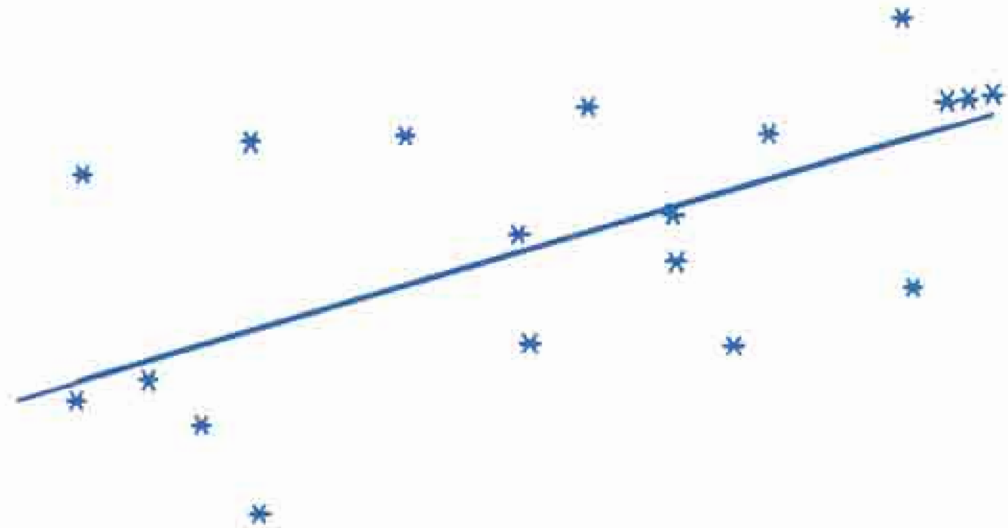
Tendencias actuales de la investigación en EDUCACIÓN ESTOCÁSTICA



Editor: *Luis Serrano R.*

TENDENCIAS ACTUALES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN ESTOCÁSTICA

Edita: Luis Serrano R.

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Educación y Humanidades (Melilla)
Universidad de Granada

ISBN: 978-84-692-4151-6

Depósito Legal: MA-2.572-2009

Imprime: Gráficas San Pancracio, S.L. — Málaga

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Las actuales tendencias de la enseñanza de la estocástica pasa por la introducción de esta materia desde los niveles más elementales, a fin de familiarizar al alumno con la percepción de esta parte de la matemática desde su inicio educativo. Así, en España, la nueva regulación de la educación primaria (*Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre*) enfatiza esta necesidad y propone que se acceda a esta formación desde una metodología activa, donde el alumno pueda conocer de forma directa los hechos aleatorios y sepa diferenciarlos de los deterministas.

Pero esta modificación metodológica y didáctica precisa de una base formativa por parte de los futuros enseñantes, tanto en su aspecto disciplinar como en el didáctico, que deben reforzarse en la formación del maestro. Inmersos en el proceso de adaptación de la formación universitaria al Proceso de Bolonia, aprovechamos para identificar algunas de estas deficiencias. Resaltamos también la necesidad de indagar en los contenidos de esta formación y en los procesos formativos necesarios para que el futuro docente sea capaz de desarrollar con éxito su función y suplir las carencias actualmente detectadas en la educación matemática y, más concretamente, en la educación estocástica.

Con esta finalidad presentamos aquí diversas investigaciones, abordando aspectos tan diversos como los procesos psicológicos que pueden intervenir en el razonamiento estocástico, propiciando la presencia de sesgos que pueden desvirtuar un buen proceso de aprendizaje o las competencias que los futuros profesores han de adquirir para una buena actuación docente en este campo de las matemáticas. Por otro lado se presentan investigaciones sobre contenidos estadísticos o probabilísticos, realizados desde la óptica de la teoría del Enfoque Ontosemiótico. Todos los trabajos presentados en estos capítulos tienen sugerencias de desarrollo práctico, concretándose de forma más precisa en un capítulo dedicado al estudio de la simulación en la enseñanza de la probabilidad.

Deseamos que estos trabajos contribuyan a mejorar la formación del profesorado y del aprendizaje por los alumnos de primaria.

Queremos significar que esta publicación se realiza bajo la ayuda concedida por la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa, de la Junta de Andalucía, en la convocatoria a “Incentivos para actividades de carácter científico y técnico”, resolución 3/2007.

Luis Serrano Romero

Capítulo 1

FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS BASADA EN LA *REFLEXIÓN GUIADA* SOBRE LA PRÁCTICA[1]

Juan D. Godino y Carmen Batanero
Universidad de Granada

Resumen. La reflexión sobre la propia experiencia matemática y sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje experimentados es necesaria para la apropiación y adaptación de los conocimientos didácticos por parte del profesor. Pero el análisis y reflexión didáctica requiere dominar y aplicar herramientas conceptuales y metodológicas adecuadas. En este trabajo presentamos un modelo de formación matemática y didáctica de profesores, resultado de nuestra experiencia como formadores, y apoyado en la aplicación del "enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática". La aplicación de las "guías de análisis didáctico", elaboradas a partir de dicho marco teórico, al diseño, implementación y evaluación de un proceso de estudio de un tema sobre estocástica con un grupo de estudiantes de magisterio permite describir el modelo formativo que aplicamos y reflexionar sobre su potencial utilidad en la formación de profesores.

Palabras clave: enfoque ontosemiótico; análisis y reflexión didáctica; formación de profesores; relación teoría y práctica.

Abstract. Teachers need to reflect on their own mathematical practices and on the teaching and learning processes experienced to acquire and adapt their didactical knowledge. Nevertheless, this didactical analysis and reflection requires of the mastering and application of adequate conceptual and methodological tools. In this paper we present a model for the mathematical and didactical training of teachers that is result from our experience as mathematics educator, and is based on the application of the "onto-semiotic approach" to mathematical knowledge and instruction. We also apply a set of "guidelines for didactical analysis", based on our theoretical framework, to design, implement and assess a teaching and learning process about stochastics with a group of student teachers. This analysis allows us to describe the formative model that we are applying and to reflect on its potential utility in teacher training.

Keywords: onto-semiotic approach, didactical analysis and reflection, teacher training, link theory and practice.

1. Versión ampliada de la Conferencia Invitada al VI CIBEM, Puerto Montt (Chile), 4-9 Enero 2009.

1. Introducción

En este trabajo describimos el modelo de formación matemática y didáctica de profesores que estamos experimentando en el que tratamos de aplicar los presupuestos asumidos por el "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Roa, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007)[2], y las herramientas de análisis didáctico derivadas de este marco teórico. Usaremos como contexto de reflexión el diseño, implementación y evaluación de una unidad temática del curso "Matemáticas y su didáctica" del plan de formación de maestros de Educación Primaria en la Universidad de Granada.

El ciclo formativo que describiremos contempla una etapa de estudio matemático en la que se implementa un modelo didáctico específico que los profesores en formación pueden adaptar de manera crítica a su futura enseñanza, y otra etapa de estudio didáctico en la que tienen oportunidad de aplicar las "guías de análisis y reflexión didáctica" a la experiencia de estudio matemático experimentada[3]. Mostraremos que los conocimientos y competencias puestas en juego en el ciclo formativo responden a un modelo de "conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza" que articula y extiende otros de diversos autores: modelos PK (conocimiento pedagógico), CK (conocimiento del contenido), PCK (conocimiento pedagógico del contenido), y MKT (conocimiento matemático para la enseñanza) (Ball, Lubienski y Mewborn, 2000; Thames, Sleep, Bass y Ball, 2008).

En primer lugar, después de justificar nuestra opción metodológica de indagación de "trabajar desde dentro" y tratar de conectar la teoría con la práctica, presentamos nuestra interpretación de la reflexión guiada, enmarcándola en el campo de indagación sobre el profesional reflexivo. Analizamos a continuación las "competencias para el análisis didáctico" y enumeramos algunas de tales competencias específicas del profesor de matemáticas. Seguidamente describimos el ciclo formativo propuesto para futuros maestros de educación primaria y el modelo didáctico correspondiente.

En la sección 4.1 describimos una unidad temática sobre "Estocástica" que ha sido implementada en varios cursos académicos con distintos grupos de estudiantes de magisterio, en algunas de las cuáles hemos realizado una grabación audiovisual, por lo que disponemos de información para analizar con detalle las interacciones en el aula[4].

En las sección 4.2 a 4.5. presentamos y aplicamos a uno de los proyectos de análisis de datos incluidos en dicha unidad cuatro instrumentos de análisis didáctico: a) la "Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados", que tiene en cuenta de manera explícita las configuraciones de objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución de los problemas, para identificar potenciales conflictos de significados y sistematizar las competencias matemáticas pretendidas; b) la "Guía para el Reconocimiento de Actos y

2. Trabajos disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino
3. En la materia de Currículo de matemáticas se profundiza en el modelo de análisis aplicándolo a procesos de estudio planificados por los estudiantes sobre temas curriculares de primaria.
4. Este diseño es una aplicación de la "Guía para el Diseño Unidades Temáticas" en la que el núcleo central es la selección de situaciones – problema "ricas" que pongan en juego el sistema de prácticas matemáticas operativas y discursivas pretendidas y su temporalización.

Procesos de Significación", que permite identificar fenómenos didácticos relacionados con las interacciones profesor – estudiantes, estudiantes entre sí e interacciones con los recursos disponibles (medios tecnológicos y el tiempo), focalizados en la apropiación de los significados (aprendizaje) como objetivo final del proceso de estudio; c) la toma de conciencia de la trama de normas (reglas, hábitos, …) que condicionan los procesos de estudio matemático se puede favorecer mediante la aplicación de la "Guía para el Reconocimiento de Normas"; d) la noción de idoneidad didáctica y la "Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica" como apoyo para evaluar el proceso de estudio en cada una de las dimensiones implicadas (epistémica, cognitiva-afectiva, instruccional (interacional, mediacional) y curricular/ ecológica).

Finalmente mostramos que la aplicación sistemática de las "guías de análisis y reflexión didáctica" contribuye, de una manera articulada, al desarrollo de las competencias matemáticas y didácticas del profesor de matemáticas descritas en la sección 3 y establece un puente que permite salvar la brecha entre los modelos teóricos centrados en el estudio de la enseñanza y los que se refieren al aprendizaje (Oser y Baeriswyl, 2001).

Terminamos el trabajo con algunas observaciones finales sobre la importancia del análisis de la propia experiencia de estudio matemático, apoyada en el uso de instrumentos adecuados, en la formación del profesor de matemáticas. Esta experiencia será la base para contextualizar y sistematizar los conocimientos didácticos disponibles.

2. Articulando teoría y práctica en la formación de profesores de matemáticas

Un componente de nuestra actividad como investigadores en Didáctica de las Matemáticas y formadores de profesores de matemáticas es el compromiso con la Teoría de la Educación Matemática, campo en el que estamos aportando un marco teórico denominado "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Este marco teórico trata de articular distintas aproximaciones a la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de supuestos de tipo antropológico y semiótico sobre la actividad matemática y los procesos de estudio correspondientes.

Actualmente estamos interesados en aplicar el "enfoque ontosemiótico" a la formación de profesores de matemáticas (Godino y cols., 2008), y al diseño, implementación y evaluación de nuestra propia práctica. Ello es debido a que nuestra experiencia como formadores de profesores de matemáticas nos ha llevado a valorar la importancia de enseñarles con la misma metodología que tratamos de transmitirles. Puesto que tenemos a nuestro cargo tanto la formación matemática como didáctica de los futuros maestros, tenemos la oportunidad de poner en práctica con nuestros estudiantes las teorías y modelos didácticos que en cada momento consideramos más pertinentes como resultados de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De esta manera se intenta integrar la formación matemática de los futuros profesores con la formación didáctica, aplicando el "principio del isomorfismo", esto es, "la idea de que los profesores en formación deben ser enseñados de la misma manera que se espera que ellos enseñen como profesores" (Ponte y Chapman, 2008, p. 238).

Así mismo, se trata de aplicar la estrategia metodológica y de indagación descrita por Ball (2000) como de "trabajar desde dentro", esto es, de usar la propia práctica como lugar para estudiar la enseñanza y el aprendizaje. Además, compartimos las ideas de Jaworski y Gellert (2003) cuando afirman, "es valioso considerar la teoría y la práctica no como polos distantes sino elementos de actividad cognitiva reflexivamente conectados. La teoría psicológica, sociológica y educativa, aunque no esté empíricamente apoyada de manera explícita, se trata de una reflexión humana sobre la práctica" (p. 832).

En el EOS se adoptan unos presupuestos socioculturales-antropológicos (Bloor, 1983; Wittgenstein, 1953) sobre la matemática y unos presupuestos socio-constructivas (Vygotsky, 1934) e interaccionistas (Blumer, 1969; Coob y Bauersfeld, 1995) sobre el aprendizaje, de los cuales se deriva un modelo didáctico para el estudio de las matemáticas. También se vienen desarrollando elementos operativos para analizar las diversas dimensiones y facetas a tener en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esto es, las dimensiones epistémica (significados institucionales), cognitiva-afectiva, (significados personales), instruccional (interaccional y mediacional) y curricular /ecológica.

Se trata de hacer operativas las nociones de práctica matemática, configuración epistémica y cognitiva, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica[5] mediante unas "guías" para el reconocimiento de objetos y procesos matemáticos, interacciones didácticas, normas y metanormas que soportan y restringen los procesos de estudio, y para la valoración de la idoneidad didáctica de los mismos. Estas guías proporcionan unas herramientas para el análisis y reflexión didáctica (en las fases de planificación curricular, implementación en el aula, evaluación de los aprendizajes y la idoneidad didáctica global del proceso), que los formadores de profesores e investigadores pueden aplicar, y debidamente adaptadas pueden ser también útiles para el profesor de matemáticas de cualquier nivel.

Reflexión sobre la práctica

El valor de la reflexión sobre la experiencia como un medio para estimular el aprendizaje ha sido destacado desde hace varias décadas. Schön (1983) describió la reflexión como "una continua interacción entre el pensamiento y la acción" (p. 281); y describió al "práctico reflexivo" como la persona que "reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura" (p. 50).

En una revisión de los modelos de reflexión que se han descrito, Rogers (2001) encontró como definición más común de reflexión como el proceso que permite al aprendiz "integrar la comprensión lograda en la propia experiencia con el fin de capacitarle para realizar mejores elecciones o acciones en el futuro así como estimular la propia efectividad global". Llinares y Kainer (2006) destacan que, "La práctica reflexiva ofrece una perspectiva de cómo los estudiantes para profesor aprenden sobre la enseñanza y proporciona

5. Remitimos al lector a Godino, Batanero y Font (2007) donde describimos estas nociones teóricas.

información sobre los cambios en su enseñanza de las matemáticas. La reflexión de los estudiantes para profesor es un componente clave en esta visión del aprendizaje y se asume que uno aprende mediante la reflexión sobre la propia experiencia" (p. 437).

En trabajos recientes de diversos campos se ha introducido el concepto de "Reflexión guiada" como un proceso de indagación innovador en el que el práctico es asistido por un mentor (o "guía") mediante un proceso de auto-indagación, desarrollo, y aprendizaje a través de la reflexión, con el fin de llegar a ser enteramente efectivo (Johns, 2002). También en el campo de la formación de profesores encontramos referencias en las que se informan de investigaciones en las que se desarrollan y experimentan técnicas específicas de "reflexión guiada" (Nolan, 2008).

En este trabajo sobre formación de futuros profesores ampliamos el significado de la expresión "reflexión guiada" para incluir no solo la reflexión en la etapa de contacto con las prácticas de inducción en las escuelas, o la práctica docente del profesor, sino también en las etapas de formación académica. Por otra parte, pensamos que la reflexión sobre los distintos aspectos y momentos de la práctica tiene que realizarse mediante el apoyo, no solo del formador en su labor de tutor o supervisor, sino que la "guía" o ayuda hace referencia a un sistema de indicadores, o pautas, que llama la atención sobre aspectos críticos de dicha práctica. Estas guías proporcionan una estructura para la reflexión, entendida de manera holística (Klein, 2008), articulada (Ash y Clayton, 2004), guiada (Husu, Toom, y Patrikainen, 2008), crítica (Harrison, Lawson y Wortley, 2005) y cooperativa (Tomlinson, 2008).

3. Competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas

El término competencia ha penetrado fuertemente en el discurso de la educación matemática, sobre todo en los ámbitos del desarrollo curricular, la práctica de la enseñanza y la evaluación, donde se habla con frecuencia de "enseñar por competencias". En este contexto, competencia es la facultad de movilizar un conjunto de recursos cognoscitivos (conocimientos, capacidades, información, etc.) para enfrentarse con pertinencia y eficacia a una familia de situaciones.

En diversos trabajos anteriores (Godino, Batanero y Font, 2007; D'Amore, Godino, Arrigo y Fandiño, 2003) hemos atribuido a la noción de conocimiento el carácter holístico que el enfoque pedagógico/curricular atribuye a la noción de competencia. Desde un punto de vista pragmático, conocer/saber implica el uso competente de los objetos constituyentes del conocimiento, la capacidad de relacionar entre sí dichos objetos, o sea, comprender, y de aplicarlos a la solución de problemas. Así mismo, en la investigación sobre formación de profesores se ha extendido la expresión "conocimiento matemático para la enseñanza" (Ball, Lubienski y Mewborn, 2000) donde "conocimiento" se usa también en el sentido holístico mencionado.

En el Informe Final del Proyecto Tuning (González y Wagenaar, 2003), las competencias y han sido entendidas como "conocer y comprender" —conocimiento teórico de un campo académico—, "saber cómo actuar" —aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones— y "saber cómo ser" —valores como parte integrante de la forma de percibir a los otros y vivir en un contexto social—. Entre las competencias generales (o transversales) incluidas en el mencionado informe se encuentran las instrumentales (herramientas para el aprendizaje y la formación): Análisis y Síntesis; Organización y planificación; Conocimientos generales básicos; Conocimientos básicos de la profesión. Entre las competencias sistémicas (capacidades que dan visión de conjunto y sirven para gestionar el total de la actuación) se incluyen: Aplicar los conocimientos a la práctica; Habilidades de investigación; Capacidad de aprender (aprender a aprender); Adaptación a nuevas situaciones; Diseño y gestión de proyectos. Las competencias específicas se dividen en dos grandes grupos: aquellas relacionadas con la formación disciplinar —competencias disciplinares y académicas (saber)— y la formación profesional —competencias profesionales—.

Estas competencias generales y específicas se pueden concretar en el caso del profesor de matemáticas en lo que podemos llamar competencia para el "análisis, la síntesis y la acción didáctica", esto es, para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sintetizar el complejo de conocimientos aportados por la Didáctica de la Matemática, y actuar con idoneidad en el diseño, implementación y evaluación de la propia práctica docente[6]. El profesor de matemáticas debe tener competencia matemática, es decir, conocer y ser capaz de aplicar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas usualmente abordables en el aula. Pero desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje, el profesor debe ser también capaz de analizar la actividad matemática realizada al resolver los problemas, identificando los objetos y significados puestos en juego, con el fin de enriquecer su desempeño y contribuir al desarrollo de sus competencias profesionales.

Una de las tareas clave del profesor de matemáticas es la selección y adaptación de situaciones–problema que promuevan la contextualización de los contenidos matemáticos, su aplicación y ejercitación. Los problemas no pueden ser excesivamente puntuales/aislados, sino que deben permitir la articulación de las distintas competencias matemáticas, y por tanto, tener un carácter globalizador. Pero no es suficiente disponer de "situaciones ricas", se requiere avanzar hacia la organización de configuraciones y trayectorias didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006) idóneas desde el punto de vista epistémico, cognitivo e instruccional. Para ello hay que tener en cuenta los roles potenciales del profesor, de los estudiantes, los recursos y patrones de interacción en sistemas didácticos.

La organización y gestión de todos estos recursos por parte del profesor le demanda el desarrollo de competencias de análisis de los objetos matemáticos y significados que se ponen en juego en la enseñanza a fin de prever conflictos de significados y distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados. Es por ello necesario tener en cuenta, en la formación matemática y didáctica de profesores, problemas cuya solución ponga en juego competencias de distintos bloques de contenido disciplinar (aritmética, geometría, medida, estocástica, razonamiento algebraico), otras áreas curriculares (conocimiento del medio y la sociedad), y de manera especial que promuevan la articulación entre las competencias de tipo matemático y didáctico. A continuación clasificamos

6. Se trata de un acercamiento a las competencias desde la complejidad (Tejada, 2007) asumiendo que "una competencia es el producto de la interacción dialéctica y permanente entre la reflexión y la acción, entendiéndose por reflexión la posibilidad de análisis, conceptualización, sistematización, procesamiento, teorización, inferencia, etc., y la acción como la posibilidad de desempeño, de hacer, de actuar, de ejecutar" (Tejada, 2007, p. 47).

las competencias didácticas necesarias en la formación de los profesores, teniendo en cuenta algunos aspectos del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007).

1. Competencias de diseño e implementación de procesos de estudio matemático:

- Seleccionar y reelaborar los *problemas matemáticos* idóneos para los alumnos de los distintos niveles, usando los recursos apropiados en cada circunstancia.
- *Definir, enunciar y justificar* los *conceptos, procedimientos* y *propiedades* matemáticas, teniendo en cuenta las nociones previas necesarias y los procesos implicados en su comprensión.
- Implementar *configuraciones didácticas*[7] que permitan identificar y resolver los *conflictos semióticos* en la *interacción didáctica* y optimizar el aprendizaje matemático de los alumnos.
- Reconocer el sistema de *normas sociales y disciplinares* que restringen y posibilitan el desarrollo de los procesos de estudio matemático y aportan explicaciones plausibles de los fenómenos didácticos.

2. Competencias didácticas específicas y de valoración de la idoneidad didáctica:

- Conocer las aportaciones de la Didáctica de la Matemática a la enseñanza y aprendizaje de los bloques de contenidos y procesos matemáticos tratados en educación primaria (secundaria), referidas a: desarrollo histórico (desde una perspectiva epistemológica), orientaciones curriculares, etapas de aprendizaje, errores y dificultades, patrones de interacción didáctica y sus efectos en el aprendizaje, uso de recursos tecnológicos y materiales manipulativos, instrumentos de evaluación, etc[8].
- Valorar la idoneidad didáctica de los procesos de estudio planificados o implementados en sus distintas dimensiones (*epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica*), teniendo en cuenta el conocimiento descrito anteriormente.
- Desarrollar una actitud positiva hacia la enseñanza de las matemáticas, de modo que valore tanto su papel formativo como su utilidad en la educación de los ciudadanos y profesionales.

Ciclo formativo sobre matemáticas y didáctica de la matemática

El desarrollo de las competencias anteriores es un desafío complejo para los formadores de profesores por la diversidad de dimensiones y componentes a tener en cuenta, en particular los propios conocimientos matemáticos de los estudiantes.

---

7. Sistema de acciones del profesor y los estudiantes a propósito del estudio de una situación-problema, usando los recursos correspondientes.
8. Estos conocimientos le van a permitir reconstruir un significado de referencia matemática y didáctica para los procesos de estudio pretendidos o implementados, y en consecuencia emitir un juicio valorativo sobre los mismos que oriente el incremento de la idoneidad didáctica de tales procesos (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007).

En lo que sigue proponemos un ciclo formativo que estamos experimentando en la formación en matemáticas y su didáctica para futuros profesores, que incluye los siguientes tipos de situaciones–problemas:

1) Resolución de problemas de acuerdo a un modelo didáctico socio - constructivo – interaccionista, en particular problemas que históricamente tuvieron un papel en la creación de conocimiento matemático.
2) Reflexión epistémico - cognitiva sobre los objetos y significados[9] puestos en juego en la resolución de problemas, incluyendo items y respuestas en pruebas de evaluación.
3) Análisis de las interacciones en la clase de matemáticas, orientado al reconocimiento de actos y procesos de significación.
4) Análisis de recursos para la enseñanza, incluyendo las orientaciones curriculares, libros de texto, material manipulativo y tecnológico.
5) Análisis del sistema de normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático.
6) Valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio matemático.

En estas situaciones se implementa una trayectoria didáctica que contempla las siguientes fases o momentos:

> 1) Presentación de las consignas; 2) Exploración personal; 3) Trabajo cooperativo en equipos para elaborar una respuesta compartida; 4) Presentación y discusión; 5) Institucionalización por el formador, explicitando los conocimientos pretendidos; 6) Estudio personal de documentos de trabajo seleccionados, apoyado por las tutorías individuales y grupales.

En las siguientes secciones presentamos un ejemplo de aplicación del ciclo formativo mencionado basado en el diseño e implementación de una unidad temática sobre "Estocástica" para futuros profesores de educación primaria[10]. También utilizamos este ejemplo para describir las "Guías para el análisis didáctico" que hacen operativos los supuestos y nociones teóricas del EOS.

---

9. Los objetos y significados matemáticos sobre los que se orienta la reflexión se describen en Godino, Batanero y Font (2007), así como los supuestos antropológicos que sirven de base al "enfoque ontosemiótico". Los estudiantes son introducidos progresivamente en el reconocimiento de tales objetos y procesos, así como a la perspectiva plural y relativista del significado de los objetos matemáticos.
10. En el anexo 1 incluimos uno de los tres proyectos de análisis de datos en que se basa el desarrollo del tema. El uso de este proyecto con alumnos de educación primaria requeriría algunas simplificaciones.

