el dato	1		2	
Operación interna		1		3
Elemento neutro	1		1	
No asociativa	2			2
Cambios origen y escala				
Media suma			1	
Moda no siempre única				
Moda siempre definida				
Representante	1		1	
Centro de gravedad			1	
Posición d. Simétricas				
Media poco resistente		1		2
Suma desviaciones	1		2	
Representante para d. bimodal				
Argumentos				
Casos particulares y contraejemplos	1		1	
Deductivos	3		2	

Al igual que ocurría con los alumnos de 4º curso, no hay demasiadas diferencias en el uso de representaciones o en el reconocimiento de campos de problemas y, en este caso, tampoco en el tipo de argumentos usados.

Hay, sin embargo, una importante diferencia en el conocimiento de tipo conceptual y procedimental. El alumno con buenos resultados domina todos los algoritmos y procedimientos, excepto el cálculo gráfico de la moda, mientras que su compañero produce errores (mezclados con algunos aciertos) en todos ellos.

Más notable aún es la diferencia de conocimiento conceptual. Mientras que el primer alumno domina claramente las definiciones, el segundo confunde los promedios y da definiciones erróneas.

Aunque el número de propiedades usadas es menor que para los alumnos de 4º, el estudiante con buenos resultados hace un uso correcto de aquellas propiedades que conoce, mientras que el segundo mezcla errores con el uso correcto.

6.11. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE EVALUACIÓN

Una vez finalizado el análisis detallado, tanto cuantitativo como cualitativo, de los resultados del estudio de evaluación del significado personal que los alumnos de 1º y 4º cursos de la Educación Secundaria Obligatoria asignan a las medidas de posición central, pasamos a destacar las conclusiones más importantes obtenidas a lo largo del capítulo.

Carácter multidimensional de comprensión y significado

Resaltamos, en primer lugar, cómo nuestros resultados completan, extienden e incluso discuten los obtenidos en investigaciones previas. Puesto que éste es un estudio global, complementa muchas de los trabajos que se han centrado en puntos particulares de la comprensión de los promedios, corroborando hallazgos previos, aportando nuevos resultados e incluso poniendo en duda los de algunos de los trabajos analizados.

Un punto particularmente importante es que ponemos de manifiesto la complejidad del significado personal y comprensión de los alumnos respecto a las medidas de posición central, que incluye no sólo la comprensión conceptual y procedimental (funcional y computacional, en términos de Pollatsek, Lima y Well, 1981), sino también el representacional y argumentativo.

Esta complejidad, por otra parte, complementa la teoría de Watson y Moritz (1999, 2000) quienes definen diferentes niveles jerárquicos de comprensión, y suponen que los alumnos progresan sistemáticamente de uno a otro en un orden dado, basándose en un cuestionario muy limitado y una muestra de gran tamaño. Nuestro trabajo indica que el crecimiento de la comprensión de los promedios no es lineal, puesto que los índices de dificultad de los ítems no mejoran en forma homogénea al comparar los alumnos de 1ª y 4ª cursos de ESO y, además, los ítems que eran difíciles al comenzar el periodo siguen siéndolos al finalizar la enseñanza.

Además, el resultado del análisis multivariante (tanto análisis cluster como factorial) revela una pluralidad de dimensiones en las respuestas de los alumnos al cuestionario, lo que contradice la teoría de una comprensión de tipo unidimensional.

La mayoría de los alumnos de nuestra muestra estarían al menos en el tercer nivel de comprensión de los promedios en la teoría de Watson y Moritz (1999, 2000), quien lo denomina "respuesta multiestructural" y que caracteriza por usar varias ideas como máximo, mínimo y suma más división para describir la media en situaciones sencillas, no siendo capaz de aplicarlo en situaciones complejas, produciendo errores en los algoritmos de cálculo o confundiendo media, mediana y moda. Supuestamente no se pasaría al siguiente nivel antes de tener éste completamente adquirido.

El cuarto nivel de Watson y Moritz se denomina "Media como representante". Los alumnos en este nivel asocian la media con su algoritmo en situaciones sencillas. Recurren al algoritmo de cálculo para describir los conceptos. Se relaciona el algoritmo con la posibilidad de un resultado no entero. Se expresa alguna idea de representatividad para la estimación o predicción en un conjunto de datos. No se sabe aplicar en contextos complejos sin ayuda y con frecuencia se prefiere usar las características visuales de los gráficos en lugar de sus promedios.

El quinto nivel lo denomina "Aplicación en un contexto complejo". Además de las capacidades del nivel anterior es capaz de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media o calcula medias ponderadas (no las dos cosas a la vez). No tiene clara la idea de distribución, raramente usan la media para comparar más de un conjunto de datos.

Finalmente el último nivel es "Aplicación en dos o más contextos complejos". Además del anterior, es capaz a la vez de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media y calcular medias ponderadas. Comprende la idea de distribución. Usan la media frecuentemente para comparar dos o más conjuntos de datos.

En nuestro estudio de casos hemos encontrado, sin embargo, ejemplos de alumnos que muestran un grado de comprensión que contradice claramente la anterior descripción del progreso en etapas.

El caso 1, es capaz de invertir el algoritmo de la media, y proporciona correctamente una distribución dada la media, lo que implica la idea de distribución, pero no calcula medias ponderadas correctamente, ni usa la mediana para comparar dos conjuntos de datos. Muestra, por tanto características parciales del nivel 6, pero claramente supera la descripción del nivel 5. Por otro lado, produce un resultado correcto y un error en la idea de media como representante (falla por tanto en algunas características del nivel 4)

El estudiante 2 ha mostrado dificultad en la comprensión de la idea de media como representante, característica del nivel 4 (tres errores) y tiene grandes dificultades al calcular los promedios a partir de un gráfico, por lo que supuestamente no alcanza el nivel 4. Sin embargo, en uno de los problemas ha dado una distribución correcta para una media dada (nivel 6) y también invierte correctamente el algoritmo en dos ocasiones (nivel 5).

El estudiante 3 cumple todas las características del nivel 6, a pesar de ser de menor edad que los anteriores y no haber pasado la etapa de instrucción en la ESO, incluso la idea de representante que no comprendía correctamente su compañero de 4ª (caso 1). Sin embargo, sólo calcula gráficamente la moda, convirtiendo los datos del gráfico a numéricos para calcular la media y mediana, por tanto contradice el cuarto nivel, ya que prefiere las características numéricas a las gráficas.

