COMBINATORIA
Y
PROBABILIDAD

G rupo de
E ducación
E stadística
U niversidad de
G ranada

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Miguel R. Wilhelmi

Combinatoria y Probabilidad

ISBN: 84-933517-0-9
Depósito legal: GR-849/04

Diseño de carátula: Carola García Vilela

Composición de texto:
Sistema LaTeX, orientado especialmente hacia la creación de documentos científicos que contengan fórmulas matemáticas.
Recuperable en: `http://www.miktex.org/`

Publicación:
Grupo de Investigación en Educación Estadística
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Impresión:
Expresión Digital
C/ Real de los Neveros, 12. Edif. Bruselas - Local 2.
18008 Granada (España)

Financiación:
Grupo de Investigación FQM-126.
Consejería de Educación. Junta de Andalucía

Prólogo

El juego. La teoría de la probabilidad ha estado desde sus inicios vinculada con los juegos de azar. De hecho, etimológicamente, la palabra azar deriva del árabe *az-zahr*, que quiere decir: *el dado para jugar*. Las culturas egipcia, griega y romana, participaron de esta afición a los juegos de azar y se conservan restos veraces del uso lúdico de huesos de animales u otros objetos.

Históricamente, se asocia el origen de la teoría moderna de la probabilidad a un carteo entre B. Pascal (1623–1662) y P. Fermat (1601–1665), después de las preguntas que el caballero de Méré hizo al primero, en torno a ciertos juegos de azar relacionados con el lanzamiento de un dado y a métodos de reparto de apuestas en partidas no conclusas (§4.2).

Más recientemente, sobre todo a raíz de los trabajos de A. Kolmogórov (1903–1987), se desarrolló una teoría axiomática, formalizada y abstracta de la probabilidad. Estos trabajos han tenido gran influencia en los sistemas de enseñanza, dando prioridad al desarrollo más abstracto y normativo de la teoría (cap.5).

Enfoque. Nos interesa recuperar la visión más intuitiva, referida a situaciones reales: desde el lanzamiento de un dado, hasta el análisis de situaciones paradójicas que puedan darse en un sistema electoral. El desarrollo teórico de la probabilidad se hará en la medida de las necesidades concretas que se tengan. El camino es claro: *de la realidad, al modelo; del juego, a la formalización.*

Por otro lado, la modelización de situaciones reales, conllevará en muchos casos el diseño de simulaciones que permitan un estudio experimental de la probabilidad. En este sentido, el estudio teórico, forma parte de un modelo de estudio más amplio, como complemento ideal al trabajo empírico.

Estructura. El libro está estructurado en ocho capítulos. El capítulo 1 introduce, por medio de un sencillo juego, las nociones fundamentales de forma relacionada; en particular, se introduce la relación fundamental entre frecuencia y probabilidad: la *ley del azar*. En los capítulos 2 y 3 se desarrolla la noción central de *contar*: en el capítulo 2 se explican algunas técnicas generales de recuento de casos; en el capítulo 3 se sistematiza el cálculo combinatorio de ciertas situaciones por medio de las nociones de permutación, variación y combinación.

En los capítulos 4 y 5 se introduce y explica el concepto de probabilidad: en primera instancia, se hace un uso intuitivo, informal, ligado a situaciones concretas, se sugiere cierta notación y la necesidad de desarrollos teóricos explicativos (cap.4); en segundo término, se hace un desarrollo de la teoría elemental de la probabilidad (cap.5).

Los dos últimos capítulos, representan una amplicación del trabajo realizado: el capítulo 6 resalta la utilidad de la teoría de la probabilidad para tener criterios de decisión en diferentes situaciones; el capítulo 7 centra su atención en la definición de funciones de probabilidad, se introducen las nociones de *variable aleatoria* y de *distribución de probabilidad* (como instrumento teórico de modelización de situaciones reales).

El libro se completa con siete anexos de distinta naturaleza: desarrollo de cuestiones teóricas (anexos A, C, D, F y G), explicación de problemas históricos (anexos B y E) o instrumentos de trabajo para la resolución de problemas (anexo H). Todos ellos representan un material complementario, de profundización o desarrollo, con un marcado carácter teórico.

Agradecimiento. Un modo sencillo de introducir figuras en un documento editado con LaTeX consiste en producir un gráfico con un *software* especializado y guardarlo en formato *eps*. A excepción de los diagramas de barras de las distribuciones de probabilidad del capítulo 7, que han sido producidos automáticamente con `Mathematica`, el resto de figuras que se presentan en el texto han sido construidas o retocadas por la diagramadora Carola García Vilela, utilizando el programa de diseño gráfico CorelDraw!. El trabajo está a la vista: unas figuras precisas, que ayudan a la comprensión del libro.

Granada, 6 de mayo de 2004

Miguel R. Wilhelmi

Índice general

Capítulo 1

La carrera

El juego de *La carrera* permite introducir de forma relacionada los conceptos clave de *recuento sistemático, frecuencia, probabilidad y recogida, organización, visualización y análisis de datos*, que serán desarrollados con detalle en los capítulos siguientes; así, estos conceptos se introducen de forma intuitiva, ligados al juego, y, por lo tanto, las definiciones que se darán no serán rigurosas.

1.1. El juego

El juego es para dos personas. Se necesita un tablero como el que se muestra a continuación (con once filas numeradas del 2 al 12 y 11 columnas, la última de las cuales está marcada con la palabra META), 10 fichas de dos colores distintos (5 de cada color) y dos dados (numerados del 1 al 6).

2											■
3											M
4											E
5											T
6											A
7											■
8											M
9											E
10											T
11											A
12											■

Reglas de juego

1. Alternativamente, cada uno de los contrincantes, escoge un número comprendido entre 2 y 12 (posibles resultados en la suma de un par de dados), colocando una ficha en la casilla correspondiente. Una vez distribuidos 10 de los 11 números, se empieza a jugar.

2. Por turno, lanzan los dados cada uno de los contrincantes. Si la suma de los dados es uno de los números escogidos por el lanzador, éste desplaza la ficha correspondiente hacia delante una casilla.

3. Si la suma de los dados es el número que no ha sido escogido por ninguno de los dos adversarios, el jugador del turno escoge una de sus fichas (la que quiera) y la mueve hacia delante una casilla.

4. Si la suma de los dados es un número del adversario, las fichas quedan como están.

5. Gana el jugador que consigue llevar una de sus fichas hasta la meta.

Juegue ahora una partida para familiarizarse con el juego. Para ello, le sugerimos construya un tablero similar al que se ha mostrado, pero más grande. Si no tuviera alguién con quien jugar, simule una partida, tal y como se jugaría si hubiera dos jugadores.

¿Qué números escogerá con preferencia? ____________________.

¿Qué números no escogerá? ____________________.

Si tuviera que escoger entre el 3 y el 11, ¿cuál tomaría? __________.

Si tuviera que escoger entre el 5 y el 9, ¿cuál tomaría? __________.

¿Qué números prefiere: "grandes" o "pequeños"? __________.

¿Da igual los números que se escojan? ____________________.

¿Todo es cuestión de suerte? ____________________.

Si se juegan 10 partidas, ¿es razonable pensar que ganará una partida cada número elegidos? __________. ¿Por qué? __________________________ ____.

Si se juegan 100 partidas, ¿se debe esperar que, más o menos, gane 10 partidas cada número elegido? __________. ¿Por qué? ____________________ ____.

1.2. Recogida de datos

Para poder analizar el juego es preciso tomar datos. Al responder a las preguntas formuladas al final de la sección anterior ha establecido ciertas reglas que intuye suceden. El análisis del juego, debe conducir a la aceptación o rechazo de las hipótesis que han regido las elecciones de las fichas.

Para dicho análisis, es preciso jugar varias partidas y tomar datos. ¿Qué datos cree usted que serán relevantes? ______________________
____
____.

Por otro lado, es también necesario tener una forma cómoda de almacenar estos datos, esto es, *codificar* la información, de tal manera que sea fácil su organización y análisis posteriores.

La intención es analizar el juego, no quién lo gana. Con otras palabras, se pretende estudiar si hay elecciones de los números más convenientes que otras y, en tal caso, cuáles. Por lo tanto, los datos que interesa tomar son aquellos que se refieren a números escogidos, números ganadores, movimientos realizados, etc. Mas no, aquellos que señalen si el ganador ha sido fulano o mengano.

Juegue diez partidas y complete la tabla siguiente. En la casilla que indica el número que no ha sido escogido en una determinada partida coloque una equis (X); en el resto, el número de casillas que ha avanzado (entre 0 y 11, ambos inclusive[1]).

Partida	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Gana
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												

1.3. Organización de datos

Una vez que haya jugado las 10 partidas habrá obtenido unos resultados parecidos a los que muestran en la tabla siguiente, donde se observa que los números intermedios son los que más se han movido; en particular, la ficha 7 es la que más partidas ha ganado: cuatro.

[1]El cero (0) indica que la ficha no se ha movido. El 11 que la ficha ha llegado a la meta.

Partida	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Gana
1	X	2	10	8	10	11	4	6	3	2	1	Ficha 7
2	X	3	5	5	11	1	6	2	5	1	2	Ficha 6
3	0	1	6	5	2	5	3	X	11	2	1	Ficha 10
4	2	2	1	3	3	11	10	5	5	X	2	Ficha 7
5	2	2	5	X	10	8	11	3	6	3	3	Ficha 8
6	1	3	X	5	11	5	4	8	5	3	1	Ficha 6
7	1	2	11	9	6	8	6	6	X	0	2	Ficha 4
8	1	X	3	7	4	11	5	6	3	0	2	Ficha 7
9	1	X	7	8	10	6	11	6	1	5	1	Ficha 8
10	2	2	2	5	3	11	X	5	3	1	0	Ficha 7

Por la simple observación realizada anteriormente, es posible tomar algunas decisiones respecto a la elección de los números: se puede suponer que, si las condiciones del juego no varían, los números "centrales" seguirán saliendo con más asiduidad y, por lo tanto, los jugadores escogerán con preferencia estos números centrales y dejarán sin seleccionar los números extremos (el 2 o el 12). ¿Estas elecciones coinciden con las que usted ha intuido al principio del capítulo? __________. ¿Hay algún otro criterio que considere usted conveniente tener en cuenta? ______________________________

____.

La tabla siguiente muestra los resultados de otras 12 partidas. ¿Considera adecuado que se haya dejado de elegir el número 2 en la mayoría de las partidas? __________. ¿Es más fácil obtener 2 o 12? __________.

Partida	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Gana
11	1	3	4	4	10	11	7	8	4	2	X	Ficha 7
12	X	3	3	3	3	3	11	9	1	4	1	Ficha 8
13	X	2	1	4	11	3	6	6	3	1	2	Ficha 6
14	X	3	1	6	7	11	9	3	5	2	1	Ficha 7
15	X	7	5	6	6	11	7	6	8	2	1	Ficha 7
16	X	2	3	11	4	10	5	4	3	4	2	Ficha 5
17	X	2	6	11	9	3	10	8	5	3	1	Ficha 5
18	X	6	5	11	7	10	10	7	10	3	3	Ficha 5
19	3	4	2	2	5	11	5	6	3	3	X	Ficha 7
20	X	2	4	5	5	11	7	8	7	4	4	Ficha 7
21	X	4	3	11	8	8	6	8	5	4	0	Ficha 5
22	X	1	2	3	4	11	1	2	3	2	3	Ficha 7

Por otro lado, es posible organizar los datos obtenidos para las 22 partidas de forma sinóptica en una tabla que permita responder a las preguntas:

1. ¿Cuántas partidas ha ganado cada una de las fichas?

2. ¿Cuántos movimientos corresponden a cada una de las fichas?

Ficha	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Mov.	14	56	89	132	149	180	149	122	99	51	33	1074
Ganadas	0	0	1	4	3	10	3	0	1	0	0	22

El número de movimientos realizados por cada ficha representa la *frecuencia absoluta*, esto es, número de veces que ha salido 2, 3, 4, ... O bien, número de veces que ha ganado la ficha 2, 3, 4, ... Por otro lado, es interesante saber no sólo cuántas veces ha ocurrido un suceso, sino también cuántas veces podía haberlo hecho. De forma más precisa: ¿cuál es la relación entre las veces que ha ocurrido un *suceso* y las veces que podía haber sucedido? En el ejemplo, se han lanzado 1074 veces los dados y sólo 14 veces los dados han sumado 2; 56 veces, 3; 89 veces, 4; 132 veces, 5; ... Por otro lado, de las 22 partidas jugadas, las fichas 2, 3, 9, 11 y 12 no han ganado ninguna, mientras que la ficha 7 ha ganado 10 de ellas.

Se llama *frecuenca relativa* a esta relación: cociente entre el número de veces que ha ocurrido un suceso (movimientos realizados por una ficha, veces que ha ganado cada una de ellas) y el número de veces que se ha realizado el experimiento (movimientos realizados, partidas jugadas).

Por último, en muchas ocasiones interesa mostrar la relación entre el número de veces que ha ocurrido un suceso y las veces que se ha realizado un experimento en *tantos por ciento* (%). Para ello, basta multiplicar las frecuencias relativas por 100.

La tabla siguiente muestra las frecuencas relativas y los porcentajes, tanto de los movimientos como de las partidas ganadas.

Ficha	f_r (mov.)	f_r (p. gan.)	% (mov.)	% (p. gan.)
2	0,013	0	1,3	0
3	0,052	0	5,2	0
4	0,083	0,0455	8,3	4,55
5	0,123	0,1818	12,3	18,18
6	0,139	0,1364	13,9	13,64
7	0,167	0,4545	16,7	45,45
8	0,139	0,1364	13,9	13,64
9	0,114	0	11,4	0
10	0,092	0,0455	9,2	4,55
11	0,047	0	4,7	0
12	0,031	0	3,1	0
Total	1	1	100	100

Así, se puede afirmar que, aproximadamente, el 17 % de los momivientos realizados han sido con la ficha 7 y, además, 45 % de las partidas jugadas las ha ganado esta ficha.

1.4. Visualización de datos

La información sintetizada (p.5) puede ser visualizada por medio de gráficos: *diagramas que explican un fenómeno*. En la figura siguiente se pueden ver dos *diagramas de barras* donde se han representado las frecuencias absolutas del número de movimientos realizados (diagrama 1) y del número de veces que ha ganado cada una de las fichas (diagrama 2).

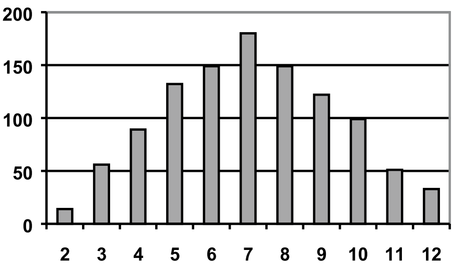


Diagrama 1

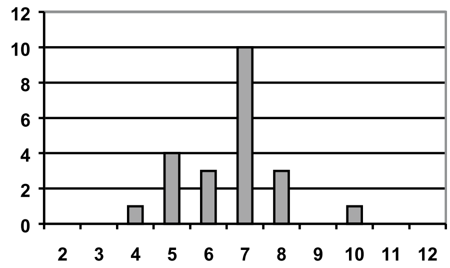


Diagrama 2

A continuación, se muestran otros dos diagramas: uno de barras, donde se han representado las frecuencias relativas del número de movimientos realizados (diagrama 1); otro, un *diagrama circular* o *de sectores*, donde se han representado el tanto por cierto de partidas ganadas por cada una de las fichas, que, por supuesto, han ganado alguna partida (diagrama 2).

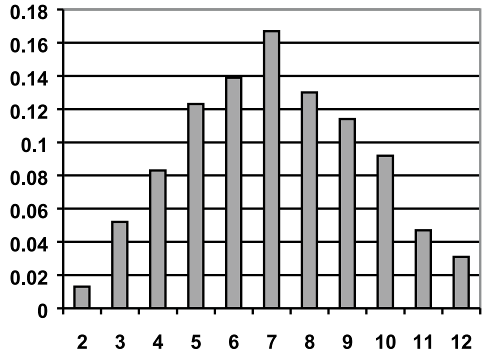


Diagrama 1

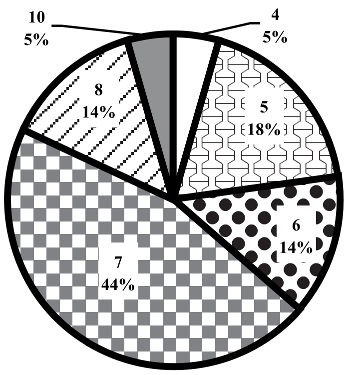


Diagrama 2

Los diagramas que se han mostrado (de barras y circular) permiten ver "de golpe" la información que se ha recogido en las diferentes tablas[2].

1.5. Conjeturas

A partir del trabajo realizado es posible enunciar alguna *conjetura*; en concreto, un juicio sobre cuáles son las fichas que más se mueven y, por lo tanto, qué fichas tendrán que ser escogidas con preferencia si se desea ganar la partida. Estas conjeturas se enuncian en función del análisis de los datos (y la construcción de las tablas de frecuencias absolutas y relativas) y por observación de los diagramas realizados. En particular:

Si usted escoge primero, ¿qué ficha tomará en primer lugar? _____.

Si usted escoge segundo, ¿qué ficha tomará en primer lugar? _____.

A la hora de escoger, ¿qué criterio de selección seguirá? ____.

¿Qué ficha escogerá con preferencia la 2 o la 12? _____.

Si tuviera que escoger entre el 3 y el 11, ¿cuál tomaría? _____.

Si tuviera que escoger entre el 5 y el 9, ¿cuál tomaría? _____.

¿Qué números son "mejores": los "grandes", los "del medio" o los "pequeños"? ____.

¿Da igual los números que se escojan? __________________________.

¿Todo es cuestión de "suerte"? __________________________.

Compare estas respuestas con aquellas que dio al principio del capítulo. ¿Qué diferencias y similitudes hay? ____.

1.6. Validación de conjeturas

Es preciso validar las conjeturas enunciadas en la anterior sección, esto es, llegar a la certeza de su validez o falsedad. Para ello, dos caminos esencialmente distintos pueden realizarse:

1. *Repetición del experimento*: se juegan más partidas y, si los resultados de éstas ratifican las conjeturas formuladas, se puede *esperar* que dichas conjeturas sean verdaderas.

[2]Esta visión "de golpe" justifica la introducción en periódicos y revistas, en noticieros, en facturas de luz, etc., de este tipo de diagramas: en poco espacio, se puede resumir una gran cantidad de información.

2. *Estudio teórico*: ya no se juegan más partidas, sino que se estudia el juego de manera formal, esto es, antes de lanzar los dados, se desea responder a la pregunta: ¿qué número o números se debe esperar que salgan con más asiduidad?

Para la verificación de las conjeturas por repetición del experimento, introduzca las 10 partidas que ha jugado usted (p.3) y verifique si las conjeturas se ajustan también al total de las 32 partidas. En caso de que así sea, queda la incertidumbre del *factor suerte* (¿el jugador que juega con la ficha 7 tiene mucha suerte?) o del *factor trampa* (¿los dados que se utilizan están *trucados o defectuosos* y por eso sale con más frecuencia el número 7?). Sin embargo, si observamos cómo se han obtenido los resultados, no parece natural que estos puedan explicarse en su totalidad por los factores *suerte* y "trampa": las 22 partidas a las que se refiere el estudio han sido jugadas por 11 parejas distintas (dos partidas cada pareja), utilizando dados distintos y, por otro lado, los resultados que usted ha obtenido, también difieren en las personas involucradas y los dados utilizados.

Si bien el método *experimental* suele dar resultados bien adaptados a la situación, no permite comprender con profundidad el juego. En general, la compresión más aguda se sigue de un estudio teórico. A continuación haremos un análisis formal del juego.

Al lanzar los dos dados obtenemos dos números comprendidos entre 1 y 6, ambos inclusive: uno por cada dado. Si representamos por la dupla (2,3) el resultado "se ha obtenido 2 con el primer dado y 3 con el segundo" y por la dupla (3,2) el resultado "3 con el primero y 2 con el segundo", los posibles resultados son:

Suma	Sucesos favorables	Total
2	(1,1)	1
3	(1,2) (2,1)	2
4	(1,3) (2,2) (3,1)	3
5	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	4
6	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	5
7	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	6
8	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	5
9	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	4
10	(4,6) (5,5) (6,4)	3
11	(5,6) (6,5)	2
12	(6,6)	1

Por lo tanto, hay 36 formas de caer los dados: una suma 2; 2 suman 3; . . . ; 6 suman 7; etc. Con otras palabras, si se lanzan 36 veces los dos dados, hay que *esperar*, por ejemplo, que, aproximadamente, 6 de ellos sumen 7 y sólo uno sume 2 o 12. La relación que se establece entre el número de formas que *favorecen* a un determinado suceso y el número de formas *posibles* es la *probabilidad* de que dicho suceso ocurra. Por ejemplo, la probabilidad de que al lanzar los dados se obtenga 5 es: 4/36, esto es, el número de formas con las que se obtiene 5 al lanzar los dados entre el número de formas posibles. Se concluye, por lo tanto, que obtener 7 es el suceso más *probable* (probabiliad 6/36) y obtener 2 o 12 son los sucesos menos probables (probabilidad 1/36). ¿Están estas afirmaciones en desacuerdo con las conjeturas que usted había formulado? ____.

En la tabla siguiente se pueden comparar las frecuencias absolutas y relativas del número de movimientos y las probabilidades de los sucesos: ¿qué similitudes y diferencias observa?

Ficha	f_a	f_r	Formas	Probabilidad
2	14	0,013	1	$1/36 \approx 0,028$
3	56	0,052	2	$2/36 \approx 0,056$
4	89	0,083	3	$3/36 \approx 0,083$
5	132	0,123	4	$4/36 \approx 0,111$
6	149	0,139	5	$5/36 \approx 0,139$
7	180	0,167	6	$6/36 \approx 0,167$
8	149	0,139	5	$5/36 \approx 0,139$
9	122	0,114	4	$4/36 \approx 0,111$
10	99	0,092	3	$3/36 \approx 0,083$
11	51	0,047	2	$2/36 \approx 0,056$
12	33	0,031	1	$1/36 \approx 0,028$
Total	1074	1	36	1

1.7. Predicción y toma de decisiones

Por lo estudiado en las otras secciones, es *más probable* que gane la ficha 7; por lo tanto, si debemos elegir en primer lugar, escogeremos esta ficha. Además, el criterio de selección puede enunciarse, brevemente: “tomar las fichas centrales y dejar las extremas”. Este criterio se concreta en una *toma de deciones*: por ejemplo, si me toca elegir y la fichas 5, 6, 7 y 8 han sido tomadas, selecionaré la ficha 9 (¿por qué?).

Es claro, por otro lado, que no siempre estas elecciones tendrán como consecuencia la victoria en la partida: siempre queda un espacio para la suerte. Las elecciones nos dan *más probabilidades* de ganar, mas no *aseguran* que vayamos a hacerlo. La probabilidad es, por lo tanto, una forma de cifrar la *esperanza* de que algo suceda y, de esta manera, *anticiparnos* a lo que en la realidad acontecerá.

Con otras palabras, *la frecuencia resume el resultado de un experimento (pasado); la probabilidad, anticipa el resultado que se debe esperar al realizar dicho experimento (futuro).*

1.8. Resumen

El ejemplo propuesto nos ha permitido introducir los objetos fundamentales que serán desarrollados en los siguientes capítulos. Estos son:

1. *Combinatoria o recuento sistemático*: estrategias de control sobre el recuento de los casos, para no contar por *exceso* (contar más de una vez un mismo caso) ni por *defecto* (omitir casos). Por ejemplo, para la determinación del número de formas en que pueden caer los dados se ha seguido el siguiente criterio: las duplas (n, m) y $(n+1, m-1)$ suman lo mismo (p.8).

2. *Análisis de datos*: toma, ordenación, síntesis y visualización de datos, cuyo fin es inferir alguna conjetura, que tendrá que ser validada por un análisis experimental o teórico.

3. *Probabilidad*: la inferencia de conclusiones a partir de un estudio teório suele estar basado en el cálculo de probababilidades. Brevemente, la probabilidad cuantifica la *esperanza* de que un suceso ocurra.

4. *Frecuencia absoluta*: número de veces que ha ocurrido un determinado suceso, repetido un experimento aleatorio (que depende del azar) un número finito de veces en las mismas circunstacias. Por ejemplo, 180 es la frecuencia absoluta del suceso “sumar 7 al lanzar los dados”, después de 1074 lanzamientos.

5. *Frecuencia relativa*: relación entre la frecuencia absoluta y el número de veces que se ha realizado el experimento. Por ejemplo, 180/1074 es la frecuencia relativa del suceso “sumar 7”, después de 1074 lanzamientos.

6. *Ley del azar*: Si un experimento aleatorio se repite “muchas” veces, las frecuencias relativas de un suceso determinado se aproximan a la probabilidad (teórica) de que dicho suceso ocurra. Esta ley permite

predecir resultados y, por lo tanto, es un indicativo para la toma de decisiones.

Con otras palabras, la ley del azar es un puente tendido entre el pasado y el futuro, entre las frecuencias (lo que ha ocurrido) y las probabilidades (lo que se espera suceda).

1.9. Autoevaluación

Simule el siguiente juego para dos personas. Se numeran 4 casillas del 0 al 3 (ver figura adjunta). Cada jugador, por turno, escoge una casilla y coloca una ficha en ella, de modo que las cuatro casillas quedan cubiertas: dos con fichas de un color; las otras dos, con otro color diferente. También por turno, cada jugador lanza 3 monedas (o bien tres veces la misma moneda), cuenta el número de caras y avanza, si es suya, la ficha que está en la casilla correspondiente. Gana el primero que alcanza la meta con alguna de sus fichas.

Juegue 10 partidas y haga un estudio completo de probabilidades, especificando claramente todas las fases. Distinga claramente entre frecuencia y probabilidad.

0			**M**
1			**E**
2			**T**
3			**A**

Capítulo 2

Recuento sistemático

Brevemente, la combinatoria es el *arte de contar sin enumerar directamente todos los casos*. Para ello, es preciso aprender técnicas de ordenación, colocación, selección, etc., de objetos. Esta tarea no es fácil. Este capítulo pretende introducir un número de técnicas y procemientos que contribuyan a ello.

2.1. Principios de la suma y del producto

En ciertas circustancias, es posible contar efectivamente todos los casos, esto es, es posible afirmar "hay *tantas* disposiciones, configuraciones, modos de colocar y éstas son…" (Dando explícimante todas ellas). Sin embargo, esto no siempre es posible o resulta muy tedioso: se necesitan métodos de cálculo en los que no se den (escriban, pinten) explícitamente todas las configuraciones posibles, pero se tenga la seguridad de cuántas son.

Para ilustrar algunos métodos se plantea resolver el siguiente problema: ¿cuántas banderas de 3 bandas horizontales pueden formarse con 3 colores distintos si se utilizan los tres?

El primer método consiste en la *construcción efectiva* de todas las posibles banderas, esto es, se pintan (figura 2.1). Pintar 6 banderas no es complicado ni tedioso. Sin embargo, es posible simplificar la construcción efectiva eligiendo una correcta notación, que nos permita una *simbolización de las figuras.*

En la figura 2.1, se ha simbolizado el color negro con la letra A; el gris, con la letra B; el blanco, con la letra C. De tal forma que la tripla (A, B, C) representa la bandera negro-gris-blanco, en el orden dado: de la banda superior a la inferior. Utilizando esta simbolización: ¿cuántas banderas de cuatro

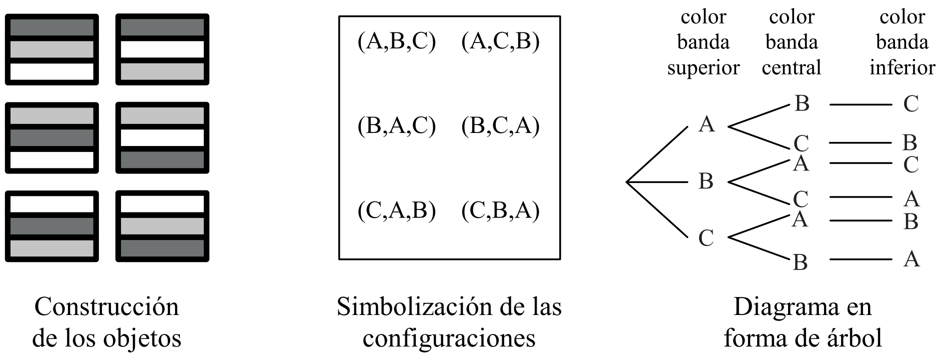


Figura 2.1: Banderas distintas de tres bandas con tres colores distintos.

bandas se pueden construir con cuatro colores? Forme las 24 posibles banderas; para ello, diseñe un método que le asegure no olvidarse ninguna y no repetir una misma bandera.

Si el número de bandas y colores es mayor, tanto el método *recuento efectivo* como el método *simbolización* resultan tediosos: ¿es posible saber cuántas banderas pueden construirse sin construirlas efectiva o simbólicamente? En la figura 2.1 puede verse un diagrama: si la banda superior es pintada de negro, para pintar la banda central quedan sólo el gris y el blanco; en el supuesto de que ésta se pinte con gris, la inferior tedrá que pintarse, necesariamente, de blanco. Esto es, para pintar la banda superior se puede escoger entre los tres colores disponibles, para la central de dos y la inferior, toda vez que se han pintado las otras, se pinta con el color restante: $3 \cdot 2 \cdot 1$ banderas pueden pintarse entonces. De esta forma, ¿cuántas banderas de 10 bandas cada una pueden construirse con 10 colores distintos si se utilizan todos? ____________________.

El principio de base que se está utilizando es el siguiente:

Proposición 1 (Principio del producto) *Si una situación puede ocurrir de m maneras y otra de k maneras, entonces ambas situaciones pueden ocurrir de $m \cdot k$ maneras.*

Otro principio básico que se utiliza mucho es el principio de la suma, que permite calcular el número de formas totales en que puede suceder una situación u otra, pero no ambas. Por ejemplo, para ir de un punto a otro de una ciudad se puede ir en un vehículo o haciendo ejercicio. Si el vehículo puede ser una combi, un taxi, un mototaxi o una moto y las formas de desplazarse haciendo ejercicio a pie, corriendo o en bicicleta, entonces el número de formas en que una persona puede ir de un lugar a otro son siete (4 (*motorizado*) + 3 (*haciendo ejercicio*)). En general, se tiene:

Proposición 2 (Principio de la suma) *Si una situación puede ocurrir de m maneras diferentes y otra de k maneras diferentes, incompatibles las unas con las otras, entonces existen $m + k$ maneras en las cuales puede ocurrir la primera o la segunda, mas no ambas.*

El término *incompatible* debe ser entendido correctamente. En el anterior ejemplo, las maneras de ir de un lado a otro “motorizado” o no son incompatibles: o bien se toma un transporte (con motor) o bien se va haciendo ejercicio, no habiendo una forma de hacer las dos cosas simultáneamente. No siempre sucede esto. Por ejemplo, si en una clase hay 12 personas que saben inglés y 5 que saben francés: ¿es posible asegurar que hay 17 personas? ¿Qué sucede si una persona sabe los dos idiomas?...

A continuación se plantean dos problemas que pueden afrontarse con los *principios de la suma y de la multiplicación*. Intente resolverlos y después lea el desarrollo que se hace. Analice no sólo el resultado, sino también el método que se ha seguido. Los dos problemas son:

1. ¿Cuántos números pares de tres cifras significativas mayores que 500 hay? ¿Cuántos números pares de tres cifras significativas menores que 500 hay? ¿Cuántos números pares de tres cifras significativas hay?

2. Una clase está formada por 23 varones y 19 mujeres: ¿de cuántas formas puede elegirse un delegado? ¿de cuántas formas puede elegirse un delegado y un subdelegado?

Un número par de tres cifras significativas mayor que 500 cumple las siguientes condiciones: la cifra de las centenas debe ser 5, 6, 7, 8 ó 9; la cifra de las decenas puede ser cualquier número comprendido entre 0 y 9, ambos inclusive; la cifra de las unidades es un número par (0, 2, 4, 6 u 8); por último, es necesario excluir el número 500 (que cumple las condiciones anteriores, pero no es más mayor que 500, obviamente). De esta forma, la cifra de las decenas puede ser escogida de 5 maneras distintas; la de las decenas, de 10 maneras distitas; la de las unidades, de 5 maneras distintas. Por lo tanto, por el principio de la multiplicación, existen $5 \cdot 10 \cdot 5$ números mayores o iguales que 500, esto es, excluyendo el número 500, quedan 249 números pares de tres cifras mayores que 500.

Por un razonamiento similar, se concluye que existen $4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$ números pares de tres cifras significativas (se excluye la posibilidad de que la cifra de las centenas sea 0). Por el principio de la suma, hay $249+1+200 = 450$ números pares de tres cifras significativas. Obsérvese que los números obtenidos en cada grupo son "incompatibles": un número es menor, igual o mayor que 500, pero no puede ser mayor y menor a la vez, por ejemplo. Este hecho se conoce como la *ley de tricotomía de los números reales.*

Proposición 3 (Ley de tricotomía) *Dados dos números reales a y b, se cumple una y justamente una de las siguientes propiedades:*

$$a < b; \qquad a = b; \qquad a > b$$

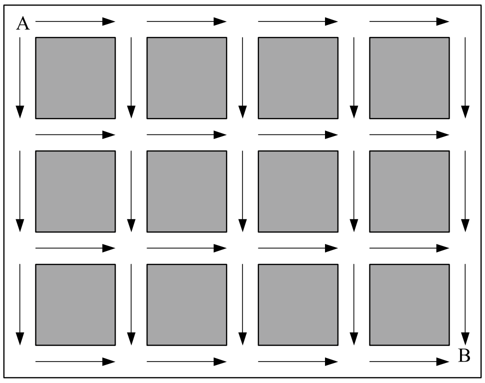
Por otro lado, para la elección del delegado, como no se especifica si este debe ser varón o mujer, hay, por el principio de la suma, $23 + 19 = 42$ posibilidades, puesto que, obviamente, ambos grupos humanos son "incompatibles": toda persona es o varón o mujer. Para la elección del subdelegado dos situaciones pueden establecerse: una, que una persona pueda tomar ambos cargos[1]; otra, que una persona no pueda tomar ambos cargos (situación que normalmente se adopta)[2]. En la segunda situación, el delegado se elige entre las 42 personas de la clase, mientras que, una vez que se ha elegido éste, el subdelegado se elige de las 41 restantes; por lo tanto, hay, por el principio del producto, $42 \cdot 41 = 1\,722$ formas de elegir a ambos representantes. En la primera situación, tanto el delegado como el subdelegado puede ser elegido entre los 42 estudiantes y, por lo tanto, hay: $42 \cdot 42 = 1\,764$ formas de elegir a la persona o personas que ocuparan los cargos.

2.2. El dilema del taxista

Un taxista tiene que ir de un punto A de una ciudad a un punto B (ver figura siguiente). Para ir de A a B el taxista tomará las calles horizontales siempre en el sentido izquierda-derecha y las calles verticales siempre en el sentido arriba-abajo, esto es, nunca retrocerá. ¿De cuántas formas puede el taxista realizar el trayecto?

[1]Un forma de votación que puede seguirse para que esto suceda es la siguiente: cada alumno pone en un papel quien considera más adecuado para ocupar cada uno de los cargos, esto es, todos los alumnos votan por su candidato para delegado y su candidato para subdelegado. El recuento puede hacer que una persona consiga el máximo de votos en ambas clasificaciones.

[2]Un forma de votación para ello es la siguiente: cada alumno pone en un papel quien considera más adecuado para ser delegado. La persona con más votos es el delegado; la segunda más votada, el subdelegado.



2.2.1. Diseño de una estrategia

Lo primero que se tiene que hacer es diseñar una estrategia que permita contar todos los casos sin olvidarse ninguno. Para ello una observación: el taxista no puede sino desplazarse en sentido horizontal o vertical, de tal forma que si arranca horizontalmente tendrá que seguir en este sentido hasta la primera intersección, donde podrá continuar sobre la misma calle o voltear a su derecha para bajar por la perpendicular, así sucesivamente. Estos sentidos de movimiento están señalizados en la figura anterior. Diseñe un método que le permita contar los posibles caminos y cuente éstos; después siga con la lectura.

Lo primero que se puede hacer es esquematizar el diagrama dado: lo importante son las intersecciones de las calles, puesto que entre ellas el taxista no puede variar la ruta. En la figura 2.2 se muestra un esquema simplificado de la ciudad: cada intersección está señalada por un círculo; así, partiendo de la intersección A el taxista puede ir a la intersección 1 o 5; si ha avanzado horizontalmente, llegará al nodo 1 y puede decir ir a la intersección 2 o 6; si decide voltear, avanzará hasta el nodo 6 y, nuevamente, tendrá que tomar una decisión. ¿Cuántos posibles caminos puede realizar?

Para hacer el recuento total de los caminos se puede seguir la siguiente estrategia: construir un árbol donde se indiquen las dos posibles opciones en cada caso, de tal forma que una ruta esté marcada por una secuencia de nodos (figura 2.3). Si se procede de esta forma, no es necesario escribir explícitamente todos los posibles caminos; por ejemplo, si se ha establecido que desde el nodo 7 hay 6 posibles caminos, siempre que lleguemos a él tomaremos este hecho como dato, sin establecer otra vez cuáles son éstos. Como se puede observar en la figura 2.3 el número total de caminos es 35. ¿Qué principio ha se utilizado para determinar este número?

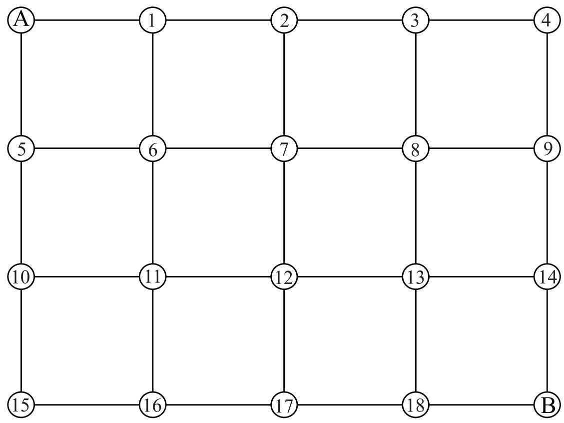


Figura 2.2: Ciudad esquematizada

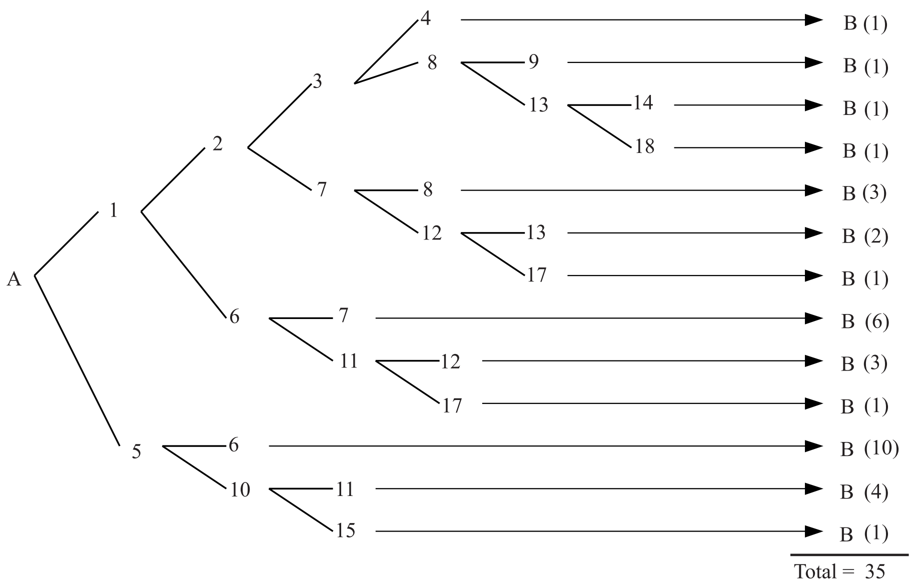


Figura 2.3: Árbol para el recuento de las posibles rutas del taxista

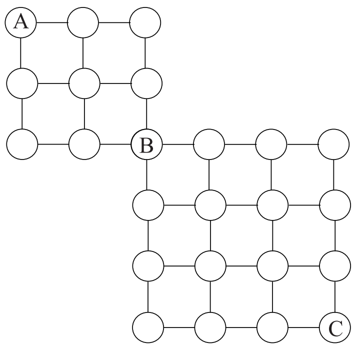
2.2.2. Variables del problema

El problema planteado puede generalizarse, atendiendo a las variables que lo determinan: *número de cuadrículas* y *tipo de movimientos permitidos*. Vamos a analizar estas dos variables por separado.

En general, los taxistas no realizan siempre un mismo recorrido, sino que van haciendo carreras según las necesidades de los usuarios: por lo tanto, no siempre se moverán en una "cuadrícula" 4×3. En general, tendrán que moverse en cuadrículas $n \times k$. Determine, para las variables n y k variando entre 1 y 5 el número total de movimientos:

	k (columnas)				
n (filas)	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Respecto a la variable *movimientos permitidos*, los taxistas no escogen las rutas al azar, sino que consideran unas determinadas en función de la hora, densidad de tránsito, calles en obras, etc. De esta forma, es posible plantearse preguntas del tipo: ¿cuántas rutas posibles hay entre los puntos A y C pasando por B? 6 para ir de A a B y 20 de B a C: en total $6 \cdot 20$, puesto que ____.



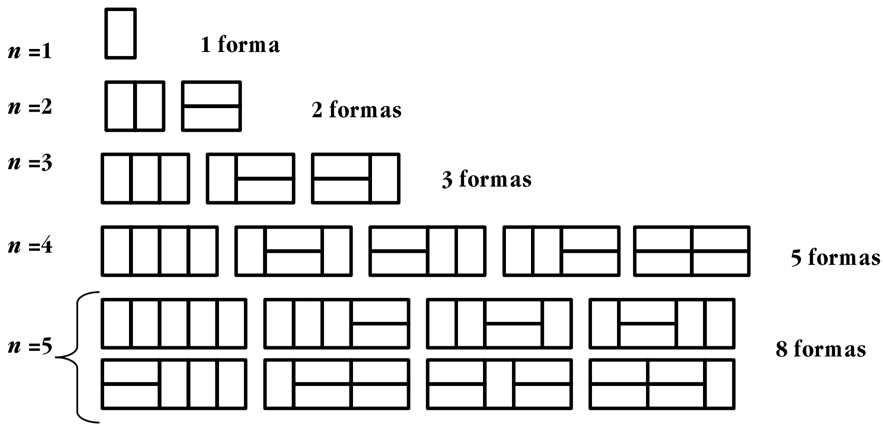
2.3. La sucesión de Fibonacci

Se dispone de losetas de tamaño 1×2 y se desea cubrir una superficie de dimensiones $2 \times n$, donde n es un número natural. ¿De cuántas formas se puede hacer?

2.3.1. Casos particulares

En muchas circustancias, no se conoce un medio para el recuento de casos en una situación concreta. Un método consiste en simplificar el problema inicial, formulando uno nuevo que sí se sepa resolver e intentar inferir de éste alguna conclusión. Una forma eficaz de hacerlo consiste en estudiar un conjunto de casos particulares.

En el problema que se plantea, esto supone, en particular, responer a la pregunta: ¿de cuántas formas se puede recubrir una superficie de dimensiones $2 \times n$, si n toma los valores 1, 2, 3, 4 o 5? Para evitar equivocaciones, es preciso encontrar un método que asegure pintar todas las configuraciones y que no se repite ninguna. En la figura siguiente se pueden ver los distintos recubrimientos de superficies con $n = 1$, 2, 3, 4 y 5.



¿Cómo se han construido? ¿Qué regla se ha seguido para poder asegurar que se han considerado todas las posibles configuraciones y que no se ha dejado ninguna? A partir de estas representaciones, ¿es posible determinar una regla que permita ir dibujando las configuraciones con la confianza de pintarlas todas (y de no repetir ninguna)? ______________________________
____.

2.3.2. Inferencia de una regla de formación

Inferir es sacar una consecuencia o deducir una cosa de otra. Por observación numérica, se puede observar que, *al menos para los casos particulares estudiados*, se tiene la regla de recurrencia de Fibonacci (1170–1250) con primeros términos 1 y 2: a partir del término tercero, el número de disposiciones es la suma de las disposiciones con una y dos losetas menos:

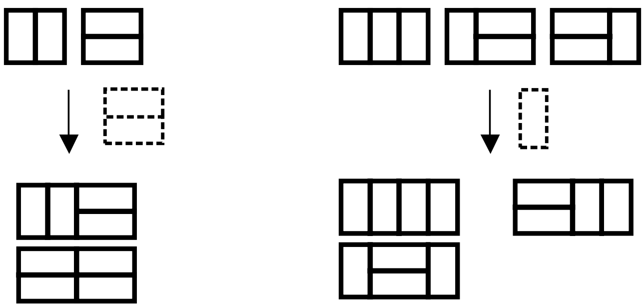
Si $n = 3$: $1 + 2 = 3$ disposiciones diferentes.
Si $n = 4$: $2 + 3 = 5$ disposiciones diferentes.
Si $n = 5$: $3 + 5 = 8$ disposiciones diferentes.

Si esto esta regla es válida para cubrir una superficie $2 \times n$, $n \in \mathbb{N}$, con $n = 6$ se tendrán 13 formas, ¿puede conseguirlas? ¿Cuántas posibles formas se tendrán si $n = 7$, 8, 9 o 10? _________________________.

2.3.3. Validación de la regla

La intuición numérica ha mostrado una regla que es preciso validar, esto es, demostrar que es verdadera para un n arbitrario; en concreto, es necesario justificar que el número de configuraciones para recubrir una superficie $2 \times n$ se obtiene sumando el número de las diferentes configuraciones posibles de las losetas para recubrir las superficies $2 \times (n - 1)$ y $2 \times (n - 2)$.

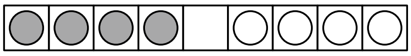
La aceptación de la regla se sigue de la construcción misma de las configuraciones sucesivas: si $n = 4$, por ejemplo, las configuraciones que se pueden hacer son las que resultan de añadir una loseta vertical a las configuraciones posibles con $n = 3$ y aquellas que se obtienen agregando dos losetas horizontales a las configuraciones con $n = 2$, como se muestra en la figura.



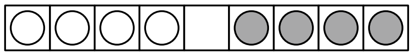
En general, el número de formas en que puede cubrirse una superficie $2 \times n$ sigue la ley de recurrencia de Fibonacci: las posibles combinaciones de añadir una loseta vertical a las configuraciones para recubrir una superficie $2 \times (n - 1)$ y aquéllas que se obtienen agregando dos losetas horizontales a las configuraciones de recubrimiento de una superficie $2 \times (n - 2)$.

2.4. El solitario Sol y Luna

El solitario *Sol y Luna* consta de un tablero con nueve casillas y ocho fichas, cuatro de un color y cuatro de otro (generalmente, blanco y negro, que representan el día y la noche, de ahí el nombre del juego). El objetivo del juego consiste en llevar la fichas de la posición inicial a la final, mediante movimientos *legales*:



Posición inicial



Posición final

Un movimiento *legal* es aquel que respeta las reglas del juego. Éstas son:

1. Las fichas negras se desplazan siempre de izquierda a derecha; las blancas, en sentido opuesto.

2. Una ficha puede moverse si la casilla contigua (en el sentido de desplazamiento que le es permitido) está vacía; o bien, puede saltar (en el sentido de desplazamiento que le es permitido) por encima de una ficha del otro color, siempre que el cuadrado que haya a continuación esté libre (de igual forma que en el juego de las damas, pero sin "comer" ninguna ficha).

3. En cada casilla, hay como máximo una ficha.

Un estudio combinatorio del problema debe conducir a responder preguntas del tipo: ¿de cuántas formas se pueden disponer las fichas en el tablero si son colocadas al azar?, ¿cuántas de estas formas se pueden alcanzar mediante movimientos legales?, ¿cuántos movimientos son necesarios para completar el juego?, etc.

2.4.1. Codificación de la situación: notación pertinente

En muchas situaciones el problema, tal y como es planteado no será *operativo*; de hecho, en general, los juegos físicos manipulativos van a requerir de una notación que permita el recuento de casos.

Como recordará, en el capítulo 1 se observó que la dupla (2,3) podía significar, para el lanzamiento de los dos dados, que se ha obtenido 2 con el primer dado y 3 con el segundo; mientras que la dupla (3,2) representaba que con el primero se ha obtenido 3 y 2 con el segundo. En el caso del solitario Sol y Luna, es posible utilizar una notación similar: la 9-*upla*[3]

[3] Por simplicidad, en matemáticas, se dice *n-upla* a las reuniones de n elementos ordenados ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$), utilizándose las voces castellanas únicamente para *uplas* de 2 y 3 elementos, esto es, duplas y ternas.

$(N, N, N, N, X, B, B, B, B)$ representa la posición inicial, mientras que la 9-*upla* $(B, B, B, B, X, N, N, N, N)$ representa la posición final. Esto es, con la letra B se simboliza una ficha blanca; con la letra N, una ficha negra; con la letra X, el espacio vacío.

Como en el caso anterior, antes de afrontar todo el problema, resolveremos algunos casos más simples: ¿cuántas disposiciones se tienen si se juega el solitario con 2 fichas, una de cada color? En otras palabras, ¿cuántas triplas se pueden formar con las letras B, X y N? No es difícil darse cuenta de que son seis. Éstas son:

$$(B, N, X)\ (B, X, N)\ (N, B, X)\ (N, X, B)\ (X, B, N)\ (X, N, B)$$

El criterio que se ha seguido se funda en la ordenación natural de las letras del alfabeto. Ahora bien, ¿cuántas disposiciones se tienen si se juega el solitario con 4 fichas, dos de cada color? La situación se complica, puesto que dos fichas del mismo color resultan *indistinguibles*, esto es, jugan el mismo papel en el solitario y, por lo tanto, la configuración (N, N, X, B, B) no se diferencia en nada si las fichas negras se intercambian de lugar:

$$(N \overset{\leftrightarrows}{,} N, X, B, B)$$

En total son 30 posibles configuraciones: ¿puede escribirlas todas? Confeccione un método que le permita construirlas.

2.4.2. Formulación de un nuevo problema

Como se ha visto en el anterior punto, no es fácil calcular todas las formas en que se pueden disponer las fichas en el tablero. En otras palabras, a partir del estudio de las situaciones particulares con 1 y 2 fichas de cada color no es fácil inferir la regla de formación. La dificultad de determinación de tal regla es la repetición de objetos. De esta forma, una estrategia de resolución consiste en suponer que todos los objetos son iguales (*simplificación del problema*) y, después, analizar qué supone que haya objetos indistinguibles (*vuelta a la situaicón original*).

De esta manera, se plantea: ¿de cuántas formas se pueden colocar n elementos diferentes? Si se tiene 1 elemento, este se puede colocar de una sola forma, obviamente; si se tiene 2 elementos, estos se pueden colocar de dos formas diferentes: si se denota por 1 a un elemento y por 2 al otro, entonces las dos posibles configuraciones son (1,2) y (2,1); con 3 elementos, con la notación señalada:

$$\begin{array}{ccc} (3,1,2) & (1,3,2) & (1,2,3) \\ (3,2,1) & (2,3,1) & (2,1,3) \end{array}$$

Si se observa, para construir estas 6 formas diferentes, se ha colocado el objeto “3” delante, en medio, y detrás de los números 1 y 2, en las dos configuraciones en que éstos últimos pueden ser colocados. ¿Cuántas disposiciones distintas se tienen con 4 elementos diferentes?

$$
\begin{array}{llll}
(4,3,1,2) & (3,4,1,2) & (3,1,4,2) & (3,1,2,4) \\
(\ ,1,3,2) & (1,\ ,3,2) & (1,3,\ ,2) & (1,3,2,\ ) \\
(\ ,1,2,3) & & & \\
(\ ,3,2,1) & & & \\
(\ ,2,3,1) & & & \\
(\ ,2,1,3) & & &
\end{array}
$$

¿Puede establecer una regla de formación? ¿Cuántas configuraciones distintas se pueden formar con 5 elementos distintos? ¿Y con 6?

Si observa con detenimiento, el número de configuraciones con cuatro elementos (P_4) se obtiene multiplicando el número de configuraciones que se tenía con tres elementos (P_3) por 4, esto es: $P_4 = 4 \cdot P_3$. Pero más aún, a esta conclusión se llega porque dados tres elementos ordenados existen cuatro formas de colocar el cuarto: 1.- delante de todos ellos; 2.- entre el primero y el segundo; 3.- entre el segundo y el tercero; 4.- detrás de todos ellos. De esta forma, por cada configuración con tres elementos existen cuatro si añadimos uno.

Este procedimiento puede ser extendido para cualquier número natural n: ¿en cuántos lugares se puede situar un objeto si tenemos $n-1$ colocados? Uno, delante de todos ellos; otro, detrás de todos ellos; y $n-2$, intercalado entre los objetos dados. En total, n formas distintas. Se concluye, por lo tanto, que, si P_{n-1} es el número de formas en que se pueden disponer $n-1$ elementos, entonces $P_n = n \cdot P_{n-1}$ es el número de formas en que pueden ser colocadas n objetos, esto es, recurrentemente:

$$
\left\{ \begin{array}{l}
P_n = n \cdot P_{n-1}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N} \\
P_1 = 1
\end{array} \right.
$$

Por lo tanto, el número de formas posibles de ordenar n objetos, $n = 1$,2, 3, 4, 5 es igual a:

$$
\begin{array}{l}
P_1 = 1 \\
P_2 = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 1 \\
P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
P_5 = 5 \cdot P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1
\end{array}
$$

En conclusión, P_n ($n \geq 2$) es el producto de los n primeros números naturales. Este producto se denota de forma abreviada por $n!$: $P_n = n!$, además, $P_1 = 1$.

2.4.3. Vuelta a la situación original

No olvidemos que el problema que ha sido formulado y resuelto (§2.4.2) tiene como fin poder afrontar el problema original que se había planteado: ¿de cuántas formas se pueden colocar las fichas del solitario *Sol y Luna* en el tablero? Tenemos 4 fichas negras, 4 blancas y un espacio en blanco. ¿Podemos decir que el problema se reduce a calcular de cuántas formas se pueden colocar 9 $(4+4+1)$ objetos? _______________.

El problema que debemos resolver puede ser enunciado en los siguientes términos: ¿de cuántas formas pueden colocarse 9 elementos, sabiendo que hay tres grupos de objetos indistinguibles, dos con 4 objetos y uno con 1 sólo objeto? Es posible describir el número de disposiciones posibles en función P_9 y P_4. Antes de seguir leyendo piense cómo podría hacerse esto.

Describiremos un método que se sigue en dos pasos:

1. *Suponer que todos los objetos son distintos.* Por el razonamiento realizado anteriormente: hay $P_9 = 9!$ formas de ordenarlos.

2. *Razonar cuántas ordenaciones son esencialmente distintas*, esto es, reducir las ordenaciones que son equivalentes, puesto que han sido obtenidas intercambiando elementos indistinguibles.

   Si cuatro elementos son indistinguibles, cualquier intercambio que hagamos entre ellos mantiene la misma disposición: existen $P_4 = 4!$ disposiciones equivalentes.

   Si otros cuatro elementos son indistinguibles, también cualquier intercambio que hagamos entre ellos mantiene la misma disposición: existen otras $P_4 = 4!$ disposiciones equivalentes.

   Por lo tanto, existen $\frac{P_9}{P_4 \cdot P_4} = \frac{9!}{4! \cdot 4!}$ disposiciones en esencia diferentes.

2.4.4. *Restricciones del juego

De esta forma, se ha podido determinar el número de formas en que pueden ser colocadas al azar las fichas en el tablero: ¿cuántas de estas posiciones pueden lograrse mediante movimientos legales? ¿cuántos movimientos son necesarios para completar el juego? Responer a estas preguntas no resulta fácil. En lo que sigue se considera el solitario *Sol y Luna* con dos fichas de cada color. Se pretende comprender el problema e intentar obtener alguna regla que pueda ser generalizada.

Hay 30 formas de colocar al azar las cuatro fichas (¿por qué?). Éstas son:

$$
\begin{array}{lll}
x_1 \equiv (X,B,B,N,N) & x_2 \equiv (B,X,B,N,N) & x_3 \equiv (B,B,X,N,N) \\
x_4 \equiv (B,B,N,X,N) & x_5 \equiv (B,B,N,N,X) & x_6 \equiv (X,B,N,N,B) \\
x_7 \equiv (B,X,N,N,B) & x_8 \equiv (B,N,X,N,B) & x_9 \equiv (B,N,N,X,B) \\
x_{10} \equiv (B,N,N,B,X) & x_{11} \equiv (X,N,N,B,B) & x_{12} \equiv (N,X,N,B,B) \\
x_{13} \equiv (N,N,X,B,B) & x_{14} \equiv (N,N,B,X,B) & x_{15} \equiv (N,N,B,B,X) \\
x_{16} \equiv (X,B,N,B,N) & x_{17} \equiv (B,X,N,B,N) & x_{18} \equiv (B,N,X,B,N) \\
x_{19} \equiv (B,N,B,X,N) & x_{20} \equiv (B,N,B,N,X) & x_{21} \equiv (X,N,B,N,B) \\
x_{22} \equiv (N,X,B,N,B) & x_{23} \equiv (N,B,X,N,B) & x_{24} \equiv (N,B,N,X,B) \\
x_{25} \equiv (N,B,N,B,X) & x_{26} \equiv (X,N,B,B,N) & x_{27} \equiv (N,X,B,B,N) \\
x_{28} \equiv (N,B,X,B,N) & x_{29} \equiv (N,B,B,X,N) & x_{30} \equiv (N,B,B,N,X)
\end{array}
$$

Sin embargo, no son todas "construibles", esto es, partiendo de la posición inicial (N,N,X,B,B) y siguiendo las reglas de juego, es posible alcanzar sólo algunas de las posiciones consideradas. Nos interesará diferenciar las posiciones "alcanzables" de aquellas que no lo son. Se denomina *estados de juego* a cada una de las ordenaciones de las fichas en el tablero que puede ser alcanzada mediante un número finito de movimientos legales, es decir, respetando las reglas de juego. ¿Cuántos *estados de juego* tiene el solitario de *Sol y Luna* con dos fichas de cada color? Dado que el número de "jugadas" no es muy grande, es posible representar en un diagrama todas ellas, donde se especifiquen las posibles secuencias de estados (figura 2.4).

En el esquema, se denota a x_{13} por I (estado inicial) y a x_3 por F (estado final que deja el juego completo). El paso de un estado a otro, queda explicitado por las "flechas". Así, por ejemplo, el paso del estado 24 al estado 23 se representa por $x_{24} \to x_{23}$. Por otro lado, un *estado terminal* queda determinado por la ausencia de flechas que "salen" de él, en otras palabras, toda cadena de estados "muere" en un *estado terminal* (así como toda cadena de estados comienza en la situación inicial I).

El número de *estados de juego* es, por lo tanto, 23. Además, el esquema muestra que un estado de juego puede alcanzarse por distintas secuencias de movimientos. En particular, el estado final F, donde el juego está completo, puede alcanzarse por dos secuencias distintas de movimientos. Estas dos secuencias se llamana *jugadas ganadoras* (resaltadas en el diagrama): se necesitan 8 movimientos para completar el juego.

Por último, si se llama *comedia* a una disposición no alcanzable desde el estado inicial por aplicación de las reglas de juego, se concluye que las disponsiciones: x_1, x_5, x_9, x_{10}, x_{18}, x_{26} y x_{27} representan una comedia, esto es, hay 7 comedias.

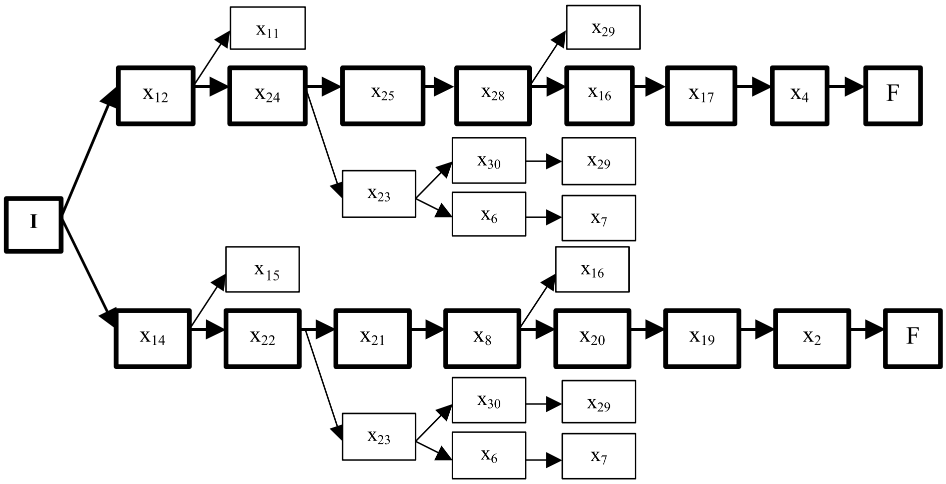


Figura 2.4: Jugadas legales con 2 fichas de cada color.

¿Cómo se puede generalizar el estudio realizado para determinar el número de *estados de juego* y *comedias* que hay en el solitario Sol y Luna con cuatro fichas de cada color? Por otro lado, para completar el solitario con una ficha de cada color se precisan 3 movimientos; para completarlo con 2 fichas de cada color, 8 movimientos; ¿cuántos se precisan para completar el juego con 3 y 4 fichas de cada color? ¿Hay alguna relación entre estos números?

2.5. Traslaciones, giros y simetrías

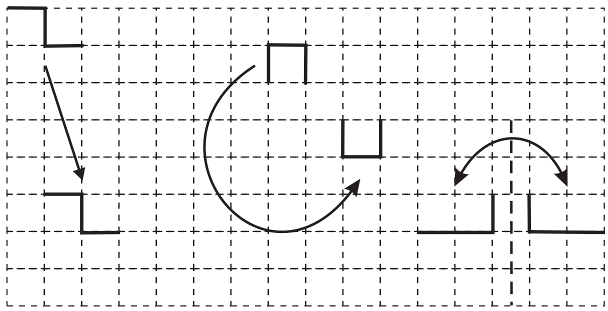
Se quiere saber cuántas figuras distintas se pueden construir con tres segmentos de longitud 1 sobre una cuadrícula de tal forma que una figura se distinga de otra atendiendo a los siguientes criterios:

1. Dos figuras son iguales si existe una traslación de tal forma que se superponen.

2. Dos figuras son iguales si existe una traslación y un giro de tal forma que se superponen.

3. Dos figuras son iguales si existe una traslación, un giro y una simetría (respecto a un eje horizontal o vertical) de tal forma que se superponen.

A continuación, se muestran tres figuras iguales según cada uno de los criterios.



Dos figuras que son iguales por uno de los criterios no significa que los sean por los otros. Las figuras centrales (se ha hecho un giro) no son iguales si sólo se permite hacer traslaciones. Las figuras de la derecha (iguales por simetría) no son iguales ni por giro ni por traslación. Sin embargo, es claro que, si dos figuras son iguales por un criterio, entonces también lo son por el siguiente: dos figuras iguales por el criterio 1 son iguales por los criterios 2 y 3; dos figuras iguales por el criterio 2 son iguales por el criterio 3. Los recíprocos, sin embargo, no son ciertos.

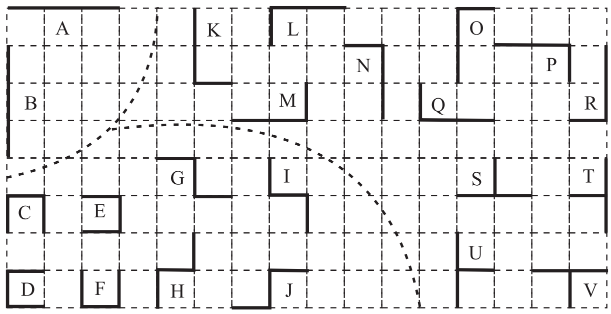
Recuento de una situación general y agrupamiento de casos

El método que seguiremos consiste en obtener todas las posibles configuraciones con tres segmentos, admitiendo la igualdad únicamente por traslación. De esta forma, se obtiene el máximo posible de configuraciones, puesto que se impone el criterio menos restrictivo. Después se agrupan las figuras que son iguales si se realizan giros y, por último, se establece la igualdad por simetría.

Por lo tanto, lo primero que se debe hacer es representar todas las figuras distintas según el primer criterio: diseñe un método que le permita construir todas las configuraciones posibles sin olvidar ninguna. Cuando haya terminado, prosiga con la lectura.

Una clasificación posible se obtiene si se sigue la siguiente pauta de construcción: en primer lugar, construir las figuras que tienen los tres segmentos sobre la misma línea; en segundo lugar, construir las figuras que tienen sólo dos segmentos sobre la misma línea; por último, construir las figuras que tienen todos los segmentos sobre distintas líneas.

En la figura siguiente se pueden ver todas las distintas cofiguraciones posibles, atendiendo la pauta de construcción establecida: 22. Con otras palabras, existen 22 figuras distintas (salvo traslaciones) que pueden construirse con 3 segmentos rectilíneos horizontales o verticales.



¿Cuáles de estas figuras son iguales mediante giros? Por ejemplo, las figuras A y B son iguales si efectuamos a cualquiera de ellas un giro de 90°. De manera similar, es fácil concluir que:

- La figura C es igual a la figura D si se realiza un giro de 90°. De igual manera, la figura D es igual a la figura E y ésta a la F. En conclusión, las figuras C, D, E y F son iguales por giros.
- La figura G es igual a la figura _____, por medio de un giro de _____.
- La figura I es igual a la figura _____, por medio de un giro de _____. Sin embargo, las figuras G y H son distintas a las figuras I y J, puesto que no existe ningún giro que transforme las unas en las otras.
- La figura K ____.
- La figura O ____.
- ¿Son las figuras K, L, M y N iguales (por traslaciones y giros) a las figuras O, P, Q y R? ______________________________.
- La figura S ____.

De esta forma, se concluye que existen (salvo traslaciones y giros) 7 figuras distintas: las de "tipo A" (y todas las giradas y trasladadas de ésta); las de "tipo C"; ____
____.

De estas siete, sólo 5 son distintas si se admiten, además de traslaciones y giros, simetrías. Éstas son: tipos A, C, ___________________.

Para terminar este punto, remarcaremos una propiedad que ha quedado enmascarada: si una figura es igual a otra y esta última igual a una tercera, entonces la primera y la tercera son iguales (para el criterio que se esté considerado). De otra forma, si una figura se puede relacionar con otra (mediante una traslación, un giro o una simetría) y ésta con una tercera, entonces la primera y la última están igualmente relacionadas.

Proposición 4 (Propiedad transitiva de una relación) *Una relación R entre elementos de un conjunto X tiene la propiedad transitiva si para todos a, b y c en el conjunto X se verifica: si a está relacionado con b por medio de la relación R, denotaremos aRb, y b a su vez está relacionado con c, bRc, entonces aRc.*

En nuestro caso, si denotamos por R^t a la relación *traslación*, por R^g a la relación *giro*, por R^s a la relación *simetría* y por F_1, F_2 y F_3 tres figuras planas, se tienen las siguientes tres proposiciones:

- Si $F_1 R^t F_2$ y $F_2 R^t F_3$, entonces $F_1 R^t F_3$.
- Si $F_1 R^g F_2$ y $F_2 R^g F_3$, entonces $F_1 R^g F_3$.
- Si $F_1 R^s F_2$ y $F_2 R^s F_3$, entonces $F_1 R^s F_3$.

2.6. Colocación de objetos

En esta sección, se van a estudiar algunos casos particulares relacionados con la colocación de objetos: ¿de cuántas formas pueden organizarse r objetos en n lugares? Para responder a esta pregunta hay que tener en cuenta distintas variables que intervienen a la hora de organizar los objetos:

1. *Tipo de objetos a colocar: si son distintiguibles o indistinguibles.* Por ejemplo, si colocamos libros en una biblioteca, en general, hay un ejemplar de cada uno y, por lo tanto, todos los libros son distinguibles entre sí; sin embargo, si ordenamos los libros puestos a la venta en una librería, muchos libros aparecerán repetidos, pues se estima que más de una persona va a desear adquirirlos.

2. *Tipo de lugares donde se van a colocar los objetos: si son distinguibles o indistinguibles.* Por ejemplo, si para realizar una mudanza se necesita embalar un grupo de libros y se dispone para ello de unas cuantas

cajas, no se procederá de igual manera si éstas son distintas (escogeremos unas u otras cajas según los tamaños relativos a los libros que tengamos) o si son iguales (utilizaremos las cajas conforme vayamos ocupándolas).

3. *Ordenación de los objetos en cada lugar disponible: importa o no el orden.* Por ejemplo, si el embalaje de los libros lo realiza la misma persona que los va a recibir, puede establecer el criterio siguiente: "los libros que voy a necesitar nada más llegar los coloco al final de cada caja, así podré disponer de ellos sin mucho trabajo". Por otro lado, si la persona que realiza el embalaje desconoce las necesidades del destinatario, seguramente no tomará en consideración ningún orden en la colocación de los libros.

4. *Restricciones sobre el uso de los lugares.* Por ejemplo, si se disponen cajas para transportar calzado es normal imponer que en cada caja vaya *uno y sólo un* par de zapatos.

De esta forma, la modificación de estas variables genera una gran cantidad de situaciones. Se pretende a continuación, presentar algunos ejemplos, con el modelo *ordenación de bolas en cajas.* Enunciados similares pueden establecerse para ordenar libros, zapatos, alumnos en diferentes aulas, etc. En el anexo A se hace una discusión detallada con relación al recuento de posibles ordenaciones.