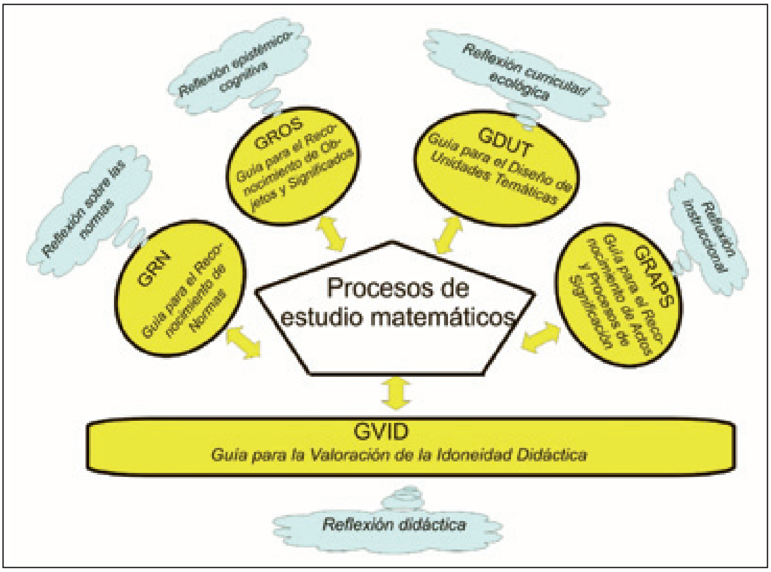


Figura 1: *Formación didáctica basada en la reflexión guiada*

La figura 1 resume los tipos de análisis que el profesor de matemáticas debería ser capaz de realizar, apoyado en el uso de las "guías" que se describirán en la siguiente sección.

El conjunto de las guías indican un ciclo de reflexión que se debe iniciar con la reconstrucción de un significado de referencia mediante la consulta de los libros de texto, experiencias e investigaciones previas. Este estudio proporcionará un banco de actividades y una descripción de las prácticas matemáticas (operatorias y discursivas) puestas en juego en la realización de dichas actividades y relativas al contexto al cual se dirige la planificación.

4. Guías para el análisis y la reflexión didáctica

4.1. Guía para el diseño de unidades temáticas

La primera competencia a desarrollar en el profesor es la capacidad de diseño de unidades didácticas adecuadas. En este apartado incluimos una guía que puede ser útil al profesor en su planificación de unidades temáticas (que denominaremos Guía para el diseño de la unidad temática, y en forma abreviada, GDUT). La tabla 1 incluye el esquema de diseño mencionado, aplicado a la unidad sobre "Estadística y probabilidad".

Tabla 1: Guía para el diseño de la unidad temática (GDUT)[11]

COMPONENTE	DESCRIPCIÓN
Motivación curricular	La estadística es hoy una parte de la educación general deseable para los ciudadanos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios de comunicación.
Objetivos generales	• Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la estadística en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo. • Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones. • Mostrar a los estudiantes aplicaciones de la Estadística para resolver problemas reales.
Competencias transversales genéricas	Capacidades de resolución de problemas, comunicación, uso de ordenadores, trabajo cooperativo y en grupo.
Contenidos	La Estadística y sus usos. Población, muestra y variables estadísticas. Tablas y gráficos. Medidas de posición central. Medidas de dispersión. Fenómenos aleatorios. Concepto de probabilidad y diferentes aproximaciones a la misma. Asignación de probabilidad: regla de Laplace. La Estadística como conocimiento cultural.
Metodología:	
Sesión 1 (gran grupo, aula habitual)	*Primera hora:* Se comenzará con la realización del proyecto "Lanzamiento de dos dados" (Anexo 1A, planteamiento de la situación, resolución, análisis de conocimientos puestos en juego y ficha de trabajo para los estudiantes). *Segunda hora:* Presentación y discusión de los informes elaborados por los equipos de alumnos. Sistematización de los conocimientos pretendidos (nociones y procedimientos estadísticos-probabilísticos elementales). (Anexo 1B, diapositivas que apoyan la sistematización de los conocimientos pretendidos). El proceso de estudio de las nociones estocásticas elementales iniciado en esta sesión presencial deberá complementarse con el estudio personal de los alumnos de la lección "Probabilidad" del texto de referencia para el curso (Godino y cols, 2004), incluido en el Anexo 1C, y la realización de ejercicios y aplicaciones complementarias (Anexo 1D). Este estudio personal será asistido por las sesiones de tutoría individualizada y grupal.
Sesiones, 2, 3 y 4 …	…
Evaluación	El componente teórico será evaluado mediante la realización de un examen escrito en el que el estudiante deberá resolver una situación-problema que implique la aplicación de las nociones y procedimientos estadísticos - probabilísticos estudiados en las sesiones de clase. La evaluación tendrá también en cuenta la asistencia y participación en las sesiones de clases prácticas, así como la calidad de los informes solicitados en los correspondientes Cuadernos de trabajo en equipo.
Bibliografía	Batanero y Godino (2004), …
Anexos	…

Tras explicitar la motivación del tema, los objetivos y competencias matemáticas generales que se pretenden —en consonancia con el marco curricular que define el perfil profesional correspondiente—, se definen los contenidos a incluir y se pasa a seleccionar

11. Necesariamente la descripción de las "guías" y su aplicación al ejemplo es esquemática y abreviada.

una muestra de situaciones de contextualización–iniciación para cada una de las sesiones de clase programadas. La solución experta de las situaciones se deberá analizar para identificar las competencias específicas que efectivamente se ponen en juego[12]. El diseño de la unidad temática deberá incluir también la metodología y los procedimientos de evaluación.

La selección de las situaciones–problemas de contextualización/iniciación, ejercitación y aplicación, y las configuraciones epistémicas correspondientes, adecuadas para el proyecto educativo que se diseña, requiere del estudio sistemático de la bibliografía de Didáctica de la Matemática específica del tema en cuestión. Este estudio se orienta a la reconstrucción de un significado de referencia didáctica para el proceso de estudio pretendido. En nuestro caso, para realizar dicha reconstrucción, hemos partido de los textos de Batanero (2001) y Batanero y Godino (2004), así como de nuestra experiencia previa en el campo de la Educación Estadística.

Como se menciona en el ejemplo, la fase de contextualización, discusión colectiva y sistematización de los conocimientos puestos en juego en la sesión presencial deberá ser complementada con el estudio personal de los estudiantes, apoyado en el uso de documentos de trabajo específicos y bibliografía complementaria, así como con la realización de actividades de ejercitación.

Aunque en la tabla el nivel de descripción de la planificación es genérico, se espera que el futuro profesor complemente la planificación presentada en una tabla similar a la 1 con la inclusión de diversos anexos en los que detalle las situaciones-problemas (proyectos) y las configuraciones epistémicas asociadas, los documentos de estudio complementarios (desarrollo del tema, ejercicios y aplicaciones) y las diapositivas que apoyarán la sistematización de los conocimientos pretendidos.

4.2. Guía para el reconocimiento de objetos y significados

La gestión de los conocimientos puestos en juego en la realización del proyecto propuesto requiere, que el futuro profesor, tras la resolución detallada de las situaciones problemáticas incluidas en mismo, analice los objetos intervinientes y emergentes en dicha solución, y los significados que se les atribuye en el contexto específico. La tabla 2 incluye la “Guía para el reconocimiento de objetos y significados” (GROS), que se proporciona al futuro maestro para guiarle en este análisis y que acá es aplicada al proyecto “Lanzamiento de dos dados” implementado como situación introductoria en la sesión 1. La realización del proyecto pone en juego “el conocimiento común del contenido”, por parte del futuro profesor, mientras que el análisis y la reflexión sobre los objetos y significados moviliza y desarrolla su “conocimiento especializado del contenido para la enseñanza” (Hill, Ball y Schilling, 2008).

12. En la siguiente sección propondremos realizar este análisis aplicando la herramienta “Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados”.

Tabla 2: Guía para el reconocimiento de objetos y significados (GROS)[13]

Objetos:	Significados (referencia / uso, intención):
Situaciones – problemas 1) Determinación del carácter equitativo de un juego de azar (suma de puntos al lanzar dos dados) 2) Estudio intuitivo de la ley empírica de los grandes números	Reflexión sobre intuiciones probabilísticas en situaciones de juegos de azar. Desarrollo de competencias estocásticas básicas
Elementos lingüísticos Términos y expresiones conceptuales Tabla de doble entrada Tabla de valores, probabilidades/ frecuencias Diagrama de barras Diagrama de líneas	Conceptos o propiedades correspondientes Recuento de casos posibles Distribuciones de probabilidad/ frecuencia Convergencia y fluctuaciones empíricas de las frecuencias (ley empírica de los grandes números)
Conceptos – definición Experimento aleatorio Espacio muestral Variable aleatoria Probabilidad Distribución de probabilidad (triangular) Juego equitativo Variable estadística Distribución de frecuencias	Lanzar dos dados y observar la suma de puntos Conjunto de las 11 sumas posibles al lanzar dos dados Variable (símbolo) que puede tomar los valores del espacio muestral; valor de la suma de los datos Grado de creencia en que un suceso ocurra; proporción de casos favorables entre posibles; frecuencia de ocurrencia en una serie larga Sistema formado por los valores posibles de la suma de puntos y sus probabilidades Situación competitiva en la que los jugadores tienen igual esperanza matemática de ganar Variable (símbolo) que toma los valores de la suma de puntos en la muestra de 100 experimentos Sistema formado por los valores de la suma de puntos en el experimento y sus frecuencias.
Propiedades 1) Simetría del dado, equiprobabilidad 2) Regla de Laplace 3) P(A) = 20/36; P(B)= 16/36 4) Ley empírica de los grandes números 5) La convergencia de frecuencia relativa a la probabilidad es lenta y presenta fluctuaciones	No hay razón para preferir un caso sobre otro Regla de cálculo de probabilidades de sucesos Al compararlas se ve que el juego no es equitativo Permite estimar las frecuencias conociendo la probabilidad Permite explicar diferencias entre frecuencias relativas y probabilidades en series cortas
Procedimientos Formación sistemática de las sumas posibles Tabulación de frecuencias y probabilidades Cálculo de probabilidades Elaboración de diagramas de barras Comparación de frecuencias y probabilidades en un gráfico cartesiano	Construcción del espacio muestral Construcción de las distribuciones de frecuencias / probabilidades, expresadas numéricamente Cálculo de probabilidades en el experimento Representación de las distribuciones de frecuencias y de probabilidades Estudiar las diferencias entre frecuencias y probabilidades

13. No se incluye un análisis exhaustivo de los objetos y significados puestos en juego en la realización del proyecto. El análisis se puede ampliar teniendo en cuenta, no solo los procesos de significación, sino otros tipos de procesos descritos en el EOS (generalización – particularización; materialización – idealización; personalización – institucionalización; etc.)

Argumentos	
1) Convención social (no hay razones para suponer que las caras no tengan simetría)	Justifica la equiprobabilidad, razonamiento en base a normas
2) Deducción a partir de 1)	
3) Deducción a partir de 2)	Justifica la regla de Laplace; razonamiento deductivo
4) y 5) Comprobación empírica con simulaciones	Justifica el cálculo de las probabilidades de ganar A y B Justifica que A no haya ganado en la serie de 100 lanzamientos, razonamiento tipo empírico
Conflictos potenciales: Confusión frecuencia-probabilidad, sesgo de equiprobabilidad, "recencia" positiva o negativa, creencia en la ley de los pequeños números, errores en razonamiento proporcional, errores en la elaboración de las gráficas, por ejemplo, confundir la variable dependiente e independiente, confundir frecuencia y valor de la variable,...	

La reconstrucción de la configuración de objetos y significados, como la incluida en la tabla 2, para las distintas situaciones-problema usadas en un proceso de estudio es necesaria para que el profesor pueda gestionar las interacciones en el aula, y decidir posibles institucionalizaciones de los conocimientos puestos en juego. La confrontación de este análisis con las investigaciones previas y la propia experiencia docente permitirá prever potenciales conflictos de significado que deberán ser tenidos en cuenta. El análisis se puede completar con la identificación de los procesos matemáticos intervinientes (especialmente, particularización–generalización; materialización–idealización) (Font, Godino y Contreras, 2008).

El análisis de los conflictos potenciales que los estudiantes pueden tener en el estudio del tema requiere la revisión de la literatura correspondiente sobre las concepciones (correctas o incorrectas), formas de conocimiento y tipos de comprensiones (Even y Tirosh, 2002) de los estudiantes[14] sobre los distintos objetos matemáticos en la situación. La GROS se puede aplicar también como ayuda para analizar sistemáticamente las configuraciones cognitivas iniciales y finales de los estudiantes.

4.3. Guía para el reconocimiento de actos y procesos de significación en las interacciones de aula

Es también necesario analizar cómo interaccionan el profesor con los estudiantes, y estos entre sí, a propósito de cuestiones específicas relacionadas con las competencias matemáticas que se desean desarrollar en los estudiantes. El modelo epistemológico y cognitivo del EOS aporta elementos en los que centrar la atención: la dialéctica entre los significados personales e institucionales de los objetos, esto es, las situaciones problemas, los elementos lingüísticos, definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos. Partiendo de los significados iniciales de los estudiantes habrá que observar el progresivo acoplamiento de dichos significados a los pretendidos por el profesor, para lo cual la identificación de los momentos conflictivos y de negociación de significados deberán ser de

14. Este complejo multidimensional que en la literatura de investigación se describe como "conocimiento y comprensión", concepciones, competencias, …, se describe en el EOS con la noción de "configuración cognitiva".

atención preferente. Habrá que ver si el problema ha sido transferido y asumido por los estudiantes, si los conceptos, propiedades, procedimientos y argumentaciones que se ponen en juego concuerdan con los pretendidos.

La tabla 3 incluye un resumen de los principales actos y procesos de significación que hemos identificado en el proceso de estudio que usamos como ejemplo. Distinguimos los actos y procesos ligados a objetos y procesos matemáticos (problematización, representación, definición, enunciación, algoritmización, argumentación, generalización) de los correspondientes a los procesos didácticos (institucionalización, evaluación, atribución de autonomía al estudiante y de trabajo cooperativo, gestión del tiempo y de los recursos, …). La información incluida en la tabla 3 se ha obtenido usando la grabación audio-visual de la sesión.

Tabla 3: *Guía para el Reconocimiento de Actos y Procesos de Significación (GRAPS)*[15]

PROCESOS MATEMÁTICOS	ACTOS Y PROCESOS DE SIGNIFICACIÓN:
Problematización: Asunción del problema por los estudiantes	En distintos momentos el profesor se esfuerza en que los grupos de estudiantes entiendan las cuestiones planteadas y las resuelvan. La simulación del lanzamiento de dos dados usando la tabla de números aleatorios motivó frecuentes y reiteradas aclaraciones. Finalmente se observa que los estudiantes se involucran en la solución del problema.
Representación: - Expresión del espacio muestral del experimento, "observar el resultado de lanzar dos dados" en forma de tabla de doble entrada (sucesos equiprobables) (E1). - Idem "observar la suma de puntos" (sucesos no equiprobables) (E2) - Sustitución del lanzamiento efectivo de los dos dados por la selección de una secuencia de pares de números de la tabla de números aleatorios.	Algunos alumnos han construido personalmente el E1, pero no el E2. E1 es presentado por una alumna, y ratificado por el profesor, quien también menciona E2, insistiendo en que en este caso los sucesos elementales no son equiprobables. El significado de la tabla de números aleatorios motivó frecuentes intervenciones del profesor; parece que la mayoría de los alumnos logran simular el lanzamiento.
Definición: Reconocimiento de los espacios muestrales Variable estadística Variable aleatoria Distribuciones de frecuencias Distribuciones de probabilidad	Los alumnos no reconocen como espacio muestral de la suma de puntos el conjunto de las sumas posibles. Fijan la atención en los 36 pares de números al lanzar los dos dados, pero no en la suma. Las definiciones de los conceptos, hechas de modo informal, quedan a cargo del profesor.

15. El análisis exhaustivo de las interacciones en el aula utilizando la metodología descrita en Godino, Contreras y Font (2006) queda fuera del alcance de este trabajo. Aquí presentamos una versión simplificada del análisis de las interacciones en el aula basado en el EOS.

Enunciación: - Asignación de probabilidades a cada suma posible (distribución de probabilidad). Regla de Laplace -Ley empírica de los grandes números (convergencia lenta y con fluctuaciones)	Algunos alumnos logran asignar las probabilidades a las sumas posibles, y reconocen que la muestra de 10 lanzamientos es pequeña para asegurar que ganará A. El enunciado y explicación de la ley de los grandes números queda a cargo del profesor, que lo hace de manera empírica e intuitiva usando dos applets de simulación.
Algoritmización: Formación de espacios muestrales Cálculo de probabilidades usando la regla de Laplace	Ha resultado conflictivo el reconocimiento del espacio muestral que se debe formar para asignar probabilidades de ganar A y B. El profesor se esfuerza por aclarar esta dificultad de manera individualizada
Argumentación: Construcción del espacio muestral adecuado Empírica /intuitiva mediante simulación con muestras de tamaño progresivamente creciente	Dos alumnas explican que el jugador A tiene más probabilidades de ganar construyendo el espacio de los 36 casos posibles. La argumentación de las características de la ley empírica de los grandes números la hace el profesor
Generalización: Simulación de casos de lanzamiento de dos dados (10, 100, 1000, 10000) Variable aleatoria, distribución de probabilidad como generalizaciones de las variables y distribuciones estadísticas.	Algunos alumnos intuyen que es necesario aumentar el tamaño de muestra para que los resultados experimentales concuerden con las previsiones teóricas. Pero el peso del proceso de generalización e idealización está a cargo del profesor.
PROCESOS DIDÁCTICOS	
Institucionalización: Sistematización de los conocimientos (configuración epistémica incluida en la sección 5)	El final de la primera hora y prácticamente la segunda hora es dedicada por el profesor para sistematizar los conocimientos puestos en juego. Deja como tarea para casa completar la "Guía de objetos y significados", pero realmente no se dedica tiempo a esta fase de reflexión epistémica.
Evaluación: - Observación del trabajo de los equipos - Hojas de respuestas escritas - Explicaciones de alumnos en la pizarra y en la fase de discusión	El profesor reconoce las dos dificultades básicas que aparecen: 1) la simulación con la tabla de números aleatorios; 2) la asignación de probabilidades a cada suma posible de dos dados. Varios alumnos, incluso después de la explicación colectiva insisten en considerar que B tiene más posibilidades porque en 7 casos gana, mientras que A lo hace en 4 (sin tener en cuenta que no son sucesos equiprobables) El profesor explica la solución a estos alumnos, en un formato tipo "efecto Jourdain" (Brousseau, 1986).
Autonomía y trabajo cooperativo: - En la primera hora los alumnos trabajan de manera personal sobre las cuestiones. Dos alumnos explican a toda la clase, con el refuerzo del profesor las soluciones correctas. - En la segunda hora predomina la presentación del profesor.	Algunas intervenciones del docente con algunos equipos siguieron un patrón de interacción calificable como "efecto Jourdain".

Gestión de la heterogeneidad: El 20% de los alumnos afirman que nunca han estudiado probabilidad, mientras que algunos logran de manera autónoma resolver la tarea completa.	El profesor atiende de manera personalizada las dificultades de los alumnos para que entiendan la simulación y sugerirles que las sumas de puntos no son equiprobables.
Ejercitación y aplicación: El final de la segunda hora de clase propone como ejercicio que construyan la tabla de la distribución de probabilidad de la suma de puntos	A pesar de que en la pizarra una de las alumnas escribió las probabilidades de obtener cada suma, y que en la sistematización de conocimientos el profesor presenta la distribución de probabilidades en forma tabular, los alumnos muestran dificultades para realizar la actividad, la cual se asigna al final como tarea para casa.
Gestión del tiempo y de los recursos: - El tiempo asignado a la tarea permitió responder a las diversas cuestiones	Los alumnos que estudiaron por primera vez estas cuestiones mostraron dificultades que indican la necesidad de realizar nuevas actividades de ejercitación y aplicación, así como usar el tiempo asignado a la atención personalizada.

El análisis descrito de los patrones de interacción en el aula, focalizado en el reconocimiento de los actos y procesos de significación, constituye un componente de lo que en otras perspectivas teóricas se describe como análisis de la "cultura de la clase" y sus efectos en el aprendizaje. Even y Tirosh (2002) llaman la atención de los investigadores en formación de profesores sobre la necesidad de tener en cuenta los procesos sociales y culturales como parte integral de la actividad matemática. "Se requieren análisis que tengan en cuenta la complejidad de la instrucción matemática implementada, la cual necesita considerar varios factores, facetas y circunstancias (a veces conflictivas)" (p. 237).

4.4. Guía para el reconocimiento de normas

El trabajo del profesor y de los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje es una actividad sujeta a un complejo sistema de normas de distinta naturaleza y diversos grados de coerción (leyes, decretos, hábitos, etc.). Es necesario que el profesor sea consciente de este sistema de normas que condicionan, y al mismo tiempo hacen posible, el estudio de las matemáticas. "Al considerar las normas de la clase que apoyan la comprensión matemática, se deben tener en cuenta las regularidades en las interacciones sociales de la clase que constituyen la gramática de la vida de la clase" (Franke et al., 2007, p. 238).

En Godino, Font, Wilhelm y Castro (2009) se ha introducido la dimensión normativa de los procesos de enseñanza y aprendizaje, ampliando las nociones de contrato didáctico (Brousseau, 1988) y norma sociomatemática (Cobb y Bauersfled, 1995), y proponiendo una tipología de normas apoyada en el EOS. En este apartado analizamos la dimensión normativa a la experiencia de estudio descrita en la sección 4.1. En la tabla 2 sintetizamos los resultados de este análisis; en la columna 1 incluimos los tipos de normas consideradas y en la 2 las normas específicas identificadas en la experiencia de enseñanza.

Es importante resaltar que cada norma admite diversas interpretaciones, por lo que su seguimiento conlleva unos ciertos grados de libertad que en cada caso se debe indagar.

Tabla 4: *Guía para el reconocimiento de normas (GRN)*

TIPOS DE NORMAS:	NORMAS ESPECÍFICAS (condiciones de aplicación, rupturas, efectos, …)
Epistémicas: (Axiomas y teoremas sancionados por las culturas matemáticas)	1) Principio de indiferencia en situaciones de incertidumbre y regla de Laplace. Su aplicación lleva en la situación dada a preferir ser jugador A. Pero en una jugada aislada puede ganar A o B ("porque interviene el azar", Raquel). La asunción de la regla de preferencia de ser el jugador con mayores probabilidades en una experiencia aislada, porque maximiza la utilidad "esperada" , requiere del sujeto descartar otras preferencias personales. 2) Ley empírica de los grandes números, lentitud y fluctuaciones de la convergencia estocástica. El uso de simuladores que permitan la repetición de series grandes de experiencias es imprescindible para justificar la aceptación de esta ley en el contexto dado. …
Cognitivas y afectivas: - Principios de aprendizaje - Reglas intuitivas, teoremas en acción, …	- El contenido pretendido está en la ZDP, aunque la clase era heterogénea (para algunos alumnos era el "primer encuentro" con la estocástica). El formato de trabajo en grupos sobre la tarea permitió evaluar los conocimientos iniciales de los estudiantes y conocer sus interpretaciones personales de la situación. - Los aprendizajes logrados por los estudiantes fueron superficiales, como se vio en un examen final. …
Mediacionales: - Recursos tecnológicos y temporales	- La sesión tenía que hacerse en el aula tradicional, dotada con proyector, para el grupo de clase completo (felizmente sólo asistieron 45 alumnos de los 130 inscritos en el curso) - La actividad y su discusión tenía que realizarse en una sesión de 2 horas. …
Interaccionales: - Profesor con toda la clase, con los miembros de los equipos, y con alumnos individuales; alumnos entre sí en el seno de los equipos; alumnos con la clase en su conjunto - Interacciones a propósito de los diversos procesos matemáticos y didácticos	Se aplicaron las siguientes normas interaccionales: -El modelo didáctico implementado siguió las pautas marcadas por los principios socio-constructivistas-interaccionistas (devolución, acción, formulación, validación, institucionalización, ejercitación). - Los alumnos escribieron sus respuestas, por equipos, y las entregaron al profesor antes de la fase de discusión. - Algunos alumnos presentaron a la clase sus soluciones y justificaciones; los demás escucharon y reaccionaron a demanda del profesor. - El profesor corrigió las respuestas incorrectas o deficientes de los alumnos. - El profesor debe evaluó los estados de las trayectorias cognitivas de los alumnos en distintos momentos, respondió a las cuestiones de los alumnos (sin desvelar prematuramente la solución) - El profesor sistematizó los conocimientos pretendidos. …
Ecológicas: -Orientaciones curriculares - Conexiones socio-profesionales	- El profesor justificó el tratamiento del tema en base a la inclusión de nociones estocásticas en el currículo de educación primaria, así como también en el interés de mejorar la intuición probabilística de los sujetos que permita evitar los sesgos como la "falacia del jugador" en relación al problema social y personal de las ludopatías. …

Podemos observar que el origen de unas normas está en la propia Didáctica de la Matemática y ciencias afines (psicopedagogía), en particular los "principios socio-constructivos

– instruccionales", en el Departamento que fija el programa de estudios, la administración educativa que fija un número de créditos para la asignatura. Unas normas se aplican en el momento de planificación de la actividad (elección de la situación – problema), otras en la implementación o evaluación (normas interaccionales). Algunas normas permiten un cierto grado de libertad en su aplicación (normas interaccionales derivadas del modelo didáctico) mientras que otras dejan poca o ninguna libertad al profesor (número de créditos asignados a la asignatura; la manera de justificar la solución del problema). Consideramos que la toma de conciencia por el profesor de la trama compleja de normas (hábitos, reglas, …) que soportan y condicionan su trabajo, junto a la reflexión sobre la idoneidad didáctica de los procesos de estudio que se describe a continuación, es un componente clave en la constitución de su identidad como profesional de la educación. "Incluye su apropiación de los valores y normas de la profesión; las creencias sobre la enseñanza y sobre sí mismos como profesores; una visión de lo que significa ser un "profesor excelente" y el tipo de profesor que desea ser; un sentido del yo como aprendiz y una capacidad para reflexionar sobre la experiencia" (Ponte y Chapman, 2008, p. 242)

4.5 Guía para la valoración de la idoneidad didáctica

La información recogida en los análisis descritos permitirá finalmente emitir un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio implementado y el reconocimiento de aspectos del mismo cuyo cambio aumentaría dicha idoneidad. En la tabla 5 sintetizamos el juicio razonado sobre la idoneidad del proceso de estudio en cada una de las seis dimensiones que se proponen en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006).