Estos estudiantes parecen estar simultáneamente en varios niveles, excepto el estudiante 4 que estaría en el tercer nivel definido por Watson. Al comparar el número total de respuestas correctas, obtenemos lo siguiente:

- Estudiante 1, 16 años, 18 correctas de 25, niveles 3, 4, 5 y 6;
- Estudiante 2, 16 años, 8 correctas de 25, niveles 3, 4, 5 y 6
- Estudiante 3, 13 años, 11 correctas de 17, nivel 6 con fallos en el nivel 4
- Estudiante 4, 13 años, 3 correctas de 17, nivel 3

Observamos que la proporción de respuestas correctas es similar en los estudiantes 1 y 3, a pesar de que el primero es más joven, no ha tenido instrucción y sin embargo parece casi situado en nivel 6, mientras que su compañero tiene todavía fallos en los niveles 4 y 5. Además, la proporción de respuestas correctas del estudiante 3 es mayor que la del estudiante 2, a pesar de la mayor edad y que éste llega también al nivel 6. Sólo en caso del último estudiante parece claramente sugerir que un menor nivel de comprensión indica mayor número de fallos.

Algoritmos de la media

Diferentes autores (Cai, 1995; Watson y Moritz, 1999, 2000) sugieren que la inversión del algoritmo de la media es difícil para los estudiantes. Nuestro estudio sin embargo, contradice esta teoría, puesto que, incluso los estudiantes de 1º curso han dado una frecuencia de inversión correcta mucho mayor que incorrecta, llegando en una frecuencia abrumadora de ocasiones incluso a dar una distribución de media dada. Estos resultados mejoran aún más en los alumnos que han recibido instrucción, pero son ya bastante buenos a nivel intuitivo, para los problemas planteados cuyos datos son sencillos y poco numerosos.

Se mantiene, sin embargo la dificultad del cálculo de medias ponderadas, tanto antes como después de la instrucción. Nuestra explicación es que hay acá un conflicto semiótico, al asignar los alumnos la propiedad asociativa a la media aritmética, que no la posee, siendo así que las operaciones aritméticas de suma y producto si la cumplen.

Representaciones y lectura de gráficos

En la actualidad diferentes autores se interesan por el uso variado de sistemas de representación en matemáticas. Por ejemplo, Duval (1995) sugiere que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Indica también que las representaciones semióticas son un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Además de sus funciones de comunicación, las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la propia actividad matemática. El progreso de los conocimientos matemáticos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el de la lengua natural. Es por ello que considera que la aprehensión conceptual no es posible sin el recurso a una pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos, y por tanto su coordinación por parte del sujeto.

Nuestro estudio ha mostrado una dificultad generalizada en la lectura e interpretación de gráficos y un uso casi inexistente de este tipo de representación. Dada la importancia que en estadística tienen los gráficos, como modo de representación y exploración de una distribución, consideramos que éste es un aspecto que debe tenerse en cuenta en la enseñanza. Nuestros alumnos muestran dificultad no sólo en la lectura a nivel intermedio de datos sino incluso en la lectura literal de un gráfico, confundiendo valores de la variable con sus frecuencias o incluso con sus etiquetas. Creemos que no debe minimizarse la dificultad de aprendizaje de los gráficos estadísticos que deben constituirse en objetos de enseñanza en sí mismos.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

7.1. INTRODUCCIÓN

En esta Memoria hemos presentado un estudio teórico y experimental sobre las medidas de posición central en la Enseñanza Secundaria Obligatoria, fundamentada en nuestro marco teórico sobre el significado y comprensión de los objetos matemáticos y siguiendo una metodología de investigación consistente con dicho marco teórico.

Para finalizar presentaremos las principales conclusiones obtenidas organizadas en diferentes apartados. Comenzamos describiendo las conclusiones en relación a los objetivos e hipótesis de la investigación y presentando las principales aportaciones de la misma. Finalizamos con unas reflexiones sobre las implicaciones que nuestro trabajo tiene para la enseñanza de la estadística en la Educación Secundaria Obligatoria y sugiriendo algunas líneas de investigación para futuros trabajos.

7.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS

Al plantear los objetivos de nuestro trabajo comenzábamos describiéndolo de una forma general mediante la siguiente pregunta:

¿Que tipos de problemas, representaciones, procedimientos de cálculo, definiciones, propiedades y argumentaciones relacionados con las medidas de posición central serían adecuados para cada uno de los tramos de la Educación Secundaria Obligatoria?

Hemos tratado de aportar una respuesta, al menos parcial, a esta pregunta mediante un análisis de tipo teórico y experimental cuyos objetivos y resultados describimos a continuación, tratando de justificar el grado de cumplimiento de los mismos.

O1. Llevar a cabo un análisis del contenido matemático para determinar los campos de problemas, representaciones, procedimientos, definiciones y propiedades y argumentaciones que constituyen el significado de referencia de las medidas de posición central, en la introducción al análisis exploratorio de datos.

En el capítulo 2 hemos presentado los resultados de dicho análisis, que constituyen el fundamento matemático de nuestra investigación. Éste se limitó al estudio descriptivo univariante de las medidas de tendencia central y partió de una muestra de libros de texto de estadística aplicada a nivel universitario que se han detallado en dicho capítulo.

Creemos haber presentado una información rica y completa de los diferentes elementos de significado definidos en nuestro marco teórico, para los conceptos media, mediana y moda. Cada uno de estos elementos de significado se ha descrito detalladamente, mostrando ejemplos de su uso en los libros de texto tomados como base del análisis. El trabajo no ha sido trivial, pues ha sido necesario comparar los diversos textos, normalizar y clasificar la forma en que se presentan los elementos y revisar el análisis en fases sucesivas, hasta llegar a la formulación actual.

Aún reconociendo que el análisis realizado es incompleto, y que no se agota el significado matemático de las medidas de tendencia central, pues no hemos tenido en cuenta la estadística bivariante, el cálculo de probabilidades o la estadística inferencial, hemos podido determinar un *significado de referencia* suficiente para el propósito de nuestro estudio, ya que dicho significado incluye el que se presentará a nivel de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

O2. Analizar el significado de las medidas de posición central en el currículo de secundaria.

En el capítulo 4 se describe el análisis curricular llevado a cabo desde una doble perspectiva. Por un lado, hemos estudiado las orientaciones curriculares para la enseñanza secundaria obligatoria, comparándolas con otras propuestas a nivel internacional. El análisis ha sido sistemático y detallado, abarcando diferentes planes de estudio nacionales y de la comunidad autónoma andaluza. Concluimos, de este análisis, que no se presta a la estadística tanto interés como el que hemos encontrado en otros países, y en particular en el último documento de Estándares Curriculares de los Estados Unidos, en el que ésta aparece como una constante desde el jardín de infancia hasta la universidad y los contenidos son mucho más amplios y detallados que los españoles.