Antes de introducir algunos problemas resulta útil tener en cuenta un sencillo principio que se utiliza muchas veces (la mayor parte de las veces de forma implícita): *el principio del palomar.* Supongamos, que un granjero tiene 11 palomas y 10 casilleros para que éstas duerman y se cobijen del frío y la lluvia. Es fácil concluir que, si todas las palomas duermen en alguno de los casilleros del palomar, en al menos uno de ellos tiene que haber más de una paloma. En general se tiene:

Proposición 5 (Principio del palomar) *Si se tiene r objetos y n lugares para colocarlos y el número de objetos es mayor que el número de lugares ($r > n$), entonces, necesariamente, si se colocan todos los objetos, en uno de los lugares tiene que haber al menos dos objetos.*

Una aplicación curiosa de este sencillo principio es la afirmación: "al menos 100 peruanos tienen el mismo número de cabellos en la cabeza". Se sabe que una persona tiene como mucho 200 000 cabellos en la cabeza. De esta forma, un peruano puede tener 0, 1, 2, 3, 4, ..., 199 999 pelos en su cabeza, luego, si se atiende al número de pelos que un peruano tiene en la cabeza, podemos asegurar que hay, como máximo, 200 000 clases de peruanos. Como en Perú, hay una población mayor a 20 millones de habitantes, al menos 100 peruanos tienen que pertenecer a una misma clase, puesto que $100 \cdot 200\,000 = 20\,000\,000$.

Ejercicios

1. Se meten 10 pares de guantes en un cajón y se van tomando al azar: ¿cuál es el número mínimo de guantes que se debe tomar para poder asegurar que se ha obtenido un par de guantes completo?

2. Se tiene una bolsa con 50 canicas de cuatro colores diferentes. ¿Qué número de canicas, como mínimo, tienen que ser del mismo color? ¿Y como máximo?

3. Dado un triángulo equilátero, de lado 1, demuestre que si tomamos 5 puntos interiores del triángulo, dos al menos han de estar a una distancia menor que 1/2.

2.6.1. Objetos distinguibles en cajas distinguibles

Se tiene r objetos ($1 \leq r \leq 5$) para colocar en n cajas ($1 \leq n \leq 5$). Los objetos son distinguibles y las cajas también, de tal forma que si se tiene un solo objeto y dos cajas existen dos formas distintas de colocar áquel: en una u otra caja. Nos interesa saber el número de formas en que pueden ser introducidos los objetos en las cajas, pero no el orden en que esto se efectúa. En resumen, dos disposiciones son distintas si en al menos una caja se tiene algún objeto distinto.

Estudiemos algunos casos particulares. Si, por ejemplo, $n = 1$, todos los objetos son introducidos en la única caja que se tiene y, por lo tanto, para cualquier n se tiene una única forma de colocar los objetos. Por otro lado, si $r = 1$, el número de posibles colocaciones depende del número de cajas de que se disponga: si $n = 3$, hay tres disposiciones distintas, que se obtienen colocando el objeto en cada una de las cajas.

Supongamos, por lo tanto, que r y n son mayores que 1: $r > 1$, $n > 1$. Por ejemplo, si $r = n = 2$ se tienen 4 formas de colocar los dos objetos: los dos en una u otra caja (2 opciones); o bien, uno en cada caja (otras 2 opciones). De otra forma, cada objeto puede ser introducido en cualquiera de las dos cajas y, por lo tanto, hay $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ opciones de colocar los dos objetos. Represente esta última forma de hacer el recuento mediante un diagrama de árbol.

Complete la tabla siguiente; para ello, diseñe un método que le permita hacer el recuento de forma sencilla y que le de seguridad de los resultados que obtenga. ¿Podría generalizar el método para cualquier r y n? Con otras palabras, si denotamos por $D_{n,r}$ al número de colocaciones que se pueden hacer con r objetos distinguibles en n cajas también distinguibles, ¿qué valor toma $D_{n,r}$ según los parámetros r y n?

$D_{n,r}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$r = 1$	1	2	3	4	5
$r = 2$	1	4	9		
$r = 3$	1	8	27		
$r = 4$	1				
$r = 5$	1				

2.6.2. Objetos indistinguibles en cajas distinguibles

Se tiene r objetos ($1 \leq r \leq 5$) para colocar en n cajas ($1 \leq n \leq 5$). Los objetos son indistinguibles, mientras que es posible distinguir unas cajas de otras, de tal forma que dos disponsiciones se distinguen por el número de objetos que hay en cada caja (admitiéndose que una caja esté vacía). En resumen, dos disposiciones son distintas si, en al menos una caja, el número de elementos es distinto.

Estudiemos algunos casos particulares. Al igual que en el caso anterior, si $n = 1$, todos los objetos son introducidos en la única caja que se tiene y, por lo tanto, para cualquier r se tiene una única forma de colocar los objetos. Por otro lado, si $r = 1$, el número de posibles colocaciones depende del número de cajas de que se disponga: si $n = 5$, hay cinco disposiciones distintas, que se obtienen colocando el objeto en cada una de las cajas.

Supongamos, por lo tanto, que r y n son mayores que 1: $r > 1$, $n > 1$. Por ejemplo, si $r = n = 2$ se tienen 3 formas de colocar los tres objetos: dos en una caja y la otra vacía (dos opciones, puesto que las cajas son distintas); o bien, uno en cada caja. De otra forma, como los objetos son indistinguibles, el número de formas en que pueden repartirse en dos cajas distinguibles es igual a las descomposiciones del número 2 en números enteros no negativos (importando el orden): $2 + 0 = 0 + 2 = 1 + 1$, de tal forma que el primer sumando señala los objetos que han sido introducidos en la primera caja y, el segundo, aquellos que han sido introducidos en la segunda.

Otro ejemplo: $n = 3$, $r = 2$. Atendiendo al mismo criterio, se tienen las siguientes seis descomposiciones del número 2 como suma de tres números enteros no negativos:

$$2 = 2 + 0 + 0 = 0 + 2 + 0 = 0 + 0 + 2 = 1 + 1 + 0 = 1 + 0 + 1 = 0 + 1 + 1$$

Así es posible completar la tabla:

$E_{n,r}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$r = 1$	1	2	3	4	5
$r = 2$	1	3	6		
$r = 3$	1	4	10		
$r = 4$	1				
$r = 5$	1				

¿Podría generalizar el método para cualquier r y n? Con otras palabras, si denotamos por $E_{n,r}$ al número de colocaciones que se pueden hacer con r objetos indistinguibles en n cajas distinguibles, ¿qué valor toma $E_{n,r}$ según los parámetros r y n?

2.6.3. Objetos distinguibles en cajas indistinguibles

En este caso las cajas son indistinguibles, pero los objetos sí son distinguibles. Por lo tanto, interesa tomar en cuenta cómo se juntan los objetos, mas no en qué caja se depositan. Es admisible, por lo tanto, que se rechace la posibilidad de que haya cajas vacías: en lo que sigue se restringe el estudio a situaciones en las que el número de cajas n es menor o igual al número de objetos disponibles r, esto es, $n \leq r$.

¿Qué sucede si $n = 1$ o $r = n$? ____.

Supongamos que: $n > 1$ y $r > n$. Por ejemplo, $n = 2$ y $r = 3$: numeramos los objetos 1, 2 y 3, entonces, como cada una de las dos cajas tiene al menos un elemento, tendrá que haber una caja con dos elementos y otra con uno. Hay tres formas de dejar un objeto aislado: que sea 1, 2 o 3.

Por razonamientos análogos, es posible completar la tabla:

$F_{n,r}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
$r = 1$	1	—	—	—	—	—	—
$r = 2$	1	1	—	—	—	—	—
$r = 3$	1	3	1	—	—	—	—
$r = 4$	1	7	7	1	—	—	—
$r = 5$	1				1	—	—
$r = 6$	1					1	—
$r = 7$	1						1

¿Podría generalizar el método para cualquier r y n? Con otras palabras, si denotamos por $F_{n,r}$ al número de colocaciones que se pueden hacer con r objetos distinguibles en n cajas indistinguibles, $r \leq n$, ¿qué valor toma $F_{n,r}$ según los parámetros r y n? A diferencia de los dos casos anteriores, no resulta fácil encontrar una ley general: ¿qué leyes parciales observa?, ¿puede demostrarlas?

2.6.4. Objetos indistinguibles en cajas indistinguibles

En este caso, tanto los objetos como las cajas son indistinguibles. Por lo tanto, interesa determinar la cantidad relativa de objetos en cada una de las cajas. Es admisible, por lo tanto, al igual que en el caso anterior, que se rechace la posibilidad de que haya cajas vacías: en lo que sigue se restringe el estudio a situaciones en las que el número de cajas n es menor o igual al número de objetos disponibles r, esto es, $n \leq r$.

De manera análoga al caso anterior: si $n = 1$ o si $n = r$, existe una única forma de colocar los objetos. Supongamos, por lo tanto, que: $n > 1$, $r > n$. Por ejemplo, $n = 2$ y $r = 3$: como, al menos un objeto debe ir en cada caja, queda un objeto por colocar, que se introducirá en una de las cajas. Como todas las cajas son iguales existe una sola forma de colocar los objetos: dos en una caja y uno en la otra. Si $k = 2$ y $n = 4$, hay dos formas de hacerlo puesto que: ____ __________________________. De esta forma, se completa la tabla:

$G_{n,r}$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
$r=1$	1	—	—	—	—	—	—	—
$r=2$	1	1	—	—	—	—	—	—
$r=3$	1	1	1	—	—	—	—	—
$r=4$	1	2	1	1	—	—	—	—
$r=5$	1	2	2	1	1	—	—	—
$r=6$	1					1	—	—
$r=7$	1						1	—
$r=8$	1							1

¿Podría generalizar el método para cualquier r y n? Con otras palabras, si se denota por $G_{n,r}$ al número de colocaciones que se pueden hacer con r objetos indistinguibles en n cajas indistinguibles, $r \leq n$, ¿qué valor toma $G_{n,r}$ según los parámetros r y n? Al igual que en el caso anterior, comprobará que no resulta fácil encontrar una ley general, a pesar de que se observan ciertas regularidades: ¿qué leyes parciales observa? ¿Es cierto que $G_{r,r-1} = 1$, para todo r? ¿$G_{r,r-2} = 2$, para todo $r \geq 4$? ¿$G_{r,r-3} = 3$, para todo $r \geq 6$? ¿$G_{r,r-4} = 5$, para todo $r \geq 8$?, etc.

2.7. Las torres de Hanoi

Se dispone de n discos, todos de distinto tamaño, de manera que pueden ser colocados ordenadamente, unos encima de otros, formando una torre — figura (a). A su vez, se dispone de 3 soportes A, B, C. Se forma la torre sobre el soporte A y se quiere, mediante movimientos *legales*, trasladarla al soporte B. Un movimiento *legal o permitido* consiste en tomar un disco y colocarlo en un soporte diferente, siempre que se verique una de las dos condiciones siguientes:

1. El soporte no tenga ningún disco.

2. El disco superior sea mayor que el que se coloca.

En otras palabras, es legal colocar discos sobre soportes vacíos y discos pequeños sobre grandes, pero no son permitidas situaciones del tipo de la figura (b).

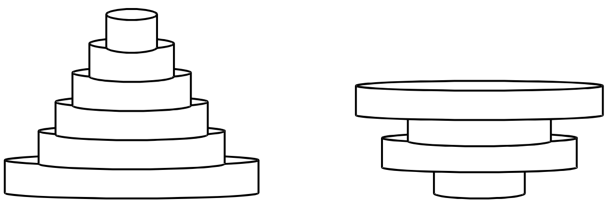


Figura (a) Figura (b)

¿Es posible completar el juego para un número n arbitrario de discos? En caso de ser así, ¿cuántos movimientos son necesarios para completar el juego con n discos?

Como ya hemos razonado en otros ejemplos: una estrategia muy útil consiste en estudiar un conjunto de casos particulares e intentar inferir de éstos una regla general y un método que la justifique.

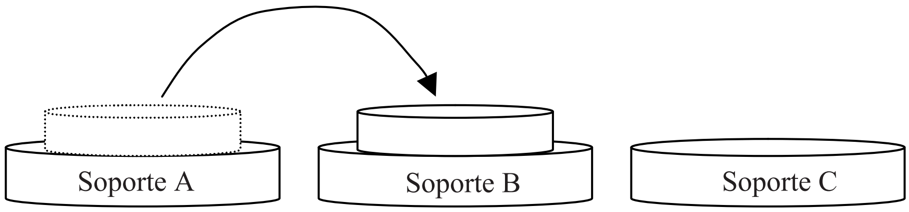
Por comodidad, se admiten las dos notaciones siguientes:

- Los discos pueden ser numerados según su tamaño del 1 al n: el más pequeño lo designamos con el número 1, mientras que el disco mayor se identifica con el número n.

- Para cada n, sea P_n la proposición "el juego (con n discos) es terminado"; luego, se quiere demostrar que las proposiciones P_n son verdaderas para cualquier número natural n. Para ello, se enunciarán y demostrarán una serie de *lemas*[4], que permitirán hacer una demostración breve y sencilla.

Lema 1 P_1 *es verdadera.*

Demostración. Basta mover el disco 1 del soporte A al soporte B y el juego está completo:



Lema 2 P_2 *es verdadera.*

Demostración. Es suficiente seguir la secuencia que se observa en la figura 2.5.

Lema 3 P_3 *es verdadera.*

Demostración. Por el lema 2 es posible mover los discos 1 y 2 al soporte C (observar que los soportes A y B juegan un papel equivalente). Ahora se mueve el disco 3 al soporte B y, otra vez por el lema 2, los discos 1 y 2 pueden ser movidos al soporte B, con lo que se termina el juego.■

Así demostrado, el lema 3, da una pauta de trabajo: si un juego con n discos puede ser completado, entonces el juego con $n+1$ discos también podrá serlo. Este hecho, queda formalizado en el siguiente lema.

Lema 4 *Para cada* n, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Demostración. Se tiene $n+1$ discos sobre el soporte A. Como la proposición P_n es verdadera, se pueden trasladar los n primeros discos al soporte C (mediante movimientos legales). Entonces el disco $n+1$ es movido del soporte A al soporte B y, otra vez por Pn, los discos $1, \ldots, n$ son trasladados al soporte B, con lo que el juego queda completo.■

[4] *Lema*: proposición verdadera, paso intermedio entre un enunciado general o más complejo y su demostración, que es introducido, por norma general, para simplificar la exposición.

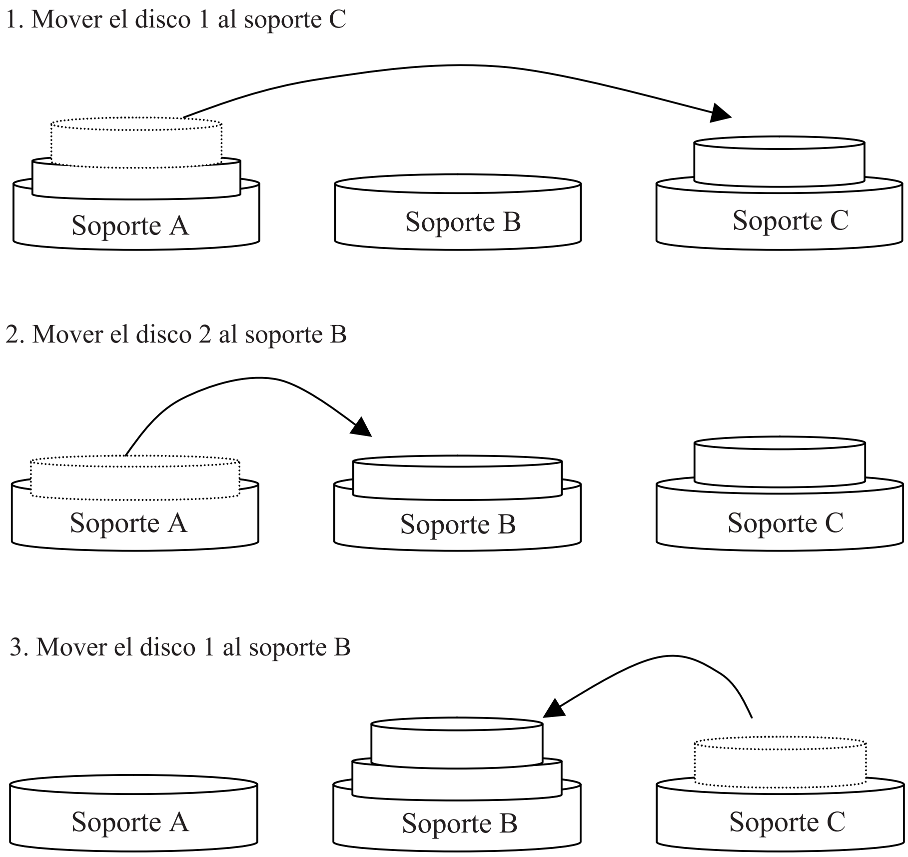


Figura 2.5: Juego con tres discos.

De esta forma, el lema 4 da una cadena de infinitas implicaciones:

$$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow P_{n-2} \Rightarrow P_{n-1} \Rightarrow P_n \Rightarrow \ldots$$

Además, el lema 1, representa el primer paso necesario para que la cadena descrita sea verdadera. De hecho, toda proposición P_n es verdadera, para cualquier n natural, desde el lema 4, si la proposición P_1 es verdadera. El principio general que se está utilizando es el *principio de inducción matemática*, que puede ser enuncuado en los siguientes términos.

Proposición 6 (Principio de Inducción) *Si para cada número natural n se tiene una propiedad P_n que puede ser cierta o falsa, de tal manera que:*

1. *P_1 es cierta; y*

2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, suponiendo que P_n es cierta se puede demostrar que P_{n+1} es cierta*

Entonces P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

En el anexo C se desarrollará este importante método matemático de demostración y de definición.

Volviendo a nuestro juego: ya sabemos que este puede ser completado, pero ¿cuántos movimientos son necesarios para completar un juego con n discos? Si observamos el método descrito, la realización del juego con $n+1$ discos se apoya en el juego completo con n discos. De esta forma, el número de movimientos necesarios puede obterse de manera recursiva: si se denota por L_{n+1} el número de movimientos necesarios para completar el juego con n discos, ¿es posible encontrar una relación entre L_{n+1} y L_n, sabiendo que $L_1 = 1$? Piense una solución a este problema antes de continuar con la lectura.

Para completar el juego con $n = 2$, realizamos los siguientes movimientos:

1. Pasamos el disco 1 al soporte C: 1 movimiento.

2. Pasamos el disco 2 al soporte B: 1 movimiento.

3. Pasamos el disco 1 al soporte B: 1 movimiento.

En total: 3 movimientos, esto es, $L_2 = 3$.

Para completar el juego con $n = 3$, realizamos los siguientes movimientos:

1. Pasamos los discos 1 y 2 al soporte C: $L_2 = 3$ movimientos.

2. Pasamos el disco 3 al soporte B: 1 movimiento.

3. Pasamos los discos 1 y 2 al soporte B: $L_2 = 3$ movimientos.

En total: $2 \cdot L_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ movimientos, esto es, $L_3 = 7$.

En general, para completar el juego con $n + 1$ discos, realizamos los siguientes movimientos:

1. Pasamos los discos $1, \ldots, n$ al soporte C: L_n movimientos.

2. Pasamos el disco $n + 1$ al soporte B: 1 movimiento.

3. Pasamos los discos $1, \ldots, n$ al soporte B: L_n movimientos.

En total: $L_{n+1} = 2 \cdot L_n + 1$ movimientos. De esta forma, para cualquier n, el número de movimientos L_{n+1} necesario para completar el juego con $n+1$ discos se obtiene por la regla de recurrencia siguiente:

$$\begin{cases} L_{n+1} = 2 \cdot L_n + 1, & \forall n \in \mathbb{N} \\ L_1 = 1 \end{cases}$$

Esto es, $L_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$, $L_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$, $L_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 14 + 1 = 15$, $L_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 30 + 1 = 31$, $L_6 = 2 \cdot 31 + 1 = 62 + 1 = 63$,... En general: $L_{n+1} = 2 \cdot L_n + 1 = 2^n - 1$, para todo $n \geq 2$.

¿Se ha demostrado que $L_{n+1} = 2 \cdot L_n + 1 = 2^n - 1$, $\forall n \geq 2$? __________.

¿Es necesario demostrarlo? ________________________.

2.8. Resumen

En las secciones anteriores, se han descrito algunas situaciones de recuento. En general, estas situaciones no se pueden resolver "de golpe" (es necesario seguir una serie de pasos) ni de forma algorítmica[5] (se desconoce de antemano qué pasos es necesario dar).

Para el recuento de casos se precisa de estrategias específicas de cálculo, adaptadas a cada situación concreta. Estas estrategias particulares, en ocasiones, representan instrumentos reutilizables en clases amplias de problemas; por ejemplo: estudio de un conjunto finito (y en principio no muy numeroso) de casos particulares e inferencia, a partir de éstos, de una regla de formación, que tendrá que ser validada en términos de la situación.

[5] Un algoritmo es un conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema: la suma, resta, multiplicación y división de dos números son algoritmos, por ejemplo.

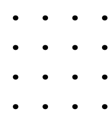
Por otro lado, en ciertas situaciones, el recuento de casos en una situación concreta ha implicado la determinación de principios elementales: de la suma y del producto (§2.1), del palomar (proposición 5) y de inducción matemática (§2.7). Estos principios constituyen instrumentos poderosos de resolución de amplias clases de problemas.

En muchas ocasiones, una situación no permite un tratamiento matemático sencillo. Una solución consiste en la formulación de un nuevo problema, relacionado con el anterior, pero más sencillo, cuya resolución muestre un camino de resolución de la situación inicial. Así ha sucedido en las secciones *Sol y luna* (§2.4) y *Traslaciones, giros y simetrías* (§2.5).

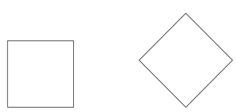
En conclusión, el recuento de casos es una tarea difícil, en general no sistematizable, ligada a la situación concreta que se esté analizando. Sin embargo, como se verá en el próximo capítulo, es posible organizar un conjunto grande de situaciones mediante métodos sencillos de cálculo: permutaciones, variaciones, combinaciones.

2.9. Ejercicios

1. Con relación a la figura, ¿cuántos cuadrados pueden formarse de manera que los vértices estén en alguno de los puntos?

   Observe que un cuadrado se caracteríza por ser un paralegramo con los cuatro lados iguales y ángulos de 90°, pero que no es necesario que éste se presente con una base horizontal. Por ejemplo, en la figura siguiente se pueden ver dos cuadrados en distintas posiciones.

   Si denotamos por Q_n el número de cuadrados posibles que se pueden dibujar sobre una cuadrícula $n \times n$: ¿es posible encontrar una regla general para Q_n?

2. Para sortear quién jugará con blancas una partida de ajedrez, Juan y Enrique efectúan siempre la siguiente práctica: eligen cara o sello y

lanzan una moneda al aire tantas veces cómo sea necesario para que se cumpla una (o las dos) condiciones siguientes:

a) La primera persona que gane dos veces seguidas toma las blancas.

b) La primera persona que gane tres partidas (consecutivas o no) juega con blancas.

¿Cuál es el máximo de partidas que juegan? ¿Y el mínimo? Represente con un diagrama de árbol todas las posibilidades y después codifíquelas en una n-upla.

3. Determine el número de subconjuntos que tiene un conjunto con n elementos: estudie los casos particulares en el que el conjunto tiene 0, 1, 2, 3, 4 o 5 elemenos e infiera de estos casos una ley general. Intente demostrar ésta. (Nota: Todos los conjuntos contienen al menos dos conjuntos: el conjunto vacío y el conjunto total, excepto el conjunto vacío que contiene un solo conjunto, él mismo.)

4. Un hombre tiene tiempo para jugar ruleta cinco veces a lo sumo. En cada juego gana o pierde un nuevo sol. El hombre empieza con un sol y dejará de jugar si antes de la quinta vez pierde todo su dinero o si gana tres nuevos soles, esto es, si tiene cuatro. Hallar el número de posibles situaciones finales, estableciendo la ganancia o pérdida total.

5. En el diagrama 1 de la figura, A, B, C, D, E y F representan islas y las líneas de unión puentes. Un hombre empieza en A y camina de isla en isla. Se detiene a comer cuando no puede continuar caminando sin tener que cruzar el mismo puente dos veces. Hallar el número de recorridos posibles antes de comer.

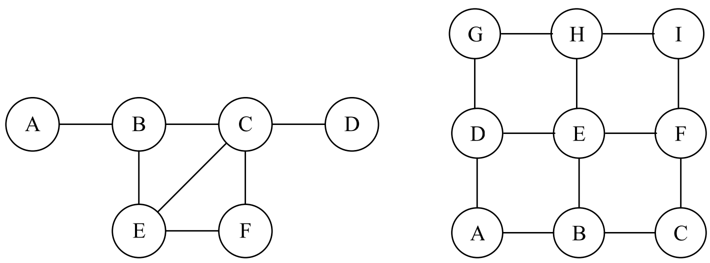
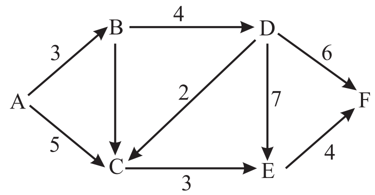


Diagrama 1 Diagrama 2

6. Considere el diagrama 2 de la figura anterior. Se permite mover una ficha horizontal o verticalmente desde A a la primera casilla en la

dirección y sentido escogidos. El juego se detiene cuando no se puede avanzar sin pasar por la misma casilla más de una vez. Hallar el número de maneras cómo se puede realizar el juego: ¿cuántas partidas completan el recorrido?

7. En el diagrama que se muestra, los puntos A, B, C, etc. representan intersecciones de calles, las flechas sentidos de tránsito permitidos y los números, un índice[6] del gasto estimado. ¿Cuál es trayecto más caro y el más barato?



8. Se representan en el plano n puntos, sin haber tres colineales. Si se traza un segmento que una dos a dos dichos puntos: ¿cuántos segmentos se dibujan? Realice el ejercicio para n variando entre 1 y 7 y deduzca una ley general. ¿Puede encontrar una relación con la suma de los n primeros números naturales?

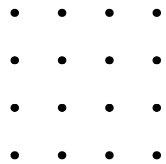
2.10. Autoevaluación

1. *Generalización del dilema del taxita.* El cálculo total de trayectos posibles para una determinada cuadrícula puede determinarse en función de aquellos posibles para cuadrículas más pequeñas. ¿Es capaz de obtener una regla que le permita calcular el número de rutas posibles para una cuadrícula $n \times k$, con n y k dos números enteros positivos cualesquiera? Justifique la regla que obtenga en función de la situación (posibles trayectos que puede tomar el taxista para ir de un punto a otro), no de un conjunto finito de valores numéricos (p.19).

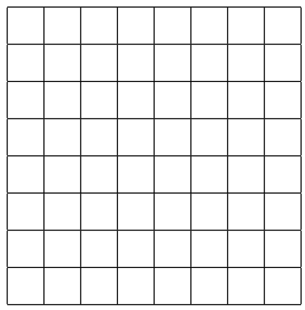
2. En función de la figura, ¿cuántos triángulos rectángulos pueden formarse de manera que los tres vértices estén en alguno de los puntos? Generalice el problema a una red de $n \times n$ puntos. (Nota: se restringe el

[6]Variables de este índice son: velocidad de tránsito, cambios de velocidad requeridos, estado de la pista, etc

estudio al caso en el que los catetos de los triángulos son horizontales o verticales, esto es, unen dos puntos de la misma fila o columna.)



3. *Tres en raya.* En un tablero, como el que se muestra en la figura, se van colocando fichas, de tal manera que no haya "tres en raya" (tres en casillas consecutivas horizontales o veriticales). ¿Cuántas fichas se pueden poner como máximo? Generalice el problema a un tablero $n \times n$.



Capítulo 3

Permutaciones, variaciones y combinaciones

En la presente sección se introduce las nociones de permutación, variación y combinación, que constituyen instrumentos eficaces de recuento de casos de amplias clases de problemas. Estas nociones se introducen por medio de la resolución de situaciones particulares y su posterior generalización y formalización.

3.1. Permutaciones

Genéricamente, permutar es: "variar la disposición u orden en que estaban dos o más cosas". Es necesario precisar si estas cosas son o no indistinguibles, para asegurar que la nueva configuración sea en esencia distinta a la antigua.

3.1.1. Permutaciones ordinarias o sin repetición

Como se ha visto en la sección 2.4, el número de ordenaciones posibles que se pueden obtener con n ($n \geq 2$) objetos distintos es el producto de los n primeros términos. Este producto se denota por $n!$, que se lee: "factorial de n". Se define:

Definición 1 (Factorial de un número) *El factorial de un número entero no negativo n, se denota $n!$, es igual a:*

$$n! = \begin{cases} n(n-1)! & si \quad n > 0 \\ 1 & si \quad n = 0 \end{cases}$$

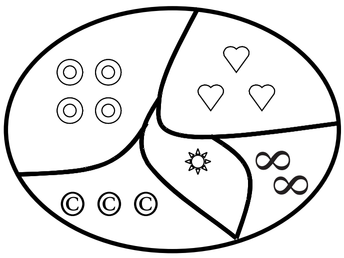
La definición dada es recursiva: a partir de $0! = 1$, se obtienen los factoriales de los números enteros positivos multiplicando el número n-ésimo por el factorial de $(n-1)$, esto es:

$$\begin{array}{ll} 1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1 & 2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2 \\ 3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6 & 4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24 \\ 5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120 & 6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Definición 2 (Permutaciones ordinarias o sin repetición) *Se llaman permutaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, denotaremos P_n, a los distintos grupos que se pueden formar, de tal manera que en cada grupo entren los n elementos y que un grupo se diferencie de los demás en el orden de colocación de los elementos. Además se tiene que: $P_n = n!$.*

3.1.2. Permutaciones con repetición

Por otro lado, el solitario *Sol y Luna* ha dejado abierta una puerta para una generalización: ¿cuántas ordenaciones en esencia distintas pueden obtenerse con n elementos si hay k grupos cuyos objetos son indistinguibles entre sí y cada grupo contiene $a_1, \ldots, a_k$ elementos, respectivamente? Por ejemplo, en la figura siguiente se pude ver la representación de 13 elementos distribuidos en 5 grupos de elementos indistinguibles. Si se colocan "en fila", uno detrás de otro, se tiene una configuración. Si se intercambian entre sí dos objetos indistinguibles la nueva configuración es equivalente a la anterior. ¿Cuántas configuraciones esencialmente distintas se pueden disponer?



El razonamiento que se hizo en el solitario *Sol y Luna* consistía en calcular todas las ordenaciones posibles (suponiendo los objetos distinguibles), para después agrupar aquellas que son iguales (puesto que se han obtenido por permutación de objetos indistinguibles). En el caso propuesto en la figura, las posibles permutaciones de 13 elementos son $13!$, de las cuales $4!$

son iguales porque se han obtenido por permutaciones de los anillos (◎); 3! son iguales porque se han obtenido por permutaciones de los corazones (♡); otras 3! son iguales porque se han obtenido por permutaciones de los "copyright" (©); otras 2! son iguales porque se han obtenido por permutaciones de los símbolos de infinito (∞). Por lo tanto, se tienen: $\frac{13!}{4!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 2!} = 3\,603\,600$ disponsiciones distintas.

El método puede generalizarse para calcular el número de ordenaciones distintas que se pueden obtener con n elementos si hay k grupos cuyos objetos son indistinguibles entre sí y cada grupo contiene $a_1, \ldots, a_k$ elementos, respectivamente, de tal forma que $a_1 + \ldots + a_k = n$:

1. Cálculo de las permutaciones de n elementos: $P_n = n!$.

2. Reagrupamiento de las permutaciones iguales (se han obtenido por intercambio de posiciones de elementos indistinguibles de un grupo): $a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_{k-1}! \cdot a_k!$.

3. Cálculo de las permutaciones (con repetición) distintas:

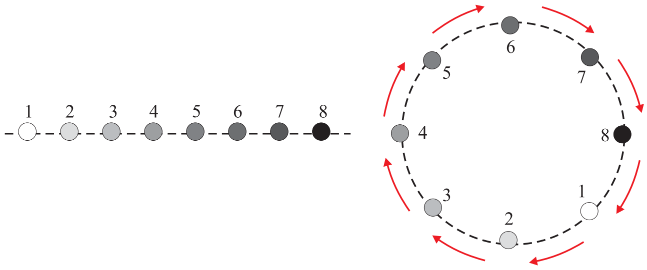
$$PR_n^{a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_{k-1}! \cdot a_k!}$$

Definición 3 (Permutaciones con repetición) *Se llaman permutaciones con repetición de n elementos, distribuidos en k grupos de a_1, a_2, $\ldots$, a_{k-1}, a_k elementos indistinguibles, respectivamente, de tal forma que $a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k = n$, a las distintas configuraciones que se pueden formar con los n elementos, de tal forma que cada una de ellas se diferencie de las demás en el orden de colocación de sus elementos, excluyendo las reordenaciones de elementos indistinguibles (esto es, que pertenecen a un mismo grupo). Si se denota por $PR_n^{a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}!,a_k!}$ a este número, se tiene que:*

$$PR_n^{a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_{k-1}! \cdot a_k!}$$

3.1.3. Permutaciones circulares

Se quiere confeccionar un collar con n cuentas de colores, todas de distinto color, ¿de cuántas formas se puede formar el collar si se utilizan todas ellas? El número de ordenaciones distintas de n objetos distintos es $P_n = n!$, sin embargo, las cuentas de un collar quedan uniformemente distribuidas en una circunferencia y cualquier giro que se efectúe no cambia el collar (ver figura), pero sí la configuración *en línea* que lo generó: hay más ordenaciones *en línea* que *circulares*; el problema es cuántas.



En la figura anterior, los 8 giros que se representan, no mofican el collar; de hecho, para confeccionar el collar importa la posición relativa de unas cuentas respecto a otras, mas no el orden en que éstas han sido colocadas: esto es, se pueden formar $\frac{8!}{8} = \frac{8 \cdot 7!}{8} = 7!$ collares distintitos con 8 cuentas diferentes.

En general, si el collar está formado por n cuentas se podrán formar $(n-1)!$ collares. Así, se define:

Definición 4 (Permutaciones circulares (sin repetición)) *Se llaman permutaciones circulares (sin repetición) de n elementos, denotaremos PC_n, a los distintos grupos que se pueden formar, de tal manera que en cada grupo entren los n elementos y que un grupo se diferencie de los demás en la posición relativa de los elementos unos respecto a los otros. Además se tiene que: $PC_n = (n-1)!$.*

En la discusión que se acaba de hacer, se ha establecido la determinación de las permutaciones circulares ordinarias o sin repetición. Una tarea similar se puede hacer para la determinación de las permutaciones circulares con repetición. Resuelva el lector la siguiente pregunta: ¿cuántos collares en esencia distintos pueden obtenerse con n cuentas si hay m grupos de bolitas indistinguibles entre sí y cada grupo contiene $a_1, \ldots, a_m$ elementos, respectivamente?

3.1.4. Ejercicios

1. Escriba todas las permutaciones que pueden formarse con las letras de las palabras que se dan.

   a) Las letras de ROMA.

   b) Las letras de VIVIR.

¿Cuántas ha formado en cada caso? ¿Coincide el número con el que se obtiene por medio de las fórmulas que se han deducido en el desarrollo teórico?

2. ¿Cuántos números de cinco cifras es posible formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, sin que se repita ninguna? ¿Cuántos de esos números tienen el 3 en cuarto lugar? ¿Cuál es, por lo tanto, la probabilidad de colocar al azar un tres en el cuarto lugar?

3. ¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar con tres franjas de tela, una de color rojo, otra de color azul y otra de color amarillo, pudiendose repetir los colores, pero sin poner dos bandas consecutivas del mismo color?

4. Consideremos escritas en orden alfabético todas las permutaciones posibles de las letras A, B, C, D y E.

    a) ¿Qué permutación ocupa el lugar 73?

    b) ¿Qué lugar ocupará la permutación CDABE?

5. ¿Cuántas letras de cinco signos se pueden formar en el alfabeto Morse[1] con tres rayas y dos puntos?

6. ¿Cuánto suman los números de cinco cifras que es posible formar con las cifras 1, 2, 4, 5, 8 sin que se repita ninguna?

7. Un estudiante dispone de 5 libros distintos de matemáticas y 4 de física. ¿De cuántas formas distintas podrá colocarlos en una estantería de su biblioteca si quiere poner juntos todos los de matemáticas, y también los de física? Y si quiere que no estén juntos dos libros de matemáticas, ¿de cuántas formas podrá colocarlos?

8. ¿Cuántas palabras[2] distintas se pueden formar con las letras de la palabra PERMUTACIÓN? ¿Cuántas empiezan por la letra E y terminan en ON?

9. ¿Cuántas rondas se pueden formar con cinco personas si en cada una participan 2, 3, 4 o las cinco personas?

[1]Sistema de telegrafía que utiliza un código consistente en la combinación de rayas y puntos.

[2]Por *palabra* se entiende una ordenación finita de símbolos (letras) del alfabeto. No se discute aquí si estas ordenaciones tienen o no significado.

Nota: para calcular, por ejemplo, el número de rondas de dos personas que pueden formarse debe establecer todas las posibles parejas; este número es igual al número de rondas de dos personas, puesto que en una ronda de dos personas solo hay una posición relativa. Sin embargo, para formar las rondas con tres personas se tiene que calcular primero el número de tríos que se pueden formar y observar que cada trío se puede disponer en 2 rondas en esencia diferentes (¿por qué?).

3.2. Variaciones

En lenguaje usual, variar significa: "hacer que una cosa sea diferente en algo de lo que antes era". En matemáticas, la palabra variación tiene una acepción mucho más precisa; brevemente, una variación de una familia de elementos es una modificación de alguno de sus elementos o del orden en que se presentan.

3.2.1. Variaciones ordinarias o sin repetición

Se desea formar un comité de aula para la organización de un evento cultural en un colegio. Dicho comité está formado por tres alumnos que harán las veces de delegado, vocal y secretario. La clase está formada por 40 alumnos. Nos planteamos resolver la siguiente cuestión: ¿de cuántas formas puede constituirse el comité si una persona no puede ocupar más que un cargo?

Como un estudiante no puede tener más que un cargo, el delegado podrá ser elegido entre los 40 alumnos de la clase; una vez que éste ha sido elegido, el cargo de vocal podrá ser tomado por uno de los 39 alumnos restantes; por último, el cargo de secretario puede ser tomado por uno de los 38 alumnos restantes. Es decir, existen $40 \cdot 39 \cdot 38$ formas de constituir el comité.

El método descrito puede ser extendido para deteminar el número de comités de k estudiantes que se pueden formar en un aula de n estudiantes $(n \geq k)$:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot [n-(k-2)] \cdot [n-(k-1)] = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definición 5 (Variaciones ordinarias o sin repetición) *Se llaman variaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, tomados de k en k, se* *denota $V_{n,k}$, a los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos, de tal forma que en cada grupo entren k elementos distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en alguno de sus elementos, bien en su orden de colocación. Se tiene:*

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3.2.2. Variaciones con repetición

Supongamos ahora que una misma persona puede ocupar más de un cargo, esto es, una persona puede ser a la vez vocal y delegado, por ejemplo. Esta situación no es artificial: muchas veces una misma persona ocupa más de un cargo dentro de una institución. Por ejemplo, profesor y coordinador de ciencias, alumno y miembro de la banda de música del colegio, etc. Nos planteamos, entonces, resolver la siguiente cuestión: si en un aula hay n estudiantes, ¿de cuántas formas puede constituirse un comité de k estudiantes si una persona puede ocupar más que un cargo?

Antes de resolver el problema general planteado, volvamos a nuestro caso particular: 3 cargos deben ser ocupados por alguno de los 40 estudiantes que conforman un aula. Como un estudiante sí puede tener más que un cargo, el delegado podrá ser elegido entre los 40 alumnos de la clase; una vez que éste ha sido elegido, el cargo de vocal podrá ser tomado por uno cualquiera de los estudiantes, incluido el delegado electo; por último, el cargo de secretario puede ser tomado igualmente por cualquiera de los 40 estudiantes. Es decir, existen $40 \cdot 40 \cdot 40$ formas de constituir el comité.

Al igual que en la anterior situación, el método descrito puede ser extendido para deteminar el número de comités de k estudiantes que se pueden formar en un aula de n estudiantes ($n \geq k$), pudiendo un alumno tener más de un cargo: $n \cdot \overset{(k \text{ veces})}{\ldots} \cdot n = n^k$ comités diferentes. En general, se define:

Definición 6 (Variaciones con repetición) *Se llaman variaciones con repetición de n elementos, tomados de k en k, denotaremos, $VR_{n,k}$, a los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos, de tal manera que en cada grupo entren k elementos iguales o distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en algún elemento, bien en su orden de colocación. Se tiene:*

$$VR_{n,k} = n^k$$

3.2.3. Ejercicios

1. Sin repetir cifras, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos pares 2, 4, 6, 8? ¿Cuántos de esos números comienzan por 2? ¿Cuántos terminarán en 64? ¿Cuántos habrá mayores que 500? ¿Cuánto suman todos los números de tres cifras que se pueden obtener?

2. Realizar el problema anterior suponiendo que es posible repetir las cifras.

3. Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos boletos diferentes habrá que imprimir, si cada boleto lleva impresas las estaciones de origen y destino? ¿Y si únicamente se coloca el importe y no si el pasajero se desplaza de la localidad A a la B? (Nota: se ademite que los trayectos de ida y de vuelta de una localidad a otra tienen el mismo costo.)

4. En una rifa se han hecho 1 000 papeletas, numeradas del 000 al 999. ¿Cuántos números capicúa[3] hay? ¿Es más probable que salga premidado un número capicúa u otro que no lo es? ¿La pregunta anterior es equivalente a preguntar, por ejemplo, "qué es más probable que salga el 848 o el 751"?

5. Un barco dispone de 8 banderas. ¿Cuántas señales puede mostrar si cada señal consiste en tres banderas colocadas verticalmente en un asta?

6. Una bandera tiene tres franjas horizontales. Si se pinta cada una de un color (pueden repetirse los colores en la misma bandera, pero no de forma consecutiva), ¿cuántas banderas distintas pueden formarse si se dispone de cinco colores?

7. Una matricula de auto tiene la primera letra correspondiente al departamento, despues un número del 0000 al 9999 y finalmente una o dos letras. ¿Cuántos autos pueden ser matriculados en un departamento con este sistema? ¿Y en todo el Perú?

   (Nota: Se supone que las letras del abecedario son 28.)

[3]Capicúa: Número que, como 2002, es igual leído de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. El mismo efecto, referido a palabras o frases, recibe el nombre de palíndromo; por ejemplo, *anilina* y *dábale arroz a la zorra el abad*.

3.3. Combinaciones

En lenguaje común, combinar es: “unir cosas diversas, de manera que formen un compuesto”. Al igual que las variaciones y las permutaciones, el concepto de combinación tiene un significado muy concreto en matemáticas: brevemente, número de conjuntos de un determinado número de elementos que se pueden formar con un universo de objetos, sin importar el orden de selección, sino qué elementos se toman.

3.3.1. Combinaciones ordinarias o sin repetición

En el problema de la formación de los comités de aula, el orden de elección de los estudiantes es relevante, puesto que los cargos de delegado, vocal y secretario no son equiparables. Sin embargo, si el comité está formado por tres personas que desempeñarán cargos similares, entonces no es relevante que un estudiante sea elegido en primer, segundo o tercer lugar, sino el hecho mismo de haber sido elegido. Como se ha visto, si el orden de elección es importante (y un alumno no puede tener sino un cargo), existen $40 \cdot 39 \cdot 38$ formas de constituir los comités, pero si el orden no importa, hay que dividir esta cantidad por 6, puesto que dados 3 estudiantes, podemos organizarlos de 6 formas distintas (P_3). Así, existen $(40 \cdot 39 \cdot 38\ /\ 6)$ formas de organizar los comités si los tres integrantes van a desempeñar labores similares.

En general, el razonamiento es válido si es preciso escoger, sin importar el orden, k estudiantes de entre n ($n \geq k$), el número de comités que se pueden formar son: $\frac{V_{m,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. De esta forma, las combinaciones se determinan en función de las variaciones y del agrupamiento de éstas en clases. Por ejemplo, si se tiene un conjunto formado por los elementos a, b, c y d y se quieren formar todas las combinaciones sin repetición de 3 en 3 se observa que:

Combinaciones	Variaciones ($V_{4,3}$)
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bcd	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

Definición 7 (Combinaciones sin repetición) *Se llaman combinaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, tomados de k en k, denotaremos $C_{n,k}$, a los diferentes conjuntos de k elementos distintos, esto es, un conjunto se diferencie de los demás en, al menos, un elemento (no importa*

el orden de colocación o selección). Se tiene:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

3.3.2. Combinaciones con repetición

El problema de la formación de comités ha permitido introducir las permutaciones y las variaciones con y sin repeción y las combinaciones sin repetición. ¿Cómo debiera reformularse este problema para poder hablar de combinaciones con repetición? En las combinaciones, no importa el orden de selección de los individuos, puesto que todos van a desempeñar la misma función: ¿tiene sentido que una persona ocupe dos cargos cuyas funciones son las mismas? El problema no parece tener mucho interés, puesto que si una persona ocupa dos cargos que son iguales, diremos, sencillamente, que debe trabajar "el doble". Planteamos a continuación una situación que precisa contar el número de combinaciones con repetición.

Uno de los logros científicos más importantes de la última década es el descubrimiento del genoma[4] humano. Se sabe que los caracteres hereditarios dependen de los genes que cada sujeto recibe de sus antecesores. El caso más simple, se tiene cuando un gen puede tomar únicamente dos modalidades distintas A y a, que se llaman dominante y recesivo, respectivamente. De esta forma, este tipo de genes forman tres tipos de genotipos: AA, Aa, aa (el genotipo aA es igual al Aa).

El siguiente caso es aquel en que los genotipos se forman con genes que toman tres modalidades distintas. Por ejemplo, el grupo sanguíneo (si no atendemos al factor RH) se constituye con los genes A, B (dominantes) y O (recesivo). ¿Cuántos genotipos se pueden formar? Esto son:

$$\begin{array}{ccc} AA, & BB, & OO \\ AB, & AO, & BO \end{array}$$

Si se observa, los genotipos de la primera fila son aquellos que se forman por repetición de un mismo gen: 3 casos, tantos como modalidades del gen. Mientras que los otros tres resultan de las posibles combinaciones de las distintas modalidades de genes, esto es, $C_{3,2}$.

[4] *Genoma: conjunto de cromosomas de una célula. Cromosoma: cada uno de ciertos corpúsculos, casi siempre en forma de filamentos, que existen en el núcleo de las células y solamente son visibles durante la mitosis. Débese su formación a una especie de condensación de la cromatina, y su número es constante para cada especie animal o vegetal* (DRAE, 1992).

¿Puede generalizarse este cálculo si los genes pueden tomar 4, 5, 6... modalidades distintas? En otras palabras, ¿cuántos genotipos se pueden formar con un gen que puede tomar n modalidades distintas? No es difícil razonar que el número de genotipos distintos que se pueden formar con un gen que toma n modalidades distintas es: $n + C_{n,2}$.

Definición 8 (Combinaciones con repetición de dos en dos) *Se llaman combinaciones con repetición de n elementos, tomados de 2 en 2, denotaremos $CR_{n,2}$, a las distintas agrupaciones de 2 elementos (no necesariamente distintos), esto es, un conjunto se diferencia de los demás en, al menos, un elemento (no importa el orden de colocación o selección). Se tiene:*

$$CR_{n,2} = n + C_{n,2}$$

Este problema puede ser nuevamente generalizado para la agrupación de n elementos tomados de k en k (sin importar el orden): combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k, se denota $CR_{n,k}$. Para ello, vamos a estudiar algunos casos particulares, a partir de los cuales deducir una ley general que nos permita calcular las combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

Es posible construir una tabla de doble entrada, variando en n y k, donde se coloquen todas las posibles combinaciones con repetición. En la tabla siguiente se pueden ver todas las posibles combinaciones con repetición, $CR_{n,k}$, con $n, k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$CR_{n,k}$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$n = 1$	A	AA	AAA	$AAAA$
$n = 2$	A, B	AA, BB, AB	AAA, BBB, AAB, ABB	$AAAA$, $BBBB$, $AAAB$, $AABB$, $ABBB$
$n = 3$	A, B, C	AA, BB, CC, AB, AC, BC	AAA, BBB, CCC, AAB, AAC, BBA, BBC, CCA, CCB, ABC	$AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, $AAAB$, $AAAC$, $AABB$, $AACC$, $AABC$, $ABBB$, $ACCC$, $ABBC$, $ABCC$, $BBBC$, $BBCC$, $BCCC$
$n = 4$	A, B, C, D	AA, BB, CC, DD, AB, AC, AD, BC, BD, CD	¿Cuáles?	¿Cuáles?

La conclusión inmediata que se deduce es el número de combinaciones con repetición, $CR_{n,k}$, con $n, k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$CR_{n,k}$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$n=1$	1	1	1	1
$n=2$	2	3	4	5
$n=3$	3	6	10	15
$n=4$	4	10	20	35

De la tabla anterior se deduce:

- $CR_{1,k}=1$, ya que ____.
- $CR_{n,1}=n$, ya que ____.

Por otro lado, se constata que el número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k, $CR_{n,k}$, se puede obtener (al menos para $n,k \in \{2,3,4\}$) sumando el número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de $(k-1)$ en $(k-1)$ y el número de combinaciones con repetición de $n-1$ elementos tomados de k en k:

$$CR_{n,k} = CR_{n-1,k} + CR_{n,k-1}$$

Con otras palabras, el número que aparece en cada casilla se puede obtener como suma de los números de las casillas inmediatamente superior e izquierda. ¿Es posible asegurar que la formación de una tabla, por ejemplo con n y k variando entre 1 y 10, sigue la misma regla? La respuesta es que sí. Si se consideran los letras $L_1,\ldots,L_n$, la formación de las combinaciones con repetición $CR_{n,k}$ puede ser hecha siguiendo el siguiente método:

1. *Combinaciones sin L_n*: obtener todas las combinaciones con repetición de $n-1$ elementos, tomados de k en k, esto es, $CR_{n-1,k}$.
2. *Combinaciones con L_n*: obtener todas las combinaciones con repetición de n elementos, tomados de k en k, sabiendo que, al menos uno de ellos, es L_n, esto es, $CR_{n,k-1}$. Como uno de los k elementos es L_n, entonces quedan $k-1$ elementos por elegir, de entre n elementos, sin importar el orden de selección y pudiendo tomar elementos repetidos.

Definición 9 (Combinaciones con repetición) *Se llaman combinaciones con repetición de n elementos, tomados de k en k, se denota $CR_{n,k}$, a las diferentes agrupaciones de k elementos (indistinguibles o no), de tal forma que una agrupación se diferencie de las demás en, al menos, un elemento (no importa el orden de colocación o selección). Se tiene:*

$$\begin{cases} CR_{n,k} = CR_{n-1,k} + CR_{n,k-1} & \text{si} \quad k \neq 1, n \neq 1 \\ CR_{1,k} = 1 \;\; y \;\; CR_{n,1} = n & \end{cases}$$

La definición recurrente de los términos $CR_{n,k}$ de las combinaciones con repetición es sencilla de aplicar, por ejemplo:

$$CR_{2,3} = CR_{1,3} + CR_{2,2} = CR_{1,3} + (CR_{1,2} + CR_{2,1}) = 1 + 1 + 2 = 4$$

Sin embargo, en general, no es muy práctica si se utiliza directamente. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
CR_{4,5} =& CR_{4,4} + CR_{3,5} = \\
=& CR_{4,3} + CR_{3,4} + CR_{3,4} + CR_{2,5} = \\
=& CR_{4,3} + 2CR_{3,4} + CR_{2,5} = \\
=& CR_{4,2} + CR_{3,3} + 2(CR_{3,3} + CR_{2,4}) + CR_{2,4} + CR_{1,5} = \\
=& CR_{4,2} + 3CR_{3,3} + 3CR_{2,4} + CR_{1,5} = \\
=& CR_{4,1} + CR_{3,2} + 3(CR_{3,2} + CR_{2,3}) + 3(CR_{2,3} + CR_{1,4}) + CR_{1,5} = \\
=& CR_{4,1} + 4CR_{3,2} + 6CR_{2,3} + 3CR_{1,4} + CR_{1,5} = \\
=& CR_{4,1} + 4(CR_{3,1} + CR_{2,2}) + 6(CR_{1,3} + CR_{2,2}) + 3CR_{1,4} + CR_{1,5} = \\
=& CR_{4,1} + 4CR_{3,1} + 10CR_{2,2} + 6CR_{1,3} + 3CR_{1,4} + CR_{1,5} = \\
=& CR_{4,1} + 4CR_{3,1} + 10(CR_{2,1} + CR_{1,2}) + 6CR_{1,3} + 3CR_{1,4} + CR_{1,5} = \\
=& CR_{4,1} + 4CR_{3,1} + 10CR_{2,1} + 10CR_{1,2} + 6CR_{1,3} + 3CR_{1,4} + CR_{1,5} = \\
=& 4 + 12 + 20 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56
\end{aligned}$$

En la práctica, se puede completar una tabla utilizando el conocimiento de la definición recurrente para las combinaciones con repetición y utilizar dicha tabla en la resolución de problemas. Complete la tabla siguiente:

$CR_{n,k}$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=1$								
$n=2$								
$n=3$								
$n=4$								
$n=5$								
$n=6$								
$n=7$								
$n=8$								

Sin embargo, ¿cuántas combinaciones con repetición se tienen con 98 elementos tomados de 67 en 67, esto es, cuánto vale $CR_{98,67}$? La construcción de una tabla del tamaño necesario para responder a la pregunta es una tarea tediosa: ¿es posible describir las combinaciones con repetición de otra forma, que permita obtener éstas de forma sencilla, rápida y fiable? En la siguiente sección se va a tratar este punto.

3.3.3. Ejercicios

1. En una familia de seis personas se acuerda que cada día se encarguen dos de las tareas domésticas. ¿Cuántos grupos distintos se pueden formar?

2. ¿Cuántas rectas quedarán determinadas por cinco puntos de un plano, suponiendo que no haya tres en línea recta? ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de n lados?

3. En una avanzadilla hay 18 soldados. ¿Cuántas guardias diferentes de tres soldados se pueden formar si todos los soldados van a desempeñar funciones similares? ¿En cuántas entrará un soldado determinado? ¿Y dos soldados determinados?

4. Se dispone de ocho objetos, ¿qué es mayor, el número de combinaciones tomándolos de tres en tres, o el número de combinaciones de los mismos elementos de cinco en cinco? Razone su respuesta. Antes de hacer ningún cálculo piense intuitivamente una respuesta: ¿es correcta su intuición? En caso contrario, dónde está la falacia.

5. Con los colores del arco iris[5], ¿cuántas mezclas pueden hacerse si tomamos cada vez tres colores distintos? ¿Y si no es posible tomar dos colores que aparecen de forma consecutiva en el arco iris?

6. Un estudiante debe responder a ocho de las doce preguntas de un cuestionario, ¿cuántos grupos distintos de preguntas puede elegir?

7. En una finca del monte hay dispersas varias casetas de guardas cada una de las cuales está unida a las restantes por un camino. Calcular el número de casetas que hay sabiendo que el número de caminos es 36.

8. ¿De cuántas formas podrán distribuirse ocho premios iguales entre 12 aspirantes? ¿Y si los premios fueran diferentes?

3.4. Números combinatorios

Como se ha visto en la anterior sección, $C_{n,k}$ es el número de combinaciones sin repetición que se pueden formar con n elementos (distintos) tomados

[5]Fenómeno luminoso en forma de arco semicircular que se forma cuando el Sol (y a veces la Luna) refracta y refleja su luz en la lluvia y que ostenta los siete colores del prisma (rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, añil y violado).

de k en k. Dicho número se suele denotar también por $\binom{n}{k}$ y se lee: "número combinatorio de n sobre k" o, sencillamente, número de combinaciones de n elementos tomados de k en k. De esta forma, se tiene:

$$C_{n,k} \equiv \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

El símbolo $\binom{0}{0}$ representa el número uno (1). En efecto, como $0! = 1$, se tiene: $\binom{0}{0} = \frac{0!}{(0-0)!0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$. Por otro lado, los números combinatorios de la forma $\binom{n}{0}$ también representan el número uno (1): $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$.

El significado que se le debe dar a $\binom{0}{0}$ "en términos de combinaciones" es el siguiente: ¿De cuántas formas se puede tomar ningún elemento sin tomar ningún elemento? De una sola, haciendo precisamente lo que se nos dice: no tomar ningún elemento. Así, los números $\binom{n}{0}$ representan el número de formas que se tienen de tomar ningún elemento de n distintos: también una (no tomando ningún elemento).

Los significados dados para los números $\binom{0}{0}$ y $\binom{n}{0}$ no parecen relevantes: ¿por qué entonces introducir un objeto "sin interés"? Los números combinatorios pueden ser dispuestos en el conocido triángulo de Pascal (1623–1662) - Tartaglia (1499 *aprox.*–1557) y para ello es preciso contar con los números $\binom{0}{0}$ y $\binom{n}{0}$ introducidos: nos permiten "completar" y construir fácilmente dicho triángulo:

Números combinatorios $\binom{n}{k}$	Valor que representan
$\binom{0}{0}$	1
$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	1 1
$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	1 2 1
$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	1 3 3 1
$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1
$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$	1 6 15 20 15 6 1
$\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$	1 7 21 35 35 21 7 1

La construcción del triángulo se sigue del siguiente criterio: los dos lados no horizontales del triángulo son iguales a 1, esto es, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, para todo número entero n no negativo, el resto de números se obtienen sumando los dos inmediatamente superiores. Con otras palabras, se ha de verificar la propiedad $(0 < k < n)$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \iff \\
&\iff \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]!\cdot(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\cdot k!} \iff \\
&\iff \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\cdot(k-1)!}\left[\frac{n}{(n-k)\cdot k}\right] = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\cdot(k-1)!}\left[\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k}\right] \iff \\
&\iff \frac{n}{(n-k)\cdot k} = \frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k} = \frac{k+n-k}{(n-k)\cdot k} = \frac{n}{(n-k)\cdot k}
\end{aligned}$$

De esta forma, es posible dar una caracterización de las combinaciones sin repetición por medio de una regla de recurrencia:

$$\begin{cases} C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k} & \text{si} \quad 0 < k < n \\ C_{n,0} = 1 = C_{n,n} \end{cases}$$

En otro orden de cosas: ¿qué semejanzas encuentra entre la tabla de las combinaciones con repetición (p.57) y el triángulo de Pascal - Tartaglia (p.59) que muestra las combinaciones sin repetición? Si se observa con detenimiento los valores de ambas combinaciones (con y sin repetición) se llega a la conclusión de que se verifica la relación:

$$CR_{n,k} = C_{n+k-1,k}$$

En caso de que ésta fuera cierta, ¿qué interés tiene? El interés se sigue del último párrafo de la sección 3.3.2: ¿cómo saber qué número representa $CR_{98,67}$, sin necesidad de utilizar la fórmula recurrente de las combinaciones con repetición o de construir una tabla (¡tan grande!)? Sencillamente, si la relación es cierta, se tiene: $CR_{98,67} = C_{98+67-1,67} = C_{98+67-1,67} = C_{164,67} = \frac{164!}{97!\cdot 67!} \approx 4,2859 \cdot 10^{53}$. Es decir, la relación es sumamente interesante, puesto que pone al alcance la posibilidad de obtener las combinaciones con repetición mediante una fórmula, lo cual es muy útil y fácil de usar. Queda como tarea, por lo tanto, justificar que dicha regla es válida para cualquier número combinatorio, no sólo para aquellos que se han obtenido efectivamente.

Proposición 7 *El número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k es igual al número de combinaciones sin repetición de $n+k-1$ elementos tomados de k en k. Esto es: $CR_{n,k} = C_{n+k-1,k}$.*

Demostración. Dado un conjunto con n elementos, $E = \{e_1; \ldots; e_n\}$, se considera el conjunto $P = \{1; \ldots; n\}$, que puede ponerse en correspondencia biyectiva con E, asociando cada e_i con i, para i variando entre 1 y n. De esta forma, el número de configuraciones (combinaciones con repetición, en este caso) de P y E es el mismo.

Ahora bien, si $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ es una combinación con repetición de n elementos de P tomados de k en k, por lo que algunos elementos (o todos) pueden ser iguales entre sí, es posible, poner esta combinación en correspondencia con la siguiente:

$$(a_1 + 0, a_2 + 1, \ldots, a_{k-1} + k - 2, a_k + k - 1)$$

Claramente, esta correspondencia es biuníboca y el número de configuraciones del segundo tipo es precisamente $C_{n+k-1,k}$, combinaciones sin repetición de $n + k - 1$ elementos tomados de k en k. ■

En la proposición que se acaba de demostrar hay dos implícitos que es necesario resaltar. En primer lugar, una *correspondencia biúnivoca* es una relación que asocia cada uno de los elementos de un conjunto con uno, y justamente uno, de los de otro conjunto y, recíprocamente, cada elemento de este último conjunto con uno, y sólo uno, del otro. Una consecuencia inmediata es la siguiente:

Proposición 8 (Principio de igualdad) *Si entre dos conjuntos A y B existe una correspondecia biunívoca o biyectiva, entonces ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos.*

Corolario 1 *Si entre dos conjuntos A y B existe una correspondecia biyectiva, entonces el número de configuraciones (del tipo que sea) que se pueden obtener con los elementos de uno y otro conjunto es el mismo.*

3.5. Extracción de bolas de una urna

Un modelo para las nociones de permutación, de variación y de combinación es la extracción de bolas numeradas de una urna: se tienen n bolas numeradas en una urna, ¿de cuántas formas se pueden extraer k bolas? La pregunta formulada es ambigua. Dos variables determinan la posible interpretación: si importa o no el orden de extracción de las bolas y si una bola es o no devuelta a la urna después de ser tomada. En los siguientes párrafos analizaremos las distintas situaciones que se desprenden.

3.5.1. Extracción ordenada sin reposición

En la primera extracción se puede sacar cualquiera de las n bolas que hay en la urna. Como no hay reposición, esto es, la bola extraída no se devuelve a la urna, en la segunda extracción se puede tomar cualquiera de las $n-1$ bolas que quedan en la urna. Así sucesivamente, de tal forma que en la k-ésima extracción se puede escoger una de las $n-(k-1)$ que quedan. En conclusión, por la regla del producto se concluye que el número de formas en que se puende extraer k bolas de una urna donde hay n ($n \geq k$) es:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-2)) \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = V_{n,k}$$

De esta forma, las variaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k pueden ser entendidas cómo el número de formas en que se pueden extraer k bolas de n (numeradas del 1 al n) de una urna sin reemplazo y considerando el orden en que éstas son extraídas.

Un caso particular es cuando $k = n$, esto es, se extraen todas las bolas de la urna de forma ordenada: el número de posibles formas es igual a $n!$, esto es, permutaciones sin repetición de n elementos. En general, las permutaciones sin repetición pueden ser vistas como un caso particular de variaciones, también sin repetición, donde se toman todos los elementos disponibles: $P_n = V_{n,n}$.

3.5.2. Extracción ordenada con reposición

De igual manera que en el caso anterior, en la primera extracción se puede sacar cualquiera de las n bolas que hay en la urna. En este caso, como hay reposición, la bola extraída se devuelve a la urna y en la segunda extracción se puede tomar, nuevamente, cualquiera de las n bolas que quedan en la urna. Así en cualquiera de las k extracciones. En conclusión, por la regla del producto se concluye que el número de formas en que se puende extraer k bolas de una urna donde hay n, si se reponen las bolas extraídas, es:

$$n \cdot \overset{(k \text{ veces})}{\ldots} \cdot n = n^k = VR_{n,k}$$

Entonces, las variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k (en este caso, k puede ser cualquiera) pueden ser entendidas cómo el número de formas en que se pueden extraer k bolas de n (numeradas del 1 al n) de una urna con reemplazo y considerando el orden en que éstas son extraídas.

3.5.3. Extracción no ordenada y sin reposición

En este caso, no importa el orden de extracción de las bolas, únicamente el número de bolas extraídas y cuáles son éstas. El método que se puede seguir es el siguiente: contar todas las posibles formas atendiendo al orden de extracción ($V_{n,k}$) y agruparlas atendiendo a las bolas extraídas: todas las permutaciones de k elementos representan la misma configuración, puesto que sólo importa las bolas extraídas, mas no en el orden en que se han tomado. Esto es, el total de extracciones posibles es:

$$\frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = C_{n,k}$$

De esta forma, las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k pueden ser entendidas cómo el número de formas en que se pueden extraer k bolas de n (numeradas del 1 al n) de una urna sin reemplazo y sin tomar en cuenta el orden en que éstas son extraídas.

3.5.4. Extracción con reposición no ordenada

En este caso, no importa el orden de extracción de las bolas, únicamente el número de bolas extraídas y cuáles son éstas; además, como una vez extraída una bola se devuelve a la urna ésta puede tomarse nuevamente. Razone el lector que el caso refiere las combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

De esta forma, las combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k pueden ser entendidas cómo el número de formas en que se pueden extraer k bolas de n (numeradas del 1 al n) de una urna con reemplazo y sin tomar en cuenta el orden en que éstas son extraídas.

3.5.5. Permutaciones con repetición: bolas indistinguibles

Los casos expuestos han permitido introducir los conceptos de variaciones y combinaciones con y sin repetición, así como las permutaciones ordinarias o sin repetición. Para que el modelo sea válido para introducir las permutaciones con repetición es necesario introducir un cambio: hay bolas que tienen el mismo número y que, por lo tanto, resultan indistinguibles. ¿De cuántas formas se pueden extraer todas las bolas de una urna (sin reposición) si algunas de ellas son indistinguibles? En este caso, nos importa el orden de extracción, sin embargo, si en primer lugar se saca una bola marcada con el número 1 y en segundo lugar otra con el mismo número, la configuración que se sigue de intercambiar ambas bolas es la misma. En general, si intercambiamos bolas indistinguibles la configuración resultante es la misma.

De esta forma, las permutaciones con repetición de n elementos, agrupados en r grupos de objetos indistinguibles, con $a_1, \ldots, a_r$ elementos cada uno, $a_1 + \ldots + a_r = n$, pueden ser entendidas cómo el número de formas en que se pueden extraer de forma ordena n bolas de una urna sin reemplazo, numeradas del 1 al r, sabiendo que hay a_1 bolas marcadas con el número 1; a_2 bolas, con el número 2; a_3, con el número 3; $\ldots$; a_{r-1}, con el número $r-1$; a_r, con el número r.

3.5.6. Esquema resumen

Puede ayudar a plantear correctamente los problemas de combinatoria el preguntarse sistemáticamente si importa o no el orden de selección u ordenación de objetos, si éstos son todos distinguibles o existen elementos indistinguibles. En pocas palabras, ¿importa el orden?, ¿se repiten? De hecho, para aquellos problemas que involucren únicamente variaciones, permutaciones y combinaciones el esquema que se presenta a continuación puede ser suficiente para resolver correctamente las diferentes situaciones.

$$\text{¿Importa el orden?} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sí: ¿entran todos?} \left\{ \begin{array}{l} \text{No: ¿se repiten?} \left\{ \begin{array}{l} \text{No: } V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \\ \text{Sí: } VR_{n,k} = n^k \end{array} \right. \\ \text{Sí: ¿se repiten?} \left\{ \begin{array}{l} \text{No: } P_n = n! \\ \text{Sí: } PR_n^{a_1,\ldots,a_k} = \\ = \frac{n!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{No: ¿se repiten?} \left\{ \begin{array}{l} \text{No: } C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \\ \text{Sí: } CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

3.6. Binomio de Newton

Se sabe que el cuadrado de una suma de términos no nulos es igual al cuadrado del primero, más el doble del producto, más el cuadrado del segundo:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

No es complejo demostrar, por multiplicaciones reiteradas que:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

¿Es posible conocer el desarrollo de la potencia n-ésima de $(a+b)$, para cualquier n? En otras palabras, ¿es posible dar el desarrollo de $(a+b)^n$ como potencias de a y b para cualquier exponente n? La respuesta es sí.

Como ya se ha dicho, por multiplicaciones sucesivas se pueden ir obteniendo las expresiones de $(a+b)^n$ como sumandos $(a, b \neq 0)$. En la tabla siguiente se puede observar hasta la potencia quinta.

Desarrollo de $(a+b)^n$	Coeficientes
$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a+b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^3b + 3ab^3 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1

Si se compara esta tabla con el triángulo de Pascal-Tartaglia (p.59), se establece la siguiente conjetura: *los coeficientes del desarrollo de la potencia n-ésima en el binomio de Newton son los números combinatorios* $C_{n,k}$:

$$\begin{gathered}
(a+b)^0 = \binom{0}{0} \\
(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b \\
(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 \\
(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^3b + \binom{3}{2}ab^3 + \binom{3}{3}b^3 \\
(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 \\
(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5
\end{gathered}$$

De esta forma, la pregunta inicial se hace ahora más concreta: ¿para cualquier número natural n, se cumple que:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \ ?$$

Para comprobar su veracidad, aplicaremos el principio de inducción matemática (p.39). El uso del método de inducción matemática viene motivado por la manera en que se van obteniendo las sucesivas potencias: la potencia $n+1$ de $(a+b)$ se obtiene multiplicando $(a+b)^n$ por $(a+b)$, de esta forma, conocido el desarrolo de la potencia n-ésima, es fácil obtener el desarrollo de la potencia $(n+1)$-ésima.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) = \\
&= \left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right] \cdot (a+b) = \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} = \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]a^n b + \ldots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \ldots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}
\end{aligned}$$

Observe que la última igualdad es cierta por las relaciones establecidas a partir del triángulo de Pascal-Tartaglia (p.59):

$$\begin{cases} \text{Si } 0 < k < n : \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ \text{Si } k = 0 \text{ o } k = n : \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \end{cases}$$

Proposición 9 (Binomio de Newton) *Sean a, b números reales, $a+b \neq 0$. Para todo número natural n se cumple:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Nota 1 (Sumatoria) *El símbolo sumatoria $\sum$ es una forma abreviada de escribir la suma de términos:*

$$\sum_{i=r}^{s} a_i = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_{s-2} + a_{s-1} + a_s$$

De esta forma, i es un "contador" que toma todos los valores entre r y s, $r \leq s$.