Tabla 5: *Guía para la valoración de la idoneidad didáctica (GVID)*

DIMENSIÓN/ CRITERIO	INDICADORES/VALORACIÓN
Epistémica: *Grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia*	La situación usada, "Lanzamiento de dos dados" y la configuración de objetos y procesos asociados, revelada con el uso de la GROS, proporcionó condiciones idóneas para la contextualización de los significados pretendidos. Esta situación tiene que ser complementada con nuevas situaciones de aplicación y ejercitación, así como con el estudio personal del texto seleccionado como complemento de las fases de institucionalización implementadas (Anexos 2 y 3 de la planificación). …
Cognitiva: *Grado en que los significados implementados (pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.*	El desarrollo de la sesión presencial y los documentos escritos que acompañan a la planificación indican que el contenido está en la ZDP de este grupo de estudiantes, aunque algunos de ellos no habían estudiado previamente el tema. Los alumnos que hicieron la presentación de sus soluciones al resto de la clase muestran que habían logrado los aprendizajes pretendidos. No obstante, sería necesario realizar una evaluación final de los aprendizajes del conjunto de la clase. Algunas de las dudas de los alumnos, planteadas al profesor después de haberse presentado la solución a toda la clase, sobre la opción de ser jugador A o B indica que el tema puede estar lejos de ser asimilado para un cierto porcentaje de estudiantes.

Afectiva: *Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes*	La grabación audiovisual indica que los estudiantes muestran un cierto interés en la realización de las actividades; esto no quiere decir que no hubiera algunos estudiantes "fuera de la clase", como es el caso de Raquel. También se pudo constatar una actitud pasiva de algunos estudiantes en algunos momentos. Sin duda hubiera sido preferible que los estudiantes lanzaran efectivamente los dos dados, en lugar de hacer la simulación con la tabla de números aleatorios. El uso de esta tabla resultó un factor negativo para la motivación al introducir un factor de dificultad no previsto por el docente, aunque sin duda aumentó la idoneidad epistémica.
Interaccional: *Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje*.	El formato de interacción, basado en el comienzo de la sesión con una fase de trabajo en equipo sobre una situación – problema de contextualización o iniciación, se reveló como idóneo para aflorar ideas iniciales de los estudiantes. El profesor tuvo ocasión de interactuar con los estudiantes que tenían dificultades, tanto para el cálculo de las probabilidades como con la simulación. Algunos estudiantes tuvieron ocasión de presentar sus soluciones a los compañeros. La segunda hora de clase se realizó con un formato básicamente magistral, lo que plantea dudas sobre la eficacia de las explicaciones presentadas. Ciertamente que el proceso de estudio contempla también fases de trabajos personal, apoyada en un texto y relaciones de ejercicios resueltos, así como con sesiones de tutoría grupal e individualizada.
Mediacional: *Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje*.	La sala de aula y el número de alumnos es adecuado; la sala estaba bien equipada para el trabajo en equipo, y la presentación audiovisual de los resultados (pizarra, display, applets informáticos de simulación probabilística) El tiempo disponible para el planteamiento y desarrollo de la situación – problema fue adecuado. No obstante, la compresión de los aspectos discursivos de la configuración asociada y el dominio de las competencias de cálculo probabilístico requieren una mayor cantidad de tiempo. Se espera que el alumno profundice personalmente en el estudio del tema. Las siguientes sesiones del curso se dedicaron a contenidos relacionados con el análisis de datos.
Ecológica: *Grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares*	El proceso de estudio diseñado e implementado permite el desarrollo de las competencias específicas del futuro profesor de educación primaria con relación al tema de azar y análisis de datos incluido en el currículo de educación primaria. Permite mejorar la formación de los futuros profesores como profesionales y como ciudadanos informados en un tema con presencia en los medios de comunicación. En este sentido se puede afirmar que tiene una alta idoneidad ecológica.

La idoneidad didáctica es una herramienta para el análisis y la síntesis didáctica que puede ser útil para la formación de profesores. Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. La ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en dicha práctica se puede explicar, en parte, por la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores. "La preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva" (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 202).

Pensamos que entre estas herramientas deben figurar los criterios para analizar la propia práctica docente, las lecciones de los textos escolares como fuente próxima para el diseño de unidades didácticas, o experiencias de enseñanza observadas. Consideramos importante introducir en la formación (inicial y continua) de profesores de matemáticas criterios para valorar la idoneidad de los procesos de estudio matemático, tanto si son basados en el uso de libros de texto, como si se trata de procesos apoyados en el uso de materiales y documentos de trabajo elaborados por el propio profesor.

5. Reflexiones finales

El hilo principal de este trabajo ha sido la descripción de nuestro modelo de formación de profesores de matemáticas, el cual contempla la profundización en su competencia matemática y el desarrollo de "competencias para realizar el análisis didáctico de la propia práctica". Ambas competencias pueden y deben ser articuladas. Esta articulación la llevamos a cabo apoyados en los presupuestos epistemológicos, cognitivos e instruccionales del marco teórico que denominamos "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS).

Hemos mostrado que la formación didáctica del profesor de matemáticas se puede orientar y sistematizar mediante las "Guías de análisis y reflexión" descritas en la sección 4 que tienen en cuenta las diversas competencias didácticas:

1. *Competencias referidas al diseño e implementación de procesos de estudio matemático:*

La GDUT pone el acento en la selección /reelaboración de situaciones – problemas ricas que permitan contextualizar las competencias matemáticas pretendidas en cada una de las sesiones en que se descompone el proceso de estudio. La GROS requiere categorizar los tipos de situaciones, identificar las variables de tarea, prever posibles generalizaciones y adaptaciones. Este análisis fenomenológico es complementado con el análisis de las configuraciones de objetos asociadas a cada situación-problema y los procesos matemáticos que dan lugar a tales objetos. La GRAPS apoya la reflexión sistemática sobre las interacciones en el aula, focalizada en el reconocimiento de conflictos de significado y la gestión de su resolución, así como el papel desempeñado por los recursos tecnológicos y la gestión del tiempo didáctico. La atención a las normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio permitirán encontrar explicaciones a determinados comportamientos del profesor y los estudiantes.

2. *Competencias referidas a conocimientos didácticos específicos y valoración de la idoneidad didáctica*

En cuanto a los conocimientos didácticos sobre orientaciones curriculares, desarrollo histórico (desde una perspectiva epistemológica) de los contenidos a enseñar, etapas de aprendizaje, tipos de errores y dificultades, patrones de interacción didáctica y sus efectos en el aprendizaje, uso de recursos tecnológicos y materiales manipulativos, propuestas de enseñanza experimentadas previamente, instrumentos de evaluación, etc., todas ellas se adquieren con el uso de las citadas guías, siempre que el estudiante consulte los textos en que se recoge este contenido didáctico. En nuestro modelo se propone el estudio contextualizado de estos contenidos y de las guías como requisito para poder emitir un juicio sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

El análisis de la "matemática en acción" que proponemos debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados matemáticos puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje. Se trata de situaciones didácticas para la formación de profesores cuyo objetivo central es el meta-análisis (Jaworski, 2005) de un componente clave de la enseñanza: la actividad matemática entendida tanto desde el punto de vista institucional (o socio-epistémico) como personal (o cognitivo).

Los supuestos epistemológicos, cognitivos e instruccionales del EOS, hechos operativos en las "Guías para el análisis didáctico" descritas en este trabajo, concuerdan y desarrollan los principios para la formación de profesores de matemáticas descritos en Cooney y Wiegel (2003). El primer principio se refiere a que los profesores en formación deberían experimentar la matemática como una materia plural (la noción de significado institucional de los objetos matemáticos postula la relatividad de tales significados respecto a los marcos institucionales, comunidades de prácticas, contextos de uso y juegos de lenguaje); el segundo principio indica que los profesores en formación deberían estudiar explícitamente y reflexionar sobre las matemáticas escolares (el ciclo formativo descrito parte de situaciones problemas tratables en los niveles escolares y de la reflexión sobre las configuraciones epistémicas y cognitivas asociadas); y el tercer principio afirma que los profesores en formación deberían experimentar las matemáticas de manera tal que apoye el desarrollo de estilos de enseñanza orientados a los procesos (en el caso del EOS ponemos la actividad de resolución de problemas y los procesos de representación, generalización, etc., como punto de partida en la construcción del conocimiento matemático, tanto desde un punto institucional como personal).

El modelo formativo descrito concuerda y desarrolla los dos objetivos primarios para la formación de profesores propuestos por Hiebert, Morris y Glass (2003). El primero se refiere a que el profesor "llegue a ser matemáticamente 'proficiente'", donde 'proficiencia' matemática se interpreta como la adquisición simultánea e integrada de cinco tipos de competencias matemáticas: comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001). El segundo objetivo se centra en preparar al profesor para lograr la proficiencia de sus propios alumnos[16]. Las "guías para el análisis y la reflexión didáctica" propuestas constituyen un sistema de herramientas para que los profesores aprendan a aprender de su propia experiencia, tanto en la fase de formación inicial como permanente.

16. "Los profesores que están equipados con herramientas para el aprendizaje a partir de sus experiencias están en una posición más fuerte para aprender métodos más efectivos a lo largo de sus carreras" (Hiebert, Morris y Glass, 2003; p. 205).

Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

Referencias bibliográficas

Ash, S. L. y Clayton, P. H. (2004). The articulated learning: An approach to guided reflection and assessment. *Innovative Higher Education*, Vol. 29, No. 2, 137- 154.

Ball, D. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for stuying teaching and learning. En, A. E. Kelly y R. A. Lesh, (Eds.), *Hadbook of Research Design Mathematics and Science Education* (pp. 365-402).London: Lawrence Erlbaum.

Ball, D., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2000). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp.433-456), American Educational Research Association, Washington, D.C.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. ISBN 84-699-4295-6. (Disponible en Internet, http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm)

Batanero, C. y Godino, J. D. (2004). Estocástica y su didáctica para maestros. En J. D. Godino (Dir.), *Matemáticas y su didáctica para maestros* (pp. 693-733). Granada: Los autores. (Disponible en Internet: http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm

Bloor, D. (1983). Wittgenstein. A social theory of knowledge. London: The Macmillan Press.

Blumer, H. (1969). Symbolic interactionism: Perspective and method. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7* (2), 33-115.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale,N.Y.: Lawrence Erlbaum A. P.

Cooney, T. J. y Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 795-828). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

D'Amore, B., Godino, J. D., Arrigo, G. y Fandiño, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Even, R. y Tirosh, T. (2002). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical leaning. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 219-240). London: Lawrence Erlbaum y NCTM.

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes. En L. Radford, G. Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, Historicity, and Culture*. Rotterdam: Sense Publishing.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 3-9.

Franke, M. L., Kazemi, E. y Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). Charlotte, NC: NCTM – IAP.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2): 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1), 3-36.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.*

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* XXVII (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *PUBLICACIONES.* Revista de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59–76

González, J. y Wagenaar, R. (2003). *Tuning educational structures in Europe. Final Report. Phase one*. Bilbao: Universidad de Deusto.
http://europa.eu.int/comm/education/policies/educ/tuning/tuning_es.html

Harrison, J. K., Lawson, T. y Wortley, A. (2005). Mentoring the beginning teacher: developing professional autonomy through critical reflection on practice. *Reflective Practice*,6 (3), 419 — 441

Hiebert, J., Morris, A. K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 6, 201-222.

Hill, H., Ball, D. L., y Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39* (4), 372-400.

Husu, J., Toom, A. y Patrikainen, S. (2008). Guided reflection as a means to demonstrate and develop student teachers' reflective competencies. *Reflective Practice*, 9, (1), 37 – 51. DOI: 10.1080/14623940701816642

Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 359-361.

Jaworski, B. y Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: Integrating theory and practice, and the roles of practicing. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 829-875). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Johns, Ch. (2002). *Guided reflection*. Blackwell Pub.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001) (Eds), *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Mathematics Learning Study Committee, National Research Council.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdan: Sense Publishers.

Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood,* 33 (1), 31-36

Oser, F. K. y Baeriswyl, F. J.: 2001, 'Choreographies of teaching: Bridging instruction to learning. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp.1031-1065), American Educational Research Association, Washington, D.C.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers´Knowledge and development In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 225-236). New York, NY: Routledge.

Rogers, R. (2001). Reflection in higher education: A concept analysis. *Innovative Higher Education, 26*, 37–57.

Schön, D. (1983).*The reflective practitioner: How professionals think in action.* New York, NY: Basic Books

Tejada, A. (2007). Desarrollo y formación de competencias: un acercamiento desde la complejidad. *Acción Pedagógica*, 16, 40-47.

Thames, M. H., Sleep, L., Bass, H. y Ball, d. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching (K-8): Empirical, Theoretical, and Practical Foundations. ICME 11, TSG 27: *Mathematical knowledge for teaching*. [On line], descargado el 2/08/08 de, http://tsg.icme11.org/document/get/572

Tomlinson, K. (2008). The impact of cooperative guided reflection on student learning: the case of optimization problem solving in Calculus I. [On line] (20 June 2008) http://digital.library.wisc.edu/1793/24574

Vygotsky, L. S. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. [Obras escogidas II, pp. 9-287]. Madrid: Visor, 1993.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica.

Planteamiento:

Raquel es una maestra de Primaria y lleva unos días trabajando algunas nociones de probabilidad en su clase de 6º. Sus alumnos asignan sin dificultad probabilidades a ciertos sucesos simples, como los resultados de lanzar un dado o una moneda o de girar una ruleta con todos los sectores iguales. Para hoy decide plantear la siguiente actividad:

Actividad 1. Suma de puntos al lanzar dos dados:

"Vamos a jugar con dos dados por parejas. Lanzamos los dados y sumamos los puntos obtenidos. Si resulta una suma de 6, 7, 8, ó 9 entonces gana A una ficha; si la suma es distinta de esos números gana B una ficha. ¿Qué prefieres ser jugador A o B?
Juega con un compañero 10 veces y anota los resultados de las sumas que obtienes.
¿Quién ha ganado más veces A o B?
¿Piensas que se repetirá el resultado si jugamos 100 veces más?¿Por qué?

Actividad 2. Recogida de datos de la clase:

A continuación Raquel recoge en la siguiente tabla los datos de las 10 parejas de alumnos que hay en la clase y les pide construir un diagrama de barras con estos datos.

	Suma de puntos	Numero veces	Frecuencia relativa
Gana B	2	2	0,02
	3	9	0,09
	4	12	0,12
	5	20	0,2
Gana A	6	7	0,07
	7	12	0,12
	8	14	0,14
	9	9	0,09
Gana B	10	8	0,08
	11	4	0,04
	12	3	0,03

Raquel plantea a los niños las siguientes preguntas:

¿Quién ha ganado más veces los jugadores A o los B? ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

Cuestiones didáctico-matemáticas:

CUESTIÓN 1: *Determina la probabilidad teórica que tienen de ganar los jugadores A y B. ¿Es equitativo este juego? ¿Tiene ventaja un jugador sobre el otro según estas reglas del juego?*

CUESTIÓN 2: *Si realizáramos 100 tiradas, ¿con cuánta frecuencia se espera que gane A y B?*

CUESTIÓN 3: *Prepara una tabla de frecuencias relativas con los 100 datos experimentales dados y un diagrama de frecuencias relativas. ¿Quién ha ganado más veces A o B? Compara estos resultados con los resultados esperables teóricamente.*

CUESTIÓN 4: *¿Qué ha ocurrido? ¿Por qué no ha ganado más veces A como era de esperar?¿Qué puede hacer la maestra en esta situación para explicar el resultado a sus alumnos?*

Capítulo 2

PROBABILIDAD CONDICIONAL: SESGOS E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

M. Carmen Díaz
Universidad de Huelva

Resumen. En este trabajo realizamos una revisión de las principales investigaciones en Psicología y Educación sobre razonamiento y comprensión de la probabilidad condicional. También mostramos algunos resultados obtenidos en nuestro propio estudio de evaluación con estudiantes de Psicología. Finalizamos con algunas implicaciones para la enseñanza de la estadística.

Palabras clave: Probabilidad condicional, errores estocásticos, dificultad en el aprendizaje de probabilidad condicional.

Abstract. In this paper we carry out a review of the main researches in Psychology and Education on reasoning and understanding of conditional probability. We also show some results obtained in our evaluation study with students of Psychology. We end with some implications for the teaching Statistics.

Keywords: Conditional probability, stochastic errors, difficulty in learning conditional probability.

1. Introducción

La probabilidad condicional es fundamental en las aplicaciones de la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios, a medida que adquirimos nueva información. Es también un concepto teórico básico requerido en la construcción del espacio muestral producto. Por ello, su correcta comprensión y el razonamiento sobre la misma son requisitos en el estudio de la inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana, así como en el estudio de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales. En el terreno profesional e incluso en la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional.

Sin embargo, la Psicología del razonamiento, así como algunas investigaciones recientes en didáctica de la probabilidad muestran la existencia de intuiciones incorrectas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión y aplicación de este concepto. Algunos de ellos están bastante extendidos y una enseñanza formal de la probabilidad es insuficiente para superarlos. Es necesario que el sujeto se haga consciente de estas dificultades y aprenda a afrontar los problemas condicionales con unas herramientas adecuadas.

En lo que sigue analizamos las principales investigaciones relacionadas con la comprensión de las ideas de probabilidad condicional e independencia, tanto en el campo de la Psicología, como en el de la Educación. Además mostramos los resultados obtenidos en un estudio con estudiantes de Psicología, donde se aplicaron diversos ítems que evalúan la presencia de estos sesgos.

La muestra utilizada en este estudio fueron 414 estudiantes de Psicología de primer curso de las universidades de Granada (cuatro grupos de estudiantes; n = 307), y Murcia (dos grupos; n = 106). Todos los participantes cursaban Primer Curso de Psicología y eran alumnos de la Asignatura de Análisis de Datos. La mayoría de los alumnos tenían una edad de 18 o 19 años. Predominaron las mujeres, situación que es habitual en las Facultades de Psicología. Los estudiantes habían estudiado el tema durante dos semanas, aproximadamente un mes antes que se pasase el cuestionario. Se realizó la toma de datos después del examen parcial que incluía el tema, para asegurarse que los alumnos lo habían estudiado. Todos ellos colaboraron voluntariamente y con interés en la investigación.

La finalidad de este trabajo es proporcionar una clasificación de las principales dificultades con las que nos enfrentamos al razonar sobre la probabilidad condicional, mostrando ejemplos de tareas que permiten evaluarlas, así como las respuestas típicas a las mismas. Creemos que esta información es valiosa para los profesores de estadística, tanto en la planificación de la enseñanza como en la evaluación del aprendizaje.

2. Comprensión intuitiva de la probabilidad condicional e independencia

La probabilidad condicional puede definirse con diversos grados de formalización. Intuitivamente podemos decir que la probabilidad condicional P(A/B) de un suceso A dado otro suceso B es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado. Desde un punto de vista más formal, se define mediante la expresión (1).

(1) $P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)$, siempre que $P(B) > 0$.

Estas definiciones no siempre se comprenden. En nuestro estudio se pidió a los alumnos que dieran de una definición intuitiva de probabilidad simple y de probabilidad condicional, aportando un ejemplo de cada una. Los resultados (Tabla 1) sugieren que, aunque una parte importante de los alumnos define correctamente las probabilidades, la tercera parte no da respuesta o tiene imprecisiones en la definición.

Tabla 1. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al ítem 1

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Define incorrectamente ambas probabilidades	119	28,7	28,7
Define imprecisamente una probabilidad	28	6,8	35,5
Define correctamente una probabilidad	90	21,7	57,2
Define imprecisamente ambas probabilidades	50	12,1	69,3
Define correctamente ambas probabilidades	127	30,7	100,0

Algunos alumnos utilizan expresiones imprecisas para definir algunas de las probabilidades, como por ejemplo: "En la probabilidad condicional, para que se dé un suceso, se tiene que dar otro". Este alumno indica correctamente que en la probabilidad condicional intervienen dos sucesos, pero la respuesta es imprecisa porque matemáticamente podemos definir la probabilidad condicional, independientemente de que el suceso ocurra o no. Otro ejemplo de definición imprecisa sería: "Probabilidad simple: aquella en la que hay un sólo elemento y en la probabilidad condicional intervienen dos sucesos". La respuesta es imprecisa, porque en la probabilidad conjunta también intervienen dos sucesos. La respuesta: "La probabilidad simple es la probabilidad de que ocurra una variable y la condicional que ocurra sabiendo que ha ocurrido otra que la condiciona" es imprecisa porque el alumno se refiere a variables y no a sucesos.

Un concepto relacionado con la probabilidad condicional es el de independencia. Matemáticamente puede deducirse de la regla del producto de probabilidades, mediante la definición (2).

(2) *A y B son independientes si y sólo si* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$,

Intuitivamente este concepto se relaciona con el de probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro (Maury, 1986). Estas dos definiciones no tienen dificultad de comprensión, desde el punto de vista matemático, ya que no requieren cálculos complejos. Pero, desde un punto de vista psicológico y didáctico es difícil, en muchos casos, saber si dos sucesos son o no independientes, al resolver un problema o al tomar una decisión. Por ejemplo, demostrar la relación entre fumar y desarrollar un cáncer ha supuesto muchos años de investigación.

Maury (1986) analizó la comprensión intuitiva de 374 estudiantes de los últimos cursos de Bachillerato, respecto a la probabilidad condicional usando cuatro problemas en un contexto de extraer bolas de urnas; con y sin reemplazamiento. También utilizó dos tipos de vocabulario (técnico y cotidiano) al plantear el problema 1.

Problema 1. Se tiene una bolsa con 1 bola azul y 2 bolas rojas. Se saca una bola al azar. Sin reponerla otra vez en la bolsa se saca una segunda bola. ¿Cuál suceso es más probable?

- Sacar dos bolas rojas.
- Sacar primero una bola roja y luego una azul.

Maury observó que sólo la cuarta parte de los alumnos daban respuestas correctas a este problema, mientras que los mismos alumnos obtuvieron un 60% de aciertos en problemas de probabilidad simple.

Tabla 2. *Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 1*

Se tiene una bolsa con 1 bola azul y 2 bolas rojas. Se saca una bola al azar. Sin reponerla otra vez en la bolsa se saca una segunda bola. ¿Qué suceso es más probable?

	Frecuencia	Porcentaje
a) Sacar dos bolas rojas.	39	9,4
b) Sacar primero una bola roja y luego una azul.	56	13,5
c) Los dos sucesos son iguales de probables	**313**	**75,6**
Blanco	6	1,4

En la Tabla 2 presentamos los resultados del Problema 1 pasado a los estudiante de nuestra propia investigación. En nuestra versión del problema introducimos una alternativa más que es la equiprobabilidad de los dos sucesos. La alternativa correcta fue elegida en nuestro caso por la mayoría (75,6% de los alumnos). El error más frecuente fue confundir el muestreo con y sin reposición (alternativa b).

Maury supuso que la dificultad del Problema 1 no está ligada, en sí, a la noción de independencia, sino al hecho de que los dos sucesos (azul /rojo) sean no equiprobables que introduce un distractor que aumenta la dificultad de la tarea. Esta suposición se confirmó en otro experimento (Maury, 1985; 1986) en la que plantea a 290 alumnos de entre 13 y 16 años el problema 2.

Problema 2. Una persona lanza 3 veces la misma moneda, obteniendo en este orden los resultados siguientes: cara, cruz, cruz. Lanza la moneda una cuarta vez. ¿Piensas que en el cuarto resultado es más probable la cara o la cruz?

Los resultados mejoran en este caso hasta el 70 % de éxitos, lo que para Maury indica el reconocimiento intuitivo de la independencia por parte de los alumnos. El problema es planteado en cuatro variantes, cambiando la forma de la pregunta final y la autora observa un éxito mayor cuando en la pregunta se listan todos los sucesos posibles del espacio muestral, que cuando no se listan. Nuestra versión del mismo ítem se enunció en un contexto de dados y con un número mayor de tiradas, quedando de la siguiente manera:

Problema 3. Una persona lanza un dado y anota si saca un número par o impar. Se trata de un dado no sesgado (es decir todos los números tienen la misma probabilidad). Estos son los resultados al lanzarlo 15 veces: par, impar, impar, par, par, impar, par, par, par, par, impar, impar, par, par, par. Lanza el dado de nuevo ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par en esta nueva tirada?

En la Tabla 3 presentamos los resultados del problema 3, donde la mayoría de los alumnos da una respuesta correcta. Un 11,8% obtiene una estimación frecuencial de la probabilidad, es decir, calculan la probabilidad a partir de la frecuencia relativa obtenida en los ensayos que se describen en el ítem, dando cómo valor de la probabilidad el valor 10/15 (hay un total de 10 pares en los quince lanzamientos).

Tabla 3. *Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 3*

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
No responde o asume dependencia	78	18,8	18,8
Estimación frecuencial de la probabilidad	49	11,8	30,7
Respuesta correcta	287	69,3	100,0

La dificultad del concepto de independencia no es exclusiva de estos alumnos. Por ejemplo, Sánchez (1996) pasa un cuestionario de probabilidad a 88 profesores de Matemáticas que participaban en México en un programa de actualización, proponiéndoles el problema 4.

Problema 4. Se extrae una carta al azar de una baraja americana: sea A el evento "se extrae un trébol" y B el evento "se extrae una reina" ¿Los eventos A y B son independientes?

Sólo 44 de los profesores hicieron intentos sistemáticos por resolver el problema. De éstos, 39 llegaron a una respuesta, pero sólo 4 lo hicieron correctamente, utilizando la regla del producto. En las respuestas incorrectas encuentra dos tipos de razonamiento:

1. Creer que eventos independientes son lo mismo que eventos excluyentes: "*No son independientes porque tenemos la reina de tréboles*". Este es un error muy extendido, y ha sido descrito, entre otros autores, por Kelly y Zwiers (1986). Los autores sugieren que el error puede ser debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que "independiente" puede significar, a veces, separado. Por otro lado, tanto en la definición formal de independencia como en la de sucesos excluyentes interviene la operación de intersección. Usualmente decimos que dos sucesos son independientes cuando la aparición /no-aparición de uno de ellos no proporciona información sobre la ocurrencia del otro. En el caso de sucesos excluyentes la aparición de uno implica la no-aparición del otro, por tanto dos sucesos excluyentes son siempre dependientes.
2. Creer que sólo se puede aplicar la idea de independencia a sucesiones de experiencias: "Si extraemos una carta para verificar el evento A y se vuelve a colocar en la baraja para verificar el evento B entonces A y B son independientes. Si se extrae la carta para verificar A y no se regresa, entonces A y B no son independientes".