Por otro lado hemos llevado a cabo un estudio detallado de una amplia muestra de libros de texto, mediante el que hemos podido identificar los elementos de significado más comunes que presentan sobre las medidas de posición central, determinando de esta manera el *significado institucional local* de las medidas de posición central en la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Para cada uno de los elementos del significado institucional de referencia descrito en el capítulo 2, en el capítulo 4 se ha analizado su presencia o ausencia en los libros de texto, mostrando ejemplos de su uso.

Como resultado se han obtenido unas tablas resúmenes que permiten efectuar comparaciones entre textos, así como entre los diferentes elementos de significado y han posibilitado también tener una base sólida para la elaboración del cuestionario de evaluación, en el que hemos tenido en cuenta este significado institucional local.

O3. Analizar las investigaciones sobre el tema o sobre otros relacionados, para fundamentar el estudio y comparar con nuestros resultados.

En el Capítulo 3 hemos presentado un estudio detallado de estas investigaciones, analizando con detalle sus objetivos e instrumentos, y clasificándolas según los elementos de significado sobre cuya comprensión se habían centrado.

Este análisis nos permitió comprobar que, en la mayor parte de los casos, se han centrado en evaluar la capacidad de cálculo o aspectos aislados de la comprensión, mientras que en nuestro estudio nos hemos preocupado de un estudio del significado global de estos conceptos. Además hemos proporcionado un fundamento conceptual y curricular que en la mayor parte de las investigaciones previas no se ha tenido en cuenta.

La mayor parte de los estudios se enfocan preferentemente sobre la media aritmética, en incluso sobre ella la investigación no es completa, puesto que no se tienen en cuenta todas sus propiedades elementales de una forma sistemática, ni se diferencia entre propiedades numéricas, algebraicas y estadísticas. Los tipos de tarea son muy cerradas, salvo algunas excepciones. La mayoría de los autores han utilizado ítems de respuestas múltiples que pueden producir respuestas estereotipadas. En el caso de respuestas abiertas, el interés se ha centrado en definir niveles (4 o 6 niveles) de comprensión de los promedios, suponiendo que ésta es un constructo unidimensional, por lo que la mejora en la comprensión de un elemento de significado (por ejemplo de una propiedad) automáticamente debería llevar implícito la mejor comprensión global de todos los demás elementos.

Pensamos que esta es una concepción simplista, puesto que ya hace tiempo se han abandonado las teorías que asumían la transferencia en el aprendizaje de conceptos. Por otro lado no hay tampoco una investigación sistemática sobre comprensión de representaciones de los promedios o sus campos de problemas o sobre la capacidad argumentativa sobre los mismos.

Finalmente el rango de edad de estas investigaciones es muy variado, pero predominan las investigaciones con alumnos universitarios. Además el contexto escolar y cultural es muy diferente del de nuestros alumnos. Todo ello justifica el interés y originalidad de nuestro trabajo.

O4. Diseñar un cuestionario para evaluar la comprensión de los estudiantes de secundaria en este tema, que contemple los tipos de elementos diferenciados en el marco teórico y se corresponda con el significado institucional pretendido para la enseñanza secundaria.

En el Capítulo 5 hemos descrito el proceso de construcción de un cuestionario, que tiene en cuenta el significado institucional local identificado en la etapa anterior y que parte de y complementa otras investigaciones previas. Para construirlo se ha realizado, en primer lugar, un análisis del contenido de 59 ítems utilizados en trabajos anteriores, elaborando unas tablas de elementos de significado de los mismos que se recogen en el Anexo 1. Posteriormente se eligieron algunos de ellos, se modificaron otros y se añadieron algunos nuevos, para conseguir un instrumento cuya validez de contenido se justifica en este mismo capítulo.

El cuestionario fue sometido a diversas pruebas de legibilidad, dificultad, y posibilidad de proporcionar los datos que necesitábamos pasándolo a una muestra piloto, cuyas respuestas se analizan con detalle, y que nos permitieron elaborar unas primeras categorías de análisis, posteriormente refinadas en la muestra definitiva.

Tanto el análisis a priori de los ítems, como el análisis de las respuestas obtenidas de la muestra piloto confirmaron que el instrumento era útil y adecuado para proporcionar información no sólo de la dificultad de las diversas tareas, sino que permite evaluar separadamente la comprensión de los diversos tipos de elementos de significado: campos de problemas, representaciones, algoritmos y procedimientos, definiciones y propiedades y argumentos.

O5. Analizar las respuestas de una muestra de estudiantes de E.S.O. a dicho cuestionario para determinar las tendencias y mostrar la variabilidad del significado personal que sobre las medidas de tendencia central presentan los estudiantes.

En el Capítulo 6 se describen y analizan los resultados obtenidos al pasar el cuestionario a dos muestras de alumnos de 1º y 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, pertenecientes a varios institutos de la provincia de Granada.

El análisis cuantitativo de los datos permite determinar la fiabilidad y generalizabilidad del cuestionario, comparar la dificultad relativa de las preguntas para cada grupo y la relación entre diferentes preguntas, así como estudiar las diferencias globales y puntuales entre los grupos.

El análisis cualitativo de los elementos de significado usados por los alumnos en sus respuestas abiertas permite analizar con detalle la comprensión y dificultades particulares de cada una de las tareas planteadas y los elementos de significado requeridos para su resolución.

También permite, como resumen, evaluar las principales tendencias en el significado personal de los alumnos de cada uno de los grupos y mostrar claramente la evolución y progreso adquirido con la instrucción, así como los errores y dificultades que permanecen al final de la misma.

Este estudio de tendencias se complementa con un estudio de casos que ha permitido comparar los razonamientos y comprensión de estudiantes situados en los dos extremos de la muestra, para cada grupo, así como la diferencia de los razonamientos mostrada por cada uno de ellos, lo que ha puesto de manifiesto la variabilidad existente en el significado personal sobre promedios que presentan los estudiantes.

7.3. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS

Asimismo, en el Capítulo 1 formulamos las hipótesis de nuestro trabajo que hemos tratado de analizar a partir de los diversos datos recogidos. A continuación haremos una discusión de hasta qué punto cada una de ellas se ve apoyada o refutada por nuestros resultados.

> *H1: El significado de las medidas de posición central, incluso en su nivel descriptivo y univariante tiene un carácter complejo, debido a la multiplicidad de elementos y su interrelación, lo que hace difícil la secuenciación de su enseñanza.*

La principal conclusión obtenida del análisis epistémico realizado es la riqueza del significado de conceptos, aparentemente tan simples, como estos estadísticos y que ha posibilitado fundamentar el posterior análisis de los libros de texto, la construcción del cuestionario de evaluación y el análisis de las respuestas de los alumnos.