3.6.1. Propiedades de los números combinatorios

La relación fundamental de los números combinarorios viene dada por la definición recursiva de las combinaciones sin repetición:

$$\begin{cases} \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad \text{si} \quad 0 < k < n \\ \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \end{cases}$$

La aplicación inmediata de esta relación es la construcción del triángulo de Pascal-Tartaglia. Interesa encontrar otras relaciones entre números combinatorios, que puedan ser utilizadas como pasos intermedios en demostaciones (por ejemplo, la relación fundamental ha sido determinante para demostrar el teorema de Newton); o bien, como medio de simplificación de cálculos. Por ejemplo, la relación:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Puede ser utilizada para calcular el número de subconjuntos que tiene un conjunto (ejercicio 3, §2.9): $\binom{n}{k}$ denota el número de subconjuntos de k

elementos que se pueden constituir si se dispone de n para escoger. ¿Pero cómo demostrar la anterior relación?

Antes de hacer la demostración formal de la proposición: ¿cómo podemos obtener una intuición sobre su veracidad? Una forma consiste en completar una tabla, donde se especifique el número n de elementos de un conjunto E, los subconjuntos de éste y el número p de éstos.

n	Conjunto	Subconjuntos	p
0	$\emptyset$	$\{\emptyset\}$	2^0
1	$\{a\}$	$\{\emptyset, \{a\}\}$	2^1
2	$\{a, b\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$	2^2
3	$\{a, b, c\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$	2^3

Otra forma de *intuir* la relación se basa en la observación del triángulo de Pascal-Tartaglia: la suma de los términos de cada fila es igual a 2^n, por más filas que construyamos. ¿Cómo demostrar la relación? La demostración se basa en el binomio de Newton: basta tomar $a = b = 1$. En efecto:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &\equiv (1+1)^n = 2^n = \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = \\ &= \textstyle\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\end{aligned}$$

En otras ocasiones, una relación entre números combinatorios puede hacer que comprendamos alguna situación concreta. Por ejemplo, un grupo de personas está formado por 10 personas: ¿se pueden formar más grupos de 2 personas que de 8 personas? Antes de hacer ningún cálculo: ¿qué le dice su intuición?

Un grupo de personas se distingue de otro si hay alguna persona distinta en él. De esta forma, el número de grupos distintos de 8 personas que se pueden formar en este caso es igual a las combinaciones de 10 elementos tomados de 8 en 8 y, por lo tanto, el número de grupos distintos de 2 personas es igual a las combinaciones de 10 elementos tomados de 2 en 2. Ambos números son iguales:

$$\binom{10}{8} = \frac{10!}{(10-8)! \cdot 8!} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = \binom{10}{2}$$

Es muy normal que haya pensado que era mayor el número de grupos de 2 personas que el de 8. El cálculo permite afirmar que ésta intuición primera es incorrecta y nos permite repensar el problema en los siguientes términos: por cada grupo de 2 personas que se forma, se excluyen 8, esto es, se forma un grupo de 8 "excluidos". Por lo tanto, el principio de igualdad (p.61) nos asegura la igualdad del número de grupos de 2 y 8 personas, respectivamente. Además, el ejemplo nos da un método de demostración para la relación: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. En efecto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

3.6.2. Ejercicios

Demuestre las siguientes relaciones:

1. $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$.
2. $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$.
   Suponga el conjunto $A = \{a, b, c_1, \ldots, c_n\}$ y clasifique los subconjuntos de A de tamaño k según contengan o no a los elementos a y b: a uno, a otro, a ambos o a ninguno.
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \ldots + \binom{n-k-1}{0}$.
4. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$. (Nota: utilice el binomio de Newton.)
5. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}^2$.

3.7. Relaciones y ecuaciones combinatorias

Una parte importante del estudio de los objetos matemáticos exige "técnica", esto es, utilizar los objetos de manera fiable y rápida (con el mínimo costo posible). Por ejemplo, "saber las ecuaciones de segundo grado" debe entenderse de la siguiente forma: "cada vez que tenga que realizar una ecuación de segundo grado, la resuelvo bien y rápidamente; con otras palabras, la resolución de este tipo de ejercicios deja de ser un problema para ser una herramienta". En muchas circunstancias, las diferencias entre los "buenos" y "malos" estudiantes reside en la capacidad que aquéllos tienen para ejecutar de forma rápida ciertas técnicas y, por lo tanto, concentran su trabajo en los conceptos, técnicas, procedimientos nuevos o que todavía no controlan.

A continuación, con intención de conseguir un control sobre los objetos "variaciones", "permutaciones" y "combinaciones" se plantea una serie ejercicios.

1. Comprobar las siguientes igualdades:

a) $V_{8,5} - V_{8,4} = 15 \cdot V_{8,3}$.

b) $\frac{V_{n,k}}{V_{n,h}} = \frac{V_{n-h,k}}{V_{n-k,h}}$.

c) $V_{n,k} - V_{n-1,k} = k \cdot V_{n-1,k-1}$.

2. Hallar el valor de m y n, sabiendo que:

a) $V_{m,n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

b) $V_{m,n} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

3. Escribir los dos primeros y los dos últimos factores del desarrollo de las siguientes expresiones:

a) $V_{m+1,n+1}$.

b) $V_{m+1,n-1}$.

c) $V_{m+3,n}$.

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $V_{x,2} + V_{x-2,2} + V_{x-4,2} = 98$.

b) $VR_{x,2} - V_{x,2} = 17$.

5. Comprobar las siguientes igualdades:

a) $\frac{V_{n,n-k}}{V_{n,k}} = \frac{P_{n-k}}{P_k}$.

b) $P_{n+1} - P_n = (P_n)^2 \div P_{n-1}$.

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $P_x = P_3 - 2 \cdot P_x$.

b) $12 \cdot P_x + 5 \cdot P_{x+1} = P_{x+2}$.

c) $3\frac{V_{x+2,3}}{P_3} = 5\frac{V_{x+1,2}}{P_2}$.

7. Comprobar las siguientes igualdades:

a) $C_{n,k} = \frac{n}{k} C_{n-1,k-1}$.

b) $C_{n,1} + 2 \cdot C_{n,2} = n^2$.

c) $n \cdot C_{n,k} = k \cdot C_{n,k} + (k+1) \cdot C_{n,k+1}$.

8. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $P_4 \cdot C_{x,3} = 3 \cdot x \cdot V_{x,2}$.

b) $2\binom{x}{4} = 2\binom{x}{3} - \binom{x}{2}$.

c) $\binom{50}{x} = \binom{50}{x+6}$.

9. Resolver el siguiente sistema: $\left\{ \begin{array}{l} \binom{x}{y+1} = \binom{x}{y-1} \\ \\ \binom{x}{y} = \frac{21}{10}\binom{x}{y-2} \end{array} \right.$.

10. Si $m > n$, cuál de los siguientes números combinatorios es mayor: $\binom{m}{n}$ o $\binom{m+1}{n+1}$.

11. ¿Son iguales los siguientes números combinatorios: $\binom{1657}{915}$ y $\binom{1657}{742}$?

3.8. Ejercicios

1. ¿Cuántos sumandos es necesario contabilizar para determinar las combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k? Esto es, por la definición recurrente es posible escribir $CR_{n,k}$ como suma de combinaciones con repetición de la forma $CR_{1,j}$ y $CR_{t,1}$: ¿cuántos sumandos aparecen?

2. ¿De cuántas formas se pueden sentar en una fila 4 niños y 4 niñas si deben estar alternados? Y si además uno de los niños ha de sentarse siempre junto a una niña determinada, ¿de cuántas formas podrán hacerlo?

3. Hay 10 aviones sirviendo la ruta de Piura a Lima. ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje tomando al regreso un avión distinto al de ida?

4. La plantilla de un equipo de fútbol está compuesta por 3 porteros, 7 defensas, 5 medios y 8 delanteros. ¿Cuántas alineaciones distintas podrá formar el entrenador, suponiendo que cada jugador sólo puede ser alineado en su demarcación?

   (Nota: El entrenador siempre compone el equipo de la misma forma, a saber: un portero, tres defensas, dos medios y cinco delanteros).

5. ¿Cuántos números naturales hay entre 5000 y 6000 que tengan todas sus cifras diferentes?

6. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas pueden formarse con los guarismos 1, 2, 4, 5, 7? ¿Cuánto suman todos ellos? ¿Cuántos de aquellos números son impares? ¿Cuántos terminan en 57? ¿Cuántos son múltiplos de 25? ¿Cuántos empiezan por 245?

7. En una reunión hay 17 personas. ¿Cuántos saludos se intercambiarán si todas las personas se saludan entre sí (una sola vez)?

8. Cinco amigos disponen de un auto para trasladarse de un lugar a otro. Sólo dos de ellos saben conducir, ¿de cuántas maneras podrán colocarse para sus viajes?

9. Si se tiran tres dados al aire. ¿Cuántos resultados distintos se puede obtener si los dados son de tres colores distintos? ¿Y si los dados son indistinguibles? Si se suma el resultado que se ha obtenido en los tres dados, ¿cuántas sumas distintas se pueden obtener? ¿Qué suma es más probable que se obtenga?

10. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 4 anillos distintos en los 10 dedos de ambas manos, no colocando más de un anillo en cada dedo? ¿Y si los anillos fuesen iguales?

11. Dadas 5 vocales y 4 consonantes, calcular cuántas palabras de dos vocales y dos consonantes distintas pueden formarse, con la condición de que en cada palabra no figuren dos consonantes seguidas.

12. Asisten a clase 24 alumnos y todos los días explican la lección dos de ellos. El profesor desea que las parejas de alumnos no se repitan. ¿Durante cuánto tiempo lo podrá conseguir?

13. ¿Cuántos boletos habría que jugar para tener la absoluta seguridad de acertar los 6 números de la tinka?

14. Un número entero positivo mayor que 1 puede descomponerse en sumandos de diversas formas. Por ejemplo, si se supone que los sumandos son números naturales y se distingue el orden en que están colocados los sumandos, es posible obtener las diferentes descomposiciones de un número dado. Por ejemplo, para el número 4 se tiene:

    $4 = 1+3 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$

    Complete la tabla siguiente: número de descomposiciones de los números 2 al 8, inclusive, especificando en distintas columnas el número de descomposiciones según el número s de sumandos.

n	$s=2$	$s=3$	$s=4$	$s=5$	$s=6$	$s=7$	$s=8$	Total
2	1	—	—	—	—	—	—	1
3	2	1	—	—	—	—	—	3
4	3	3	1	—	—	—	—	7
5								
6								
7								
8								

a) Si llamamos $D(n)$ al número de descomposiciones de un número entero n en sumandos: ¿es posible hallar una expresión general para $D(n)$?

b) Ahora, si se acepta que un número representa la descomposición de ese mismo número cuando $s = 1$, ¿cómo queda la tabla?, ¿la puede asociar con algo?

c) Suponga que no se tiene en cuenta el orden al hallar los sumandos en que puede descomponerse un número: ¿cuántas descomposiciones posibles hay? Por ejemplo, las descomposiciones del número 5 son:

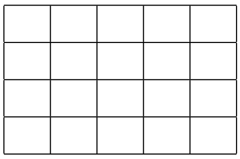
$$5 = 4{+}1 = 3{+}2 = 3{+}1{+}1 = 2{+}2{+}1 = 2{+}1{+}1{+}1 = 1{+}1{+}1{+}1{+}1$$

Organice una tabla donde especifique explícitamente las descomposiciones posibles y el número de éstas, para los números enteros positivos menores o iguales que 10.

d) Suponga que tiene 15 objetos unidos por un cordel. Calcule el número de formas diferentes de hacer cortes a dicho cordel, de tal forma que los objetos queden separados en 7 grupos. ¿Puede relacionar este problema con un modelo combinatorio de colocaciones? ¿Cuáles serían sus características?

15. Suponga que se tienen cubos de colores y que se quieren guardar, colocar sacar u ordenar de una determinada forma: formule diversos problemas para que la situación refiera a variaciones, permutaciones o combinaciones, con y sin repetición, respectivamente.

16. Calcule el número de rectánculos posibles que pueden contarse en la siguiente figura:



17. Para el cálculo de los rectángulos del ejercicio anterior, una persona realiza las siguientes anotaciones:

1	2	3	4	5	15
					30
					45
					60
					150

De tal forma, concluye que el número de rectángulos es 150. Investigue en qué se basa este método y generalícelo para el caso de una cuadrícula $n \times k$.

18. Una secretaria tiene que enviar n cartas a n destinatarios distintos. Escribe todas las cartas primero y luego procede a meterlas en los sobres correspondientes, procediendo al azar, esto es, sin mirar si el destinatario coincide con la persona a quien va dirigida la carta. ¿Cuál es la probabilidad de que 1, 2, 3, 4, ... cartas coicidan con el sobre adecuado? Complete la tabla siguiente donde se especifica, en relación con el número n de cartas ($1 \leq n \leq 6$), el número de coincidencias ($0 \leq r \leq n$) y el total de formas posibles de introducir las cartas:

n	0	1	2	3	4	5	6	Total
1	0	1	—	—	—	—	—	1
2	1	0	1	—	—	—	—	2
3					—	—	—	
4						—	—	
5							—	
6								

19. Mediante el Binomio de Newton dé el desarrollo de:

    a) $(a+2c)^9$. Indicación: Puede considerar el cambio de variable $b = 2c$ y hacer el desarrollo de $(a+b)^9$ y luego deshacer el cambio, es decir, poner $c = 2b$ en el resultado[6].

b) $(a-b)^n$.

c) $(a+b+c)^9$.

d) * $(a+b+c)^n$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ (ver anexo D).

3.9. Autoevaluación

1. Compruebe las siguientes igualdades:

   a) $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$.

   b) $\binom{m+n+1}{n+1} = \binom{m+n}{n+1} + \binom{m+n}{m}$.

   c) $\binom{m}{n} = \binom{m-3}{n} + 3\binom{m-3}{n-1} + 3\binom{m-3}{n-2} + \binom{m-3}{n-3}$, si $m \geq n+3$.

   Justifique las igualdades aritméticamente (por la definición de número combinatorio) y por medio de un razonamiento combinatorio (describiendo qué supone cada igualdad a la hora de formar diferentes configuraciones).

2. Un grupo de alumnos de probabilidad espera recibir los resultados del examen final. Hay 15 mujeres y 5 varones. Se pide:

   a) De cuántas formas pueden organizarse "en fila" para recibir las calificaciones.

   b) De cuántas formas pueden organizarse "en fila" para recibir las calificaciones si las mujeres reciben primero las calificaciones.

   c) De cuántas formas pueden recibir "en fila" las calificaciones si no pueden ir dos varones seguidos.

   d) Como las calificaciones han sido óptimas, deciden celebrarlo e irse a bailar. ¿De cuántas formas pueden salir a la pista de baile, por parejas, en tres canciones consecutivas, si todas las mujeres son invitadas a bailar?

[6] El cambio de variable, en este caso, es simplemente un cambio de "nombre", que facilita el desarrollo del Binomio de Newton, puesto que transforma la expresión que se quiere desarrollar en la expresión canónica, para la cual se ha enunciado el Teorema del Binomio de Newton.

3. Un frutero vende plátanos, manzanas y mangos a 10 céntimos la pieza. Con un sol, ¿cuántas compras diferentes pueden hacerse? ¿Y si se tiene un sol y 30 céntimos? ¿Y con dos soles?

   ¿Puede dar una regla general que dé el número de compras diferentes que pueden hacerse si se tiene n soles y k monedas de 10 céntimos?

4. En un caserio hay varias casitas, cada una de las cuales está unida a las restantes por un camino. Si sabemos que hay 351 caminos, ¿cuál es el número de casitas que hay en el caserío?

5. Resuelva la siguiente ecuación:

$$2 \cdot C_{x,3} = \frac{1}{3}(VR_{x,3} - 4\binom{6}{3}) + PR_x^{x-1,1}$$

6. Defina, de forma justificada, permutaciones circulares con repetición.

Capítulo 4

Situaciones introductorias de cálculo de probabilidades

En el capítulo 1, se ha hecho un uso totalmente intuitivo de la probabilidad. En particular, se ha utilizado el concepto clásico de probabilidad, que asocia a un suceso un número comprendido entre 0 y 1, que se obtiene dividiendo el número de casos favorables (en los cuales ocurre el suceso) entre el número total de casos (resultados posibles del experimento), suponiendo en el experimento una simetría que hace que todos los casos tengan la misma probabilidad de salir (*hipótesis de equiprobabilidad*). Por ejemplo, la probabilidad de obtener 3 en la suma de los dados es igual a 2/36, puesto que sólo dos posibilidades son favorables —(1,2) y (2,1)— de 36 resultados posibles que se pueden obtener en el lanzamiento de los dados.

En los capítulos anteriores, dedicados al análisis combinatorio, se ha centrado el estudio en el recuento de casos de experimentos que tienen un número finito de sucesos elementales. Este estudio ha permitido resolver problemas en los que aparecía la noción de probabilidad clásica: *casos favorables* (a un determinado suceso) entre *casos posibles* (del experimento estudiando).

La visión de probabilidad introducida es muy útil, puesto que perminte resolver una gran cantidad de problemas, amén de resultar muy intuitiva y de fácil manejo. Sin embargo, dos problemas clave es preciso tomar en consideración: la defininción clásica de probabilidad es *cíclica* y *restrictiva.* Es *cíclica* puesto que el término definido —probabilidad— es utilizado en la definición: la regla indica que la probabilidad de un suceso es igual al cociente entre los casos favorables a él y el número total de casos posibles, *siempre y cuando éstos sean "equiprobables"*. Con otras palabras, la definición clásica no ofrece una respuesta consistente a la pregunta: ¿qué es la probabilidad? Por otro lado, es *restrictiva*, puesto que se aplica a casos en los que el número de resultados de un experimento es finito y los casos posibles equiprobables.

Estos dos problemas son claves para replantear la pregunta: ¿qué es la probabilidad? En el presente capítulo se presentan diversas situaciones que involucran el cálculo de probabilidades y que exigirán una reformulación de dicha noción. El desarrollo teórico, sin embargo, tampoco se hará en este capítulo: se pretende introducir los conceptos fundamentales de forma intuitiva, para formalizarlos más adelante (capítulo 5).

4.1. Asignación de probabilidades

En ciertas circunstancias, no es sencillo asignar *a priori* una probabilidad a cada uno de los sucesos posibles de un experimento aleatorio; bien porque no se puede asegurar la equiprobabilidad de los sucesos, bien porque el número de sucesos posibles no es finito. A continuación se presentan dos situaciones concretas.

4.1.1. Monedas trucadas

Supongamos que recibimos una moneda trucada: por ejemplo, la probabilidad de obtener cara es mayor que la probabilidad de obtener sello. ¿Qué probabilidad asociar a los sucesos "cara" y "sello"? Una solución: lanzar una moneda un número finito de veces y asignar a la probabilidad las frecuencias relativas de cada uno de los sucesos.

En la tabla siguiente, se puede ver un cuadro resumen de la experimentación realizada por 4 personas: número de repeticiones del experimento (lanzamientos), frecuencias absolutas de los sucesos "cara" y "cruz" ($f_a(C)$ y $f_a(X)$) y probabilidades asignadas ($P(C)$ y $P(X)$).

Persona	Lanzamientos	$f_a(C)$	$f_a(X)$	$P(C)$	$P(X)$
1	2	1	1	1/2	1/2
2	10	4	6	4/10	4/10
3	50	28	21	28/50	21/50
4	100	63	37	63/100	37/100

¿Es admisible la experimentación de la persona 1? ____________________

____.

¿Es admisible la experimentación de la persona 3? ____________________

____.

¿Qué estimación de la probabilidad cree usted que es mejor, la dada por la persona 2 o 4? _____. ¿Por qué? _______________________________.

La experimentación hecha por la primera persona no es admisible, puesto que ha realizado el experimento un número muy pequeño de veces (2). De hecho, los *experimentos aleatorios o al azar* son aquellos en los que no es posible conocer de antemano un resultado, con otras palabras, un resultado aislado es *imprevisible*. Sin embargo, si se realizan "muchas" veces, en las mismas condiciones, se observan ciertas regularidades. De esta forma, si lanza una moneda al aire dos veces y se obtiene dos caras: ¿se puede asegurar que siempre saldrá cara? Evidentemente, no.

En breve, para la experimentación de un experimiento aleatorio es preciso realizar éste un número "grande" de veces, para poder inferir reglas de comportamiento fiables. Con otras palabras, un muestra aislada de un experimento aleatorio no es representativa del comportamiento general de éste; sin embargo, todo experimento aleatorio presenta regularidades en un conjunto "grande" de repeticiones: es la llamada *ley del azar*.

Para la experimentación, la tercera persona, sí ha tenido en cuenta la "ley del azar", pero tampoco es válida, por un motivo diferente: la suma de las frecuencias absolutas de los sucesos "cara" y "sello" es distinto al número de pruebas realizadas. Esto no es posible, puesto que los dos sucesos posibles son *complementarios*: o bien sucede uno, o bien el otro, pero no pueden suceder ambos la vez.

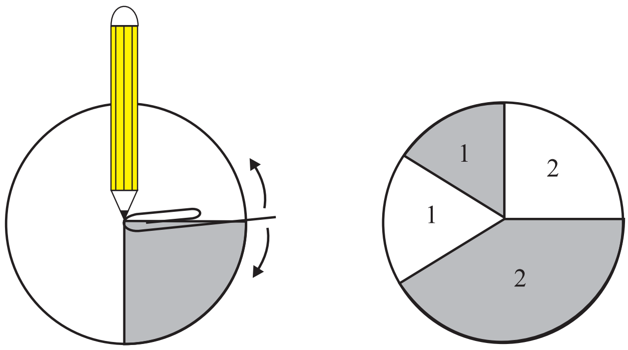
Por lo tanto, sólo las personas 2 y 4 han realizado correctamente la experimentación. Sin embargo, la estimación dada por la última persona debe ser aceptada como "la mejor": *al realizar el experimento un número mayor de veces la ley del azar es más fiable*. En esta elección, no se han tomado en consideración otro tipo de variables que son también determinantes: ¿se ha realizado el experimiento en las mismas condiciones?, ¿el recuento ha sido llevado de forma correcta por las personas?, ¿la persona 1 ha estado influenciada por la creencia de la equiprobabilidad de los sucesos "cara" y "sello"?, etc.

En resumen, para asignar de forma experimental una probabilidad a un suceso, se repetirá éste un número "grande" de veces y, en virtud de la *ley del azar*, se le asignará la frecuencia relativa que se haya obtenido. Como medio de control, hay que observar que la suma de las frecuencias absolutas obtenidas de todos los sucesos complementarios (dos a dos) debe ser igual al total de pruebas realizadas; de otro modo, la suma de las frecuencias relativas de todos los sucesos complementarios (dos a dos) debe ser igual 1.

4.1.2. Ruletas

Una ruleta es una rueda horizontal giratoria, dividida en un número finito de casillas radiales, numeradas o pintadas de colores y una bolita o aguja. Haciendo girar aquélla, al cesar el movimiento, gana el número o color de la casilla donde ha quedado la bolita o que señala la aguja. De esta forma, es fácil construir ruletas que combinen números y colores. El objetivo es construir ruletas y asignar probabilidades a cada una de las casillas en que queda dividida ésta.

Con un clip sujetapapeles estirado por un extremo y un lápiz es fácil hacer una ruleta: se golpea el clip con el dedo indice y se observa en qué sector se detiene la parte sobresaliente del mismo, tal y como se sugiere en la ruleta 1 de la figura.



Ruleta 1 Ruleta 2

En la figura anterior se muestran dos ruletas: en la ruleta 1, puede salir el color gris o el color blanco; en la ruleta 2, los colores gris y blanco y los números 1 y 2. La pregunta clave es: ¿qué probabilidad se asigna a cada uno de los sectores en que queda dividida cada una de las ruletas?

Para asignar a cada sector una probabilidad se puede proceder de la siguiente manera: realizar el experimento muchas veces y anotar los resultados, de tal manera que la frecuencia relativa de cada sector se considere una buena aproximación de la probabilidad de que la aguja señale éste. Así, por ejemplo, para la ruleta 1 completaremos una tabla como la que sigue:

Sector	Conteo	f_a	f_r	Probabilidad
Gris (G)				
Blanco(B)				
Total		50	1	1

En la columna conteo se colocan señales conforme se van realizando las pruebas: por ejemplo, se hace una señal vertical en la casilla "Conteo/Blanco" cada vez que se ha verificado el suceso "la aguja quedó fijada en el sector blanco (B)". El número de palitos es la frecuencia absoluta o número de veces que ha ocurrido el suceso B, de las 50 que se ha realizado el experimento. De igual manera, el número de palitos en la casilla "Conteo/Gris" es la frecuencia absoluta del suceso G[1].

La experimentación con la ruleta 1 debe tener una distribución en la que, aproximadamente, el 25 % de las veces se haya obtenido el sector gris y el resto el sector blanco (en los casos en los que haya duda, discrimine para uno de los dos sectores). Esto es, las frecuencias absolutas deben ser próximas a: $f_a(G) = 13$ y $f_a(B) = 37$. Y, por lo tanto, las frecuencias relativas próximas a: $f_r(G) = \frac{13}{50} = 0,26$ y $f_r(B) = \frac{37}{50} = 0,74$, respectivamente, valores que se asignan como las probabilidades de obtener gris y blanco en la ruleta.

La segunda ruleta permite un estudio más rico. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga 1? ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga 1 y gris? ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 que no sea gris?... Para responder a estas preguntas y otras semejantes es necesario almancenar mucha información. Antes de hacer esto, introduciremos una notación muy sencilla para designar cada uno de los sucesos que están involucrados.

El suceso "salir blanco" lo denotamos por B; "salir gris", G; "salir dos", 2; "salir uno", 1; "salir gris y uno", $G \cap 1$; "salir uno que no sea gris", $1 \setminus G$; "salir uno o blanco", $1 \cup B$. En general, si tenemos dos sucesos A y B, se puede distinguir tres operaciones con ellos para obtener nuevos sucesos: suceso "salir A y B", $A \cap B$; "salir A o B", $A \cup B$; "salir A y no B", $A \setminus B$.

Para responder a las preguntas formuladas, complete la siguiente tabla.

Suceso	Conteo	f_a	f_r	Probabilidad
G				
B				
1				
2				
$1 \cap G$				
$2 \cup B$				
$1 \setminus G$				
Total		100	1	1

[1]Es cómodo, para contar los palitos de cada casilla, proceder de la siguiente manera: escribir las marcas en grupos. Por ejemplo, cuatro rayas verticales y una oblicua que las tache, de tal forma que las marcas se organizan en grupos de cinco (así como en las películas los prisioneros cuentan los días que pasan en un calabozo).

El conteo debe dar las frecuencias absolutas y, por lo tanto, las relativas. De esta forma, se habrá estimado la probabilidad de los sucesos que se desean estudiar. Si realiza la experimentación como en el caso anterior, obtendrá aproximadamente las siguientes estimaciones para la probabilidad:

$$P(G) = 0,5; \quad P(B) = 0,5; \quad P(1) = 0,35; \quad P(2) = 0,65;$$
$$P(1 \cap G) = 0,1; \quad P(2 \cup B) = 0,9; \quad P(1 \setminus G) = 0,25$$

Observe con detenimiento las probabilidades obtenidas en cada caso: ¿puede establecer alguna relación entre éstas y las áreas de los sectores respectivos? ____.

¿Son las probabilidades proporcionales a las áreas? _______________.

¿Qué probabilidad "teórica" asociaciaría a los sectores de la ruleta 2? ____.

Se puede observar que las probabilidades de los diversos sectores son, aproximadamente, directamente propocionales a las áreas de éstos. De tal manera que, dada una ruleta, es posible asignar una probabilidad teórica a cada uno de los sectores: si denotamos por S a un sector de una ruleta se tiene:

$$P(S) = \frac{\text{Área total del sector } S}{\text{Área total de la ruleta}}$$

De otra forma, si se considera que el área de la ruleta es 1:

$$P(S) = \text{Parte del área total que representa el sector } S$$

Por lo tanto, para la ruleta 1 se tienen las probabilidades teóricas:

$$P(B) = \frac{3}{4}; \quad P(G) = \frac{1}{4}$$

De igual forma, para la ruleta 2, se asignan las probabilidades: $P(G) = 1/2$; $P(B) = 1/2$; $P(1) = 3/8$; $P(2) = 5/8$. Y también:

$$\begin{array}{llll}
P(1 \cap G) = 1/8 & ; P(1 \cap B) = & ; P(1 \cap 2) = & ; \\
P(2 \cap G) = & ; P(2 \cap B) = & ; P(B \cap G) = 0 & ; \\
P(1 \cup G) = & ; P(1 \cup B) = & ; P(1 \cup 2) = 1 & ; \\
P(2 \cup G) = 3/4 & ; P(2 \cup B) = & ; P(B \cup G) = & ; \\
P(1 \setminus G) = 1/4 & ; P(1 \setminus B) = & ; P(1 \setminus 2) = & ; \\
P(2 \setminus G) = & ; P(2 \setminus B) = & ; P(B \setminus G) = P(B) = 1/2 & ; \\
P(G \setminus 1) = & ; P(B \setminus 1) = & ; P(2 \setminus 1) = & ; \\
P(G \setminus 2) = & ; P(B \setminus 2) = 1/4 & ; P(B \setminus G) = & ;
\end{array}$$

Por último, se pueden plantear preguntas tales como: ¿cuál es la probabilidad de haber obtenido un 2 *sabiendo que* ha salido blanco? El "sabiendo que" es un *condicionante*, puesto que modifica el conjunto de sucesos que deben considerarse. El suceso "obtener 2 sabiendo que ha salido blanco" lo denotaremos $2|B$ y se leerá: "suceso 2 condicionado por Blanco". Para obtener la probabilidad de dicho suceso, es necesario tener en cuenta que ha salido blanco, por lo tanto, la porción de blanco juega el papel de "superficie total" y los sectores que tienen 2 y blanco el de "superficie favorable":

$$P(2|B) = \frac{\text{Área favorable al suceso } (2 \cap B)}{\text{Área favorable al suceso } B} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Calcule, para terminar, las siguientes probabilidades condicionadas:

$P(1\|1) = \frac{3/8}{3/8} = 1$	; $P(1\|G) = \frac{1/8}{1/2} = 1/4$	; $P(1\|B) =$	; $P(1\|2) =$	;
$P(2\|2) = \frac{5/8}{5/8} = 1$	; $P(2\|G) =$	; $P(2\|B) =$	; $P(2\|1) = \frac{0}{3/8} = 0$	;
$P(G\|G) =$	; $P(G\|1) =$	; $P(G\|2) =$	; $P(G\|B) =$	;
$P(B\|B) =$	; $P(B\|1) =$	; $P(B\|2) =$	; $P(B\|G) =$	;

¿Es cierto que, para cualesquiera dos sucesos A y B, de manera que $P(B) \neq 0$, se tiene que $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$? Compruebe que, al menos para este problema, los resultados coiciden si se aplica esta relación.

¿Es cierto que, para todo suceso A, $P(A) \neq 0$, $P(A|A) = 1$? _____ ____.

¿Qué condición o condiciones deben cumplirse para que $P(A|B) = 0$? ____.

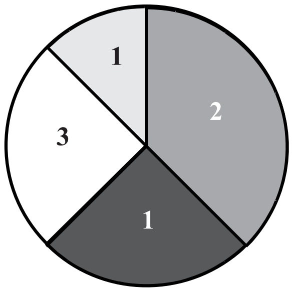
Ejercicios

En los siguientes párrafos se presentan dos ejercicios que pueden englobarse dentro del calificativo de "problemas geométricos de probabilidades"[2].

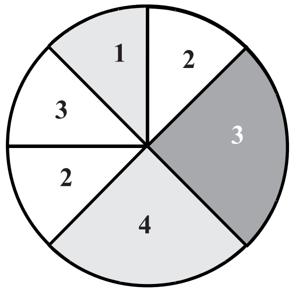
1. Asigne probabilidades a los sectores de las ruletas de la figura.

   Si se denota por 1, 2, 3 y 4 a los sucesos "salir 1, 2, 3 o 4" y por B, C, G y O a los sucesos "salir blanco (B), gris claro (C), gris G o gris oscuro O", calcule las probabilidades de los sucesos interesección ($\cap$), unión ($\cup$) o diferencia ($\setminus$): determine, en primer lugar, todas las posibles combinaciones que se pueden establecer en las distintas ruletas según los números de los sectores y los colores. Así mismo, determine las probabilidades condicionadas de los sucesos.

[2] El origen de este tipo de problemas se debe a G. Leclerc (1701–1788), conde de Buffon, quien en 1777 enunció y resolvió el problema, ahora clásico, de la aguja (ver anexo E).



Ruleta 1



Ruleta 2

2. Se tiene un tablero en forma de cuadrado de lado A y con un cuadrado más pequeño de lado B contenido en él y centrado (ver figura adjunta). Así mismo, se tiene una ficha circular de radio r, tal que dos veces el diámetro de la misma es igual al lado del cuadrado pequeño: $4r = B$. Se lanza la ficha sobre el tablero, ¿cuál es la probabilidad de que ésta, al caer, toque cualquiera de los lados del cuadrado interior?

   El problema propuesto no se ajusta a un conteo de ciertos casos (probabilidad en el sentido dado por Laplace); es preciso, sin embargo, distinguir dos zonas dentro del tablero: "aquella que hace que la ficha al caer toque al cuadrado interior" y "aquella en la que la ficha no toca dicho cuadrado". De esta forma, el problema puede enunciarse en los siguientes términos: ¿cuál es la probabilidad de que el centro de la ficha caiga en la zona comprendida por las dos curvas cerradas dibujadas con trazo discontinuo en la figura (b)? El problema se reduce, de esta forma, a calcular el área de la corona, figura (c):

$$P(\text{“toque el cuadrado interior”}) =$$
$$= P(\text{“el centro de la ficha caiga sobre la corona”}) = \frac{A_{corona}}{A_{cuadrado\ de\ lado\ A}}$$

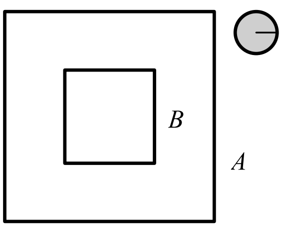


figura (a)

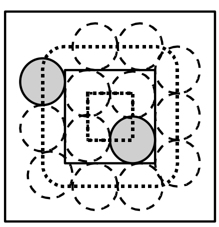


figura (b)

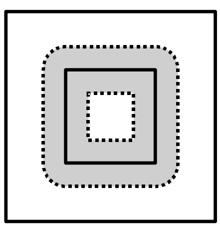


figura (c)

4.2. Juegos equitativos

Un juego es equitativo cuando los participantes tienen, *a priori*, las mismas posibilidades de ganar. Para nosotros el sentido es más restrictivo: el juego ha de estar fundamentado en el azar y no en la destreza, habilidad o capacidad intelectual. El juego del ajedrez, a pesar de que las fichas se sitúan de forma simétrica para ambos jugadores, no es equitativo, puesto que, en general, uno de los competidores está mejor preparado que el otro. El fútbol tampoco es equitativo, a pesar de que el es marcador inicial sea 0-0, puesto que la preparación de los equipos y la calidad de sus jugadores es determinante. En conclusión:

Definición 10 (Juego equitativo) *Un juego de azar en el que participan n jugadores* $J_1, \ldots, J_n$*, es equitativo si* $P($*"ganar* J_k*"*$) = 1/n$*, para cualquier* $k \in \{1, \ldots, n\}$.

En las siguientes secciones se describirán algunas situaciones que permiten analizar la equidad de diferentes juegos.

4.2.1. Diferencia de dados

El juego que se va a describir está pensado para 2 personas. Se necesitan 2 dados y 10 fichas. El jugador A elige los números 0, 1 y 2; el jugador B, los números 3, 4 y 5. El jugador A tira los dados y calcula el valor absoluto de la diferencia de las cantidades obtenidas en ambos dados: si el resultado es 0, 1 o 2, toma una ficha de las 10 que están en el centro de la mesa y vuelve a tirar. En caso contrario, entrega los dados a su contrincate, que realiza la misma acción. Cuando ya no queden fichas en el centro de la mesa, cada jugador tomará las fichas del montón que su adversario haya acumulado. Gana aquel jugador que se quede con todas las fichas.

¿Es el juego equitativo? __________________________.

En caso contrario, ¿qué jugador prefiere ser usted? ________________.

¿Cómo puede justificar sus afirmaciones? __________________________.

¿Qué información obtendría si juega varias partidas? ________________
____.

¿Qué datos le interesará guardar de las partidas que juegue? __________
____.

Efectivamente, varias partidas deben convencerlo de que es mejor ser el jugador A que el B. De hecho, las partidas son relativamente rápidas: con mucha frecuencia se obtiene en el lanzamiento de los dados una diferencia igual a 0, 1 o 2. ¿Es posible dar una justificación teórica a este hecho? Los resultados posibles y diferencias que a ellos se pueden asociar son:

Resultados posibles	Diferencias
(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6)	0; 1; 2; 3; 4; 5

De esta forma, de los 36 resultados posibles, 24 tienen por diferencia 0, 1 o 2 y sólo 12 diferencia 3, 4 o 5. En conclusión, el juego no es equitativo. ¿Es posible modificar el juego para que este resulte equitativo? A continuación se dan tres formas de hacer el juego equitativo.

1. *Admitiendo números enteros negativos.* Se distingue un dado del otro (pintándolos de colores, por ejemplo) y se resta siempre la cantidad obtenida en uno menos la obtenida en el otro. Las diferencias positivas favorecen a un jugador; las negativas, al otro. Cuando en los dos dados sale el mismo número el jugador repite la tirada, mas no toma ninguna ficha.

2. *Modificando la distribución de las diferencias.* El jugador A gana si al lanzar los dados la diferencia es 1 o 2. En caso contrario, gana el jugador B.

3. *Modificando el número de fichas que toma cada jugador si la diferencia le favorece*: como la probabilidad de que el jugador A obtenga una puntuación favorable es el doble de la del jugador B, éste tomará 2 fichas si obtiene 3, 4 o 5; mientras que el jugador A sólo tomará 1 ficha en caso de obtener 0, 1 o 2.

La modificación planteada en último lugar relaciona la probabilidad de que se verifique un suceso con la ganancia asociada a éste. De esta forma, cuanto más difícil sea que un suceso se verifique, mayor ganacia se tendrá que asociar a dicho suceso. El objetivo es "nivelar" la esperanza de ganancia media de sucesos mutuamente excluyentes. Si se denota por $\overline{x}_S$ a dicha esperanza para un suceso S, se tiene:

$$\overline{x}_A = 1 \cdot \frac{24}{36} = \frac{2}{3}; \quad \overline{x}_B = 2 \cdot \frac{12}{36} = \frac{2}{3};$$

En resumen, a todo suceso de un experimiento aleatorio le asociamos una nueva variable que es la esperanza de ganancia:

Definición 11 (Esperanza matemática) *Para un juego aleatorio, dado un suceso S, se llama esperanza matemática de S, se denota por $\overline{x}_S$, al producto de la probabilidad de que se verifique S por la ganancia G_S asignada a dicho suceso, esto es:*

$$\overline{x}_S = G_S \cdot P(S)$$

De esta forma, se redefine juego equitativo como:

Definición 12 (Juego equitativo) *Un juego de azar, en el que participan n jugadores $J_1, \ldots, J_n$, es equitativo si la esperanza de ganancia de los sucesos $S_1, \ldots, S_n$ asociados a cada uno de los jugadores es la misma, esto es, $\overline{x}_{J_k} = \overline{x}_{J_i}$, para cualesquiera $k, i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Por último, la definición 10 es un caso particular de la que ahora se acaba de hacer: puesto que en dicha definición las probabilidades de ganar de cada jugador son todas iguales, entonces las esperanzas matemáticas son iguales si los coeficientes de ganancia (G_S) son todos iguales a 1.

Ejercicios

1. Estudie la equidad del siguiente juego: se lanzan al aire tres monedas, si las tres son cara o sello, gana el jugador A; si se obtienen dos caras, gana el jugador B.

2. El juego del *Yahtzee*: se lanzan cinco dados, gana el primer jugador que obtenga un doble (dos números iguales) y un triple (tres números iguales) en una de las tiradas. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el juego en el primer lanzamiento?

   Con base en el juego de Yahtzee se quiere diseñar un juego ventajoso: demuestre que, como mínimo, es preciso lanzar los cinco dados 15 veces para que la esperanza de ganar sea mayor que la de perder.

4.2.2. 6 simple, 6 doble

El origen de la teoría de probabilidades es el juego. De hecho, todos los historiadores coinciden en que la teoría moderna de la probabilidad tiene su origen en los problemas que el caballero de Méré[3] planteó a su amigo B. Pascal (1623–1662) y que originaron un correspondecia fructífera entre este matemático y Pièrre de Fermat (1601–1665).

Por un tiempo, el caballero de Méré ganó apostando que en cuatro tiradas de un solo dado saldría al menos un 6. De esta forma, sostuvo que el juego era ventajoso (y, por lo tanto, no equitativo) si apostaba por dicho suceso. Como veremos más adelante, esta conjetura es cierta. A ella llegó, el caballero de Méré, de forma empírica: jugado y observando que ganaba con más frecuencia de la que perdía.

Seguramente, sus adversarios observaron lo mismo y decidieron no competir más en un juego que les era desfavorable. Esto debió conducir al caballero de Méré a plantearse teóricamente el juego y así diseñar otro que le diera nuevamente ventaja sobre otros jugadores. Un razonamiento erróneo le condujo a un juego desfavorable y cuando se hubo dado cuenta de ello, desconociendo la causa, le preguntó a su amigo B. Pascal por ella.

El razonamiento seguido por el caballero de Méré, en esencia, es el siguiente: *en el lanzamiento de un dado, es igual de probable que salga cualquier cara; de esta forma* —y aquí viene el error— *la probabilidad de obtener un seis en cuatro tiradas es 4 veces la de obtener un seis en una tirada, esto es,* $4 \cdot (1/6) = 4/6 = 2/3$*. Entonces, por el mismo razonamiento, en 24 tiradas de dos dados se tiene que la probabilidad de obtener un seis doble es:* $24 \cdot (1/36) = 24/36 = 2/3$.

Para analizar el juego se puede proceder de dos formas en esencia diferentes:

1. *Estudio experimental.* Jugar efectivamente a ambos juegos. Por la *ley del azar*, se asocia la frecuencia relativa con la probabilidad.

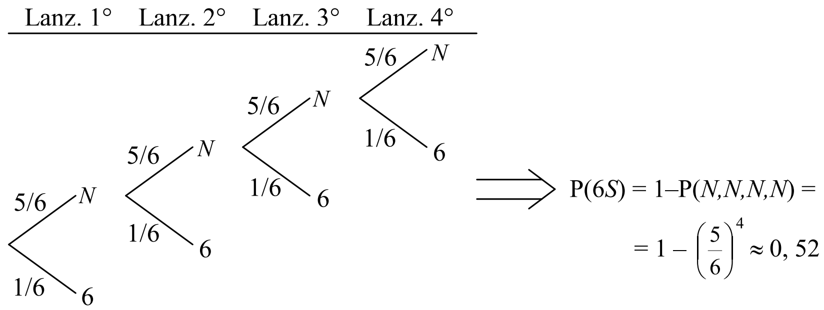
2. *Estudio teórico.* Analizar el juego de formalmente, de tal forma que se asigne una probabilidad (teórica) a cada uno de los sucesos.

Para el estudio empírico se pueden jugar 50 partidas. Organice el estudio de tal forma que pueda almacenar los datos y asignar una probabilidad a los sucesos: "obtener al menos un 6 en 4 lanzamientos de un dado" $(6S)$ y "obtener al menos un 6 doble en 24 lanzamientos de dos dados" $(6D)$.

El resultado obtenido debe diferir del previsto por el caballero de Méré: aproximadamente, se tiene que $P(6) \approx P(6D) \approx 0,5$. El estudio teórico debe ayudarnos a la comprensión del problema. En la figura siguiente se puede

[3]Los años de nacimiento y muerte del caballero de Méré no son recogidos por los historiadores matemáticos. Sabemos que fue contemporáneo de B. Pascal y que, por lo tanto, vivió en el siglo XVII.

observar esquemáticamente los juegos posibles: que en el primer lanzamiento se obtenga un 6 o que no se obtenga (N); si se ha obtenido un 6 a la primera, la partida está ganada y se deja de jugar; si no se ha obtenido un 6, se lanza nuevamente un dado; así se procede hasta un máximo de 4 lanzamientos.



En la parte derecha de la figura se da el resultado: $P(6S) \approx 0,52$. El razonamiento que se sigue es el siguiente: cuando dos sucesos son mutuamente excluyentes (no pueden verificarse a la vez) y el experimento sólo admite éstos como posibles resultados, entonces la suma de probabilidades de dichos sucesos es igual a 1. Así sucede con el lanzamiento de una moneda: los sucesos "cara" (C) y "sello" (X) son mutuamente excluyentes y al lanzar una moneda siempre debe salir o cara o sello, entonces: $P(C) + P(X) = 1$.

Dos sucesos mutuamente excluyentes, que a demás verifican que siempre ha de cumplirse uno u el otro se llaman *complementarios o contrarios*; por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda los sucesos C y X son contrarios. De igual manera, en el lanzamiento de un dado, si se denota por N el suceso "salir distinto de 6", los sucesos N y 6 son contrarios: o se cumple el suceso N o se verifica el suceso 6.

En general, el suceso contrario de un suceso A lo denotaremos por A^c y, por lo tanto, sabemos que se debe verificar: $P(A) + P(A^c) = 1$, además el suceso $A \cap A^c$ no se verifica nunca, puesto que A y A^c son mutuamente excluyentes, esto es, nunca se verifican simultáneamente. De esta forma, los sucesos "$6S$" (un seis en 4 tiradas, seis simple) y el suceso "contrario" $(6S)^c$ (en ninguna de las 4 tiradas se obtiene un seis) deben verificar: $P(6S) + P((6S)^c) = 1$. De esta forma, si se determina la probabilidad del suceso $(6S)^c$ se tendrá determinada la probabilidad del suceso $6S$:

$$P((6S)^c) = P(N, N, N, N) = P(N)^4 = \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 \approx 0,48 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(6S) = 1 - P((6S)^c) \approx 0,52$$

Seguramente, la forma en que se ha resuelto el problema no es "natural":

en general, no es la manera en que un persona, no familiarizada con el cálculo de probabilidades, lo afrontaría. El modo "natural" de proceder es:

$$\begin{aligned}P(6S) = {} & P(6 \text{ en la primera tirada}) + \\ & + P(6 \text{ en el } 2^\circ \text{ lanz., si no ha salido en el } 1^\circ) + \\ & + P(6 \text{ en el lanz. } 3^\circ \text{, si no ha salido ni en el } 1^\circ \text{ ni en el } 2^\circ) + \\ & + P(6 \text{ en el lanz. } 4^\circ \text{, si no ha salido ni en el } 1^\circ \text{ ni en el } 2^\circ \text{ ni en el } 3^\circ) = \\ & = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{5}{6} \approx 0,52\end{aligned}$$

Ya sea por el primer o el segundo método, se concluye, como lo había establecido el caballero de Méré, que el juego es ventajoso si se apuesta por obtener al menos un 6 en 4 tiradas, mas la ventaja no es de 2 a 1 (probabilidad de ganar igual al doble que la de perder). De hecho, la probabilidad de ganar no es mucho mayor que la de perder y, por ello, se entiende que los adversarios del caballero de Méré tardaran algún tiempo en darse cuenta de que, a la larga, su apuesta era desfavorable; de forma más precisa: la esperanza matemática de ganancia del caballero de Méré era mayor que la de los otros jugadores.

Un razonamiento similar al expuesto, conduce a la conclusión de que el juego del seis doble (apostando a que saldrá al menos un 6 doble en 24 tiradas de dos dados) no es ventajoso. Construya un *diagrama de árbol* y razone que la probabilidad de obtener al menos un seis doble en 24 tiradas es: $P(6D) \approx 0,49$. De esta forma, habrá podido resolver la inquietud del caballero de Méré (¿por qué jugar al $6D$ ya no es ventajoso?)

Un pregunta más compleja, sin embargo, queda sin contestar: ¿por qué el razonamiento dado por el caballero de Méré no es correcto? ¿por qué no resulta adecuado resolver el problema mediante proporcionalidad? ¿Qué relación existe en el juego entre los sucesivos lanzamientos de los dados?

4.2.3. Reparto justo

El problema de los repartos, de forma general, puede ser enunciado como sigue: *dos jugadores, interrumpiendo de común acuerdo el juego antes del final, quieren hacer un justo reparto de la apuesta inicial, de acuerdo con la probabilidad que cada uno tiene de ganar*[4].

[4] El problema inicial fue planteado también por el caballero de Méré a su amigo B. Pascal y, al igual que en caso anterior, éste tuvo una fructífera correspondencia con P. Fermat que posibilitó resolver ciertos casos particulares y sentar las bases para un estudio general.

Para ilustrar el problema supongamos la siguiente situación: dos jugadores A y B apuestan 32 monedas cada uno, eligen "cara" y "sello", respectivamente, gana el primero que obtenga 3 caras o 3 sellos. La distribución de las 64 monedas, si el juego no ha concluido y uno de los dos jugadores tiene ventaja, por ejemplo el jugador A, admite las siguientes posibilidades:

1. *A haya ganado 2 partidas y B sólo 1*[5]. En tal caso, si A gana nuevamente, se llevará toda la apuesta y en el caso de perder, habrá equidad y se repartirán las monedas por igual. En conclusión, el jugador A tiene aseguradas 32 monedas, estando las otras 32 pendientes del siguiente lanzamiento: el jugador A se queda con las 32 monedas que seguro obtiene y la mitad de las restantes, esto es, en total: 48 monedas.

2. *A haya ganado 2 partidas y B ninguna.* Si A gana se queda con todo; en caso contrario, se está en la situación del caso anterior. De esta forma, el jugador A tiene aseguradas 48 monedas y el resto se reparten equitativamente entre ambos jugadores: en total, el jugador A se queda con 56 monedas.

3. *A haya ganado 1 partida y B ninguna.* Si A gana se queda, por el caso anterior, con 56 monedas. Si pierde, el juego se equilibra. Por lo tanto, el jugador A tiene aseguradas 32 monedas; mientras que el jugador B, en caso más desfavorable (que pierda nuevamente), tiene aseguradas 8 monedas. De esta forma, el jugador A debe quedarse con las 32 que tiene aseguradas y la mitad de las que quedan (sabiendo que B se queda con 8), esto es: $32 + (32 - 8)/2 = 32 + 12 = 44$.

El mismo problema es resuelto por P. Fermat utilizando el cálculo combinatorio. Fermat procede a escribir todas las posibles formas en que se puede desarrollar el juego completo, esto es, todas las formas en que se pueden jugar 5 partidas entre dos jugadores y después establece repartos de la cantidad total según las *espectativas* de ganar de cada uno de los jugadores.

Denotemos por a al suceso "el jugador A ha ganado una determinda partida" y por b el suceso contrario, esto es, "el jugador B ha ganado una determinada partida". En la siguiente tabla se establecen todos los posibles resultados, suponiendo que la primera partida la ha ganado el jugador A (una tabla "simétrica" se obtendría en caso contrario):

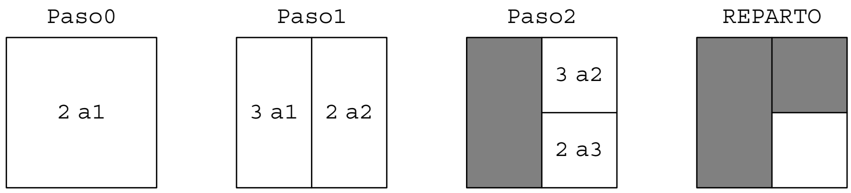
[5] Los razonamientos que a continuación se harán siguen las explicaciones dadas por B. Pascal a su colega P. Fermat.

Partida 1	Partida 2	Partida 3	Partida 4	Partida 5	Ganador
a	a	a	a	a	A
a	a	a	a	b	A
a	a	a	b	a	A
a	a	b	a	a	A
a	b	a	a	a	A
a	a	a	b	b	A
a	a	b	b	a	A
a	b	b	a	a	A
a	a	b	a	b	A
a	b	a	b	a	A
a	b	a	a	b	A
a	b	b	b	a	B
a	b	b	a	b	B
a	b	a	b	b	B
a	a	b	b	b	B
a	b	b	b	b	B

De esta forma, si el jugador A gana la primera partida, tiene la espectativa de ganar en 11 de las 16 posibles partidas, esto es: el reparto debe hacerse, en el tercer caso de la siguiente forma: el jugador A se quedará con $11/16$ del total de monedas que se ha apostado, esto es, $(11/16) \cdot 64 = 44$, llegando al mismo reparto que estableció B. Pascal (por un método diferente).

Concluya el lector cuál es reparto proporcional si el jugador A ha ganado las dos partidas primeras o si ha ganado las dos primeras y ha perdido la tercera. ¿Se obtienen los mismos que por el método primero? ¿Qué método le parece más fácil de utilizar?

Un tercer método consiste en utilizar un modelo gráfico. Por ejemplo, para determinar que el reparto justo es de $3/4$ de la apuesta realizada si el juego se detiene cuando el resultado parcial es 2 a 1, se procede de la siguiente forma:



Cada paso toma en cuenta los posibles resultados. Si un jugador en un paso consigue llegar a 3, se sombrea en el siguiente paso la zona correspondiente. De esta forma, la zona sobreada final corresponde al "tanto por ciento" que ha de llevarse el jugador que tenía la ventaja (2-1) al detenerse el juego.

De manera similar, puede razonarse para los otros casos.

Ejercicio

Se modifican las reglas generales de juego: un jugador gana toda la apuesta si cumple primero una cualquiera de las dos siguientes condiciones:

- Gana dos partidas seguidas.
- Gana tres partidas no consecutivas.

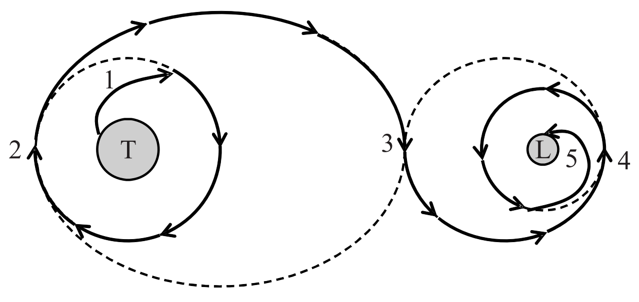
Si cada jugador apuesta 32 monedas, al igual que en el caso anterior, cómo se tendrán que repartir las monedas en las siguientes circunstancias:

1. Si el jugador A ha ganado una partida.
2. Si el jugador A ha ganado dos partidas y el jugador B una (la segunda).

Resuelva el problema por los tres métodos que se han utilizado en el caso anterior: por el método de Pascal, por el método del recuento de todos los caso posibles avanzado por Fermat y por un método gráfico. ¿Cómo puede utilizar un *diagrama de árbol* para representar todas las posibles partidas? Justifique que sólo hay 10 formas de desarrollarse el juego, si aceptamos que se deja de tirar la moneda cuando se conoce el ganador. ¿Son estas 10 formas equiprobables?

4.3. Misión espacial

Como podrá imaginar, toda misión espacial es riesgosa: es preciso efectuar muchas maniobras delicadas. En la presente sección, vamos a analizar la probabilidad de éxito en la colocación de un módulo de investigación en la superficie de la Luna. En la figura, se puede ver el recorrido que se puede efectuar para colocar dicho módulo en la superficie lunar con el mínimo gasto posible.



El itinerario de viaje en línea recta no es viable: resultaría costoso económica y físicamente, ya que tendría que hacerse con la máquina del misil quemando combustible durante todo el viaje. La manera más cómoda y barata de hacerlo es en *vuelo libre*, bajo la acción de la gravitación universal, sin usar motores ni quemar combustible en la mayor parte del trayecto.

La Luna gira en torno a la Tierra porque ésta la atrae (de igual manera que el Sol atrae a la Tierra)[6]. La ley de la gravitación universal postula que la fuerza de atracción es directamente proporcional a las masas de los cuerpos que interaccionan e inversamente proporcional al cuadrado de la distancias, esto es, cuanto más pesados son los cuerpos con más fuerza se atraen y, conforme más alejados están, con menos fuerza.

El viaje, básicamente, consta de cinco momentos clave (ver figura):

1. Alcanzar la órbita circular terreste de salida.
2. Entrar en órbita de tránsito terreste: semielipse alrededor de la Tierra.
3. Enlazar con la órbita de tránsito lunar: semielipse alrededor de la Luna.
4. Enlazar con la órbita circular lunar.
5. Alunizaje: descenso a la Luna desde la órbita circular de llegada.

Estos cinco momentos exigen un gasto de combustible y marcan las situaciones de riesgo de la misión: el éxito de ésta depende directamente del éxito de cada una de las maniobras comprometedoras. El resto del viaje no resulta problemático: en las órbitas circular de salida y de tránsito terreste el módulo es un satélite de la Tierra; en las de tránsito lunar y circular de llegada, el módulo es un satélite de la Luna. Mientras el módulo es un satélite de la Tierra o de la Luna no consume combustible: se mueve *libre* bajo la influencia gravitatoria de la Tierra o la Luna, respectivamente. Para modificar un vuelo libre, se precisa del concurso de un motor.

Para alcanzar la órbita circular terreste (OCT), el módulo se lanza en un cohete de etapas múltiples: módulos que se van desprendiendo conforme cumplen su misión. El despegue del cohete se identifica con la ignición de primera etapa. A cierta altura de la supeficie terreste, es necesario un nuevo impulso, para que la nave no caiga: se separa la primera etapa (que se ha utilizado para el despegue) y se produce la ignición de la segunda. Cuando

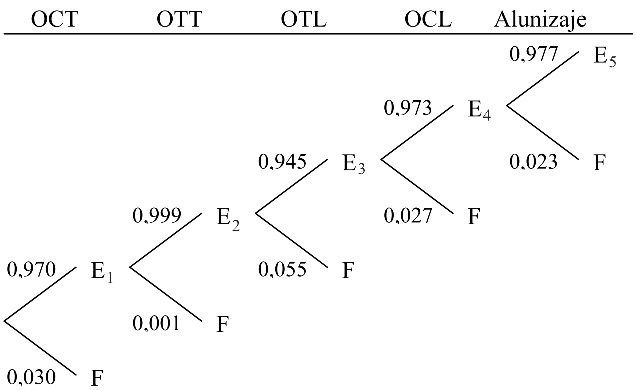
[6] La atracción es mutua: la Tierra atrae a la Luna y viceversa. De igual manera sucede con la Tierra y el Sol.

esta última etapa ha cumplido su función (y, por lo tanto, agotado el combustible que tenía), se separa del módulo principal y se produce una tercera ignición, que conduce el módulo principal hasta la OCT. La probabilidad de éxito de esta fase es de 0,970.

El resto de fases son más sencillas: para entrar en la órbita de tránsito terrestre (OTT) el módulo principal es propulsado para modificar su trayectoria (en caso contrario, permanecería dando vueltas al rededor de la tierra en la OCT). De igual manera sucede para pasar a la órbita de tránsito lunar (OTL) y de ésta a la órbita circular de llegada (OCL). Por último, el alunizaje es menos peligroso, puesto que la fuerza gravitatoria que ejerce la Luna sobre el módulo es menor (que aquélla que ejercía la Tierra). Las probabilidades de éxito de estas maniobras son: 0,999; 0,945; 0,973 y 0,977, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de éxito de la misión?

Para que la misión sea un éxito, deben cumplirse todas las fases; sin embargo, si una fase se ha realizado con éxito, no se modifica la probabilidad de éxito de la siguiente (por ello se dice que el éxito de cada fase es *independiente* del resto).

En la figura siguiente se representa un *diagrama de árbol* donde se indica la probabilidad de éxito (E) y de fracaso (F) de cada fase.



De esta forma, el éxito total E debe interpretarse como:

$$E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5$$

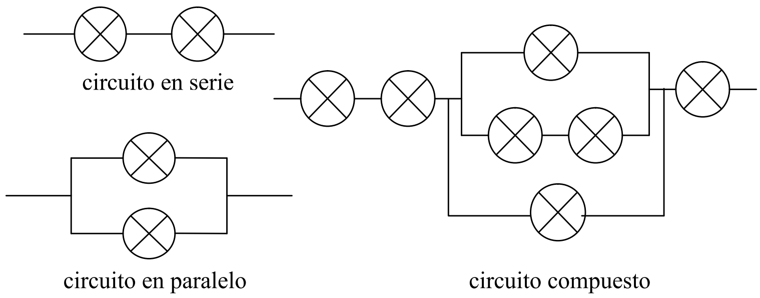
esto es, que todas las fases se salden con éxito. Por "éxito", entendemos que las condiciones son óptimas y que, por lo tanto, la siguiente fase no tiene dificultades añadidas (*hipótesis de independencia*). Entonces, la probabilidad de éxito es:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 \cap E_5) = \\ &= P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) \cdot P(E_4) \cdot P(E_5) = \\ &= 0,970 \cdot 0,999 \cdot 0,945 \cdot 0,973 \cdot 0,977 = 0,871 \end{aligned}$$

Y, por lo tanto, la probabilidad de que el viaje fracase es: $1 - 0,871 = 0,129$.

Ejercicio

En un circuito eléctrico en serie todos los componentes deben funcionar correctamente para que éste funcione: si uno de ellos no funciona, entonces el flujo electrico se corta y el circuito queda abierto. En un circuito en paralelo, el flujo se detiene únicamente si los componentes así colocados están todos averiados, esto es, cada sector en paralelo está estropeado (uno o varios sectores pueden estar constituidos a su vez por un circuito en serie).



De esta forma, si se piensa en los casos más sencillos de circuitos en serie y paralelo, es posible asociar a éstos una notación conjuntista que señale el buen funcionamiento. Por ejemplo, el circuito en serie de la figura tiene dos nodos A y B, ambos pueden funcionar correctamente o, por el contrario, estar fallados. El suceso "el nodo A funciona correctamente" lo designamos, sencillamente, por "A"; el suceso "el nodo A está fallado" lo denotamos, por lo tanto, por "A^c". De manera análoga, para el nodo B. De esta forma, el suceso "$A \cap B$" representa "el correcto funcionamiento del circuito en serie", puesto que ambos nodos funcionan.

¿Qué representan los sucesos $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ y $A^c \cap B^c$? _______________.

¿Qué se puede concluir en estos tres casos? ____________________
____.

Para un circuito en paralelo simple, es suficiente que uno de los dos nodos funcione correctamente para que éste permanezca cerrado (y la corriente pase de un extremo al otro). De esta forma, el suceso $A \cup B$ representa el correcto funcionamiento del sistema. ¿Los sucesos $A \cap B^c$ y $A^c \cap B$ representan un circuito abierto o cerrado? _______________.

¿Es cierto que: $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$? __________.

¿Qué relación tiene esta igualdad con las anteriores preguntas? _____
____.

¿Qué representa el suceso $A^c \cap B^c$? ______________________________.

Para terminar, suponga que la probabilidad de que falle un componente es 0,1: ¿cuál es la probabilidad de que los circuitos de la figura funcionen? Realice una diagrama en forma de árbol que le ayude a interpretar correctamente el circuito. Si los circuitos en paralelo son más fiables, ¿por qué cree que en muchas circunstancias se opta por la instalación de uno en serie?

4.4. Estimación de una probabilidad

Con anterioridad, se ha comentado que la noción de *suerte* debía ser aclarada. Cuando un suceso, que puede beneficiar a una persona y que tiene una probabilidad próxima a cero, se verifica, decimos que la persona "ha tenido suerte". En otras ocasiones, la bondad de una técnica o de un método de proceder se mide en términos de la probabilidad de obtener los mismos resultados si se procede de forma aleatoria: un método es óptimo si, procediendo al azar, los resultados previsibles son sustancialmente peores. Inversamente, un método es inadecuado si los resultados previsibles procediendo al azar son similares o mejores que aquellos.

Por ejemplo, supongamos un test objetivo con dos opciones de respuesta: verdadero y falso. Si el test cuenta con 100 preguntas y éstas se contestan al azar, se debe esperar acertar 50 de ellas. ¿Resulta admisible que una persona pase la prueba si tiene 50 o más preguntas correctas? Evidentemente, no; puesto que este número de respuestas se puede conseguir tanto si se ha estudiado como si no. Por lo tanto, una evaluación de conocimientos de esta naturaleza no tendrá un carácter discriminatorio, esto es, no diferenciará a las personas que han estudiado (y que han adquirido algunos conocimientos) de aquellos que han respondido al azar. De esta forma, el método de evaluación resulta inadecuado.

Una opción consiste en penalizar cada contestación incorrecta, de tal suerte que si se contesta al azar se espera que la persona evaluada tenga un promedio de cero: 50 preguntas acertadas menos 50 fallos, suman 0 puntos. Esto es, el nuevo método pone "las cosas en su sitio": una persona que conteste al azar (no tiene conocimientos suficientes para discernir entre las opciones verdadero y falso), obtiene cero puntos, como es de esperar.

¿Qué método utilizá para evaluar un test objetivo con k opciones de elección para la respuesta?

En los siguientes párrafos simularemos una situación, para el análisis de una técnica. En concreto, se desea responder a la pregunta: ¿se tienen datos suficientes para admitir que dicha técnica es buena? El proceso general que se sigue se puede resumir en los siguientes puntos:

1. Recogida y organización de la información.
2. Análisis de la situación e hipótesis de partida.
3. Analisis la hipótesis mediante observación directa de la situación (si es posible) o mediante simulación de la misma u observación indirecta.
4. Recogida y organización de datos. Representaciones gráficas.
5. Estudio teórico (siempre que sea posible).
6. Conclusiones, predicciones y decisiones.

4.4.1. Recoger y organizar información

Supongamos, por ejemplo, que un equipo de básquet se enfrenta a la recta final del campeonato. Una parte importante de los puntos conseguidos se obtienen por lanzamientos de tiros libres. Por ello, el entrenador decide que los jugadores practiquen, después de cada entrenamiento, una nueva técnica de lanzamiento de tiros libros, con la que espera que el equipo obtendrá un porcentaje mayor de aciertos en esta faceta del juego.

Antes de la utilización de la nueva técnica, los jugadores fallaban 1 de cada 3 lanzamientos desde la línea de tiros libres. En el último entremamiento, el entrenador comprueba que los jugadores han tenido una notable mejoría: en promedio, han acertado 5 de cada 6 lanzamientos. Con estos datos, ¿se puede afirmar que la nueva técnica es mejor? ¿Qué probabilidad hay de que la nueva técnica no sea mejor y que en el último entrenamiento los jugadores hayan estado “afortunados”? De forma más precisa, ¿qué probabilidad hay de que un jugador que normalmente encesta 2 de cada 3 lanzamientos, consiga 5 de 6 con la misma técnica o con una peor?

4.4.2. Análisis de la situación e hipótesis de partida

Si el equipo rival ha cometido 8 o más faltas personales en un mismo tiempo y comete otra (sobre un jugador que no está en diposición de tirar a canasta), el equipo que tiene la pelota en posesión debe decidir una de las dos siguientes acciones:

1. Tirar lanzamientos libres: 1 más 1, esto es, un jugador lanza un tiro libre, si lo acierta tiene la opción de uno más; si lo falla, el juego sigue.

2. Hacer un saque de banda y seguir el juego.

El entrenador tendrá que tomar una decisión: o bien lanzar los tiros libres o bien hacer un saque de banda. La decisión, a favor de los tiros libres se toma si el entrenador sabe que las probabilidades de acertar son grandes: la nueva técnica es más efectiva (*hipótesis*); con otras palabras, el acierto no puede explicarse correctamente en términos de *suerte*.

La probabilidad de meter 5 de cada 6 lanzamientos si normalmente se introducen 2 de cada 3 puede ser determinada de forma experimental o teórica. En el siguiente apartado, se explica un método de simulación para estudiar de forma experimental dicha probabilidad.

4.4.3. Simulación

Como los jugadores acertaban 2 de cada 3 lanzamientos, se concluye que con la antigua técnica la probabilidad de encestar un tiro libre era 2/3. Por otro lado, si se lanza un dado (no trucado), la probabilidad de obtener cualquiera de sus caras es 1/6: la probabilidad de obtener "1", "2", "3" o "4" es 4/6, esto es, 2/3. Por lo tanto, si se lanza un dado reiteradas veces, puede interpretarse como acierto si se obtiene cualquiera de los cuatro anteriores números y como fallo en caso contrario[7]. ¿Cuál es la probabilidad de que (al menos) 5 de cada 6 veces que se lance el dado se obtenga "acierto"?

El estudio empírico se reduce a la toma de datos y análisis de éstos. Para ello, se lanza 6 veces un dado, anotando el número de veces que se *acierta* (se obtiene 1, 2, 3 o 4 con el dado) y el número de veces que se *falla* (se obtiene 5 o 6). Si el número de aciertos es igual a 5 o 6, entonces se asigna "1" al bloque; en caso contrario, se asigna "0". Se repite este procedimiento 10 veces, por ejemplo, de tal forma, que sumando los números del "bloque" se obtiene la frecuencia absoluta de las veces en que se ha verificado el suceso "al menos 5 de cada 6 veces se ha acertado". Complete la tabla:

[7] La elección de las caras es irrelevante: es preciso excluir dos caras, pero como los sucesos son equiprobables (se supone que el dado no está trucado), se puede excluir cualesquiera dos: 1 y 2, 2 y 5, 4 y 6, ... ¿De cuántas formas podemos elegir las caras?

Partida	Aciertos	Fallos	Bloque
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Total			

¿En cuántas partidas ha obtenido en 5 o 6 de sus lanzamientos “acierto”? De esta forma, la probabilidad experimental de meter al menos 5 de cada 6 lanzamientos (suceso “Bloque”) si normalmente se introducen 2 de cada 3 (suceso “Antes”) es:

$$P(Bloque|Antes) = \frac{f_a(Bloque)}{10}$$

A la luz de los datos obtenidos, ¿cree usted que hay información suficiente para afirmar que la nueva técnica es mejor? ____________________
____.

4.4.4. Obtención y organización de datos. Representaciones gráficas

Los datos obtenidos en una simulación pueden ser almacenados en tablas y representados en histogramas, diagramas de sectores, etc. La intención es obtener una lectura rápida y fiable de los datos, que permita hacer un reconstrucción lo más precisa posible de la situación.