En nuestra investigación propusimos este mismo problema, pero se incluyeron en las respuestas alternativas los errores descritos por Sánchez (1996), quedando de la siguiente forma:

Problema 5. Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas con cuatro palos: oros, bastos, espadas y copas. Cada palo tiene los números del 1 al 7, sota caballo y rey). Sea A el suceso “se extrae una carta de oros” y B el suceso “se extrae un rey”. ¿Los sucesos A y B son independientes?

a) No son independientes, porque en la baraja hay un rey de oros.
b) Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda para ver si es oros.
c) Si, porque P(rey de oros) = P(rey) x P(oros).
d) No, porque P(rey / oros) ≠ P(rey).

En la Tabla 4 mostramos las respuestas de nuestros estudiantes a este problema, donde vemos que un 29% de alumnos responden correctamente. El error más frecuente entre nuestros alumnos fue confundir independencia con mutua exclusividad, algo que coincide con los resultados de Sánchez (1996).

El distractor b) evalúa el error de suponer que el concepto de independencia sólo se puede aplicar a experimentos que se suceden en el tiempo, fue cometido por un 14,7% de los estudiantes.

Tabla 4. *Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 5*

	Frecuencia	Porcentaje
a)	118	28,5
b)	61	14,7
c)	**120**	**29,0**
d)	82	19,8
Blanco	33	8,0

3. Condicionamiento, causación y temporalidad

La causalidad es un concepto científico, filosófico y psicológico complejo. Por otro lado es también un concepto intuitivamente comprendido y aceptado por las personas ya que construimos nuestro conocimiento del mundo sobre la base de relaciones de causa y efecto entre diferentes sucesos.

Desde el punto de vista probabilístico, si un suceso A es la causa estricta de un suceso B, siempre que suceda A, sucederá B, por lo que P(B/ A) = 1. La relación causal estricta es difícil de hallar en el mundo real y hablamos de relación de causa débil cuando al suceder A cambia la probabilidad de que ocurra B. Es decir, cuando P(B/A) es diferente de P(B), por lo cual una relación de causalidad implica una dependencia de tipo estadístico entre los sucesos implicados.

Sin embargo lo contrario no es cierto, ya que dos sucesos pueden ser estadísticamente dependientes, sin que uno de ellos sea causa del otro. Por ejemplo, es sabido que los países con mayor esperanza de vida tienen una menor tasa de natalidad, pero esto no implica que la tasa de natalidad sea causa de la esperanza de vida o al contrario, ya que si conseguimos aumentar la natalidad de un país esto no incide automáticamente en la esperanza de vida de sus habitantes. La existencia de una relación condicional indica que una relación causal es posible, pero no segura. Una asociación estadística entre variables puede ser debida a otras variables intervinientes o incluso ser espúrea y no implica relación causal.

Desde el punto de vista psicológico, la persona que evalúa una probabilidad condicional P(A/B) va a percibir dos relaciones muy diferentes entre A (suceso condicionado) y B (suceso condicionante) dependiendo del contexto. Si dentro del contexto se percibe que B es una causa de A, la persona establecerá entre A y B una relación causal. Si dentro del contexto se percibe A como una causa de B, la persona establecerá entre A y B una relación diagnóstica. Veamos el problema 6 (Pollatsek y cols., 1987).

Problema 6. ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable? a) Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules. b) Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules. c) Los dos sucesos son igual de probables".

Aunque matemáticamente los dos enunciados son equivalentes, desde un punto de vista psicológico no son percibidos como idénticos por las personas. En la primera opción, A sería que la niña tenga los ojos azules (efecto), B que la madre tenga los ojos azules (causa). En este caso al calcular P (A/ B) el estudiante tendrá que realizar un razonamiento causal, estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas. Por el contrario, en la segunda opción, A sería que la madre tenga los ojos azules (causa) y B que la niña tenga los ojos azules, por tanto P (A/ B), es una relación diagnóstica.

Numerosos estudios indican que la creencia que las relaciones causales son más fuertes que las relaciones diagnósticas. Por ejemplo, Tversky y Kahneman (1982a) encontraron que las personas encontraban más probable que "una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules" (relación causal) que "una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules" (relación diagnóstica). Tversky y Kahneman explican este hallazgo con la existencia de un sesgo causal cuando las personas se enfrentan con tareas relacionadas con la probabilidad condicional.

La relación de causalidad también se asocia, a menudo, con la secuencia temporal. El problema 7 (Falk, 1986) ilustra como algunos estudiantes tienen problemas con la condicionalidad cuando se invierte el eje de tiempo en que los sucesos ocurren de una forma natural.

Problema 7. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento.

1. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? *P (N2/ N1)*
2. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? *P (N1/ N2)*

Mientras los alumnos de Falk no tenían dificultad para resolver la primera parte del problema 7, muchos eran incapaces de dar una solución a la segunda, a la que responden que el resultado en la segunda extracción no afecta a la primera. Otros estudiantes dan como respuesta 1/2, teniendo en cuenta sólo la composición de la urna y sin utilizar el dato del resultado posterior.

Estos resultados indican un mecanismo implícito que supone la confusión entre condicionamiento y causación. En la primera parte del problema 7, la inferencia causal es una situación natural y compatible con el eje temporal, pero la segunda parte pide hacer una inferencia inversa, que requiere un razonamiento probabilístico que es indiferente al orden temporal, lo que puede crear dificultades psicológicas.

El resultado en la segunda extracción depende causalmente del resultado en la primera extracción. El resultado del primer experimento no depende causalmente del segundo, pero el resultado en cualquiera de las dos extracciones modifica la estimación de probabilidades del resultado en la otra. Si, por ejemplo, en la segunda extracción ha salido una bola negra, sabemos que esta bola ya no puede ser uno de los posibles resultados en la primera extracción, por tanto ha habido una reducción del espacio muestral y P (N1/ N2) sería un tercio, igual que la P (N2/ N1).

La creencia de que un suceso que ocurre después del que juzgamos no puede afectar a la probabilidad del primero se conoce como falacia del eje temporal. Es importante erradicar esta creencia, pues la probabilidad de un suceso debe ser revisada a la luz de resultados posteriores en algunas situaciones, sobre todo dentro del marco de la inferencia bayesiana, donde la actualización de las probabilidades a la luz de los resultados juega un papel tan importante.

En relación a la secuencia temporal de los sucesos que intervienen en una probabilidad condicional, Gras y Totohasina (1995) identifican tres tipos de concepciones erróneas:

- En la *concepción cronológica* los estudiantes interpretan la probabilidad condicional *P(A/B)* como una relación temporal, donde el evento condicionante *B* siempre precede al suceso *A*.
- En la concepción *causal*, los estudiantes interpretan la probabilidad condicional *P(A/B)* como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante *B* es la causa y *A* la consecuencia.
- En la concepción cardinal los estudiantes interpretan la probabilidad condicional P(A/B) como la proporción $\frac{\text{Card }(A \cap B)}{\text{Card }(B)}$, que es correcta en el caso de un espacio muestral finito equiprobable. Aún así, cuando se maneja un espacio muestral continuo o las probabilidades de los diferentes sucesos no son iguales, esta concepción lleva a un error. Otros estudiantes interpretan P(A/B) como la proporción $\frac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(B)}$, que es siempre falso.

En las tablas 5 y 6 presentamos los resultados de la aplicación del problema 7 a nuestros alumnos. La mayoría de los alumnos (68,8%) han respondido correctamente a la primera parte del problema. El error más frecuente en esta parte fue confundir la probabilidad condicional y conjunta aplicando la regla del producto (1/2) x (1/3)=1/6.

Tabla 5. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 7 (parte 1)

¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? *P* (N_2/N_1)		
	Frecuencia	Porcentaje
a) 1/ 2	23	5,6
b) 1/ 6	70	16,9
c) 1/ 3	**285**	**68,8**
d) 1/ 4	30	7,2
Blanco	6	1,4

En la segunda parte del problema, aproximadamente la cuarta parte da la respuesta correcta, mientras otra cuarta parte presentan la falacia del eje temporal o concepción cronologista de la probabilidad condicional, según Gras y Totohasina (1995). El sesgo de equiprobabilidad lo presenta un 36,5%. Nuestros resultados reproducen los obtenidos por Falk (1986).

Gras y Totohasina (1995) quisieron estimar la proporción de estudiantes que presentan las diferentes concepciones citadas anteriormente. Para ello hicieron las siguientes preguntas a una muestra de 75 estudiantes de secundaria (17-18 años), después de haber recibido una enseñanza experimental sobre probabilidad condicional:

Tabla 6. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 7 (parte 2)

¿Cuál es la probabilidad de haber extraído una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? *P* (N_1/N_2)		
	Frecuencia	Porcentaje
a) 1/ 3	**99**	**23,9**
b) No se puede calcular	103	24,9
c) 1/ 6	38	9,2
d) 1/ 2	151	36,5
Blanco	23	5,6

Pregunta A. Para calcular la probabilidad condicional *P (A/B)*, ¿Debe ocurrir el suceso *B* cronológicamente antes que el suceso *A*? Si__ No__ No sabe__

Pregunta B. Para calcular la probabilidad condicional *P (A/B)*, ¿Debemos asumir que el suceso *B* es la causa y el suceso *A* el efecto o la consecuencia de B? Si__ No__ No sé__

El 63 % de los estudiantes dio una respuesta afirmativa a la primera pregunta y un 28 % respondió afirmativamente a la segunda. Los autores sugieren que el origen de las dos primeras concepciones erróneas es cognitivo, mientras que la concepción cardinal es inducida por la enseñanza.

4. Intercambio de sucesos en la probabilidad condicional

Falk (1986) sugirió que muchos estudiantes no discriminan adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional P(A/ B) y P(B/ A) y denominó a este error falacia de la condicional transpuesta. Este error se ha observado en problemas de contextos médicos, donde se confunde la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positivo el test de diagnóstico con la probabilidad de un resultado positivo en el test de diagnóstico, dado que se tiene la enfermedad (Eddy, 1982). La prevalencia de este error puede tener consecuencias importantes; por ejemplo la confusión entre la probabilidad de que un niño afectado con síndrome de Down dé una amniocentesis prenatal positiva, que es alta y el hecho de que, siendo la prueba positiva el niño realmente tenga síndrome de Down, que es mucho menor.

En otro contexto, Pollatsek y cols (1987) encontraron que el 69% de los sujetos de su estudio consideran correcta la opción c) en el problema 8, lo que implica que igualan una probabilidad condicional y su transpuesta.

Problema 8. ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?
a) Que un taxi azul sea correctamente identificado por la noche como un taxi azul.
b) Que un taxi identificado por la noche como azul sea realmente un taxi azul.
c) Los dos sucesos son iguales de probables.

Una problema de este tipo se presentó a nuestros estudiantes para evaluar la presencia de este sesgo presentamos (problema 9). Alrededor de un tercio del grupo que escoge la respuesta correcta (alternativa b), siendo los resultados en nuestro caso algo mejores que en el estudio de Pollatsek y cols (1987).

Problema 9. Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad en la que hay pocos casos de cáncer. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿Qué te parece más probable?
a) Que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.
b) Que un test de diagnóstico resulte positivo si la persona tiene cáncer.
c) Los dos sucesos tienen la misma probabilidad.

Tabla 7. *Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 9*

	Frecuencia	Porcentaje
a)	24	5,8
b)	**133**	**32,1**
c)	245	59,2
Blanco	12	2,9

También se ha encontrado esta misma confusión en la interpretación de tablas de contingencia por parte de estudiantes donde, según Batanero y cols. (1996), alrededor del

20% de los estudiantes del curso preuniversitario en su trabajo confunden “porcentaje de fumadores que contraen cáncer de pulmón” con “porcentaje de personas con cáncer de pulmón que fuman”.

Esta confusión se extiende al contexto de la interpretación del nivel de significación α en los contrastes de hipótesis. El nivel de significación α se define como la probabilidad condicional de obtener un resultado R en la región de rechazo cuando la hipótesis nula Ho es cierta, es decir α=P (R/ Ho). Cuando un contraste de hipótesis resulta significativo (lo que quiere decir que R ha ocurrido) y alguien pregunta por la probabilidad de haber cometido un error (la probabilidad de que H0 sea cierta) a menudo se contesta con α. En esta situación se estaría confundiendo P (R/ Ho) con P (Ho/ R).

Una posible explicación dada por Falk (1986) de la prevalencia de este error es que el lenguaje ordinario, que es el que usamos en el enunciado de los problemas de probabilidad condicional no tiene la suficiente precisión. Cuando escribimos una probabilidad condicional usando la notación matemática es claro cuál es el suceso condicionante y cuál el condicionado, pero en el lenguaje ordinario la probabilidad condicional (tener cáncer si se es fumador) y su inversa (ser fumador si se tiene cáncer) no siempre se distinguen claramente entre sí. También en el caso del contraste estadístico de hipótesis la definición de α como “probabilidad de cometer error tipo I” podría contribuir a su incorrecta interpretación porque en la anterior frase sólo se hace referencia a un suceso (error tipo I) y no a una probabilidad condicional.

5. Confusión de probabilidad condicional y probabilidad conjunta

Pollatsek y cols. (1987) coinciden con Falk (1986) en que muchas de las dificultades que las personas tienen con la comprensión de la probabilidad condicional pueden deberse a dificultades de comprensión del lenguaje de los enunciados de la probabilidad condicional y que la ejecución de tareas que implican probabilidades condicionales depende de cómo se redacten los enunciados.

Un ejemplo de esto lo encontraron Einhorn y Hogarth (1986) con los enunciados que usan la conjunción “y”. Para estos autores estos enunciados pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional. Los autores plantearon a 24 estudiantes la pregunta: “¿Cuál es la probabilidad de ir al supermercado y comprar café?”. Esta pregunta se refiere a la probabilidad conjunta, pero 9 de los 24 estudiantes la interpretaron en forma condicional como P(comprar café/ ir al supermercado). También en la investigación de Ojeda (1995) la mitad de los sujetos del estudio interpretaron la intersección como condicionamiento.

Un error relacionado es la falacia de la conjunción (Tversky y Kahneman, 1982b) o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión. Estos autores plantearon a estudiantes sin formación estadística el problema 10, a partir de los resultados de una encuesta de salud realizada en una muestra de hombres adultos de todas las edades y ocupaciones.

Problema 10. ¿Qué porcentaje de los hombres entrevistados tienen más de 55 años y además han tenido uno o más ataques al corazón? ¿Qué porcentaje de los hombres entrevistados ha tenido uno o más ataques al corazón? De los hombres entrevistados con más de 55 años, ¿qué porcentaje ha tenido uno o más ataques al corazón?

Muchos alumnos dan un mayor porcentaje a la primera pregunta que a las otras dos. Según Tversky y Kahneman el error es resultado de considerar la conjunción como más representativa de la población generadora que cada evento separado o bien del hecho que la conjunción hace que los sujetos recuerden o imaginen más ejemplos de una categoría o modelo más restringido.

Para valorar la confusión entre probabilidad condicional y conjunta, se presentó a los alumnos de nuestro estudio el problema 11. Los resultados obtenidos (Tabla 8) son bastante similares a los obtenidos en nuestros estudios previos con versiones piloto del cuestionario (Díaz y de la Fuente, 2005), así como con otras muestras de futuros profesores de educación primaria y secundaria (Estrada y Díaz, 2006).

Problema 11. En una población se ha realizado una entrevista a un grupo de hombres, obteniendo los siguientes resultados:

	menos de 55 años	más de 55 años	Total
Ha sufrido un ataque al corazón	29	75	104
No ha sufrido ataque	401	275	676
Total	430	350	780

Si elegimos al azar una de estas personas:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años y además haya tenido un ataque al corazón?
c. Sabiendo que la persona escogida tiene más de 55 años, ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?
d. Sabiendo que la persona escogida ha tenido un ataque al corazón, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años?

Tanto el cálculo de una probabilidad simple y conjunta resulta bastante sencillo para estos alumnos. Mayor dificultad aparece en el cálculo de probabilidades condicionales y distinción entre una probabilidad condicional y su inversa donde el porcentaje de fallos se acerca al 40%.

Los principales errores fueron la confusión de probabilidades condicionales y conjuntas, errores ya destacados por Einhorn y Hogarth (1986), Totohasina (1992) y Ojeda (1995), que se producen en un 27,1% de los estudiantes. Esta misma confusión en la interpretación de tablas de contingencia aparece en el 20% de los estudiantes del curso preuniversitario en la investigación de Batanero y cols. (1996). También aparecen en casos aislados los siguientes errores no descritos en la literatura:

Tabla 8. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 11

	a. $P(A)$	b. $P(A \cap B)$	c. $P(A/B)$	d. $P(B/A)$
Incorrecto	23 (5,5)	138(33,3)	132 (31,3)	133 (32,1)
Correcto	378 (91,3)	261(66,0)	259 (62,6)	241 (58,2)
Blanco	13 (3,2)	15(3,7)	23 (5.5)	40 (9,5)

- Confusión de un suceso y su complementario, respondiendo *P (A /no B),* cuando se pregunta *P(A/B).*
- Confusión de probabilidades con casos posibles (frecuencias absolutas).
- Obtención de probabilidades mayores que la unidad; como responder $P(A \cap B)=780/75$, invirtiendo en este caso la fórmula de Laplace.
- Confusión de la unión y la intersección, dando la solución $P(A \cap B) = \frac{104}{780} + \frac{350}{780} - \frac{75}{780}$.

  Hacemos notar que estos alumnos (tres casos) han notado que los sucesos A y B no son mutuamente excluyentes y han aplicado la fórmula correcta de la unión de sucesos para estos casos, pero han dado a la palabra "y" del enunciado un significado de unión, que es frecuente en el lenguaje cotidiano, pero no coincide en este caso con el significado matemático.
- Suponer independencia en los datos, aunque la dependencia es patente en la tabla. Estos alumnos calculan la probabilidad de la intersección, como producto de las dos probabilidades P(A) y P(B), calculadas estas correctamente, dando la solución $P(A \cap B) = \frac{104}{780}\ x\ \frac{350}{780}$.
- Dar el cociente P(A)/ P(B) cuando se pide la probabilidad condicional.

Estos resultados, que amplían los encontrados en la literatura previa, sugieren la necesidad de atender a la capacidad de lectura de datos en tablas dobles.

6. Situaciones sincrónicas y diacrónicas

Otra variable influyente en la dificultad de las tareas de probabilidad condicional es si se percibe o no el experimento compuesto como una serie de experimentos simples sucesivos. A este respecto se pueden distinguir dos tipos de situaciones relacionadas con la probabilidad condicional:

- *Situaciones sincrónicas:* son situaciones estáticas, en las que no subyace una secuencia de experimentos, sino que los experimentos aleatorios se realizan simultáneamente. Un ejemplo lo encontramos en el problema 12, descrito en Falk (1986). La mayor parte de los estudiantes dan como respuesta 1/2 porque sólo perciben un experimento y suponen que la tarjeta con las dos caras rojas no es relevante para calcular la probabilidad condicional.

PROBLEMA 12. En una urna hay tres tarjetas: una es azul por ambos lados, otra es roja por ambos lados y la última es por un lado azul y por otro roja. Seleccionamos una tarjeta al azar y la ponemos sobre la mesa tal y como la sacamos de la urna. La cara que vemos es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja también?

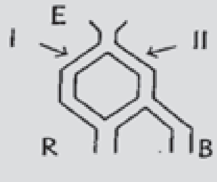
- Situaciones diacrónicas: son situaciones en las que hay una clara secuencia temporal, donde se realizan un experimento detrás de otro. Un ejemplo se muestra en el problema 13.

PROBLEMA 13. En una urna hay dos bolas blancas y dos bolas negras. Tomamos una bola blanca de la urna y sin reemplazarla tomamos una segunda bola al azar de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca?

Cuando calculamos una probabilidad condicional, es clave que cambiemos el espacio muestral al suceso condicionante. Para los estudiantes resulta difícil identificar el espacio muestral y el suceso condicionante. Las situaciones sincrónicas dificultan especialmente el cambio de espacio muestral, como comprueba Ojeda (1995) al plantear el problema 12 a 26 alumnos de entre 14 y 16 años, el 60% de los cuáles ignoraron la información dada por la cara mostrada al resolver el problema.

La autora propone también los problemas 13 y 14 a 255 alumnos de Bachillerato, después de estudiar probabilidad condicional. Estos dos problemas tienen la misma estructura matemática, pero el problema 13 se percibe más fácilmente como una secuencia de experimentos. La proporción de respuestas correctas subió del 25% (problema 14) al 40% (problema 13), aunque los alumnos todavía siguen con dificultades y no reducen convenientemente el espacio muestral al resolver el problema.

Problema 14. Una bola se suelta en E. Si sale por R, ¿qué es más probable, que haya seguido el canal I, o que se haya ido por el canal II?



En la tabla 9 presentamos los resultados de una versión modificada del ítem 14 en nuestros alumnos, en donde se les pregunta por la probabilidad de que la bola, habiendo caido en R haya pasado primero por el canal I. Tan sólo un 9% de estos alumnos lo han resuelto correctamente. La mayoría han escogido la alternativa a) que indica que no tienen en cuenta todos los sucesos del espacio muestral. Han sido pocos los alumnos que han escogido la alternativa d).

Tabla 9. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al problema 14

	Frecuencia	Porcentaje
a) 1/2	318	76,8
b) 1/3	37	8,9
c) 2/3	**41**	**9,9**
d) No se puede calcular	7	1,7
Blanco	11	2,7

Contrastan estos resultados con lo de Ojeda (1995) quien obtiene mucho mejores resultados con este ítem que con los anteriores. La diferente forma en que se da el enunciado podría explicar la discrepancia de resultados

7. Razonamiento bayesiano

Otro grupo de dificultades vinculadas a la probabilidad condicional son las relacionadas con problemas bayesianos. Totohasina (1992), para indagar sobres las concepciones intuitivas sobre el razonamiento bayesiano, propone a 67 alumnos del curso preuniversitario, que habían estudiado la probabilidad, pero no la probabilidad condicional, el problema 15.

Problema 15. Una tienda almacena sus productos en cajas. Estas cajas son de dos colores: rojo (25% de las cajas) o azul (75%). Las cajas están envueltas por envoltorio de papel. Algunos de estos envoltorios tienen la marca M en la parte inferior. Entre los envoltorios que contienen una caja roja, el 45% tiene la marca M. Entre los envoltorios que contienen una caja azul, el 60% tiene la marca M. Tomamos una caja envuelta, si el envoltorio tiene la marca M, ¿cuál es la probabilidad de que la caja sea azul?

Sólo el 25% de los alumnos dieron una respuesta correcta, muchos de ellos apoyándose en representaciones usadas espontáneamente para resolver el problema, como diagrama en árbol, representación mediante tabla de doble entrada o representación rectangular. Totohasina encuentra las siguientes estrategias espontáneas entre los alumnos que llegaron a resolverlo:

- Cambio de referencial: "*En el total de cajas azules o rojas 45/4 +45=225/4 tienen la marca M. En 36 cajas rojas 45/4 llevan la marca. La probabilidad de que la caja con marca sea roja es P(D)= (45/4)/ (225/4)= 1/5*".

- Cálculo de cocientes de porcentajes, lo que implica, en la práctica la fórmula de Bayes: "*Porcentaje de bolas con la marca: (45/199)x(25/100)+(60/100)x(75/100) = 56.25%. Por tanto, probabilidad de que la caja con marca sea roja = (45/100) x(25/100) /56.25/100=20 %*".

Entre las dificultades encontradas por los alumnos en la resolución del problema, describe las siguientes:

- Interpretación no probabilística del enunciado, haciendo uso sólo de las frecuencias absolutas de casos, pero no de los porcentajes.
- No restringir el espacio muestral al calcular las probabilidades, lo que implica una comprensión deficiente de la idea de condicionamiento.
- Confusión entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional: "tenemos un 25% de bolas rojas en el conjunto y de ellas el 45% tienen la marca M; luego (25/100)x(45/100)= 11.25% de las bolas rojas tienen la marca".

El mismo autor, después de realizar un experimento de enseñanza de la probabilidad condicional, pero en el que no se introduce formalmente el teorema de Bayes, aunque se plantean y resuelven problemas de probabilidad inversa basándose en árboles y tablas de doble entrada, propone a los alumnos el problema 16.

Problema 16. Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar, si la bola es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?

Totohasina argumenta que el problema 16 se aproxima más a un modelo de urnas donde se acentúa la causalidad y donde la temporalidad está ausente. El autor examina los tipos de diagramas en árbol utilizados por los alumnos. De un total de 65 alumnos, 26 construyen un árbol directo marcando el aspecto secuencial de los experimentos y 9 llegan al árbol inverso. Otros 7 alumnos usan el árbol, pero no contemplan el aspecto secuencial y no llegan a asignar correctamente las probabilidades. Sólo 9 alumnos llegan a la solución correcta de los problemas.

Este mismo ítem, pasado a nuestros alumnos sugiere una dificultad moderada de este tipo de tareas (Tabla 10). Aunque el 45% de los estudiantes resolvió correctamente el problema, un 55% llegó al menos al cálculo correcto de la probabilidad total. El porcentaje de respuestas correctas supera al obtenido por Totohasina (1992) con estudiantes del curso preuniversitario. Hay que tener en cuenta que éste autor no introdujo formalmente el teorema de Bayes en la enseñanza, y en nuestro caso sí. Esto sugiere que una instrucción especifica en el tema ayuda a la mejor comprensión de estos conceptos. En nuestro caso el porcentaje de estudiantes que llegan a completar el diagrama en árbol correctamente también supera al de la investigación de Totohashina.