Otra consecuencia es que el diseño de la instrucción y la evaluación del aprendizaje debe tener en cuenta estos diferentes tipos de significado y comprensión, ya que no podemos esperar que, enseñando, por ejemplo, a los alumnos a calcular los promedios puedan deducir y comprender por sí mismos sus diversas propiedades o adquieran la competencia suficiente para usar correctamente el promedio más adecuado en situaciones problemáticas sencillas. Es asimismo necesario que los alumnos adquieran capacidad de expresión simbólica y gráfica y de argumentación, si queremos ayudarles a que sean personas estadísticamente competentes.

> *H2: Asimismo es complejo el significado presentado sobre estos conceptos en la Enseñanza Secundaria Obligatoria y encontraremos una variedad de significado presentado sobre los mismos conceptos en distintos libros de texto dirigidos al mismo nivel educativo.*

Esta complejidad se pone de manifiesto por la variedad y cantidad de elementos mostrados en el análisis de los libros de texto y por la riqueza de los ejemplos mostrados. Asimismo, las tablas resumen preparadas muestran claramente la ausencia de algunos elementos que consideramos importantes, así como las diferencias existentes entre los libros.

El análisis revela, por otro lado, que en los libros de texto de esta etapa educativa, se da mucha más importancia a las definiciones y al cálculo de las medidas de posición central que al estudio de sus propiedades, puesto que el porcentaje de texto, ejemplos y ejercicios dedicados a ambos es notablemente mayor que el dedicado a éstas.

Una de las primeras consecuencias que este hecho puede tener es que, aunque los estudiantes consigan manejar perfectamente los procedimientos de cálculo, pueden no alcanzar una comprensión completa de estas medidas, sus posibilidades de uso, las ventajas de una sobre las otras y la conveniencia, por tanto, de elegir unas u otras según la situación, ya que hay elementos de significado que no se adquieren de manera espontánea y que no se tratan explícitamente.

Hay que destacar también la importancia que tiene el lenguaje en este proceso de enseñanza aprendizaje y que se pone de manifiesto en este análisis con la gran variedad de elementos ostensivos empleados por los distintos libros de texto. Es necesario, pues, tratar de manera consciente este tema que, en muchas ocasiones, parece trivial y, sin embargo, entraña dificultades para los estudiantes.

En cuanto a los campos de problemas, hemos constatado que hay situaciones de las que emergen los estadísticos de tendencia central que no hemos encontrado aquí, por lo que debemos llamar la atención sobre este punto, ya que su tratamiento explícito podría contribuir a enriquecer la significatividad del aprendizaje de estos conceptos.

H3. Al plantear a los alumnos tareas no convencionales (en el sentido de que requieren interpretación y no sólo cálculo) encontraremos una amplia gama de dificultad, incluso para los alumnos que ya han tenido instrucción sobre el tema.

Una parte del estudio de evaluación de los significados personales de los estudiantes, se ha dedicado a las dificultades detectadas a partir de las tareas propuestas en el cuestionario. Los resultados revelan la aparición de índices de dificultad muy variados, que oscilan entre cuestiones que resultan bastante difíciles en la E.S.O., como el cálculo de la mediana a partir de un gráfico, la elección del mejor promedio para un conjunto de datos o el cálculo de medias ponderadas, a otras que se han revelado fáciles, como la detección de campos de problemas asociados a la media o la interpretación de un valor medio de una distribución de datos enteros.

Por otro lado, tras el análisis realizado se puede afirmar que la enseñanza ha sido efectiva, pues hemos encontrado que en un número importante de los ítems que componen la parte común a los cuestionarios destinados a los dos cursos, 1º y 4º, han aparecido diferencias significativas en el sentido de la mejora de los resultados tras la instrucción. No obstante, la relación entre la dificultad de determinados grupos de tareas, que incluyen elementos de significado relacionados, tiende a mantenerse en los dos cursos, a pesar de la enseñanza recibida, lo que nos lleva a afirmar que algunos de los elementos de significado que incluyen las medidas de tendencia central, como el cálculo de la mediana de una distribución, especialmente si los datos aparecen en forma de gráfico, el cálculo de medias ponderadas, la búsqueda de una distribución de media conocida o la estimación del promedio más adecuado para una distribución, presentan dificultades importantes que se mantienen después de la enseñanza y que, por tanto habrá que tener en cuenta al planificarla.

H4. Los alumnos utilizan correctamente una amplia gama de elementos de significado de las medidas de posición central, incluso cuando no lleguen a obtener la solución correcta a las tareas planteadas. Las soluciones correctas pueden obtenerse a partir de razonamientos variados, que indican una diversidad de significados personales sobre el tema.

Al estudiar las tendencias en el significado personal de los alumnos, mediante el análisis de las respuestas a las tareas propuestas, hemos encontrado una gran variedad de elementos de significado utilizados, tanto por los alumnos de 1º como por los de 4º, para contestar y justificar las preguntas. De éstos, muchos se han utilizado de forma correcta, es decir, de acuerdo con el significado institucional local del tema, mientras que en otros el significado personal de los estudiantes no coincide con el contemplado en la enseñanza.

H5. Observaremos una mejora en la comprensión (mejor ajuste entre significados personales e institucionales) en los alumnos que finalizan la Educación Secundaria Obligatoria, pero la mejora no será homogénea en todas las tareas o en todos los elementos de significado usados por los alumnos.

Al comparar el significado personal de los estudiantes de los dos cursos estudiados, hemos encontrado que, efectivamente, la instrucción supone una mejora del mismo, no sólo por el aumento en la cantidad de estudiantes que utilizan correctamente los distintos elementos de significado incluidos en las tareas, sino también por el aumento en el número total de elementos relacionados con los promedios que ponen de manifiesto en sus respuestas.

Sin embargo, estos aumentos no se producen de forma lineal, sino que hemos encontrado que la mejora producida tras la enseñanza es mayor en determinados elementos de significado como los algoritmos, procedimientos, definiciones y uso de propiedades que en otros como la detección de campos de problemas asociados, los argumentos, e incluso, el tipo de lenguaje y representaciones utilizados.

H6. Analizada la multidimensionalidad de las respuestas de los alumnos al cuestionario, observaremos la existencia de diferentes factores que sugieren capacidades diferenciadas o tipos diferenciados de comprensión (en contraposición a una teoría unidimensional de desarrollo según estadíos).

El análisis de los resultados obtenidos a partir del cuestionario revela el carácter multidimensional del significado y de la comprensión de los promedios. Cada una de las tareas propuestas ha permitido evaluar diferentes componentes del significado de un mismo concepto, encontrando respuestas incorrectas que, no obstante, incluyen elementos de significado correctos (ajustados al significado institucional pretendido) así como respuestas correctas que contienen elementos usados incorrectamente. Esto nos lleva a afirmar que no podemos plantearnos si un alumno comprende o no comprende tal promedio, sino cuáles de los elementos que componen su significado institucional tiene ya adquiridos y cuáles le faltan.