Supongamos una clase modelo de 40 alumnos, donde cada alumno ha realizado la experiencia anterior. Se dispone de 400 jugadas ($40{\cdot}10$ jugadas)[8]. De esta forma, teniendo en cuenta la *ley del azar* se puede esperar una aproximación suficientemente aceptable.

Para simplificación en la presentación de los datos, introduciremos alguna notación: los sucesos “6”, “5”, “4”, ... denotan los sucesos “jugada de 6 lanzamientos en la que se ha conseguido 6, 5, 4, ... lanzamientos favorables, es decir, que la cara superior del dado ha sido 1, 2, 3 o 4”. Por otro

[8] Se supone que todos los alumnos han realizado la experimentación en condiciones similares y que, por lo tanto, todas las jugadas son equiparables.

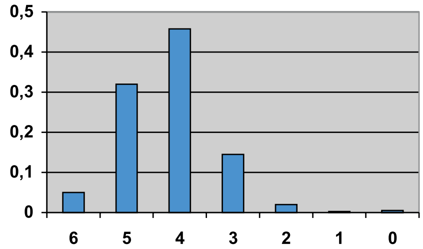
lado, designaremos por f_a a la frecuencia absoluta de cada uno de los sucesos; por f_r, a la frecuencia relativa. La tabla siguiente resume los resultados obtenidos.

Suceso	f_a	f_a acumulada	f_r	f_r acumulada	%	% acumulado
"6"	20	20	0,0500	0,0500	5,00	5,00
"5"	128	148	0,3200	0,3700	32,00	37,00
"4"	183	331	0,4575	0,8275	45,75	82,75
"3"	58	389	0,1450	0,9725	14,50	97,25
"2"	8	397	0,0200	0,9925	2,00	99,25
"1"	1	398	0,0025	0,9950	0,25	99,50
"0"	2	400	0,0050	1	0,5000	100
Total	400	400	1	1	100	100

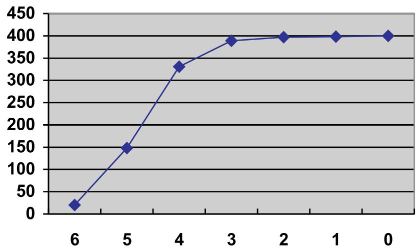
Las frecuencias relativa y absoluta *acululadas* son útiles para agrupar resultados de frecuencias: por ejemplo, se puede afirmar que en 148 de las 400 partidas, se obtuvieron 5 o 6 aciertos y que la frecuencia relativa acumulada es 0,37: la probabilidad (empírica) asignada es 0,37 y, por lo tanto, se debe aceptar que la nueva técnica es mejor, puesto que resulta poco probable que se acierten 5 de cada 6 tiros libres con la antigua técnica.

Por otro lado, los datos pueden ser visualizados mediante gráficos: histograma, diagrama lineal, sector circular. A continuación, se utilizan estos tipos de gráficos para representar los valores de la frecuencia relativa, de la frecuencia absoluta acumulada y de los porcentajes, respectivamente.

Un *histograma* es una representación gráfica de una distribución de frecuencias por medio de rectángulos, cuyas anchuras representan intervalos de la clasificación y cuyas alturas representan las correspondientes frecuencias. Como en nuestro caso no hay intervalos, sino un conjunto finito de sucesos, representaremos las frecuencias relativas mediante un diagrama de barras (histograma que se utiliza cuando la variable es discreta). En la figura siguiente se representan las frecuencias relativas de los sucesos "los 6, 5,... lanzamientos son aciertos".

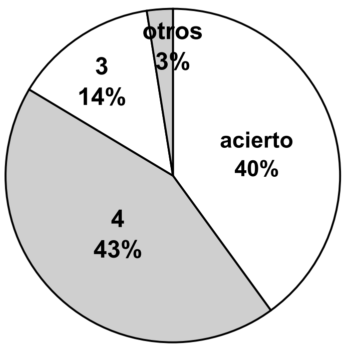


Un *diagrama lineal* es una representación gráfica de una distribución de frecuencias por medio de una línea poligonal, que une puntos colocados a alturas que representan las correspondientes frecuencias. La figura siguiente representa las frecuencias absolutas acumuladas de los sucesos “los 6 lanzamientos son aciertos”, “5 o 6 lanzamientos son aciertos”, ...



En el diagrama lineal se observa claramente, por ejemplo, que la frecuencia absoluta acumulada ha alcanzado casi su límite para el suceso “más de 4 aciertos”. De hecho, este tipo de información puede ser útil para simplificar los datos agrupándolos en “colecciones de sucesos”.

Por último, un diagrama o *sector circular* representa el valor de cada frecuencia por un porción radial de círculo, cuya área es propocional a dicha frecuencia. Los valores suelen indicarse en tantos por ciento. En la figura siguiente, para simplificar la presentación, diferentes sucesos se agrupan: los sucesos “acertar 5 o 6” se han agrupado bajo el rótulo “acierto”; los sucesos “acertar 0, 1, 2” constituyen la sección “otros” (entre todos ellos representan únicamente el 3 % del total de frecuencias). De esta forma, el diagrama de sector que debiera contar con 7 secciones cuenta sólo con cuatro, representativas de la distribución de la muestra.



4.4.5. Estudio teórico

El estudio de la probabilidad se ha realizado en los puntos anteriores de forma experimental. En esta sección, se calcula de forma teórica la probabilidad de conseguir 5 o 6 aciertos, suponiendo que, con la nueva técnica, los jugadores siguen teniendo una efectividad de 2 canastas de 3 intentos:

$$P(5 \text{ o } 6 \text{ aciertos}) = P(5 \cup 6) = P(5A) + P(6A)$$

La segunda igualdad es cierta puesto que los sucesos "acertar 5 o 6" son mutuamente excluyentes: si se han acertado 5 canastas no pueden, a la vez, haberse acertado 6. Además se sabe que la probabilidad de acertar (A) es $2/3$: $P(A) = 2/3$; mientras que la probabilidad de fallar (F) es $1/3$: $P(F) = 1/3$. Por lo tanto, la probabilidad de acertar las 6 veces se calcula de forma sencilla multiplicando 6 veces $2/3$:

$$P(6 \text{ aciertos}) = P(A, \overset{(6 \text{ veces})}{\cdots}, A) = P(A) \cdot \overset{(6 \text{ veces})}{\cdots} \cdot P(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

Por otro lado, el suceso "acertar 5" puede interpretarse como el suceso "fallar justamente 1". Este fallo puede darse en el primer lanzamiento, en el segundo, en el tercero, ..., en el sexto. Ahora bien, la probabilidad de fallar sólo el primer lanzamiento es igual a:

$$P(F, A, \overset{(5 \text{ veces})}{\cdots}, A) = P(F) \cdot P(A) \cdot \overset{(5 \text{ veces})}{\cdots} \cdot P(A) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

Además, la probabilidad de los sucesos, "fallar únicamente el primero", "fallar únicamente el segundo", ... son igual de probables (¿por qué?). Se concluye:

$$P(5A \text{ y } 1F) = 6 \cdot P(F, A, \overset{(5 \text{ veces})}{\cdots}, A) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

En la anterior expresión, el número 6 representa las distintas posiciones que puede ocupar el fallo: el número de diferentes ordenaciones de 5 elementos iguales (A) y 1 elemento diferente (F) es igual al número de permutaciones con repetición de 6 elementos distribuidos en dos grupos de 5 y 1 elementos, respectivamente.

En conclusión:

$$\begin{aligned} P(5 \text{ o } 6A) &= P(5 \cup 6) = P(5A, 1F) + P(6A) = \\ &= 6 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right) \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 \approx 0,3512 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede afirmar que la aproximación experimiental de la probabilidad de obtener 5 o 6 aciertos ($\approx 0,37$) se ajusta muy bien la probabilidad teórica.

Ejercicios

1. El desarrollo hecho puede ser extendido para calcular la probabilidad de tener n fallos y $(6-n)$ aciertos, con n variando entre 0 y 6. Para ello, es necesario seguir dos pasos:

    a) Calcular la probabilidad de fallar los n primeros y acertar los $(6-n)$ siguientes.

    b) Calcular el número de ordenaciones con 6 elementos, agrupados en dos partes de n y $(6-n)$ elementos iguales, respectivamente.

2. Se desea hacer un estudio de probabilidad similar al descrito con base en el siguiente problema: "En una caja hay 7 monedas no defectuosas y 6 monedas defectuosas (con cinco de ellas se obtiene con probabilidad 4/5 cara y con la restante se obtiene con probabilidad 2/3, cruz). Se toma una moneda al azar, ¿es aceptable pensar que no es defectuosa si después de 10 lanzamientos se ha obtenido 7 caras y 3 cruces?"

4.4.6. Conclusiones, decisiones y predicciones

El estudio realizado permite afirmar que resulta poco probable que con la vieja técnica los jugadores tengan un acierto de 5 de cada 6 lanzamientos de tiros libres intentados y, por lo tanto, cabe afirmar que la nueva técnica es mejor.

De la conclusión anterior, no se deduce necesariamente que siempre que se tenga la oportunidad de escoger entre tirar lanzamientos de tiro libre 1 más 1 o sacar de banda y jugar la pelota, se vaya a decidir lo primero. Por ejemplo, si faltando 10 segundos y estando en desventaja de 3 puntos, obtaremos siempre por sacar de banda e intentar una canasta de 3 puntos, puesto que si lanzamos tiros libres, en el mejor de los casos, encestaremos los dos, pero la pelota quedará en posesión del equipo rival y, con mucha probabilidad, el tiempo pasará sin que podamos hacer nada.

El conocimiento de la bondad de la nueva técnica es un elemento de juicio, mas no el único: una decisión debe tomarse considerando el mayor número de variables que afecten al desarrollo de una situación concreta. No es posible, por lo tanto, dar "recetas", sino elementos de juicio que nos permitan discernir al cabal cual es la estrategia mejor o, en su defecto, cual es una buena decisión[9].

[9]En muchas circunstancias tendremos un tiempo reducido de tiempo para tomar una decisión o nos faltarán elementos de juico: el análisis no podrá ser exhaustivo y, en general, consideraremos una estrategia óptima "para esas circunstancias particulares". Con otras

Por último, en el supuesto de que se tomara la decisión de tirar los lanzamientos de 1 más 1: ¿cuál es la probabilidad de acertar 1, 2 o ninguno de los lanzamientos?

$$P(0) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0,0278;\ P(1) = 2\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} \approx 0,2778;\ P(2) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,6944$$

Modelización

En todo lo descrito se evita introducir componentes "anómalos". Por ejemplo, que el balón esté ligeramente desinflado (se modifica el control que se tiene del mismo); que los datos que se tienen se hayan tomado en las fases previas (donde la presión es menor y los jugadores están menos nerviosos); etc. En definitiva, estamos describiendo la situación en condiciones "ideales, modélicas". Una de las actividades genuinamente matemáticas es la *modelización de la realidad*, es decir, la construcción de un *modelo (matemático)* que nos permita describir e interpretar una situación concreta, generalmente para operar sobre ella. Por *modelo* se entiende, un esquema teórico de un sistema o de una realidad compleja (en nuestro caso, sobre el uso de una nueva técnica para el lanzamiento de tiros libres en el básquet), que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.

4.5. Números aleatorios

Los números aleatorios[10] (y las funciones que los generan) son de gran utilidad cuando se pretende realizar simulaciones que involucren procesos probabilísticos y se desee introducir una cierta incertidumbre.

Hay muchos procedimientos para obtener números al azar: con una ruleta, extrayendo bolas numeradas de una urna, mediante una calculadora o un ordenador, con un dado (obtener números naturales comprendidos entre

palabras, el dicho popular reza: *Lo mejor es enemigo de lo bueno.*

[10]En la actualidad, se sabe que con una computadora es imposible generar una secuencia de números de forma totalmente aleatoria. Los paquetes informáticos que incorporan esta opción permiten obtener números que no son aleatorios en sentido estricto, sino números llamados *pseudoaleatorios*, debido a que están generados mediante un algoritmo, de tal forma que, partiendo de un número inicial llamado *semilla*, se genera una lista de números con las características matemáticas ligadas al fenómeno de la aleatoriedad. Sin embargo, existe un cierto determinismo en la obtención de esa lista, en el sentido de que fijar la misma semilla implica obtener la misma lista de números aleatorios. No obstante, para las simulaciones de sistemas probabilísticos, es suficiente con disponer de un generador de números pseudoaleatorios.

1 y 6, ambos inclusive), etc. La tabla siguiente muestra 500 números de una cifra obtenidos de forma aleatoria con el *software* `Mathematica`.

1, 2, 1, 4, 5, 0, 5, 4, 5, 8, 1, 9, 9, 7, 9, 2, 7, 2, 9, 5, 8, 0, 3, 0, 1, 8, 1, 7,
4, 0, 0, 8, 8, 0, 3, 7, 0, 0, 5, 9, 4, 6, 9, 0, 6, 2, 5, 5, 1, 2, 2, 3, 9, 3, 1, 2,
6, 1, 7, 3, 7, 1, 1, 3, 4, 5, 4, 3, 7, 0, 4, 3, 3, 9, 6, 9, 5, 7, 4, 2, 4, 3, 5, 5,
8, 5, 5, 5, 2, 5, 4, 4, 8, 5, 0, 5, 1, 4, 4, 6, 2, 3, 8, 8, 0, 0, 2, 7, 7, 1, 7, 8,
9, 2, 2, 1, 3, 2, 6, 9, 1, 1, 9, 2, 9, 3, 0, 7, 7, 2, 9, 2, 4, 7, 4, 2, 1, 4, 1, 8,
5, 4, 9, 9, 2, 4, 5, 9, 8, 3, 4, 8, 1, 0, 3, 9, 5, 9, 3, 1, 2, 1, 8, 8, 4, 5, 5, 2,
6, 3, 2, 1, 7, 1, 0, 8, 4, 5, 3, 4, 0, 9, 1, 1, 5, 6, 5, 4, 8, 6, 8, 3, 7, 5, 9, 6,
0, 4, 1, 4, 4, 3, 5, 1, 5, 3, 9, 0, 9, 8, 7, 1, 7, 4, 1, 9, 4, 8, 8, 3, 6, 9, 6, 1,
1, 5, 6, 0, 7, 9, 9, 8, 5, 8, 4, 1, 6, 7, 1, 7, 9, 0, 7, 6, 1, 6, 7, 9, 8, 8, 4, 0,
2, 4, 1, 7, 5, 4, 2, 3, 0, 0, 2, 6, 4, 4, 5, 2, 6, 9, 1, 3, 6, 5, 9, 3, 7, 9, 6, 9,
8, 3, 5, 8, 4, 7, 1, 1, 3, 1, 5, 8, 5, 1, 8, 3, 0, 5, 9, 1, 0, 6, 9, 5, 7, 3, 9, 4,
5, 2, 8, 1, 5, 9, 4, 8, 8, 0, 7, 7, 7, 2, 9, 6, 0, 6, 6, 9, 0, 4, 7, 9, 5, 1, 8, 3,
1, 4, 0, 3, 2, 9, 9, 6, 5, 0, 4, 2, 1, 3, 7, 4, 2, 6, 1, 5, 9, 6, 3, 3, 1, 5, 8, 8,
8, 7, 8, 1, 8, 8, 6, 6, 9, 2, 5, 3, 7, 4, 4, 0, 0, 1, 4, 0, 8, 9, 9, 2, 1, 8, 8, 8,
1, 4, 6, 0, 5, 0, 6, 7, 1, 0, 9, 2, 1, 2, 7, 7, 0, 9, 0, 8, 0, 9, 3, 5, 2, 0, 1, 5,
7, 7, 4, 5, 7, 3, 5, 7, 2, 6, 1, 5, 1, 6, 8, 2, 1, 5, 0, 2, 9, 3, 4, 4, 8, 9, 1, 1,
3, 0, 9, 6, 4, 5, 8, 4, 5, 4, 2, 8, 3, 7, 0, 7, 4, 6, 7, 4, 3, 7, 4, 9, 5, 8, 0, 2,
4, 3, 5, 6, 5, 9, 1, 6, 5, 7, 7, 0, 5, 7, 6, 2, 3, 0, 4, 2, 0, 6, 5, 9

La pregunta que cabe formularse es la siguiente: ¿cómo asegurar que dicha lista es realmente aleatoria? Con otras palabras, ¿nuestro programa produce realmente secuencias de números aleatorios o tiene ciertas pautas que pueden ser descubiertas? La idea general consiste en comparar las frecuencias relativas de ciertos sucesos (a partir de los números obtenidos en la tabla) con sus respectivas probabilidades calculadas bajo la hipótesis de equiprobabilidad. Por ejemplo, bajo la hipótesis de equiprobabilidad, la probabilidad de sacar un 1, un 2, un 3, etc. es igual a $1/10$ y, por lo tanto, la frecuencia relativa de ceros, unos, doses, treses, etc. debe ser próxima a este valor: complete la tabla 4.1.

¿Hay alguna diferencia excesiva entre las frecuencias relativas obtenidas y las probabilidades estimadas? ______________________________
____.

¿Es definitiva la prueba que se acaba de realizar? _______________
____.

El hecho de que la tabla anterior muestre concordancia entre la frecuencia relativa y la probabilidad teórica esperada, no significa que la prueba permita asegurar con rotundidad la aleatoriedad de los números. Por ejemplo, la serie 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, … muestra concordancia entre la frecuencia relativa

Número	Conteo	f_a	f_r
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Tabla 4.1: ¿Aleatoriedad o determinismo?

y la probabilidad teórica de obtener un número al azar comprendido entre 0 y 9, ambos inclusive, pero es claro que no hay aleatoriedad en dicha serie.

Por lo tanto, serán necesarias otras pruebas que contribuyan a la tesis de aleatoriedad de los números obtenidos. Por ejemplo, si se agrupan los dígitos de la dicha tabla de dos en dos, se obtienen 250 números de dos cifras, los primeros de ellos serían: 12, 14, 50, 54, 58, ... De esta forma, es posible completar otra tabla que nos permita comparar las frecuencias relativas de aparición de diferentes números con las probabilidades esperadas. Por ejemplo, ¿cuántos números comprendidos entre 00 y 09 (ambos inclusive), entre 10 y 19 (también ambos inclusive), entre 20 y 29, ..., hay? Complete la tabla siguiente, donde la columna P representa la probabilidad teórica.

Número	Conteo	f_a	f_r	P
entre 00-09				
entre 10-19				
entre 20-29				
entre 30-39				
entre 40-49				
entre 50-59				
entre 60-69				
entre 70-79				
entre 80-89				
entre 90-99				

¿Hay alguna diferencia excesiva entre las frecuencias relativas obtenidas y las probabilidades estimadas? ______________________________
____.

¿Es definitiva la prueba que se acaba de realizar? ____________________
____.

Se podría razonar, como en el caso anterior, que la prueba no es definitiva. Por ejemplo, es susficiente considerar la serie: ______________________
____.

Por lo tanto, es preciso realizar otras pruebas. A continuación, se dan algunas. Analice las frecuencias relativas que se obtienen en cada caso y compárelas con las probabilidades esperadas en el supuesto de equiprobabilidad[11].

1. En la tabla de números aparecen "rachas" de números, esto es, 2, 3, 4, ..., números iguales seguidos. Por ejemplo, en la primera fila aparece la racha de longitud 2: 99; en la segunda fila, las rachas 00 (2 veces), 88, 55, 22, también de longitud 2; en la cuarta fila la racha de longitud 3: 555; etc. ¿Cuántas rachas de longitud 2, 3, 4, ..., aparecen? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una racha de 2, 3, 4, ...?

   ¿Hay alguna diferencia excesiva entre las frecuencias relativas obtenidas y las probabilidades estimadas? ____________________________
   ____.

   ¿Es definitiva la prueba que se acaba de realizar? ____________________
   ____.

2. Si en la tabla de números se resalta un número (por ejemplo, el siete) y se observa el número que le sigue, bajo la hipótesis de equiprobabilidad, las frecuencias relativas de los números que lo siguen deben ser próximas a ____________. Construya una tabla donde almacene las frecuencias absoluta y relativa de las cifras que se encuentran detrás del número resaltado.

   ¿Hay alguna diferencia excesiva entre las frecuencias relativas obtenidas y las probabilidades estimadas? ____________________________
   ____.

   ¿Es definitiva la prueba que se acaba de realizar? ____________________
   ____.

3. Al principio de esta sección, se ha observado que la frecuencia relativa del suceso "obtener un número determinado comprendido entre 0 y 9 (ambos inclusive)" era próxima a 1/10. Esto puede interpretarse que, en promedio, cada 10 dígitos aparece dicho número una vez. Se toma,

[11] Pruebas extraídas del libro Godino et al. (1996), p.130–133.

por ejemplo, como referencia el número 0, entonces se completa la tabla:

Secuencia hasta el número 0 (inclusive)	Longitud
1, 2, 1, 4, 5, 0	6
5, 4, 5, 8, 1, 9, 9, 7, 9, 2, 7, 2, 9, 5, 8, 0	16
3, 0	2
1, 8, 1, 7, 4, 0	6
0	1
⋮	⋮

¿Hay alguna diferencia excesiva entre las frecuencias relativas obtenidas y las probabilidades estimadas? ______________________________
____.

¿Es definitiva la prueba que se acaba de realizar? ____________________
____.

4. Invente y realize una nueva prueba sobre estos números. ¿Puede afirmar que son realmente aleatorios? ¿Existe alguna regla que permita predecir el número que saldrá la próxima vez?

Ejercicio

Pida a un amigo que le de al azar 50 números de una cifra (comprendidos entre 0 y 9, ambos inclusive). Analice, en los términos descritos, la aleatoriedad de los números así obtenidos.

Suponga que propone el siguiente juego a su amigo: "Anota (y no me lo enseñes) un número del 0 al 9, ambos inclusive, en un papel. Luego yo escribiré 5 de ellos en otro papel. Si uno de los números que yo he elegido coincide con el que tú has escrito, me invitas a un helado; en caso contrario, te invito yo". ¿Cree que sería ventajoso este juego para usted? Realice con varias personas el experimento descrito: ¿cuántas ha ganado usted? Si hubiera equiprobabilidad, ¿cuántas aproximadamente debiera haber ganado?

4.6. El timador "honrado"

Un sujeto le propone el siguiente juego: "Aquí hay tres cartas: una blanca por ambas caras (carta BB); otra, blanca por una cara y marcada con un sello por la otra (carta BS); la tercera, marcada con un sello por ambas caras (carta SS). Usted saca al azar una de ellas y muestra una de las dos caras. Entonces, el sujeto apuesta a favor de una de ellas y usted a favor de otra. Quien acierte gana". ¿Jugaría usted al juego? ¿Es equitativo? _____ ____.

Suponga que la cara que ambos jugadores ven es blanca: ¿la carta estraída puede ser cualquiera de las tres? __________. ¿Qué cartas pueden ser? ____________________. ¿Las probabilidades de que sea cualquiera de estas cartas son iguales entre sí? _____. ¿Por qué? ____________________ ____.

Mucha gente razona de la siguiente forma: "Supongamos que la cara que se ha salido es blanca, entonces no puede ser la tarjeta con ambas caras marcadas con sello, es decir, ha de ser la carta BB o la BS. Por lo tanto, puede ser cualquiera de las dos cartas con probabilidad 1/2. En conclusión: el juego es equitativo." Sin embargo, este razonamiento es erróneo.

Una serie de partidas (se pueden jugar muchas de forma muy rápida) sirve para aceptar o rechazar el razonamiento. Complete, con el concurso de otra persona la tabla siguiente. Juegue para ello 100 partidas con un amigo, almacenando el número de veces que la cara de la carta escogida es blanca o tiene un sello y cuántas de ellas gana cada una de las cartas BB, BS y SS.

Salió	Ganó BB	Ganó BS	Ganó SS
B			—
S	—		

¿Observa alguna "anomalía" con relación al razonamiento anterior? ____.

Si se sabe que la cara de la carta elegida es blanca, ¿qué carta escogería con preferencia? ____________________.

¿Y si la cara de la carta está marcada con un sello? _______________.

Las frecuencias relativas obtenidas nos permiten *suponer* que gana con más frecuencia aquel jugador que escoge la carta que tiene ambas caras iguales: si la cara que se ve es blanca, es mejor pedir la carta BB; si la cara que se ve tiene un sello marcado, es mejor pedir la carta SS.

¿Puede dar una explicación a este hecho? _________________________ ____.

¿Puede representar la situación por medio de un diagrama en forma de árbol? _____. ¿Qué información podría obtener de él? _______________ ____.

Si la cara visible es blanca, ésta puede ser la cara blanca de la tarjeta BS o bien una de las dos caras de la tarjeta BB. De esta forma, mientras con una carta hay una sola posibilidad de ganar, con la otra hay dos. Las probabilidades de sacar una de las tres cartas son iguales, pero la probabilidad de haber sacado una u otra, *sabiendo* el color de la cara de la carta extraída, varía sustancialmente. De hecho, se concluye que:

$$\begin{aligned}
&P(BB) = P(BS) = P(SS) = 1/3 \\
&P(BB|B) = P(SS|S) = 2/3 \\
&P(BS|S) = P(BS|B) = 1/3 \\
&P(BB|S) = P(SS|B) = 0
\end{aligned}$$

En general, un conocimiento adicional sobre una situación, puede modificar las probabilidades de los sucesos asociados a la misma: no es lo mismo la probabilidad de sacar una de las tres cartas, que la probabilidad de sacar una carta *condicionada* a que se ha extraído una y se conoce el color de una de sus caras. En la siguiente sección, veremos otro ejemplo de probabilidad condicionada.

4.7. Fiabilidad de una prueba

Uno de los graves problemas que enfrenta el norte de Perú son las epidemias de malaria[12]. Es necesario, controlar esta enfermedad y desarrollar un plan para su prevención y control. Supongamos que, por la segunda campaña de arroz en el departamento de Piura, ha habido una aumento de casos de malaria (M), de tal forma que los epidemiólogos empiezan a considerar la situación “de grave”. Unido a este problema, el verano trae consigo intoxicaciones alimenticias por consumo de productos mal conservados. Se sabe, por otro lado, que una persona con paludismo presenta cuadros de fiebre alta (F)[13]; pero este síntoma se presenta también en personas con intoxicación

[12]El paludismo (del latín *palus, -udis*: pantano, laguna —también conocido como malaria, del italiano *malaria*: mal aire—) es una enfermedad infecciosa producida por protozoos del género *plasmodium* que se transmiten al hombre a través de las hembras del mosquito *anopheles*, comúnmente llamado zancudo o turula. Existen cuatro especies del género que infectan al ser humano: *Plasmodium vivax, Plasmodium ovale, Plasmodium malariae y Plasmodium falciparum.* Esta última especie es la especie más agresiva y la mayoría de los casos mortales de paludismo se debe a este protozoo. En la zona endémica de Perú, podemos encontrar las especies *falciparum y vivax.* El *Plasmodium malariae* se encuentra especialmente en África, mientras que el *Plasmodium ovale* no suele encontrarse fuera de dicho continente.

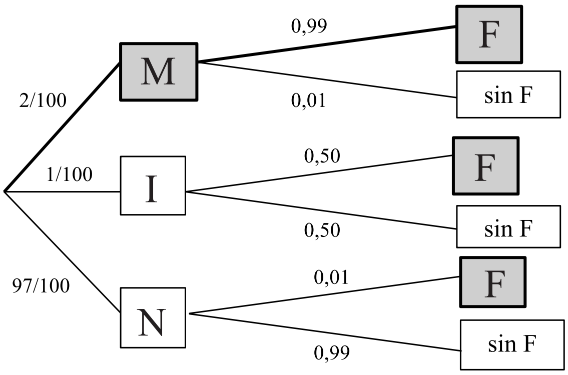
[13]La malaria se caracteriza por la aparición de fiebres intermitentes en accesos. Los primeros síntomas consisten en malestar, dolor de cabeza, cansancio, molestias abdominales y dolores musculares, seguidos de una crisis febril con escalofríos y tiritonas que duran aproximadamente 1 hora. Tras esto, aparece fiebre, con calor, enrojecimiento facial, piel seca y temperaturas de hasta 41^oC, síntomas que duran unas seis horas. Finalmente, las

(I) e incluso en algunos que no tengan ninguna enfermedad importante (N).

Por otro lado, un estudio estadístico nos permite afirmar que:

$$P(F|M) = 0,95; \quad P(F|I) = 0,5; \quad P(F|N) = 0,01$$

Con otras palabras, el 95 % de las personas con malaria tienen fiebre; el 50 % de las personas con intoxicación también; y, por último, el 1 % de las personas sin enfermadad presenta fiebre. Además, se estima que el 2 % de la población tiene malaria, el 1 % intoxicación y el resto ninguna enfermedad importante. El diagrama de árbol muestra de forma sinóptica toda la información dada, a partir de la cual se va tener que tomar una decisión.



El comité de salud y bienestar social del departamento de Piura se ve ante la disyuntiva de: o bien administrar medicamentos para combatir la malaria a todo aquel que llegue a una posta con fiebre alta; o bien esperar el resultado de la *gota gruesa*[14]. Para tomar una decisión al respecto, se realiza un pequeño estudio de probabilidades: ¿cuál es la probabilidad de que una persona con fiebre alta tenga malaria? De esta forma, se quiere saber si el indicador "fiebre alta" es, por sí solo, suficiente para la medicación masiva de individuos que presentan cuadros de fiebre alta.

Antes de realizar ningún cálculo: a tenor de los datos, ¿cree usted que la fiebre alta es un indicador eficaz para discriminar los pacientes con malaria

manifestaciones clínicas son: bajada de la temperatura corporal, abatimiento y somnolencia, durante unas cuatro horas. También pueden ser frecuentes las náuseas y los vómitos, aunque en ocasiones las únicas alteraciones son la anemia (por destrucción de los glóbulos rojos) y el aumento de tamaño del bazo.

[14] Prueba de laboratorio que tiene por fin determinar si un paciente tiene o no malaria. En concreto, la enfermedad se diagnostica demostrando la presencia de formas asexuadas del parásito, que se transmite con la picadura del mosquito anófeles, en las células sanguíneas mediante la tinción de Giemsa.

de aquellos que no tienen esta enfermedad? ________________________
____.

La pregunta clave que se debe contestar es: ¿cuál es la probabilidad de que un sujeto tenga malaria si presenta un cuadro de fiebre alta? Cuando un paciente llega a una consulta observamos los síntomas que presenta, mas no las causas que los provocaron: no es posible saber si la fiebre se debe al parásito causante de la malaria, a una intoxicación o otra causa no determinada. Por lo tanto, es necesario discriminar que porcentaje de las personas con fiebre alta tienen malaria.

Por otro lado, el suceso F puede ser descrito como la unión de los sucesos $(F \cap M)$, $(F \cap I)$ y $(F \cap N)$, que representan una *partición* en sucesos mutuamente excluyentes (se supone que una persona no esté intoxicada y con malaria a la vez). De esta forma, la probabilidad de que una persona tenga fiebre es:

$$\begin{aligned} P(F) &= P((F \cap M) \cup (F \cap I) \cup (F \cap N)) = \\ &= P(F \cap M) + P(F \cap I) + P(F \cap N) = \\ &= 0,95 \cdot 0,02 + 0,5 \cdot 0,01 + 0,01 \cdot 0,97 = 0,0337 \end{aligned}$$

Por otro lado, la probabilidad del suceso "el paciente tiene malaria sabiendo que presenta un cuadro de fiebres altas" se interpreta de forma adecuada como el suceso M condicionado por el suceso F; se denota: $M|F$.

$$P(M|F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0,95 \cdot 0,02}{0,0337} = \frac{0,019}{0,0345} \approx 0,56$$

De esta forma, los miembros del comité pueden tomar al menos dos decisiones:

1. No se administrarán medicamentos hasta que no se conozcan los resultados del examen de gota gruesa, salvo en el caso de que se tengan otros datos relativos al paciente. La espera está justificada puesto que la probabilidad de que un persona tenga malaria sabiendo únicamente que padece de fiebre alta es aproximadamente $1/2$, lo cual no justifica una administración de medicamentos agresivos[15].

2. Se administrarán medicamentos nada más llegar a todo paciente con fiebre alta: la gravedad de la enfermedad exige una medida que no

[15] Desde 1938, el tratamiento del paludismo se basa en la quinina, extracto de la corteza del árbol de la quina, que detiene el crecimiento de los protozoos del género *plasmodium* dentro de los hematíes. Más adelante, se descubrió otro fármaco, la cloroquina, más eficaz y de menor toxicidad.

dilate el tiempo de espera. En el supuesto de que la prueba de gota gruesa demuestre que el paciente no tiene el parásito, se suprime la medicación inmediatamente.

En general, la segunda medida se adopta en épocas de brotes masivos de la enfermedad en zonas rurales de alto riesgo. De hecho, otros indicadores se toman en cuenta a la hora de prescribir los medicamentos: por ejemplo, si la persona vive en una zona rural o urbana, en un sector próximo a un arrozal o laguna, si su domicilio está dentro de un barrio donde el porcentaje de personas enfermas es alto o bajo, si el paciente vive con un familiar al que se le ha diagnosticado malaria, etc. Estos y otros aspectos, *condicionan* la probabilidad de que el paciente tenga paludismo.

En conclusión, la toma de decisiones debe estar bien fundamentada. Un estudio de probabilidades puede sufrir serias modificaciones si se conocen datos *condicionantes* de la situación que actúen de indicadores de comportamiento.

Ejercicio

Por las estadísticas de natalidad, se sabe que, aproximadamente, la mitad de los recién nacidos son varones y la otra mitad mujeres. En concreto, 51 de cada 100 nacimientos corresponden a varones y 49 de cada 100 a mujeres. En la actualidad, desde el sexto mes de embarazo, puede acertarse en la mayor parte de los casos cuál será el sexo del feto por medio de una ecografía. Cuando se hace una ecografía, el 80 % de los varones son clasificados como tales y el 90 % de las niñas como mujeres. Los errores son motivados por la dificultad de observación del feto según su posición. ¿Es fiable la prueba? ¿Qué probabilidad hay de que sea varón si se ha clasificado como mujer? ¿Qué probabilidad hay de que sea mujer si se ha clasificado como varón?[16]

4.8. Extracciones de bolas de urnas

Los problemas de probabilidad tienen un carácter muy determinado: se estudian fenómenos puramente aleatorios para determinar con qué frecuencias se espera ocurran diversos sucesos. Con otras palabras, la probabilidad

[16] Conociendo la posibilidad de no acertar con el diagnóstico, un astuto ginecólogo procedía de la siguiente forma: interpretaba la ecografía, predecía el sexo del futuro bebé y se lo transmitía a la pareja. Sin embargo, anotaba en su registro el sexo opuesto al que la lectura sugería, de tal manera que, si se confundía y la pareja se lo observaba, él decía: "estoy seguro de que no me equivoqué, les mostraré mi registro... "

pretende describir los posibles resultados de un experimento aleatorio no realizado, mientras que la frecuencia relativa muestra la relación entre las veces que se ha verificado un suceso y el número total de pruebas realizadas.

Este conocimiento debe ser claro. En ocasiones, se presentan problemas que no admiten un estudio de probabilidades (y que, sin embargo, evocan a otros que si lo admiten): la “clave” es observar si el estudio se centra en algo que *se espera suceda* o en algo que *ha sucedido* de hecho. En el primer caso, un estudio de probabilidad resulta adecuado; en el segundo, no. En la presente sección, se va a ilustrar este problema. Se plantean las dos siguientes situaciones:

[Problema 1] Se tiene dos urnas con las siguientes composiciones: la primera contiene dos bolas blancas y una negra y la segunda una bola blanca y cinco negras. Se pasa una bola de la primera a la segunda y de ésta se extrae una bola que es blanca. Calcular la probabilidad de que la bola transferida de la primera a la segunda urna haya sido negra.

[Problema 2] Se tiene dos urnas con las siguientes composiciones: la primera contiene 200 bolas blancas y la segunda 700 bolas negras. Se pasan 25 bolas de la primera a la segunda urna. Se remueven las bolas de la segunda urna y se pasan 25 bolas de la segunda a la primera urna. ¿Hay más bolas blancas en la segunda urna que negras en la primera?

¿Qué similitudes observa en los problemas? ____________________
____.

¿Qué diferencias observa en los problemas? ____________________
____.

¿Los dos problemas “piden” un estudio de probabilidad?__________
____.

¿Alguno de los problemas “exige” un estudio no probabilístico?_____
____.

El problema 1 puede esquematizarse mediante el uso de un diagrama de árbol (figura (a)). La resolución se reduce a la correcta interpretación de este árbol en términos de *probabilidad condicional*. Se denotan los sucesos “extraer una bola negra (N) de la primera urna” y “extraer una bola blanca (B) de la segunda urna” por N_1 y B_2, respectivamente, entonces:

$$P(N_1|B_2) = \frac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{5}{21}} = \frac{1}{5}$$

No es posible razonar de manera similar con el segundo problema propuesto. ¿Qué problemas encuentra si intenta realizar un diagrama de árbol

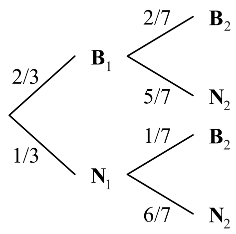


figura (a)

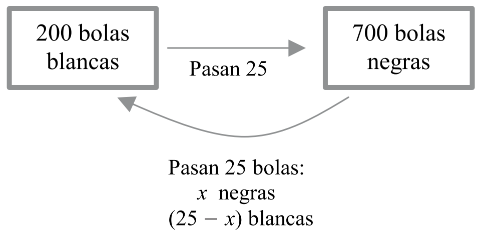


figura (b)

tal y como se ha hecho en el anterior problema? ____________________ ____. ¿Se conoce el número de bolas de cada color que pasan en cada etapa de una a otra urna? __________. ¿Para que sería necesario este conocimiento? _____ ____.

El problema, exige una reconsideración no sólo de los medios de cálculo, sino también de la situación propuesta: no se trata de determinar la probabilidad de que una bola sea negra o blanca en una u otra extracción, sino determinar la situación final.

Una persona razona: "como la urna segunda tiene más bolas negras, entonces es menos probable que extraigamos una de las bolas blancas que han sido introducidas; por consiguiente, es mucho más probable que en la urna segunda haya más bolas blancas que negras en la primera". ¿Es válido esta razonamiento? _______________ ¿Por qué? _________________.

Simplifiquemos un poco el problema: en lugar de pasar 25 bolas, pasamos sólo una. Dos situaciones se presentan: que al revolver la segunda urna tomemos la bola blanca que acabamos de pasar, en cuyo caso no tendremos bolas negras en la primera urna ni tampoco blancas en la segunda; o bien, que pasemos una negra (lo más probable, todo sea dicho de paso), en cuyo caso habrá una blanca en la segunda urna y una negra en la primera. En ambos casos, hay el mismo número de bolas blancas en la segunda urna que negras en la primera: una o ninguna, según el caso. Con dos bolas sucede lo mismo (compruébelo usted mismo)... Qué sucede cuando pasamos 25, ¿podremos asegurar que el número de bolas blancas en la segunda urna es igual al número de bolas negras en la primera? En efecto, como muestra la figura (b) anterior, hay x bolas negras en la primera urna y, como se han pasado $25 - x$ bolas blancas de las 25 que se habían traspasado, quedan $25 - (25 - x)$ bolas blancas en la segunda urna, esto es, x bolas blancas. Luego, *el número de bolas blancas en la segunda urna es igual al número de* *bolas negras en la primera.*

4.9. Ejercicios

1. Se tiene dos urnas con las siguientes composiciones: la primera contiene b_1 bolas blancas y n_1 negras; la segunda, b_2 blancas y n_2 negras. Se pasa una bola de la primera a la segunda y de ésta se extrae una bola que es negra. Calcular la probabilidad de que la bola transferida de la primera a la segunda urna sea también negra.

2. Se lanza treinta (30) veces al aire una moneda. Obteniéndose 13 caras (C) y 17 sellos (X), en la secuencia X, X, X, C, C, X, X, C, C, X, X, X, C, X, C, X, X, C, X, X, C, C, X, C, C, X, C, C, X, X. De esta forma, las frecuencias relativas del suceso "salir cara" después del primer, segund, trecer, ... lanzamiento son:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{2}; \frac{0}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{5}; \frac{2}{6}; \ldots$$

   a) *Respecto al suceso "salir cara"*: ¿Cuál es la secuencia completa de las frecuencias relativas? ¿Cuál es la frecuencia relativa inicial? ¿Y después de los 30 lanzamientos? ¿Cuál es la secuencia de las frecuencias absolutas?

   b) *Respecto al suceso "salir cruz"*. Haga los gráficos:

      1) Gráfico de barras de las frecuencias relativas.

      2) Sector circular en tantos por ciento.

   Interprete dichos gráficos.

   c) Diferencias y relación entre frecuencia y probabilidad. ¿Por qué decimos que la probabilidad de salir cara es 1/2?

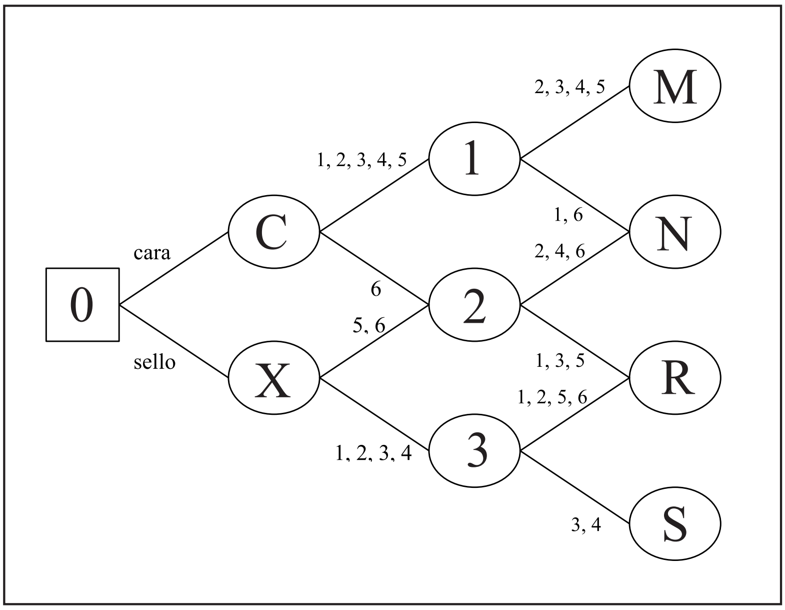
3. Se lanzan dos dados; si la suma de puntos obtenidos es mayor que siete el jugador gana; si vale siete, la tirada es nula, y si es inferior a siete, el jugador pierde. ¿Cúal es la probabilidad de ganar? ¿Es equitativo este juego?

4. En la página siguiente se presenta un tablero de juego. Para jugar, se precisa de una moneda, un dado y 20 fichas. En la casilla "0" se colocan las 20 fichas. Cuatro jugadores eligen uno de los casilleros (M, N, R y S). Entonces se lanza una moneda al aire, si se obtiene cara, una ficha se desplaza a la casilla C; si se obtiene sello, se desplaza a la casilla X.

Supongamos que salió cara; se lanza un dado y sale 6, entonces la ficha se mueve a la casilla 2. Se vuelve a lanzar el dado, si sale un número par, la ficha avanza hasta la casilla N; si sale impar, hasta la casilla R. Se procede de esta forma hasta que las 20 fichas están en alguno de los casilleros de la última columna. Gana el jugador que acaba con más fichas. ¿Qué jugador eligiría usted?

Concluya, por un razonamiento experimental y otro teórico que las probabilidades de que una ficha que sale de la casilla "0" llegue a "M", "N", "R" y "S" son:

$$P(M) = \frac{20}{72}; \quad P(N) = \frac{19}{72}; \quad P(R) = \frac{25}{72}; \quad P(S) = \frac{8}{72}$$



4.10. Autoevaluación

1. De una urna que contiene b bolas blancas y n bolas negras se van extrayendo bolas sin reemplazo. Si hacemos k extracciones, ¿cuál es la probabilidad de que la k-ésima bola sea blanca? ($k \leq b$) (Indicación: Estudie los casos k= 1, 2, 3, 4 y 5, después intente generalizar.)

2. En una sala de juegos, las dos máquinas tragamonedas existentes permiten ganar con una probabilidad de 0,2 cuando funcionan correctamente. Una de ellas se ha estropeado y permite ganar con probabilidad 0,6, pero no sabemos cuál es. Si escogemos una máquina al azar y jugamos, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina elegida sea la averiada en cada uno de los siguientes casos?:

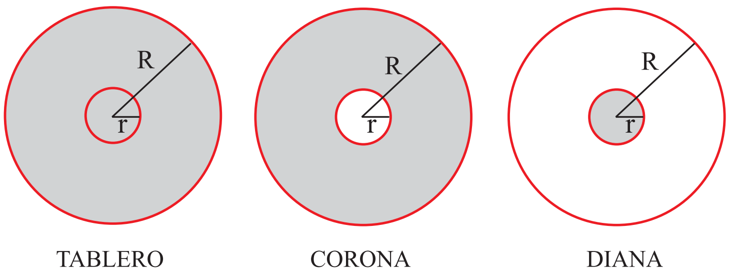
   a) Antes de comenzar a jugar.
   b) Si se ha jugado una partida y se ha ganado.
   c) Si se han jugado dos partidas y se han perdido las dos.
   d) Si se han jugado dos partidas y se ha ganado la primera y perdido la segunda.

   Si usted tiene 5 monedas: ¿qué estrategia seguiría para elegir una u otra máquina?

3. En la figura se muestra un *tiro al blanco*. El punto central del tiro al blanco se llama *diana*. Se sabe que una persona da al tablero 9 de cada 10 veces que lanza y que, si ha dado al tablero, da a la diana proporcionalmente a la superficie de ésta. Sabiendo que $R = 4r$. Determine las siguientes probabilidades:

$P(\text{corona}) =$	$P(\text{diana}) =$
$P(\text{diana} \mid \text{tablero}) =$	$P(\text{tablero} \mid \text{diana}) =$
$P(\text{tablero} \mid \text{corona}) =$	$P(\text{diana} \mid \text{no tablero}) =$
$P(\text{corona} \mid \text{no tablero}) =$	$P(\text{no tablero} \mid \text{corona}) =$
$P(\text{no tablero} \mid \text{diana}) =$	$P(\text{corona} \mid \text{tablero}) =$

   Donde la palabra "tablero" representa el suceso "dar en el tablero"; la palabra "diana", "dar en la diana"; etc.



Capítulo 5

Teoría elemental de la probabilidad

En los capítulos anteriores se han introducido, de manera informal, muchos conceptos de la teoría de la probabilidad: frecuencia, azar, probabilidad, sucesos posibles, sucesos favorables, etc. En este capítulo se formalizarán estos y otros conceptos de la teoría de la probabilidad.

5.1. Álgebra de Boole de sucesos

5.1.1. Espacio muestral

La teoría de la probabilidad está interesada en la descripción y comprensión de experimentos *aleatorios*, esto es, sujetos al *azar* o la "suerte":

Definición 13 (Experimento aleatorio) *Un experimento es aleatorio si al repetirlo (en condiciones análogas) no se puede predecir el resultado. En caso contrario, el experimento se llama determinista.*

El juego de *La carrera* (capítulo 1) se basa en un experimento aleartorio: antes de lanzar los dados desconocemos el resultado; aún más, es igualmente probable que se obtenga el suceso $(1,5)$ que el suceso $(4,3)$[1]. Esto no quiere decir que la elección de los números sea irrelevante: existen números que salen con más *frecuencia*, con los que es más *probable* ganar, puesto que existen más formas de que los dados sumen una cantidad u otra.

[1]Suceso (a,b): obtener a con el primer dado y b con el segundo.

Otros ejemplos de experimentos aleatorios son: lanzar una moneda, sacar una naipe de una baraja, observar el número de veces que hay que lanzar una moneda para obtener cara, etc. Por otro lado, cuando se observa, por ejemplo, la caida libre de un cuerpo desde una determinada altura y se mide el tiempo que tarda en llegar al suelo se obtiene siempre el mismo valor, aproximadamente; el experimento es determinista, puesto que es posible predecir el resultado del mismo (antes de que éste se realice). Otros expermientos deterministas son: observar la oxidación de una manzana partida por la mitad, medir la fuerza de repulsión de los polos iguales de dos imanes, medir la temperatura de fusión del hierro, etc.

Como hemos dicho anteriormente, nos vamos a interesar en los experimentos aleatorios. Así:

Definición 14 (Espacio muestral) *Se llama espacio muestral de un experimento aleatorio, denotaremos E, al conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento. Cada uno de los resultados posibles del experimento es un punto muestral.*

Obsérvese que, en la definición de espacio muestral que se acaba de dar, se especifica que el experimento es aleatorio. En el supuesto de que éste sea determinista, el espacio muestral se reduce a un único resultado; con otras palabras, un experimento con un único punto muestral es determinista. Por lo tanto, un espacio muestral tiene al menos dos puntos muestrales. Así, para todo experimento aleatorio, es posible asociarle su espacio muestral. En la tabla siguiente se da una lista de experimentos aleatorios: establezca el espacio muestral para cada uno de ellos[2].

Experimento aleatorio	Espacio muestral
Lanzar dos dados y observar la suma de los mismos	$E = \{2, 3, 4, \dots, 10, 11, 12\}$
Lanzar una moneda al aire	$E = \{cara, sello\} \equiv \{C, X\}$
Lanzar dos monedas al aire	
Observar el palo que sale al levantar una carta de una baraja	
Número de caras al lanzar 4 monedas	

Observe el lector que los espacios muestrales asociados a los cinco experimentos que aparecen en la tabla anterior son finitos. No siempre sucede así: el lanzamiento de un dardo sobre un blanco de tiro puede cifrarse por la

[2]Por sencillez, en el lanzamiento de una moneda: denote cara, por C; y sello, por X.

distancia a la diana o punto central del blanco. Entonces, si el blanco es circular de radio r, un lanzamiento válido queda determinado por una distancia al centro, comprendida entre 0 (la diana ha sido alcanzada) y r (el dardo ha caído en el filo del blanco)[3]; es decir, cualquier número real en el intervalo $[0; r]$. Sin embargo, estamos especialmente interesados en experimentos cuyos espacios muestrales sean conjuntos finitos.

5.1.2. Espacios de sucesos

En el juego *La carrera*, un jugador A selecciona 5 números y su contrincante B otros 5, quedando uno libre. Supongamos, por ejemplo, que los números seleccionados por el jugador A son 2, 5, 7, 8 y 10 y que el número 3 queda libre (el resto, por lo tanto, son seleccionados por el jugador B). De esta forma, el jugador A moverá una ficha si al lanzar los dados obtiene uno de los números que ha escogido o el 3. En estas circunstancias, diremos que el *suceso* "el jugador A mueve una ficha" se ha *verificado*. En otras palabras, el suceso "el jugador A mueve una ficha" está constituido por los puntos muestrales: 2, 3, 5, 7, 8 y 10. En general, se define:

Definición 15 (Suceso) *Se llama suceso (de un experimento aleatorio) a cada uno de los subconjuntos de un espacio muestral.*

De esta forma, cuando se afirma que un suceso determinado *se ha verificado* se está señalando que el resultado del experimento pertenece a dicho conjunto. Por ejemplo, que el suceso "el jugador A mueve una ficha" se haya verificado significa que en el lanzamiento de los dados dicho jugador ha obtenido 2, 3, 5, 7, 8 o 10.

Por otro lado, el suceso "el jugador A moverá la ficha que desee" sólo se cumple si al lanzar los dados obtiene 3, es decir, el suceso se verifica solamente si se obtiene un punto muestral; en tal caso, el suceso se llama *elemental o simple*. En general, se llama suceso *elemental o simple* de un experimento aleatorio a cualquier subconjunto unitario de un espacio muestral. En caso contrario, el suceso se llama *compuesto*.

Existen unos sucesos muy particulares: el suceso *seguro* y el suceso *imposible*. Por ejemplo, los sucesos "obtener un número menor que 13" o "obtener un número mayor que 1" se verifican siempre y por ello se llaman *seguros*. Todos tienen una característica común: son iguales al espacio muestral E.

[3] Implícitamente, se admite que todo lanzamiento válido es aquél que alcanza el blanco; en caso contrario, el supuesto lanzador debiera repetir su intento.

Por suceso imposible se designa a uno que no puede verificarse bajo ninguna condición: "obtener más de 12" o "un número negativo", por ejemplo. En general, en un espacio finito, el suceso *imposible* es identificado con el conjunto vacío ($\emptyset$): no hay ningún punto muestral que haga que se verifique.

Definición 16 (Espacio de sucesos) *Se llama espacio de sucesos de un experimento aleatorio, se denota U, al conjunto formado por todos los sucesos*[4]*.*

Por otro lado, es posible determinar el *cardinal* de U si se conoce el de E; en efecto:

Proposición 10 *Si E tiene n elementos, entonces U tiene 2^n, esto es:*

$$Si\ Card(E) = n \Rightarrow Card(U) = 2^n$$

Demostración. Ejercicio 3, §2.9. ■

Hasta ahora hemos descrito los experimentos por un conjunto de sucesos "aislados". Sin embargo, en muchas ocasiones es necesario describir relaciones entre diferentes sucesos. Por ejemplo, si el jugador A obtiene cualquiera de los números que ha elegido o el número 3, entonces moverá una de sus fichas; de esta forma, el suceso "el jugador A mueve una ficha" se verifica siempre que se verifique cualquiera de los sucesos "salir 2, 5, 7, 8 o 10" o "salir 3". En general, se define:

Definición 17 (Inclusión de un suceso) *El suceso A incluye al suceso B, se donota $A \supseteq B$, si siempre que se verifica B se verifica también A.*

De esta forma, si se denota por A al suceso "el jugador A mueve una ficha" y por B "salir 3", se tiene que $A \supseteq B$, mas no es cierto el recíproco. De hecho, se define:

Definición 18 (Sucesos iguales) *Los sucesos A y B son iguales, se escribe $A = B$, si siempre que se verifica uno de ellos se verifica también el otro. Esto es:*

$$A = B \Leftrightarrow A \supseteq B \wedge B \supseteq A$$

[4]Una notación más precisa sería $P(E)$, puesto U representa "las partes de E". En general, dado un conjunto A, $P(A)$ representa el conjunto de subconjuntos de A, esto es, "las partes de A". Por lo tanto, como cada suceso representa un subconjunto de E, el conjunto de todos los sucesos representa a $P(E)$. Sin embargo, se denota por U al espacio de sucesos para no llevar a confusión: más adelante, denotaremos a la probabilidad del suceso total E por $P(E)$.

5.1.3. Operaciones con sucesos

Como se ha definido en la anterior sección, un suceso es un subconjunto del espacio de muestral E. Entonces es posible hablar de la unión, intersección, diferencia de sucesos; el significado de estas operaciones se sigue del de la Teoría de Conjuntos. A continuación, se dan dichas definiciones referidas a los sucesos.

Definición 19 (Unión de sucesos) *Dados dos sucesos A y B de un espacio de sucesos U, se llama unión de los sucesos A y B, se denota $A \cup B$, al suceso que se verifica cuando se verifica al menos uno de los sucesos A o B.*

Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado al aire y observar el resultado, si el suceso A es "salir impar" y b es "salir mayor que 3", entonces $A \cup B$ es el suceso "salir impar o salir mayor que 3". En términos conjuntistas, se tiene: como $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, entonces $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.

Definición 20 (Intersección de sucesos) *Dados dos sucesos A y B de un espacio de sucesos U, se llama intersección de los sucesos A y B, se denota $A \cap B$, al suceso que se verifica cuando se verifican simultáneamente los sucesos A y B.*

Así, por ejemplo, en el experimento anterior, la intersección de los sucesos A y B es igual a: $A \cap B = \{5\}$. En ciertas circustancias $A \cap B = \emptyset$, esto es, los dos sucesos no pueden verificarse simultáneamente: por ejemplo, salir cara o sello en el lanzamiento de una moneda; obtener un número mayor que 4 o menor que 2 en el lanzamiento de un dado. Este tipo de sucesos se llaman *incompatibles*[5].

Definición 21 (Sucesos incompatibles) *Dos sucesos son incompatibles cuando no pueden verificarse simultáneamente, esto es, dados dos sucesos A y B de un espacio de sucesos U, se tiene:*

$$A \text{ y } B \text{ son incompatibles } \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Los ejemplos dados de sucesos incompatibles tienen una diferencia esencial: mientras que en el lanzamiento de una moneda necesariamente o bien sale cara o bien sale sello, en el lanzamiento de un dado el suceso "mayor

[5]Los sucesos incompatibles en ocasiones son llamados *mutuamente excluyentes* o *disjuntos*.

que 4” se verifica si se obtiene 5 o 6 y el suceso “menor que 2” únicamente si se obtiene 1, de esta forma, si al lanzar el dado la cara superior es 2, 3 o 4, ninguno de los dos sucesos se verifica. Los sucesos “salir cara” y “salir sello” se llaman *contrarios o complementarios*; sin embargo, los sucesos “mayor que 4” y “menor que 2” del experimento con el dado no lo son. En general:

Definición 22 (Sucesos complementarios) *Dos sucesos se llaman complementarios (o contrarios) si simpre que no se verifica uno de ellos se verifica el otro, esto es, dados dos sucesos A y B de un espacio de sucesos U, se tiene:*

$$A \text{ y } B \text{ son complementarios} \iff A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = E$$

Se denota por A^c al suceso complementario del suceso A.

De esta forma, dos sucesos complementarios son incompatibles, pero, en general, no es cierto el recíproco; con otras palabras: complementariedad implica incompatibilidad, pero la implicación inversa no es cierta. Un contraejemplo se ha dado anteriormente; otro es el siguiente: para el experimento “lanzar dos monedas al aire y esperar que sale”, los sucesos “obtener dos caras” y “obtener dos cruces” son incompatibles, mas no complementarios, puesto que en dicho experimento se puede verificar, además de los dos citados, el suceso “salir una cara y una cruz”.

Por otro lado, en ocasiones, interesará determinar cuándo un suceso se verifica, supuesto que otro no se ha verificado. En concreto:

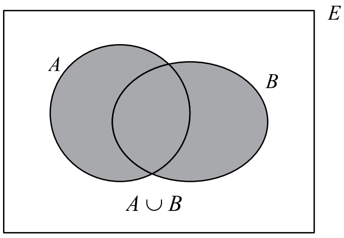
Definición 23 (Diferencia de sucesos) *Dados dos sucesos A y B de un espacio de sucesos U, se llama diferencia de los sucesos A y B, se denota $A \setminus B$, al suceso que se verifica cuando se verifica A, pero no B; esto es:*

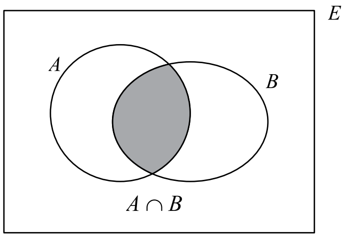
$$A \setminus B = A \cap B^c$$

Por ejemplo, Si A es el suceso “salir un número menor que 4” y B es “salir un número mayor que 1 y menor que 6”, entonces se tiene que: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y, por lo tanto, $A \setminus B = \{1\}$ y $B \setminus A = \{4, 5\}$. ¿Es la operación diferencia conmutativa? ____________________________.

Para terminar esta sección, las operaciones con sucesos pueden ser representandas por los clásicos diagramas conjuntistas de Venn-Euler[6]. En la figura siguiente, aparecen representadas la unión e intersección de sucesos, ¿puede obtener representaciones de sucesos incompatibles, contrarios y de la operación diferencia?

[6] John Venn (1834–1927). Leonhard Euler (1707–1783).





Como veremos vás adelante, los diagramas de Venn-Euler resultan muy útiles para demostrar ciertas propiedades de las operaciones con sucesos (§5.1.4) y para determinar la probabilidad de un suceso conocida la de otro, dentro del mismo espacio de sucesos (§5.2.2).

5.1.4. Propiedades de las operaciones con sucesos

Las operaciones sobre conjuntos que se han introducido cumplen ciertas propiedades que es conveniente resaltar. Por ejemplo, las operaciones unión e intersección de dos sucesos son conmutativas, esto es:

$$A \cup B = B \cup A \qquad\qquad A \cap B = B \cap A$$

Demostrar estas propiedades es automático. Por ejemplo, para la intersección, decir que se deben verificar los sucesos A y B simultáneamente es idéntico a decir que se deben verificar los sucesos B y A a la vez. Otra forma de razonar la veracidad de estas propiedades por medio de los diagramas de Venn-Euler: "es preciso sombrear la misma porción de área".

A continuación se detalla una lista con las operaciones fundamentales y las propiedades que éstas cumplen. Sean A, B y C tres sucesos de un espacio de suceso U, complete la siguiente tabla:

Propiedad	Unión	Intersección
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) =$
Elemento neutro	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap E =$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) =$
Complementación	$A \cup A^c =$	$A \cap A^c = \emptyset$

Las propiedades distributivas que se han señalado en las columnas "unión" e "intersección" deben enunciarse, de forma más precisa, como "la propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección" y como "la propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión", respectivamente. Por verificarse estas propiedades, se dice que U, espacio de sucesos, es un *álgebra de Boole* (1815–1864).

Otras propiedades son:

Propiedad	Unión	Intersección
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Simplificación	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Observe que se cumple un principio de *dualidad*: para cualquier proposición válida para la unión se tiene otra válida para la intersección. En concreto, toda proposición con los símbolos $\cup$, $\cap$, $\emptyset$ y E tiene su *dual*: es suficiente escribir otra proposición cambiando el símbolo $\cup$ por $\cap$; el símbolo $\cap$, por $\cup$; el conjunto vacío $\emptyset$, por el total E; el total E, por el vacío $\emptyset$.

Ejercicio

Observe la dualidad entre las propiedades de las operaciones que han sido enunciadas y establezca, para las que se dan a continuación, la proposición dual, observando su veracidad.

Propiedad	Propiedad dual
$A \cup E = E$	
$E^c = \emptyset$	
$A \cup B^c = (A \cap B) \cup B^c$	

5.2. Noción de probabilidad

En esta sección se formaliza la noción central de probabilidad, según las definiciones dadas por Pièrre Simon de Laplace (1749–1827), Richard Von Mises (1883–1953) y Andrei Nikolaievich Kolmogórov (1903–1987).

5.2.1. Frecuencias absoluta y relativa de un suceso

Como se ha podido comprobar en los capítulos precedentes, la noción de probabilidad está íntimamente relacionada con las frecuencias relativas. Se define:

Definición 24 (Frecuencia) *Sea A un suceso cualquiera de un experimento aleatorio. Si se realizan n pruebas y el suceso A se verifica n_A veces, se llama frecuencia absoluta del suceso A, se denota $f_a(A)$, al número n_A. Se llama frecuenca relativa del suceso A, se denota $f_r(A)$, al cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de pruebas realizadas. Esto es:*

$$f_a(A) = n_A \qquad f_r(A) = \frac{n_A}{n}$$

Por ejemplo, si se ha lanzado al aire un dado 100 veces y ha salido "par" 53 veces, se tiene que:

$$f_a(\text{“par”}) = 53 \qquad f_r(\text{“par”}) = \frac{53}{100}$$

Por otro lado, las frecuencias relativas de un suceso aleatorio cumplen la siguiente:

Proposición 11 *Sea A un suceso cualquiera de un espacio de sucesos U, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *La frecuencia relativa de A es un número comprendido entre 0 y 1: $0 \leq f_r(A) \leq 1$.*
2. *Si $A = E$, entonces la frecuencia relativa es 1: $f_r(E) = 1$.*
3. *Si $A = \emptyset$, entonces la frecuencia relativa es 0: $f_r(\emptyset) = 0$.*
4. *Si B es incompatible con A, entonces la frecuencia relativa del suceso unión es la suma de las respectivas frecuencias relativas:*

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \Rightarrow f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$$

Demostración. Si n_A es la frecuencia absoluta del suceso A cuando se han realizado n pruebas, es claro que debe verificarse: $0 \leq n_A \leq n$; luego, dividiendo por n:

$$0 \leq n_A \leq n \Rightarrow 0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f_r(A) \leq 1$$

De esta forma, queda demostrada la primera propiedad. Las dos propiedades siguientes son claras (¿por qué?). Por último, para la propiedad 4, si en n pruebas el suceso A se verifica n_A veces y el suceso B, n_B veces, entonces, por ser A y B incompatibles (no pueden verificarse simultáneamente), el suceso $A \cup B$ se producirá $n_A + n_B$ veces. Por lo tanto:

$$f_r(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = f_r(A) + f_r(B) \blacksquare$$

5.2.2. Definición de probabilidad

En muchos de los problemas de los anteriores capítulos, se han calculado probabilidades, observando el número de casos en los que se verifica un suceso determinado en un experimento aleatorio (respecto al número de casos posibles). No es circunstancial este uso primero que se ha hecho: la probabilidad tuvo su origen en la resolución de problemas relativos a juegos de azar. En estos juegos, los resultados posibles (que se cuentan haciendo uso de la Combinatoria) pueden clasificarse en un número finito de casos que se suponen perfectamente simétricos, como, por ejemplo, las dos caras de una moneda, las seis caras de un dado o las cuarenta cartas de una baraja. Así, en 1812, P. S. Laplace, en su obra *Teoría analítica de las probabilidades*, dio la definición que hoy se conoce como clásica:

Definición 25 (Probabilidad clásica) *Sea E un espacio muestral finito, la probabilidad de un suceso A de U (espacio de sucesos asociado a E) es igual a la proporción entre el número de casos favorables a A y el número de casos posibles ($Card(E)$), siempre que todos los resultados sean igualmente probables (equiprobables):*

$$P(A) = \frac{\textit{casos favorables a } A}{\textit{casos posibles (equiprobables)}}$$

Apesar de que la definición clásica según Laplace es *cíclica* (el término definido —probabilidad— es utilizado en la definición) y *restrictiva* (se aplica a casos en los que el espacio muestral es finito y los casos posibles equiprobables), es una definición muy útil, que resuelve un conjunto grande de problemas, amén de resultar muy intuitiva.

Los problemas aparecen cuando no es posible afirmar que los casos son equiprobables o cuando la variable a estudiar es continua (como es el caso de la distancia del dardo al centro del blanco de tiro). Laplace, advirtiendo el problema de la equiprobabilidad consideró el *principio de razón insuficiente*, que considera los casos de un experimento aleatorio equiprobables si no existe una razón “de peso” para suponer lo contrario.

Más adelante, la asignación de una probabilidad a un suceso de un experimento aleatorio por la regla de Laplace se justificó por el *principio de indiferencia*: los casos posibles son considerados como equiprobables cuando hay un balance de evidencia a favor de cada una de las alternativas. Dicha evidencia, puede conseguirse por la repetición de un experimento en las mismas condiciones y observando la simetría de las frecuencias relativas de los casos.

El método empírico condujo a la formulación de la *ley del azar* y a la definición de la probabilidad en términos de la frecuencia relativa. Los experimentos aleatorios son totalmente imprevisibles de manera aislada, pero presentan regularidades si se repiten un número "elevado" de veces. Esta es la *ley de regularidad de las frecuencias relativas o ley del azar* para un experimento aleatorio: las frecuencas relativas de los sucesos tienden a estabilizarse, cuando el número de pruebas crece. De esta forma, R. von Mises, en su obra *Probabilidad, estadística y verdad*, publicada en 1928, definió la probabilidad con base en las frecuencias relativas de los sucesos.

Definición 26 (Probabilidad frecuencial) *Se llama probabilidad de un suceso A, se denota $P(A)$, al número alrededor del cual se estabilizan las frecuencias relativas de A.*[7]

La ley del azar es muchas veces mal comprendida. La *falacia del jugador* consiste en aceptar la siguiente máxima: "si en muchas repeticiones se ha verificado un determinado suceso, en la siguiente repetición ocurrirá otro". Esta máxima no es correcta: por ejemplo, si lanzamos tres veces una moneda y sale siempre cara, no podemos determinar si saldrá cara o sello en el próximo lanzamiento; únicamente podemos *esperar* que si lanzamos la moneda "muchas" veces, "más o menos" la mitad sean cara y la otra mitad sello. Igual sucede con el lanzamiento de un dado o la extracción de una carta de una baraja o con cualquier otro experimento aleatorio.

Por lo tanto, si se admite como hipótesis la ley del azar, a los números alrededor de los cuales se estabilizan las frecuencias relativas de los sucesos se les llama probabilidades de éstos. En definitiva, la probabilidad es una manera de asignar un número a un suceso de manera no arbitraria, esto es, la probabilidad es una función. Lógicamente, esta función debe tener propiedades parecidas a las de la frecuencia relativa y, de esta forma, no entrar en

[7] La definición teórica de probabilidad frecuencial puede ser enunciada en términos de límites secuenciales: *Se llama probabilidad del suceso A, se denota $P(A)$, al límite de las frecuencias relativas cuando el número de pruebas tiende a infinito*:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Sin embargo, esta definición tiene, a nuestro entender, un problema radical: la frecuencia designa el número de veces que ha ocurrido un experimento, ¿cómo realizarlo un número infinito de veces? A lo sumo, para un experimento aleatorio determinado, se pueden realizar un número finito de pruebas y, por lo tanto, en la práctica (que es como se obtienen las frecuencias) la definición secuencial queda invalidada. Es posible, sin embargo, hacer una reformulación del problema con base en el llamado *Teorema de los grandes números* (ver anexo G), pero siempre quedan problemas de reproductibilidad de un experimento en condiciones fijas.

contradicción con la definición de probabilidad avanzada por R. von Mises. Esta idea llevó en 1933 a A. N. Kolmogórov, en su obra *Fundamentos de la teoría de la probabilidad*, a definir el concepto de probabilidad de manera axiomática de la manera siguiente:

Definición 27 (Probabilidad axiomática) *Si U es el espacio de sucesos asociado a un experimento aleatorio, se llama probabilidad a toda función que asocia a cada suceso A, del espacio de sucesos U, un número real que se denomina probabilidad de A y que se representa por $P(A)$, esto es:*

$$\begin{aligned} P : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow P(A) \end{aligned}$$

Además, la función P cumple las siguientes propiedades:

1. $P(A) \geq 0$, $\forall A \in U$.
2. $P(E) = 1$.
3. *Si* $A \cap B = \emptyset$, *entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Definición 28 (Espacio probabilístico) *Se llama espacio probabilístico o de probabilidades asociado a un experimento aleatorio a la terna (E, U, P), donde E es el espacio muestral, U es el espacio de sucesos y P una función de probabilidad definida sobre el mismo.*

A un mismo expermiento aleatorio se le pueden asociar distintos espacios probabilísticos, sin más que modificar la función de probabilidad. Por ejemplo, se recibe una moneda defectuosa o trucada, con la cual se obtienen más caras que sellos, pero se desconoce en qué proporción. Para determinar las probabilidades $P(C)$ ("salir cara") y $P(X)$ ("salir sello"), se procede a lanzar la moneda un número finito de veces y asignar, de esta manera, de forma experimental, una probabilidad a ambos sucesos. Tres personas llegan a la siguiente conclusión:

$$\begin{aligned} P_1 : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \emptyset &\rightarrow P(\emptyset) = 0 \\ \{C\} &\rightarrow P(\{C\}) = 3/4 \\ \{X\} &\rightarrow P(\{X\}) = 1/4 \\ E &\rightarrow P(E) = 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_2 : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \emptyset &\rightarrow P(\emptyset) = 0 \\ \{C\} &\rightarrow P(\{C\}) = 1/2 \\ \{X\} &\rightarrow P(\{X\}) = 1/2 \\ E &\rightarrow P(E) = 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_3 : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \emptyset &\rightarrow P(\emptyset) = 0 \\ \{C\} &\rightarrow P(\{C\}) = 2/3 \\ \{X\} &\rightarrow P(\{X\}) = 3/5 \\ E &\rightarrow P(E) = 1 \end{aligned}$$

Una función P es de probabilidad si cumple con las tres propiedades dadas en la definición axiomática (definición 27).