Tabla 10. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas de 414 alumnos de Psicología al ítem 16

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Respuesta incorrecta	57	13,8	13,8
Diagrama de árbol	50	12,1	25,8
Diagrama e identificación del problema	78	18,8	44,7
Cálculo probabilidad total	42	10,1	54,8
Respuesta correcta	187	45,2	100,0

Para tratar de explicar las dificultades de los estudiantes con estos problemas Totohasina analiza los procedimientos que los alumnos siguen para resolverlos. El autor supone que los alumnos pueden encontrarse con dificultades en función del tipo de representación elegida para resolver el problema.

Pasar, por ejemplo, a una tabla de doble entrada, dificulta la percepción de la naturaleza secuencial de algunos problemas, porque lo que queda más visible es la intersección de los dos sucesos y puede llevar a los alumnos a confundir la probabilidad condicional y la conjunta. Otra dificultad es la necesidad de invertir condición y condicionado en los problemas tipo Bayes, ya que, como hemos señalado, los alumnos con frecuencia confunden el papel de estos dos sucesos en una probabilidad condicional y por tanto confunden una probabilidad condicional con su inversa. Totohasina sugiere que este obstáculo de "reversibilidad" también aparece en el aprendizaje de otras nociones matemáticas, por ejemplo al aprender el concepto de primitiva de una función, partiendo del de derivada.

Parece que el uso de un árbol es el recurso más efectivo para resolver problemas de probabilidad condicional, sobre todo cuando se refiere a un problema diacrónico (dirigido en el tiempo). Pero puede reforzar las concepciones causalista o cronologista en los alumnos que las manifiestan.

8. Influencia de la presentación del problema

Pollatesk y cols. (1987) analizan los factores que pueden influir en la comprensión de los problemas de probabilidad condicional. Estos factores incluyen la forma en que están expresados los enunciados, y que el contexto esté basado o no en el conocimiento de los alumnos sobre mundo real. Estos autores en su experimento incluyeron dos tipos de problemas: problemas probabilísticos y problemas porcentuales. Encontraron que problemas en el que el factor causal se hacía presente (como los problemas sobre madre e hija), la versión porcentual es más sencilla y los alumnos dan mayor número de respuestas correctas que en la versión probabilística.

Otro estudio similar es el de Gigerenzer (1994) quien sugiere que la dificultad en la resolución de problemas referidos al teorema de Bayes desaparece cuando las preguntas se plantean en términos de frecuencias. Un ejemplo de tales enunciados se plantea en el problema 17.

Problema 17. Uno de cada 1000 americanos tiene una enfermedad. Una prueba ha sido diseñada para detectarla. Cada vez que la persona está enferma, el test da positivo, pero también da positivo en 50 de cada 1000 personas sanas. ¿Cuantas personas de entre aquellas a las que el test dio positivo tendrán realmente la enfermedad?

Gigerenzer sugiere que nuestra mente está mejor equipada para resolver problemas bayesianos cuando la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias. Llama a este formato frecuencias naturales porque se asemeja más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de muestreo natural a lo largo de nuestra experiencia (por ejemplo un médico en su consulta). Cuando la información se ofrece en términos de frecuencia, el cálculo de la probabilidad a posteriori es más natural, porque el sujeto no tiene que aplicar toda la complejidad del teorema de Bayes, sino sólo tener en cuenta los casos favorables y posibles, de modo que el problema se transforma en un problema simple de probabilidad. En el ejemplo, la persona razona en la siguiente forma: "En 1000 americanos hay 999 sanos y uno enfermo. Al pasar el test 50 (aproximadamente) de los 999 sanos darán positivos y también el sujeto enfermo. Luego la probabilidad de que el sujeto esté enfermo si el test es positivo es 1/51 porque solo hay un enfermo entre los 51 a los que el test dio positivo".

Estos resultados coinciden con los de Ojeda (1995), puesto que alrededor del 45% de estudiantes de secundaria (255 alumnos en la muestra) fueron capaces de resolver el problema 18, que requiere un razonamiento bayesiano.

Problema 18. En una ciudad hay 60 hombres y 40 mujeres por cada 100 habitantes. La mitad de los hombres y una tercera parte de las mujeres fuman. Si se selecciona al azar un fumador, ¿qué es más probable, que sea hombre o mujer?

Resultados similares se han obtenido al plantear otros problemas probabilísticos en términos frecuenciales, por lo que Gigerenzer y Hoffrage, (1995) recomiendan, cuando sea posible, cambiar a frecuencias el formato de las preguntas. En el caso particular de la falacia de la conjunción Fiedler (1988) encontró una reducción considerable del número de respuestas incorrectas al plantear las preguntas en formato de frecuencias.

En un estudio preliminar de nuestro cuestionario (con diferentes muestras de entre 52 y 82 estudiantes) se realizaron comparaciones entre distintas versiones del mismo problema (en formato probabilístico y frecuencial) (Díaz, 2007). Las dos versiones del problema se presentan a continuación (problema 19 y 20).

Problema 19. La probabilidad de que una mujer de 40 años tenga una mamografía positiva es el 10.3 %. La probabilidad de que una mujer de 40 años tenga cáncer de pecho y una mamografía positiva es de 0.8%. Una mujer de 40 años se realiza una mamografía y resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?

Problema 20. 103 de cada 1000 mujeres de 40 años tienen una mamografía positiva. 8 de cada 1000 mujeres de 40 años tienen cáncer de pecho y obtienen una mamografía positiva. En una muestra representativa de mujeres de 40 años que se realizan una mamografía y resulta positiva. ¿Cuántas de ellas esperas que realmente tengan cáncer?

Los resultados en porcentaje de respuestas correctas encontrados en cada una de las versiones se presentan en la tabla 11. En nuestro caso, no podemos decir que el formato frecuencial haya mejorado la ejecución en este problema.

Mientras que en el formato probabilístico se obtuvo un 33,8% de respuestas correctas, en la versión frecuencial este porcentaje sólo llega al 25,3%. Resultados similares se obtienen con ítems que evalúan el razonamiento bayesiano. Pensamos que, una vez los estudiantes han recibido enseñanza sobre el teorema de Bayes, la proporción de soluciones correctas a problemas dados en formato probabilístico crece y no se da tanta diferencia con los éxitos en problemas dados mediante frecuencias. Por otro lado, el formato probabilístico es más sencillo de generalizar al caso de que el experimento tenga más de dos sucesos posibles o en el caso de experimentos múltiples. Por ello recomendamos que se usen diferentes formatos (frecuencias, probabilidades) en los problemas de probabilidad condicional.

Tabla 11. *Resultados de 414 alumnos de Psicología a los problemas 19 y 20*

	Porcentaje (frecuencial)	Porcentaje (probabilidad)
a) **7’76% / 7’7 de cada 100**	**25,3**	**33,8**
b) 8’24% / 8’24 de cada 100	36,5	37,0
c) 0’8 % / 0’8 de cada 100	38,2	29,2
Total	100,0	100,0

9. Implicaciones para la enseñanza de la estadística

En los apartados anteriores hemos realizado una revisión de las investigaciones en Psicología y Educación sobre comprensión de la probabilidad condicional y razonamiento condicional, incluyendo el razonamiento sobre probabilidad conjunta, independencia y teorema de Bayes. Se han descrito diferentes errores y algunas de las razones para los mismos, así como algunas variables que facilitan la resolución de los problemas sobre estos conceptos.

Como indicamos en la introducción, la probabilidad condicional es un concepto básico en Estadística. Las distribuciones de los estadísticos en el muestreo, el nivel de significación y potencia en un contraste de hipótesis, las distribuciones marginales, las rectas de regresión, entre otros conceptos, se definen mediante una probabilidad condicional. Es, por tanto, necesario asegurarnos que el alumno adquiere un conocimiento y competencia básica en este tema, antes de avanzar en el estudio de la estadística, si no queremos que los errores y dificultades sobre la probabilidad condicional aumenten la dificultad de otros muchos temas e imposibiliten su correcta aplicación.

No obstante, la investigación revisada muestra que este no es un tema sencillo, que tiene una amplia variedad de matices y los alumnos lo asocian con la problemática de la causalidad y temporalidad, teniendo dificultad en la percepción de los experimentos compuestos en el caso de situaciones sincrónicas. Se confunde independencia y exclusión, se cambian los términos de la probabilidad condicional, se confunde ésta con la conjunta y se asigna a la probabilidad conjunta un valor mayor que a la probabilidad simple, violando las reglas lógicas del cálculo de probabilidades.

Los problemas que hemos mostrado como ejemplos a lo largo del trabajo pueden usarse para diagnosticar las dificultades de los alumnos, incluso antes de la enseñanza del tema, pues el alumno puede llegar a la clase con intuiciones incorrectas en el campo de la probabilidad. Las soluciones erróneas pueden discutirse colectivamente y la simulación de las experiencias descritas en los problemas, con ayuda de tablas de números aleatorios, calculadoras u ordenadores permitirá la superación gradual de estos sesgos. El uso de formato de frecuencias y de diversas representaciones, como árboles, o diagramas rectangulares puede también contribuir a la mejora del aprendizaje de estos conceptos.

Reconocimiento: Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC - FEDER).

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 151 – 169.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Universidad de Granada: Tesis doctoral

Díaz, C., y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Einhorn, H.J. y Hogart, R.M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*. 99, 3 –19.

Estrada, A. y Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables. An exploratory study with future teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CD ROM.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Fiedler, K. (1988). The dependence of the conjunction fallacy on subtle lingüistic factors. *Psychological Research*, 50, 123-129.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161). Chichester: Wiley.

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats (pp. 129-161). *Psychological Review*, 102, 684-704.

Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics* 8, 96-100.

Maury, S. (1985). Influence de la question dans una épreuve relative á la notion d'independance. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 283-301.

Maury, S. (1986). *Contribution à l'étude didacique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problémes*. Tesis doctoral. Universidad de Montpéllier II.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes*. 40, 255 – 269.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*. Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Capítulo 3
COMPETENCIAS DE FUTUROS PROFESORES EN LA COMPARACIÓN DE DATOS

Blanca Ruiz
ITESM, México
Pedro Arteaga y Carmen Batanero
Universidad de Granada, España

Resumen. En este trabajo analizamos los informes realizados por una muestra de 101 futuros profesores de Educación Primaria en un proyecto de análisis de datos. Estudiamos los gráficos producidos, estadísticos calculados y su interpretación en la obtención de conclusiones sobre el proyecto. Concluimos que el concepto de distribución no es comprendido en profundidad por una parte importante de los futuros profesores.

Palabras clave: comprensión de distribución estadística y comparación de datos, formación de profesores, uso de los gráficos estadísticos.

Abstract. In this paper we analyze the reports made by a sample of 101 future primary school teachers in a draft data analysis. We study the charts produced, calculated statistics and their interpretation in obtaining conclusions about the project. We conclude that the concept of distribution is not understood in depth by a significant portion of future teachers.

Keywords: understanding of statistical distribution and comparing data, teacher training, use of statistical graphs.

1. Introducción

La enseñanza de la estadística debe desarrollar la capacidad de leer, analizar, y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos (Shaughnessy, 2007), pero este es un objeto matemático complejo que involucra las ideas de dato, variable estadística, valor, frecuencias, promedio, dispersión y forma. Todos estos conceptos se incluyen en el nuevo Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria en España (MEC, 2006) donde la estadística se estudia desde el primer ciclo (niños de 6 y 7 años). Será importante, por tanto, asegurar la comprensión adecuada de la idea de distribución y conceptos relacionados por los profesores que tienen que enseñar este tema.

En este trabajo evaluamos la comprensión de un grupo de futuros profesores de Educación Primaria españoles sobre algunos objetos matemáticos básicos que subyacen en la idea de distribución, en particular sobre los gráficos estadísticos, medidas de posición central y dispersión. La evaluación se realiza a partir de sus producciones escritas en un proyecto abierto de análisis de datos en el que deben comparar pares de distribuciones. Se elige esta opción para la evaluación debido a que el trabajo con proyectos es recomendado en los Decretos curriculares españoles para trabajar en estadística con los alumnos de Educación Primaria.

2. Comprensión de la idea de distribución

Uno de los tipos de análisis estadísticos más frecuentes es la comparación de dos distribuciones (bien de la misma variable estadística en dos conjuntos de datos o de dos variables estadísticas en el mismo conjunto de datos). Por ello, algunos autores han tratado de ver cómo los estudiantes razonan al realizar esta tarea.

Un ejemplo lo tenemos en los resultados obtenidos por Konold, Pollatsek, Well y Gagnon (1997) al tratar de analizar las barreras críticas en el aprendizaje de la estadística. A pesar de que la comparación de distribuciones, formalmente, se lleva a cabo a partir de las medidas de posición central y dispersión de las variables, Konold y sus colaboradores sugieren que algunos estudiantes ni siquiera usan intuitivamente la media para comparar dos conjuntos de datos. En lugar de ello se centran en las frecuencias absolutas y no en las relativas, al comparar dos conjuntos de datos, incluso cuando las muestras eran de tamaño muy diferentes. Una explicación es que algunos estudiantes no ven el dato como un valor de una variable, sino que consideran sólo datos aislados. Como consecuencia no ven los resúmenes estadísticos (como media o rango) como propiedades de la distribución (Bakker y Gravemeijer, 2004).

Shaughnessy y Ciancetta (2002) estudian el razonamiento de los estudiantes al comparar distribuciones de datos. En algunos casos, sólo consideran las medidas de posición central, y son incapaces de pasar de ellas a la distribución. Al pedir a los estudiantes que escriban una distribución con un valor dado de la media o mediana, los estudiantes se limitan a repetir valores muy similares o equidistantes de la medida de posición central.

Otro requisito para comprender la distribución es la idea de variabilidad, que está siempre presente en los datos y tiene múltiples significados en estadística (Reading y Shaughnessy, 2004), entre otros los siguientes: variabilidad de resultados posibles en un experimento aleatorio; variabilidad en los datos recogidos; variabilidad en una variable aleatoria; variabilidad en las muestras o la distribución muestral. Es por ello importante que los estudiantes perciban la variabilidad y manejen modelos que permitan controlarla y predecirla.

Batanero, Estepa y Godino (1997) estudian la forma en que los estudiantes comparan dos distribuciones. Como estrategias correctas encuentran el comparar las medias o el reducir el conjunto de datos a una sola variable, restando los valores correspondientes, en el caso de muestras relacionadas y comparar luego la media con cero. También encuentran estrategias incorrectas como comparar valores aislados en las dos distribuciones.

En una serie de trabajos, Watson y colaboradores clasifican las estrategias de los estudiantes al comparar distribuciones (Watson y Moritz, 1999; Watson, 2001) de acuerdo al modelo jerárquico SOLO, definiendo niveles de comprensión. En el primer nivel de la jerarquía descrita por la autora, los estudiantes son capaces de comparar conjuntos de igual tamaño, mientras que en el segundo se comparan conjuntos de datos de diferente tamaño. Las estrategias de los estudiantes incluyen razonamiento proporcional y comparación de las gráficas y de las medidas de posición central de los dos grupos.

Shaughnessy (2007) indica que muchos de los errores descritos en las investigaciones sobre comprensión de gráficos enmascaran otros relacionados con la comprensión de la distribución. Estas investigaciones se han centrado preferentemente en dos puntos:

– Describir errores en la construcción de gráficos por parte de los estudiantes. Algunos de estos errores son: confusión de los ejes en el gráfico, representación incorrecta de los intervalos en un histograma de frecuencias, representar variables no relacionadas en una misma gráfica o usar un gráfico no adecuado para los datos representados.
– Definir niveles jerárquicos en la lectura e interpretación de gráficos. Por ejemplo Friel, Curcio y Bright (2001 diferencian entre "leer entre los datos" (lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo), "leer dentro de los datos" (interpretación e integración de los datos en el gráfico), "leer más allá de los datos" (predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico) y "leer detrás de los datos" (valorar críticamente el método de recogida de datos su validez y fiabilidad).

En lo que sigue tratamos de complementar las anteriores investigaciones centrándonos en futuros profesores, un colectivo cuya comprensión de la distribución no ha sido analizada en profundidad. Evaluamos esta comprensión a partir de un proyecto abierto, tarea que no ha sido usada en las investigaciones anteriores. Más en concreto, la comprensión de la distribución se evalúa a partir de los gráficos que elaboran sobre la misma, los estadísticos (medidas de posición central y dispersión) que calculan y la interpretación de estos elementos en relación a la pregunta planteada.

3. El estudio

La actividad de la cual se tomaron los datos era una de las prácticas de un curso de Didáctica de la Matemática para futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada y se dedicaron a ella dos sesiones de clase, de dos horas de duración cada una. En la primera sesión se propuso a los futuros profesores la realización de un proyecto en el que ellos mismos tomaron los datos necesarios.

El proyecto se llama "Comprueba tus intuiciones sobre el azar" y forma parte de una unidad didáctica diseñada para introducir los temas sobre "tratamiento de la información, azar y probabilidad" en la formación de maestros (Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008). Fines complementarios de la actividad fueron: a) mostrar la utilidad de la estadística para probar conjeturas; b) comprobar que las intuiciones sobre el azar a veces son engañosas. La secuencia de actividades es como sigue:

1. *Presentación del proyecto, instrucciones iniciales y discusión colectiva.* Se comenzó la sesión con una discusión sobre las intuiciones y se propuso a los futuros profesores llevar a cabo un experimento para decidir si la clase en conjunto tenía o no buenas intuiciones sobre el azar. El experimento consiste en inventar una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda equilibrada (sin lanzarla realmente) y comparar con 20 lanzamientos reales de la moneda.

2. *Experimentos individuales y recogida de datos.* Los futuros profesores realizaron individualmente el experimento inventando una secuencia de 20 lanzamientos (secuencia simulada) y anotaron los resultados en una hoja de registro, escribiendo C para cara y + para cruz. A continuación lanzaron realmente la moneda anotando los resultados en la segunda parte de la hoja (secuencia real).

3. Discusión y actividades de la clase. Finalizado el experimento, se comenzó la discusión sobre cómo comparar los resultados de la clase en las secuencias reales y simuladas. Entre otras variables, algunos estudiantes sugirieron comparar el número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en las dos secuencias.

4. Al acabar la clase el profesor proporcionó a los estudiantes una hoja de datos que contenía para cada alumno los valores de estas variables (101 estudiantes y 3 pares de variables; número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en las secuencias real y simulada). Pidió que analizasen los datos individualmente, y produjeran un informe escrito en que justificasen si la clase en su conjunto tenía o no buenas intuiciones sobre el azar, en base al análisis de los datos. Los estudiantes tuvieron libertad para elegir los gráficos o resúmenes estadísticos que considerasen convenientes o bien usar ordenadores.

A la semana siguiente se recogieron y analizaron las producciones de los estudiantes, centrándonos en los gráficos construidos, los resúmenes estadísticos calculados, la interpretación y conclusiones sobre la pregunta planteada.

4. Representación Gráfica de la Distribución

En primer lugar se analizaron los gráficos realizados por los estudiantes para representar la distribución de las diferentes variables estadísticas que intervienen en el proyecto.

Cuando los alumnos construyen un gráfico para todas o parte de las distribuciones contenidas en el fichero de datos, realizan una serie de acciones y emplean varios conceptos y propiedades que varían en los diferentes gráficos. En consecuencia, los gráficos producidos no son representaciones equivalentes de un concepto subyacente (la distribución de datos obtenida) sino configuraciones diferenciadas de objetos relacionados e interactuando con dicha distribución (Godino, Batanero y Font, 2007). En lo que sigue describimos los niveles de complejidad de los gráficos. De la muestra de los 101 estudiantes, 88 produjeron algún tipo de gráfico. Sólo tenemos en cuenta estos estudiantes en las tablas de frecuencia que se presentan en esta sección.

- *C1. Alumnos que producen una gráfica donde sólo representa los resultados de su experimento individual*. Algunos alumnos producen una gráfica para representar los datos obtenidos en su experimento particular, sin considerar los datos de sus compañeros, al no haber comprendido el sentido del experimento. Estos estudiantes tratan de resolver la pregunta para su caso particular (si él mismo tiene una buena intuición), no habiendo comprendido el propósito del proyecto o no siendo capaces de realizar un análisis global de los datos. Generalmente manifiestan una intuición errónea sobre la aleatoriedad, suponiendo que una buena intuición implicaría que su secuencia simulada fuese idéntica en alguna característica a su secuencia real. En general tratan de ver si sus resultados particulares en las dos secuencias han estado igualados. Aunque la impredecibilidad es una diferencia esencial entre experimentos aleatorios y deterministas, estos estudiantes tratan de predecir el resultado o al menos predecir una parte de los resultados de la secuencia aleatoria. Este fenómeno, denominado ilusión de control fue observado originalmente de Langer (1975) en diferentes tipos de juegos de azar, por ejemplo la lotería, donde observó en los sujetos una creencia ilusoria sobre su capacidad para influir en el resultado.
- *C2. Alumnos que representan los datos de toda la clase, sin llegar a la distribución de frecuencias*. Son los estudiantes que no llegan a agrupar los valores similares del número de caras, rachas o la longitud de la racha mayor obtenidos en las secuencias reales o simuladas del total de alumnos en la clase, para formar la distribución de frecuencias. En lugar de ello, representan el valor (o valores) obtenidos para cada alumno dentro del gráfico en el orden en que los datos fueron obtenidos, que es un orden arbitrario. Aunque emplean las variables estadísticas, estos estudiantes no calculan las frecuencias asociadas a cada valor. Por tanto no emplean la idea de distribución de frecuencias de la variable.
- *C3. Producen gráficos separados para las distribuciones de las distintas variables*. Son alumnos que forman tablas de frecuencias para las variables y a partir de ellas producen los distintos gráficos o representan directamente un gráfico de cada uno de los valores diferentes de la variable con sus frecuencias (para las 6 variables). En este nivel el alumno pasa del conjunto de datos a la variable estadística y su distribución de frecuencias. El usar para cada par de variables dos gráficos dificulta a veces la comparación, sobre todo en caso de no usar la misma escala de representación en los dos gráficos.
- *C4. Produce para cada par de variables un gráfico conjunto de las dos distribuciones*. El alumno ha llegado a formar las distribuciones de las variables y las distribuciones de cada par de variables (por ejemplo para el número de caras en las secuencias real y simulada) las representa conjuntamente en el mismo gráfico, lo cual facilitará la comparación de las distribuciones. Cada gráfico de este nivel tiene también mayor complejidad al representar conjuntamente las distribuciones de dos variables estadísticas.

En la Tabla 1 presentamos la distribución de alumnos en función del nivel de gráfico. Del total de 101 alumnos, 88 (87,1%) producen algún tipo de gráfico para analizar sus datos, incluso cuando las instrucciones de la tarea no los requerían. Este alto porcentaje indica la necesidad sentida de los estudiantes de producir un gráfico y llegar, mediante un proceso de transnumeración a un conocimiento no disponible en los datos brutos.

Tabla 1.- *Clasificación de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica y corrección de los gráficos*

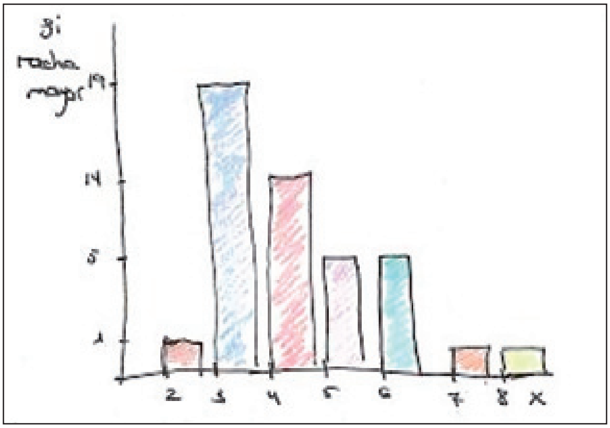
Nivel de complejidad	Frecuencia (%)
C1. Representa sólo sus datos	2
C2. Representa resultados individuales	15
C3. Gráficos separados para cada muestra	46
C4. Gráficos conjuntos	25
Total	88

La mayoría de los que elaboran gráficos (52,2%), los producen separados para cada variable (nivel 3), el 28,4% de los estudiantes trabajan al nivel 4 y producen un solo gráfico para cada par de variable de las 6 variables en estudio. Son pocos los estudiantes que analizan sólo sus propios datos (nivel 1) y sólo 17% estudian los valores obtenidos por cada estudiante caso a caso sin llegar a formar la distribución. En consecuencia, el concepto de distribución, al menos a nivel intuitivo, parece ser adquirido y utilizado por los estudiantes para resolver la tarea propuesta.

Errores en los gráficos

Los alumnos tienen dificultades en la construcción de los gráficos. En el ejemplo que reproducimos en la Figura 1, ejemplo perteneciente al nivel de complejidad C3, podemos observar, por un lado, que las barras del diagrama no están centradas en los valores del eje X (longitud de la racha mayor). Por otro lado, las escala del eje Y no es homogénea; finalmente faltan en el gráfico el título y no se indica la variable representada en el eje X.

Figura 1.- *Ejemplo de gráfico con errores en escalas*



Algunos estudiantes representan variables no relacionadas sobre una misma gráfica; lo que indica que no comprenden el propósito de una gráfica conjunta ni discriminan las situaciones en que dos variables estadísticas son o no comparables. Un ejemplo lo tenemos en la Figura 2 en que el estudiante representa conjuntamente el número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en tres polígonos de frecuencias representados sobre la misma gráfica. Por otro lado, los polígonos están incompletos al no unir los extremos con el eje de ordenadas. Unos pocos estudiantes intercambian los ejes en las gráficas, representando las frecuencias en el eje X y los valores de la variable en el eje Y, confundiendo la variable dependiente e independiente en la distribución de frecuencias de la variable estadística mostrando un error similar al descrito por Ruiz (2006) en un estudio sobre comprensión de la variable aleatoria.