H7. La dificultad de las tareas sobre promedios se puede explicar por la complejidad semiótica de las mismas y la existencia de conflictos semióticos en los estudiantes, durante el proceso de resolución de los problemas.

Se ha realizado un análisis semiótico de las respuestas de cuatro alumnos que nos ha permitido mostrar, con mayor profundidad, la comprensión de estos estudiantes sobre los diversos elementos de significado y la variabilidad en el significado personal de los estudiantes de la muestra respecto de las medidas de tendencia central.

A partir de aquí, hemos podido constatar la existencia de numerosos conflictos semióticos, lo que confirma nuestra hipótesis de la dificultad que los promedios presentan para los estudiantes de secundaria.

7.4. APORTACIONES DEL TRABAJO

Tras revisar todo el trabajo realizado y presentado en esta Memoria, podemos decir que, a lo largo del mismo, han ido apareciendo producciones parciales que suponen una serie de aportaciones, que comentamos a continuación.

En primer lugar, se ha elaborado un banco de ítems, presentado en el Anexo 1, que puede ser de utilidad, por un lado, para otros investigadores, puesto que les puede ayudar a construir otros instrumentos de evaluación, y por otro para el profesorado que tenga que enseñar este tema, a la hora de elaborar pruebas de evaluación sobre estos conceptos que midan el grado de ajuste entre el significado previsto y el adquirido por los estudiantes tras el proceso de enseñanza aprendizaje.

En segundo lugar, se ha construido y validado un cuestionario que amplía notablemente el contenido evaluado respecto a otros instrumentos utilizados en investigaciones previas, en lo que se refiere al tema de los promedios. Ello nos ha permitido obtener información original respecto al razonamiento sobre promedios, diferenciar los diferentes tipos de comprensión (fenomenológica, procedimental, conceptual, argumentativa, representacional) que muestran los estudiantes respecto de este tema, así como describir la comprensión de algunos elementos específicos que no habían sido hasta ahora objeto de estudio.

Por último, pensamos que se ha realizado un estudio sistemático de evaluación de la comprensión de los promedios que tiene en cuenta los distintos elementos de sus significado y cómo los alumnos los usan y ponen en relación en tareas abiertas.

7.5. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

El análisis epistémico (significado de referencia) realizado ha revelado la complejidad del tema, tanto en lo que respecta a la media, como a la mediana y la moda, en virtud de la gran cantidad y variedad de elementos de significado que intervienen, incluso en este nivel elemental, lo que implica que su estudio sea más complejo de lo que pueda parecer a simple vista.

Una primera consecuencia es que el diseño de la enseñanza y la evaluación del aprendizaje debe tener en cuenta estos diferentes tipos de significado y comprensión, ya que no podemos esperar que, enseñando, por ejemplo, a los alumnos a calcular los promedios puedan deducir y comprender por sí mismos sus diversas propiedades o adquieran la competencia suficiente para usar correctamente el promedio más adecuado en situaciones problemáticas sencillas. Es asimismo necesario que los alumnos adquieran capacidad de expresión simbólica y gráfica y de argumentación, si queremos hacerlos estadísticamente competentes.

Creemos que se debe analizar con detenimiento la ubicación de este tema dentro del currículo, y reconsiderar con detalle los elementos de significado incluidos, atendiendo a la dificultad que presentan para los alumnos en el tramo de edad en el que está previsto.

Por otro lado, como hemos dicho antes, los estudiantes ponen en juego una gran variedad de elementos de significado relacionados con los conceptos que nos ocupan, cuando se les propone la resolución de determinadas tareas. A la hora de abordar la enseñanza y evaluar sus resultados, se debería analizar detenidamente cuáles de ellos se ajustan al significado institucional pretendido y cuáles necesitan más énfasis desde la propuesta de enseñanza planteada a fin de mejorar la comprensión de los promedios por parte de los alumnos, puesto que, además, la comprensión se ha revelado como no lineal, sino multidimensional.

7.6. IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN

Hemos realizado una recopilación de investigaciones relacionadas con los promedios y una clasificación de las mismas en relación con los distintos elementos que conforman el significado de las medidas de posición central, que puede ser útil a otros investigadores interesados por este tema.

Se ha utilizado, de acuerdo con el marco teórico en el que hemos basado esta investigación, una metodología de análisis de la comprensión de un concepto, en el sentido de determinar el ajuste entre los significados institucionales y los significados personales puestos de manifiesto por los estudiantes, que se ha mostrado válida para dar una respuesta a las cuestiones que nos habíamos planteado al inicio de la misma, y que podría servir de modelo para otros investigadores que compartan el marco teórico utilizado en este trabajo.

REFERENCIAS

Azorín, F. y Sánchez Crespo, J. L. (1986). *Métodos y aplicaciones del muestreo*. Madrid: Alianza Universidad.

Barr, G. V. (1980). Some student's ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics*, 2 (2), 38-41.

Batanero, C. (2000a). Cap on va l'educació estadística? *Biaix*, 15, 2-13.

Batanero, C. (2000b). Dificultades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementales: El caso de las medidas de posición central. En C. Loureiro, F. Oliveira y L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 31-48). Lisboa: Sociedad Portuguesa de Estatística.

Batanero, C. (2000c). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO*, 25, 41-58.

Batanero, C. (2000d). Errores y dificultades de los conceptos estadísticos elementales: El caso de las medidas de tendencia central. En C. Loureiro, F. Oliveira y L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 31-48). Lisboa: Sociedad Portuguesa de Estatística.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Granada. Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Batanero, C., Cobo, B. y Díaz, C. (2003). Assessing secondary school students' understanding of averages. En M. A. Mariotti (ed.): *Proceedings of the 3d Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria (Italia), Universita di Pisa, Italia. CD ROM.

Batanero, C., Díaz, C. y Cobo, B. (2003). Fiabilidad y generalizabilidad en el campo educativo: análisis de un cuestionario sobre comprensión de promedios. *Números*, 54, 3 – 21.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. (1988). *Curso de estadística basado en el uso de ordenadores*. Jaén: Los autores.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. (1991). Análisis exploratorio de datos. Sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (2000). La construcción del significado de la asociación mediante actividades de análisis de datos. Reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la estadística. En E. Lacasta y J. R. Pascual (Eds.), *Actas de la II Reunión de la SEIEM* (pp. 155-174). Pamplona: SEIEM.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2001). *Análisis de datos y su didáctica.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Godino, J., Green, D. R., Holmes, P. y Vallecillos (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Tecnology*, 25 (4), 527-547.

Batanero, C, Godino, J. D., y Navas, F. (1997). Some misconceptions about averages in prospective primary teachers. En E. Pehknonen (Ed.), *Proceedings of 21 PME Conference* (v.1, pp. 276). University of Lahti.