¿Es P_1 función de probabilidad? ______________________________.
¿Es P_2 función de probabilidad? ______________________________.
¿Es P_3 función de probabilidad? ______________________________.

Como se puede observar, la función P_3 no es de probabilidad, puesto que no cumple la propiedad tercera: los sucesos “salir cara” y “salir cruz” son incompatibles y contrarios, por lo tanto, necesariamente, la suma de probabilidades de dichos sucesos, $P(C) + P(X)$, debe ser igual a 1. Por otro lado, la función P_2 si es de probabilidad, mas la asignación de probabilidad no se ajusta a los datos del problema: la moneda es defectuosa, obteniéndose con más frecuencia cara, que sello. Por último, la función P_1 es de probabilidad y se ajusta a la situación.

Por otro lado, es posible demostrar algunas propiedades que verifica toda función de probabilidad, que se deducen de los axiomas (def.27) y que han sido utilizadas de manera informal en el capítulo 4.

Proposición 12 *La probabilidad del suceso unión de un número finito de sucesos incompatibles entre sí dos a dos es igual a la suma de las probabilidades de dichos sucesos.*

La proposición que se acaba de enunciar supone la generalización del tercer axioma de una función de probabilidad, esto es, dados n sucesos $A_1, \ldots,$ A_n, tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, entonces:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Antes de demostrar la proposición general enunciada, se demostrará un caso particalar: $n = 3$. En concreto:

Lema 5 *Dados tres sucesos A, B y C incompatibles entre sí dos a dos, entonces la probabilidad del suceso unión es igual a la suma de las probabilidades de dichos sucesos. Esto es:*

$$\textit{Si } A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Demostración. Por la propiedad asociativa de la unión de sucesos se tiene que $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$. Además, los sucesos A y $B \cup C$ son incompatibles. En efecto:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

De esta forma, es fácil concluir la tesis, en virtud del axioma tercero de la función de probabilidad:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \blacksquare$$

Demostración de la proposición 12. La demostración del lema 5 da una pauta para la generalización: utilizar la propiedad asociativa de la unión de sucesos para aplicar sucesivamente la propiedad tercera de la defnción axiomática de probabilidad. Esto es, para demostrar la propiedad, es suficiente aplicar dicho axioma $(n-1)$ veces. Queda al lector escribir dicha demostración[8]. ■

Proposición 13 *La probabilidad del suceso complementario de A es igual a 1 menos la probabilidad del suceso A, esto es:*

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Demostración. Por la propiedad segunda de la definición axiomática, se tiene: $P(E) = 1$, además, como A y A^c son complementarios se verifica que $A \cap A^c = \emptyset$ y $A \cup A^c = E$, luego:

$$1 = P(E) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) \; \blacksquare$$

Como una consecuencia clara de la anterior proposición se tiene el siguiente:

Corolario 2 *La probabilidad del suceso imposible es cero, esto es:* $P(\emptyset) = 0$

Demostración. La propiedad anterior: $P(\emptyset) = 1 - P(\emptyset^c) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$. ■

Proposición 14 *Sean A y B dos sucesos cualesquiera (no necesariamente incompatibles), entonces se cumple:*

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Demostración. Es claro observar que todo suceso A puede ser descompuesto como unión de dos sucesos incompatibles en la forma: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ (¿por qué? Ver figura 5.1(a)). Entonces, nuevamente por la propiedad tercera de la definición axiomática:

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \; \blacksquare$$

[8] La demostración formal de esta proposición se da en el anexo C.

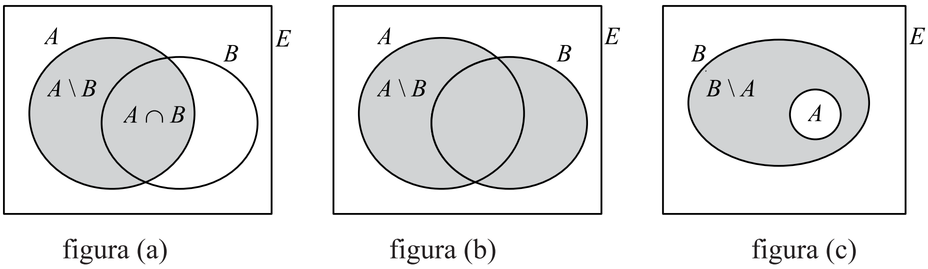


Figura 5.1:

Proposición 15 *Sean A y B dos sucesos cualesquiera (no necesariamente incompatibles), entonces se cumple:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración. La demostración es similar a la anterior y queda como ejercicio. (Indicación: $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, figura 5.1(b).) ■

Por otro lado, la demostración anterior puede ser generalizada a n sucesos cualesquiera (ver anexo C). Así por ejemplo, para el caso de tres sucesos, se tiene:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = \\
&= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) = \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap A \cap C)] = \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 16 *Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.*

Demostración. Como A está incluido en B, es posible descomponer éste último suceso como unión de dos suceso incomptatibles: $B = (B \setminus A) \cup A$ (¿por qué?, figura 5.1(c)), luego, por la propiedad tercera de la definición axiomática, se tiene:

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A) \Rightarrow P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A) \ \blacksquare$$

Una consecuencia inmediata es:

Corolario 3 *Si A es un suceso cualquiera:* $P(A) \leq 1$.

Demostración. Es suficiente observar que, para todo suceso A, $A \subseteq E$ y aplicar la proposición precedente. ■

Una aplicación muy interesante de todas las propiedades que se acaban de enunciar y demostrar es la resolución de problemas, donde se conoce la probabilidad de ciertos sucesos de un espacio muestral y se desea determinar la de otros de ese mismo espacio. Por ejemplo, se sabe que $P(A) = a$, $P(B) = b$ y $P(A \cap B) = c$, entonces es posible determinar la probabilidad de: $P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - c$. Compruebe que las siguientes igualdades:

1. $P(A^c \cup B^c) = 1 - c$.
2. $P(A \cup B) = a + b - c$.
3. $P(A^c \cap B^c) = 1 - a - b + c$.
4. $P(A^c \cap B) = b - c$.
5. $P(A^c \cup B) = 1 - a + c$.

Ejercicios

1. Si P es una función de probabilidad de $E = \{a, b, c\}$. Halle $P(\{a\})$ en los siguientes casos:

    a) $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\})$.
    b) $P(\{b\}) = P(\{c\}) = 2 \cdot P(\{a\})$.
    c) $P(\{a\}) = P(\{b\})$, $P(\{c\}) = 1/2$.
    d) $P(\{a\}) = 2 \cdot P(\{b\}) = 3 \cdot P(\{c\})$.

2. Tres sucesos cumplen: $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$, $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = 1/9$, $P(A \cap B \cap C) = 1/27$. Calcule las siguientes probabilidades:

    a) $P(A \cup B \cup C)$.
    b) $P(A \cup B)$.
    c) No se cumpla ninguno de los sucesos A, B, C.
    d) Se cumpla C, pero no se cumpla ni A, ni B.

3. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/4$. Se pide:

   a) $P(A \cup B)$.
   b) $P(A^c)$.
   c) $P(A^c \cup B^c)$.
   d) $P(A^c \cap B^c)$.
   e) $P(A \cap B^c)$.
   f) $P(A^c \cap B)$.

5.2.3. Construcción de una función de probabilidad

¿Cómo asignar probabilidades a los distintos sucesos de manera que resulte una función de probabilidad? Sea $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un espacio muestral finito correspondiente a un experimento aleatorio y $A_i = \{a_i\}$ los sucesos elementales del mismo. Sea ahora un suceso compuesto A por los puntos k primeros puntos muestrales $a_1, \ldots, a_k$, entonces:

$$A = \{a_1, \ldots, a_k\} = \{a_1\} \cup \ldots \cup \{a_k\} = A_1 \cup \ldots \cup A_k$$

Además, como los sucesos simples son incompatibles dos a dos, se concluye que:

Proposición 17 *La probabilidd de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman, esto es, si* $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$*:*

$$P(A) = P(A_1) + \ldots + P(A_k)$$

Obsérvese que la elección de los primeros puntos muestrales no es restricción alguna: en el supuesto de que el suceso A estuviera conformado por k sucesos simples "desordenados", sería suficiente "ordenarlos" o, de otra forma, "renombrarlos". Lo esencial es que el suceso A está conformado por un conjunto finito de sucesos elementales y que éstos son incompatibles dos a dos.

Por otro lado, ¿qué condición deberán cumplir las probabilidades asignadas a los sucesos elementales? Sabemos que $A_1 \cup \ldots \cup A_n = E$, entonces:

$$1 = P(E) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Dos situaciones son ahora posibles: los sucesos elementales sean o no sean equiprobables. En el primer caso, es sencillo asignar probabilidades: si hay n sucesos elementales A_1, ..., A_n y denotamos por a a la probabilidad de cualquiera de ellos ($P(A_i) = a, \forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$), entonces se tiene:

$$P(A_1) + \ldots + P(A_n) = a \cdot n = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{n}$$

Esto es, a cada suceso elemental se le asigna la probabilidad $1/n$. De esta forma, si entre los n resultados posibles equiprobables hay k de ellos favorables la realización del suceso A ($A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$), se concluye que:

$$P(A) = P(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) = \frac{1}{n} + \overset{k \text{ veces}}{\cdots} + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

En conclusión, se recupera la definición clásica de probabilidad: la probabilidad del suceso A es igual al cociente entre los casos favorables al suceso A y el número de casos posibles.

El segundo caso, en el cual los sucesos elementales no son equiprobables (o no se tiene certeza de que lo sean), se asigna a éstos la probabilidad que nos da la *ley del azar*: se realiza el experimento un número finito de veces y se observa en torno a qué valores se estabilizan las frecuencias relativas. Por lo tanto, se "recupera" la definición frecuencial de probabilidad que introdujo Richard Von Mises.

5.3. Probabilidad condicionada

La situación del "timador honrado" (§4.6) permite concluir que un conocimiento adicional sobre una situación puede modificar las probabilidades de los sucesos asociados a la misma: no es lo mismo la probabilidad de sacar una de las tres cartas, que la probabilidad de sacar una carta *condicionada* a que se ha extraído una y se conoce el color de una de sus caras.

El problema propuesto no es anecdótico: en general, un conocimiento adicional condiciona las probabilidades de un suceso. Supongamos, por ejemplo, la siguiente situación: se dispone de una urna con seis bolas marcadas con el número 1 y otras seis con el número 2. No todas tienen el mismo color. De las primeras: tres son negras y tres blancas; de las segundas: cinco negras y una blanca. Se extrae entonces una bola de la urna y los jugadores deben apostar a favor de que ésta tenga el número 1 o 2. Los sucesos son equiprobables (probabilidad 1/2), puesto que hay el mismo número de bolas marcadas con el 1 que con el 2.

Un jugador, antes de realizar su apuesta, haciendo trampas, consigue ver que la bola es blanca: ¿por qué número apostará el jugador si quiere ganar?

El jugador apostará por el número 1: la probabilidad de ganar es 3/4, ya que ____.

El análisis del ejemplo, prescindiendo de la anécdota de la trampa, permite distinguir entre:

- *Una probabilidad inicial*: la probabilidad de sacar una bola marcada con el número 1 es igual a la de obtener una marcada con el 2 (sucesos equiprobables).
- *Una información*: la bola extraída es de color blanca.
- *Una probabilidad modificada*: sabiendo que la bola es de color blanco, la probabilidad de que esté marcada con el número 1 es 3/4 y de que esté marcada con el número 2 es 1/4.

En el juego de *La carrera* (capítulo 1): la probabilidad de haber obtenido un 3 en alguno de los dados es diferente a la probabilidad de que haya sucedido esto si se conoce el resultado final obtenido. En efecto, si denotamos por $P(3)$ a la probabilidad de obtener un tres (en al menos un dado) al lanzar los dados, se tiene:

$$\begin{aligned}P(3) = {} & P(\text{“obtener 3 con el dado 1”o y no con el 2”o”}) + \\ & + P(\text{“obtener 3 con el dado 2”o y no con el 1”o”}) + \\ & + P(\text{“obtener 3 con ambos dados”}) = \\ & = 2 \cdot P(\text{“obtener 3 con un dado”}) + P(\text{“obtener 3 con ambos”}) = \\ & = 2 \cdot \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{11}{36}\end{aligned}$$

Sin embargo, la probabilidad de haber obtenido un 3 sabiendo el resultado del lanzamiento de los dados, depende de éste. Si el resultado es 2, 3, 10, 11 o 12 entonces la probabilidad de haber obtenido un tres es nula, puesto que en ninguno de los casos posibles en los que se obtiene respectivamente 2, 3, 10, 11 o 12 puede aparecer un tres. Sin embargo:

$$\begin{aligned}& P(\text{“obtener 3 \underline{sabiendo que} la suma de los dados es 5”}) = 2/4 = 1/2 \\ & P(\text{“obtener 3 \underline{sabiendo que} la suma de los dados es 6”}) = 1/5 \\ & P(\text{“obtener 3 \underline{sabiendo que} la suma de los dados es 7”}) = 2/6 = 1/3 \\ & P(\text{“obtener 3 \underline{sabiendo que} la suma de los dados es 8”}) = 2/5 \\ & P(\text{“obtener 3 \underline{sabiendo que} la suma de los dados es 9”}) = 2/4 = 1/2\end{aligned}$$

Las probabilidades anteriores se obtienen teniendo en cuenta el número de casos posibles en los que los dados suman 5, 6, 7, 8 o 9 y viendo en cuántos de ellos aparece un tres.

La expresión "sabiendo que" alerta de la existencia de una probabilidad condicionada. La pregunta ¿cuál es la probabilidad de que se verifique el suceso A *sabiendo que* se ha cumplido el suceso B? es equivalente a ¿cuál es la probabilidad del suceso A *condicionada* por el suceso B? Se define:

Definición 29 (Probabilidad condicionada) *Sea (E, U, P) un espacio de probabilidades y A un suceso cualquiera con probabilidad no nula: $P(A) \neq 0$; se llama probabilidad del suceso B condicionada por el suceso A, y se escribe $P(B|A)$, al cociente:*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

De esta forma, en el ejemplo de la urna, si se denota por "1" al suceso "sacar una bola marcada con el número 1", por "2" al suceso "sacar una bola marcada con el número 2", por "N" al suceso "sacar una bola negra" y por "B" al suceso "sacar una bola blanca", se tiene:

$$P(1|B) = \frac{P(1 \cap B)}{P(B)} = \frac{3/12}{4/12} = \frac{3}{4}$$

Por último, en el ejemplo de los dados, si se considera el caso particular en el que se tenga que calcular la probabilidad de que se obtenga un 3 (suceso A) en alguno de los dados condicionada a que la suma de éstos es 7 (suceso B), se procede de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{(3,1); (3,2); \ldots; (1,3); (2,3); (4,3); \ldots\} \\ B = \{(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)\} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B = \{(3,4); (4,3)\}$$

Por lo tanto:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

5.3.1. Función probabilidad condicionada

La probabilidad condicionada así definida es función de probabilidad; con otras palabras, verifica los tres axiomas que debe cumplir toda función de probabilidad (definición 27, p.132).

Proposición 18 *Sea (E, U, P) un espacio de probabilidades y A un suceso con probabilidad no nula ($P(A) \neq 0$), entonces $(E, U, P(\ |A))$ es también un espacio probabilístico.*

Demostración. Para probar la proposición es suficiente demostrar que $P(\ |A)$ es función de probabilidad, esto es, la función:

$$\begin{aligned} P(\ |A) : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ B &\rightarrow P(B|A) \end{aligned}$$

es de probabilidad. En efecto:

1. $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \geq 0$, puesto que $P(B \cap A) \geq 0$ y $P(A) > 0$, por hipótesis.
2. $P(E|A) = \frac{P(E\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$.
3. Si B y C son dos sucesos incompatibles ($B \cap C = \emptyset$) entonces:

$$\begin{aligned} P(B \cup C|A) &= \frac{P((B\cup C)\cap A)}{P(A)} = \frac{P((B\cap A)\cup(C\cap A))}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B\cap A)}{P(A)} + \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = P(B|A) + P(C|A)\blacksquare \end{aligned}$$

Por último, de la defineción de probabilidad condicionada se deduce que, si $P(A) \neq 0$, $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$. Este resultado puede ser generalizado a un número finito de sucesos de un mismo experimento aleatorio; así, por ejemplo, para tres sucesos se tiene:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

La demostración es clara, si tenemos en cuenta la propiedad asociacitiva de la intersección para los sucesos y la defineción de probabilidad condicionada que acaba de darse. En el anexo C se muestra la generalización para cualquier n.

5.3.2. Sucesos dependientes e independientes

Brevemente, dos sucesos son independientes si el conocimiento sobre si uno de ellos se ha o no verificado no condiciona la esperanza de que suceda el otro. Más concretamente:

Definición 30 *Sea A un suceso en un espacio de sucesos U, si $P(A) \neq 0$, un suceso B es independiente del suceso A si $P(B|A) = P(B)$. En caso contrario, si $P(B|A) \neq P(B)$, el suceso B depende del suceso A.*

¿Son las nociones de compatibilidad y dependencia equivalentes? No; sea, por ejemplo, el experimento "lanzamiento de un dado y observar qué valor se obtiene", entonces:

1. *Sucesos dependientes y compatibles*: si A es el suceso "sacar más de 2" y B el suceso"sacar menos de 5", entonces A depende de B, puesto que $P(A) \neq P(A|B)$. En efecto:
$$P(A) = 4/6 = 2/3; \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{4/6} = 1/2$$
Además, A y B son compatibles: $A \cap B = \{3, 4\}$.
2. *Sucesos independientes y compatibles*: si A es el suceso "sacar impar" y B el suceso "sacar menos de 3", entonces A es independiente de B, puesto que $P(A) = P(A|B)$. En efecto:
$$P(A) = 3/6 = 1/2; \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{2/6} = 1/2$$
Además, A y B son también compatibles: $A \cap B = \{1\}$.
3. *Sucesos dependientes e incompatibles*: si A es el suceso "sacar menos de 3" y B el suceso "sacar más de 4", entonces A depende de B, puesto que $P(A) \neq P(A|B)$. En efecto:
$$P(A) = 2/6 = 1/3; \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{2/6} = 0$$
Además, A y B son ahora incompatibles: $A \cap B = \emptyset$.
4. *¿Puede ser A independiente e incompatible de B?* ¿Por qué?

En conclusión, *los conceptos de incompatibilidad e independencia no son equivalentes*, puediéndose afirmar únicamente que si un suceso B, con probabilidad no nula ($P(B) \neq 0$), es independiente de otro A, entonces por fuerza deben ser compatibles, puesto que, en caso contrario: $P(B) = P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$, llegando a contradicción.

Para terminar esta sección, estableceremos unas importantes consecuencias de la definición de independecia de un suceso respecto a otro.

Proposición 19 *Sea (E, U, P) un espacio de probabilidades y A y B dos sucesos de U con probabilidad no nula, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *B es independiente de $A \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.*
2. *B es independiente de $A \iff A$ es independiente de B (por lo tanto, diremos, simplemente, que "A y B son independientes").*

3. *Si A y B son independientes, entonces A^c y B también son independientes.*

4. *Si A y B son independientes, entonces A^c y B^c también son independientes.*

Demostración. Las dos primeras propiedades son inmediatas, se deducen de forma rápida observando la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} A \text{ indep. de } B &\Longleftrightarrow P(A|B) = P(A) &&\Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) &&\Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow P(B|A) = P(B) &&\Longleftrightarrow B \text{ indep. de } A \end{aligned}$$

Por último, para probar la veracidad de las dos últimas propiedades, es suficiente tener en cuenta la propiedad primera que acaba de ser demostrada:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(B)[1 - P(A)] = P(B) \cdot P(A^c) \end{aligned}$$

La última propiedad se realiza de manera similar. ■

5.3.3. Teorema de Bayes

El teorema que se va introducir es debido a Thomas Bayes (1702–1761). Permite calcular la probabilidad condicionada de un suceso en función de las probabilidades de sucesos más simples y, por lo tanto, es una herramienta muy útil para el cálculo de probabilidades, puesto que no siempre es tan fácil determinar la probabilidad de un suceso condicionada por otro mediante la definición. Antes que todo, establecer quienes son esos sucesos "más simples".

Definición 31 (Partición) *Sea E un espacio muestral. Los sucesos A_1, ..., A_n forman una partición de E si verifican las dos condiciones siguientes:*

1. *Son incompatibles dos a dos: $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.*

2. *La unión de todos ellos es E: $A_1 \cup \ldots \cup A_n = E$, o bien, de forma más compacta:*

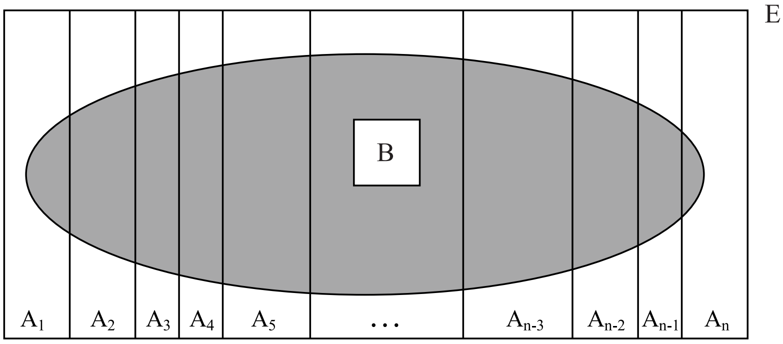
$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$$

De esta forma, se tiene:

Teorema 1 (Probabilidad total) *Si los sucesos $A_1, \ldots, A_n$ forman una partición y $P(A_k) \neq 0$, para todo k, entonces para todo suceso B (con probabilidad no nula) se verifica:*

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \ldots + P(B|A_n) \cdot P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B|A_k) \cdot P(A_k)$$

Demostración. Para la demostración nos apoyaremos en la representación gráfica que se puede ver en la figura. A partir de ella y por las definiciones de partición y de probabilidad condicionada se demuestra el teorema.



En efecto:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap E) = P[B \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n)] = \\ &= P[(B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)] = \\ &= P(B \cap A_1) + \ldots + P(B \cap A_n) = \\ &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \ldots + P(B|A_n) \cdot P(A_n) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 1 *Supongamos que la probabilidad de que un hombre fume es 0,6 y la de que una mujer sea fumadora, 0,3. En una fábrica, el 75 % son varones y el 25 % mujeres. Si se toma una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ésta fume?*

La probabilidad de que fume la persona elegida es igual a la probabilidad de que fume y sea mujer más la de que fume y sea varón: de esta forma, si se denota por V al suceso "varón", por M al suceso "mujer", por F al suceso "fumador" y, por último, por N al suceso "no fumador", se tiene:

$$P(F) = P(V \cap F) + P(M \cap F)$$

Para calcular éstas probabilidades nos apoyaremos en un par de representaciones: diagramas de Venn-Euler y en forma de árbol.

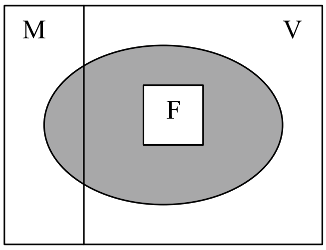


Diagrama de Venn-Euler

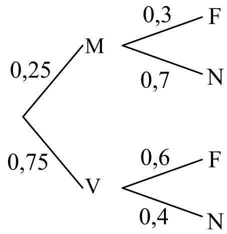


Diagrama de árbol

Entonces es claro que:

$$\begin{aligned} P(F) =& P(M \cap F) + P(V \cap F) = \\ =& P(M) \cdot P(F|M) + P(V) \cdot P(F|V) = \\ =& 0,25 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,6 = 0,525 \end{aligned}$$

Teorema 2 (Bayes) *Si los sucesos $A_1, \ldots, A_n$ forman una partición y $P(A_k) \neq 0$, para todo k, entonces, para todo suceso B (con probabilidad no nula), se verifica:*

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \ldots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)}$$

Demostración. Ejercicio: es inmediato, a partir de la definición de probabilidad condicionada y el teorema de la probabilidad total. ■

Ejemplo 2 *En el caso del ejemplo 1: si la persona que se ha tomado al azar resulta ser fumadora, ¿cuál es la probabilidad de que sea varón?*

Esto es, ¿cuál es la probabilidad del suceso "varón" (V) condicionada al suceso "fumador" (F)?; con otras palabras, ¿cuánto vale $P(V|F)$? Por el teorema de Bayes se tiene:

$$P(V|F) = \frac{P(F|V) \cdot P(V)}{P(F|V) \cdot P(V) + P(F|M) \cdot P(M)} = \frac{0,6 \cdot 0,75}{0,6 \cdot 0,75 + 0,3 \cdot 0,25} \approx 0,87$$

5.4. Ejercicios

1. Revise los problemas del capítulo 4 teniendo en cuenta las definiciones y teoremas introducidos en éste. En particular, precise las afirmaciones intuitivas (informales) que se hayan hecho en dicho capítulo.

2. En una caja existen monedas normales y defectuosas (más de tres de cada tipo). Se extraen una por una, ordenadamente, tres monedas de la caja. Determine:

   a) El espacio muestral E.

   b) El suceso: "Primera moneda defectuosa".

   c) El suceso: "Todas las monedas defectuosas menos una".

   ¿El problema se modifica si se extrae una moneda y se devuelve a la caja antes de la siguiente extracción? Razone su respuesta.

3. Se lanzan dos monedas y a continuación un dado tantas veces como caras hayan salido. Determine el espacio muestral.

4. En una bolsa hay 6 bolas blancas y 8 azules. Se extraen simultáneamente 4 bolas. Calcule la probabilidad de obtener:

   a) Las cuatro blancas.

   b) Las cuatro azules.

   c) No sean las cuatro blancas.

   d) Al menos una sea blanca.

5. Resuelva el problema anterior suponiendo que se extrae una bola, se anota el color y se devuelve a la bolsa antes de tomar la siguiente.

6. En una población, el 60 % tiene el pelo negro y el resto son rubios. Entre los morenos, el 90 % tienen los ojos castaños y el 10 % azules. Entre los rubios, el 80 % tienen los ojos azules y el 20 % verdes. Se elige una persona al azar, calcule las siguientes probabilidades:

   a) De que tenga el pelo negro.

   b) Tenga los ojos castaños.

   c) Tenga los ojos azules.

   d) Tenga los ojos verdes o castaños.

7. La probabilidad de que un hombre y una mujer de 18 años vivan 50 más es 0,6 y 0,7 respectivamente. Suponga que un hombre y una mujer de 18 años se casan. Calcule:

   a) La probabilidad de que celebren sus bodas de oro (50 años de matrimonio.)

b) Probabilidad de que transcurridos 50 años viva sólo el hombre.

c) Probabilidad de que transcurridos 50 años viva al menos uno de los dos.

d) Probabilidad de que transcurridos 50 años no viva ninguno de los dos.

8. Un dado está trucado de modo que la probabilidad de obtener las distintas caras es proporcional a los números de éstas. Calcular la probabilidad de:

   a) Cada una de las caras.

   b) Sacar un número par.

   c) Sacar un múltiplo de 3.

9. Tenemos dos bolsas. La bolsa A contiene 3 bolas blancas y 5 negras. La bolsa B contiene 8 blancas y 7 negras. Se elige una bolsa al azar y se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de haberla sacado de B si ha salido blanca?

10. Se lanza una moneda defectuosa de forma que las probabilidades de salir cara y cruz son, respectivamente, $1/3$ y $2/3$. Si sale cara se elige al azar un número comprendido entre 1 y 7; si sale cruz se elige un número entre 1 y 5.

    a) Hallar la probabilidad de elegir un número impar.

    b) Si se ha elegido un número impar, calcular la probabilidad de que al lanzar la moneda haya salido cara.

11. En una determinada época, en un hospital el 50 % de enfermos ha ingresado por bronquitis, 30 % con neumonía y 20 % con gripe. La probabilidad de curación completa de cada una de estas enfermedades es, respectivamente, 0,8; 0,9; 0,95. Un enfermo internado en el hospital ha sido dado de alta completamente sano. Hallar la probabilidad de que el enfermo dado de alta ingresara con bronquitis.

12. Una enfermendad puede ser producida por tres virus A, B y C. En un laboratorio se tienen tres tubos con virus A, dos con virus B y cinco con virus C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es $1/3$, que la produzca el virus B es $2/3$ y que la produzca el virus C es $1/7$. Se inocula un virus a un animal y contrae la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que el virus que se inoculó fuera el C?

13. Si $P(A^c) = 1/2$, $P(A \cap B^c) = 13/32$ y $P(A \cup B) = 17/32$. Calcule:
    a) $P(B)$.
    b) $P(A|B)$.
    c) $P(B|A^c)$.
    d) $P(A^c \cup B^c)$.
14. Si $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(A \cap B) = 1/6$. Calcule $P(A^c \cup B)$ y $P(A \cup B)$. ¿Son A y B incompatibles? ¿Son A y B independientes?
15. En una determinada población, el 40 % estudia francés, el 30 % inglés y el 25 % quechua. El 14 % estudia francés e inglés, el 11 % francés y quechua, el 13 % inglés y quechua. Y el 5 % las tres lenguas. Se elige una persona al azar, calcule las probabilidades siguientes:
    a) Estudie al menos una lengua.
    b) Estudie únicamente francés.
    c) Estudie inglés o quechua, pero no francés.
16. A una cierta convención asisten 200 científicos; 55 de ellos hablan francés; 60 español; 80 japonés y 120 inglés; 40 francés y español; 50 japonés e inglés; 10 japonés y francés; 20 español y japonés; 5 francés, español y japonés y uno los cuatro idiomas.

    El científico que conoce los 4 idiomas escoge uno de ellos al azar para dirigirse a un colega (también elegido al azar), ¿cuál es la probabilidad de que pueda entenderse con este colega en el idioma escogido?
17. Un ratón huye de un gato. El ratón puede entrar tres callejones A, B y C. En cada uno de ellos puede el gato alcanzarlo o no. Calcule la probabilidad de que:
    a) El gato cace al ratón.
    b) Si ha sido cazado, lo haya sido en el callejón B.

    Sabiendo que: P(entre por A)=0,3, P(entre por B)=0,5, P(entre por C)=0,2; P(cazado en A)=0,4, P(cazado en B)=0,6, P(cazado en C)=0,1. Donde:

Dice	Se interpreta
entre por A	el ratón entre por el callejón A
cazado en A	el gato lo cace si entra por el callejón A

Análogamente, para los callejones B y C.

18. Un trasnochador dispone de un llavero con tres llaves totalmente indistinguibles en la oscuridad, de las cuales sólo una abre la puerta de su casa. Para dar con la llave en cuestión suele seguir uno de los siguientes métodos:

    [Método 1] Prueba las llaves una tras otra teniendo cuidado de no volver a usar la misma llave.

    [Método 2] Prueba una llave y si no sirve, agita el llavero y prueba otra vez, con lo cual corre el peligro de volverla a usar de nuevo.

    Se sabe además que el tal trasnochador usa el método 2 cuando vuelve a casa después de haber bebido con exceso (lo cual ocurre uno de cada tres días) y el método 1 cuando regresa sobrio. Si se sabe que en los dos primeros intentos de abrir ha fracasado, ¿cuál es la probabilidad de que el trasnochador esté sobrio?

19. Un hombre quiere abrir su puerta y tiene n llaves de las cuales sólo una abre la puerta deseada. Como no recuerda cuál es la llave correcta, prueba las llaves al azar, descartando una llave, si no abre la puerta, esto es, no vuelve a probar con ella. ¿Qué es más probable, que acierte a abrir la puerta en el primer o en el segundo intento?

20. Colocamos en una bolsa 10 bolas numeradas en la forma siguiente: -1, -2, -3, -4, -5, $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$. Tomamos al azar una de las bolas y anotamos el número obtenido. Sin devolver la bola a la bolsa tomamos otro número al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el signo del producto de los dos números que hemos obtenido sea positivo?

21. En un pueblo hay $n+1$ habitantes, una persona le comenta algo a una segunda y ésta a una tercera, y así sucesivamente. En cada paso, se escoge aleatoriamente el receptor del rumor de entre las n personas disponibles. Calcule la probabilidad de que el rumor pase r veces, en los siguiente casos:

    a) Sin regresar al que lo originó.

    b) Sin repetírselo a ninguna persona.

    c) En el supuesto de que el rumor pase de una persona a un grupo de N personas elegidas aleatoriamente, resolver el problema en los mismos dos supuestos anteriores.

22. En una fiesta, cada individuo tiene una copa con su nombre. Una persona sólo sabe que dejó su copa sobre una mesa, donde ahora se encuentra con n copas, que tiene que ir mirando una por una, para ver si es la suya. Calcule la probabilidad de que llegue a mirar k copas, sabiendo que con una probabilidad p la copa se la ha llevado previamente otra persona por error.

23. Existe una prueba para el diagnósitico del cáncer que acierta en el 90 % de las ocasiones (es decir, cuando un individuo tiene cáncer, se le diagnostica cáncer con probabilidad 0,9 y, cuando no tiene, da como resultado que no tiene la maligna enfermedad con la misma probabilidad). Se sabe además que de cada 1000 habitantes, uno tiene cáncer. ¿Cuál es la probabilidad de que a un individio que se le ha diagnosticado cáncer, tenga realmente la enfermedad? ¿Qué opinión le merece la prueba como dato aislado para un posible tratamiento?

24. * Una secretaria tiene que enviar n cartas a n destinatarios distintos. Escribe todas las cartas primero y luego procede a meterlas en los sobres correspondientes, procediendo al azar, esto es, sin mirar si el destinatario coincide con la persona a quien va dirigida la carta. ¿Cuál es la probabilidad de al menos una coincidencia? Demuestre que la probabilidad, con $n \to \infty$, tiende a $1 - \frac{1}{e} \approx 0,6321$. Más aún, para $n \geq 7$, si se aproxima la probabilidad con 4 cifras decimales, se comprueba que dicha probabilidad es igual a 0,6321.

5.5. Autoevaluación

1. Definición de probabilidad: relación entre las definiciones clásica (según P. Laplace), frecuencial (según R. Von Mises) y axiomática (según A. Kolmogórov).

2. Demuestre que si A y B son dos sucesos independientes de un experimento aleatorio, también lo son cada uno de ellos y el contrario del otro. Esto es: si A y B independientes, entonces A^c y B también; análogamente, si A y B independientes, entonces B^c y A también.

3. En una urna hay 30 bolas negras, 20 blancas y 10 rojas. Se pide:

   a) ¿Dé cuántas formas se pueden extraer 3 bolas?

   b) Se extraen 3 bolas sin reemplazo: ¿cuál es el suceso más probable?, ¿con qué probabilidad?

   c) Se extraen r bolas con reemplazo: ¿cuál es el suceso más probable?, ¿con qué probabilidad?

4. En un bimestre, el 25 % de los estudiantes de una clase suspendieron matemáticas, el 15 % física y el 10 % ambos. Se selecciona un estudiante al azar:

   a) Si suspendió física, ¿cuál es la probabilidad de que haya suspendido también matemáticas?

   b) Si suspendió matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya suspendido también física?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya suspendido alguna de las dos asignaturas?

5. En una planta, con tres máquinas A, B y C se fabrica el mismo producto. La máquina A produce el 55 % del total de artículos, mientras que el 25 % y 20 % son producidos por la máquina B y C, respectivamente. Además, se conoce la media de artículos defectuosos que produce cada una de las máquinas: el 2 %, 1,5 % y 3 %. El supervisor general, descubre dos artículos defectuosos listos para salir a la venta. Se pregunta:

   a) ¿Qué probabilidad hay de que un artículo defectuoso haya sido producido por cada una de las tres máquinas?

   b) ¿Qué probabilidad hay de que los dos artículos defectuosos hayan sido producidos por cada una de las tres máquinas?

   c) ¿Cuál es el suceso más probable: que los artículos defectuosos hayan sido producidos por la máquina A; B; C; uno por la A, otro por la B; ... ?

Capítulo 6

Toma de decisiones

En diferentes secciones (§1.7, §4.4.6, §4.7, etc.), se ha observado la utilidad de la teoría de la probabilidad para tener criterios de decisión en diferentes situaciones: la probabilidad permite prever los posibles comportamientos y las frecuencias con que se espera que estos sucedan.

En el presente capítulo, se van a estudiar con detenimiento algunos problemas que exigen tomar una decisión y, sobre los cuales, un estudio de probabilidad puede darnos valiosa información.

6.1. La pregunta Marilyn

Marilyn vos Savant publicó en 1991 la siguiente prueba de inteligencia en su columna "Pregunta Marilyn" del *Parade Magazine*:

> *Supongamos que está usted en un programa de TV y le dan a elegir entre tres puertas. Detrás de una de ellas hay un carro; detrás de las otras dos, fantasmas. Usted escoge una puerta, digamos la A, y el conductor del programa, que sabe lo que hay detrás de cada puerta, abre una de las que usted no ha elegido, digamos la C, que tiene un fantasma. Entonces le pregunta a usted, ¿quiere elegir la puerta B? ¿Es ventajoso para usted cambiar su elección?*

En términos de probabilidad, la pregunta debe ser formulada de la siguiente forma: si el concursante cambia de puerta, ¿tiene más probabilidades de ganar? ¿Qué cree usted? ______________________________.
¿Por qué? ____.
¿Cómo podría justificar su hipótesis? ______________________.

Dos métodos, en esencia distintos, pueden ser utilizados para demostrar una hipótesis: una, la observación directa de la situación (si es posible) o, en general, mediante la simulación de la misma o la observación indirecta; otra, el análisis teórico. El primer método se basa en la inducción empírica o experimetal: si un experimento aleatorio se reproduce “muchas” veces en las mismas condiciones y se obtienen resultados que siguen un determinado patrón, se concluye que “siempre” será de ese modo; con otras palabras, en virtud de la *ley del azar*, las frecuencias relativas de los sucesos tienden a estabilizarse en torno a las probilidades teóricas que puede asignárseles. El segundo método, consiste en el estudio sistemático de casos y la asignación de una probabilidad a cada uno de los sucesos, en virtud de los enunciados teóricos que se hayan demostrado.

6.1.1. Simulación

No resulta cómodo reproducir la situación tal y como es presentada. Se impone, pues una simulación. ¿Cómo la haría, por ejemplo, con tres vasos opacos y un objeto? ____
____.

La persona que representa el papel de concursante no debe saber en qué vaso está el objeto; escoge al azar cualquiera de los vasos. La otra persona, que hace el papel de conductor y que ha colocado el objeto, levanta uno de los vasos que no ha sido escogido por el concursante y que no esconde nada: el concursante decide cambiar o no de vaso. Así se juegan, por ejemplo, 100 partidas, almacenando los resultados en la siguiente tabla:

Cambió	Ganó	Perdió
Sí		
No		

De las partidas en las que cambió de vaso, ¿qué tanto por ciento (%) ganó el concursante? __________.

De las partidas en las que no cambió de vaso, ¿qué tanto por ciento (%) ganó el concursante? __________.

¿Cree usted que es mejor cambiar de vaso o todo es cuestión de “suerte”?
____.

¿Cómo podría justificar la respuesta anterior? ____________________
____.

A partir del trabajo realizado, ¿es posible asignar una probabilidad al suceso “ganar si se ha cambiado de vaso ($G|C$)”? __________. ¿Cuál?
__________.

6.1.2. Estudio teórico

A partir de la simulación realizada es posible concluir que $P(G|C) \approx 2/3$, esto es, la probabilidad de ganar si se ha cambiado de vaso es 2/3. Sin embargo, esta probabilidad no parece "lógica" puesto que "al abrir una puerta, quedan dos y, por lo tanto, la probabilidad de cada una de estas puertas debiera ser 1/2". Este razonamiento es falso; cuatro variables es preciso tener en cuenta:

1. *Premio*: ¿dónde está colocado? Tres opciones: puertas A, B y C.

2. *Elección*: ¿qué puerta elige el concursante? Opciones: __________.

3. *Cambio*: ¿el concursante cambia de puerta? Opciones: __________.

4. *Resultado*: ¿el concursante gana el carro? Opciones: __________.

Por otro lado, se desea estudiar cuál es la influencia en el resultado del juego si en todas la partidas se cambia de puerta: la variable cambio, por lo tanto, se considera fija en la opción "sí cambia". De esta forma, las preguntas clave que debemos responder son, teniendo en cuenta las otras tres variables: ¿cuántos casos *en esencia* diferentes pueden darse?, ¿cuántos de ellos favorecen al suceso "ganar el carro"?

El recuento de casos queda archivado en la tabla:

Número	Premio	Elección	Cambio	Resultado
1	A	A	Sí	Pierde
2	B	A	Sí	Gana
3	C	A	Sí	Gana
4	A	B	Sí	Gana
5	B	B	Sí	Pierde
6	C	B	Sí	Gana
7	A	C	Sí	Gana
8	B	C	Sí	Gana
9	C	C	Sí	Pierde

Como se puede observar, 6 de los 9 casos favorecen al suceso "ganar", esto es, la probabilidad de ganar si se cambia es de 2/3. Por lo tanto, en las condiciones del problema, se gana siempre que en la primera elección no se haya acertado; con otras palabras, paradójicamente, el concursante gana si tiene "mala suerte" en su primera elección, que, dicho sea de paso, es lo más probable.

Por último, se puede dar una explicción del problema sin necesidad de hacer ningún recuento: la probabilidad de acertar a la primera es de $1/3$ y, por lo tanto, la probabilidad de fallar es de $2/3$; así, por ejemplo, si la puerta elegida es la A, entonces la probabilidad de que el carro esté en cualquiera de las otras dos puertas es $2/3$. Si se abre la puerta B, toda la probabilidad "recae" sobre la puerta C que, por lo tanto, tiene probabilidad $2/3$ de esconder tras de sí el carro.

6.1.3. Escala de decisiones

En la vida cotidiana se acepta que no todas las decisiones son igual de adecuadas: la bondad de una decisión reside en las consecuencias favorables que ésta conlleva. De esta forma, es posible comparar dos decisiones: una decisión es mejor que otra si sus consecuencias son más favorables para la persona o grupo social que las pone en práctica.

Empero, en la vida cotidiana, en la mayoría de los casos es muy complejo valorar la bondad de una decisión: bien porque no existen criterios claros de comparación entre diferentes consecuencias, bien porque es imposible saber qué efecto hubiera causado otra decisión.

La teoría de la probabilidad pone al alcance un medio eficaz y fácil de usar para comparar un conjunto finito de decisiones en un juego de carácter aleatorio. El principio básico se sigue de la propia noción de probabilidad como *un medio para prever los posibles comportamientos y las frecuencias con que se espera que éstos sucedan.* En concreto:

Definición 32 (Comparación de decisiones) *Para un juego de azar, se establece que la decisión D_1 es mejor que la decisión D_2, denotaremos $D_1 > D_2$, para los intereses de un determinado sujeto, si $P(G|D_1) > P(G|D_2)$, donde G representa el suceso "ganar". Dos decisiones D_1 y D_2 son equivalentes si $P(G|D_1) = P(G|D_2)$.*

El problema que estamos estudiando nos da un ejemplo: la decisión de cambiar (C) de puerta es mejor que la decisión no cambiar de puerta (N), puesto que la probabilidad de ganar el carro en el primer caso es $2/3$, mientras que en el segundo es $1/3$, esto es:

$$P(G|C) = \frac{2}{3} > \frac{1}{3} = P(G|N) \Rightarrow C > N$$

La pregunta que nos podemos formular es la siguiente: ¿es posible tomar otra decisión cuya probabilidad sea diferente a las dadas? Y, más en concreto, ¿es posible encontrar otra decisión mejor que las dos observadas?

Supongamos que las tres puertas están en una misma pared, entonces es posible observar que los dos fantasmas (F) están juntos con mayor probabilidad: si el carro (C) está en cualquiera de los dos extremos, los fantasmas están juntos; mientras que sólo si el carro está en la puerta del centro los fantasmas están separados. En conclusión, tres configuraciones son posibles: (F, F, C), (F, C, F) y (C, F, F) y, sólo en la segunda, los fantasmas están en puertas no contiguas. Por lo tanto, un criterio que puede seguirse es: escoger la puerta que no es contigua a la que el conductor ha abierto, puesto que es más probable que los fantasmas estén juntos (criterio F).

Sin embargo, el criterio F no siempre se puede llevar a cabo: ¿qué sucede si yo he elegido la puerta del centro: cambio o no cambio? __________. Y si el conductor abre la puerta del medio, ¿cambio o no cambio? __________.

Por lo tanto, es necesario, para estos casos de incerticumbre, tomar una nueva decisión. Se consideran las siguientes opciones:

1. No cambiar de puerta (opción: $N \cap F$).

2. Lanzar una moneda al aire: si sale cara, se cambia; si sale sello, no se cambia (opción: $M \cap F$).

3. Cambiar de puerta (opción: $C \cap F$).

De esta forma, la pregunta que nos formulamos es la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de ganar si utilizamos los criterios $N \cap F$, $M \cap F$ o $C \cap F$?

En los casos en los que sólo se tenían en cuenta las opciones de cambiar (C) y no cambiar (N), cuatro variables eran suficientes para describir la situación: *premio, elección, cambio y resultado* (p.155). Sin embargo, ahora el cambio está condicionado por la puerta que abra el conductor del programa y, por lo tanto, es preciso tener en cuenta otra variable: *abertura* (¿qué puerta abre el conductor del programa?). Esta nueva variable hace que se tengan muchos más casos y que, por lo tanto, sea cómodo representar todas las posibles combinaciones mediante un diagrama en forma de árbol.

En la figura 6.1, se puede ver el gráfico asociado a la tercera opción (en caso de duda, cambiar siempre de puerta, $C \cap F$). Para simplificar la representación se ha tenido en cuenta que las puertas A y C son "simétricas": ambas son laterales, se tiene un comportamiento similar y, por lo tanto, es suficiente estudiar el comportamiento de una para deducir el de la otra (en términos de probabilidad de ganar).

Se deduce que únicamente 6 de los 12 casos posibles son favorables al suceso ganar: ¿cuál es la probabilidad de dichos sucesos? El diagrama de la figura 6.1 puede servirnos para calcular dichas probabilidades. De esta forma, se concluye:

$$\begin{aligned}P(G|(C\cap F)) &= P(\text{caso } 2) + P(\text{caso } 3) + P(\text{caso } 4) +\\ &+P(\text{caso } 9) + P(\text{caso } 10) + P(\text{caso } 11) =\\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{9}\end{aligned}$$

De igual manera, los casos posibles que se generan con la segunda opción (en caso de duda, lanzar una moneda al aire, $M\cap F$) pueden ser descritos por otro diagrama en forma de árbol (figura 6.2). Al igual que en el otro caso, para simplificar la representación, se ha tenido en cuenta que las puertas A y C son "simétricas".

Se deduce que únicamente 10 de los 20 casos posibles son favorables al suceso ganar: ¿cuál es la probabilidad de dichos sucesos? De manera similar al caso anterior, la figura 6.2 sirve para calcular dichas probabilidades. De esta forma, se concluye:

$$\begin{aligned}P(G|(M\cap F)) &= P(\text{caso } 2) + P(\text{caso } 3) + P(\text{caso } 4) + P(\text{caso } 6) +\\ &+P(\text{caso } 10) + P(\text{caso } 12) +\\ &+P(\text{caso } 15) + P(\text{caso } 17) + P(\text{caso } 18) + P(\text{caso } 19) =\\ &= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} +\\ &+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} +\\ &+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} =\\ &= \tfrac{1+2+2+2+1+1+2+2+2+1}{36} = \tfrac{16}{36} = \tfrac{4}{9}\end{aligned}$$

En conclusión, hasta el momento tenemos que:

$$P(G|C) > P(G|(C\cap F)) > P(G|(M\cap F)) > P(G|N)$$

Con probabilidades: $\frac{6}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{3}{9}$, respectivamente. Luego, hasta el momento, la decisión de cambiar sigue siendo la mejor de todas. Falta estudiar el caso primero que se ha planteado: en caso de duda, no cambiar de puerta ($N\cap F$). Por un método análogo al descrito para los otros dos casos, demuestre que la decisión es también peor: ¿qué probabilidad de ganar se tiene si se considera esta opción?

Ejercicio

Otras opciones pueden ser consideradas. Por ejemplo, como las dudas respecto al criterio "fantasma" (F) se tienen si la puerta B tiene un papel principal (si el conductor del programa abre la puerta B o si "yo" (el concursante) he elegido la puerta B), entonces consideraré como una opción no

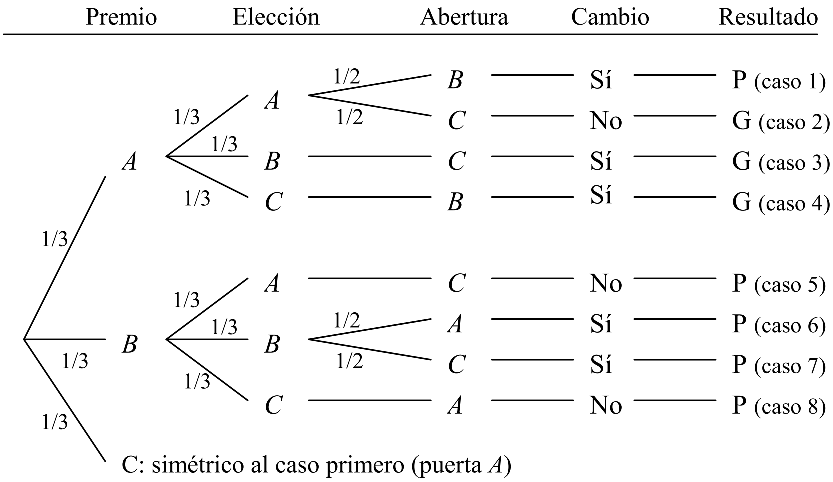


Figura 6.1: Diagrama en forma de árbol de la opción $C \cap F$.

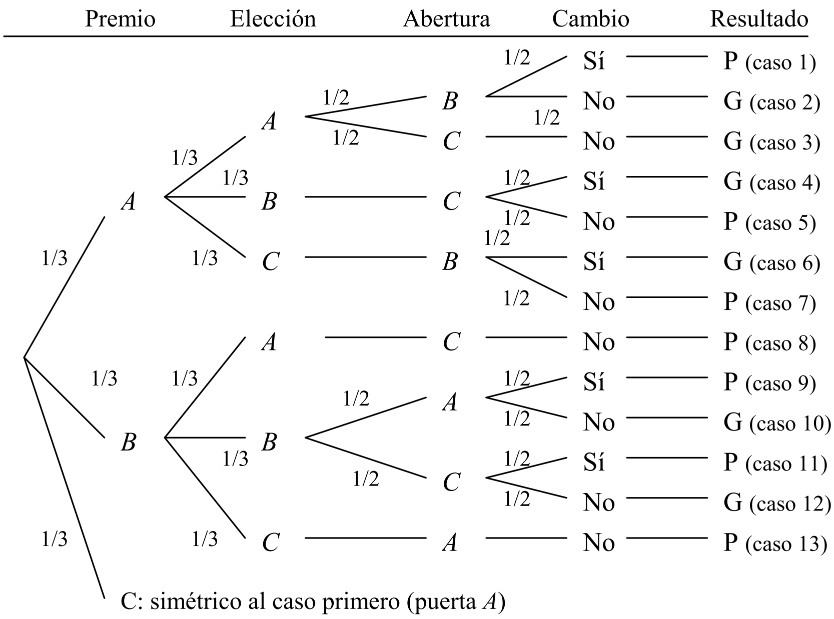


Figura 6.2: Diagrama en forma de árbol de la opción $M \cap F$.

tomar nunca la puerta B (el parámetro *elección* se restringe entonces a las puertas A y C). Además, en caso de que el conductor abra la puerta B, el criterio será no cambiar de opción. En resumen, la decisión de cambiar o no cambiar se sigue de los siguientes criterios:

1. No elegir la puerta B (criterio $\overline{B}$).

2. Si el presentador abre la puerta B: no cambio (N).

3. Si el presentador abre la puerta A o C: la opción de cambio se rige por el criterio fantasma (F).

Se demuestra que la decisión así tomada ($\overline{B} \cap N \cap F$) tiene una probabilidad de ganar de $2/3$ y, en definitiva, es una decisión *equivalente* a la de cambiar siempre[1]:

$$P(G|C) = \frac{2}{3} = P(G|(\overline{B} \cap N \cap F))$$

Por último, razone por qué no es posible encontrar un criterio X tal que $P(G|X) > 2/3$: tenga en cuenta que las decisiones "cambiar" (C) y "no cambiar" (N) son mutuamente excluyentes.

6.2. La paradoja de Condorcet

Se confeccionan cuatro dados D_1, D_2, D_3, D_4 de la siguiente forma: D_1 tiene en cuatro caras 4 y en dos 0; D_2, en todas sus caras 3; D_3, 2 en cuatro caras y 6 en las restantes; y, por último, D_4 tiene 5 en tres caras y 1 en las otras tres. Esto es:

	Números						
Dados	0	1	2	3	4	5	6
D_1	2	—	—	—	4	—	—
D_2	—	—	—	6	—	—	—
D_3	—	—	4	—	—	—	2
D_4	—	3	—	—	—	3	—

[1]Por la definición 32, no se puede concluir que la decisión "cambiar" (C) sea mejor que la decisión última ($\overline{B} \cap N \cap F$), puesto que las probabilidades asociadas son iguales; sin embargo, se *prefiere* la primera a la segunda por su sencillez, tanto para la aplicación como para la comunicación.

Dos jugadores compiten: uno de ellos selecciona un dado y el contrincante, después, otro. Lanzan los dados un máximo de tres veces, gana quien en dos de los lanzamientos obtiene una puntuación superior. ¿Cuál es la mejor estrategia para ganar el juego?

Para estudiar la situación pueden seguirse, al igual que en muchas otras circunstancias, dos métodos: uno práctico y otro teórico. El método práctico consiste en construir los dados y jugar muchas partidas, anotando todos los resultados, para después analizarlos.

¿Qué datos le serán útiles? ______________________________.

¿Es importante anotar quién elige primero y quién segundo? ________.

¿Es importante anotar quién gana y en cuántas partidas? ________.

Diseñe un método de simulación y conjeture cuál es la mejor estrategia ganadora.

El estudio teórico supone responder, sin análisis empírico previo, la pregunta: ¿con qué frecuencias se espera que un dado determinado gane a cualquiera de los otros tres?

$$P(D_1 \text{ gane a } D_2);\; P(D_2 \text{ gane a } D_3);\; P(D_3 \text{ gane a } D_4);\; P(D_4 \text{ gane a } D_1)$$

Mediante diagramas de árbol es fácil concluir que las probilidades anteriores son todas iguales a 2/3: haga dichos diagramas y compruébelo.

En conclusión , ¿qué estrategia seguir en el juego? __________________ ____. ¿En qué lugar es preferible escoger el dado: en primer o en segundo lugar? ________.

Si el primer jugador escoge el dado D_2, ¿qué dado escogería? ________.

Si el primer jugador escoge el dado D_4, ¿qué dado escogería? ________.

Si el primer jugador escoge el dado D_1, ¿qué dado escogería? ________.

Si el primer jugador escoge el dado D_3, ¿qué dado escogería? ________.

El problema todavía no está del todo resuelto: ¿cuál es la probabilidad de ganar si hemos escogido en segundo lugar el dado “correcto” (aquel que maximiza nuestras posibilidades de ganar)? Una partida, como se ha dicho al principio de la sección, es ganada por el jugador que obtiene en dos tiradas mayor puntuación. Por lo tanto, si se denota por G al suceso “obtener mayor puntuación en un lanzamiento” y por P al suceso contrario, se tiene:

$$\begin{aligned} P(\text{ganar partida}) &= P(G,G) + P(G,P,G) + P(P,G,G) = \\ &= \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{20}{27} \end{aligned}$$

Esto es, la estrategia de elegir en segundo lugar (el dado “adecuado”, por supuesto) hace que ganemos, en promedio, 20 de cada 27 partidas disputadas; sea cual sea el dado que escoja nuestro contrincante. Aún más, el ejemplo resalta el carácter *no transitivo* de la probabilidad: D_1 gana con mayor probabilidad a D_2; D_2 gana con mayor probabilidad a D_3; D_3 gana con mayor probabilidad a D_4; por lo tanto, de cumplirse la ley transitiva, debieramos concluir que D_1 gana con mayor probabilidad a D_4, lo cual es falso, como se acaba de demostrar.

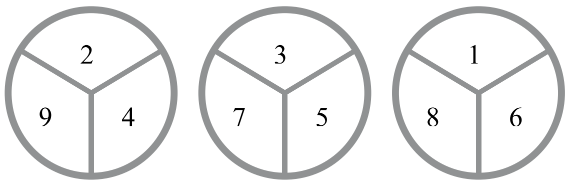
Ejercicios

1. Determine cuál es la probabilidad de que el dado D_1 gane a los dados D_3 y D_4; de que el dado D_2 gane a los dados D_4 y D_1; de que el dado D_3 gane a los dados D_1 y D_2; y, por último, de que el dado D_4 gane a los dados D_2 y D_3. ¿Es necesario calcular efectivamente todas estas probabilidades o pueden ser deducidas por métodos indirectos?

   En caso de que quisieramos hacer un juego equitativo (definición 12, p. 87) con base en la esperanza de ganancia de uno y otro jugador: ¿en qué proporción deben apostar cada uno de ellos según quien escoge primero y quién segundo?

   Suponga, por otro lado, que las reglas del juego cambian: el jugador que elige en primer lugar gana si en un tirada obtiene una puntación mayor que el otro; el jugador que elige en segundo lugar, gana si en dos tiradas obtiene una puntuación mayor que el otro. ¿En qué turno prefiere jugar usted? ¿Qué apuestas debieran hacer uno y otro jugador para que el juego resultara equitativo?

2. Es posible describir otros juegos que resalten el carácter no transitivo de la probabilidad. Por ejemplo, considere las tres ruletas que se pueden ver en la figura y conteste a las preguntas que se formulan a continuación.

   ruleta A ruleta B ruleta C

   ¿Qué es más probable que en la ruleta A se obtenga un valor mayor que en la ruleta C o viceversa? Si tuviera que elegir una ruleta, para "competir" contra otra persona, ¿qué ruleta escogería? ¿Se "transgrede" la propiedad transitiva?

6.3. Decisiones individuales vs. Decisiones sociales

En la anterior sección, entre otras cosas, se ha visto que "la probabilidad no es transitiva". En esta sección vamos a observar la influencia de esta "transgresión" en los fenómenos sociales. En concreto: la "racionalidad" de las decisiones individuales no conduce necesariamente a la "racionalidad" de las decisiones sociales o colectivas.

En unas elecciones presidenciales con 3 candidatos A, B y C, un tercio del electorado los ordena de la siguiente forma: A, B, C; otro tercio, B, C, A; otro tercio, C, A, B. De esta forma, 2/3 de la población prefiere a A en lugar de B (con independencia de que el candidato A sea el preferido); 2/3 a B en lugar de C; 2/3 a C en lugar de A. De esta forma, se concluye que la intención de voto de la población puede ser reflejada mediante: A gana a B, B gana a C, C gana a A. Luego, incluso suponiendo que las elecciones individuales sean transitivas (esto es, toda persona que prefiere a J sobre K y a K sobre L, entonces también prefiere a J sobre L), no es posible inferir que la elección comunitaria sea transitiva.

Lo dramático del ejemplo anterior es que no es anecdótico: el economista K. Arrow (1921–?)[2] ha demostrado una generalización muy potente según la cual todos los sistemas de votación se caracterizan por presentar alguna situación parecida a la anterior. De esta forma, los sistemas electorales que se utilizan en los países no garantizan una transferencia de las preferencias individuales y, por lo tanto, paradójicamente, los resultados electorales no son fiel reflejo de las decisiones individuales.

El sistema actual de designación de regidores de las municipalidades es un ejemplo de esta situación, pero por diferentes motivos. Actualmente, el partido que obtiene más votos recibe la mayoría más uno de los regidores: por ejemplo, 5 regidores si el municipio consta de ocho regidores.

Analicemos, brevemente, si esta distribución puede resultar representativa del voto de los electores. Si se tiene en cuenta al alcalce electo, que es del mismo partido que los citados regidores, se tiene que seis de los nueve representantes (aproximadamente el 67 %) pertenecen al mismo partido y, por lo tanto, tienen la facultad de gobernar según los criterios que crean convenientes.

Como en la designación del número de regidores no interviene el porcentaje de votos válidos recibidos por el partido, sino el puesto que ocupan en

[2]Kenneth J. Arrow (1921-?): economista estadounidense, nacido en Nueva York, ganador del Premio Nobel de Economía de 1972 junto con el británico Sir John R. Hicks por su teoría sobre el equilibrio general económico y el bienestar.

la lista de partidos más votados, se tiene situaciones como la que sigue: se presentan cuatro partidos y alcanzan el 25 %, 23 %, 20 % y 15 %, respectivamente, con un 17 % de votos en blanco o nulos. Entonces, la distribución de los ocho regidores, puede ser 5, 2, 1 y 0; o bien, 5, 1, 1 y 1. En cualquiera de las dos situaciones, la distribución no es, en absoluto, fiel reflejo de la decisión social: ¿cuál es la probabilidad de que tomado un elector al azar no haya votado por el partido ganador? ¿Cuál es la probabilidad de tomar al azar un representante (regidor o alcalde) del partido ganador?

Encuentre criterios para la asignación de regidores de manera que él número de ellos esté mejor relacionado con el porcentaje de votos válidos emitidos favorables a cada uno de los partidos. Las variables que debe tener en cuenta son: el número n de regidores con que cuenta el municipio, el número k de partidos que postulan y las frecuencias relativas de los votos que cada partido P_j $(1 \leq j \leq k)$ obtenga en las elecciones, $f_r(P_j)$.

6.4. Toma de información

Para tomar una decisión, es preciso tener información precisa sobre el asunto o la población que se quiere estudiar. De hecho, la idea clave de la *estadística* es deducir información acerca de un aspecto determinado de una población grande, a partir de datos extraídos de una muestra pequeña tomada al azar.

En muchas circunstancias, la toma de datos es crítica: la información resulta comprometodora para el individuo o el medio de control sobre la población no es fácil. En esta sección, se describen dos situaciones muy distintas que permiten extraer información “delicada” que permitirá elaborar estrategias adecuadas de actuación, esto es, toma de decisiones pertinentes.

6.4.1. Una encuesta comprometedora

En una comunidad se detecta que un grupo consume droga. Las autoridades, alertadas por el problema, deciden hacer un estudio de la gravedad del problema. Se supone que un consumidor no admite abiertamente que lo es, salvo bajo medidas de presión extremas o en grupos reducidos de “gente de su confianza”. Una decisión de fuerza podría ser tomar un analísis de sangre de toda la población y discriminar el grupo de las personas que dan positivo en un test *ad hoc*. Al menos tres problemas graves debe afrontar este método:

1. *Alto costo*: si la población es grande el costo es elevado. Además, no

resultaría admisible cobrar por dichos análisis, puesto que estos no han sido requeridos por los afectados, sino impuestos por las autoridades a toda la comunidad.

2. *Inquisitorial*: imponer a toda una comunidad que se practique un análisis sanguíneo no resulta muy democrático. La medida es propia de un gobierno del siglo XVIII: "todo para el pueblo, pero sin el pueblo"[3]. El carácter retrógrado de la medida no es, pues, aceptable en la sociedad actual[4].

3. *Temporal*: una persona elimina las toxinas del organismo pasado un cierto tiempo después de su último consumo y, por lo tanto, si se le practica entonces un análisis dará negativo. De esta forma, puede tenerse un grave sesgo que inuntilice los datos obtenidos.

Por lo tanto, se precisa de un método no tan costoso, que no violente la libertad individual y que permita extraer información sobre la población que se desea estudiar de manera fiable. Puede entonces plantearse una encuesta con las siguientes características:

- Se plantean las preguntas sobre el asunto en cuestión, sobre las cuales la persona encuestada pueda responer únicamente sí o no: ¿ha consumido droga alguna vez?, ¿consume droga al menos una vez al año/mes/semana/día?

- Para que las personas respondan desinhibidamente y, por lo tanto, la encuesta sea fiable, se sigue el siguiente método: se pide que la persona

[3]En el siglo XVIII, *siglo de las luces* o *de la ilustración*, caracterizado por la confianza total en la razón humana como instrumento capaz de resolver todos los problemas, una forma de gobierno absolutista se impone en Europa: el *despotismo ilustrado*. Los reyes y sus ministros gobernaban atendiendo las necesidades del pueblo, pero sin permitir su participación en la elaboración de las leyes o en la toma de decisiones que pudieran afectarle. Soberanos que destacaron en la práctica de esta política absolutista fueron Luis XIV en Francia, Carlos III en España y Catalina II en Rusia.

[4]Puede pensarse que la comunidad a la que nos referimos sea la comunidad de atletas profesionales. Los controles antidopage se efectúan con este fuerte marcado carácter inquisitorial: se hacen batidas indiscriminadas para el control de consumo de "sustancias prohibidas para el mejoramiento del rendimiento físico". Sin entrar a comentar la pertinecia del procediento dentro del deporte profesional de élite, el planteamiento que se está formulando presupone comunidades más heterogéneas: una ciudad, una universidad o colegio, una clase social. Esto es, se presume que el control de consumo de drogas no está tipificado dentro de la comunidad: salvo fundadas sospechas y dentro de un proceso penal, una persona natural no puede ser forzada a realizarse unos análisis en contra de su voluntad.

que va a ser encuestada, tome una moneda, la lance al aire y vea (sólo ella) el resultado. Si sale cara, la persona contesta la verdad (sí o no, según proceda); si sale sello, la persona contesta, en todo caso, sí.

Como sólo la persona ve el resultado de la moneda, sólo ella sabe si ha contestado verdad o un inocuo "sí", es de esperar que la gente, al no verse comprometida con su respuesta realice el test correctamente. De esta forma, tenemos a la mano una información realista sobre el problema "social", mas no sobre cada individuo en particular. Por ejemplo, supongamos que se ha realizado a 1 000 personas la pregunta "¿ha consumido alguna vez algún tipo de droga?" y que los resultados de la muestra arrojan que 597 han respondido sí: ¿qué información podemos extrer de este dato? Al lanzar la moneda 1 000 veces es de esperar (ley del azar) que más o menos la mitad sean caras y la otra mitad sellos: se estima que quinientas (500) personas que han contestado sí, lo han hecho porque obtuvieron sello en su lanzamiento. De esta forma, quedan 97 ($597 - 500$) personas que han contestado sí, habiendo obtenido cara, esto es, han consumido en alguna oportunidad alguna clase de droga: por lo tanto, una aproximación razonable del tanto por ciento de personas que han consumido drogas es: $\frac{97}{500} \cdot 100\,\% = 19,4\,\%$.

Ahora, la decisión de las medidas que tendrán que tomarse se fundamenta en la aproximación de que alrededor del 20 % de la población ha consumido drogas alguna vez. Como la cifra es realmente grande, cabe esperar que las autoridades intenten obtener información más precisa sobre las drogas utilizadas, el modo de obtener la droga, las clases sociales más afectadas... En definitiva, la información invita a realizar indagaciones que delimiten el problema y permitan vislumbrar acciones de prevención, educación, erradicación.

6.4.2. El problema de las ardillas

La Universidad de Piura (Perú) ha visto incrementarse la población de ardillas de forma muy rápida en los últimos dos años. Al principio, el mamífero roedor sirvió para equilibrar el ecosistema: come algarroba, huevos de reptiles y carroña. Sin embargo, en la actualidad, representan un serio problema para éste: la ausencia de un depredador natural (lechuza, búho, serpientes arborícolas o zorro), ha permitido que se reproduzca sin mesura[5].

[5] El problema fue planteado en el año 2001. En estos momentos, la depredación de los zorros introducidos (y de algunos gatos) ha hecho que la población de ardillas se estabilice. Mantenemos, de todas formas, la redacción original.

Antes de tomar ninguna decisión, el consejo universitario decide hacer un recuento aproximado del número de ardillas. El proyecto no es fácil: son verdaderas acróbatas en los árboles y se esconden rápidamente si sienten peligro. Por lo tanto, se corre el riesgo de contar más de una vez a una misma ardilla o de no contar ejemplares escondidos en el bosque de algarrobos. ¿Qué método utilizar en este caso?

Un método que se puede utilizar es el siguiente:

1. Tomar un número m de ardillas y marcarlas (con un arito en una pata, por ejemplo), cuidando de no malherirlas.
2. Distribuir las ardillas marcadas homogéneamente por el campus.
3. Pasado un cierto tiempo, capturar el mismo número (m) y contar cuántas de ellas están marcadas.
4. Estimar el número de ardillas por la regla de tres simple: si en la segunda toma se han cogido k ardillas marcadas de las m que se tienen en la población total N, entonces se tiene la relación: $N = \frac{m^2}{k}$.