En la tabla 2 presentamos a los estudiantes clasificados según el nivel más alto al que llegan al construir el gráfico y según la corrección de los gráficos presentados. Vemos que la cuarta parte de los que produce gráficos, hacen errores de importancia (gráficos incorrectos) como representar variables no comparables, representar los productos de valores por frecuencia, o intercambiar frecuencias y valores de las variables en los ejes.

Otra cuarta parte tiene errores de menor importancia (gráfico parcialmente correcto): errores en las escalas, etiquetas o ejes, no usan la misma escala en los dos gráficos o bien no usan el mismo gráfico en las dos muestras dificultándose la comparación, no centran el intervalo en los histogramas, no hay coincidencia de los valores representados con la escala utilizada o no incluyen etiquetas. Por ejemplo, en la figura 3 mostramos un gráfico conjunto de las distribuciones del número de caras en las secuencias real y simulada, que es casi correcto, pero usa diferente gráfico (histograma y polígono de frecuencia) para el número de caras en las dos secuencias. Por otro lado, el polígono de frecuencias está incompleto al no unir los extremos al eje de ordenadas, error señalado en la investigación de Espinel (2007) con futuros profesores. Consideramos estos gráficos parcialmente correctos.

Figura 2.- *Ejemplo de gráficos con variables no comparables*

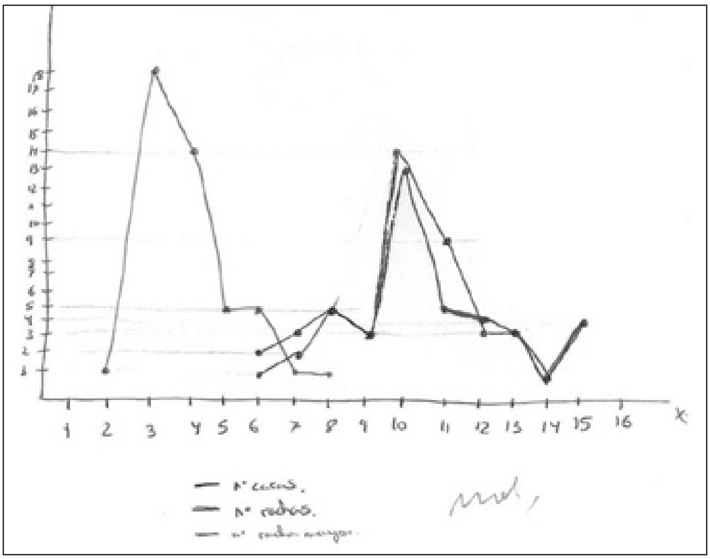


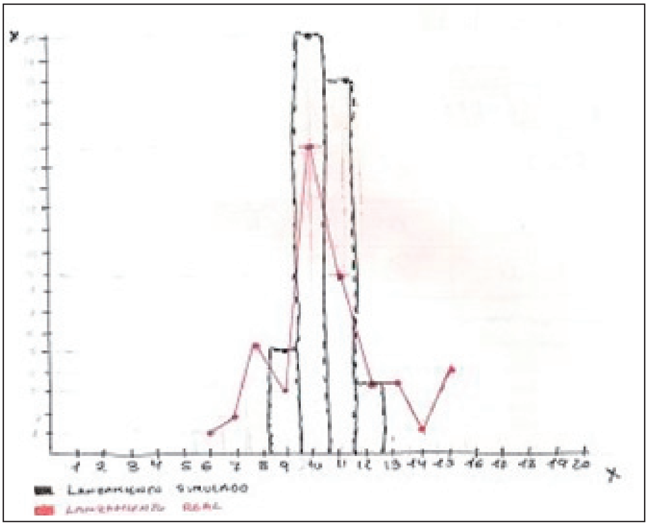
Tabla 2. Clasificación de estudiantes, según nivel de complejidad y corrección de los gráficos

Nivel de complejidad semiótica	Corrección del Gráfico			Total en el nivel
	Correcto	Parcialmente Correcto	Incorrecto	
C1. Representa sólo sus datos	1		1	2
C2. Representa resultados individuales	10	1	4	15
C3. Gráficos separados para cada muestra	15	17	14	46
C4. Gráficos conjuntos	14	6	5	25
Total	40	24	24	88

Interpretación de los gráficos

En la Tabla 3 clasificamos los estudiantes, según nivel del gráfico e interpretación que hacen del mismo, donde una cuarta parte se limita a producir el gráfico sin llegar a interpretarlo o bien da una interpretación errónea. Aunque leen elementos aislados del gráfico (dominan la extracción de datos), no llegan al nivel de extracción de tendencias o análisis de la estructura (Bertín, 1967) en su lectura de gráficos.

***Figura 3.** Gráfico parcialmente correcto*



Estos errores o falta de interpretación se producen, sobre todo, en los gráficos de nivel 3 y 4 pues la menor complejidad semiótica de los gráficos de nivel 1 y 2 hace que estos sean más sencillos de interpretar para los estudiantes.

Tabla 3. Clasificación de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica e interpretación de los gráficos

Categorías de gráfico construido	Interpretación del gráfico			Total en el nivel
	Correcto	Parcialmente Correcto	Incorrecto o no interpreta	
C1. Representa sólo sus datos	1	1		2
C2. Representa resultados individuales	4	10	1	15
C3. Gráficos separados para cada muestra	15	15	16	46
C4. Gráficos conjuntos	9	11	5	25
Total	29	37	22	88

En el siguiente ejemplo de interpretación incorrecta (en un grafico de nivel 3), el estudiante muestra un lenguaje poco preciso al hablar de "frecuencia absoluta que más se repite" para referirse a la máxima frecuencia absoluta. Vemos también que el estudiante está comparando tres variables al mismo tiempo, aunque había representado cada una de las variables por separado en un diagrama de barras. Es decir, aparece un conflicto en la idea de moda, pues ella está buscando la moda (valor de más frecuencia) en el conjunto de las tres variables y no en cada variable por separado:

> *En el caso de las gráficas he optado por realizar un diagrama de barras en el cual se puede observar que una secuencia simulada la frecuencia absoluta que más se repite se encuentra en la tabla de racha mayor, siendo el valor 3 y la frecuencia 26.* (Alumno SL)

En otros casos la interpretación errónea se debe a errores conceptuales, como en el siguiente caso donde aparece un error respecto a la dependencia funcional lineal:

> *Todos los gráficos presentan una dependencia funcional lineal de – a + o viceversa, según las circunstancias.* (Alumno PF)

Un 42% de los estudiantes hacen una interpretación parcialmente correcta de los gráficos, analizando tan sólo la tendencia sin tener en cuenta la variabilidad o bien al contrario, comparando sólo los rangos de variación, sin tener en cuenta las tendencias. La mayor proporción relativa de los que hacen esta interpretación parcial se encuentra entre los estudiantes que producen un gráfico de nivel 2 que, como hemos indicado, no llegan a trabajar con la distribución de la variable estadística.

En el siguiente ejemplo la interpretación es parcialmente correcta. La alumna había hecho un gráfico de nivel C2, representando los datos alumno a alumno sin formar la distribución. Como usa un gráfico de líneas, este permite ver la mayor variabilidad en una de las dos series, porque en este caso las oscilaciones del gráfico son más amplias. Lo consideramos parcialmente correcto porque no compara la posición central.

En cuanto al número de caras reales que ha obtenido el grupo es mucho más variable son más homogéneos que en la simulación. Para poder realizar esta afirmación hemos usado el rango. (Alumno JI)

El alumno AG por el contrario usa un vocabulario más impreciso; sin embargo se ven puntos de interpretación correcta del gráfico (en el diagrama de líneas al ascender la línea aumenta la frecuencia; detección de la moda).

El sistema de representación de datos utilizado es el diagrama de líneas ya que se pueden ver las diferencias entre la secuencia simulada y la real; si la línea asciende, la frecuencia aumenta. El punto más alto del diagrama corresponde al valor de la variable que tiene mayor frecuencia, como ocurre [pone un ejemplo]. (Alumno AG)

La mayor proporción absoluta de los que hacen esta interpretación parcial se encuentra entre los estudiantes que producen un gráfico de nivel C3 igualando en este nivel al número de interpretaciones correctas. Hay también una alta proporción de interpretaciones parcialmente correctas dentro de los que llegan a producir gráficos de nivel de complejidad C4; en algunos casos los gráficos son producidos con la ayuda de Excel, por lo que el alumno aunque llega al mayor nivel a la hora de representar los datos, no comprende bien el gráfico producido y no llega a interpretarlo en forma completa.

Una tercera parte de los estudiantes hace una interpretación completa del gráfico, detectando las tendencias y variabilidad de los datos, aumentando la proporción de los que lo hacen en los dos niveles superiores del gráfico construido:

Para comentar las diferencias el gráfico aporta más posibilidades, pues visualmente podemos percibir las diferencias. Las tablas necesitan de una interpretación de los datos. Centrándome en el gráfico observamos que los valores de la frecuencia simulada se concentran en torno a unos mismos intervalos 10 y 11, mientras que en la frecuencia real, los valores están más disgregados, aunque también vemos que se concentran en un núcleo 8-15, fluctuando al alza y a la baja. De esta forma en la frecuencia real comprobamos que 10 es la secuencia con mayor número de veces saliendo cara, tanto en la simulada (20) como en la real (14).... la horquilla de la secuencia real es mucho más amplia que la de la simulada. (Alumno FL)

Encontramos también interpretaciones correctas de los gráficos en estudiantes que sólo han trabajado a nivel 1 o 2. Por ejemplo, un alumno totaliza el número de caras y número de cruces en la muestra completa de alumnos y lo representa en un sector circular, realizando el siguiente comentario:

Si observamos en el sector circular, nos daremos cuenta que los alumnos han puesto al azar más caras que cruces y que en la secuencia real dan unos resultados casi iguales en el porcentaje de caras y cruces. (Alumno CG)

La interpretación de este gráfico por parte del alumno es correcta, pues en el gráfico de sectores construido hay mayor frecuencia de caras y los porcentajes están muy igualados al tratarse de una muestra bastante grande. Sin embargo, aunque la interpretación del gráfico en si es correcta, el alumno no ha entendido la finalidad del experimento, ni está considerando la variable aleatoria binomial "número de caras en 20 lanzamientos" o la correspondiente variable estadística. No diferencia los ensayos de cada estudiante y simplemente considera una única secuencia formada al yuxtaponer las secuencias individuales de todos los estudiantes de la clase.

Sin tener en cuenta el nivel C1, en el que sólo se encuentran dos alumnos, y uno de ellos interpretó bien su gráfico, con lo que el porcentaje de interpretaciones correctas fue del 50%, el nivel en el cual se dio mayor número de interpretaciones correctas fue el nivel C4. Una vez que un alumno es capaz de construir correctamente un gráfico de este nivel de complejidad, este tipo de gráficos facilita la comparación de tendencias y variabilidad en cada pareja de distribuciones. Dicho de otro modo, el mayor nivel alcanzado en la construcción de gráficos parece implicar mayor nivel en la lectura e interpretación de los mismos.

5. Momentos de la Distribución

Heitele (1975) señala tres conceptos fundamentales en relación a la variable aleatoria: su distribución, esperanza y variabilidad. Por tanto, estos tres componentes serán también fundamentales en la variable estadística, cuya generalización da lugar a la idea de variable aleatoria. Una vez analizados los gráficos producidos por los estudiantes, pasamos a analizar el uso que hacen de las medidas de posición central y dispersión.

Medidas de posición central

De un total de 101 estudiantes, 91 calculan algún promedio, lo que indica una primera aproximación a la idea de distribución en los estudiantes, pues pasan del dato aislado a un resumen estadístico del conjunto de datos. En la tabla 4 vemos que el estadístico calculado con preferencia es la media (90) o moda (80); la mediana es calculada por 72 estudiantes. En general el cálculo de los medidas de posición central es correcto, lo que indica un buen dominio de los algoritmos de cálculo, aunque aparecen algunos errores: no ordenar los datos en la mediana (17), falta de ponderación o error de cálculo en media (11) y no tener en cuenta el caso de bimodalidad para la moda (3). Estos errores coinciden con los ya señalados en estudiantes de secundaria en investigaciones previas como la de Cobo (2003).

Por otro lado, hemos encontrado algunas concepciones erróneas sobre las medidas de posición central, explicitadas en la solución del proyecto por los estudiantes. Por ejemplo, el siguiente estudiante, confunde la variable en observación (número de caras en las diferentes secuencias producidas por cada estudiante, en la que el máximo fue 12) con los sucesos del experimento (cara y cruz), al calcular la moda da la siguiente respuesta:

> *Moda = Son las caras porque su número máximo es 12, mientras que el número máximo de cruces es de 11.* (Alumno CE)

Tabla 4. Estadísticos calculados por los estudiantes (n=101)

	Correcto?	Incorrecto?	Total
Media	79	11	90
Mediana	55	17	72
Moda	77	3	80
Rango	54	6	60
Otra medida dispersión	41	—	41

En otros casos no se tiene en cuenta la frecuencia en el cálculo de la mediana, considerando tan sólo los diferentes valores obtenidos de la variable y tomando su punto medio, lo que sería equivalente a considerar como mediana el centro del rango, error encontrado en Mayén (2006) en su estudio sobre comprensión de los medidas de posición central:

La mediana: ordenar de mayor a menor 2-15. (Alumno CF)

Dispersión

El uso de medidas de dispersión es menor en los estudiantes, resultado que sugiere que no sienten la necesidad de estas medidas para comparar distribuciones. La mayoría de los que lo usan calculan el rango (60), 54 de ellos correctamente. Algunos estudiantes toman incorrectamente los mismos valores del máximo mínimo y rango en la secuencia real y simulada. Unos pocos calculan además la desviación típica (25), varianza (15) y coeficiente de variación (1). Es evidente que las medidas de dispersión son menos intuitivas para los futuros profesores, por el menor uso que se hace de las mismas, como también se confirma en la investigación de Borim y Coutinho (2008). Estas autoras indican que el significado de la varianza y la desviación típica es muy difícil de comprender por los estudiantes para profesor. En nuestra muestra fueron muy pocos los que usaron estas medidas y menos aún los que las interpretaron correctamente.

Tabla 5. Uso de los estadísticos en la comparación (n=101)

Tipo de comparación	Frecuencia
Comparan media	36
Comparan moda	18
Comparan mediana	12
Comparan dispersión	30
Comparan valores aislados	10
Comparan solo sus datos	11
Indican lo que esperan	12
No comparan	23

Por otro lado, se ha analizado el uso de los estadísticos por parte de los estudiantes, para comparar las distribuciones una vez los han calculado (Tabla 5), encontrado que, aunque se calculen, no siempre se emplean los estadísticos, limitándose en muchos casos a presentarlos sin ningún comentario respecto a su significado o las diferencias entre las dos secuencias.

Respecto a las medidas de posición central 36 comparan las medias (32 correctamente), 18 las modas (12 correctamente) y doce las medianas (dos incorrectamente). Algunos estudiantes presentan los estadísticos pero no comparan (23), indican lo que esperan sin comparar (12), siguiendo sus creencias previas, por ejemplo, el siguiente caso, en que el alumno, aunque calculó media, mediana y moda, no las usa en la comparación:

> *En un principio es factible que el nº de caras y de cruces a priori debería ser el mismo, pero debido a que esto es un proceso aleatorio, las secuencias de caras y cruces en realidad es imprevisible.* (Alumno ES)

Otros alumnos comparan sólo sus propios datos (11), al no haber comprendido el propósito de la práctica, tratando de evaluar únicamente sus propias intuiciones. Por ello se limitan a comparar el valor de las diferentes variables en las dos secuencias, sin hacer referencia a los estadísticos; generalmente manifiestan que una buena intuición supone poder acertar el experimento, es decir, tienen una cierta ilusión de control:

> *Secuencia simulada: Longitud de la racha más larga=5, número de rachas: 0; número de caras=10. Secuencia real: Longitud de la racha más larga=3; número de rachas: 15; número de caras 11; he acertado 13 veces*. (Alumno EL)

Diez alumnos comparan valores aislados de la variable o porcentajes de valores aislados (10 estudiantes); cuatro de ellos comparan únicamente los máximos y mínimos en cada distribución. Esta estrategia de comparación de valores aislados al estudiar la diferencia de dos distribuciones ya apareció en la investigación de Estepa y Batanero (1995), quienes la explican por la existencia de una concepción local de la asociación estadística, consistente en juzgar la asociación entre dos variables considerando tan sólo una parte de los datos y no el conjunto completo.

> *El máximo que he encontrado en las dos secuencias es 15 en el número total de caras, 16 el número más alto en rachas y 8 el máximo en la racha real.* (Alumno CG)

Sólo 30 utilizan las medidas de dispersión (27 de ellos el rango y seis la desviación típica o la varianza). Un ejemplo se reproduce a continuación, en que el alumno es capaz de apreciar la diferencia de dispersión en el número de caras y su semejanza en el número de rachas:

> *En primer lugar compararé los datos del número de caras en ambas secuencias, donde destacaré las diferencias que se aprecian principalmente entre el rango, la varianza y, consecuentemente la desviación típica, de hasta seis veces más de dife-*

rencia la secuencia simulada con respecto a la real" (quiere decir lo contrario, pues la dispersión es mayor en la secuencia real). En segundo lugar destacaré los datos del número de rachas de las secuencias simuladas y la secuencia real. He de decir que son sorprendentes las similitudes del rango e incluso la varianza y la desviación típica que tan sólo llegan a diferenciarse en décimas. (Alumno LC)

En el caso siguiente se confunde frecuencia y valor de la variable, error encontrado por Cobo (2003) en el cálculo de la media. Como vemos en el ejemplo, el alumno se refiere a la frecuencia, pues al ser sólo 20 los lanzamientos, la longitud de la racha no puede ser igual a 25.

En la secuencia simulada la racha mayor y en la que más ha coincidido la clase es 25. (Alumno TF)

6. Conclusiones sobre el Problema Planteado

Para resolver el problema planteado en el proyecto, además de trabajar con las distribuciones, los estudiantes han de interpretar los resultados del trabajo matemático realizado con ellas en el contexto del problema (traducir estos resultados a lo que indican respecto de las intuiciones de los estudiantes). Es precisamente este último paso (puesta en relación del resultado con la pregunta planteada) el que ha causado más dificultad, por la falta de familiaridad de los futuros profesores con proyectos estadísticos y actividades de modelización.

En la Tabla 6 presentamos las conclusiones obtenidas en relación con las intuiciones de la clase respecto a los fenómenos aleatorios en relación al número de caras en los 20 lanzamientos. Observamos que la obtención de la conclusión es la tarea más difícil para todos los estudiantes, siendo sólo una tercera parte los que obtienen una conclusión, al menos parcial.

Tabla 6. *Clasificación de estudiantes, según conclusión obtenida sobre el número de caras*

Conclusión	Frecuencia
Correcta	4
Parcialmente correcta	24
Incorrecta o no concluye	73

Solo cuatro estudiantes completan las conclusiones de que por un lado, el grupo tiene buena intuición respecto al promedio de número de caras y por otro las intuiciones sobre la variabilidad de los fenómenos aleatorios es pobre en los estudiantes. A continuación reproducimos la respuesta de uno de los estudiantes que obtiene una conclusión completa.

En cuanto al número de caras las intuiciones del aula fueron aproximadas a la realidad, pero no del todo, ya que la desviación típica nos indica que los datos se distancian". Anteriormente la alumna dice: "La media entre la simulada y la real se asemeja,.... la mediana y la moda dan los mismos datos. (Alumna CG)

Veinticuatro estudiantes llegan a una conclusión parcial, debido bien a que sólo comparan las medidas de posición central sin tener en cuenta la dispersión, o al contrario.

La intuición de mis compañeros observando la tabla del nº de caras es buena, ya que los valores más repetidos en la secuencia simulada coinciden con los valores de la secuencia real: 10 y 11 son las más repetidas. La media de las dos secuencias es 10, por lo tanto creo que la intuición es buena. (Alumno TG)

Hemos considerado conclusión parcial cuando aparece imprecisión de lenguaje, como en el siguiente ejemplo, donde el alumno visualiza tanto la diferencia de dispersión como los valores centrales similares, pero no llega a concluir claramente sobre la intuición de los estudiantes.

Respecto a las gráficas construidas sobre el número de caras he de comentar que se parece observar algunos cambios en la secuencia simulada donde encontramos cuatro posibilidades y en la real hay diez posibilidades. Con esto podríamos decir que los alumnos no han sido intuitivos, pero no creo que esto sea así, ya que si nos detenemos atentamente en las gráficas podemos ver que los valores de 9, 10, 11 y 12 en ambas han sido dados por un mayor número de alumnos que en los demás casos. (Alumno HC)

El siguiente alumno reconoce la diferencia de dispersión en las distribuciones, pero interpreta el problema como de búsqueda de diferencia de intuiciones entre los estudiantes. Es decir, concluye que las intuiciones son similares en distintos estudiantes, pero no llega a relacionar estas intuiciones con las características del fenómeno aleatorio. Tampoco hace observaciones sobre las medidas de posición central.

Realmente las intuiciones de los alumnos han sido más o menos muy parecidas. No hay muchas irregularidades. Pero cuando las comparamos con sus secuencias reales, se puede ver a simple vista en el gráfico que existen grandes irregularidades. En la secuencia real el número máximo de caras es 16 y el mínimo 7, sin embargo en la simulada el máximo es 13 y el mínimo 8; su recorrido es más pequeño que el real. (Alumno MM)

El resto no llega a una conclusión o bien hace una conclusión incorrecta. Los estudiantes no siempre conectan los resultados del trabajo matemático con la situación problemática, es decir, no ven las implicaciones de lo obtenido en el análisis estadístico sobre las intuiciones de los estudiantes.

Comparando los datos me he dado cuenta que son muchos los resultados entre los compañeros los que coinciden, pero aún así, sigo pensando que es mera casualidad, porque en la simulada hemos puesto lo que hemos querido. (Alumno EL)

Otros estudiantes, aún cuando conectan el trabajo con el modelo matemático (distribución) con el problema real, fallan en la obtención de conclusiones debido a que no han comprendido la pregunta planteada y suponen que una buena intuición ha de corresponder a obtener los mismos resultados en las secuencias real y aleatoria. En la siguiente respuesta, el estudiante muestra una concepción correcta del azar (no se puede prever) y otra incorrecta al tratar de evaluar el número de coincidencias o la diferencia de valores obtenidos en cada estudiante en los experimentos, en lugar de comparar directamente las distribuciones de las variables. Es decir, este estudiante compara caso a caso no utilizando la distribución al hacer la comparación.

Partiendo del estudio de los gráficos, se podría decir que en valores absolutos, la previsión del grupo no ha sido demasiado desafortunada. Un juego de azar es imposible de prever con total exactitud, pero las aproximaciones sumadas a los aciertos son mayores a las previsiones muy alejadas del resultado real. (Alumno LG)

Falta en otros la capacidad de análisis para detectar las diferencias, lo que les lleva a concluir que los resultados en las dos secuencias son similares; en el siguiente ejemplo, además de darse este caso, no se llega a relacionar el resultado con la intuición de los estudiantes.

Como conclusión, podemos ver que los resultados son prácticamente los mismos tanto en la real como en la simulada, de lo que podemos deducir que lo real y lo simulado es muy parecido ya que lo que te inventes puede ser prácticamente igual a lo real. (Alumno AC)

7. Conclusiones

Al comparar las distribuciones la mayoría de los estudiantes elabora un gráfico y un porcentaje importante de estudiantes de la muestra ha calculado algún estadístico, principalmente estadísticos de posición central (media, mediana y moda) y en menor medida de dispersión.

En los gráficos construidos, la mayoría llega a formar la distribución, auque aproximadamente la mitad de los gráficos tienen algún error. Respecto a la interpretación de gráficos, nuestros resultados indican que es una habilidad altamente compleja, y confirma las dificultades descritas por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) en futuros profesores, a pesar de que han de transmitir el lenguaje gráfico a sus alumnos y utilizarlo como herramienta en su vida profesional. También amplía el trabajo de las autoras proporcionando datos sobre la capacidad de construcción de gráficos de los futuros profesores en una tarea abierta y mostrando que la mayoría de los participantes no consigue elaborar un gráfico de complejidad suficiente para permitir resolver el problema.

El cálculo de estadísticos es en general correcto, con pocas excepciones, aunque también aparecen algunos de los errores descritos en la investigación de Cobo (2003) y Mayén (2006), pero con mucha menor frecuencia que en aquellos estudios. Aunque el cálculo de las medidas de posición central fue sencillo, la mayoría de los estudiantes se limita a calcularlos, pero no los interpreta ni los usa para la comparación, aunque en caso de compararlos, la comparación es correcta. Menos aún usan la idea de dispersión, aunque el cálculo del rango lo hacen correctamente, pareciendo que aunque se comprende el procedimiento de cálculo, los alumnos no llegan a captar el significado de la dispersión ni su utilidad en la comparación de dos distribuciones.

En resumen, el concepto de distribución, esencia del razonamiento estadístico según Wild y Pfannkuch (1999) no llega a ser utilizado por una parte de los futuros profesores y el razonamiento sobre la variabilidad, que es otro de los componentes esenciales del razonamiento estadístico, es difícil para la mayoría. En consecuencia, sería necesario atender a estos problemas en la formación de los profesores de Educación Primaria, pues una mejora de la educación de los niños pasa por la formación del profesor.

Reconocimiento: Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC - FEDER) y beca FPU AP2007-03222.

Referencias bibliográficas

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield y D. Ben Zvi (Eds.), The *Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp 147-168). Dordrecht: Kluwer.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of Students' Understanding of Statistical Association in a Computer-Based Teaching Environment. En J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. 1996 IASE Round Table Conference* (pp. 183-198). University of Minnesota: IASE.

Bertin (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

Borim, C. y Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. CD-ROM.

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas, VII*, 57-85.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática*, 11, 99-119.

Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(2), 155-170.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education 32(2),* 124-158.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (2008). *Proceedings of the Joint ICMI / IASE StudyTeaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey,* México: ICMI e IASE. CD ROM.