Barr, G. V. (1980). Some student ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics*, 2

(2), 38-41.

Begg, A. (1997). Some emerging influences underpinning assessment in statistics. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 17-26). Amsterdam: IOS Press.

Ben-Zvi, C. (2000). Towards understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning,* 2(1y 2), 127-155.

Ben-Zvi, D., y Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (pp. 54-64). Voorburgo, International Statistical Institute.

Biehler, R. (1986). Educational perspectives on exploratory data analysis. Trabajo presentado en el *Sixth International Congress on Mathematics Education*. Budapest.

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. En R. Kapadia y M. Borovcnick (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 169-211). Dordrecht: Kluwer.

Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes: Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis? En J. B. Garfield (Ed.), *Research papers from the Fourth International Conference on Teaching Statistics*. Minneapolis: The International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics.

Biehler, R. (1997). Students' difficulties in practicing computer-supported data analysis: some hypothetical generalizations from results of two exploratory studies. En J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (pp. 176-197). Voorburgo, International Statistical Institute.

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonom*y. Academic Press: New York.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: CEAC.

Brent, E. E. (1989). *Data collection selection: An expert system to assist in the selection of appropriate data selection procedures.* Columbia, MI: The Idea Works inc.

Burril, G. (1996). Curriculum issues in United States schools. En B. Phillips (Ed.), *Papers on statistical education presented at ICME-8* (pp. 15-26). Swinburne University of Technology : IASE.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students'unsderstanding of the aritmetic average concept. En L. Meira (Ed.). *Proceeding of the 19th PME Conference* (v.3, pp. 144-151). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Calot G. (1974). *Curso de estadística descriptiva*. Madrid: Paraninfo.

Campbell, S. K. (1974). *Flaws and fallacies in statistical thinking*. New Jersey: Prentice Hall.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Carmines, E. G. y Zeller, R. A. (1979). *Reliability and validity assesment.* Londres: Sage University Paper.

Carvalho, C. (1996). Algumas questoes em torno de tarefas estatísticas com alunos do 7º ano. *Actas do ProfMat 96* (pp. 165-171). Almada: Associaçao de Profesores de Matemática.

Carvalho, C. (1998). Tarefas estadísticas e estratégias de resposta. Comunicación presentada en el *VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación*. Castelo de Vide, Portugal.

Carvalho, C. (2001). *Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade.* Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa.

Cazorla, I. (2002). *A relaçao entre a habilidades viso-pictóricas e o dominio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.

Cobb, P. y Hodge, L. (2002). Learning, identity, and statistical data analysis. En B. Phillips (Ed.), *ICOTS-6 papers for school teachers*. Cape Town: International Association for Statistics Education (CD Rom).

Cobo, B. (1998). *Estadísticos de orden en la enseñanza secundaria.* Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Cobo, B. (2001). Problemas y algoritmos relacionados con la media en los libros de texto de secundaria. En M. Beltrán (Ed.), *Jornadas Europeas de Enseñanza y Difusión de la Estadística* (pp. 241-252). Palma de Mallorca: Instituto Balear de Estadística.

Cobo, B y Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria ¿Un concepto sencillo? *UNO*, 23, 85-94.

Cobo, B. y Batanero, C. (2001). Razonamientos aritméticos en problemas de promedios. En J. M. Cardeñoso y otros (Eds.), *Investigación en el Aula de Matemáticas*. *Atención a la diversidad* (pp. 149-157). Granada: Sociedad Thales.

Cobo, B. y Batanero, C. (2002). Elementos de significado implícitos en la resolución de un problema de promedios. En J. M. Cardeñoso y otros (Eds.), *Investigación en el Aula de Matemáticas*. *Resolución de problemas* (pp. 155-160). Granada: Sociedad Thales.

Cobo, B y Batanero, C. (2003). La media en los libros de texto de la educación secundaria obligatoria. *Actas del X Congreso Thales sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas.*

Cobo, B. y Batanero, C. (En prensa). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.

Cobo, B. y Batanero, C**.** (En prensa). Razonamientos aritméticos en problemas de promedios. *SUMA.*

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. *Informe Cockcroft.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Cook, T. y Campbell, D. (1979). *Quasi-experimentation design and analysis issues for field setting.* Chicago: Rand McNally College Publishing Company.

Connor, D. (2002). Census at School. Creation to Collation to Classroom. En B. Phillips (Eds.) *Proceedings of ICOTS-6,* Ciudad del Cabo: IASE. CD-Rom

Cortina, (2002). Developing instructional conjectures about how to support students' understanding of the arithmetic mean as a ratio. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the ICOTS-6.* Ciudad del Cabo. CDROM. IASE.

Cruise, R. J., Dudley R. L. y Thayer, J. D. (1984). *A resource guide for introductory statistics*. Dubuque: Kendall/Hunt.

Cuadras, C. M. (1991). *Análisis multivariante.* Barcelona: Eunibar.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education,* 18 (5), 382-393.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Chatfield, C. (1985). The initial examination of data. *Journal of the Royal Statistics Society A*, 148, 214-153.

Chevallard (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grénoble: La Pensée sauvage.

Chevallard (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

Dane, F. C. (1990). *Research Methods*. Pacific Grove: Cole Publishing Company.

D.E.S. (1991). *Mathematics in the National Curriculum*. Londres: Department of Education and Science and the Welsh Office.

De Bock, D., Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school student' solutions of word problems involving lenght and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics,* 35, 65-83.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, B.O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Labor.

Dunn, O, J. y Clarck,V. A. (1987). *Applied statistics: Analysis of variance and regressio*n. Nueva York: John Wiley.

Duval, R. (1995). Sémiosis et penseé humaine. Berna: Peter Lang.

Eisenbach, R. (1994). Whats does the mean mean? Comunicación presentada en el *Fourth International Conference on Teaching Statistics.* Marrakesh, Marruecos.

Estepa, A. (1990). *Enseñanza de la Estadística basada en el uso de ordenadores: Un estudio exploratorio*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Estepa. A. y Batanero, C. (1994). Judgments of association in scattter plots: n empirical study of students' strategies and preconceptions. En J. Garfield (Ed.), *Research Papers from the Fourth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS IV).* The International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics. Universidad de Minnesota.

Estepa, A., Batanero**, C.** y Sánchez, F. T. (1999). Judgments of association in the comparison of two samples: students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 7, 17-30.

Estrada, A. (2002a). Actitudes hacia la Estadística e instrumentos de evaluación. En: *Actas de las Jornades Europees d' Estadística* (pp. 369-384). Instituto Balear de Estadística. Palma de Mallorca.

Estrada, A. (2002b). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Feldt, L. S. y Brennan, R. L. (1991). Reliability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measuremen*t. (pp. 105-146). Nueva York: MacMillan.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educació*n. Pamplona: Eunsa.