Por ejemplo, si $m = 100$ (se han tomado y marcado 100 ardillas en la primera "cacería") y $k = 5$ (5 de las 100 ardillas capturadas en la segunda "cacería" están marcadas, esto es, han sido capturadas por segunda vez), entonces se estima que 5 es a 100 como 100 es a N: $N = \frac{100^2}{5} = 2\,000$. Se estima que en la actualidad hay 2 000 ardillas.

Si de éstas, un 10 % son hembras adultas capaces de procrear, en la próxima estación de cría se tendrán aproximadamente 2 600 ardillas... Una decisión pertinente puede ser el concurso de algún derpredador natural, que devuelva al ecosistema el equilibrio necesario.

6.5. Cazapalabras

El cazapalabras es un juego que consiste en la formación de palabras a partir de letras obtenidas al azar en el lanzamiento de un conjunto (no demasiado grande) de dados. La construcción física del juego exige una serie de decisiones: cuántos dados considerar, qué letras colocar en cada dado.

El alfabeto castellano cuenta con 29 letras (incluimos la *che* y la *elle*). Por lo tanto, se necesitará un mínimo de 5 dados ($6 \cdot 5 = 30$) si se quiere poner al menos una vez cada una de las letras. Por otro lado, aproximadamente la mitad de las letras en las palabras son vocales, entonces será necesario colocar más vocales en las caras de los dados: ¿en qué proporción?

Una forma de proceder, para decidir la proporción de vocales y consonantes, es tomar al azar un número de palabras del diccionario y establecer dicha proporción. De esta forma, las frecuencias relativas que se obtengan nos servirán como indicativo de la probabilidad con que deben salir las letras en el lanzamiento de los dados. La versión para ordenador del Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (DRAE) incluye la opción "entrada al azar", que permite obtener de manera aleatoria palabras. En la tabla 6.1 aparecen 100 palabras obtenidas con este procedimiento.

barrenero	chivateo	barcia	extorsionar
podólogo(a)	fradear	ileocecal	desengaño
granadino(a)	vinal	ametalado(a)	despierto(a)
monoptongación	vivencia	vigía	androide
ocaso	encantado(a)	augurador(a)	oledor(a)
cordelero(a)	obligativo(a)	humillar	murcielaguina
filoso(a)	satirizar	zancajiento	hablanchín(a)
híspido(a)	asistolia	tentaruja	cantaletear
alborotado(a)	dóllimo	anarquismo	supervisor(a)
curable	adamadamente	corpulento(a)	envedijarse
decorado(a)	sotavento	chist	besar
fermentador(a)	ratímetro	trucar	cuplé
cuerpo	despasar	atabe	augurar
morbilidad	febrático(a)	distinguido(a)	isotérmico(a)
convocación	pío	perífrasis	sentenciador(a)
bajá	somera	líbico	poco(a)
hipocrás	descervigamiento	frutier	disperso(a)
esportonada	edén	septeto	jubilar
devanado(a)	nomenclatural	encomendamiento	masecoral
vermicular	canastillero(a)	residual	e
andrehuela	estiomenar	médano	contención
paragoge	aflorado(a)	afijo	huitrín
orlador(a)	batuda	climaterio	adustivo(a)
modificativo(a)	sociometría	platicador	caboverdiano
camenal	objetividad	dominicano(a)	vilordo(a)

Tabla 6.1: 100 palabras obtenidas al azar, en el orden dado.

Por lo tanto, debemos analizar las 100 palabras que han sido obtenidas al azar: determinar la proporción de volcales y consonantes (¿cuántas veces se repite cada una de las 29 letras del abecedario?) y la longitud de las palabras. Esta información debe permitirnos, en primer lugar, encontrar criterios para decidir el número de dados que se utilizarán para construir el juego; en segundo lugar, el número de repeticiones asignado a cada letra; en tercer lugar, encontrar algún criterio para distribuir dichas letras en las caras de los dados.

La longitud media de las palabras es $8,52$ (número de letras dividido entre las 100 palabras consideradas, tabla 6.1) y, por lo tanto, una opción para el número de dados que pueden disponerse para confeccionar el juego es 9. Sin embargo, existe una objeción a esta decisión: la longitud media de las palabras no precisa cuántas palabras tienen un longitud mayor que 9, que, evidentemente, no podrían ser construídas en un juego de 9 dados. Por lo tanto, interesa observar también cuántas palabras hay de una determinada longitud:

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N	1	0	1	4	7	10	13	12	18	14	11	4	2	1	1	1

De esta forma, la longitud 9 también representa la *moda*, esto es, la longitud que tiene una frecuencia absoluta mayor. Así, las dos *medidas de centralización* media y moda coiciden. ¿Es esto razón suficiente para aceptar que el número de dados debe ser 9? Si se observa con deternimiento la tabla última (que indica el número de palabras que hay con una determinada longitud), se comprueba que alrededor del 35 % de las palabras tienen una longitud mayor que 9 y que sólo un 10 % (aproximadamente) tiene una longigud mayor que 11: ¿es más conveniente construir un juego con 11 dados que nos permita formar, en teoría, alrededor del 90 % de las palabras del diccionario (admitiendo que las palabras obtenidas al azar son una *muestra representativa*, es decir, a partir de la cual se puede extraer información fiable)? En los siguientes párrafos, razonaremos porqué esta decisión resulta demasiado *costosa*.

Si se observan las palabras de la tabla 6.1, se concluye que hay palabras compuestas, esto es, formadas por composición de dos o más voces simples: ileocecal (*que pertenece a los intestinos íleon y ciego*), masecoral (*maese coral*), caboverdiado (*nativo de Cabo Verde*), etc. También hay palabras derivadas, esto es, formadas por ampliación o alteración de la estructura o significación de otros vocablos que se llaman primitivos: barrenero (de barrena), granadino (de Granada), ametalado (de metal), etc. Y, por último, palabras compuestas o derivadas formadas por adición de sufijos y prefijos: asistolia (formada por el prefijo "a-" y la voz simple sístole), curable (formada por el vocablo cura y el sufijo "-ble"), etc. De hecho, la tabla 6.1, puede ser "simplificada", de manera que aparezcan únicamente voces simples (palabras no compuestas ni derivadas). De esta forma, la longitud de las palabras será menor y, por lo tanto, la elección de 9 dados sería un tope superior suficiente.

Este planteamiento es adecuado si reflexionamos sobre cuál podría ser el objetivo del juego y el público al que se destine. El juego puede utilizarse para enriquecer el vocabulario de un grupo de estudiantes con edades comprendidas entre 8 y 16 años. Puede establecerse que no es válido escribir plurales, palabras extrajeras, nombres propios o conjugar verbos. Por otro lado, si se tiene un número sobreabundante de dados, el juego puede resultar un tanto caótico y los estudiantes suelen restringir el uso a un conjunto de todos ellos. Por ello, creemos pertinente estudiar un poco más a fondo cómo varían las palabras si transcribimos únicamente palabras simples.

La tabla 6.2 representa una modificación de la tabla 6.1, siguiendo el criterio de transcribir las palabras "generatrices" de las que se habían obtenido (en el supuesto de una palabra compuesta, se considera un término y se prescinde de los otros). El número total de letras es 678 (las grafías "qu", "ch" y "ll" son contabilizadas como una sola letra) y, por lo tanto, la longitud media es de 6,78. Por otro lado, ¿qué porcentaje de palabras tiene una longitud menor o igual a 9 letras? Complete para ello la tabla 6.3.

¿Qué porcentaje de palabras tiene una longitud inferior o igual a 9? __________.

¿Cuál es la moda de las longitudes de las palabras? __________.

¿Media y moda coinciden? __________.

De todo lo dicho, se acepta que un número adecuado de dados es 9. Ahora, para tomar una decisión en torno a la proporción de vocales y consonantes, es preciso, en primer lugar, hacer un recuento de las letras que aparecen en las 100 palabras seleccionadas, esto es, la frecuencia absoluta de cada una de las letras. A partir de este dato, es fácil calcular la frecuencia relativa y el porcentaje. Dichos datos pueden ser observados en la tabla 6.4.

Se puede observar que las frecuencias absolutas varían desde 0 (letras "k", "w", "y") hasta 129 (letra "a"). El total de palabras es 852: ¿qué tanto por ciento de las letras son volcales? ________. ¿Y consonantes? ________.

Para asignar el número de caras que deben tener inscrita cada una de las letras del abecedario se procede a relacionar los porcentajes con el número de caras disponibles: 54 (9 dados por 6 caras cada uno de ellos). Por ejemplo, como la frecuencia absoluta de la letra "a" es 129, y esto representa el $15,1408\,\%$ del total de las letras, se concluye que debiera haber $54 \cdot \frac{15,1408}{100} = 54 \cdot f_r(a) = 54 \cdot 0,151408 = 8,176032$ caras de dados con la letra "a", esto

barreno	chivateo	barcia	extorsión
podóloga	fradear	íleon	engaño
granado	vinal	metal	despierta
monoptongo	vivencia	vigía	androide
ocaso	encantado	augurar	olor
cordel	obligar	humillar	murciélago
filo	satira	zanca	habla
híspida	sístole	tentar	canto
alborotado	dóllimo	anarquismo	visora
cura	adamada	cuerpo	vedija
decorada	sotavento	chist	besar
fermento	rata	trucar	cuplé
cuerpo	pasar	atabe	augurar
morbilidad	fiebre	distinguido	térmica
convocar	pío	perífrasis	sentenciar
bajá	somera	líbico	poco
hipocrás	cerviz	frutier	dispersa
esportón	edén	septeto	jubilar
devanado	nomenclatura	encomendar	maese
vermicular	canasta	residuo	e
andrehuela	estiomenar	médano	contención
paragoge	flor	afijo	huitrín
orla	batuda	clima	adusta
modificar	social	platicar	cabo
camenal	objetivo	dominicano	vilorda

Tabla 6.2: “Simplificación” de las palabras de la tabla 6.1.

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N																

Tabla 6.3: Número N de palabras de la tabla 6.2 de longitud L.

Letra	f_a	f_r	%
a	129	0,151408	15,1408
b	16	0,018779	1,8779
c	41	0,048122	4,8122
ch	3	0,003521	0,3521
d	49	0,057512	5,7512
e	80	0,093897	9,3897
f	9	0,010563	1,0563
g	13	0,015258	1,5258
h	5	0,005869	0,5869
i	78	0,091549	9,1549
j	7	0,008216	0,8216
k	0	0	0
l	32	0,037559	3,7559
ll	3	0,003521	0,3521
m	26	0,030516	3,0516
n	52	0,061033	6,1033
ñ	1	0,001174	0,1174
o	88	0,103286	10,3286
p	18	0,021127	2,1127
qu	1	0,001174	0,1174
r	73	0,085681	8,5681
s	36	0,042254	4,2254
t	47	0,055164	5,5164
u	24	0,028169	2,8169
v	18	0,021127	2,1127
w	0	0	0
x	1	0,001174	0,1174
y	0	0	0
z	2	0,002347	0,2347
Total	852	1	100

Tabla 6.4: Recuento de letras de las palabras de la tabla 6.1.

es, una decisión puede ser asignar 8 caras a la letra "a". Procediendo de esta manera, complete las columnas "Asociación teórica" y "Asignación" de la tabla 6.5. Para la asignación, si un número tiene la parte decimal mayor que 0,5, se le asigna el número entero de caras inmediatamente superior (por ejemplo, a la letra "f" se le asigna una cara, puesto que la asociación teórica es de 0,570402); si un número tiene la parte decimal menor que 0,5, se le asigna el número entero de caras inmediatamente inferior (por ejemplo, a la letra "j" no se le asigna ninguna cara, puesto que la asociación teórica es de 0,443664). Complete la tabla 6.5.

En la columna "Ajuste" (tabla 6.5) se tienen en cuenta otras consideraciones. Por ejemplo, como se pretende utilizar el juego para alumnos de secundaria, es conveniente que aparezcan todas las letras al menos una vez (a excepción de la letra *uve doble* ('w'), puesto que no se emplea sino en voces de procedencia extranjera). Por ello, en la columna "Ajuste" se pone 1 a muchas letras que por "asignación" no le correspondería ninguna (por ejemplo, a la letra "j"). Esto hace que el número de caras disponible sea entonces menor y, por lo tanto, sea necesario (puesto que ya hemos establecido que el número de dados es 9) reducir el número de asignaciones hechas a otras letras (por ejemplo, la letra "a": de 8 a 7 letras).

De esta forma, queda resuelto el segundo problema: cómo distribuir las 54 caras de los 6 dados entre las 28 letras (puesto que se excluye la *uve doble*). Por lo tanto, queda un único problema: ¿cómo colocar las letras en los dados? Una primera opción tentativa es: ir completando dados con las letras que se tienen. Esto es, 6 *aes* en un dado y la que queda en otro, que se completa con una letra *be*, dos *ces*, una *che* y una *de*. Análogamente, el resto de dados se construyen de la siguiente forma:

El tercer dado: ____.
El cuardo dado: ____.
El quinto dado: ____.
El sexto dado: ____.
El séptimo dado: ____.
El octavo dado: ____.
El noveno dado: ____.

Ahora bien, es preciso encontrar criterios para discernir si esta distribución es o no adecuada. Ciertos criterios pueden hacerse explícitos si se hace la construcción de los dados en las condiciones establecidas, se juegan algunas partidas y se responden preguntas del tipo: ¿es fácil obtener palabras? ¿de qué longitud son éstas?, ¿qué porcentaje de vocales se obtiene?, etc. Sin embargo, no es preciso realizar la experimentación para llegar a ciertas

Letra	f_r	Asociación teórica	Asignación	Ajuste
a	0,151408	8,176032	8	7
b	0,018779	1,014066	1	1
c	0,048122	2,598588	3	2
ch	0,003521	0,190134	1	1
d	0,057512			3
e	0,093897			4
f	0,010563	0,570402	1	1
g	0,015258			1
h	0,005869			1
i	0,091549			4
j	0,008216	0,443664	0	1
k	0	0	0	1
l	0,037559			2
ll	0,003521			1
m	0,030516			2
n	0,061033			2
ñ	0,001174			1
o	0,103286			5
p	0,021127			1
qu	0,001174			1
r	0,085681			3
s	0,042254			2
t	0,055164			2
u	0,028169			1
v	0,021127			1
w	0			0
x	0,001174			1
y	0	0	0	1
z	0,002347			1
Total	1	54		54

Tabla 6.5: Asociación teórica, asignación y ajuste del número de repeticiones de cada una de las letras.

conclusiones. Por ejemplo, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada una de las letras?

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuatro o más vocales?

Ejercicios

1. El estudio de las frecuencias absolutas, relativas y porcentajes ha venido dado a partir de la tabla 6.1. Un estudio similar puede realizarse a partir de la tabla 6.2, que muestra una "simplificación" de las palabras de aquella tabla. Estudie si hay o no concordancia entre las frecuencias relativas de cada una de las letras. En caso de que así sea: ¿qué puede concluir? En caso contrario, ¿le parece adecuado tomar un nuevo listado de 100 palabras obtenidas al azar y hacer un estudio completo del mismo?

   Para finalizar, un problema que ha quedado abierto es la pertinencia de la distribución de las letras en los dados. La tabla 6.6 muestra una distribución de las letras en los dados, amén de alguna variación en el "ajuste" del número de repeticiones de cada una de las letras. Justifique la pertinencia de la distribución hecha y discuta las diferencias de "ajuste", respecto a las que se han realizado.

2. Suponga que los motores de una avión dejan de funcionar en vuelo con probabilidad $(1-p)$ independiente entre motores. Un avión hace un vuelo con éxito si al menos el 50 % de sus motores permanecen operativos. ¿Para qué valores de p es preferible un avión de 4 motores a uno de 2?

3. Tres personas A, B y C lanzan sucesivamente, por orden, un dado. La primera persona que saca un seis gana. ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?

   Indicación: la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón r ($|r|<1$) y primer término a es igual a $\frac{a}{1-r}$, esto es:
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r|<1$$

4. Nos dan dos urnas con monedas trucadas. Las monedas de la urna A obtienen cara con probabilidad p_1 y las monedas de la urna B con probabilidad p_2 (distinta de p_1). Nos dan a elegir dos estrategias:

Letra	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	Total
a	1	—	—	1	—	1	—	1	2	6
b	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
c	—	—	—	1	—	—	—	1	—	2
ch	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
d	—	1	—	—	—	—	1	—	—	2
e	2	1	—	—	—	1	—	—	3	7
f	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
g	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
h	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
i	2	1	—	1	—	—	—	—	—	4
j	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
k	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
l	—	—	1	1	—	—	—	—	—	2
ll	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
m	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
n	—	—	1	—	—	—	1	—	—	2
ñ	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
o	1	—	—	1	—	1	—	—	—	3
p	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
qu	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
r	—	—	1	—	—	—	1	1	—	3
s	—	—	1	1	—	—	—	1	—	3
t	—	—	—	—	—	1	1	—	—	2
u	—	1	—	—	—	1	—	—	—	2
v	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
x	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
y	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1
z	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
Total	6	6	6	6	6	6	6	6	6	54

Tabla 6.6: Construcción del juego *Cazapalabras*: ¿es pertinente la distribución que se muestra?

a) Elegir una urna al azar y tomar dos monedas de ella.

b) Elegir una moneda de cada urna.

¿Qué estrategia es mejor si se quiere obtener 2 caras en sendos lanzamientos?

5. El censo electoral de una comunidad lo constituyen $2n$ electores. Se trata de elegir entre ellos un representante. Hay dos candidatos y se sabe que $(n-1)$ apoyan a uno y $(n+1)$ apoyan al otro. A pesar del interés de la votación y de lo reñido que está el resultado, se calcula que sólo acudirá a votar el $100a\,\%$ del censo. Calcular la probabilidad de que resulte elegido el candidato que ésta en minoría. Aplicarlo con $n = 50$ y $a = 0,8$. ¿Qué reflexión extrae con relación al derecho al voto?

6. Un sultán le dice a Alí Babá: "He aquí dos urnas vacías y dos bolsas con b bolas blancas y n bolas negras, respectivamente. Reparte las bolas en las urnas como juzges oportuno. Luego, yo las haré indistinguibles. Salvarás tu vida extrayendo una bola blanca de la urna que tu decidas". ¿Cómo Alí Babá maximizará su "suerte"?

6.6. Autoevaluación

1. Un amigo te muestra dos dados y te dice que uno de ellos está trucado y que se obtiene con probabilidad 1/2 el número 6. Te deja hacer un máximo de 3 lanzamientos con cada uno de los dados. ¿Cómo procederías para escoger el dado trucado? ¿Cuál es la probabilidad de que hayas acertado?

2. Dos cajas con las siguientes letras:

   [Caja 1] ANA

   [Caja 2] ANA ANA

   Se debe elegir una de las dos cajas y a continuación extraer, al azar, tres letras, una a una sin reeplazo. Si el resultado es ANA entoces se gana un premio. ¿Qué caja elegiría usted?

3. *Construcción de un juego: "Valor exacto".*

[Objetivo] Uno de los objetivos que se pretende en la enseñanza básica de la aritmética es el dominio de las cuatro operaciones elementales: se quiere construir un juego para desarrollar la técnica de las operaciones suma, producto, resta y cociente.

[Material] El juego consta de:

a) *Una máquina*, con la se obtiene aleatoriamente un número de tres cifras, comprendido entre 000 y 999, ambos inclusive.
b) *Fichas con números*, a partir de los cuales por suma, producto, resta y cociente es preciso obtener el número obtenido por la máquina.

[Decisiones] Por lo tanto, es preciso decidir:

a) ¿Cómo construir la máquina? Esto es, ¿cómo obtener números aleatorios comprendidos entre 000 y 999?
b) ¿Cuántas fichas utilizar? Habrá que tener en cuenta dos criterios: uno, que el juego sea "operativo", esto es, pueda llevarse a la práctica fácilmente (el número de fichas no puede ser excesivo); otro, que sea posible obtener los números de tres cifras en la mayoría de los casos (el número de fichas no puede ser demasiado reducido).
c) ¿Qué números colocar en la fichas sabiendo que por medio de operaciones elementales se debe obtener un número de tres cifras?

[Ejemplos] Se obtiene al azar, por un procedimiento determinado, el número 579 y de todas las fichas los concursantes eligen 6 de ellas (3 cada uno, alternativamente) con los siguientes números inscritos:

$$100; \quad 3; \quad 2; \quad 9; \quad 7; \quad 10$$

Entonces un jugador puede hacer la siguiente combinación ganadora:

$$(3+2)\cdot 100 + 7\cdot 10 + 9 = 579$$

Sin embargo, en muchas situaciones, los jugadores no serán capaces de encontrar el número exacto, conformándose con obtener un número "próximo":

$$(7-2)\cdot 100 + 10\cdot 9 - 3 = 587 \approx 579$$

Otro ejemplo: se obtiene con la máquina el número 731 y las fichas elegidas tienen los números:

$$10; \quad 5; \quad 15; \quad 1; \quad 2; \quad 20$$

Una forma de obtener el número exacto es:

$$15 \cdot 10 \cdot 5 - 20 + 1 = 731$$

[Orden] El moderador, debe entonces decir algo parecido a: *el número de tres cifras es el 579; que debe ser obtenido a partir de los números: 100, 3, 2, 9, 15 y 10. Tienen 2 minutos.*

[Reglas] ¿Quién gana el juego? ¿Qué decisiones tomar en caso de empate?

a) Gana quien ha formado el número pedido o quien se haya dado el número más próximo.

b) Los números de las fichas se pueden utilizar una sola vez.

c) En el supuesto de que las dos personas hayan formado el número pedido, gana aquella persona que haya utilizado menos fichas para conseguirlo (las descomposiciones, por lo general, no son únicas).

d) En el supuesto de que ambas personas hayan formado el número utilizando el mismo número de fichas, el ganador se echa a suerte: juegan a *Pares y nones* o *¡a-la-Yan-kem-po!*, por ejemplo.

e) El tiempo para pensar es limitado: a la voz de ¡tiempo!, los dos jugadores deben dejar de inmediato el lapicero sobre la mesa. Si alguno de ellos continúa escribiendo pierde automáticamente la partida. Según la destreza de los jugadores se dejará más o menos tiempo.

Capítulo 7

Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

El presente capítulo centra su atención en la definición de funciones de probabilidad (definición 27, p. 132) para experimentos cuyo espacio muestral E es finito. En primer lugar, se introduce la noción de variable aleatoria; en segundo término, se definen algunas funciones de probabilidad, instrumentos teóricos que serán de gran ayuda para modelizar diversas situaciones reales.

7.1. Variable aleatoria

Los resultados de un experimento aleatorio pueden ser *cualitativos* o *cuantitativos*. Puede ser útil, la cuantificación de resultados cualitativos. Por ejemplo, en un examen objetivo[1]: por cada acierto, el examinado recibe dos puntos, por cada fallo pierde uno. Entonces al acierto se le asocia el número 2, al fallo el -1: la *variable aleatoria* toma los valores 2 y -1.

El concepto de variable aleatoria pone a nuestro alcance un medio para relacionar cualquier resultado con una medida cuantitativa. Por ello, informalmente, se entiende por variable aleatoria un medio de *cuantificación de resultados de un espacio muestral* (y la descripción del experimento aleatorio asociado en función de los valores posibles que ésta toma). Ilustraremos esta vaga idea mediante algunos ejemplos.

[1]Tipo test o de respuesta múltiple (§4.4, p.97).

Ejemplo 3 *Sea el experimento aleatorio: "lanzar dos monedas al aire y observar el resultado". ¿Qué valores puede tomar la variable aleatoria "número de caras obtenidas"?*

Si se denota el suceso "obtener cara con una moneda" por "C" y el suceso "obtener sello" por "X". El espacio muestral E está formado por cuatro duplas:

$$E = \{(C, C); (C, X); (X, C); (X, X)\}$$

Entonces podemos considerar la variable aleatoria "número de caras obtenidas". Dicha variable puede obtener los valores 2, 1 y 0. De esta forma, asociamos al suceso (C, C) el valor 2, al suceso (X, X) el valor 0 y a los sucesos (C, X) y (X, C) el valor 1.

Ejemplo 4 *Sea el experimento aleatorio: "lanzar dos dados al aire y observar el resultado". ¿Qué valores puede tomar la variable aleatoria "suma de los números obtenidos en las caras superiores de los dados"?*

El espacio muestral está formado por 36 puntos muestrales, representados por duplas donde el primer número indica los puntos obtenidos por uno de los dados y el segundo los obtenidos por el otro:

$$E = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); \ldots; (6, 4); (6, 5); (6, 6)\}$$

Podemos asociar (ver capítulo 1) a cada punto muestral el valor de la suma de los dados. De esta forma, tenemos definida una variable aleatoria que toma los valores 2, 3, ... 11 y 12. Por ejemplo, al suceso (1, 1) le asociamos el valor 2; a los sucesos (1, 2) y (2, 1) el valor 3; a los sucesos (1, 3), (3, 1) y (2, 2) el valor 4, ...

Ejemplo 5 *Sea el experimento aleatorio: "lanzar un dardo con los ojos vendados sobre un blanco de tiro de radio r y observar el resultado". ¿Qué valores puede tomar la variable "distancia al centro"?*

Se puede asociar a cada lanzamiento la distancia del impacto al centro de la diana. De esta forma, la variable aleatoria toma un valor comprendido entre 0 y r, esto es, todos los valores comprendidos en el intervalo $[0, r]$ (no se considera la posibilidad de que un lanzamiento no alcance el tablero): 0, si el impacto se produce en la diana; r, si el dardo se clava en el borde del tiro al blanco.

Hay en los tres ejemplos un punto en común: la variable aleatoria nos ha permitido cuantificar los posibles resultados de una prueba, es decir, a cada punto muestral le asociamos un valor numérico (real). Así, se define:

Definición 33 (Variable aleatoria) *Una variable aleatoria X es una función real sobre el espacio muestral E asociado a un experimento aleatorio. Es decir, a cada punto muestral s le asociamos un valor real $X(s)$:*

$$\begin{aligned} X : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow X(s) \end{aligned}$$

Una variable aleatoria es *discreta* cuando el rango o imagen (valores posibles que puede tomar dicha variable) es finito[2]. De esta forma, los dos primeros experimentos han sido descritos mediante una variable aleatoria discreta. Por el contrario, el rango de la variable aleatoria asociada al tercer experimento es continuo: toma todos los valores comprendidos entre 0 y r. En general, diremos que una variable aleatoria es continua cuando su rango o imagen contiene a un intervalo $[a; b]$ de la recta real, $a < b$.

Por otro lado, la variable aleatoria puede servir para construir una función de probabilidad. Este capítulo, se ocupa de las funciones de probabilidad asociadas a una variable aleatoria discreta (finita). Por ejemplo, en el experimento del ejemplo 3 ("lanzar dos monedas al aire y observar el resultado") se conoce la probabilidad de cada suceso elemental (1/4). A partir de este hecho, se puede medir la probabilidad con que la variable aleatoria toma sus distintos valores $X(s)$, es decir, se pretende deducir cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria "número de caras obtenidas" tome los valores 0, 1 y 2. Se denota por $P(X = 0)$ a la probabilidad de "no obtener ninguna cara"; por $P(X = 1)$, a la probabilidad de "obtener una cara"; y por $P(X = 2)$, a la de "obtener dos caras", entonces se tiene:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}; \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}; \quad P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

En el ejemplo 4, al experimento de lanzar dos dados al aire se le ha asociado la variable aleatoria "suma de dos dados". De igual manera, se puede asociar la probabilidad de que ésta tome los valores 2, 3, ... , 11, 12, respectivamente (tabla 7.1).

En general, se puede medir la probabilidad con que una variable aleatoria discreta X toma los distintos valores $X(s)$ (valores asociados a los distintos sucesos s). La variable aleatoria discreta X toma el valor k siempre que en

[2]De forma más precisa: el rango debe ser *contable*, esto es, *finito o numerable*. Un conjunto A es *numerable* si $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) := \aleph_0$, donde $\mathrm{card}(C)$ representa el cardinal del conjunto C, esto es, el número de elementos que éste tiene.

Centraremos el estudio en variables discretas finitas. En el anexo G se hace un breve esbozo del estudio de variables aleatorias discretas numerables.

Resultados	V.a.	P. muestrales	Probabilidad
(1,1)	2	1	1/36
(1,2),(2,1)	3	2	2/36
(1,3), (2,2), (3,1)	4	3	3/36
(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	5	4	4/36
(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	6	5	5/36
(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	7	6	6/36
(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	8	5	5/36
(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	9	4	4/36
(4,6), (5,5), (6,4)	10	3	3/36
(5,6), (6,5)	11	2	2/36
(6,6)	12	1	1/36

Tabla 7.1: Variable aleatoria "suma de dos dados".

el experimento aleatorio se verifica un suceso $s \in E$ tal que $X(s) = k$. Así, la probabilidad de que X tome el valor k será igual a la de que ocurra el suceso:

$$A = \{s \in E \,|\, X(s) = k\}$$

De esta manera, es posible pasar de la definición de probabilidad, introducida en el capítulo 5, basada en una "función de conjuntos" (probabilidad de un suceso) a una "función de puntos" (probabilidad de un valor):

Definición 34 (Función de probabilidad) *Se llama función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X a la función de variable real y con dominio de valores contenido en el intervalo real $[0;1]$ dada por:*

$$P(X = k) = P(A)$$

7.2. Funciones de probabilidad

La toma de datos empíricos permite asociar a cada suceso de un experimento aleatorio una frecuencia relativa, que representa la probabilidad empírica asociada a dichos sucesos. En esta sección, se van a introducir ciertas reglas "arbitrarias" que permiten asociar a los sucesos una probabilidad teórica y modelizar, así, la realidad de manera aproximada.

Antes que todo, precisar que el concepto de función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X (definición 34) es *puntual*: al considerar los valores de una variable aleatoria es posible definir una función matemática que asigne una probabilidad a cada realización k de la dicha variable X. De esta forma, el término más general, *distribución de probabilidad*, se refiere a la colección de valores de la variable aleatoria y a la distribución de probabilidades entre éstos.

7.2.1. Función degenerada en x_0

Supongamos, por ejemplo, una moneda con doble cara: el mismo grabado aparece en el anverso y en el reverso. Si lanzamos la moneda al aire se obtendrá, sin duda, cara. Esto es, la probabilidad de obtener cara es 1 y, la de obtener sello, 0; esto es, si se denomina X a la variable aleatoria "número de caras en un lanzamiento" se tiene: $P(X = 1) = 1$. En general, se define:

Definición 35 (Distribución degenerada en x_0) *Se dice que la colección de valores de una variable aleatoria X están distribuidos de forma degenerada en un punto x_0 si:*

$$P_D(X = k) = \begin{cases} 1 & si\ k = x_0 \\ 0 & si\ k \neq x_0 \end{cases}$$

De esta forma, el suceso $A = \{s \in E \,|\, X(s) = x_0\}$ es seguro: se puede interpretar, por lo tanto, que el experimento asociado es determinista, puesto que la realización del mismo implica la verificación del suceso A.

7.2.2. Función uniforme en n puntos

En la sección 5.2.3, se ha construido una función de probabilidad para un espacio muestral simétrico donde todos los puntos eran equiprobables. La distribución de probabilidad más sencilla que puede construirse en estas condiciones es aquella que asocia a cada punto e_i del espacio muestral E un valor de la variable aleatoria:

$$P(X = x_i) = P(e_i) = \frac{1}{n}$$

Para todo valor x_i $(i = 1, \dots, n)$ que puede tomar la variable aleatoria X.

Ejemplos de esta distribución de probabilidades son el lanzamiento de una moneda o el lanzamiento de un dado no trucados. Las variables aleatorias X e Y, que representan el "número de caras obtenidas en el lanzamiento de una moneda" y el "valor numérico obtenido en el lanzamiento de un dado", pueden tomar, respectivamente, los valores 0 o 1 y 1, 2, 3, 4, 5 o 6, además, se cumple que:

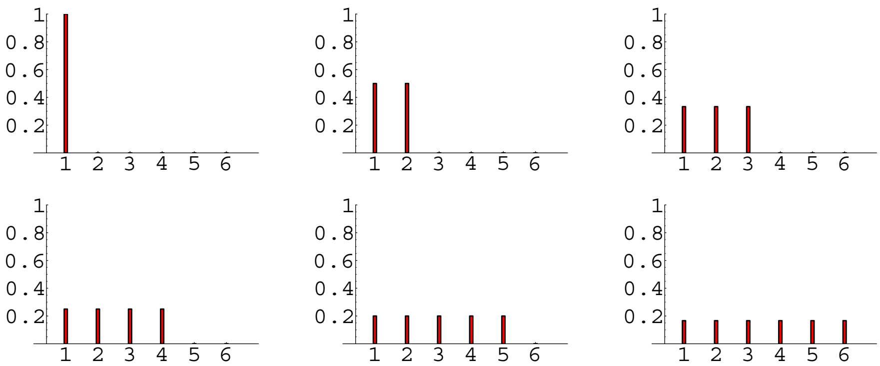
$$P(X = 0) = P(X = 1) = \tfrac{1}{2};$$
$$P(Y = 1) = P(Y = 2) = \ldots = P(Y = 5) = P(Y = 6) = \tfrac{1}{6}$$

En general, se define:

Definición 36 (Distribución uniforme) *La colección de valores de una variable aleatoria X están distribuidos de forma uniforme en n puntos (x_1, ..., x_n) si:*

$$P_U(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k = x_i \quad (i \in \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Las distribuciones de probabilidad pueden ser descritas mediante un gráfico de barras: en el eje horizontal se señalan los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria; en el eje vertical, las probabilidades asociadas a dichos valores. En la figura siguiente, se representa la distribución uniforme con n variando entre 1 y 6. El caso $n = 1$ puede ser interpretado como la distribución degenerada en el valor 1.



7.2.3. Función binomial

Supongamos un experimento en el que se puede verificar o no un suceso. El ejemplo más sencillo de una tal situación es el lanzamiento de una moneda no trucada (salga cara, no salga cara). Otro ejemplo: al lanzar dos dados, puede obtenerse el suceso "la suma de los dados es siete" o el suceso contrario "la suma de los dados no es siete". En general, hablaremos de "éxito" si se verifica un determinado suceso (que interesa resaltar por algún motivo); y de "fracaso", si se verifica el suceso contrario.

Existe un modelo que se ajusta a la situación presentada: en una urna tenemos N bolas, b bolas blancas y $(N-b)$ bolas negras. Al extraer una bola de la urna, ésta puede ser blanca o negra. Si se considera el suceso "extraer una bola blanca" como *éxito*, el suceso contrario, "extraer una bola negra", será entendido como *fracaso*. ¿Qué sucede si se hacen varias extracciones? ¿Cómo se modifica el experimento si éstas se hacen con o sin reposición?

Supongamos, por el momento, que después de cada extracción se repone la bola tomada. Entonces, los ensayos son independientes unos de otros y la probabilidad de éxito en cada una de las extracciones permanece constante e igual a b/N. Denotaremos por p a la probabilidad de éxito, esto es, $p = b/N$. Así, la probabilidad de fracaso es $(1-p)$, es decir, $(N-b)/N$. El problema que se plantea es calcular la probabilidad de que en n extracciones k bolas sean blancas: ¿cuál es la probabilidad de obtener k éxitos de n ensayos? Responder a esta pregunta es equivalente a crear la *distribución binomial*.

Si consideramos que los k primeros ensayos son éxito (E) y los $(n-k)$ siguientes son fracaso (F), entonces la probabilidad de este suceso es:

$$\begin{aligned}
&P(E, \overset{k\ \text{veces}}{\ldots}, E, F, \overset{(n-k)\ \text{veces}}{\ldots}, F) = \\
&= p \overset{k\ \text{veces}}{\ldots} p \cdot (1-p) \overset{(n-k)\ \text{veces}}{\ldots} (1-p) = \\
&= p^k \cdot (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

La probabilidad de obtener k éxitos y los $(n-k)$ fracasos en cualquier otro orden es la misma (es suficiente aplicar la propiedad conmutativa del producto), de esta forma, basta calcular el número de ordenaciones posibles para obtener la probabilidad del suceso "k éxitos de n ensayos". El número de ordenaciones no es otro que las combinaciones de n elementos tomados de k en k[3]. De esta forma, si denotamos por $P(k; n, p)$ a la probabilidad de obtener "k éxitos de n ensayos", donde p representa la probabilidad de obtener en cada ensayo independiente un éxito, tenemos:

$$\begin{aligned}
P(k; n, p) &= C_{n,k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \\
&= \tbinom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \\
&= \tfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

Obviamente, los valores k de la variable aleatoria discreta X varían entre 0 (ningún éxito) y n (todo éxitos). Por lo tanto, los parámetros que determinan la distribución binomial son n y p, es decir, el número de ensayos que se realizan y la probabilidad de éxito en cada uno de ellos. En definitiva, se define:

[3]También puede ser descrito como las permutaciones con repetición de n elementos clasificados en dos grupos de k y $(n-k)$ elementos indistinguibles: $PR_n^{k,(n-k)}$.

Definición 37 (Distribución binomial) *Sea una variable aleatoria discreta X que representa el número de éxitos en n intentos y que, por lo tanto, puede tomar los valores $0, 1, \ldots, n$, y sea p la probabilidad de un éxito independiente; entonces, la colección de valores de una variable aleatoria X están distribuidos de forma binomial si:*

$$P_B(X = k; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por otro lado, es preciso observar que la función binomial es de probabilidad. Para ello, tendrán que cumplirse las tres propiedades fundamentales introducidas por A. N. Kolmogórov en la definción axiomática de probabilidad (defición 27, p. 132):

1. Es claro que: $P_B(X = k; n, p) \geq 0$, para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$.
3. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces A debe representar un número de éxitos y B otro en el mismo número de pruebas, entonces, necesariamente, $P_B(A \cup B) = P_B(A) + P_B(B)$.

La verificación del segundo axioma aclara, por otro lado, porqué la variable aleatoria discreta X recibe el nombre "binomial": los valores de la probabilidad $P_B(k; n, p)$, para k variando entre 0 y n, son los términos de la expansión del binomio de Newton con términos p y $(1-p)$:

$$[p + (1-p)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Por último, es posible representar las función binomial de probabilidad según cuáles sean los parámetros n y p. En la figura 7.1 se pueden ver los diagramas de barras con $n = 6$ y $p = 0,1$, $p = 0,2$, $p = 0,3$, $\ldots$, $p = 0,9$, respectivamente.

Como se puede observar en la figura 7.1, el diagrama de barras con $p = 0,5$ es simétrico, respecto a los valores centrales. Es el caso del lanzamiento de una moneda no trucada: el "éxito" se asimila a la obtención de una cara, el "fracaso" a la obtención de un sello. En los otros casos, el gráfico queda "desequilibrado": hacia la derecha, si la probabilidad de éxito es mayor que 0,5; hacia la izquierda, si la probabilidad de éxito es menor que 0,5.

Este tipo de gráficos puede servir para obtener la probabilidad de tener un número determinado de éxitos en un experimento, ligado a una variable

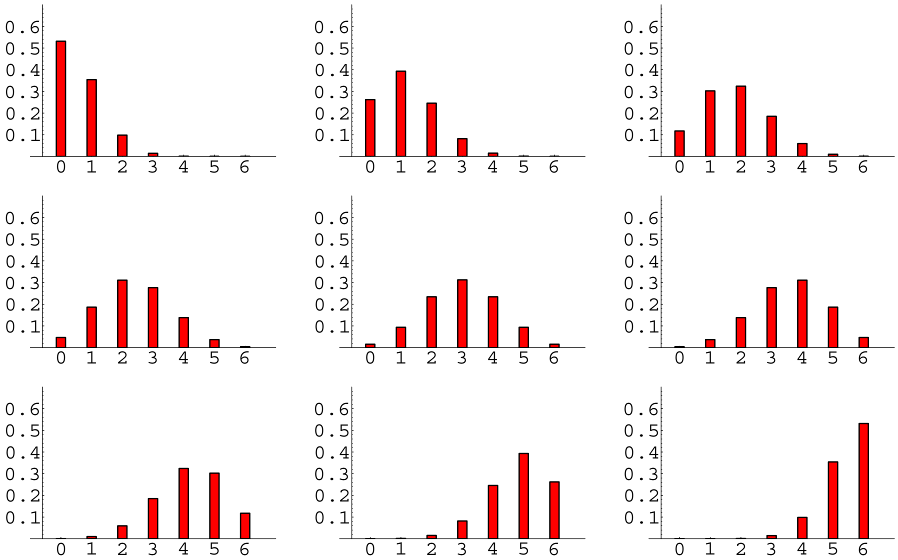


Figura 7.1: Distribución binomial ($n = 6$ y $p = 0,k$; $k \in \{1, \ldots, 9\}$).

aleatoria binomial. Sin embargo, los resultados no son precisos: se comenten errores de centésimas. La solución clásica ha consistido en tabular los valores de la función de probabilidad para un número suficiente amplio de valores de los parámetros p y n (ver anexo H).

En la actualidad, la mayoría de los microordenadores personales admiten programas estadísticos que contienen paquetes *ad hoc*. De esta forma, con sencillas órdenes, se obtiene de forma rápida y fiable los valores de las probabilidades de las distribuciones de probabilidad, tanto discretas como continuas. Las tablas para las funciones discretas de probabilidad del anexo H han sido obtenidas con el *software* `Mathematica`.

Ejemplo 6 *Supongamos el experimento aleatorio "lanzamiento de una moneda". La variable aleatoria asociada X definida por "número de caras". ¿Cuál es la probabilidad de obtener en 6 lanzamientos justamente dos caras? ¿Y al menos dos caras? ¿Y menos de dos caras?*

La probabilidad primera puede ser calculada como el valor de la función binomial de parámentros $n = 6$ (número de veces que se lanza la moneda) y $p = \frac{1}{2}$ (probabilidad de obtener cara en cada lanzamiento independiente), para el valor 2 de la variable aleatoria, esto es:

$$P_B(X=2;6,\frac{1}{2}) = \binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 15\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0,2344$$

Este resultado podía haberse obtenido, de forma aproximada, a partir de las tablas del anexo H y por el diagrama de barras de la figura (p.189).

Por otro lado, la probabilidad de obtener en 6 lanzamientos "al menos" dos caras debe interpretarse correctamente como la probabilidad de obtener 2, 3, 4, 5 o 6 caras de los 6 lanzamientos. Esto es:

$$P_B(k\geq 2;6,\frac{1}{2}) = P_B(2;6,\frac{1}{2})+P_B(3;6,\frac{1}{2})+P_B(4;6,\frac{1}{2})+P_B(5;6,\frac{1}{2})+P_B(6;6,\frac{1}{2})$$

Obtenga, realizando todos los cálculos necesarios, que dicho valor es aproximadamente igual a 0,8906. ¿Obtiene el mismo valor si utiliza la tabla para función binomial del anexo H?

Por último, la probabilidad de obtener menos de 2 caras, puede obtenerse de manera similar observando que:

$$P_B(k<2;6,\frac{1}{2}) =$$

O bien, que los sucesos "al menos 2" y "menos que 2" son contrarios y, por lo tanto,

$$P_B(k<2;6,\frac{1}{2}) = 1-P_B(k\geq 2;6,\frac{1}{2}) =$$

¿Se obtienen los mismos valores? __________. ¿Cómo podría utilizar las tablas para calcular estos valores? ____.

Ejemplo 7 *En la sección 4.2.2 se estudió el caso de la probabilidad de obtener (al menos) un 6 en 4 lanzamientos. Dicho experimento puede ser descrito por la función binomial.*

La probabilidad de obtener "al menos" un seis en 4 tiradas es igual al valor de la función de probabilidad binomial *acumulada*: $P_B(1\leq k\leq 4;4,\frac{1}{6})$. Se llama *acumulada* puesto que agrupa las probabilidades de la función binomial con parámetros $n=4$ y $p=\frac{1}{6}$ para los valores de la variable aleatoria "salir un seis" variando entre 1 y 4:

$$P_B(1\leq k\leq 4;4,\frac{1}{6}) = P_B(1;4,\frac{1}{6})+P_B(2;4,\frac{1}{6})+P_B(3;4,\frac{1}{6})+P_B(4;4,\frac{1}{6})$$

Como en el caso anterior, dicho valor se puede obtener realizando todos los cálculos a partir de la definición de función de probabilidad binomial o utilizando las tablas del anexo H (o, en caso de tener acceso a ello, mediante un programa de ordenador que dé automáticamente dichos valores).

Otra forma de afrontar el problema es tener en cuenta que el suceso "obtener *al menos* un seis en cuatro lanzamientos de un dado" es el suceso contrario de ____________________________________. Por lo tanto, en términos de la función de probabilidad binomial de parámetros $n = 4$ y $p = \frac{5}{6}$ (probabilidad de no obtener seis), se tiene:

$$P_B(1 \leq k \leq 4; 4, \frac{1}{6}) = 1 - P_B(k = 4; 4, \frac{5}{6}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177$$

Función de Bernouilli

Un caso particular de la distribución binomial es la función de Bernouilli, llamada así en honor del matemático Jacques Bernouilli (1654–1705): el número de realizaciones es 1, esto es, el parámetro $n = 1$. Por lo tanto, un único parámetro define la función de probabilidad de Bernouilli: p. Se define:

Definición 38 (Distribución de Bernouilli) *Sea una variable aleatoria discreta X que representa el número de éxitos en un solo intento y que, por lo tanto, puede tomar los valores 0 o 1, y sea p la probabilidad de éxito; entonces, la colección de valores de una variable aleatoria X están distribuidos según Bernouilli si:*

$$P_{BE}(X = k; p) = \begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ 1 - p & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por otro lado, se puede asegurar que la función de Bernouilli es de probabilidad, puesto que la función binomial lo es (como se probó en la anterior sección) y la función de Bernouilli es un caso particular de ésta. La representación de las distintas distribuciones de probabilidad de Bernouilli según el parámetro p se realiza de forma análoga a como se hizo para la binomial; la única diferencia es que la variable aleatoria toma únicamente los valores 0 (fracaso) y 1 (éxito) y, por lo tanto, el gráfico tiene dos únicas columnas.

7.2.4. Función hipergeométrica

En ciertas situaciones reales, las condiciones varían según se analizan las muestras. Por ejemplo: en un estudio de calidad en una fábrica, el modo natural de proceder para estimar el número de productos defectuosos, que tendrán que ser desechados para su salida al mercado, es retirar de la cadena los objetos fallados que se vayan detectando. De esta forma, las condiciones iniciales se modifican, puesto que la probabilidad de encontrar un producto defectuoso disminuye: hay menos objetos defectuosos en la cadena, puesto que los encontrados salen de ésta (no se reponen).

Para describir la distribución binomial, se introdujo el modelo de la urna. Como se dijo, las extracciones sucesivas de bolas que se van realizando pueden ser *con o sin reposición*. El caso de extracciones con reposición es descrito por la distribución binomial. En el supuesto de que no se reponga la bola extraída, el modelo binomial no es adecuado: la probabilidad de éxito en una segunda extracción no es independiente de la primera extracción que se ha realizado.

Dada una urna con N bolas, b blancas y $N-b$ negras, en la primera extracción la probabilidad de éxito es b/N, en la segunda extracción la probabilidad de éxito está condicionada por el resultado en el primer ensayo: si se extrajo una bola blanca, la probabilidad de éxito es $(b-1)/(N-1)$; mientras que si la bola extraída fue negra, la probabilidad de éxito es $b/(N-1)$. Entonces, ¿cuál es la probabilidad de obtener k bolas blancas de n extracciones "sin reemplazo"?

El número de formas en que se pueden extraer n bolas de una urna que contiene N $(n \leq N)$ es igual al número de combianciones de N elementos tomados de n en n: $C_{N,n}$. De igual manera, el número de formas para extraer k $(k \leq b)$ bolas blancas de la urna es $C_{b,k}$ y el número de maneras posibles de extraer $(n-k)$ $[n-k \leq N-b]$ bolas negras es $C_{(N-b),(n-k)}$; por lo tanto, por la regla del producto, el número total de formas en que se puede tener k éxitos es: $C_{b,k} \cdot C_{(N-b),(n-k)}$. Así, si se denota por $P(k; N, n, b)$ a la probabilidad de obtener k bolas blancas en n extracciones (sin reemplazo) de una urna con N bolas de las cuales b son blancas, se tiene:

$$P(k; N, n, b) = \frac{C_{b,k} \cdot C_{(N-b),(n-k)}}{C_{N,n}} = \frac{\binom{b}{k} \cdot \binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Como se puede observar, las definiciones para las funciones de probabilidad de las distribuciones discretas uniforme, binomial y de Bernouilli se han dado en términos de la probabiliadad p de un suceso "favorable". Por uniformidad, es posible expresar la función de probabilidad hipergeométrica también en estos términos. Sean $p = \frac{b}{N}$ y $q = 1-p = \frac{N-b}{N}$, las probabilidades de "éxito" y "fracaso", respectivamente, cuando todavía no se ha extraído ningún elemento; entonces, es fácil observar que la función de probabilidad hipergeométrica puede escribirse en la forma:

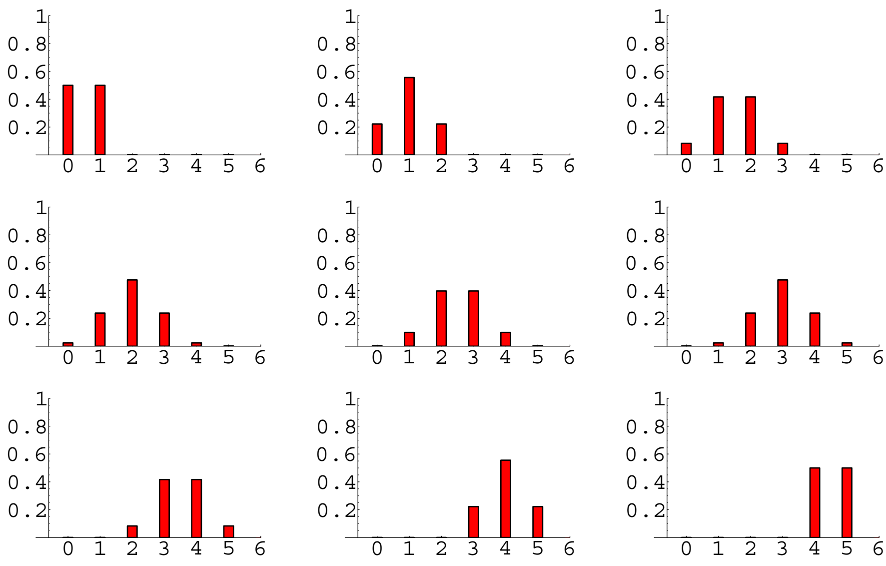
$$P(k; N, n, p) = \frac{C_{Np,k} \cdot C_{Nq,(n-k)}}{C_{N,n}} = \frac{\binom{Np}{k} \cdot \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

En conclusión, se define:

Definición 39 (Distribución hipergeométrica) *Sea N el número total de objetos de una población finita, de manera que b de éstos es de un tipo y $(N - b)$ de otro. Sea X una variable aleatoria discreta que representa el número de elementos del primer tipo en n extracciones sin reposición (ensayos dependientes) y que, por lo tanto, puede tomar los valores 0, 1, ..., n $(n \leq b)$; sea p la probabilidad de tomar en el primer intento un elemento del primer tipo $(p = b/N)$ y sea q la probabilidad de tomar en el primer intento un elemento del segundo tipo $(q = 1 - p = (N - b)/N)$; entonces, la colección de valores de la variable aleatoria X están distribuidos de forma hipergeométrica si:*

$$P_{HG}(X = k; N, n, p) = \begin{cases} \frac{\binom{Np}{k} \cdot \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \text{si } 0 \leq k \leq n;\ k \leq b;\ n - k \leq N - b \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Como se ha establecido para la función binomial, es posible, para distintos parámentros, obtener los diagramas de barras asociados. En la figura siguiente se puede ver la representación para $(N = 10, n = 5, p = b/10)$, con b variando entre 1 y 9, $b \in \mathbb{N}$. Interprete dichos gráficos.



¿Cuál es el valor de la función de probabilidad hipergeométrica con parámetros ($N = 10$, $n = 5$, $p = 5/10$) para los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5 de la variable aleatoria? ____
____.

¿Observa alguna anomalía con el gráfico asociado que se ha representado?
____.

¿Hay otros gráficos con una "anomalía" parecida? __________________
____.

Al igual que para la variable aleatoria binomial, los diagramas de barras se pueden utilizar para calcular la probabilidad de los valores de una variable aleatoria hipergeométrica. Sin embargo, como sucedía en el caso de la distribución binomial, los resultados no son precisos: se comenten errores de centésimas. Como se dijo entonces, la solución clásica ha consistido en tabular los valores de la función de probabilidad para un número suficiente amplio de valores de los parámetros N, n y p. Las tablas para las funciones discretas de probabilidad del anexo H han sido obtenidas con el *software* `Mathematica`.

A continuación presentamos algunos ejemplos que pueden ser resueltos teniendo en cuenta la función de probabilidad hipergeométrica.

Ejemplo 8 *Cinco personas son candidatas a tres premios. Se colocan cinco papeles en una bolsa, tres de ellos marcados. Por turno, las personas toman un papel de la bolsa. Considere la variable aleatoria X "número de papeles premiados extraídos" y determine las probabilidades de que en 1, 2, 3, 4 y 5 extracciones se saque 1, 2 o 3 premios.*

Los parámetros de la función hipergeométrica son $N = 5$, $p = \frac{3}{5}$ y n, que varía entre 1 y 5. La variable aleatoria X describe el número de "éxitos (papeles premiados obtenidos)" y, por lo tanto, varía entre 0 y 3. De esta forma, la distribución hipergeométrica da los valores de la probabilidad del número de éxitos para un número determinado de extracciones. Entonces:

$$\begin{array}{l}
P_{HG}(0;5,1,\frac{3}{5}) = \frac{4}{10};\ P_{HG}(1;5,1,\frac{3}{5}) = \frac{6}{10};\ P_{HG}(2;5,1,\frac{3}{5}) = 0\ ;\ P_{HG}(3;5,1,\frac{3}{5}) = 0 \\
P_{HG}(0;5,2,\frac{3}{5}) = \frac{1}{10};\ P_{HG}(1;5,2,\frac{3}{5}) = \frac{6}{10};\ P_{HG}(2;5,2,\frac{3}{5}) = \frac{3}{10};\ P_{HG}(3;5,2,\frac{3}{5}) = 0 \\
P_{HG}(0;5,3,\frac{3}{5}) = 0\ ;\ P_{HG}(1;5,3,\frac{3}{5}) = \frac{3}{10};\ P_{HG}(2;5,3,\frac{3}{5}) = \frac{6}{10};\ P_{HG}(3;5,3,\frac{3}{5}) = \frac{1}{10} \\
P_{HG}(0;5,4,\frac{3}{5}) = 0\ ;\ P_{HG}(1;5,4,\frac{3}{5}) = 0\ ;\ P_{HG}(2;5,4,\frac{3}{5}) = \frac{6}{10};\ P_{HG}(3;5,4,\frac{3}{5}) = \frac{4}{10} \\
P_{HG}(0;5,5,\frac{3}{5}) = 0\ ;\ P_{HG}(1;5,5,\frac{3}{5}) = 0\ ;\ P_{HG}(2;5,5,\frac{3}{5}) = 0\ ;\ P_{HG}(3;5,5,\frac{3}{5}) = 1
\end{array}$$

Los valores 0 para la probabilidad señalan situaciones imposibles: por la definición 39, se sabe que los parámetros de la distribución hipergeométrica tienen ciertas restricciones (*en cualquier otro caso*, la probabilidad es cero).

Por ejemplo, en las condiciones del problema, la probabilidad de que no se haya sacado ningún premio si se han extraído tres papeles es cero.

Por último, demuestre que el puesto de extracción es irrelevante y que, por lo tanto, no resulta ventajoso tomar el papel en un orden determinado. Con otras palabras, la probabilidad de ganar un premio es independiente del orden establecido para la extracción del papel.

Ejemplo 9 *Un fabricante de pantalones, para mantener la competitividad, requiere de nueva maquinaria. Una industria le ofrece a buen precio 50 máquinas nuevas. ¿Qué estrategia puede seguir el comerciante para aceptar o rechazar el negocio?*

Una posibilidad es la siguiente: tomar al azar un lote de 10 de las máquinas ofertadas y comprobar su funcionamiento. Si todas funcionan correctamente, ¿hay razón suficiente para cerrar el trato? La pregunta debe comprenderse en términos de la distribución hipergeométrica: supongamos que hay 4 con algún fallo grave, ¿qué probabilidad hay de que tomadas al azar 10 máquinas de 50 todas funcionen correctamente? Sea X la variable aleatoria número de fallos, entonces:

$$P_{HG}(X = 0; 50, 10, 4) = \frac{\binom{4}{0}\binom{46}{10}}{\binom{50}{10}} \approx 0,39683$$

De esta forma, la probabilidad de que el lote se acepte si hay cuatro máquinas defectuosas no es muy grande. Con otras palabras, la probabilidad de que funcionen correctamente las 10 máquinas si en el lote de 50 hay 4 defectuosas no es alta. En conclusión, si las 10 máquinas funcionan correctamente se puede aceptar que casi todas las máquinas van a tener un comportamiento correcto. De hecho, si únicamente una de las máquinas tiene alguna falla de funcionamiento, la probabilidad de que éste sea detectado es pequeña:

$$P_{HG}(X = 0; 50, 10, 1) = \frac{\binom{1}{0}\binom{49}{10}}{\binom{50}{10}} \approx 0,8$$

Ejemplo 10 *El gerente de la misma fábrica de pantalones decide hacer un seguimiento a la producción que se obtiene con la nueva maquinaria. Por ello, consulta al supervisor de planta qué número de pantalones tienen algún despefecto: "tres de cada millar". El gerente decide hacer una inspección de rutina: toma 25 pantalones al azar y obtiene 1 pantalón defectuoso. ¿Hay razones suficientes para pensar que la información dada por el supervisor es incorrecta?*

En términos de la distribución hipergeométrica, es preciso calcular:

$$P_{HG}(X=1;1000,25,\frac{3}{1000})=\frac{\binom{3}{1}\binom{997}{24}}{\binom{1000}{25}}\approx 0,0714$$

Además, la probabilidad de que se tenga ningún pantalón defectuoso es muy grande:

$$P_{HG}(X=0;1000,25,\frac{3}{1000})=\frac{\binom{3}{0}\binom{997}{25}}{\binom{1000}{25}}\approx 0,9268$$

De esta forma, lo esperado hubiera sido no encontrar ningún pantalón en mal estado. Entonces, hay serios indicios para suponer que el conocimiento de la producción por parte del supervisor de planta es incorrecto o bien ha surgido un imprevisto de última hora. Obsérvese que si, en lugar de 3 pantalones de cada mil, fueran 10, que tampoco es una cifra excesiva, la probabilidad de tomar un pantalón defectuoso es del orden del 20 %. En efecto:

$$P_{HG}(X=1;1000,25,\frac{10}{1000})=$$

De esta forma, el gerente tiene motivos fundados para sospechar que algún problema no localizado se está produciendo y, por lo tanto, ordenará al supervisior que haga un estudio profundo para detectar la posible falla en la cadena.

Por otro lado, en las condiciones iniciales del problema, la probabilidad de que el primer artículo seleccionado sea defectuoso es igual a $p=\frac{3}{1000}=0,003$; de esta forma, la probabilidad de que el artículo segundo sea también defectuoso es igual a: $\frac{2}{999}=0,\overline{002}$. Es posible aceptar que las condiciones "apenas si cambian": si el cociente n/N es muy pequeño, la función de probabilidad hipergeométrica puede ser aproximada por la binomial, esto es, se admite que las pruebas son independientes unas de las otras, manteniéndose constante la probabilidad p. En este caso, procederíamos de la siguiente forma:

$$P_{HG}(1;1000,25,\frac{5}{1000})\approx P_B(1;25,\frac{5}{1000})=\binom{25}{1}\cdot 0,005\cdot(0,995)^{24}\approx 0,0698$$

El motivo de la aproximación por la binomial se cifra por la comodidad que ello conlleva. En el anexo F.2 se da una justificación formal del uso de la función binomial en lugar de la hipergeométrica para poblaciones cuyo cociente n/N es pequeño (del orden de 0,01 o menor, por ejemplo). La tabla 7.2 muestra cómo la función hipergeométrica se aproxima más y más a la binomial conforme el cociente n/N se hace más pequeño.

X	$P_{HG}(X = k; 1000, 100, \frac{5}{1000})$	$P_B(X = k; 100, \frac{5}{1000})$	n/N
0	0,589832	0,605770	0,1
1	0,329147	0,304407	0,1
2	0,072655	0,075719	0,1
3	0,007929	0,012430	0,1
4	0,000428	0,001515	0,1
5	0,000009	0,000146	0,1
X	$P_{HG}(X = k; 1000, 50, \frac{5}{1000})$	$P_B(X = k; 50, \frac{5}{1000})$	n/N
0	0,773373	0,778313	0,05
1	0,204380	0,195556	0,05
2	0,021150	0,024076	0,05
3	0,001071	0,001936	0,05
4	0,000027	0,000114	0,05
5	0,000000	0,000005	0,05
X	$P_{HG}(X = k; 1000, 10, \frac{5}{1000})$	$P_B(X = k; 10, \frac{5}{1000})$	n/N
0	0,950894	0,951110	0,01
1	0,048220	0,047795	0,01
2	0,000879	0,001081	0,01
3	0,000007	0,000014	0,01
4	0,000000	0,000000	0,01
5	0,000000	0,000000	0,01
X	$P_{HG}(X = k; 1000, 5, \frac{5}{1000})$	$P_B(X = k; 5, \frac{5}{1000})$	n/N
0	0,975200	0,975249	0,005
1	0,024601	0,024504	0,005
2	0,000198	0,000246	0,005
3	0,000000	0,000001	0,005
4	0,000000	0,000000	0,005
5	0,000000	0,000000	0,005

Tabla 7.2: Aproximación de la distribución hipergeométrica por la binomial.

7.2.5. Función binomial negativa

En las condiciones de la distribución binomial, es decir, la probabilidad de tener un éxito en un ensayo independiente es constante (p), puede interesar conocer cuántas veces se debe reproducir un experimento para conseguir un número determinado de éxitos, esto es: ¿cuántos ensayos deben realizarse para conseguir k éxitos? Ahora, la variable aleatoria no va ser el número de éxitos que se han conseguido, sino el número de ensayos que se han realizado (para conseguir un número predeterminado de éxitos).

Como en los casos anteriores, será necesario, en primer lugar, calcular la probabilidad de conseguir k éxitos. Obviamente, la última extracción es éxito, puesto que en caso contrario, continuaríamos realizando nuevos ensayos hasta completar el k-ésimo éxito. De esta forma, interesa saber cómo se obtuvieron los $k-1$ éxitos en los $n-1$ primeros ensayos. El número de formas distintas en que pueden ser observados $k-1$ éxitos de $n-1$ ensayos ($k \leq n$) es igual al número de combinaciones de $n-1$ elementos tomados de $k-1$ en $k-1$, esto es, $C_{(n-1),(k-1)}$. Luego, si se denota por $P(n;k,p)$ a la probabilidad de obtener k éxitos en n ensayos, siendo el último éxito, se tiene:

$$\begin{aligned} P(X=n;k,p) &= C_{(n-1),(k-1)}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \quad (n=k,k+1,\ldots) \end{aligned}$$

Ejemplo 11 *El problema del caballero de Méré: ¿cuántas veces debe ser lanzado un dado para que sea ventajoso apostar porque se obtendrá al menos un seis en el lanzamiento de un dado?*

La respuesta puede ser formulada en términos de la función binomial negativa: ¿cuál es la probabilidad de obtener un éxito ($k=1$) en $n = 1,2,3,4,\ldots$ intentos sabiendo que todas las pruebas son independientes y que la probabilidad de éxtito en cada una de ellas es de $1/6$? De esta forma, es preciso calcular la distribución de la función de probabilidad binominal negativa con parámetros $n=1$ y $p=1/6$:

$$\begin{aligned} &P(1;1,\tfrac{1}{6}) = \tbinom{0}{0}\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)^{1-1} = \tfrac{1}{6} \\ &P(2;1,\tfrac{1}{6}) = \tbinom{1}{0}\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)^{2-1} = \tfrac{5}{36} \Rightarrow P(X\leq 2;1,\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{6}+\tfrac{5}{36} \approx 0,3056 \\ &P(3;1,\tfrac{1}{6}) = \tbinom{2}{0}\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)^{3-1} = \tfrac{25}{216} \Rightarrow P(X\leq 3;1,\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{6}+\tfrac{5}{36}+\tfrac{25}{216} \approx 0,4213 \\ &P(4;1,\tfrac{1}{6}) = \tbinom{3}{0}\left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{5}{6}\right)^{4-1} = \tfrac{125}{1296} \Rightarrow P(X\leq 4;1,\tfrac{1}{6}) = \tfrac{1}{6}+\tfrac{5}{36}+\tfrac{25}{216}+\tfrac{125}{1296} \approx 0,5177 \end{aligned}$$

En la sección 4.2.2, se describieron algunos de los problemas que el caballero de Méré planteó a su amigo B. Pascal y que originaron un correspondecia fructífera entre este matemático y P. Fermat. Uno de esos problemas era el que se acaba de describir y que fue resuelto correctamente, tanto por B. Pascal como por P. Fermat. Por ello, a la función de probabilidad binomial negativa que se acaba de deducir se le conoce también con el nombre de función de Pascal–Fermat. Se define:

Definición 40 (Distribución de Pascal–Fermat) *Sea n el número total de ensayos necesarios para conseguir justamente k éxitos en un experimento binomial, en el cual la probabilidad de cada éxito independiente es p; entonces, la colección de valores de la variable aleatoria X "número total de ensayos" están distribuidos según Pascal–Fermat si:*

$$P_{PF}(X = n; k, p) = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } n = k, k+1, \ldots \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La función binomial negativa, tal y como se conoce normalmente, se obtiene observando que el número n de realizaciones puede expresarse como suma de los éxitos y los fracasos: $n = s + k$, donde s es el valor de una variable aleatoria que representa el número de fracasos hasta que se observa, de manera exacta, el número k de éxitos. De esta forma, se define:

Definición 41 (Distribución binomial negativa) *Sea $n = s + k$ el número total de ensayos necesarios para conseguir justamente k éxitos en un experimento binomial, en el cual la probabilidad de cada éxito independiente es p; entonces, la colección de valores de la variable aleatoria X "número total de fallos" están distribuidos de forma binomial negativa si:*

$$P_{BN}(X = s; k, p) = \begin{cases} \binom{k+s-1}{k-1} p^k (1-p)^{s} & \text{si } s = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Al igual que en las anteriores distribuciones, es posible representar la distribución binomial negativa para diferentes valores de los parámetros mediantes diagramas de barras. En la figura 7.2 se pueden observar 6 gráficos de barras de la distribución binomial negativa con parámetros $p = 0,2$, $p = 0,5$ y $p = 0,8$ (por columnas) y $n = 1$ y $n = 3$ (por filas). Observe los distintas escalas que se han utilizado, para visualizar mejor la representación de la distribución.

Función geométrica

La función de probabilidad geométrica es un caso particular de la distribución binomial negativa: número de fallos que ocurren antes de que se

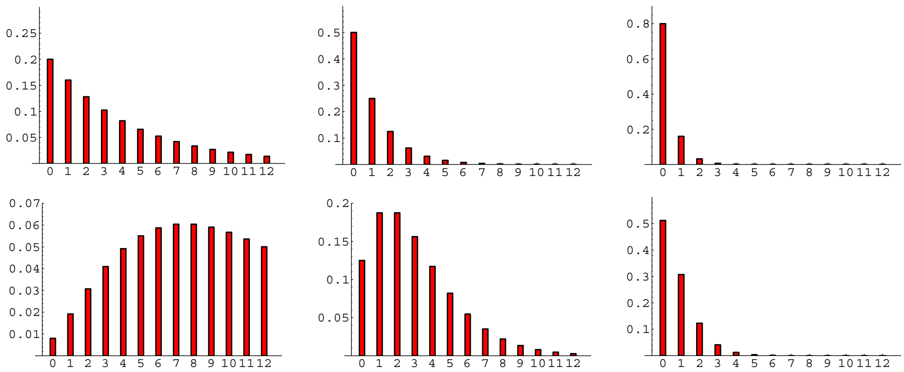


Figura 7.2: Distribución binomial negativa con parámetros: por columnas, $p = 0,2$, $p = 0,5$ y $p = 0,8$; por filas, $n = 1$ y $n = 3$.

presente el primer éxito ($k = 1$). De esta forma, la fila primera de la figura 7.2, representa diferentes distribuciones geométricas para el parámetro p. En general, se define:

Definición 42 (Distribución geométrica) *Sea $n = s+1$ el número total de ensayos necesarios para conseguir justamente 1 éxito en un experimento binomial, en el cual la probabilidad de cada éxito independiente es p; entonces, la colección de valores de la variable aleatoria X "número total de fallos" están distribuidos de forma geométrica si:*

$$P_G(X = s; p) = \begin{cases} p(1-p)^s & \textit{si } s = 0, 1, \ldots \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

*Justificación del nombre de la función binomial negativa

La definición 40 justifica su nombre debido a los dos primeros matemáticos que la utilizaron implícitamente. Sin embargo, la definición 41 de la función binomial negativa no permite justificar el nombre que ésta posee. En esta sección, se pretende justificar este hecho.