Heitele, D. (1975). Un enfoque epistemológico sobre las ideas estocásticas fundamentales. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 187-205.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A. y Gagnon, A. (1997). Students analyzing data: Research of critical barriers. In J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Langer, E.J. (1975). The illusion of control. *Journal of Personality and Social Psychology, 32*, 311-328.

Mayen, S. (2006). *Comprensión de medidas de posición central en estudiantes mexicanos de Bachillerato*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria*.

Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Maestria. CICATA. México.

Shaughnessy, J. M. (2007). *Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., and NCTM.

Shaughnessy, J. M., y Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. In B. Phillips (Ed.), *CD of the Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics: Developing a statistically literate society, Cape Town, South Africa.* Voorburg, The Netherlands: International Statistics Institute.

Watson, J. M. (2001). Longitudinal development of inferential reasoning by school students. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 337-372.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics*, 37,145-168.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Capítulo 4

CONFLICTOS SEMIÓTICOS DE ESTUDIANTES MEXICANOS EN EL USO DE LA MEDIANA

Silvia Mayén

Instituto Politécnico Nacional, México

Juan Jesús Ortiz

Universidad de Granada, España

Carmen Díaz

Universidad de Huelva, España

Resumen. En este trabajo analizamos las respuestas de 643 estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato a un problema de comparación de datos ordinales. Utilizando ideas del Enfoque Onto-Semiótico propuesto por Godino y sus colaboradores, realizamos un análisis de las respuestas abiertas, clasificándolas según la medida de tendencia central empleada y los conflictos semióticos detectados. Mediante el test Chi-cuadrado estudiamos la dependencia entre respuesta y grupo de estudiante. Observamos mejores resultados en los alumnos de Secundaria, quienes utilizan más la mediana y la moda, aunque también dejan con mayor frecuencia la respuesta en blanco.

Palabras clave**: Comprensión, conflictos semióticos, comparación de distribuciones, datos ordinales, media, mediana.**

Abstract. In this paper we analyse the responses given by 643 Mexican students from Secondary Education and High School to a problem involving the comparison of ordinal data. Using some ideas from the Onto semiotic approach proposed by Godino and colleagues, we carry out an analysis of the open responses, taking into account the central tendency measure used in the comparison and the students' conflicts. We use the Chi-square test to study possible dependence between responses and students' group. We observe better results in secondary school students who use median and mode more frequently, although they also tend to omit the response more frequently.

Keywords**: Understanding, semiotic conflicts, comparing distributions, ordinal data, mean, median.**

1. Introducción

Las medidas de posición central (media, mediana y moda) han suscitado gran interés en investigadores como Pollatsek, Lima y Well (1981), Barr (1989), Cai (1995), Gattuso y Mary (1996), Watson y Moritz (1999, 2000) o Cobo (2003), quienes describen errores y dificultades en su aprendizaje, en estudiantes de diversas edades. Estas investigaciones se han centrado preferentemente en la media aritmética y las tareas propuestas se refieren a datos numéricos medidos en escala de intervalo. Es decir, datos donde diferencias numéricas iguales corresponden a las mismas diferencias de cantidad en la magnitud subyacente.

Sin embargo, en el análisis exploratorio de datos, enfoque recomendado actualmente en el currículo de matemáticas para la educación Secundaria, se da un gran peso a los estadísticos de orden, que consideran la posición relativa de los valores de la variable dentro del conjunto de datos. Uno de estos estadísticos es la mediana, que Nortes (1993, pg. 69) define en la siguiente manera: *Si suponemos ordenados de menor a mayor todos los valores de una variable estadística, se llama mediana al valor de la variable tal que existen tantos datos con valores de la variable superiores o iguales como inferiores o iguales a él.*

También se introducen algunas representaciones gráficas basadas en los estadísticos de orden, como el gráfico de la caja. Aunque estos estadísticos son también apropiados para datos medidos en escala de intervalo, toman su sentido especialmente con los datos ordinales. Estos datos se pueden clasificar y ordenar, pero no se pueden realizar con ellos operaciones aritméticas.

Los datos ordinales aparecen en muchas situaciones cotidianas, tales como el lugar alcanzado en una competición, nivel de estudios de una persona, grado de acuerdo en un cuestionario de opinión, etc. Sería entonces importante que la enseñanza de la estadística en la Secundaria tuviese en cuenta este tipo de datos, si queremos formar ciudadanos competentes en la interpretación de la información estadística que se encuentra en la vida profesional y cotidiana. Ello requeriría tener un conocimiento de las posibles dificultades que presentan los estudiantes en el conocimiento y uso de datos ordinales.

El propósito de este trabajo es analizar dichas dificultades, cuando se pide a los estudiantes comparar dos conjuntos de datos ordinales en una situación que ellos pueden comprender. También tratamos de averiguar si los estudiantes perciben que la mediana es la medida de posición central que se debe calcular en un conjunto de datos ordinales, cuando esté definida (pues la media no lo está) y proporciona más información que la moda cuando sea posible calcularla. Así mismo, deseamos evaluar si los estudiantes calculan correctamente las medidas de posición central en este tipo de datos. Con todo ello, continuamos las investigaciones previas, proporcionamos información sobre la comprensión de los estudiantes mexicanos acerca de estos conceptos y comparamos estos resultados con los que obtuvo Cobo (2003) en su trabajo con estudiantes españoles.

En lo que sigue describimos brevemente el marco teórico e investigaciones previas, y presentamos los resultados del estudio.

2. Marco Teórico y Antecedentes

En este trabajo utilizamos el Enfoque Ontosemiótico propuesto por Godino (2002), quien considera el significado de los objetos matemáticos como altamente complejo. Delimita diversos elementos de significado (campos de problemas, definiciones, proposiciones, lenguaje, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas matemáticas ligadas con dichos objetos. Para el caso de la mediana, estos elementos son analizados con detalle por Cobo y Batanero (2000), quienes muestran su complejidad, incluso cuando su estudio se aborde únicamente desde el punto de vista de la estadística descriptiva.

Godino señala que en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas), que son representados en forma textual, oral, gráfica o simbólica. En el trabajo matemático los símbolos (significantes) remiten a entidades conceptuales (significados). Un punto crucial de la enseñanza es lograr que los alumnos dominen la semántica de estos símbolos (además de su sintaxis). La investigación en didáctica de las matemáticas ha mostrado la importancia que tienen las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje, pero una cuestión todavía no suficientemente analizada es la variedad de objetos que desempeñan el papel de representación y de los objetos representados (Godino, Batanero y Font, 2007).

Precisamente el interés de los autores es analizar esta cuestión, tomando de Eco[17] la noción de función semiótica como una “correspondencia entre conjuntos”, que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- Un criterio o regla de correspondencia, esto es un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido.

El Enfoque Onto- semiótico destaca la diversidad de objetos puestos en juego en la actividad matemática, ya que cualquier tipo de elementos de significado, entre los que hemos descrito puede aparecer como parte de la función semiótica tanto en el plano de la expresión como en el del contenido. Godino, Batanero y Font (2007) llaman conflicto semiótico a las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes que no concuerdan con las pretendidas por el profesor o investigador. Estos errores de interpretación (conflictos semióticos), consecuentemente producen equivocaciones en los estudiantes, que no son debidos a falta de conocimientos, sino a no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica. Así, este trabajo se orienta a la determinación de conflictos semióticos de estudiantes de Secundaria y Bachillerato en relación con la mediana, en una situación de comparación de datos ordinales.

2.1. Investigaciones sobre comprensión de la mediana

Las investigaciones previas indican que la definición de mediana no es clara para los estudiantes. Barr (1980) realizó un estudio con alumnos de entre 17 y 21 años, concluyendo que estos estudiantes interpretan la mediana como el centro de “algo”, pero no comprenden a qué se refiere este “algo”. Algunos estudiantes que son capaces de calcular la mediana, cuando los datos se dan en forma de lista, tienen dificultad en calcularla a partir de una tabla de frecuencias.

---

17. “Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un plano de la expresión colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un plano del contenido (…) una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (…)” (Eco, 1995, 83-84).

Incluso los alumnos universitarios, encuentran difícil aceptar que se puedan emplear dos algoritmos diferentes de cálculo para la mediana, dependiendo del tipo de datos (agrupados, no agrupados) o que puedan obtenerse valores distintos en el cálculo con datos agrupados al variar la amplitud de los intervalos de clase. Tampoco comprenden cómo se pasa de la definición de la mediana hasta su cálculo (Schuyten, 1991).

Por su parte, Estepa (2004), sugiere que los alumnos se encuentran con obstáculos para calcular la mediana si parten de las representaciones gráficas de las frecuencias acumuladas, ya que no están acostumbrados a las funciones discontinuas a saltos. En caso de interpolar para hallar el valor de la mediana, producen errores por fallo de razonamiento proporcional. Los alumnos no tienen tampoco suficiente dominio del manejo de las desigualdades que aparecen asociadas a la definición de mediana y a su cálculo.

Otros errores encontrados por Carvalho (1998, 2001) al analizar el cálculo de la mediana en alumnos de 13-14 años son: a) no ordenar los datos para calcular la mediana, por entender que la mediana es el centro de la lista de datos "no ordenada"; b) calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente, es decir, confundir la frecuencia con el valor de la variable; o c) calcular la moda en vez de la mediana.

2.2. Comparación de distribuciones de datos

Una característica esencial del análisis estadístico es que trata de describir propiedades de los conjuntos de datos (y no de cada dato aislado). Konold, Pollatsek, Well y Gagnon (1997), han observado cómo los estudiantes razonan al comparar dos distribuciones de datos e indican que el uso de las medidas de tendencia central como representante para compararlos no es intuitivo. Los estudiantes se centran en las frecuencias absolutas y no en las relativas, incluso cuando las muestras sean de tamaño muy diferente. Estudian las diferencias de distribuciones comparando las frecuencias de los valores de la variable que coinciden en ambos grupos. Los autores sugieren que el problema surge cuando los estudiantes no han dado el paso de pensar en los valores de la variable como propiedad de los individuos aislados a comparar propiedades de conjuntos de datos.

También Batanero, Estepa y Godino (1997), describen las siguientes estrategias incorrectas en estudiantes de licenciaturas en educación al comparar dos distribuciones: a) usar sólo valores aislados en las dos distribuciones para comparar; b) esperar un aumento/disminución similar en todos los casos para muestras relacionadas. Watson y Moritz (1999, 2000) clasifican estas estrategias de acuerdo a un modelo jerárquico, indicando que en un primer nivel los estudiantes son capaces de comparar conjuntos de igual tamaño, calculando el total o usando comparaciones visuales de las distribuciones a partir de una gráfica. En el segundo nivel, se comparan conjuntos de datos de diferente tamaño usando un razonamiento proporcional. Las estrategias de los estudiantes incluyen calcular la suma de valores de la variable en cada grupo y compararlas; comparaciones visuales, y comparar las medidas de tendencia central de los dos grupos.

Mientras que las investigaciones anteriores se han centrado en datos medidos en escala de intervalo, Cobo (2003) utiliza un ítem que contiene datos ordinales como parte de su cuestionario sobre comprensión de las medidas de tendencia central. Su interés no se centra específicamente en la mediana, ni en los conflictos semióticos relacionados con la misma, sino en la descripción del significado personal de los estudiantes sobre las medidas de posición central. En nuestro trabajo nos centraremos únicamente en este ítem, profundizando el análisis semiótico de las respuestas de los estudiantes. Analizamos también las diferencias entre tres grupos de estudiantes, incluyendo estudiantes de Bachillerato, nivel escolar que no fue considerado en el trabajo de Cobo (2003).

3. Método

3.1. Muestra

La muestra estuvo compuesta por 643 estudiantes mexicanos de dos niveles educativos de entre 14 y 19 años de edad: 481 de Bachillerato, de diferentes Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional (En total seis centros) y 162 estudiantes de Secundaria (dos centros).

Los estudiantes de Secundaria (pertenecientes al Nivel Básico en México), de entre 14 y 15 años de edad, cursaban tercer año. Habían estudiado por primera vez las medidas de posición central como parte de los temas de estadística, en el mismo curso en el que aplicamos el cuestionario. Se dedicó aproximadamente un mes de estudio al tema y alrededor de dos meses antes de resolverlo.

La otra parte de la muestra está compuesta por estudiantes de sexto semestre de Bachillerato (tercer año), y sus edades oscilan entre 16 y 19 años, aunque la mayoría son de 17 y 18. En ese mismo curso en que se les aplicó el cuestionario habían estudiado estadística, incluyendo el tema de medidas de tendencia central (media, mediana, moda). Dentro de este nivel escolar hemos tomado dos diferentes grupos de estudiantes: Un primer grupo de 356 alumnos contestaron el cuestionario aproximadamente un mes después de estudiar el tema y el segundo grupo, de 125 estudiantes, lo hicieron al finalizar el curso, unos seis meses después de estudiarlo. En general y en cada nivel escolar citado, los alumnos son de clase social media y llevan a cabo el mismo programa de estudios.

3.2. Problema propuesto y método

El problema que se analiza está tomado originalmente de Godino (1999), y posteriormente fue utilizado por Cobo (2003). Puesto que los datos corresponden a una variable ordinal que no admite el cálculo de la media, la tendencia central de los datos sólo puede resumirse mediante la mediana y la moda. También requiere conocimiento sobre la media (como el hecho de que ésta no es una medida adecuada para datos ordinales). Este ítem fue el que registró mayor número de respuestas incorrectas en un estudio comparativo previo (Mayén, Cobo, Batanero y Balderas, 2007), tanto en alumnos mexicanos como españoles, lo que sugiere que su dificultad no es específica de un solo contexto educativo. En la Figura 1 se reproduce el problema propuesto, que se analiza a continuación.

Figura 1. Problema propuesto

Problema. Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I: Insuficiente, A: Aprobado, N: Notable, S: Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1: I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S

Grupo 2: S S I I A N A N I I S N A S I N N

A. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
B. ¿Cuál sería la medida de tendencia central más apropiada para representar estos datos?

Para resolver este problema, donde los datos son ordinales, y tenemos un número impar de datos, la solución óptima consiste en compara las medianas de los dos grupos. La comparación de las medianas sería más adecuada que la de las modas en este problema, pues la mediana tiene en cuenta el orden de los datos y no sólo su frecuencia. Para calcularla en cada grupo, el alumno tendría que ordenar previamente los valores y buscar el valor de la variable correspondiente al dato que ocupa la posición central en cada uno de los grupos, como se muestra a continuación:

Grupo 1: I I I I I A A A A A A A N N N S S S S S S S S
Grupo 2: I I I I I A A A N N N N N S S S S

El primer grupo tiene 23 elementos, luego que el dato que ocupa la posición central es el que se sitúa en el lugar número 12, y por lo tanto, el valor de la mediana corresponde al aprobado (A). En el segundo grupo el valor de la mediana es notable (N), puesto que el elemento central es el que ocupa el lugar 9 al haber 17 elementos. Por tanto, el segundo grupo es superior al primero. Esta solución aparentemente sencilla tiene una gran complejidad semiótica, como se observa en el análisis de la solución (Tabla 1), que hemos dividido en unidades de análisis para facilitar la lectura. En la columna izquierda representamos los pasos en la solución y en la derecha las funciones semióticas que establece el alumno.

Como se observa en el análisis, la actividad pedida requiere la comprensión de muchos conceptos y propiedades previos. Además, se requiere la aplicación y comprensión de procedimientos y representaciones, todo ello unido por una argumentación de tipo análisis-síntesis. Respecto a los procesos matemáticos definidos en Godino (2002), aparecen en diversos momentos: a) procesos de particularización (por ejemplo al concretar la idea general de mediana a la mediana particular del conjunto de datos); b) representación y significación (al representar los datos o interpretar el problema) y c) materialización-abstracción (al pasar de un objeto matemático a una situación real donde se aplica, por ejemplo, al visualizar el peso de un niño concreto).

Si el conjunto de datos del problema presentado tuviese un número par de valores, habría dos que ocuparían el lugar central. En este caso, y si los dos valores centrales son diferentes, habría una indeterminación, pues los dos valores centrales cumplirían la definición de mediana. Cuando los datos están medidos en escala de razón, el convenio para calcular la mediana en caso de indeterminación es tomar el valor medio de los dos centrales.

Es razonable que, debido a esta complejidad, algunos estudiantes encuentren conflictos en los diferentes pasos del proceso y no lleguen a la solución esperada. Por este motivo, se han considerado también correctas las respuestas en que el alumno resuelve el problema comparando adecuadamente las modas, que están definidas en un conjunto de datos ordinales. En el caso en que el estudiante transforme los datos a numéricos, calcule y compare acertadamente las medias hemos considerado la respuesta parcialmente correcta.

Tabla 1. *Análisis de la solución correcta al problema*

Unidad	Contenido	Funciones semióticas
U1	Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:	• El alumno ha de relacionar el enunciado (elemento lingüístico) con una situación real (fenomenología); • Se debe asociar el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad); • Se establece un código que se usará en el futuro, A es igual que Aprobado, etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno).
U2	Grupo 1: I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S Grupo 2: S S I I A N A N I I S N A S I N N	• Se establece una relación entre cada símbolo (lenguaje) y el valor correspondiente de una variable ordinal (concepto). Además este valor sería el correspondiente a un alumno imaginario en el problema (unidad estadística o elemento del estudio). • También se ha de poner en correspondencia el conjunto de datos dados en cada grupo con un nuevo objeto compuesto por todos ellos (distribución de datos en el grupo)
U3	a) ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?	• Hay que interpretar un convenio implícito sobre el sentido de “mejores”, puesto que ninguno de los dos grupos tiene todas sus notas mejores que el otro. La pregunta establece una correspondencia implícita con un campo de problemas “comparar dos grupos”, y su solución que viene dada por la comparación de las medianas.
U4	b) ¿Cuál sería la medida de tendencia central más apropiada para representar esos datos? Para resolver el problema, y puesto que los datos son ordinales, lo más adecuado sería la mediana.	• Se supone un conocimiento implícito en el alumno sobre el tipo de variable en los datos; • Se requiere que el alumno reconozca que en este conjunto de datos (variable ordinal, distribuciones no simétricas), la mediana es la medida de tendencia central más adecuada.
U5	Para calcularla en cada grupo, el alumno tendría que ordenar previamente los valores, como se muestra a continuación: Grupo 1: I I I I I A A A A A A <u>A</u> N N N S S S S S S S S Grupo 2: I I I I I A A A <u>N</u> N N N N S S S S	• El alumno ha de establecer la relación entre el concepto mediana y su definición (centro de un conjunto ordenado); • La ordenación de los símbolos remite a una ordenación de los valores de la variable.

U6	El primer grupo tiene 23 elementos, luego el alumno central, que ocupa la posición 12 tiene un aprobado. En el segundo grupo el valor de la mediana es notable, puesto que el elemento central es el 9, al haber 17 elementos.	• El alumno ha de hallar el centro en cada grupo, puesto que el número de elementos es diferente y no ocupan el mismo lugar. Se ha de poner en correspondencia el concepto "centro" con un procedimiento "hallar el centro"; • La mediana es el valor de la variable del elemento que ocupa el lugar central. Se relaciona el concepto de mediana, con el procedimiento de cálculo; • El alumno también tiene que llevar a cabo el procedimiento operando con los símbolos previamente ordenados y encontrar el que ocupa lugar central; ha de relacionar el signo correspondiente del elemento que ocupa este lugar central con su significado (aprobado, etc.); • Finalmente se comparan las dos medianas (valores), hallando la mayor de ellas. El grupo correspondiente tiene "mejores" notas. Se establece una relación entre "tener mayor mediana" y ser el mejor grupo.

El análisis que describimos a continuación se centra en los razonamientos de los estudiantes al resolver el problema, identificando los objetos estadísticos que usan correcta e incorrectamente. Nuestra finalidad es comprobar si las dificultades encontradas en investigaciones previas se presentan en los alumnos mexicanos, con qué frecuencia y si varían según el nivel escolar y momento en que se aplicó el cuestionario. Queremos también explicar estas dificultades en términos de conflictos semióticos.

4. Resultados

Recogidas las respuestas de los estudiantes, se inició un proceso cíclico de categorización comparando las respuestas similares. Se realizó un análisis semiótico de las respuestas típicas en cada categoría para inferir los objetos y procesos matemáticos que el estudiante usa en su resolución y mediante un proceso inductivo de revisión y comparación se clasificaron las respuestas, considerando en primer lugar, la medida de tendencia central (media, mediana, moda o ninguno) que se usa, y en segundo lugar, las respuestas que corresponden a una misma de éstas, teniendo en cuenta la existencia de conflictos semióticos semejantes. De este modo, se llegó a la lista de las categorías de respuestas que se describe a continuación, mostrando y analizando un ejemplo de cada una. También se presenta la tabla de análisis semiótico del primer ejemplo (categoría C1) para mostrar el método seguido en dicho análisis.

4.1. C1.Respuestas basadas en la media aritmética

En estas respuestas el estudiante identifica correctamente que se trata de un problema resoluble por medio de una medida de tendencia central. También realiza algún tipo de transformación en el conjunto de datos para convertirlos en cuantitativos. La respuesta hubiera sido correcta si el estudiante, una vez transformados los datos a numéricos, hubiera hallado su mediana. Pero consideramos parcialmente correcto el caso de que se calcule la media y la comparación sea adecuada, pues el estudiante no discrimina bien los diferentes tipos de variable estadística y no es consciente de que la media no tiene sentido en los datos ordinales (el carácter ordinal viene dado por el tipo de dato y no por el código usado para representarlo).

Hemos diferenciado en este grupo las siguientes respuestas:

C1.1. <u>Transforma los datos ordinales y calcula correctamente la media</u>. Como vemos en el análisis de la respuesta (que se transcribe a continuación y se describe con detalle en la Tabla 2), el alumno asigna valores numéricos a las categorías. Posteriormente calcula correctamente el valor de la media aritmética en cada grupo y luego sustituye los datos de cada grupo por su media para efectuar las comparaciones de éstos. Es decir, lleva a cabo correctamente la identificación de los datos, considerando la distribución como un todo, pero toma la media y no la mediana para resolver el problema. Por ello, la solución no coincide con la esperada.

Figura 2. *Ejemplo de respuesta C1.1*

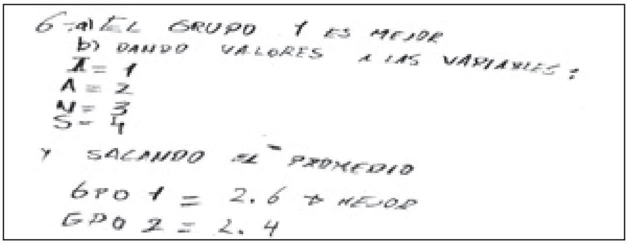
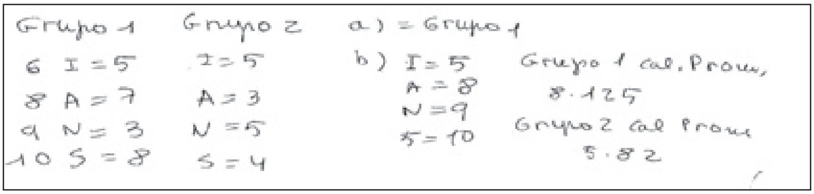


Tabla 2. *Análisis de un ejemplo en la categoría C1.1*

Unidad	Contenido	Funciones semióticas
U1	Dando valores a las variables: I=1, A=2, N=3, S=4	• El alumno utiliza la idea de variable y la relaciona con el contexto del problema; por tanto; ha completado correctamente los pasos 1) y 2) de la Tabla 1; • Establece correspondencias entre cada símbolo I, A, N, S y un valor numérico entero consecutivo; • La correspondencia establecida conserva el orden de los respectivos conjuntos; • Aparece un conflicto semiótico porque la correspondencia no conserva la escala de medida. Mientras en el conjunto de partida los datos están medidos en escala ordinal, en el de imagen están medidos en escala de razón; • Aparece un conflicto semiótico al confundir el tipo de variable (propiedad).
U2	Y sacando el promedio: Gpo 1=2.6, Gpo 2=2.4	• Identifica correctamente el problema como un problema que se resuelve mediante la comparación de medidas de tendencia central; • Utiliza una medida de tendencia central como representante de un conjunto de datos; • Calcula correctamente las medias de ambos grupos; • Conflicto semiótico, pues la media no es adecuada a los datos originales.
U3	El grupo 1 es mejor	• Obtiene una conclusión correcta para la transformación y la medida de tendencia central empleada.

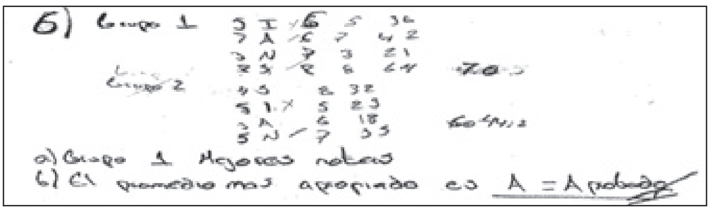
C1.2. Conflicto en el algoritmo de la media (divide por un número incorrecto). Al igual que en el caso anterior, el alumno asigna valores a las categorías, y resuelve el problema comparando las medias, y tomando como mejor el grupo con mayor media, pero se añade al conflicto descrito en la categoría C1.1 otro conflicto en el algoritmo, pues confunde el divisor por el cual hay que dividir. En el ejemplo que reproducimos a continuación, el alumno asigna los valores 6, 8, 9 y 10 al insuficiente, aprobado, notable y sobresaliente respectivamente, es decir, realiza una correspondencia numérica, que no conserva la escala de medida. Calcula la frecuencia de casos para cada categoría en cada grupo, utilizando las ideas de variable y frecuencia, que relaciona con el contexto del problema. Luego halla la media aritmética en cada grupo. El alumno tiene errores de cálculo y en el segundo grupo divide por el número de elementos de la muestra del primer grupo.