Freixa y. y otros (1992). *Análisis exploratorio de datos: nuevas técnicas estadísticas*. Barcelona: PPU.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing graph comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*, Kluwer: Dordrecht.

Gal, I (1997). Assessing students' interpretations of data: Conceptual and pragmatic issues. En B. Phillips (Ed.), *Papers on Statistical Education presented at ICME-8* (pp. 49-58). Universidad Tecnológica de Swinburne.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilites. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Gal, I. y Garfield, J. B. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. En I.Gal, and J.Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp.1-13). Amsterdam: IOS Press. Voorburg: International Statistical Institute.

Gal, I., Ginsburg, L. y Schau, C. (1997). Monitoring Attitudes and Beliefs in Statistics Education. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenges in statistical education* (pp. 37-51) Voorburg: International Statistical Institute.

Garfield, J. B. y Alhgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 44-63.

Garfield y G. Burrill (1997) (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*.Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Garfield, J. B. y Konold, C. (1992). *Statistical reasoning assesment. Part 2: Statistics in context*. National Science Foundation.

Gattuso, L. y Mary, C. (1996). Development of concepts of the arithmetic average from high school to University. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. I, pp. 401-408). Universidad de Valencia.

Gattuso, L. y Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school students. En L. Pereira-Mendoza, C. Seu Keu, T. Wee Kee y W.K. Wong (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 685-691). Singapur: International Association for Statistical Education.

Gerber, R., Boulton-Lewis, G y Bruce, C. (1995). Children's understanding of graphic representation of quantitative data. *Learning and Instruction*, 5, 70-100.

Ghiglione, R. y Matalón, B. (1989). *Las encuestas sociológicas.* México: Trillas.

Gnadesikan, N., Scheaffer, R. L. y Swift, J. (1987). *The art and technique of simulation*. Palo Alto: Dale Seymour.

Gil Flores, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos*. Barcelona. P.P.U.

Godino, J. D. (1996a). Relaciones entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza. En L. Puig y J. Calderón (Eds.) *Investigación y Didáctica de las Matemáticas* (pp. 119-128). Madrid: CIDE.

Godino, J. D. (1996b). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, 417-424). Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (1999) Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática (www.ugr.es/~jgodino/semioesp/aepistemico.htm)

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 22 (2 y 3)*

Godino, J. D. (2002a). Competencia y comprensión matemática, ¿qué son y como se consiguen?. *UNO*, 25, 77-87.

Godino, J. D. (2002b). Studying the median: a framework to analyse instructional processes in statistics education. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the ICOTS-6.* Ciudad del Cabo. CDROM. IASE.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática* (p. 25-45). Associaçao de Profesores de Matemática. Portugal. [http://www.ugr.es/local/jgodino].

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis. Madrid.

Goodchild, S. (1988). School pupils'unsderstanding of average. *Teaching Statistics*, 10 (3), 77-81.

Graham, A. (1994). *Statistic*s. Lincolnwood, IL: NTC Publishing Group.
Green, D. R. (1992). Data analysis: what research do we need? Artículo presentado en el 8º *ISI Round Table Conference on Teaching Statistics*. Lennoxwille.
Guilford, J. P. y Fruchter, B. (1978). *Fundamental statistics in psychology and education.*McGraw-Hill.
Gutierrez Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la Estadística.* Universidad de Valencia.
Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts.* Londres: Longman.
Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics 11 -16*. Sloug: Foulsham Educational.
Holmes, P. (2002). Some lessons to be learnt from curriculum developments in statistics. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.
Huberman, A. M. y Miles, M. (1994). Data management and analysis methods. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-444*)*. Londres: Sage Publications.
Johnson, R. (1992). *Elementary statistics.* Boston: PWS Kent, Co.
Junta de Andalucía (1989a). *Diseño Curricular de Matemáticas. Enseñanza Secundaria 12-16.* Sevilla: Consejería de Educación.
Junta de Andalucía (1989b). *Diseño Curricular de Matemáticas. Enseñanza Secundaria 16-18.* Sevilla: Consejería de Educación.
Junta de Andalucía (1992). *Decretos de Enseñanza Secundaria Obligatoria.* Sevilla: Consejería de Educación.
Junta de Andalucía (2002). *Decretos de Enseñanza Secundaria Obligatoria.* Sevilla: Consejería de Educación.
Leon, M. R., y Zawokeswski, F. S. (1991). Use of the arithemetic mean: An investigation of four properties. Issues and preliminary resuls. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 302-306). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.
Li, D. Y. y Shen, S. M. (1992). Students'weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, 14 (1), 2-8.
Linn, R. L. (1988). *Educational measurement*. New York: National Council on Measurement Education.
Loosen, F., Lioen, M. y Lacante, M. (1985). The standard desviation: some drawbacks of an intuitive approach. *Teaching Statistics*, 7 (1), 2-5.
M.E.C. (1988a). *Diseño Curricular Base para la Enseñanza* Primaria. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
M.E.C. (1988b). *Diseño Curricular Base para la Enseñanza Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
M.E.C. (1992). *Decretos de Enseñanza Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
M.E.C. (2001). *Decretos de Enseñanza Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
Mevarech, Z.R. (1983). A deep structure model of students'statistical misconceptions. Educational Studies in Mathematics, 14, 415-429.
Mialaret, G. (1977). *Las matemáticas: Cómo se aprenden, cómo se enseñan.* Madrid: Ediciones del Río.
Miles, M. B. y Huberman A. M. (1984). *Qualitative data analysis*. Beverly Hills: Sage.
Mokros, J. Y Russell, S.J. (1995). Children's concepts of average and representative ness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 20-39.

Moore, D. S. (1995). *The basic practice of statistics.* New York: Freeman

Morales, P. (1988). *Medición de actitudes en psicología y educación.* Universidad de Comillas. San Sebastián.

Moreno, J. (1998). Statistical literacy: statistics long after school. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statisti*cs (pp. 445-450). Sigapur: International Statistical Institute.

Muñiz. J. (1994). *Teoría clásica de los tests.* Madrid: Pirámide.

Murray, S. y Gal, I. (2002). Preparing for diversity in statistics literacy: Institutional and educational implications. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.

Navas, F., Batanero, C. y Godino, J. D. (1997). Evaluación de concepciones sobre la noción de promedio en maestro de primaria en formación. Implicaciones para la formación estadística de los futuros profesores. En H. Salmerón (Ed.). Actas *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 301-304). Universidad de Granada.

N.C.T.M. (1991a). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: S.A.E.M. Thales.

N.C.T.M. (1991b). *Dealing with data and chance. Addenda series grades 5-8.* Reston, Va: NCTM.

N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA; N.C.T.M. http://standards.nctm.org/.