En primer lugar, se conoce la definición para un número combintario cuyos términos son enteros no negativos. De manera similar, se puede definir un número combinatorio para números enteros negativos; si $n > 0$:

$$\binom{-n}{r} := \frac{(-n)(-n-1)\cdot\ldots\cdot(-n-r+1)}{r!}$$

De esta forma, se tiene que ($q = 1 - p$):

$$\begin{aligned}\tbinom{k+s-1}{k-1}p^k q^s &= \tfrac{(k+s-1)!}{(k+s-1-k+1)!\cdot(k-1)!}p^k q^s = \\ &= \tfrac{(k+s-1)(k+1-2)\cdot\ldots\cdot(k+1)\cdot k\cdot(k-1)!}{s!(k-1)!}p^k q^s = \\ &= \tfrac{(k+s-1)(k+1-2)\cdot\ldots\cdot(k+1)\cdot k}{s!}p^k q^s = \\ &= \tfrac{(-k)(-k-1)\cdot\ldots\cdot(-k-s+1)}{s!}p^k(-1)^s q^s = \\ &= \tfrac{(-k)(-k-1)\cdot\ldots\cdot(-k-s+1)}{s!}p^k(-q)^s = \tbinom{-k}{s}p^k(-q)^s\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de probabilidad puede ser dada a partir de los coeficientes binomiales negativos $\binom{-k}{s}$, justificándose, por consiguiente, plenamente el nombre dado. Por último, se define:

Definición 43 (Distribución binomial negativa) *Sea $n = s + k$ el número total de ensayos necesarios para conseguir justamente k éxitos en un experimento binomial, en el cual la probabilidad de cada éxito independiente es p; entonces, la colección de valores de la variable aleatoria X "número total de fallos" están distribuidos de forma binomial negativa si:*

$$P(X = s; k, p) = \begin{cases} \binom{-k}{s}p^k(-p+1)^s & si\ s = 0, 1, \ldots \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

7.2.6. Función de Poisson

Supongamos que se desea contruir un aeropuerto. El número de aviones que se espera llegarán a él resulta determinante. Supongamos que se tiene un conjunto suficiente de datos sobre cuántos aviones llegan al aeropuerto internacional "Jorge Chávez" (Lima). Con estos datos, el gobierno decide emprender un proyecto para la construcción de un nuevo aeropuerto, que pueda recibir el volumen total de aviones que en la actualidad llegan (y los que en un futuro se espera que puedan llegar).

Con la experiencia acumulada, es posible calcular la probabilidad de que un avión llegue durante una hora cualquiera; por ejemplo, si en un periodo de 500 horas llegan 2000 aviones, el número promedio de aviones por hora que llegan es 4. Una medida que puede adoptarse es construir cuatro pistas de aterrizaje, perfectamente equipadas, atendiendo al criterio de que si llegan 4 aviones a la vez puedan aterrizar todos. Sin embargo, podría suceder que: o bien los aviones lleguen uniformente distribuidos (cada cuarto de hora) y, por lo tanto, una sola pista podría ser suficiente para recibir a los aviones (eventualmente, una pista de seguridad adicional); o bien haya horas de un flujo masivo de aviones (en la mañana, por ejemplo) y, por lo tanto, 4 pistas sean insuficientes para recibir a los aviones en las horas punta.

Por lo tanto, es preciso encontrar un modelo que nos permita tomar una decisión adaptada a las necesidades reales. Con otras palabras, será necesario calcular la probabilidad de que lleguen k aviones durante una hora ($k = 1, 2, 3, \ldots$).

La distribución de Poisson (1781–1840) permite describir una variable aleatoria que representa el número de eventos independientes que ocurren a una velocidad presumida constante. Un ejemplo es el número de aviones que llega a un aeropuerto, la reproducción de bacterias en cultivos, el número de solicitantes de entradas para un partido de fútbol el día oficial de venta, etc. La deducción de una fórmula para la función de probabilidad no es tan secilla como en los casos precedentes y, de momento, obviaremos su demostración (ver anexo F.4). Se define:

Definición 44 (Distribución de Poisson) *Sea $\lambda > 0$ el número promedio de veces que se verifica un suceso aleatorio por unidad de tiempo; entonces la colección de valores de la variable aleatoria X que representa el número de eventos independientes que ocurren a velocidad constante en el tiempo o el espacio están distribuidos según Poisson si:*

$$P_P(X = k; \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} & \textit{si } k = 0, 1, \ldots \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

La distribución de Poisson puede ser representada por medio de diagramas de barras. La figura 7.3 muestra los diagramas de barras para la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 0,1$; 0,5; 1; 2; 4 y 6, respectivamente.

Como se puede observar en la figura 7.3, la distribución de probabiladades de la variable aleatoria discreta de Poisson se centra en torno al valor λ. Por ejemplo, en el caso en el que el número promedio de ocurrencias es dos ($\lambda = 2$), se tiene que la probabilidad mayor es que ocurra 1 o 2 eventos; 3 o ninguno, en este orden; para luego ir bajando la probabilidad de que la variable aleatoria tome los valores 4, 5, 6, etc.; de tal forma que, la probabilidad de que se tengan 9 o más ocurrencias es despreciable, esto es, muy próxima a cero. Interpretaciones similares puede hacerse de los otros gráficos.

Ejemplo 12 *La lectura del diagrama de barras para la distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 4$ puede servirnos para tomar una decisión en torno a la construcción del nuevo aeropuerto internacional de Lima.*

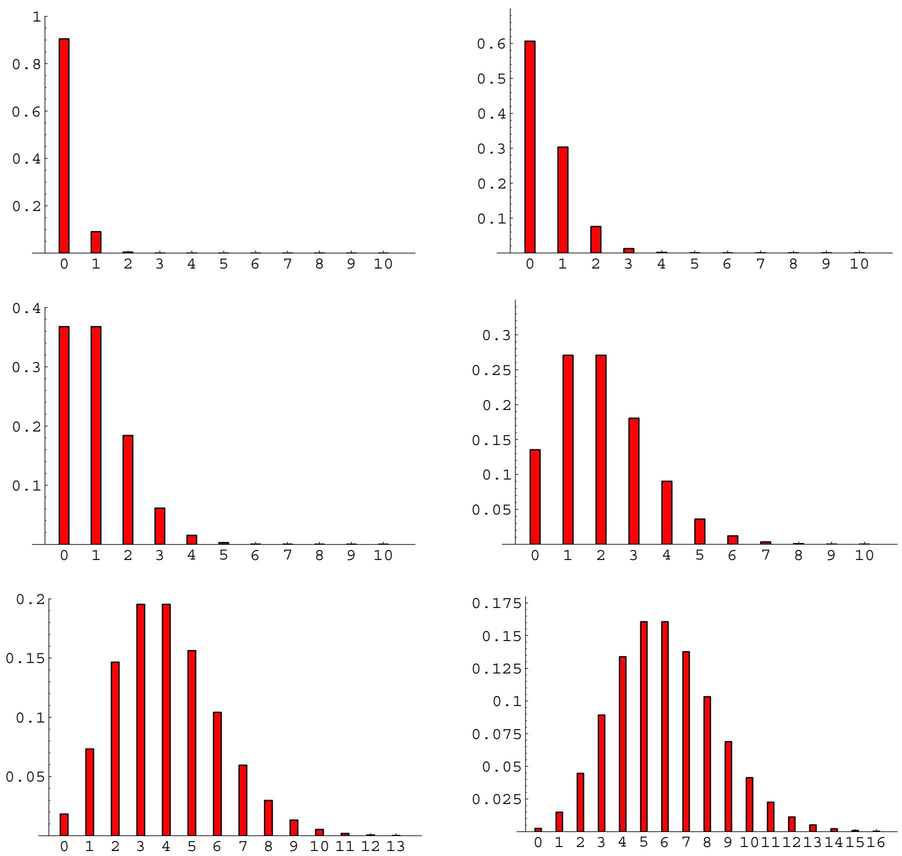


Figura 7.3: Distribución de Poisson ($\lambda = 0,1$; 0,5; 1; 2; 4 y 6).

En primer lugar, la probabilidad de que lleguen en una hora 7 o más aviones es pequeña (aproximadamente, del orden de 0,15), por lo tanto, se trabajará sobre la base de 6 aviones por hora máximo.

La primera medida que se debe tomar es dar a cada aerolínea un horario, de tal forma que las llegadas y salidas de los aviones queden distribuidas homogéneamente en el tiempo. Como se prevé que en cada hora hay un máximo de 6 aviones, se establece que cada uno dispone de 10 minutos para maniobrar (aterrizar o despegar). Se estima que este tiempo es suficiente si no se presenta ningún inconveniente. La decisión adecuada, por lo tanto, a la vista de los datos es la contrucción de una pista adicional que permita el funcionamiento del aeropuerto en circustancias extraordinarias[4].

Por otro lado, los gráficos presentados (figura 7.3) no permiten hacer una lectura precisa de las distribución de probabilidad. De hecho, las observaciones sobre la probabilidad de que lleguen 7 o más aviones se han hecho de manera aproximada. Como en los casos anteriores, la forma exacta de obtener los valores es utilizando la función de probabilidad definida. Por ejemplo, el valor de la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual a 6 es:

$$\begin{aligned} P_P(X \leq 6; 4) &= \tfrac{e^{-4} \cdot 4^0}{0!} + \tfrac{e^{-4} \cdot 4^1}{1!} + \tfrac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!} + \tfrac{e^{-4} \cdot 4^3}{3!} + \tfrac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} + \tfrac{e^{-4} \cdot 4^5}{5!} + \tfrac{e^{-4} \cdot 4^6}{6!} \approx \\ &\approx 0,018316 + 0,073263 + 0,146525 + 0,195367 + \\ &+ 0,195367 + 0,156293 + 0,104196 = 0,889326 \end{aligned}$$

Ejemplo 13 *El número X de organismos de un determinado tipo (A) en una célula sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 5$, mientras que el número de Y de otro tipo (B) sigue una distribución también de Poisson, esta vez de parámetro $\lambda = 0,3$. Si se considera sana un célula cuando contiene algún organismo de tipo A, pero ninguno de tipo B:*

1. *¿Cuál es la probabilidad de que una célula esté sana?*
2. *¿Cuál es la probabilidad de que al tomar 100 células al azar el 80 % estén sanas?*
3. *Se sabe que un tipo específico de células es capaz de sobrevivir si tiene mayor número de organismos del tipo A que del tipo B (un organismo*

[4]En principio, sería admisible la construcción de una pista principal y una secundaria. La principal, más ancha y larga, con un afirmado muy estable y con un mantenimiento constante y preciso; la secundaria, de características más restringidas, utilizada en situaciones de necesidad, construida con un costo menor.

del tipo A neutraliza a uno B, quedando el resto libres para realizar las funciones necesarias para la superviviencia de este tipo de células).

Para responder a la primera pregunta es preciso calcular la probabilidad de que, simultáneamente, la variable aleatoria X tome un valor igual o superior a uno (1) y de que la variable aleatoria Y tome un valor igual a cero (0). Se puede admitir que la aparición de uno tipo de organismo en una célula es independiente de si esta tiene o no otro tipo de organismo: en particular, la aparición de organismos A y B en una célula cualquiera son dos hechos independientes. Entonces:

$$\begin{aligned} P_P((X \geq 1) \cap (Y = 0)) =& P_P((X = 1) \cap (Y = 0)) + P_P((X = 2) \cap (Y = 0)) + \ldots = \\ =& P_P(X = 1) \cdot P_P(Y = 0) + P_P(X = 2) \cdot P_P(Y = 0) + \ldots = \\ =& [P_P(X = 1) + P_P(X = 2) + \ldots] \cdot P_P(Y = 0) = \\ =& [1 - P_P(X = 0)] \cdot P_P(Y = 0) = \\ =& [1 - 0,006738] \cdot 0,740818 = 0,735826 \end{aligned}$$

De esta forma, la probabilidad de que una célula esté sana es de igual a $0,735826$.

Para contestar la segunda pregunta es posible suponer que el estado de una célula no influye en el de las células vecinas o, con otras palabras, que el número de organismos en una célula sea independiente del de las células restantes: se acepta que el número de células sanas puede ser descrito por una variable aleatoria binomial de constante $p = 0,735826$. Por lo tanto, la probabiliadad de encontrar al menos un 80 % de células sanas es igual a:

$$\begin{aligned} P_B(Z \geq 80; 100, p) =& P_B(Z = 80; 100, p) + P_B(Z = 81; 100, p) + \\ &+ P_B(Z = 82; 100, p) + P_B(Z = 83; 100, p) \ldots \approx \\ &\approx 0,032282 + 0,022202 + 0,014329 + 0,008656 + 0,004879 + \\ &+ 0,002558 + 0,001243 + 0,000557 + 0,000229 + \ldots \approx 0,054781 \end{aligned}$$

De esta forma, es bastante improbable que se encuentre un 80 % de celulas sanas en la muestra. Si esto ha sucedido es preciso estudiar detenidamente el problema: suponiendo que el número de organismos de cada tipo siguen las distribuciones dadas[5], es preciso analizar los supuestos que han regido nuestra investigación. Los supuestos "fuertes" han sido: la independencia del número de organismos de uno y otro tipo en una célula y que el número de organismos en una célula sea independiente del de las células restantes. Uno

[5] Es posible haber determinado éstas en periodos largos de tiempo y es lógico esperar que no haya cambios sustanciales en el número de microorganismos que contiene una célula bajo ciertas condiciones establecidas.

o los dos supuestos pueden ser falsos y, por lo tanto, la conclusión obtenida también. Por ejemplo, se puede pensar en un criterio de "depuración de los organismos malignos": una célula con gran cantidad de organismos de tipo A conserva su equilibrio vital destruyendo organismos de tipo B. La pregunta tercera intenta estudiar este supuesto: por medio de los organismos de tipo A las células neutralizan a los organismos malignos tipo B.

La probabilidad de que la variable aleatoria X (número de organismos de tipo A) sea mayor que la variable aleatoria Y (número de organismos de tipo B) se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) =& \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} P((X \geq k+1) \cap (Y = k)) = \\ =& P((X \geq 1) \cap (Y = 0)) + P((X \geq 2) \cap (Y = 1)) + \ldots \end{aligned}$$

Por la pregunta primera, se sabe que $P((X \geq 1) \cap (Y = 0)) \approx 0,735826$ y de manera similar es posible calcular las probabilidades:

$$\begin{aligned} P((X \geq 2) \cap (Y = 1)) &= P_P(X \geq 2) \cdot P_P(Y = 1) \approx 0,959572 \cdot 0,222245 \approx 0,213261 \\ P((X \geq 3) \cap (Y = 2)) &= P_P(X \geq 3) \cdot P_P(Y = 2) \approx 0,875348 \cdot 0,033337 \approx 0,029181 \\ P((X \geq 4) \cap (Y = 3)) &= P_P(X \geq 4) \cdot P_P(Y = 3) \approx 0,734974 \cdot 0,003337 \approx 0,002450 \\ P((X \geq 5) \cap (Y = 4)) &= P_P(X \geq 5) \cdot P_P(Y = 4) \approx 0,559507 \cdot 0,000250 \approx 0,000140 \\ P((X \geq 6) \cap (Y = 5)) &= P_P(X \geq 6) \cdot P_P(Y = 5) \approx 0,384039 \cdot 0,000015 \approx 0,000006 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Así, para valores de la variable aleatoria Y mayores que 5, el producto es despreciable (muy próximo a cero) y, por lo tanto, se admite que:

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) =& \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} P((X \geq k+1) \cap (Y = k)) \approx \\ \approx& \textstyle\sum_{k=0}^{5} P((X \geq k+1) \cap (Y = k)) \approx 0,9809 \end{aligned}$$

De esta forma, se espera que aproximadamente el 98 % de las células están sanas (el número de organismos de tipo A es mayor que el de tipo B): ¿en estas condiciones es factible que el 80 % de células estén sanas? En esta ocasión, $p = 0,9809$ y se comprueba que:

$$P_B(Z \geq 0; 100, p) \approx P_B(Z \geq 81; 100, p) \approx \ldots \approx P_B(Z \geq 88; 100, p) \approx 0$$

Esto es, es muy poco probable que menos del 88 % de las células estén sanas. De hecho, se observa que:

$$P_B(Z \geq 88; 100, p) = 1 - P_B(Z < 88; 100, p) \approx 0,999996$$

Concluyendo, por lo tanto, que es *casi seguro* encontrar una proporción superior al 88 % de células sanas.

Por otro lado, ¿cuál es el suceso más probable? ______________.

El problema ahora reside en el hecho de que se ha encontrado un 20 % de células muertas o infectadas. Criterios de tiempo de vida para las células o de posibilidad de infección según la participación de otros agentes (cambios bruscos de temperatura, presión, otro tipo de microorgantismos, etc.) podrían explicar la diferencia entre los valores observados y los téoricos esperados.

Por último, a modo de resumen, en la tabla siguiente se muestran las distribuciones discretas de probabilidad introducidas, con sus funciones de probabilidad asociadas y los parámetros que en ellas intervienen (con los valores posibles que pueden tomar éstos).

Distribución	Parámetros	Función de probabilidad
Degenerada en x_0	—	$P_D(X = x_0) = 1$
Unif. en n ptos.	n	$\begin{cases} P_U(X = x_i) = \frac{1}{n} \\ (1 \leq i \leq n) \end{cases}$
Binomial	$n = 1, 2, \ldots$ $0 \leq p \leq 1$	$\begin{cases} P_B(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \\ (k = 0, \ldots, n) \end{cases}$
Bernouilli	$0 \leq p \leq 1$	$\begin{cases} P_{BE}(X = k) = p^k \cdot q^{1-k} \\ (k = 0, 1) \end{cases}$
Hipergeométrica	$N = 1, 2, \ldots$ $n = 0, 2, \ldots, N$ $p = 0, \frac{1}{N}, \ldots, 1$	$\begin{cases} P_{HG}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ (k = 0, 1, \ldots) \end{cases}$
Binomial negativa	$k = 1, 2, \ldots$ $0 \leq p \leq 1$	$\begin{cases} P_{BN}(X = s) = \binom{k+s-1}{k-1} q^s \cdot p^k \\ (s = 0, 1, \ldots) \end{cases}$
Geométrica	$0 \leq p \leq 1$	$\begin{cases} P_G(X = s) = q^{s-1} p \\ (s = 1, 2, \ldots) \end{cases}$
Poisson	$\lambda > 0$	$\begin{cases} P_P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ (k = 1, 2, \ldots) \end{cases}$

7.3. Esperanza, varianza y desviación típica

En la sección 6.5, se han introducido informalmente las nociones de *media* y *moda*. Ambos conceptos representan *medidas de centralización*, esto es, indicadores de cuál es el valor *en torno al cual* se agrupa una colección de datos. Se veía que estos números no resultaban suficientes para asegurar que el número de dados debía ser 9, puesto que había un conjunto no despreciable de palabras (el 35 %) que tenían una longitud mayor que 9; de otro modo, era preciso atender a cómo estaban distribuidos los datos (la longitud de las palabras). Este tipo de información la dan las *variables de dispersión*.

En esta sección, se introducen las nociones de *esperanza matemática*, *varianza* y *desviación típica* para una distribución discreta de probabilidad. La esperanza matemática es una medida de centralización[6]; varianza y desviación típica, de dispersión. Así mismo, es posible determinar qué valores toman éstas medidas de centralización y dispersión para las distribuciones binomial, de Bernouilli, hipergeométrica, binomial negativa, geométrica y de Poisson.

La probabilidad tuvo su origen en los juegos de azar (ver sección 4.2.2). Sin considerar situaciones de tipo anímico o psicológico, el jugador tiene dos inquietudes fundamentales:

- Cuál es la probabilidad de ganar en una partida concreta.
- Si se juega repetidas veces, qué se debe esperar, en *promedio*: ganar o perder (y, por supuesto, cuánto).

Por ejemplo, a un jugador se le propone el siguiente juego: "si usted obtiene cara en el lanzamiento de una moneda gana, en caso contrario pierde. Tiene un máximo de tres lanzamientos. Si obtiene cara en el primero gana 2 nuevos soles y el juego concluye; si obtiene cara en el segundo, gana 4 nuevos soles y el juego también concluye; si obtiene cara en el tercer lanzamiento gana 8 nuevos soles. En caso de no obtener cara en ninguno de los lanzamientos, usted tendrá que pagar 32 nuevos soles". Entonces, el jugador, antes de apostar, ensaya responder a las dos preguntas formuladas anteriormente. La probabilidad de ganar es igual a la probabilidad de sacar cara en el primer lanzamiento, en el segundo o en el tercero, esto es:

$$P(\text{“ganar”}) = P(C) + P(XC) + P(XXC) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

[6]En muchas circunstancias, la esperanza matemática se asocia a la *media aritmética* de un conjunto finito de valores; sin embargo, en general, no se define la *media* de un conjunto infinito de valores. Además, la *media* no se asociada, necesariamente, a la definición de una variable aleatoria, ni tampoco precisa el concurso de una función de probabilidad. Con otras palabras, la *media* es un caso particular de esperanza matemática, cuando la distribución es homogénea. Inversamente, se puede pensar que la *esperanza matemática* es una generalización de la noción de media, donde los valores son ponderados por la probabilidad de que éstos sucedan (*pesos*). En todo caso, nos parece adecuada la distinción entre *media* y *esperanza matemática*, puesto que la segunda ancla sus raíces dentro de la teoría de la probabilidad, mientras que la primera tiene un ámbito de aplicación menos definido (por lo general ligado a problemas aritméticos elementales).

El resultado anterior es fácil de obtener mediante un diagrama de árbol o calculando la probabilidad de que la variable aleatoria "sacar sello" tenga tres éxitos en tres tiradas y restando este valor a 1. ¿Qué tipo de distribución asocia a dicha variable aleatoria? ______________________________.

De esta forma, el jugador podría creer que la situación es favorable a sus intereses, puesto que espera ganar en 7 de cada 8 partidas que juegue. Sin embargo, la experiencia le dice que la segunda pregunta es tan importante como la primera, máxime cuando la pérdida es cuantiosa, en relación a las posibles ganancias. De hecho, una de cada dos partidas gana dos nuevos soles; una de cada cuatro, cuatro nuevos soles; una de cada ocho, ocho nuevos soles; una de cada ocho, pierde treinta y dos nuevos soles: si juega "muchas" partidas, ¿cuál será el balance esperado? La intención es *ponderar* las probabilidades respecto a lo que se gana o pierde. Así, el valor de ganancia o pérdida esperado, denotaremos E, es:

$$\begin{aligned} E &= 2P(C) + 4P(XC) + 8P(XXC) - 32P(XXX) = \\ &= 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 4 \cdot \tfrac{1}{4} + 8 \cdot \tfrac{1}{8} - 32 \cdot \tfrac{1}{8} = -1 \end{aligned}$$

De esta forma, el valor esperado es -1: el jugador debe esperar perder un nuevo sol si juega "un número muy grande" de partidas. En general, se define:

Definición 45 (Esperanza matemática) *Se llama valor esperado o esperanza matemática de una variable aleatoria discreta X que puede tomar los valores $k_1, \ldots, k_n$, se denota $E(X)$, a:*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(X = k_i)$$

Ejemplo 14 *La esperanza matemática del experimento aleatorio "lanzar dos dados al aire y observar el resultado" es 7.*

Se define la variable aleatoria X: "posibles valores que pueden resultar de sumar las caras de los dados". ¿Cuál es la esperanza asociada a esta variable aleatoria?

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(X = k_i) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

La esperanza es un valor fijo, que depende de la distribución de probabilidad de X (y que, por lo tanto, no varía funcionalmente con X). La esperanza matemática es una *medida de centralización*, es decir, da información sobre el comportamiento *medio*, pero nada dice sobre las variaciones en torno a ese valor *medio*. De hecho, en los dos ejemplos que se han mostrado las esperanzas eran -1 y 7, respectivamente, pero en un juego se pueden obtener resultados muy dispares: desde una ganancia de ocho (8) nuevos soles a una pérdida de treinta y dos (-32), en el primer juego; de obtener dos (2) a doce (12), en el lanzamiento de los dados. Será, por lo tanto pertinente, poder controlar "cuánto se dispersan los posibles resultados en torno a la esperanza". Surge, de esta manera, la necesidad de definir una medida que controle "de forma ponderada" la dispersión de los posibles valores que toma la variable aleatoria. Se define:

Definición 46 (Varianza y desviación típica) *Se llama varianza de la variable aleatoria discreta X que puede tomar los valores $k_1, \ldots, k_n$ y cuya función de probabilidad es P, se denota $V(X)^2$ o σ^2, a:*

$$V(X)^2 = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} [k_i - E(X)]^2 \cdot P(X = k_i)$$

Al valor $\sigma = V(X)$, es decir, a la raíz cuadrada positiva de la varianza, se le llama desviación típica de la variable aleatoria discreta X.

De esta forma, es posible calcular la varianza y desviación típica de las dos variables aleatorias descritas. En el primer caso, considerada la variable aleatoria discreta "cantidad que se gana o pierde cada vez que se juega" (en los lanzamientos de la moneda), se tiene que la varianza es:

$$\begin{aligned} V(X)^2 = \sigma^2 &= [2-(-1)]^2 \cdot \tfrac{1}{2} + [4-(-1)]^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \\ &+ [8-(-1)]^2 \cdot \tfrac{1}{8} + [-32-(-1)]^2 \cdot \tfrac{1}{8} = \\ &= 9 \cdot \tfrac{1}{2} + 25 \cdot \tfrac{1}{4} + 81 \cdot \tfrac{1}{8} + 961 \cdot \tfrac{1}{8} = 141 \end{aligned}$$

Y, por lo tanto, la desviación típica es $\sigma = D(X) \approx 11,87$. En el problema de los dados, el cálculo se realiza de forma análoga, obteniéndose para la varianza y la desviación típica los valores de ________ y ________, respectivamente.

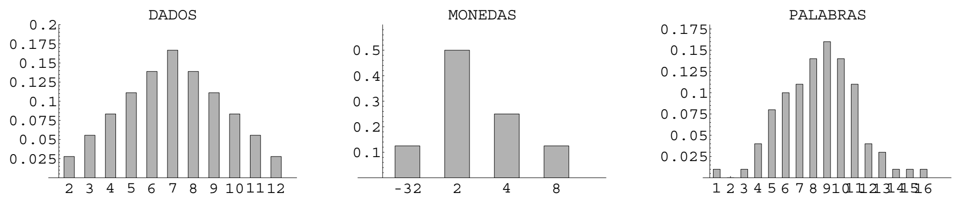
Ejemplo 15 *¿Cuál es la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria "número de letras de una palabra" de la situación propuesta en la sección 6.5?*

En la tabla de la página 169, se puede ver el número de palabras y la longitud de éstas. Por la definición frecuencial de probabilidad, se asocian las frecuencias relativas a la probabilidad de obtener una palabra con una determinada longitud. De esta forma, la longitud *media* de las palabras coincide con la esperanza matemática de la variable aleatoria "número de letras de un palabra": $E(X) = 8,52$. De esta forma, la desviación típica es aproximadamente igual a $2,65$. A la luz del conocimiento que se tiene de dicha situación, ¿cómo interpreta este valor? ________________________

____.

En la figura siguiente se pueden ver las distribuciones de probabilidad asociadas a las tres situaciones propuestas: ¿puede interpretar sobre ellas el significado de la esperanza matemática y la desviación típica? __________

____.



¿Qué problemas encuentra en el problema del lanzamiento de la moneda?

____.

¿Cuánto suman, aproximadamente, las probabilidades de los valores que toman las variables aleatorias comprendidos entre $E(X) - V(X)$ y $E(X) + V(X)$ en cada uno de los tres casos? ______________________________

____.

Ahora bien, según lo visto, la esperanza matemática, la varianza y la desviación típica están íntimamente relacionadas con las variables aleatorias y las distribuciones de probabilidad asociadas a éstas. Por lo tanto, es posible calcular dichos valores para las distribuciones teóricas de probabilidad introducidas en este capítulo. Diferentes manuales se ocupan en obtener dichos valores (por ejemplo, Canavos (1984)). En lo que sigue, haremos una exposición breve de las tres primeras distribuciones introducidas (degenerada en un punto, uniforme en n puntos y binomial). Por último, daremos una tabla resumen donde se almacenan las medidas de centralización y dispersión introducidas para todas las distribuciones dadas.

Esperanza matemática y varianza para la distribución degenerada

Sea la variable aleatoria X, que puede tomar los valores x_0, x_1,..., x_n, de tal forma que se concentra toda la probabilidad en el valor x_0: $P(X =$

$x_0) = 1$ y $P(X = x_i) = 0$, para todo i variando entre 1 y n. Entonces:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot P(X = x_k) = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot 0 + \ldots + x_n \cdot 0 = x_0$$

De esta forma, la esperanza es el propio valor x_0 en el que se concentra toda la probabilidad. Además, como no hay dispersión, la varianza debe ser igual a cero. En efecto:

$$\begin{aligned} V(X)^2 &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}[x_k - E(X)]^2 \cdot P(X = x_k) = \\ &= 0 \cdot 1 + \textstyle\sum_{k=1}^{n}[x_k - x_0]^2 \cdot 0 = 0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} 0 = 0 \end{aligned}$$

Esperanza matemática y varianza para la distribución uniforme

Sea la variable aleatoria X, que puede tomar los valores $x_1, \ldots, x_n$, de tal forma que la probabilidad está uniformente distribuida entre los n valores x_i: $P(X = x_i) = 1/n$, para todo i variando entre 1 y n. Entonces:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Así, por ejemplo, si los valores son $x_k = k$, la esperanza es igual a:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Por otro lado, la varianza toma la forma:

$$\begin{aligned} V(X)^2 &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}[x_k - E(X)]^2 \cdot P(X = x_k) = \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}[x_k - E(X)]^2 \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \textstyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[x_k - E(X)]^2 \end{aligned}$$

Luego, si los valores son $x_k = k$, la varianza es igual a:

$$\begin{aligned} V(X)^2 &= \textstyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[x_k - E(X)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[k - \frac{n+1}{2}]^2 = \\ &= \textstyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[k^2 - k \cdot (n+1) + \frac{(n+1)^2}{4}] \\ &= \textstyle\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}[k \cdot (n+1)] + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right)\right] = \\ &= \textstyle\frac{1}{n}\left[\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2 n}{2} + \frac{(n+1)^2 n}{4}\right] = \\ &= \textstyle\frac{1}{n}\left[\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2 n}{4}\right] = \\ &= \textstyle\frac{1}{n} \cdot \frac{n\cdot(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{6} = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

Esperanza matemática y varianza para la distribución binomial

Sea una variable aleatoria distribuida de forma binomial y sea p la probabilidad de que obtener un éxito de forma independiente, entonces:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \cdot \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

La segunda igualdad es cierta por la definición 37 de función binomial de probabilidad. La tercera igualdad es cierta porque el primer término se anula (se multiplica por el valor 0 de la variable aleatoria) y, por lo tanto, la sumatoria puede expresarse desde 1 hasta n. Por último, se divide numerador y denominador por $k \neq 0$. Ahora bien, factorizando se puede “sacar” fuera del símbolo sumatoria np:

$$E(X) = np \sum_{k=1}^{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^{(k-1)} (1-p)^{n-k}$$

De esta forma, si se realiza el cambio de variable $s = k - 1$ y $m = n - 1$, se tiene:

$$E(X) = np \sum_{s=0}^{m} \cdot \frac{m!}{(m-k)!s!} p^s (1-p)^{m-k} = np \cdot 1 = np$$

Puesto que $P(Y = s; m, p) = \frac{m!}{(m-k)!s!} p^s (1-p)^{m-k}$ representa la función de probabilidad de una variable aleatoria binomial Y de parámetros p y m. Entonces, por ser función de probabilidad, verifica:

$$\sum_{s=0}^{m} P(Y = s; m, p) = 1$$

Por cálculos similares, se concluye que la varianza es igual a $V(X) = npq$.

Para terminar, la tabla 7.3 muestra las medidas de de centralización y dispersión para el resto de distribuciones de variables aleatorias discretas.

7.4. Ejercicios

1. La probabilidad de que un recién nacido sea varón es 51/100. Calcule las siguientes probabilidades:

Distribución	Esperanza	Varianza
Degenerada en x_0	x_0	0
Unif. en n ptos.	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
Binomial	np	npq
Bernouilli	p	pq
Hipergeométrica	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$
Binomial negativa	$\frac{kq}{p}$	$\frac{kq}{p^2}$
Geométrica	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Poisson	λ	λ

Tabla 7.3: Esperanza y varianza de las distribuciones discretas de probabilidad.

a) Una pareja tiene cuatro vástagos: cuatro mujeres.

b) Una pareja tiene dos vástagos: una mujer y un varón.

c) Una pareja tiene tres vástagos: al menos uno es varón.

Relacione las probabilidades con la función binomial. Verifique que se obtienen los mismos resultados mediante las tablas del anexo H que mediante la fórmula de función binomial.

2. Analice el ejemplo que sirve de hilo conductor en la sección 4.4: el equipo de básquet de la Facultad de Educación se enfrenta a la recta final del campeonato universitario… En particular, el punto 4.4.5, *Estudio teórico*, puede describirse en términos de una distribución de probabilidad, ¿de cuál?

3. Una persona tiene una frecuencia relativa de aciertos en el tiro al blanco de $1/7$, que puede ser aceptada como la probabilidad de que dicha persona acierte en dicho juego. En una feria, la caseta que ofrece el tiro al blanco permite tres lanzamientos: ¿cuál es la probabilidad de acertar al menos una vez? ¿Cuántas veces debiera disparar para que el juego fuera ventajoso para él? ¿Y para acertar con probabilidad 0,9?

4. El encargado de una sala de ordenadores ha instalado una clave de acceso para una cuenta que contiene información secreta. Puede elegir como clave una palabra entre un conjunto de n posibles, todas con igual probabilidad. Hay un conjunto de personas que quieren acceder a la cuenta y conocen las n posibles claves, pero no saben cuál de ellas es la correcta. Se define la VAD "número de intentos fallidos hasta dar

con la clave". Encontrar su distribución de probabilidad, su esperanza matemática y su varianza cuando:

a) Cada persona va probando sucesiva e independientemente (una persona no conoce los resultados de intentos anteriores y sólo se le permite un intento).

b) Una persona prueba palabras hasta dar con la correcta (y va eliminando las que prueba y no son).

5. En una apuesta participan k jugadores. Estos lanzan consecutivamente una moneda. El primero que consiga una cara gana la apuesta. Sea X la VAD "jugador que gana la apuesta". Encontrar la distribución de X. (Nota: tenga en cuenta el ejercicio 3 de la § 6.5, p. 175)

6. Se tiene una urna con 10 bolas, 4 blancas y 6 negras. Se extraen aleatoriamente y con reemplazo 6 bolas. Calcular:

   a) La probabilidad de que las 6 bolas sean blancas.

   b) La probabilidad de que las 6 bolas sean negras.

   c) La probabilidad de que exáctamente k sean blancas ($0 \leq k \leq 6$).

   d) Calcule la esperanza matemática y la varianza de la variable aleatoria "número de bolas blancas extraídas".

7. Suponga que una bactería, durante su vida, puede originar 1, 2 o 3 bacterias con la misma probabilidad (y luego se muere). Se tiene aislada una bacteria de este tipo, ¿cuál es la función de probabilidad de la tercera generación?, esto es, ¿cada valor (número de bacterias) con qué probabilidad puede salir?

8. Unos biólogos capturan en un río una cantidad D de peces que marcan con una señal (con cuidado de no dañar ninguno de ellos). Después los sueltan y transcurrido un periodo de tiempo vuelven a capturar una muestra de n peces. Si la población de peces era N y se supone que en ese tiempo no ha habido ni nacimientos ni muertes entre los peces, calcule la probabilidad de obtener un número k de peces marcados. Estudie el número de peces que se pueden obtener, la esperanza matemática y la varianza de la VAD "número de peces marcados en la muestra" y el valor más probable.

   ¿Qué información adicional obtendría, para el problema de las ardillas (§ 6.4.2, p. 166) si realiza un estudio similar?

9. Se repite un experimento cuya probabilidad de éxito es $0,6$. Calcule:

   a) La probabilidad de obtener el primer éxito en el quinto experimento.

   b) La probabilidad de obtener 7 fallos antes del segundo éxito.

   c) La probabilidad de necesitar 7 experimentos para obtener dos éxitos.

10. La final de un torneo de básquet interunivesitario se juega al mejor de 7 partidos: el primer equipo que gana 4 partidos es declarado campeón. Suponga que los partidos son independientes entre sí. Sea p la probabilidad de que el equipo A gane un partido, $0 < p < 1$. Calcule la probabilidad de que A gane. Si A gana, sea X la VAD "número de partidos que ha jugado para ganar". Calcule la distribución de X, su esperanza matemática y su varianza.

11. Suponga que un comité está formado por 50 representantes y que todos están reunidos en una convención: 30 de ellos son partidarios de un proyecto y 20 son contrarios a éste. Si se seleccionan aleatoriamente 5 representantes distintos (no se puede elegir dos veces al mismo), ¿cuál es la probabilidad de que, entre estos cinco, por lo menos dos estén a favor del proyecto?

12. En una fábrica de monedas se hacen dos tipos de éstas: un tipo de moneda equilibrada y otro de monedas "cargadas", cuya probabilidad de cara es $0,55$. Si se tiene una moneda y se quiere saber si está cargada o no, se hace el siguiente "test": se lanza la moneda 1 000 veces y si salen 525 caras o más se acepta que la moneda está cargada y, en caso contrario, que es correcta. Calcule la probabilidad de:

    a) La moneda, estando "cargada", se admita como correcta.

    b) La moneda, estando correcta, se admita como "cargada".

    Nota: no deje los cálculos indicados, ¿qué problemas encuentra para hacerlos efectivos? ¿Bajo que condiciones podría utilizar la proposición 24 del anexo F.1?

13. Sea la VAD X, número de llamadas telefónicas que llegan a una central durante un periodo de tiempo igual a t, y supóngase que sigue una distribución de Poisson de parámetro λt, con $\lambda > 0$. La probabilidad de que se atienda una llamada es p, $0 \leq p \leq 1$. Si Y es la VAD que

indica el número de llamadas antendidas en el periodo t, demuestre que su distribución es de Poisson de parámetro λtp. Tabule, para algunos valores de los parámetros λ, p, ambas distribuciones y compárelas.

14. Sea X una VAD de Poisson tal que:

$$P(X = 2) = \frac{1}{5}P(X = 1)$$

Determine:

a) La distribución de probabilidad.

b) $P(X = 1 \text{ o } X = 2)$.

c) La probabilidad de que haya al menos una ocurrencia.

15. La probabilidad de que un paciente que sufre cierta enfermedad reaccione favorablemente a un cierto tratamiento es p. Se da el tratamiento a n pacientes, determinar la distribución del número de pacientes del hospital que reaccionan favorablemente.

16. *Determine la esperanza y la varianza de las distribuciones hipergeométrica, binomial negativa, geométrica y de Poisson, esto es, demuestre que la información dada por la tabla 7.3 es correcta. (Nota: consulte el manual Canavos (1984).)

17. *Demuestre que las funciones asociadas a las distribuciones degenerada en un punto x_0, uniforme en n puntos, hipergeométrica, binomial negativa, geométrica y de Poisson son de probabilidad, es decir, verifican los tres axiomas de la definición axiomática según A. N. Kolmogórov (p. 132).

7.5. Autoevaluación

1. Determine la distribución de las siguientes variables aleatorias:

a) Número de varones al seleccionar al azar 20 alumnos en una clase de 40, sabiendo que de ellos 25 son mujeres.

b) Número de varones en 10 nacimientos, supuesta la independencia entre nacimientos, cuando se sabe que el 49 por 100 de los nacimientos son mujeres.

c) Número de hijas que tendrá un matrimonio hasta tener el primer varón, en las condiciones anteriores.

Determine, en los tres casos, la esperanza matemática y la varianza.

2. Se quiere introducir una población de 20 animales insectívoros en una zona donde el 5 % de los insectos que les servirán de alimento son venenosos (y están distribuídos homogéneamente en el hábitat). Cada animal devora al día 5 insectos.

   a) Calcule la probabilidad de que un animal sobreviva la primera semana.
   b) Calcule las probabilidad de que al cabo de una semana quede como mínimo la mitad.
   c) Calcule la esperanza media de vida y su varianza.
   d) Suponiendo que siempre la mitad de los animales vivos son hembra y que cada 7 días se reproducen y dos nuevos animales se añaden a la población, ¿se debe esperar que la población de animales insectívoros crezca?

3. Un búho se encuentra en la copa de un árbol. A cierta distancia se encuentran tres ratones, que han de pasar cerca del árbol para llegar a su guarida. Si corren, en grupo, la probabilidad de que cada uno sea visto por el búho es 0,2. En cuanto ve algún ratón, el búho se lanza contra el grupo, siendo la probabilidad de cazar un ratón $\frac{k}{k+1}$, dependiendo del número k de ellos que vio desde la copa del árbol. Se pide:

   a) La probabilidad de que todos los ratones consigan llegar a la guarida.
   b) Si el búho cazó un ratón, calcular la probabilidad de que hubiese visto dos exactamente.

4. La población de un país es aproximamente de 25 millones de habitantes. El crecimiento anual esperado es del $0,1\,\%$ y la mortalidad es del $0,005\,\%$. Se pide:

   a) ¿Qué tanto por ciento de natalidad anual se estima? ¿Cuántos nacimientos se esperan?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que nazcan 5 o más personas en una misma hora de un mismo día?

Anexo A

Colocación de objetos

En el capítulo 2 se han descrito algunos problemas que exigían encontrar un método que permitiera contar todos los casos posibles en que se podía "disponer" un conjunto de objetos. Los ejemplos que allí se han mostrado son voluntariamente heterogéneos: se genera la impresión de que no es posible encontrar métodos generales de cálculo combinatorio, válidos para un conjunto amplio de situaciones problema.

El capítulo 3 es el contrapunto natural: se presenta un problema (la formación de comités bajo ciertas condiciones) que permite descubrir y describir ciertos patrones. La sección 3.5 ahonda en este punto: se *modelizan* algunos métodos de recuento simple combinatorio mediante la extracción de bolas de una urna. Según si importa o no el orden de extracción y si las tomas son con o sin reemplazo[1], la situación puede ser descrita mediante combinaciones o variaciones, con o sin repetición. En este orden de ideas, Dubois (1984) propone una sistematización de configuraciones combinatorias simples.

En esta sección se presenta de manera sucinta otro modelo relacionado con el anterior: colocación de objetos en "lugares". En la sección 2.6 se han estudiado algunos casos particulares que deben servir de referencia para comprender con profundidad el esbozo que aquí se presenta.

Supongamos, en primera instancia, que cada "lugar" se identifica con una "caja", entonces toda colocación de objetos comporta una serie de variables que es necesario definir antes de comenzar el recuento de casos: ¿hay objetos iguales?, ¿importa el orden en que los objetos se introducen en las cajas?, ¿son las cajas del mismo tipo? De esta forma, se distinguen seis casos posibles, puesto que si los objetos son iguales no importa el orden de coloca-

[1]Se acepta o no la selección repetida de un objeto, hay o no hay objetos indistinguibles.

ción en las cajas. Además, a partir de estos seis tipos definidos se distinguen otros cuatro subtipos al agregar las siguientes condiciones; sea r el número de objetos y n el número de cajas, entonces:

1. *Colocaciones inyectivas*: con *a lo sumo* un objeto por caja: $r \leq n$.
2. *Colocaciones suprayectivas*: con *al menos* un objeto por caja: $r \geq n$.
3. *Colocaciones biyectivas*: con *exáctamente un objeto* por caja: $r = n$.
4. *Colocaciones cualesquiera*: se puede colocar el número de objetos que se desee en una caja o dejar alguna vacía.

De esta forma, se concluye que hay 24 modelos de colocaciones de objetos en lugares, según las distintas variables especificadas:

Colocación	Objetos	Cajas	Tipo	Fórmula
Ordenada	Distintos	Distintas	Inyectiva	$V_{n,r}$
Ordenada	Distintos	Distintas	Suprayectiva	$r! \cdot \binom{r-1}{n-1}$
Ordenada	Distintos	Distintas	Biyectiva	P_n
Ordenada	Distintos	Distintas	Cualquiera	$r! \cdot CR_{n,r}$
Ordenada	Distintos	Iguales	Inyectiva	1
Ordenada	Distintos	Iguales	Suprayectiva	$L_{n,r} = \frac{r!}{n!} \cdot \binom{r-1}{n-1}$
Ordenada	Distintos	Iguales	Biyectiva	1
Ordenada	Distintos	Iguales	Cualquiera	$A_{n,r} = \sum_{k=1}^{n} L_{k,r}$
No ordenada	Distintos	Distintas	Inyectiva	$V_{n,r}$
No ordenada	Distintos	Distintas	Suprayectiva	$n! \cdot S_{n,r}$
No ordenada	Distintos	Distintas	Biyectiva	P_n
No ordenada	Distintos	Distintas	Cualquiera	$VR_{n,r}$
No ordenada	Distintos	Iguales	Inyectiva	1
No ordenada	Distintos	Iguales	Suprayectiva	$S_{n,r}$
No ordenada	Distintos	Iguales	Biyectiva	1
No ordenada	Distintos	Iguales	Cualquiera	$\Sigma_{n,r} = \sum_{k=1}^{n} S_{k,r}$
No ordenada	Iguales	Distintas	Inyectiva	$C_{n,r}$
No ordenada	Iguales	Distintas	Suprayectiva	$\binom{r-1}{n-1}$
No ordenada	Iguales	Distintas	Biyectiva	1
No ordenada	Iguales	Distintas	Cualquiera	$CR_{n,r}$
No ordenada	Iguales	Iguales	Inyectiva	1
No ordenada	Iguales	Iguales	Suprayectiva	$PE_{n,r}$
No ordenada	Iguales	Iguales	Biyectiva	1
No ordenada	Iguales	Iguales	Cualquiera	$\Pi_{n,r} = \sum_{k=1}^{n} PE_{k,r}$

Como se puede ver en la tabla anterior, las fórmulas de recuento asociadas involucran números combinatorios “no estándar”:

- *Números de Lah*: $L_{n,r} = \frac{r!}{n!}\binom{r-1}{n-1}$ $(r \geq n \geq 1)$.
- *Números de Stirling de segundo género*, definidos por la regla de recurrencia:

$$\begin{cases} S_{n,r} = nS_{n,r-1} + S_{n-1,r-1} & (r > n > 1) \\ S_{1,r} = S_{n,n} = 1 & (r, n \geq 1) \\ S_{n,r} = 0 & (r < n) \end{cases}$$

  O bien, definidos mediante la fórmula general:

$$S_{n,r} = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{r_1+\cdots+r_n=r \\ r_i \geq 1}} \frac{r!}{r_1! \cdot \ldots \cdot r_n!}$$

- Los números $PE_{n,r}$ (colocaciones de objetos indistinguibles en cajas también indistinguibles de tipo suprayectiva) se obtienen por la regla de recurrencia:

$$\begin{cases} PE_{n,r} = PE_{n-1,r-1} + PE_{n,r-n} & (r > n > 1) \\ PE_{1,r} = PE_{n,n} = 1 & (r, n \geq 1) \\ PE_{n,r} = 0 & (r < n) \end{cases}$$

El cálculo de estos números puede resultar muy tedioso. Una opción plausible es la construcción de tablas para estos números: o bien "a mano" o bien programándolas con un *software* especializado, de forma que se obtenga de manera automática una lista según los parámetros r (número de objetos) y n (número de cajas disponibles). En la figura A.1 se pueden ver cuatro programas editados con `Mathematica`[2]. El parámetro q indica el valor máximo que pueden tomar las variables n y r: si $q = 10$ (tal y como se muestra en dicha figura) se obtienen las tablas A.1, A.2, A.3 y A.4 (a partir de los programas de la figura A.1).

[2]Para la obtención de los números de Stirling de segundo género no es preciso introducir con `Mathematica` explícitamente la regla asociada: este *software* tiene implementado una función que permite la obtención de dichos números. Así, para obtener el número de Stirling de segundo género $S_{3,2}$, por ejemplo, es suficiente introducir `StirlingS2[3, 2]`. De esta forma, un programa más eficaz es:

```
q=10;
Table[Table[StirlingS2[n,r],r,1,q],n,1,q]
```

Números de Stirling ($S_{n,r}$)

```
q=10;
S[1,m_]:=1
S[p_,p_]:=1
S[n_,r_]:=If[n>r, 0, n S[n,r-1]+ S[n-1,r-1]]
Table[Table[S[n,r],{r,1,q}],{n,1,q}]
```

Números $PE_{n,r}$

```
q=10;
P[1,m_]:=1
P[p_,p_]:=1
P[n_,r_]:=If[n>r, 0, P[n-1,r-1]+ P[n,r-n]]
Table[Table[P[n,r],{r,1,q}],{n,1,q}]
```

Números $A_{n,r}$

```
q=10;
L[n_,r_]:=(r!)/(n!)Binomial[r-1,n-1];
Table[Table[If[n>r,0,L[n,r]], {r,1,q}], {n,1,q}];
A[n_,r_]:=Sum[L[k,r],{k,1,n}]
Table[Table[A[n,r],{r,1,q}],{n,1,q}]
```

Números $\Sigma_{n,r}$

```
q=10;
S[1,m_]:=1
S[p_,p_]:=1
S[n_,r_]:=If[n>r, 0, n S[n,r-1]+ S[n-1,r-1]]
Sigma[n_,r_]:=Sum[S[k,r],{k,1,n}]
Table[Table[Sigma[n,r],{r,1,q}],{n,1,q}]
```

Figura A.1: Programas para la obtención de tablas de números de Stirling, $PE_{n,r}$, $A_{n,r}$ y $\Sigma_{n,r}$ con **Mathematica**.

	r (objetos)									
n (cajas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511
3	0	0	1	6	25	90	301	966	3 025	9 330
4	0	0	0	1	10	65	350	1 701	7 770	34 105
5	0	0	0	0	1	15	140	1 050	6 951	42 525
6	0	0	0	0	0	1	21	266	2 646	22 827
7	0	0	0	0	0	0	1	28	462	5 880
8	0	0	0	0	0	0	0	1	36	750
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	45
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla A.1: Números de Stirling de segundo género $S_{n,r}$.

	r (objetos)									
n (cajas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
3	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8
4	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9
5	0	0	0	0	1	1	2	3	5	7
6	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5
7	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3
8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla A.2: Números $PE_{n,r}$.

	r (objetos)									
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880	3 628 800
2	1	3	12	60	360	2 520	20 160	181 440	1 814 400	19 958 400
3	1	3	13	72	480	3 720	32 760	322 560	3 507 840	41 731 200
4	1	3	13	73	500	4 020	36 960	381 360	4 354 560	54 432 000
5	1	3	13	73	501	4 050	37 590	393 120	4 566 240	58 242 240
6	1	3	13	73	501	4 051	37 632	394 296	4 594 464	58 877 280
7	1	3	13	73	501	4 051	37 633	394 352	4 596 480	58 937 760
8	1	3	13	73	501	4 051	37 633	394 353	4 596 552	58 941 000
9	1	3	13	73	501	4 051	37 633	394 353	4 596 553	58 941 090
10	1	3	13	73	501	4 051	37 633	394 353	4 596 553	58 941 091

Tabla A.3: Números $A_{n,r}$.

	r (objetos)									
n (cajas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	1	2	5	14	41	122	365	1 094	3 281	9 842
4	1	2	5	15	51	187	715	2 795	11 051	43 947
5	1	2	5	15	52	202	855	3 845	18 002	86 472
6	1	2	5	15	52	203	876	4 111	20 648	109 299
7	1	2	5	15	52	203	877	4 139	21 110	115 179
8	1	2	5	15	52	203	877	4 140	21 146	115 929
9	1	2	5	15	52	203	877	4 140	21 147	115 974
10	1	2	5	15	52	203	877	4 140	21 147	115 975

Tabla A.4: Números $\Sigma_{n,r}$.

Anexo B

Los puentes de Königsberg

En la sección 2.2 se ha estudiando el dilema del taxista. El método seguido ha consistido en representar la situación con un conjunto de puntos (*vértices*) unidos por líneas (*aristas*), obteniéndose un esquema de la ciudad. Este tipo de representación esquemática recibe el nombre de *grafo*. El origen de este tipo de modelos geométricos de la realidad se debe a Leonard Euler (1707–1783) que, en el año 1736, enunció y resolvió la siguiente situación:

> *En la ciudad de Königsberg, en Prusia*[1]*, hay una isla, llamada Kneiphof, rodeada por los brazos del río Pregel. Hay siete puentes que cruzan los dos brazos del río: ¿una persona puede realizar un paseo de tal modo que cruce cada uno de los puentes una sola vez? Se me ha informado de que mientras unos negaban la posibilidad de hacerlo y otros dudaban, nadie sostenía que fuese posible realmente.*

La idea "genial" de L. Euler consistió en trazar una representación gráfica esquematizada de los puentes, el río y la isla (figura B.1): no es relevante la forma de los puentes, tampoco si la isla de Kneiphof es más o menos grande; lo único relevante es que la ciudad queda dividida en cuatro zonas (las tierras que quedan siempre del lado del margen derecho o izquierdo del río, la zona que queda entre los dos brazos del río y la isla) y que estas zonas están unidas por siete puentes.

De esta forma, se puede reformular la situación en los siguientes términos: ¿es posible dibujar el esquema de la figura B.1 de un solo trazo (sin levantar el lápicero del papel)? El problema, por lo tanto, se asemeja a un tipo de

[1] El la actualidad, la antigua ciudad alemana de Königsberg se conoce con el nombre de Kaliningrado (Rusia), en honor del presidente Kalinin de la extinta URSS.

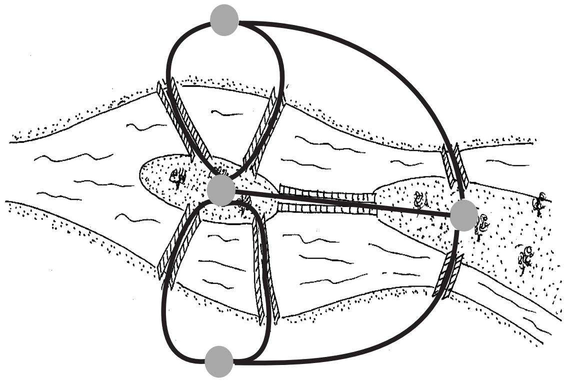


Figura B.1: La isla Kneiphof en la ciudad de Königsberg: ilustración y grafo.

situaciones muy conocidas (dibujos (a) y (b) de la figura B.2, por ejemplo). Por otro lado, ¿son representables con un solo trazo continuo las figuras (c) y (d) de la misma figura?

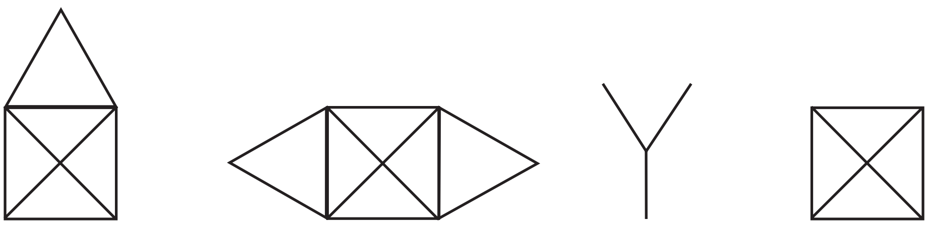


Figura (a) Figura (b) Figura (c) Figura (d)

Figura B.2: ¿Se pueden dibujar de un solo trazo los esquemas de la figura?

La pregunta clave es: ¿cómo se pueden distinguir los gráficos "construibles de un solo trazo", o simplemente "construibles", de aquellos que no lo son? L. Euler razonó que el *quid* de la cuestión era el número de "entradas" y "salidas" que hay en cada vértice de una figura. Un vértice se llama de *grado impar* si tiene "un número impar de entradas o salidas, es decir, a él confluyen un número impar de aristas"; de *grado par*, si tiene "un número par de entradas o salidas". De esta forma, la figura B.2(c) tiene todos los vértices impares; la figura B.2(b), pares; las figuras B.2(a) y B.2(d), tienen vértices pares e impares.

Una figura en la que todos los vértices tengan un número par de entradas y salidas, nos permitirá siempre que entremos en un vértice poder salir de él (figura B.2(b)). Así, si una figura tiene un número par de "entradas y salidas" en todos sus vértices, siempre podrá ser trazada "sin levantar el lápiz del papel"; aún más, si salimos de un vértice el trazo también terminará en él, por lo que se llamará circuito. Así, se concluye:

Proposición 20 *Toda figura constituida por vértices de grado par es un circuito, es decir, es construible y el vértice inicial y el final coinciden (se comienza y se termina en el mismo vértice).*

¿Qué sucede si hay algún vértice es de grado impar? Sea por ejemplo, la figura B.2(a): puede ser trazada "sin levantar el lápiz del papel", pero es mucho más "costoso" encontrar un vértice adecuado para ello. ¿Es posible encontrar un criterio de selección del vértice de salida?

Un vértice que no sea ni "inicial" ni "final" debe ser de grado par, puesto que es un vértice "de paso" y, siempre que se entra, se sale de él. Pero los vértices "de paso" son todos menos dos (los que juegan el papel de inicio y fin del camino), de tal suerte que un dibujo que contenga vértices de grado impar, para ser realizable "de un solo trazo", tendrá que tener a los sumo dos vértices de ese tipo.

Proposición 21 *Un dibujo con más de dos vértices impares no es construible.*

Por otro lado, si una figura tiene dos vértices de grado impar, está claro que, si se intenta construir, se tendrá que salir de uno de los vértices impares e intentar terminar en el otro vértice impar. De hecho, si se sale de un vértice impar, se deja un número par de entradas o salidas (o ninguna) en dicho vértice, de tal forma que no se puede terminar el camino en él. Así se concluye que: no puede suceder que exista un sólo vértice impar.

Según lo dicho, una figura construible con vértices de grado impar tendrá dos de este tipo: uno será vértice inicial; el otro, final. Sin embargo, no constituirá un circuito, puesto que los vértices inicial y final no coinciden. Llameremos *trayectoria* a cada una de tales figuras.

Proposición 22 *Una figura con vértices de grado impar es trayectoria si, y justamente si, tiene dos vértices de ese tipo.*

De esta forma, ¿es construible la figura de los puentes de Königsberg?, es decir, ¿es posible hacer un paseo que pase una (y sólo una) vez por cada uno de los puentes que cruzan el río Pregel? En caso afirmativo, ¿es circuito o trayectoria?

En general, para determinar si un dibujo es circuito, trayectoria o no construible, es suficiente establecer la paridad o imparidad de los vértices que lo forman: el problema de los puentes sobre el río Pregel en la ciudad de Königsberg no tiene solución, tal y como lo afirmó L. Euler.

Por otro lado, cabe pensar que el método de L. Euler tiene un campo restringido de interés y que, en todo caso, éste se circunscribe a situaciones lúdicas sin demasiada importancia. Sin considerar el hecho de que el juego ha sido y será uno de los motores principales de las matemáticas, diremos que la teoría de grafos ha encontrado una expasión inusitada en campos tan dispersos como: química, biología, física, genética, sociología, economía, ciencias de la computación, geografía, arquitectura, transporte y comunicaciones. E. Micha (1998) dedica buena parte del su libro *Matemáticas discretas* a estudiar la teoría de grafos. En particular, describe dos problemas de tipo euleriano que pasamos a enunciar: el problema del policleto y el problema chino del cartero.

Los problemas del policleto y chino del cartero

Los índices de criminalidad en una ciudad son altos. Como una medida de vigilancia y control de los abusos del hampa, las autoridades crean la figura de "policías en bicicleta", conocidos popularmente como los *policletos*. La idea consiste en que grupos de policías patrullen en bicicleta las calles de ciertos barrios. Para tal efecto, se identifican sectores de patrullaje y se señalan puntos en ellos en donde se establecen pequeñas estaciones o terminales, que marcan inicio o término de un recorrido. Los responsables plantean encontrar rutas para los policletos de modo que se cubra todo el sector con la menor cantidad de pedaleo. Dos preguntas, en esencia distintas, es preciso responder:

1. ¿Puede un policleto patrullar todas las calles de una colonia recorriendo cada calle una vez, iniciando y terminando su viaje en la misma estación?

2. Si esto no es posible, ¿cuál es la manera más eficiente de patrullar la colonia, iniciando y terminando en la estación?

El problema chino del cartero fue formulado por M. Guan en 1962. Para repartir correspondencia, un cartero debe partir de la oficina de correos y, después de recorrer todas las calles por ambas aceras, regresar a la oficina de correos: ¿será posible caminar por todas las aceras con viviendas de todas las calles exactamente una vez? Si es imposible, ¿cuál es la manera más eficiente (caminar el mínimo posible) de entregar todo el correo?

Para analizar ambos problemas, es suficiente representar mediante un grafo el barrio donde van a patrullar los policletos o donde tiene que echar la correspondecia el cartero: contar el número de vértices pares e impares y determinar si se puede trazar un circuito o una trayectoria o, si por el contrario, se trata de una figura no construible en un solo trazo. Sin embargo, una diferencia esencial hay entre ambos problemas: mientras los policletos recorren una calle una sola vez, el cartero debe hacerlo dos veces, una por cada acera con viviendas (en el supuesto de que la calle tenga viviendas a ambos lados)[2].

Por otro lado, un problema fundamental queda todavía abierto: construir efectivamente un camino que describa un circuito o una trayectoria, en el supuesto de que esto sea posible. Con otras palabras, el trabajo de Euler permite afirmar si un grafo es construible, mas no cómo hacerlo. Un método que tenemos al alcance es “ir probando, hasta topar con una solución”: método *por ensayo y error*. Empero, en muchos casos (donde el número de vértices es muy numeroso), este método puede resultar extremadamente tedioso: el *algoritmo de Fleury* viene a nuestro auxilio.

Llamamos *puente* a una arista tal que al trazarla, un gráfico conexo queda dividido en dos zonas disconexas: entonces, si las dos zonas en que queda dividido el gráfico tienen aristas que no se han recorrido, el camino trazado no va a terminarse.

De esta forma, el algoritmo de Fleury nos intruye a que trazemos un puente únicamente si es extrictamente necesario, esto es, si no es posible tomar otra alternativa. Las reglas que rigen el algoritmo para un circuito (trayectoria) son:

[Regla 1] Cerciorarse de que el gráfico sea conexo y que todos sus vértices tengan grado par (y que haya justamente dos vértices de grado impar).

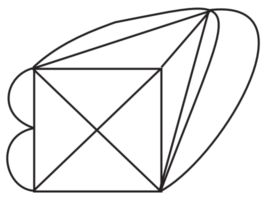
[Regla 2] Elegir un vértice cualquiera (impar) como partida.

[Regla 3] En cada paso, tomar cualquier arista que no sea puente, excepto cuando sea extrictamente necesario.

Por otro lado, para no confundirse, suele ser útil en la práctica borrar las aristas recorridas y los vértices de grado cero (ya no quedan aristas que

[2] No se considera la posibilidad de que el cartero cruce constantemente la calle para echar la correspondencia en los buzones de una y otra vereda.

salgan o entren a ellos). Utilice el algoritmo dado para estudiar los grafos de la siguiente figura.



Por último, queda analizar la posibilidad de crear recorridos óptimos si no es posible realizar un circuito o una trayectoria. Por ejemplo, ¿qué recorrido aconsejaría a los policletos que deben patrullar un sector de un barrio cuyo esquema se semeja el grafo central de la figura dada? Una estrategia puede estar basada en la construcción de un nuevo grafo, añadiendo el mínimo número de aristas posibles que conviertan el grafo en un circuito o en una trayectoria y, entonces, aplicar el algoritmo de Fleury. Un algoritmo puede ser descrito en los siguientes pasos:

[Paso 1] Contar el número de aristas que llegan a cada vértice. Si se está en las condiciones de la regla 1 del algoritmo de Fleury, ir al paso 4. En caso contrario, ir al paso 2 en el supuesto de querer construir un circuito; al paso 3, para construir una trayectoria.

[Paso 2] Agregar aristas para convertir todos los vértices impares en pares, por n-plicación[3] de aristas ya existentes. Luego, ir al paso 4.

[Paso 3] Agregar aristas para convertir todos los vértices impares en pares (excepto dos de ellos) por n-plicación de aristas ya existentes. Luego, ir al paso 4.

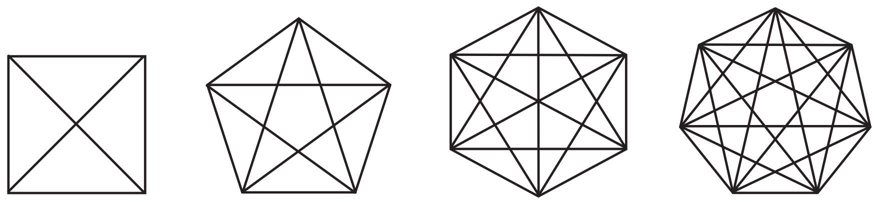
[Paso 4] Utilizar el algoritmo de Fleury para construir el recorrido: circuito o trayectoria.

Ejercicios

1. Un grafo es completo si todos los vértices están unidos a todos los demás justamente una vez por una arista. En la figura siguiente, se pueden ver los grafos completos de k vértices, con k variando entre 4 y 7, y $C_{k,2}$ aristas: ¿constituyen trayectorias, circuitos o dibujos no

[3] Du-plicación, tri-plicación, cuadri-plicación, quintu-plicación, etc. En general, n-plicación.

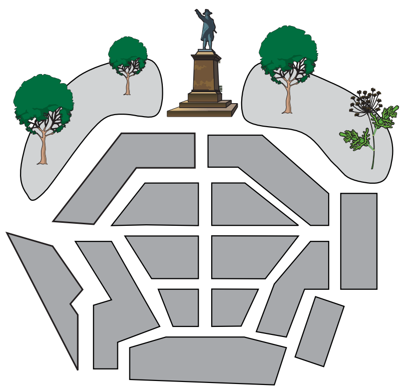
construibles de un solo trazo? En el supuesto de no ser construibles, ¿cuántas aristas es necesario añadir para tener una trayectoria? ¿Y para tener un circuito? Encuentre alguna regla que le permita describir un grafo completo de k vértices, para cualquier número k natural.



2. En la figura siguiente aparece el mapa de un barrio de una ciudad. La municipalidad asigna a una empresa la recogida de basura de dicho sector. El dueño del camión recolector debe entregar todos los días al chofer un monto de dinero equivalente a los galones de petróleo necesarios para hacer toda la ronda: ¿qué ruta tendrá que realizar el conductor para minimizar el costo? Considere dos casos:

    a) Los vecinos dejan la basura en contenedores en una sola acera.

    b) Cada vecino deja la basura en la puerta de su casa y los peones recogen únicamente la basura de la acera del sentido de marcha del camión.



Observe, por otro lado, que las calles del perímetro del sector tienen una sola acera con viviendas: en principio, el camión tendrá que pasar una sola vez por dichas calles.

3. *Uniendo puntos en el plano o el juego de SIM.* Dos jugadores. Uno de ellos coloca un número n de puntos coplanares (número prefijado de antemano), sin que haya tres colineales. El otro jugador tendrá que unir dos puntos. Será el turno del primero, que, a su vez, unirá otros dos puntos. Cada jugador, por turno, unirá dos puntos que no hayan sido unidos con anterioridad. Pierde quien, al unir dos puntos, construya un triángulo. Para distinguir los trazos de uno y otro jugador se utilizarán dos colores. (En figura (a), gana el jugador que ha hecho los trazos claros).

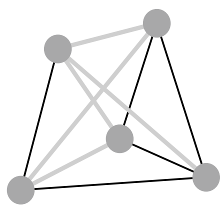


Figura (a)

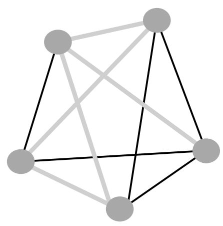


Figura (b)

Observar que se tiene a la mano varias variables: el número de puntos que se permiten colocar, la ubicación de los mismos en el plano (con la restricción de que no haya tres colineales), el número de jugadores que pueden afrontar una misma partida (2, 3 jugadores haciendo trazos alternativamente). ¿La figura (b) refleja una situación equivalente a la de la figura (a)?

Anexo C

Inducción matemática

El principio de indución matemática (§2.7) se fundamenta en el quinto axioma de la definición de los números naturales dada por el matemático italiano Giussepe Peano (1858–1932), en su obra *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita* (1899). G. Peano definió el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales mediante cinco axiomas. Para su fundamentación de la aritmética, G. Peano eligió tres conceptos primitivos: *uno* (el primer elemento del conjunto de los números naturales, aquél que no tiene antecesor), *número* (es decir, número natural) y la relación binaria *es sucesor de*. A partir de estos tres conceptos primeros definió los números naturales y dedujo todas sus propiedades.

La relación binaria *es sucesor de* queda definida por la siguiente función:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\to S(n) := n + 1 \end{aligned}$$

De esta forma, los cinco axiomas de Peano para los números[1] son:

1. 1 es un número: $1 \in \mathbb{N}$.

2. Si n es un número entonces el sucesor $S(n)$ también es un número: Si $n \in \mathbb{N} \Rightarrow S(n) \in \mathbb{N}$.

3. 1 no es sucesor de ningún número[2]: $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) \neq 1$.

4. Si n y m pertenecientes a $\mathbb{N}$ son tales que tienen el mismo sucesor, entonces $n = m$: Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$.

[1]Dentro del sistema axiomático de Peano, "número" es sinónimo de "número natural".

[2]Por ello, 1 se llama primer elemento o elemento mínimo de $\mathbb{N}$.

5. Si un conjunto de números P contiene a uno (1) y también al sucesor de cualquier número que pertenezca a P, entonces todo número pertenece a P. Con otras palabras, si $P \subseteq \mathbb{N}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in P \\ n \in P \Rightarrow S(n) \in P \end{array}\right\} \Rightarrow P = \mathbb{N}$$

Como se ha puntalizado más arriba, el axioma quinto es la base del método de inducción matemática, que se aplica como método de definición y de demostración. De esta forma, el principio de inducción queda definido en términos de conjuntos: "Si $P \subseteq \mathbb{N}$..." En la práctica, sin embargo, el principio de inducción (matemática) suele aplicarse en términos de propiedades, más que en términos de conjuntos (ver proposición 6, p.39).

El juego del dominó

Se colocan las fichas de un dominó paradas, seguidas unas de otras y a una distancia menor que el alto de la ficha así dispuesta, al golpear la primera ficha, ésta golpeará a la siguiente, esta última a su siguiente y así, sucesivamente, todas las fichas irán cayendo, golpeadas por la anterior y golpeando a la siguiente. El proceso general puede ser descrito con dos ordenes:

1. La primera ficha de dominó cae al ser golpeada.
2. Si una ficha cualquiera cae, automáticamente golpea y hace caer a la siguiente.

De hecho, si ambas ordenes son ciertas, todas las fichas caerán. En efecto, según la primera orden: cae la primera ficha. Por la segunda orden, toda vez que haya caído la primera ficha, caerá la segunda. Así mismo, por la segunda orden, la segunda hará caer a la tercera; la tercera, a la cuarta; la cuarta, a la quinta; la quinta, a la sexta; y así sucesivamente.

Por otro lado, el principio de inducción da una regla práctica de proceder a la hora de demostrar (por inducción) una propiedad, para cualquier n natural. Se realizan los dos siguientes pasos:

1. Se demuestra en primer lugar que P_1 es verdadera, es decir, que la proposición P_n es verdadera cuando $n = 1$.
2. Se supone que P_n es verdadera (hipótesis de inducción) y se demuestra que la proposición siguiente P_{n+1} es verdadera.

En tales circunstancias, el principio de inducción asegura que P_n es verdadera para todo n natural.

Ejemplo 16 *La suma de los n primeros números naturales es igual a* $\frac{n(n+1)}{2}$.

Para cada número natural n, se tiene la proposición:

$$P_n: \quad 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

¿P_n es verdadera para todo n? En efecto:

1. P_1 es verdadera:

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=\frac{1\cdot(2)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

2. Supongamos que P_n es verdadera, entonces P_{n+1} es también verdadera. En efecto:

$$\begin{aligned}1+\ldots+n+(n+1)&=[1+\ldots+n]+(n+1)=\tfrac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)=\\&=(n+1)\left[\tfrac{n}{2}+1\right]=(n+1)\left[\tfrac{n+2}{2}\right]=\\&=\tfrac{(n+1)(n+2)}{2}\ \blacksquare\end{aligned}$$

En el ejemplo dado y en el juego de las torres de Hanoi, la proposición P_1 resulta trivial. Muchas veces, esto lleva a creer que "su verificación es mecánica y que nada aporta al estudio general". Veamos que esta conclusión no es válida, de hecho puede llevar a "demostrar" justamente lo contrario a lo que en verdad se verifica.

Ejemplo 17 *¿Es cierta la proposición P_n: "n^2+5n+1 es número par"?*

Vamos a demostrar que "si P_n es verdadera, entonces P_{n+1} también lo es", pero que, sin embargo, todos los números de la forma n^2+5n+1 son impares: no hay contradicción con el principio de inducción, puesto que no se ha verificado que la proposición P_1 sea verdadera.

En efecto, si P_n es verdadera, entonces P_{n+1} también lo es:

$$(n+1)^2+5(n+1)+1=n^2+2n+1+5n+5+1=(n^2+5n+1)+2n+6$$

Ahora bien, por hipótesis de inducción, P_n es verdadera, luego existe $k\in\mathbb{N}$ tal que: $n^2+5n+1=2k$ y, por lo tanto, se tiene:

$$(n+1)^2+5(n+1)+1=(n^2+5n+1)+2n+6=2k+2(n+3)=2[k+(n+3)]$$

Luego, si P_n es verdadera, también lo es P_{n+1}. Sin embargo, se obtiene fácilmente que los primeros 10 números de la forma $n^2 + 5n + 1$ son: 7, 15, 25, 37, 51, 67, 85, 105, 127, 151: todos ellos números impares. De hecho se demuestra que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la proposición Q_n "$n^2 + 5n + 1$ es un número impar", es verdadera:

1. Q_1 es verdadera: $12 + 5 \cdot 1 + 1 = 7$ (impar).

2. Supongamos que Q_n es verdadera y veamos que Q_{n+1} también lo es:

   $$(n+1)^2+5(n+1)+1 = n^2+2n+1+5n+5+1 = (n^2+5n+1)+2n+6$$

   Por hipótesis de inducción, Q_n es verdadera, luego existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 + 5n + 1 = 2k + 1$ y, por lo tanto, se tiene:

   $$\begin{aligned}(n+1)^2 + 5(n+1) + 1 =& (n^2 + 5n + 1) + 2n + 6 = \\ =& 2k + 1 + 2(n + 3) = 2[k + (n + 3)] + 1\end{aligned}$$

   Luego, Q_{n+1} es verdadera y, por el principio de inducción, se sigue la tesis: "Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 5n + 1$ es un número impar".

El ejemplo 17 ha servido para observar que es esencial que la primera proposición sea cierta. Esto debe ser comprendido adecuadamente: no siempre la primera proposición verdadera es P_1.

Ejemplo 18 *Para todo $n \geq 2$, $n^2 > n + 1$.*

Si $n = 1$: $1 > 1 + 1$, lo cual es falso. Entonces, para todo $n \geq 2$, sea la proposición "$P_{n+1} : n^2 > n + 1$. Se tiene:

1. P_2 es verdadera: $2^2 = 4 > 3 = 2 + 1$.

2. Sea $n \geq 2$, supongamos que P_n es verdadera y veamos que P_{n+1} también lo es:

   $$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n + 1 + 2n + 1 > (n + 1) + 1, \quad \forall n \geq 2$$

   La primera desigualdad en la anterior proposición es cierta por hipótesis de inducción y la segunda puesto que $2n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De esta forma, el ejemplo 18 sugiere un cambio en la regla práctica enunciada anteriormente: es preciso determinar la proposición P_N primera que se cumple, donde N es el mínimo número natural de tal manera que P_n es verdadera:

$$N = min\{n \in \mathbb{N} \,|\, P_n \text{ es verdadera}\}$$

A continuación, suponer que P_n es verdadera (hipótesis de inducción) y demostrar que la proposición P_{n+1} es verdadera. En tales circunstancias, el principio de inducción asegura que P_n es verdadera para todo número natural $n \geq N$.

Para terminar esta breve descripción del método de inducción matemática, se va a utilizar dicho método para demostrar dos proposiciones que han sido enunciadas en el capítulo 5. En primer lugar, si $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, se tiene:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

En la página 134, se ha esbozado una demostración a dicha proposición que implica la aplicación del axioma tercero de probabilidad $(n-1)$ veces. Una forma más elegante, y más correcta desde el punto de vista formal, es la aplicación del principio de inducción. Por el axioma tercero de probabilidad, la proposción es cierta para $n = 2$. Supongamos (hipótesis de inducción) que el axioma es válido para n sucesos y veamos que puede ser extendido a $n+1$:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + P(A_{n+1}) = \\ &= P(A_1) + \ldots + P(A_n) + P(A_{n+1}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) \end{aligned}$$

La primera igualdad es cierta por el axioma tercero de probabilidad, para los sucesos $B = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ y $A = A_{n+1}$; la segunda, por hipótesis de inducción. De esta forma, se concluye que, si $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$, para todo $n \geq 2$.

Ejercicio

La propiedad $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$, puede ser generlizada a un número finito de sucesos de un mismo experimento aleatorio:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Anexo D

Fórmula de Leibniz

En esta sección se generaliza el teorema de Newton (proposición 9, p. 66), que permite calcular la potencia n-ésima de un binomio: la fórmula de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) permite calcular la potencia n-ésima de un polinomio $a_1 + \ldots + a_s$, cualquiera que sea el número natural s.

Para obtener la potencia n-ésima del polinomio $a_1 + \ldots + a_s$ se procede por multiplicaciones sucesivas. De esta forma, se obtienen términos de la forma ${a_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {a_s}^{\alpha_s}$, que tendrán que satisfacer una serie de propiedades:

1. Los exponentes α_k deben sumar n, puesto que éste es el grado del polinomio $(a_1 + \ldots + a_s)^n$: $\sum_{k=1}^{s} \alpha_k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s = n$. Además, los coeficientes son números enteros no negativos y, por lo tanto, para todo k: $0 \leq \alpha_k \leq n$

2. Según la propiedad anterior, los tipos de términos ${a_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {a_s}^{\alpha_s}$ se pueden obtener determinando el número de posibles descomposiciones en s sumandos del número n (sin atender el orden en que aparecen dichos sumandos):

$$
\begin{aligned}
&n = n + 0 + \overset{(s-1)}{\ldots} + 0 \\
&n = (n-1) + 1 + \overset{(s-2)}{\ldots} + 0 \\
&n = (n-2) + 2 + 0 + \overset{(s-2)}{\ldots} + 0 \\
&n = (n-2) + 1 + 1 + 0 + \overset{(s-3)}{\ldots} + 0 \\
&n = (n-3) + 3 + 0 + \overset{(s-2)}{\ldots} + 0 \\
&n = (n-3) + 2 + 1 + 0 + \overset{(s-3)}{\ldots} + 0 \\
&n = (n-3) + 1 + 1 + 1 + 0 + \overset{(s-4)}{\ldots} + 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

3. Cada uno de los tipos anteriores, debe relacionarse con las permutaciones ordinarias de las variables a_k. Como no se ha tenido en cuenta el orden de los sumandos, la descomposición $n = n + 0 + \overset{(s-1)}{\ldots} + 0$, por ejemplo, refiere de igual manera a los términos:

$$\begin{array}{l} {a_1}^n \cdot {a_2}^0 \cdot \ldots \cdot {a_s}^0 = {a_1}^n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = a_1^n \\ {a_2}^n \cdot {a_1}^0 \cdot {a_3}^0 \ldots \cdot {a_s}^0 = {a_2}^n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = a_2^n \\ {a_3}^n \cdot {a_1}^0 \cdot {a_2}^0 \cdot {a_4}^0 \ldots \cdot {a_s}^0 = {a_3}^n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = a_3^n \\ \vdots \end{array}$$

4. Al desarrollar la potencia n-ésima del polinomio $a_1 + \ldots + a_s$, el número de veces que se repetirá un término del tipo ${a_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {a_s}^{\alpha_s}$ es igual al número de permutaciones con repetición de las variables $a_1, \ldots, a_s$, que se repiten $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ veces, respectivamante. Por lo tanto, a cada término le corresponde un coeficiente: $\frac{n!}{(\alpha_1)! \cdot \ldots (\alpha_s)!}$

Todas estas propiedades permiten enunciar la siguiente:

Proposición 23 (Fórmula de Leibniz) *Para cada número natural s, arbitrario, pero fijo, la potencia n-ésima del polinomio $a_1 + \ldots + a_s$ se calcula mediante la fórmula:*

$$(a_1 + \ldots + a_s)^n = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = n} \frac{n!}{(\alpha_1)! \cdot \ldots (\alpha_s)!} {a_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {a_s}^{\alpha_1}$$

La diferencia fundamental con la fórmula del binomio se centra en cómo se obtienen los sucesivos sumandos. No se tiene un contador que va tomando unos valores, si no una condición sobre unos parámetros, que restringe los valores que pueden tomar estos: es preciso considerar todos los términos que verifican la condición $\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = n$.

Ejemplo 19 *Desarrolle la expresión $(a + b + c)^5$.*

Las posibles descomposiciones del número 5 son:

$$5 = 5 + 0 + 0 = 4 + 1 + 0 = 3 + 2 + 0 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

Por lo tanto, por la fórmula de Leibniz, se tiene:

$$(a + b + c)^5 = \sum_{\alpha + \beta + \gamma = 5} \frac{5!}{(\alpha)!(\beta)!(\gamma)!} a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma =$$

$$
\begin{aligned}
&= [5!/(5!0!0!)][a^5b^0c^0 + a^0b^5c^0 + a^0b^0c^5]+\\
&+[5!/(4!1!0!)][a^4b^1c^0 + a^4b^0c^1 + a^1b^4c^0 + a^0b^4c^1+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +a^1b^0c^4 + a^0b^1c^4]+\\
&+[5!/(3!2!0!)][a^3b^2c^0 + a^3b^0c^2 + a^2b^4c^0 + a^0b^3c^2+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +a^2b^0c^3 + a^0b^2c^4]+\\
&+[5!/(3!1!1!)][a^3b^1c^1 + a^1b^3c^1 + a^1b^1c^3]+\\
&+[5!/(2!2!1!)][a^1b^2c^2 + a^2b^1c^2 + a^2b^2c^1] =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [a^5 + b^5 + c^5]+\\
&+5[a^4b + a^4c + ab^4 + b^4c + ac^4 + bc^4]+\\
&+10[a^3b^2 + a^3c^2 + a^2b^4 + b^3c^2 + a^2c^3 + b^2c^4]+\\
&+20[a^3bc + ab^3c + abc^3]+\\
&+30[ab^2c^2 + a^2bc^2 + a^2b^2c]
\end{aligned}
$$

Para terminar, dos observaciones: una, ¿se obtiene el mismo resultado por multiplicación directa del polinomio $(a+b+c)$ cinco veces?; otra, a pesar de que la fórmula de G.W. Leibniz simplifica los cálculos, resulta tedioso el procedimiento, por ello es normal que muchos programas simbólicos de matemáticas incluyan opciones que permiten expandir un polinomio en s variables elevado a la n-ésima potencia de forma automática. Con el software `Mathematica`, por ejemplo, para expandir el polinomio P, es suficiente introducir la orden `Expand[P]`.

Anexo E

El problema de la aguja

G. Leclerc (1701–1788), conde de Buffon, en su obra *Ensayo de aritmética moral*, publicada en 1777, introduce una nueva rama de la teoría de probabilidades: la que estudia los problemas probabilísticos basados en consideraciones geométricas (ver sección 4.1.2). En concreto, el conde de Buffon proponía el siguiente problema: *Si un haz de lineas paralelas equidistantes son trazadas sobre un plano horizontal, sobre el cual se deja caer al azar una aguja perfectamente cilíndrica y de grosor despreciable, ¿cuál es la probabilidad de que la aguja corte a una de las líneas paralelas?*

Se designa por $2d$ a la distancia entre una recta y la paralela a ella más próxima; por $2l$, a la longitud de la aguja. Además, se supone que $d > l$, para evitar que la aguja pueda cortar simultánteamente a dos rectas paralelas. En la figura E.1 aparecen representadas dos líneas paralelas (r y s) y una aguja que corta a la recta r en el punto Q. De esta forma, la distancia del punto medio M de la aguja está más próximo de r que de s y, por lo tanto, ha de verificarse que $x < l$ ($x = MP$). Por otro lado, si giramos la aguja en torno al centro M llega un momento en que ésta dejará de cortar a la recta r: el punto frontera es el punto Q'. Por lo tanto, dos variables es preciso tener en cuenta: una, donde cae el centro M de la aguja; otra, si hacemos pasar una perpendicular a las paralelas por M, qué ángulo forma la aguja con dicha perpendicular.

Ahora bien, el coseno del ángulo PMQ' se obtiene fácilmente a partir del triángulo rectángulo que se forma:

$$\cos PMQ' = \frac{PM}{MQ'} = \frac{x}{l} \Rightarrow PMQ' = \arccos\left(\frac{x}{l}\right)$$

El ángulo PMQ varía entre 0 y $\pi/2$ (si el ángulo es mayor que $\pi/2$ se tiene una situación simétrica: el corte de la aguja se produce a la izquierda

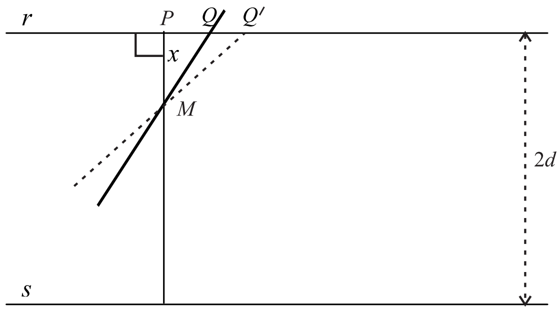


Figura E.1: ¿Qué probabilidad hay de que la aguja corte a una de las líneas paralelas?

de P). De esta forma, la probabilidad de que el ángulo sea EMQ sea menor o igual a PMQ' (en cuyo caso habría corte) es:

$$P(PMQ \leq PMQ') = \frac{arccos\left(\frac{x}{l}\right)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{x}{l}\right)$$

Por otro lado, la probabilidad de que el centro M de la aguja caiga en un intervalo de la forma $(x; x + dx)$ es dx/d. De esta forma, la probabilidad de que la aguja corte a la recta r (denotaremos C_r si ha caido a una distancia x) debe calcularse como la suma de probabilidades de que el ángulo PMQ sea menor que el ángulo PMQ'. Como la variable x es continua (no discreta) no es posible realizar una suma de un número finito de casos, sino que es preciso utilizar el cálculo integral. En concreto, se tiene:

$$\begin{aligned}
P(C_r) &= \int_0^l \left[\tfrac{2}{\pi} \cdot \arccos\left(\tfrac{x}{l}\right)\right] \tfrac{dx}{d} = && \text{(cambio de variable: } x = ly) \\
&= \tfrac{2l}{\pi d} \int_0^1 \arccos(y) dy = && \text{(cambio de variable: } y = \cos(t)) \\
&= \tfrac{2l}{\pi d} \int_{\pi/2}^0 [-t \operatorname{sen}(t)] dt = && \text{(por partes: } u = t; dv = -\operatorname{sen}(t)dt) \\
&= \tfrac{2l}{\pi d} (t \cos(t) - \operatorname{sen}(t))_{\pi/2}^0 = && \\
&= \tfrac{2l}{\pi d} (0 - \tfrac{\pi}{2} \cdot 0 + 1) = \tfrac{2l}{\pi d} &&
\end{aligned}$$

El problema permite diseñar un método para la obtención empírica de un valor aproxiamado del número π. Por ejemplo, sobre una hoja de papel trace líneas paralelas a una distancia d y lance un palito de longitud l ($2l = d$) “muchas veces”; entonces, la simulación arroja un valor aproximado del inverso del número π. ¿La aproximación del número π así obtenida es buena? ¿Puede diseñar un experimento que le permita obtener una aproximación mejor? ¿Cómo se podría utilizar a tal efecto un suelo cubierto de losetas?

Anexo F

Distribuciones de probabilidad

En este anexo se realizan algunas demostraciones de afirmaciones que se han utilizado para resolver cierta clase de problemas y que no han sido justificadas debidamente en su momento: se demuestran dos teoremas que relacionan las funciones hipergeométrica y de Poisson con la función binomial. Así mismo, se enuncia una importante propiedad de la distribución geométrica y se deduce la fórmula para la función de probabilidad de Poisson.

F.1. Límite de la función de probabilidad binomial

La distribución binomial muestra la probabilidad de obtener un número determinado de éxitos en n intentos. Conforme el número de intentos va haciéndose mayor, la función binomial puede aproximarse por la de Poisson. El motivo de dicha aproximación es la simplicación de los cálculos, con la garantía de obtener resultados "suficientemente buenos".

En la tabla F.1 se puede ver cómo los valores de la binomial, conforme n se va haciendo más grande, pueden ser aproximados por la función de Poisson con parámetro $\lambda = np$.

De hecho, es cierta la siguiente:

Proposición 24 *Sea X variable aletoria binomial y sea $\lambda = np$ (constante), entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} P_B(X = k; n, p) = P_P(X = k; \lambda)$$

	Distribución binomial				de Poisson
k	$P_B(k;10,0,3)$	$P_B(k;100,0,03)$	$P_B(k;300,0,01)$	$P_B(k;1200,0,0025)$	$P_P(k;3)$
0	0.028248	0.047553	0.049041	0.049600	0.049787
1	0.121061	0.147070	0.148609	0.149174	0.149361
2	0.233474	0.225153	0.224414	0.224135	0.224042
3	0.266828	0.227474	0.225170	0.224322	0.224042
4	0.200121	0.170606	0.168877	0.168242	0.168031
5	0.102919	0.101308	0.100985	0.100861	0.100819
6	0.036757	0.049610	0.050153	0.050346	0.050409
7	0.009002	0.020604	0.021277	0.021523	0.021604
8	0.001447	0.007408	0.007871	0.008044	0.008102
9	0.000138	0.002342	0.002580	0.002670	0.002701
10	0,000006	0.000659	0.000758	0.000797	0.000810
11	0,000000	0.000167	0.000202	0.000216	0.000221
12	0,000000	0.000038	0.000049	0.000054	0.000055
13	0,000000	0.000008	0.000011	0.000012	0.000013
14	0,000000	0.000002	0.000002	0.000003	0.000003

Tabla F.1: Comparación de las funciones de probabilidad binomial y de Poisson

Antes de probar la proposición 24, enunciaremos dos importantes propiedades, que son demostradas en un curso estándar de *Análisis matemático I* y que son utilizadas de manera informal (no explícita) en cursos de *cálculo*:

1. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales convergentes, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

2. El número e o de Euler se define como el límite de la sucesión convergente $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Es posible generalizar esta definición en el siguiente sentido: se demuestra que, dada una sucesión (a_n) de números reales absolutamente divergente ($\lim_{n\to\infty}(|a_n|) = \infty$), entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

De esta forma, resulta sencillo, apoyándose en estos dos enunciados, demostrar la proposición 24. En efecto:

$$\begin{aligned}
\text{lím}_{n\to\infty} P_B(k;n,p) &= \text{lím}_{n\to\infty}\left\{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right\} = \\
&= \text{lím}_{n\to\infty}\left\{\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right\} = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\,\text{lím}_{n\to\infty}\left\{\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right\} = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\,\text{lím}_{n\to\infty}\left\{\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{-\lambda}}\right)^{\frac{n}{-\lambda}}\right]^{-\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right\} = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot e^{-\lambda}\cdot 1 = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} = P_P(k;\lambda)
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad es cierta por:

- $\text{lím}_{n\to\infty}\frac{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} = \text{lím}_{n\to\infty}\frac{n^k+p(n)}{n^k} = 1$, con $p(n)$ polimomio de grado menor que k.
- $\text{lím}_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n/(-\lambda)}\right)^{n/(-\lambda)}\right]^{-\lambda} = e^{-\lambda}$, por la proposición segunda anteriormente enunciada con $a_n = n/(-\lambda)$.
- $\text{lím}_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$.

De esta forma, queda completa la demostración. ■

Ejercicio

Es conocido el hecho de que cierto tipo de bacterias poseen, además de sus cromosomas, otras estructuras de ADN llamadas factores de resistencia. Estos factores confieren a la bacteria resistencia a uno o varios antibióticos. En un determinado medio el 0,06 por 100 de las bacterias poseen dicha propiedad. Sobre una población de 10 000, se desea saber: la probabilidad de que el número de bacterias poseyendo dicha resistencia sea superior a 5, pero inferior a 15.

F.2. Límite de la función de probabilidad hipergeométrica

La tabla 7.2 (página 197) muestra cómo la función hipergeométrica se aproxima más y más a la binomial conforme el cociente n/N se hace más pequeño. En esta sección, vamos a demostrar formalmente este hecho, calculando el límite de la función de probabilidad hipergeométrica cuando, fijado n, la población se hace más y más grande. En concreto:

Proposición 25 *Sea X variable aleatoria hipergeométrica, entonces, para cada n arbitrario, pero fijo, se tiene:*

$$\lim_{N\to\infty} P_{HG}(X=k;N,n,p) = P_B(X=k;n,p)$$

Demostración. Por la defínción de función de probabilidad hipergeométrica, se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} P_{HG}(X=k;N,n,p) &= \lim_{N\to\infty} \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{(Np)!\cdot(Nq)!\cdot(N-n)!\cdot n!}{(Np-k)!\cdot k!\cdot(Nq-n+k)!\cdot(n-k)!N!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \lim_{N\to\infty} \frac{(Np)!\cdot(Nq)!\cdot(N-n)!}{(Np-k)!\cdot(Nq-n+k)!\cdot N!}
\end{aligned}$$

Simplificando, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{(Np)!\cdot(Nq)!\cdot(N-n)!}{(Np-k)!\cdot(Nq-n+k)!\cdot N!} &= \frac{(Np)\ldots(Np-k+1)\cdot(Nq)\ldots(Nq-n+k+1)}{N\ldots(N-n+1)} = \\
&= \frac{N^{k+n-k}p^k(1-p)^{n-k}+A(N)}{N^n+B(N)} = \\
&= \frac{N^n p^k(1-p)^{n-k}+A(N)}{N^n+B(N)}
\end{aligned}$$

Donde $A(N)$ y $B(N)$ representan dos polinomios en N de grado menor que n. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} P_{HG}(X=k;N,n,p) &= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \lim_{N\to\infty} \frac{N^n p^k(1-p)^{n-k}+A(N)}{N^n+B(N)} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} p^k(1-p)^{n-k} = P_B(X=k;n,p) \blacksquare
\end{aligned}$$

F.3. "Memoria" de la distribución geométrica

Dada una variable aleatoria discreta X, que puede tomar los valores x_1, $\ldots, x_n$, en muchas circunstancias, interesa calcular la probabilidad *acumulada* de que la variable aleatoria tome cualquier valor a partir de (o hasta) uno dado; así aparecen expresiones del tipo: $P(X \geq x_k)$, $P(X \leq x_k)$, $P(X > x_k)$, $P(X < x_k)$. Por ejemplo, sea X la variable aleatoria "suma de los números de las caras superiores en el lanzamiento de dos dados", ¿cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 9?: $P(X > 9) = P(X \geq 10) = P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) = (3 + 2 + 1)/36 = 1/6$.

La distribución geométrica es un caso particular de la binomial negativa: describe la probabilidad de que la variable aleatoria X "número de fallos antes del primer éxito (parámetro $n = 1$)" tome los valores 0, 1, 2, 3, ...

La propiedad que se enuncia a continuación muestra cómo la probabilidad de que la varible aleatoria X sea mayor o igual que un determinado valor es independiente, en cierto sentido, de los intentos anteriores, por ello se habla de *pérdida de memoria de la variable aleatoria con distribución geométrica.* En concreto:

Proposición 26 *Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de probabilidad y parámetro p (probabilidad de éxito en un ensayo independiente) y sean s y t dos números enteros positivos, entonces:*

$$P_G(X > s + t \mid X > s) = P_G(X \geq t)$$

Demostración. La función de probabiliadad asociada a la distribución geométrica, con parámetro p (probabilidad de éxito en un ensayo independiente), es:

$$P_G(X = k) = p \cdot (1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} P_G(X > s + t \mid X > s) &= \tfrac{P_G[(X>s+t)\cap(X>s)]}{P_G(X>s)} = \tfrac{P_G(X>s+t)}{P_G(X>s)} = \\ &= \tfrac{\sum_{k\geq s+t+1} P(X=k)}{\sum_{k\geq s+1} P(X=k)} = \tfrac{\sum_{k\geq s+t+1} p(1-p)^k}{\sum_{k\geq s+1} p(1-p)^k} = \\ &= (1-p)^t = \textstyle\sum_{k\geq t} p(1-p)^k = P_G(X \geq t) \blacksquare \end{aligned}$$

Por otro lado, observe que los parámetros s y t son ambos enteros positivos y que, sin embargo, la variable aleatoria "número de fallos antes del primer éxito" puede tomar también el valor 0. Un ejemplo es suficiente para mostrar que la condición sobre los parámetros es *necesaria* y que, por lo tanto, no es "prescindible": la proposición no se cumple en general si se permite que alguno de los parámetros s o t tome el valor 0. Supongamos, por ejemplo, la variable aleatoria "número de sellos antes de la primera cara en el lanzamiento de una moneda (no trucada)". El experimento es de carácter binomial con parámetro de éxito $p = 1/2$, entonces:

$$\begin{aligned} P(X > 1 + 0 | X > 0) = \tfrac{P[(X>1)\cap(X>0)]}{P(X>0)} &= \tfrac{P(X>1)}{P(X>0)} = \\ &= \tfrac{1-[P(X=1)+P(X=0)]}{1-P(X=0)} = \\ &= \tfrac{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \neq 1 = P(X \geq 0) \end{aligned}$$

Una lectura, en términos de *memoria*, que se debe hacer de esta observación es la siguiente: "la distribución geométrica *recuerda* que la probabilidad de éxito en un ensayo independiente es p".

Ejercicios

1. Para el experimento del lanzamiento de una moneda, con variable aleatoria X (número de sellos antes de la primera cara) demuestre que:

$$P(X > 1 + 1|X > 1) = P(X \geq 1) = 1/2$$

2. Justifique con un contraejemplo que la distribución asociada a la variable aleatoria "suma de los números de las caras superiores en el lanzamiento de dos dados" no cumple la propiedad 26: ¿contradice esto la proposición?

F.4. Deducción de la función de probabilidad de Poisson

La distribución de Poisson permite calcular la probabilidad de que ocurra un número de eventos independientes a velocidad constante en el tiempo o el espacio, sabiendo que la ocurrencia promedio es λ. En la sección 7.2.6, se definió la función de probabilidad, mas no fue obtenida.

Sea $P(k;t)$ la probabilidad de tener, de manera exacta, k ocurrencias en un intervalo de tiempo t: ¿es posible encontrar una fórmula que dé P en función de los parámetros?

Lo primero que se debe hacer es restringir el estudio al tipo de situaciones que se desea describir. Por ello, se impone:

1. En el intervalo de tiempo que deseamos analizar, los eventos son independientes.
2. La frecuencia v de ocurrencia es constante y positiva ($v > 0$).
3. La probabilidad de una ocurrencia en un intervalo de tiempo *suficientemente pequeño* dt es igual a vdt.
4. La probabilidad de más de una ocurrencia en el intervalo dt es despreciable (muy próxima a cero).

Bajo estos presupuestos, como el evento en el intervalo de tiempo $t + dt$ ha ocurrido k veces, se tienen dos posibles situaciones:

- Todas las ocurrencias se dan en el intervalo t; entonces, debido a la independencia, la probabilidad de que esto suceda es: $P(k;t) \cdot (1 - vdt)$.

- $k-1$ ocurrencias se dan en el intervalo t y una en el intervalo dt; entonces, debido a la independencia, la probabilidad de que esto suceda es: $P(k-1;t)\cdot vdt$.

En conclusión, la probabilidad total de tener k ocurrencias en el intervalo $t+dt$ es:

$$P(k;t+dt) = P(k;t)\cdot(1-vdt) + P(k-1;t)\cdot vdt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(k;t+dt)-P(k;t)}{dt} = v[P(k-1;t)-P(k;t)]$$

De esta forma, si se toma el límite cuando el intervalo dt se hace más y más pequeño ($dt \to 0$), se tiene, por la definición de derivada:

$$\lim_{dt\to 0} \frac{P(k;t+dt)-P(k;t)}{dt} \equiv \frac{dP(k;t)}{dt} = v[P(k-1;t)-P(k;t)] \qquad \text{(F.1)}$$

La ecuación diferencial (F.1) se utiliza ahora para obtener, de forma recurrente, los valores de la probabilidad con 0, 1, 2, ... ocurrencias, esto es, para obtener: $P(0;t)$, $P(1;t)$, $P(2;t)$ ... En primer lugar, si $k=0$, la ecuación (F.1) queda en la forma:

$$\frac{dP(0;t)}{dt} = -vP(0;t)$$

Obviamente: $P(-1;t)=0$ (¿qué significa que un suceso se ha verificado -1 veces?) y, por otro lado, $P(0;t)\neq 0$, puesto que en caso contrario, de la ecuación $P'(0;t)=-vP(0;t)$, se deduciría que la probabilidad de tener 0 ocurrencias en cualquier intervalo t es siempre 0, lo cual no tiene sentido en las condiciones del problema. De esta forma, por separación de variables e integración, se concluye:

$$\frac{P'(0;t)}{P(0;t)} = -v \Rightarrow \int \frac{P'(0;t)}{P(0;t)}dt = \int -vdt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln P(0;t) = -vt + \ln C \Rightarrow P(0;t) = Ce^{-vt}$$

Además, para $t=0$, se tiene la condición inicial $P(0;0)=1$ (es seguro que un evento no ocurra en un intervalo de longitud 0); entonces: $C=1$ y, por lo tanto:

$$P(0;t) = e^{-vt} \qquad \text{(F.2)}$$

Por otro lado, de las ecuaciones (F.1) y (F.2), se induce el problema de valor inicial (PVI) siguiente:

$$\begin{cases} P'(1;t) = -vP(1;t) + ve^{-vt} \\ P(1;0) = 0 \end{cases}$$

Para ello, es suficiente sustituir (F.2) en (F.1) y tener en cuenta que la probabilidad de que tener una ocurrencia en un intervalo de tiempo 0 es nula ($P(1;0) = 0$).

La teoría de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden permite afirmar entonces que el PVI anterior tiene solución única igual a[1]:

$$P(1;t) = vte^{-vt} \tag{F.3}$$

De manera similar, se procede para obtener $P(2;t)$: se sustituye (F.3) en (F.1) y se considera la condición inicial $P(2;0) = 0$. Así, de forma recurrente, se demuestra, para cualquier k entero no negativo que:

$$P(k;t) = \frac{(vt)^k e^{-vt}}{k!}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Obteniendo, de esta forma, la fórmula de la función de probabilidad de la variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = vt$ (siempre que $P(k;0) = 0$).

[1]En concreto, se demuestra el siguiente teorema ($C(J) = \{f : J \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ continua}\}$):

Teorema 3 *Sean a y $b \in C(J)$, y sea $t_0 \in J$, entonces el problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admite solución única global dada por:

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} \left(b(s) e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds \right) \right], \; t \in J$$

En el caso particular que se está estudiando: $a(t) = -v$, $b(t) = ve^{-vt}$, $y(t) = P(1;t)$ y $t_0 = 0$.

Anexo G

Desigualdad de Chebishev

En la sección 7.3 se introdujeron las nociones fundamenteles de esperanza matemática ($E(X) = \mu$) y varianza ($V(X) = \sigma^2$) de una variable aleatoria discreta X, como medidas de centralización y dispersión de una distribución de probabilidad. Es evidente que si σ^2 es pequeña entonces $|X - \mu|$ no puede ser grande para muchos puntos del espacio muestral. Con otras palabras, el tamaño de σ^2 limita la probabilidad de grandes desviaciones de la variable aleatoria X. En concreto, se demuestra que:

Teorema 4 (Desigualdad de Chebishev) *Sea (P, E, U) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria sobre E con esperanza matemática (finita) μ y varianza σ^2. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, se verifica:*

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Demostración. Sea el suceso A definido por: $A = \{s \in E \,|\, |X(s) - \mu| \geq \varepsilon\}$. Por definición de varianza se tiene que:

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in E} [X(s) - \mu]^2 \cdot P(\{s\})$$

Por otro lado, $E = A \cup A^c$, donde A^c representa el suceso complementario del suceso A, esto es: $A^c = \{s \in E \,|\, |X(s) - \mu| < \varepsilon\}$, luego:

$$\sigma^2 = \sum_{x \in A} [X(s) - \mu]^2 \cdot P(\{s\}) + \sum_{x \in A^c} [X(s) - \mu]^2 \cdot P(\{s\})$$

Y, como todos los términos de la forma $[X(s) - \mu]^2 \cdot P(\{s\})$ son positivos, se concluye que:

$$\sigma^2 \geq \sum_{x \in A} [X(s) - \mu]^2 \cdot P(\{s\})$$

Ahora bien, por definición de A, para todo $s \in A$:

$$|X(s) - \mu| \geq \varepsilon \Rightarrow [X(s) - \mu]^2 \geq \varepsilon^2$$

Luego:

$$\sigma^2 \geq \sum_{x \in A} [X(s) - \mu]^2 \cdot P(\{s\}) \geq \sum_{x \in A} \varepsilon^2 \cdot P(\{s\}) = \varepsilon^2 \cdot \sum_{x \in A} P(\{s\}) = \varepsilon^2 \cdot P(A)$$

En conclusión:

$$\sigma^2 \geq \varepsilon^2 \cdot P(A) \Rightarrow P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \blacksquare$$

Si relee el enunciado del teorema 4, se dará cuenta de que no se ha especificado que la variable aleatoria sea discreta: la desigualdad de Chebishev (1821–1894) es válida para variables aleatorias discretas (finitas o numerables) y continuas. Bien entendido, en esta oportunidad, el símbolo sumatoria representa tanto una suma finita, como una suma infinita o una integral, según como sea la variable aleatoria X (finita, numerable o continua).

La virtud principal de la desigualdad de Chebishev es, por lo tanto, su generalidad: es válida para cualquier variable aleatoria con esperanza matemática finita. Si la variable aleatoria es finita (toma un conjunto finito de valores $x_1, \ldots, x_n$ con probabilidad $P_k = P(X = x_k)$, k variando entre 1 y n), entonces la esperanza matemática ($E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P_k$) está siempre bien definida (es un número real). Sin embargo, si se tiene una variable aleatoria discreta numerable X que toma los valores $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con probabilidad $P_k = P(X = x_k)$, la esperanza puede no tener sentido: designa una serie *no convergente* (*oscilante* o *divergente*).

Ejemplo 20 *Sea la variable aleatoria discreta (VAD) X que toma los valores $x_k = \frac{2^k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, con probabilidad $P_k = P(X = x_k) = \frac{1}{2^k}$, para todo k. ¿Cuál es el valor de la esperanza matemática de la VAD X?*

Lo primero que se debe observar es que P es función de probabilidad, puesto que $\sum_{k \in \mathbb{N}} P_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1$. En segundo lugar, la defnición 45 de esperanza matemática (p.209) ha sido enunciada para una VAD finita; por similitud, se define para una VAD numerable:

$$E(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k P_k$$

Entonces, en el ejemplo, se tiene:

$$E(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k P_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^k}{k} \cdot 2^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} = +\infty$$

De esta forma, para poder definir la esperanza matemática de una VAD numerable es necesario exigir convergencia de la serie numérica asociada. Con otras palabras, se restringe el estudio de VAD numerables que verifiquen la condición necesaria:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k P_k \in \mathbb{R}$$

Sin embargo, esto no es suficiente: una reorganización de términos de una serie puede modificar el valor de ésta; con otras palabras, en general la propiedad conmutativa no es cierta para las series.

Ejemplo 21 *Sea la variable aleatoria discreta (VAD) X que toma los valores $x_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k} 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, con probabilidad $P_k = P(X = x_k) = \frac{1}{2^k}$, para todo k. ¿Cuál es el valor de la esperanza matemática de la VAD X?*

Como en el ejemplo 20, la distribución es de probabilidad, puesto que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1$. Sin embargo, el orden en que se realiza la serie que define la esperanza matemática determina el valor que toma ésta. En concreto, se demuestra que, para la distribución del ejemplo, según cómo se tomen los términos de la serie, la esperanza matemática toma el valor $\ln(2)$ o $\frac{3}{2}\ln(2)$:

1. Si no se reorganizan los términos de la serie el valor que se le asigna a la esperanza matemática es: $\ln(2)$. En efecto, teniendo en cuenta el desarrollo en serie:

   $$\ln(1+x) = -\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$

   Se concluye que:

   $$\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k P_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = -\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = -\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k} = \ln(2)$$

2. Si se reorganizan los términos de la serie en la forma:

   $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

La suma de la serie es $\frac{3}{2}\ln(2)$. Para demostrar esto es preciso introducir la constante γ de Euler (1707–1783) y algunas relaciones de sumas de fracciones alícuotas o unitarias[1].

Sea la suma H_n de las n primeras fracciones alícuotas:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Entonces, se demuetra la siguiente:

Proposición 27 *La sucesión* $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente en* $(0;\infty)$.

Demostración. Es suficiente demostrar que la sucesión está acotada inferiormente y es monótona no creciente. En efecto:

1. $H_n - \ln(n) \geq 0$, para todo $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} H_n - \ln(n) = H_n - \int_1^n \frac{dx}{x} &= H_n - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \right) = \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0 \Rightarrow H_n - \ln(n) \geq 0 \end{aligned}$$

   Puesto que todas las integrales son positivas:

$$k \leq x \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$$

   Y, por lo tanto, para cada número natural n, arbitrario pero fijo, $H_n - \ln(n) \geq 0$, ya que puede ser expresado con suma de un conjunto finito de términos positivos.

2. $H_n - \ln(n) \geq H_{n+1} - \ln(n+1)$, para todo $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} H_n - \ln(n) \geq H_{n+1} - \ln(n+1) &\iff \ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right) \geq H_{n+1} - H_n \iff \\ &\iff \textstyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

   Que es cierto siempre, puesto que el integrando es mayor que $\frac{1}{n+1}$:

$$n \leq x \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1} \blacksquare$$

[1] Fracciones de la forma $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definición 47 (Número γ de Euler) *Se llama número de Euler y se designa por la letra griega γ (se lee, gamma), al límite de la sucesión $(H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Esto es:*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} [H_n - \ln(n)]$$

El valor aproximado es de 0,5772281648. Dicho valor puede obtenerse fácilmente con un *software* especializado, que permita programar y realizar cálculos complejos con un costo mínimo. El valor dado se ha obtenido con `Mathematica`, para $n = 40\,000$, esto es:

$$0,5772281648 \approx H_{40\,000} - \ln(40\,000)$$

Corolario 4 *Sea H_n la suma de las n primeras fracciones alícuotas y γ la constante de Euler, entonces exite una sucesión (ε_n) convergente a cero ($\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$) tal que, para cada n, se verifica:*

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

Demostración. Se sigue inmediatamente de la proposición 27 y de la definición 47 del número γ de Euler. ■

Denotemos ahora:

$$P_n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot H_n$$
$$I_n = 1 + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{2n-1} = \left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2n}\right) - \left(\tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2n}\right) = H_{2n} - P_n$$

De esta forma, se tienen las dos relaciones fundamentales:

$$P_n = \frac{1}{2}H_n; \quad I_n = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n$$

Volviendo a nuestro problema inicial, la reorganización de la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ dada (p.255), puede escribirse en la forma:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = I_{2n} - \frac{1}{2}H_n$$

De tal forma, que:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= I_{2n} - \tfrac{1}{2}H_n = H_{4n} - \tfrac{1}{2}H_{2n} - \tfrac{1}{2}H_n = \\
&= \ln(4n) + \gamma + \varepsilon_{4n} - \tfrac{1}{2}[\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}] - \\
&\qquad -\tfrac{1}{2}[\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n] \\
&= \ln(4n) - \tfrac{1}{2}\ln(2n) - \tfrac{1}{2}\ln(n) + \\
&\qquad +\varepsilon_{4n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{2n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_n \\
&= \ln(4) + \ln(n) - \tfrac{1}{2}\ln(2) - \tfrac{1}{2}\ln(n) - \tfrac{1}{2}\ln(n) + \\
&\qquad +\varepsilon_{4n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{2n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_n \\
&= \ln(2^2) - \tfrac{1}{2}\ln(2) + \varepsilon_{4n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{2n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_n \\
&= 2\ln(2) - \tfrac{1}{2}\ln(2) + \varepsilon_{4n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{2n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_n \\
&= \tfrac{3}{2}\ln(2) + \varepsilon_{4n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_{2n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon_n
\end{aligned}$$

Luego, calculando el límite cuando n tiende a infinito, se tiene:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\ln(2) + \varepsilon_{4n} - \frac{1}{2}\varepsilon_{2n} - \frac{1}{2}\varepsilon_n\right) = \frac{3}{2}\ln(2)$$

De esta forma, se motiva la necesidad de una condición adicional que permita asegurar que el orden en que se toman los términos de la sumatoria no condicione el valor que tome la esperanza matemática.

Definición 48 (Incondicionalmente convergente) *Una serie numérica real $\sum_{n\in I} a_n$, con I conjunto de índices numerable, se llama* incondicionalmente convergente *si es convergente y cualquier reordenación suya converge al mismo valor.*

Se comprueba que la convergencia absoluta es condición suficiente y necesaria para la convergencia incondicional de una serie, esto es:

$$\sum_{n\in I} a_n \text{ abs. convergente} \iff \sum_{n\in I} a_n \text{ incond. convergente}$$

Por lo tanto, para que la esperanza matemática quede unívocamente determinada se exigirá la convergencia absoluta de la serie:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k| P_k < +\infty$$

De esta forma, se define:

Definición 49 (Esperanza matemática) *Dado un espacio de probabilidad (P,E,U) y X una VAD numerable, que toma los valores x_k, $k \in \mathbb{N}$, con probabilidad P_k ($P_k = P(X = x_k)$), de forma que:*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k| P_k < +\infty$$

Entonces, se llama esperanza matemática de la VAD X, se denota por μ o $E(X)$, al número real:

$$\mu = E(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \cdot P_k$$

La defińción 49 es una generalización de la definición 45 (p.209): a toda VAD finita X, que puede tomar los valores $k_1, \ldots, k_n$ con probabilidad $P(X = k_i) = P_i$, se le puede asociar la VAD numerable X' que toma los valores $(k'_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tal que $k'_i = k_i$ $(1 \leq i \leq n)$ y $k'_i = i$ $(i > n)$, con probabilidad:

$$P(X' = k'_i) = \begin{cases} P_i & \text{si} \quad 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{si} \quad i > n \end{cases}$$

Por otro lado, una discusión similar puede hacerse para variables aleatorias continuas, llegando a la definición:

Definición 50 (Esperanza matemática) *Dado un espacio de probabilidad (P,E,U) y X una variable aleatoria continua (VAC), con función de densidad f, se llama esperanza matemática de la VAC X, se denota por μ o $E(X)$, al número real:*

$$\mu = E(X) = \int_{k\in\mathbb{R}} x \cdot f(x)dx$$

supuesta absolutamente convergente la integral ($\int_{k\in\mathbb{R}} |x| \cdot f(x)dx < +\infty$).

Por otro lado, toda vez que la esperanza matemática queda perfectamente definida, se puede definir la llamada *ley débil de los grandes números*. De hecho, una de las consecuencias teóricas fundamentales de la desigualdad de Chebishev es este teorema. La definición frecuencial de probabilidad se basa en la siguiente idea: *un muestra aislada de un experimento aleatorio no es representativa del comportamiento general de éste; sin embargo, todo experimento aleatorio presenta regularidades en un conjunto "grande" de repeticiones (ley del azar).*

Con razón, el adjetivo "grande" va entre comillas: en las simulaciones realizadas, siempre queda la duda de cuántas veces debe repetirse un experimento aleatorio, para admitir que la estabilización de las frecuencias relativas es representativa de las probabilidades asignadas a los sucesos posibles de un experimiento aleatorio. El teorema de los grandes números asegura que el promedio $\overline{x}$ de n observaciones independientes de una variable aleatoria X con esperanza matemática finita $\mu = E(X)$ y varianza σ^2, *converge en probabilidad* a μ para $n \to \infty$; esto es, la probabilidad de que $\overline{x}$ difiera de μ en más de una cantidad $\varepsilon > 0$ (arbitraria, pero fija) se hace tan pequeña como se quiera cuando n tiende a infinito.

Antes de enunciar y demostrar el teorema débil de los grandes números, es preciso observar que una serie de n observaciones pueden ser tomadas como una sola observación n-dimensional. De esta forma, cada componente representa una variable aleatoria, independientes las unas de las otras, pero idénticamente distribuidas (con igual esperanza matemática y varianza, por lo tanto).

Teorema 5 (Ley débil de los grandes números) *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, pero idénticamente distribuidas. Para cada n, se define $S_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$; entonces, para cada $\varepsilon > 0$, se tiene:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

0, equivalentemente:

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

Demostración. Como todas las variables aleatorias X_i están identicamente distribuidas tienen la misma esperanza matemática y la misma varianza, por lo tanto:

$$E(S_n) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{E(X_1) + \ldots + E(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$V(S_n) = V\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{V(X_1) + \ldots + V(X_n)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

De esta forma, por la desigualdad de Chebishev para la variable aleatoria S_n, se concluye:

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2} \iff P(|S_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Y, por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$, por pequeño que sea, se tiene:

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} P(|S_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} = 0$$

Y, por el *teorema de sandwich*, queda completa la demostración. ■

Por último, para terminar este anexo, vamos a aplicar la desigualdad de Chebishev en varios ejemplos. Si hasta ahora hemos hablado de la virtud indiscutible de dicha desigualdad, en lo que sigue se pretende contrastar la bondad de la acotación realizada y su posible uso en la prática.

Ejemplo 22 *Sea X una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 1/4$. Compare $P(|X - \mu| \geq \varepsilon)$ con $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$, para $\varepsilon = 1/2, 1$ y 3/2.*

La esperanza matemática y la varianza de una distribución binomial son iguales a np y npq, respectivamente (p.207). Por lo tanto, en este caso se tiene:

$$\mu = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1; \quad \sigma^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

De esta forma, es preciso calcular las probabiliades $P_B(|X - 1| \geq \varepsilon)$, donde ε toma los valores 1/2, 1 y 3/2:

$$\begin{array}{l} P_B(|X-1| \geq 1/2) = P_B(X=0) + P_B(X=2) + P_B(X=3) + P_B(X=4) \\ P_B(|X-1| \geq 1) = P_B(X=0) + P_B(X=2) + P_B(X=3) + P_B(X=4) \\ P_B(|X-1| \geq 3/2) = P_B(X=3) + P_B(X=4) \end{array}$$

Los valores que toma la función de probabilidad pueden determinarse por medio de la defínción 37 de la binomial (p.188) o utilizando la tabla H.1 (p.267), sabiendo que se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 1/4$. Consideremos, por simplicidad, esta segunda opción:

$$\begin{array}{l} P_B(|X-1| \geq 1/2) = 0,3164 + 0,2109 + 0,0469 + 0,0039 = 0,5781 \\ P_B(|X-1| \geq 1) = P_B(|X-1| \geq 1/2) = 0,5781 \\ P_B(|X-1| \geq 3/2) = 0,0469 + 0,0039 = 0,0508 \end{array}$$

Entonces, si se designa por $A = \{|X - \mu| \geq \varepsilon\}$, es posible observar que la acotación de $P(A)$ por σ^2/ε^2 no siempre es muy buena (tabla G.1).

Ejemplo 23 *Sea la distribución de probabilidad uniforme X en los puntos 1, 2, 3, 4 y 5. Grafique, para $\varepsilon > 0$, las dos funciones siguientes: $P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$ y σ^2/ε^2.*

μ	ε	$P(A)$	σ^2	σ^2/ε^2	$\sigma^2/\varepsilon^2 - P(A)$
1	1/2	0,5781	3/4	3	2,4219
1	1	0,5781	3/4	3/4	0,1719
1	3/2	0,0508	3/4	1/3	0,2825

Tabla G.1: Acotación de Chebishev

La esperanza matemática y la varianza de una distribución discreta uniforme son iguales a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ y $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, respectivamente (tabla 7.2.6). Por lo tanto, en este caso se tiene:

$$\mu = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} i = \frac{1}{5}\cdot\frac{5(5+1)}{2} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}[(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2] = \frac{1}{5}\cdot 10 = 2$$

De esta forma, las funciones de ε que se desea graficar y comparar son:

$$f(\varepsilon) = P(|X-3| \geq \varepsilon); \quad g(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon^2}$$

La función g es muy conocida. Por otro lado, es fácil mostrar, que la función f es una función definida a trozos por la regla:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} P(X=1) + P(X=2) + P(X=4) + P(X=5) = \frac{4}{5} & \text{si } 0 < \varepsilon \leq 1 \\ P(X=1) + P(X=5) = \frac{2}{5} & \text{si } 1 < \varepsilon \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < \varepsilon \end{cases}$$

La representación gráfica de las funciones f y g (figura G.1) permite hacer un análisis muy preciso de los valores de ε para los cuales la acotación dada por la desigualdad de Chebishev para el valor $P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$ es buena.

Según el parámero ε, ¿la desigualdad de Chebishev da una acotación "fina" o "vasta"? ¿Qué sucede si ε es un valor muy próximo a 0? ¿Qué sucede si ε es un valor muy próximo a 2? ¿Qué sucede si ε es un valor "suficientemente grande"?

En general, la acotación de $P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$ por la desigualdad de Chebishev no es buena: la diferencia entre el valor de la probabilidad $P(|X-\mu| \geq \varepsilon)$ y $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ es, en muchos casos, demasiado grande. Por ello, se acepta que la desigualdad de Chebishev tiene implicaciones teóricas muy importantes, pero que, sin embargo, su uso práctico es restringido.

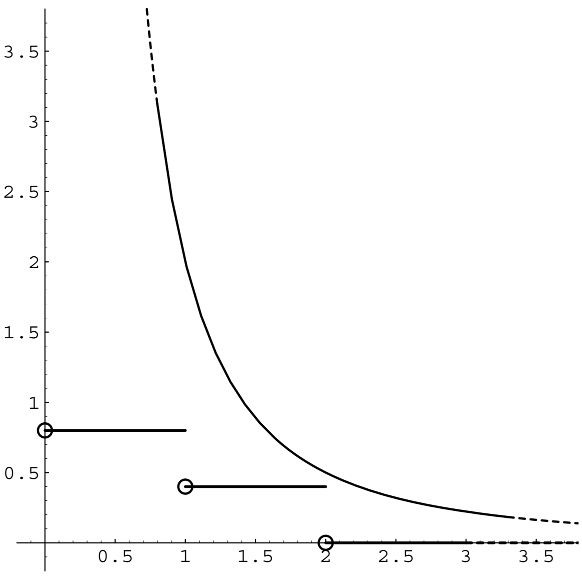


Figura G.1: Estudio funcional de la acotación dada por la desigualdad de Chebishev según el parámetro ε.

Ejercicios

1. Sea X una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 1/8$. Analice la diferencia de los valores $P(|X - \mu| \geq \varepsilon)$ y $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$, para $\varepsilon = 1/2, 1$ y $3/2$. Compare los resultados obtenidos con el ejemplo 22.

   Nota: Para obtener los valores de la probabilidad de tener 0, 1, 2, 3 o 4 éxitos, al igual que en el ejercicio 22, se puede utilizar la definición de función binomial o la tabla H.1 (p.267). En este caso, la utilización de la tabla no es tan evidente: la función de distribución binomial con parámetro $p = 1/8$ no ha sido tabulada. Una solución es tomar como valores aproximados la media aritmética de los valores de la binomial con parámetro $p = 0,10$ y $p = 0,15$ (¿por qué?). Complete la tabla:

k	$P_B(X = k; 4, 1/8)$	$[P_B(X = k; 4, 0,10) - P_B(X = k; 4, 0,15)]/2$
0		
1		
2		
3		
4		

2. Sea X una VAD finita que toma los valores 0, 1, 2, ..., n y tal que la esperanza y la varianza sean iguales a 1 ($\mu = \sigma^2 = 1$). Demostrar que $P(X \geq 3) \leq 1/4$. De manera análoga, muestre que, para $k = 4, 5, \ldots, n$, se verifica:

$$P(X \geq k) \leq 1/(k-1)^2$$

3. Demostrar que al menos uno de los números $P(X-\mu \geq \varepsilon)$ o $P(X-\mu \leq -\varepsilon)$ es menor o igual que $\sigma^2/2\varepsilon^2$.

4. Realice la suma de la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ organizando los términos en la forma:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

Demuestre entonces, utilizando los términos I_n y P_n y el número γ de Euler, que la suma es igual a $\ln(2)$.

5. Se ha definido la esperanza matemática de una VAD numerable. Para ello, ha sido necesario justificar primero la necesidad de la convergencia absoluta de la serie numérica. Por otro lado, se ha afirmado que la desigualdad de Chebishev es válida para toda variable aleatoria con esperanza finita. ¿Cómo se define la esperanza matemática para una variable aleatoria continua? ¿Es suficiente asegurar la convergencia de la integral asociada para concluir la existencia de esperanza matemática? Un análisis similar al que se ha realizado, debe conducir a definir correctamente la esperanza matemática de una variable aletoria continua: la convergencia de series debe ser interpretada en términos de integrales (extensión natural de la sumatoria para una variable continua).

6. El número medio de personas que acuden a un locar es 1 000 con una desviación típica de 20. ¿Cuál es el número de sillas necesarias para asegurar que todos los asistentes puedan sentarse con una probabilidad de 0,75?

Anexo H

Tablas de las distribuciones discretas de probabilidad

Como se ha establecido en el capítulo 7, a la hora de utilizar las fórmulas de las distribuciones discretas de probabilidad, es preciso, en muchos casos, realizar una gran cantidad de cálculos.

Cuando la estadística empezó a desarrollarse vigorosamente, para realizar estos cálculos no se disponía de calculadoras científicas de bolsillo ni, mucho menos, de un microordenador que permitiera organizar y procesar los datos cuantiosos que en ocasiones es necesario. Se construyeron extensas tablas *ad hoc* que constituían unas rudimintarias, pero muy útiles, "calculadoras de papel"[1].

En la actualidad, si bien todo el mundo dispone de calculadoras científicas, que permiten organizar los cálculos de forma más o menos "razonable", no es común que éstas permitan obtener de forma automática valores para las funciones de probabilidad dadas. En este contexto, las tablas estadísticas todavía no son obsoletas y prestan todavía una ayuda nada despreciable en la resolución de problemas.

Por ejemplo, si se está realizando una fase de exploración en un problema, antes de "lanzarse" a realizar largos cálculos precisos con una máquina, puede tomarse una tabla para tener una primera aproximación. Por otro lado, si se ha completado un problema, se puede cotejar si el resultado no difere mucho de los valores que se hubieran obtenido con una tabla. En el

[1]Todavía hoy se encuentran libros (desfasados) en el mercado que presentan tablas de logaritmos, raíces cuadradas, valores para las funciones trigonométricas, etc., para extensas listas de números; valores que, en todo caso, se obtienen con mucha más precisión y muy rápidamente con una calculadora científica.

primer caso, la lectura de la tabla sirve de *referente* a un trabajo futuro; en el segundo, las tablas permiten *detectar errores* “de bulto” que en muchas circunstacias podrían pasar desapercibidos.

Se presentan aquí algunas tablas para las variables aleatorias binomial, hipergeométrica, binomial negativa y de Poisson obtenidas con el *software* `Mathematica`. En las tablas para la binomial, con $n = 1$, se tiene tabulada la variable aleatoria de Bernouilli. En las de la binomial negativa, también con parámetro $n = 1$, queda tabulada la variable aleatoria geométrica. No pretendemos ser exhausitivos (¿es esto posible en la construcción de tablas?), ni presentar una lista abundante de tablas: nuestra intención es la muestra de cómo pueden organizarse y presentarse los datos. Tablas extensas pueden encontrarse en Canavos (1984).

		Parámetro p (probabilidad de éxito en un ensayo independiente)										
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0100	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3772	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0012	0,0054	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3721	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2919	0,2734
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1443	0,1936	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0549	0,0313
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0313
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,0830	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1557	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0034	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0000	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
	5	0,0000	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0175
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1967	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,0914	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0042	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0001	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0000	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0690	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010

Tabla H.1: Valores de la función de la distribución binomial.

N	n	p	k	$P_{HG}(X=k)$
2	1	1/2	0	1/2
2	1	1/2	1	1/2
3	1	1/3	0	2/3
3	1	1/3	1	1/3
3	2	1/3	0	1/3
3	2	1/3	1	2/3
3	2	2/3	1	2/3
3	2	2/3	2	1/3
4	1	1/4	0	3/4
4	1	1/4	1	1/4
4	2	1/4	0	1/2
4	2	1/4	1	1/2
4	2	2/4	0	1/6
4	2	2/4	1	2/3
4	2	2/4	2	1/6
4	3	1/4	0	1/4
4	3	1/4	1	3/4
4	3	2/4	1	1/2
4	3	2/4	2	1/2
4	3	3/4	2	3/4
4	3	3/4	3	1/4
5	1	1/5	0	4/5
5	1	1/5	1	1/5
5	2	1/5	0	3/5
5	2	1/5	1	2/5
5	2	2/5	0	3/10
5	2	2/5	1	3/5
5	2	2/5	2	1/10
5	3	1/5	0	2/5
5	3	1/5	1	3/5
5	3	2/5	0	1/10
5	3	2/5	1	3/5
5	3	2/5	2	3/10
5	3	3/5	1	3/10
5	3	3/5	2	3/5
5	3	3/5	3	1/10
5	4	1/5	0	1/5
5	4	1/5	1	4/5
5	4	2/5	1	2/5
5	4	2/5	2	3/5
5	4	3/5	2	3/5
5	4	3/5	3	2/5
5	4	4/5	3	4/5
5	4	4/5	4	1/5

Tabla H.2: Valores de la función de la distribución hipergeométrica.

		Parámetro p (probabilidad de éxito en un ensayo independiente)									
n	s	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
	1	0,0475	0,0900	0,1275	0,1600	0,1875	0,2100	0,2275	0,2400	0,2475	0,2500
	2	0,0451	0,0810	0,1084	0,1280	0,1406	0,1470	0,1479	0,1440	0,1361	0,1250
	3	0,0429	0,0729	0,0921	0,1024	0,1055	0,1029	0,0961	0,0864	0,0749	0,0625
	4	0,0407	0,0656	0,0783	0,0819	0,0791	0,0720	0,0625	0,0518	0,0412	0,0313
	5	0,0387	0,0590	0,0666	0,0655	0,0593	0,0504	0,0406	0,0311	0,0226	0,0156
	6	0,0368	0,0531	0,0566	0,0524	0,0445	0,0353	0,0264	0,0187	0,0125	0,0078
	7	0,0349	0,0478	0,0481	0,0419	0,0334	0,0247	0,0172	0,0112	0,0069	0,0039
	8	0,0332	0,0430	0,0409	0,0336	0,0250	0,0173	0,0112	0,0067	0,0038	0,0020
	9	0,0315	0,0387	0,0347	0,0268	0,0188	0,0121	0,0072	0,0040	0,0021	0,0010
	10	0,0299	0,0349	0,0295	0,0215	0,0141	0,0085	0,0047	0,0024	0,0011	0,0005
	11	0,0284	0,0314	0,0251	0,0172	0,0106	0,0059	0,0031	0,0015	0,0006	0,0002
	12	0,0270	0,0282	0,0213	0,0137	0,0079	0,0042	0,0020	0,0009	0,0003	0,0001
	13	0,0257	0,0254	0,0181	0,0110	0,0059	0,0029	0,0013	0,0005	0,0002	0,0001
	14	0,0244	0,0229	0,0154	0,0088	0,0045	0,0020	0,0008	0,0003	0,0001	0,0000
	15	0,0232	0,0206	0,0131	0,0070	0,0033	0,0014	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000
	16	0,0220	0,0185	0,0111	0,0056	0,0025	0,0010	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	17	0,0209	0,0167	0,0095	0,0045	0,0019	0,0007	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
	18	0,0199	0,0150	0,0080	0,0036	0,0014	0,0005	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	19	0,0189	0,0135	0,0068	0,0029	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	20	0,0179	0,0122	0,0058	0,0023	0,0008	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
2	0	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
	1	0,0048	0,01800	0,0383	0,0640	0,0938	0,1260	0,1593	0,1920	0,2228	0,2500
	2	0,0068	0,0243	0,0488	0,0768	0,1055	0,1323	0,1553	0,1728	0,1838	0,1875
	3	0,0086	0,0292	0,0553	0,0819	0,1055	0,1235	0,1346	0,1382	0,1348	0,1250
	4	0,0102	0,0328	0,0587	0,0819	0,0989	0,1080	0,1093	0,1037	0,0927	0,07810
	5	0,0116	0,0354	0,0599	0,0786	0,0890	0,0908	0,0853	0,0746	0,0611	0,0469
	6	0,0129	0,0372	0,0594	0,0734	0,0779	0,0741	0,0647	0,0523	0,0392	0,0273
	7	0,0140	0,0383	0,0577	0,0671	0,0667	0,0593	0,0480	0,0358	0,0247	0,0156
	8	0,0149	0,0387	0,0552	0,0604	0,0563	0,0467	0,0351	0,0242	0,0153	0,0088
	9	0,0158	0,0387	0,0521	0,0537	0,0469	0,0363	0,0254	0,0161	0,0093	0,0049
	10	0,0165	0,0384	0,0487	0,0472	0,0387	0,0280	0,0181	0,0106	0,0056	0,0027
	11	0,0171	0,0377	0,0452	0,0412	0,0317	0,0214	0,0129	0,0070	0,0034	0,0015
	12	0,0176	0,0367	0,0416	0,0357	0,0257	0,0162	0,0091	0,0045	0,0020	0,0008
	13	0,0180	0,0356	0,0381	0,0308	0,0208	0,0122	0,0063	0,0029	0,0012	0,0004
	14	0,0183	0,0343	0,0347	0,0264	0,0167	0,0092	0,0044	0,0019	0,0007	0,0002
	15	0,0185	0,0329	0,0314	0,0225	0,0134	0,0068	0,0031	0,0012	0,0004	0,0001
	16	0,0187	0,0315	0,0284	0,0191	0,0107	0,0051	0,0021	0,0008	0,0002	0,0001
	17	0,0188	0,0300	0,0256	0,0162	0,0085	0,0038	0,0015	0,0005	0,0001	0,0000
	18	0,0189	0,0285	0,0229	0,0137	0,0067	0,0028	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
	19	0,0189	0,0270	0,0205	0,0115	0,0053	0,0021	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
	20	0,0188	0,0255	0,0183	0,0097	0,0042	0,0015	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000
3	0	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
	1	0,0004	0,0027	0,0086	0,0192	0,0352	0,0567	0,0836	0,1152	0,1504	0,1875
	2	0,0007	0,0049	0,0146	0,0307	0,0527	0,0794	0,1087	0,1382	0,1654	0,1875
	3	0,0011	0,0073	0,0207	0,0410	0,0659	0,0926	0,1177	0,1382	0,1516	0,1562
	4	0,0015	0,0098	0,0264	0,0492	0,0742	0,0972	0,1148	0,1244	0,1251	0,1172
	5	0,0020	0,0124	0,0314	0,0551	0,0779	0,0953	0,1045	0,1045	0,0963	0,0820
	6	0,0026	0,0149	0,0356	0,0587	0,0779	0,0889	0,0905	0,0836	0,0706	0,0547
	7	0,0031	0,0172	0,0390	0,0604	0,0751	0,0800	0,0757	0,0645	0,0499	0,0352
	8	0,0037	0,0194	0,0414	0,0604	0,0704	0,0700	0,0615	0,0484	0,0343	0,0220
	9	0,0043	0,0213	0,0430	0,0591	0,0645	0,0599	0,0488	0,0355	0,0231	0,0134
	10	0,0049	0,0230	0,0439	0,0567	0,0581	0,0503	0,0381	0,0255	0,0152	0,0081
	11	0,0055	0,0245	0,0441	0,0536	0,0515	0,0416	0,0293	0,0181	0,0099	0,0048
	12	0,0061	0,0257	0,0437	0,0500	0,0450	0,0340	0,0222	0,0127	0,0064	0,0028
	13	0,0067	0,0267	0,0428	0,0462	0,0390	0,0275	0,0166	0,0088	0,0040	0,0016
	14	0,0073	0,0275	0,0416	0,0422	0,0334	0,0220	0,0124	0,0060	0,0025	0,0009
	15	0,0079	0,0280	0,0401	0,0383	0,0284	0,0174	0,0091	0,0041	0,0016	0,0005
	16	0,0084	0,0284	0,0383	0,0345	0,0240	0,0137	0,0067	0,0028	0,0010	0,0003
	17	0,0089	0,0285	0,0364	0,0308	0,0201	0,0107	0,0048	0,0019	0,0006	0,0002
	18	0,0094	0,0285	0,0344	0,0274	0,0167	0,0084	0,0035	0,0012	0,0004	0,0001
	19	0,0099	0,0284	0,0323	0,0242	0,0139	0,0065	0,0025	0,0008	0,0002	0,0001
	20	0,0104	0,0281	0,0302	0,0213	0,0114	0,0050	0,0018	0,0005	0,0001	0,0000

Tabla H.3: Valores de la función de la distribución binomial negativa.

	Parámetro λ (n° promedio de veces que se verifica un suceso aleatorio)									
k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1840
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	Parámetro λ									
k	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
	Parámetro λ									
k	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
	Parámetro λ									
k	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0
0	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003
1	0,1057	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225	0,0149	0,0098	0,0064	0,0041	0,0027
2	0,1850	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618	0,0446	0,0318	0,0223	0,0156	0,0107
3	0,2158	0,1954	0,1687	0,1404	0,1133	0,0892	0,0688	0,0521	0,0389	0,0286
4	0,1888	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558	0,1339	0,1118	0,0912	0,0729	0,0573
5	0,1322	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714	0,1606	0,1454	0,1277	0,1094	0,0916
6	0,0771	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571	0,1606	0,1575	0,1490	0,1367	0,1221
7	0,0385	0,0595	0,0824	0,1044	0,1234	0,1377	0,1462	0,1490	0,1465	0,1396
8	0,0169	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849	0,1033	0,1188	0,1304	0,1373	0,1396
9	0,0066	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519	0,0688	0,0858	0,1014	0,1144	0,1241
10	0,0023	0,0053	0,0104	0,0181	0,0285	0,0413	0,0558	0,0710	0,0858	0,0993
11	0,0007	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143	0,0225	0,0330	0,0452	0,0585	0,0722
12	0,0002	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065	0,0113	0,0179	0,0263	0,0366	0,0481
13	0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028	0,0052	0,0089	0,0142	0,0211	0,0296
14	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0011	0,0022	0,0041	0,0071	0,0113	0,0169
15	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0009	0,0018	0,0033	0,0057	0,0090
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0014	0,0026	0,0045
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0012	0,0021
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

Tabla H.4: Valores de la función de la distribución de Poisson.

Bibliografía

BATANERO, M. C.; GODINO, J. D. Y NAVARRO, V. (1994). *Razonamiento combinatorio.* Madrid: Síntesis.

BOREL, E. (1950). *Elements of the theory of probability.* New Jersey: Prentice-Hall, 1965.

CANAVOS, G.C. (1984). *Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos.* México DF: McGRAW-HILL / Interamericana de México, 1988.

DUBOIS, J.-G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 37–57.

GANGOLLI, R.A. Y YLVISAKER, D. (1967). *Discrete probability.* New York: Harcourt Brace & World.

GODINO, J.D.; BATANERO, M.C. Y CAÑIZARES, M.J. (1996). *Azar y probabilidad: fundamentos didácticos y propuestas curriculares*, Serie Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Madrid: Síntesis.

LIPSCHUTZ, S. (1968). *Probabilidad: teoría y 500 problemas resueltos*, Serie Schaum. México DF: McGraw-Hill, 1971.

MICHA, E. (1998). *Matemáticas discretas.* México DF: Limusa.

MONTERO, J.; PARDO, L.; MORALES; D. Y QUESADA, V. (1988). *Ejercicios y problemas de cálculo de probabilidades.* Madrid: Díaz de Santos.

WILHELMI, M. R. (2000). *¿Cómo formular problemas utilizando el cálculo de probabilidades?*, Serie Fascículos Autoinstructivos para Docentes de Secundaria. Lima: Ministerio de Educación, PLANCAD.

WILHELMI, M. R. (2000). *Juegos matemáticos*, Serie Fascículos Autoinstructivos para Docentes de Secundaria. Lima: Ministerio de Educación, PLANCAD.

Índice alfabético