Nortes Checa, A. (1993). *Estadística teórica y aplicada*. Barcelona: PPU.

Ortíz, J. J. (1996). *Significado del los conceptos probabilísticos en los textos de Bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado del los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J**.,** Batanero, C., Serrano, L. y Cañizares, M. J. (2000) Variables de tarea en los ejercicios de probabilidad en los libros de texto. En C. Loureiro, F. Oliveira y L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 138-146). Lisboa: Sociedad Portuguesa de Estatística.

Ortiz, J. J., Serrano, L. y Batanero, C. (2002). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *SUMA*, 36.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid. M.E.C. y Morata.

Osterlind, S. (1989). *Constructing test ítem.* Boston: Kluwer.

Ottaviani, G. (1999). Promover la enseñanza de la estadística: La contribución del IASE y su cooperación con los países en vías de desarrollo. *Actas de la Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da* Estatística. Florianópolis.

Otte (1983). Textual strategies for the learning of Mathematics, 3(3), 15-28.

Peña, D. y Romo, J. (1997). *Introducción a la estadística para las ciencias sociale*s. Madrid: Mc Graw Hill.

Pereira-Mendoza, L. y Mellor, J. (1990). Student's concepts of bar graph: Some preliminary findings. En D. Vere-Jones (eds.) *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics.* Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: Presses Universitaries de France.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The childs' conception of geometry*. Londres: Routledge and Kegan.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically*. New York: Routledge and Kegan Paul.

Plackett, R. L. (1970). The principle of the arithmetic mean. En E. S. Pearson y M. Kendall (Eds.), *Studies in the history of statistics and probability* (v.1, pp. 121-126). London, Charles Griffin.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.

Ponte, J. P. (1991). Ciencias da Educaçao, mudança educacional, formaçao de profesores e novas tecnologias. En A. Novoa et al. (Eds.), *Ciencias da Educaçao e mudança*. Oporto: Sociedad Portuguesa de *Ciencias da Educaçao.*

Rao, C.R. (1989). *Statistics and truth*. Calcuta: Council of Scientific and Industrial Research.

Reading, C. y Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.4, pp. 187-194). Universidad de Valencia.

Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemáticas: Una perspectiva cultural. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 17-62). Sevilla: Alfar.

Rios, S. (1991). *Iniciación estadística*. Madrid: Paraninfo.

Robert, A. y Robinet, J. (1989*). Enoncés d'exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels*. (IREM). Universidad de París.

Rothery, A. (1980). *Children reading mathematics.* Worcester: College of Higher Education.

Russell, S. J. y Mokros, J. R. (1991). What's typical?: children's ideas about average. En D. Vere-Jones (eds.) *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 307-313).Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.

Sánchez, F. T. (1996). *Análisis de la exposición teórica y de los ejercicios de correlación y regresión en los textos de bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Sánchez-Cobo, F. (1999). *Significado de la regresión y correlación para estudiantes universitarios.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada

Sánchez Carrión, J. J. (1995). *Manual de análisis de datos*. Madrid: Alianza.

Santisteban, C. (1990). *Psicometría. Teoría y práctica en la construcción de tests*. Madrid: Norma.

Sanz, I. (1990). Comunicación, lenguaje y matemáticas, en S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*, (pp.173-235). Sevilla: Alfar.

Sax, G. (1989). *Principles of educational and psychological measurement and evaluation.* Belmont, CA: Wadsworth.

Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in Psychology and Education. En Vere-Jones (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. Bishop (Ed.). *International handbook of mathematics education* (pp. 205-238). Dordrecht: Kluwer.

Spiegel, M. R. (1991). *Estadística* (segunda edición). Madrid: McGraw Hill.

Starkings, S. (1996). An international owerview of data analysis within the mathematics curriculum. En B. Phillips (Ed.), *Papers on statistical education presented at ICME-8,* (pp. 7-14). Universidad tecnolológica de Swinburne.

Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 64-80.

Tall, D. (1993). Constructions of objects through definition and proof. Presentado en el *Advanced Mathematics Group. XVII International Conference on the Psychology of Mathematics Education*. Brasil, 1993.

Tanur, J. M. (1992). *La estadística una guía de lo desconocido*. Alianza Editorial. Madrid.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal en un curso de análisis de datos*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Tormo, C. (1993). *Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Valencia.

Tauber, L., Batanero, C. y Sánchez, V. (2000). Comprensión de la distribución normal por estudiantes univesitarios. En C. Loureiro, F. Oliveira, y L. Brunheira (Eds), *Ensino e Aprendizagem da Esstatística* (pp. 117-130). Lisboa: Sociedad Portuguesa de Estatística.

Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicad*a. México: Limusa.

Tormo, C. (1993). *Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años.* Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Valencia.

Tormo, C. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la media aritmética. *Uno*, 5, 29-36.

Trujillo, H. (1999). *Métodos y técnicas de investigación en psicología.* Granada. El autor.

Tukey, J.W. (1962). The future of data analysis. *Annals of Mathematical Statistics*, 33, 1-67.

Tukey, J.W. (1977). *Exploratory data analysis.* Reading, MA: Addisson-Wesley.

Valeri, E. (1992). *Estadística para no estadísticos.* Barcelona: EADA.

Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Vallecillos, A. (1995). Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(3), 53–81.

Vallecillos, A. (1996). *Inferencia estadística y enseñanza: Un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas*. Madrid: Comares.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-second Session of the International Statistical Institute* (Tome 58, Book 2) (pp. 201-204). Helsinki, Finlandia: International Statistical Institute.

Vasco, C. E. (1994). Handling data systems in the curriculum for general basic education. *Proceedings of the IV International Conference on Teaching Statistics* (pp. 8-15). Marrakech: INSEA.

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *Learning of Mathematics,* 3(2), 31-41.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher* 21(1), 14-23.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The developments of concepts of average. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* 21(4), 15-39.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning*. 2(1&2), 11-50.

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión por T. M. F. Smith, D. S. Moore, N. E. Breslow, R. D. Snee y R. Biehler. *International Statistical Review*, 67(3), 221-266.

Wilensky, U. (1991). Abstract mediations on the concrete and concrete implications for mathematics education. En Harel y S. Papert (Eds.). *Constructionism.* Norwood: Ablex.

Zawojewski, J. (1986). *The teaching and learning processes of junior high school students under alternative modes of instruction in the measures ofcentral tendency*. Tesis Doctoral. University Northwestern. Evanston, Illinois.

Zawojewski, J.S. y Roth Leon, M. (1990) Use of the arithmetic mean: An Investigation of four properties issues and preliminary results. En D. Vere-Jones (eds.) *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* pp.302-306. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Zawojewski, J. (1991). *Dealing with data and chance*. Reston, Va: NCTM.