Figura 3. *Ejemplo de respuesta C1.2*



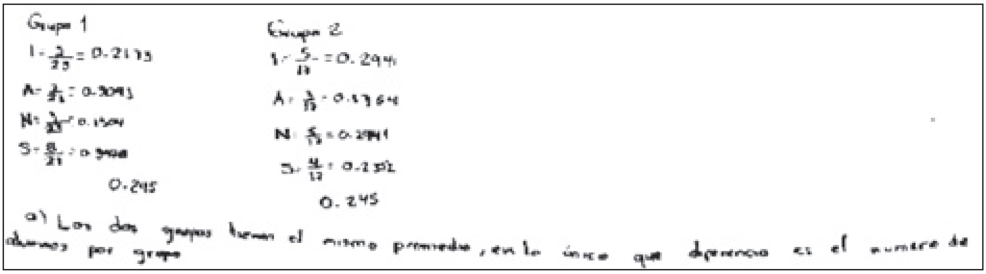
C1.3. Confunde los conceptos"medida de posición centra" y "valor de la variable". Como en los casos anteriores, el alumno identifica el campo de problemas y también la medida de posición central como representante de un conjunto de datos. Asigna un valor numérico a los códigos, mostrando un conflicto sobre el tipo de variable. En el ejemplo mostrado en la Figura 4, el alumno da como medida de posición central más adecuada el "Aprobado", que en realidad es un valor de la variable. Por tanto, hay un conflicto semiótico consistente en confundir valor de la variable y medida de posición central.

Figura 4. *Ejemplo de respuesta C1.3*



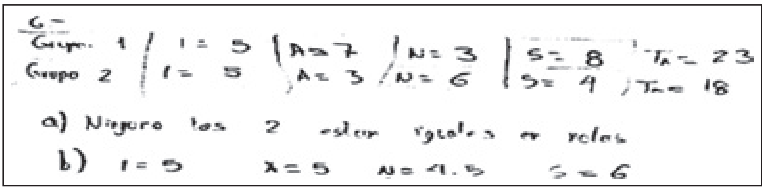
C1.4. Calcula media de frecuencias relativas. A los conflictos anteriores se añade otro consistente en usar el valor de la frecuencia relativa y no el de la variable en el cálculo de la media, confundiendo, por tanto, estos dos conceptos. En el ejemplo mostrado en la Figura 5, el estudiante obtiene la media de las frecuencias relativas y no la media de la variable. Los valores obtenidos en los dos grupos son prácticamente iguales, puesto que la suma de las frecuencias relativas ha de ser igual a la unidad. Por ello lo que obtiene es un valor aproximado de 1/4 al dividir por el número de categorías. Esta estrategia equivalente a asignar un valor idéntico (1) a todas las categorías, por lo que se llega a una solución incorrecta. Este conflicto no fue identificado por Cobo (2003) ni lo hemos encontrado en las investigaciones previas.

__Figura 5.__ Ejemplo de respuesta C1.4



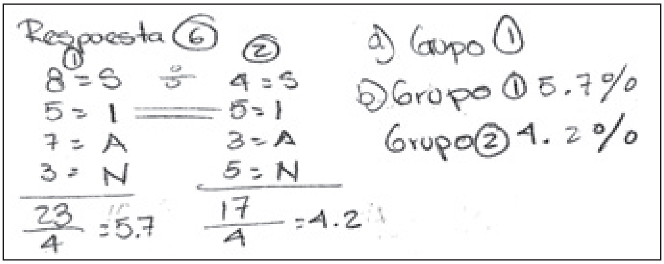
C1.5. <u>Halla el número esperado de alumnos por categoría si no hubiese diferencias en los grupos</u>. En el ejemplo de la Figura 6, a diferencia de los casos anteriores, el alumno no asigna códigos numéricos a los valores de la variable. Para resolver el problema, primero compara para cada valor de la variable las frecuencias en los dos grupos, para ver si uno de los grupos supera claramente al otro, pero no observa una ventaja clara de ninguno de ellos. Luego halla para cada categoría de la variable una frecuencia media, dividiendo el número total de alumnos por categoría en ambos grupos entre dos. Es decir, define un "grupo medio", que sería el número esperado de alumnos por categoría si se dividen el número de insuficientes, aprobados, etc. en dos partes iguales. Hay un conflicto respecto a la definición de media que es interpretado como una "distribución media". No hemos encontrado este tipo de respuesta en las investigaciones previas.

__Figura 6.__ Ejemplo de respuesta C1.5



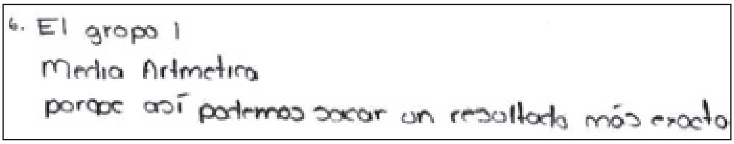
C1.6. <u>Una estrategia parecida a la anterior, es hallar la media del número de alumnos por categoría dentro de cada grupo</u>, dividiendo el total de alumnos en el grupo por el número de categorías. Es decir, el estudiante halla el número esperado de alumnos por categoría en una distribución uniforme dentro de cada uno de los grupos. La conclusión obtenida es incorrecta, pues la frecuencia esperada es siempre mayor en el primer grupo al ser mayor el tamaño de la muestra, independientemente de los valores de la variable. Hay también un conflicto semiótico al confundir los conceptos de valor de la variable y frecuencia. Se observa también que el alumno confunde los conceptos de frecuencia absoluta y porcentaje. Este conflicto tampoco ha sido descrito en otras investigaciones.

***Figura 7.** Ejemplo de respuesta C1.6*



C1.7. <u>Indica que habría que calcular la media en cada grupo pero no lo realiza</u>. Notamos que en el ejemplo que reproducimos en la Figura 8 el alumno ha identificado que se trata de un problema relacionado con las medidas de posición central. En este caso, considera la media como la más adecuada. No explica cómo llegó a la conclusión de que el grupo 1 es mejor, pero es razonable si se calcula la media.

***Figura 8.** Ejemplo de respuesta C1.7*



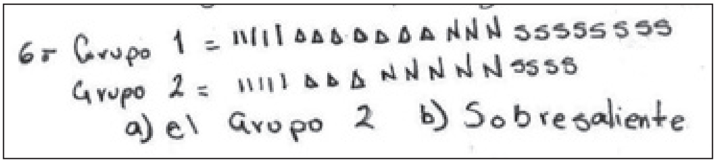
4.2. C2. Respuestas basadas en la mediana

Son todas aquellas respuestas en las que el estudiante identifica correctamente que se trata de un problema resoluble por medio de la mediana. Sin hacer transformaciones de los datos, la calcula o trata de calcularla directamente usando los datos ordinales. Además de haber identificado la comparación de datos ordinales como un problema resoluble mediante la mediana, el estudiante discrimina los datos ordinales de los datos medidos en escala de razón. Dentro de esta categoría hemos diferenciado las siguientes respuestas:

C2.1. <u>Cálculo correcto de las medianas</u>. Se trataría de la solución correcta al ítem reproducida en la Tabla 1 y analizada anteriormente, donde el estudiante muestra también un buen conocimiento procedimental del cálculo de mediana y su correcta aplicación a los datos ordinales.

C2.2. Comienza el cálculo de las medianas en los grupos pero no finaliza el problema. Un estudiante inicia bien la primera parte del problema ordenando los conjuntos de datos. Sin embargo en la segunda parte da como mejor medida de posición central un valor de la variable.

__Figura 9.__ Ejemplo de respuesta C2.2



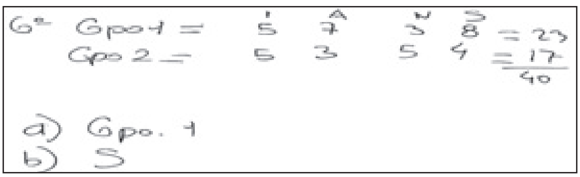
C2.3. Proporciona una respuesta correcta sin mostrar los cálculos. El alumno muestra conocimientos de la definición de la mediana y su propiedad, de ser un estadístico que tiene en cuenta el orden de los datos. Sin embargo, no podemos obtener información sobre su capacidad de cálculo. En algunos casos, como el de la Figura 10, la justificación es confusa al considerar "mejor" al grupo 1, por lo que deducimos que el cálculo de la mediana ha sido incorrecto.

__Figura 10.__ Ejemplo de respuesta C2.3

4.3. C3. Respuestas basadas en la moda.

El alumno utiliza las modas para hacer la comparación, calculándola correctamente. Con este procedimiento no se llega a la solución óptima. No obstante, es una estrategia correcta, puesto que la moda está definida para variables ordinales y así mismo, considera todos los datos en la comparación. Este tipo de respuesta también se encuentra en los trabajos de Carvalho (1998, 2001) y Cobo (2003). En el ejemplo que presentamos en la Figura 11, el estudiante considera mejor el primer conjunto pues tiene hay más valores de sobresalientes (moda del conjunto). Por lo tanto, usa correctamente la definición y algoritmo de la moda. Hay un conflicto en la segunda parte del problema al confundir valor de la variable (S) con moda.

__Figura 11.__ Ejemplo de respuesta C3

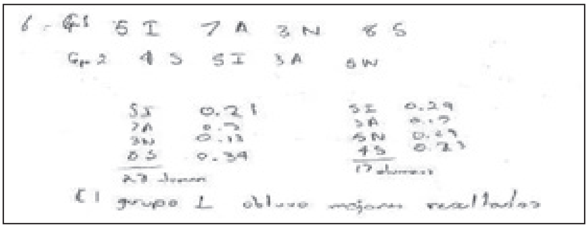


4.4. C4. No reconoce la comparación de dos conjuntos de datos como campo de problemas relacionado con las medidas de posición central.

El estudiante no usa las medidas de posición central para resolver el problema, mostrando una deficiente adquisición de la idea de distribución. Este mismo comportamiento lo encuentran Batanero, Estepa y Godino (1997) en su trabajo sobre la asociación estadística y Cobo (2003). En opinión de Konold, Pollatsek, Well y Gagnon (1997), estos estudiantes no habrían dado el paso de pensar en los valores de la variable como propiedad de los individuos aislados a comparar propiedades de conjuntos de datos (medidas de posición central). Hemos encontrado las siguientes variantes dentro de este grupo:

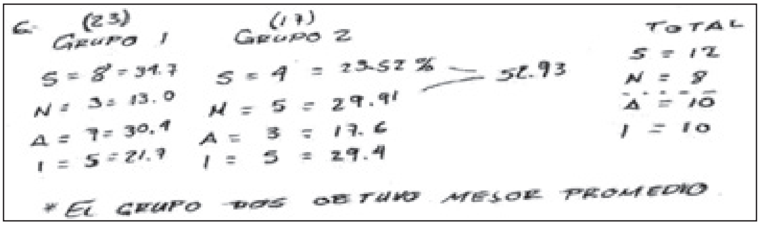
C4.1. Calcula porcentajes o frecuencias relativas de cada categoría. En la Figura 12, el estudiante realiza un recuento de frecuencias absolutas de los diferentes valores de la variable (halla las distribuciones de frecuencias) en cada categoría y cada grupo. A continuación calcula la distribución de frecuencias relativas de la variable en cada uno de los grupos pero tiene un conflicto, ya que no relaciona el problema con las medidas de posición central. En lugar de ello compara algún valor aislado y aparentemente toma como mejor el grupo 1 porque tiene mayor frecuencia relativa en la categoría de Sobresaliente. Estepa (2004) denomina concepción local de la asociación, el caso de estudio de asociación entre variables a la conducta consistente en comparar solo valores aislados en dos muestras. Los estudiantes que siguen esta estrategia pueden llegar a la respuesta correcta, dependiendo de qué valor comparen.

Figura 12. *Ejemplo de respuesta C4.1*



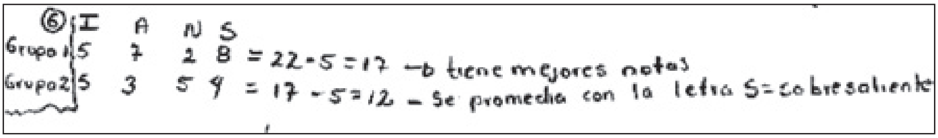
C4.2. Una variante del anterior es calcular porcentajes en cada categoría, agrupando algunas de éstas. En el ejemplo que mostramos en la Figura 13, el alumno realiza un recuento de frecuencias absolutas de los diferentes valores de la variable y calcula la distribución de porcentajes de la variable en cada uno de los grupos; utiliza la idea y cálculo de porcentaje. Para obtener la conclusión (correcta), compara el total de Notables y Sobresalientes, es decir, usa solo una parte de los datos para hacer la comparación, manifestando la concepción local de la asociación.

Figura 13. Ejemplo de respuesta C4.2



C4.3. Algunos estudiantes <u>comparan sólo frecuencias absolutas</u> para resolver el problema, generalmente sólo en parte de los datos. Además de la concepción local de la asociación (Estepa, 2004), estos estudiantes estarían en el primer nivel de comprensión del concepto de distribución según Watson y Moritz (1999, 2000). No utilizan las frecuencias relativas para comparar los datos, por lo que su estrategia sería válida sólo para conjuntos de datos de igual número de elementos. En el ejemplo de la Figura 14, se observa que después de establecer una correspondencia entre símbolos y valores de la variable y hallar la frecuencia absoluta en cada categoría, el estudiante compara los totales, eliminando primero los insuficientes en cada grupo. Hay un conflicto al usar sólo una parte de los datos (sólo los Aprobados). Otro conflicto es comparar las frecuencias absolutas, puesto que la comparación no tiene en cuenta el tamaño de la muestra.

Figura 14. Ejemplo de respuesta C4.3



C4.4. <u>Dar como respuesta un valor de la variable</u> (por ejemplo "notable") sin hacer referencia a medidas de posición central ni calcularlas. Estos estudiantes muestran el mismo conflicto que el caso C1.3 (confundir una medida de posición central con el valor de la variable). Pero a diferencia de aquél, no intentan calcular la media, mediana o moda, por lo cual no parecen reconocer la solución del problema ni muestran conocimientos de los algoritmos de cálculo.

4.5. C5. Consiste en dar una respuesta en la que sólo se indica por ejemplo, que el primer grupo es mejor, pero no justifica con cálculos o razonamientos.

En la Tabla 3, mostramos la distribución de frecuencias de las categorías descritas. Hay una gran variedad de respuestas y la mayoría relacionadas con la media. Vemos que el uso de la mediana en datos ordinales no es intuitivo para los estudiantes, lo que coincide con los resultados del trabajo de Cobo (2003). De nuestros estudiantes, lo más frecuente (17%) es dar un valor cualquiera de la variable sin utilizar medidas de posición central, mostrando un conflicto en la comprensión de estos conceptos. Aunque Cobo (2003) encuentra que un 15% de sus estudiantes no usa las medidas de posición central para resolver este problema, no informa en concreto de la confusión entre medida de posición central y valor de la variable. La segunda respuesta más frecuente es utilizar la media correctamente (15.1%); Cobo (2003) no informa sobre el número de estudiantes que usa la media en este ítem.

Otro grupo de estudiantes supone que hay que usar la media, y bien la calculan con algunos conflictos o no saben calcularla. Sumados todos estos casos representan un 18%, lo que de indica que tampoco es sencillo obtener la media en datos ordinales, pues parte de los alumnos no llegan a establecer una correspondencia numérica adecuada que permita el cálculo.

Un 12% usa la moda, y la calcula correctamente, lo cual, aunque no es la mejor solución no la podemos considerar incorrecta por tratarse de datos ordinales. En la investigación de Cobo (2003), el 7,6% de los estudiantes de 4º de ESO resuelve este problema calculando correctamente la moda.

El resto de los alumnos no relaciona el problema con las medidas de posición central, utiliza solo una parte de datos o comete otros errores. Sólo un 5,3% de los alumnos resuelve el problema con el cálculo correcto de la mediana, mientras que en Cobo (2003), 4,2% de los alumnos de 4º de ESO (15-16 años) usan la mediana correctamente. Hacemos notar también el alto porcentaje de respuestas en blanco.

En la Tabla 4 se resumen los datos sumando las respuestas que hacen referencia a una medida de posición central específica. Los resultados nos indican que a pesar de tratarse de variables ordinales, la tercera parte de estudiantes 33,7% trata de utilizar la media para dar una respuesta, y en porcentajes menores los alumnos utilizan mediana (12%) y moda (12%). Por otra parte, un 27,1% de los estudiantes dan una respuesta que no se relaciona con las medidas de posición central, problema que se presentó también en la investigación de Estepa (2004), y respecto al cual Konold, Pollatsek, Well y Gagnon (1997) sugieren que indica que los estudiantes no han llegado a comprender la idea de distribución como propiedad de un conjunto de datos.

En la Tabla 5 comparamos el uso de medidas de posición central en este problema en los tres grupos de estudiantes. Observamos mejores resultados en los alumnos de Secundaria, a pesar de ser menores en edad. Son estos alumnos los que más usan la mediana y la moda, aunque también son los que dan más respuestas en blanco. El primer grupo de alumnos de Bachillerato es el que más usa la media y el segundo grupo la moda o da respuestas sin relación con las medidas de posición central. La impresión es que el énfasis sobre la media en la enseñanza en Bachillerato podría dificultar el trabajo con datos ordinales. Se obtuvo un valor Chi cuadrado = 76,144 con 8 grados de libertad y una significación menor que 0,001, cumpliéndose las condiciones de aplicación, por lo que podemos considerar las diferencias como estadísticamente significativas.

Tabla 3. Frecuencias y porcentajes de respuestas

Categorías de argumentos empleados	Frecuencia	%
C1.1.Transforma los datos ordinales y calcula correctamente la media	97	15,1
C1.2 Conflicto en el algoritmo de la media (divide por un número incorrecto)	1	,2
C1.3. Confunde medida de posición central con valor de la variable	5	,8
C1.4. Calcula la media de frecuencias relativas	16	2,5
C1.5. Hallan la frecuencia esperada por categoría si no hubiese diferencias	12	1,9
C1.6. Halla el número esperado de alumnos por categoría en una distribución uniforme	21	3,3
C1.7. Indican que hay calcular la media en cada grupo, pero no la calcula	65	10,1
C2.1. Cálculo correcto de la mediana	34	5,3
C2.2. Calcula las medianas en los grupos pero no finaliza el problema	1	,2
C2.3. Respuesta correcta sin justificarla mediante algoritmos	45	7,0
C3.1.Usa correctamente las modas para hacer la comparación	78	12,1
C4.1 Calcula porcentajes o frecuencias relativas en cada categoría	22	3,4
C4.2. Calcula porcentajes en cada categoría, agrupando categorías	17	2,6
C4.3. Usa solo parte de los datos, comparando frecuencias absolutas	14	2,2
C4.4. Da como medida de posición central el valor de alguna variable	111	17,3
C5. No justifica la respuesta	10	1,6
C6. No contesta	94	14,6
Total	643	100,0

Tabla 4. Frecuencia y porcentajes de respuestas por medida de posición central

	Frecuencia	Porcentaje
Usa la idea de media	217	33,7
Usa la idea de mediana	80	12,4
Usa la idea de moda	78	12,1
Respuesta no relacionada con las medidas de posición central	174	27,1
No responde	94	14,6
Total	643	100,0

Tabla 5. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem clasificadas por grupo

		Nivel			Total
Respuesta		Secundaria N=162	Bachillerato 1 N=356	Bachillerato 2 N=125	
Media		43	139	35	217
	% de nivel	26,5%	39,0%	28,0%	33,7%
Mediana		30	44	6	80
	% de nivel	18,5%	12,4%	4,8%	12,4%
Moda		32	14	32	78
		19,8%	3,9%	25,6%	12,1%
Otro		27	107	40	174
	% de nivel	16,7%	30,1%	32,0%	27,1%
No responde		30	52	12	94
	% de nivel	18,5%	14,6%	9,6%	14,6%
Total		162	356	125	643

5. Conclusiones

El estudio indica que la comparación de datos ordinales, incluso en un contexto familiar para el estudiante, como es el de calificaciones, no es intuitiva. Incluso es menos intuitivo para los estudiantes de Bachillerato que para los de Secundaria, de modo que la enseñanza no parece ayudar a desarrollar esta intuición en nuestros estudiantes. Dado el interés señalado de los datos ordinales en la vida diaria y el análisis exploratorio de datos, sería necesario utilizar problemas similares al que presentamos en este trabajo en la enseñanza Secundaria y el Bachillerato, si queremos prepararlos para interpretar críticamente información estadística mostrada con datos ordinales en diferentes contextos.

Por otro lado, nuestro análisis confirma la existencia de los siguientes conflictos semióticos descritos por Cobo (2003) en relación a la comparación de datos ordinales y la comprensión de las medidas de posición central: a) no reconocer la comparación de dos conjuntos de datos como campo de problemas que se resuelve mediante las medidas de posición central; b) suponer definida la media en un conjunto de datos ordinales; y c) no discriminar datos ordinales y numéricos. Hemos encontrado además, nuevos conflictos que podemos clasificar en relación a los tipos de objetos matemáticos considerados en el enfoque onto-semiótico en la forma siguiente:

- *Conflictos relacionados con los campos de problemas:* No usar las medidas de posición central en la comparación de dos conjuntos de datos. En su lugar, algunos alumnos resuelven el problema comparando datos aislados, manifestando la concepción local de la asociación descrita por Estepa (2004).
- *Conflictos relacionados con definiciones de distintos objetos matemáticos:* Confundir las medidas de posición central con valor de la variable; la media con frecuencias absolutas; frecuencias absolutas con porcentajes; y valor de la variable con frecuencia. Estos conflictos son especialmente preocupantes en los estudiantes de Bachillerato, puesto que dificultarán su comprensión de muchos otros conceptos estadísticos que deberán estudiar en la universidad y están basados en las ideas de variable, valor, frecuencia absoluta y relativa y medida de posición central.
- *Conflictos relacionados con las propiedades de las medidas de posición central o con conceptos relacionados con ellas:* Suponer definida la media en un conjunto de datos ordinales; cconfundir variable ordinal con variable medida en escala de razón o intervalo, o lo que es igual, no diferenciar datos ordinales y numéricos.
- *Conflictos al aplicar un procedimiento:* Calcular la media de las frecuencias; establecer una correspondencia que no conserva la escala de medida; establecer correspondencias diferentes en grupos que se quiere comparar; usar una correspondencia que transforma un conjunto variable en otro constante.

Esta larga lista indica puntos a mejorar en la enseñanza que abarcan no sólo la necesidad de trabajar con los estudiantes con datos ordinales, sino aspectos conceptuales y procedimentales relacionados con la media y mediana y con las ideas aún más elementales de variable estadística y distribución. La semejanza de algunos resultados con los obtenidos por Cobo (2003) con alumnos españoles de menor edad sugiere que los conflictos descritos no son específicos de ninguno de los dos sistemas educativos, sino son compartidos por estudiantes mexicanos y españoles y se mantienen con la edad.

El diseño de la enseñanza en ambos países debe tenerlos en cuenta, ya que la comprensión de los diversos elementos del significado es independiente y su significado debe construirse progresivamente. No podemos esperar que, enseñando, por ejemplo, a los alumnos a calcular la media, mediana y moda en variables medidas en escala de razón puedan deducir y comprender por sí mismos sus diversas propiedades o adquieran la competencia suficiente para usar correctamente la medida de tendencia central más adecuada en datos ordinales. Esperamos que el análisis mostrado en este trabajo sea útil a los profesores e incida en la mejora de la enseñanza del tema.

Referencias bibliográficas

Barr, G. V. (1980). Some student's ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics*, (2), 38-41.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J.D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer-based teaching environment. En J.B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. 1996 IASE Round Table Conference* (pp. 183-198). University of Minnesota: IASE.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' unsderstanding of the arithmetic average concept. En L. Meira (Ed.). *Proceedings of the 19th PME Conference* (v.3, pp. 144-151). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brazil.

Carvalho, C. (1998). Tarefas estadísticas e estratégias de resposta. Comunicación presentada en el *VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación.* Castelo de Vide, Portugal.

Carvalho, C. (2001). *Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade.* Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa.

Cobo, B. y Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo? *UNO* 23, 85-96.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Eco, U. (1995). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen, 1976.

Estepa, A. (2004). Investigación en educación estadística. La asociación estadística. En R. Luengo (Ed.). *Líneas de investigación en Educación Matemática,* (pp. 227-255). Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Universidad de Extremadura.

Gattuso, L. y Mary, C. (1996). Development of concepts of the arithmetic average from high school to University. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. I, pp. 401-408). Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (1999) Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática. Trabajo presentado en el Grupo de Trabajo "La Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica". *III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, 1999.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, Vol. 22, nº 2/3: 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A. y Gagnon, A. (1997). Students analyzing data: Research of critical barriers. IE J. B. Garfield & G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C. y Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *UNION, 9,* 187-201

Nortes, A. (1977). *Estadística teórica y aplicada.* Burgos: H.S.R.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 191-204.

Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in Psychology and Education. En Vere-Jones (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The developments of concepts of average*. Focus on Learning Problems in Mathematics.* 21(4), 15-39.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning.* 2(1 y 2), 11-50.

Capítulo 5

COMPETENCIAS DE LOS FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA SOBRE LA PROBABILIDAD

Juan Jesús Ortiz, Luis Serrano y Nordin Mohamed
Universidad de Granada

Resumen. En este trabajo presentamos una investigación sobre la competencia de comparación de probabilidades y estrategias empleadas por futuros profesores de Educación Primaria. Contemplamos los distintos niveles de dificultad de comparación de fracciones identificados por Noelting, aunque en algunos problemas se incorporan elementos de tipo subjetivo. Los resultados son algo mejores que los de las investigaciones realizadas con alumnos de 10 a 14 años, aunque no en todos los problemas y muestran una gran dificultad de los participantes al resolver estas tareas. Finalizamos con algunas implicaciones para la formación de profesores en el campo de la probabilidad.

Palabras clave: Educación Estadística; formación de profesores.

Abstract. In this paper we present a research on future primary school teachers' competency and strategies in comparing probabilities. We take into account the different levels of difficulty in comparing fractions identified by Noelting as well as subjective elements that are included in some items. Results were better than those in research carried out with 10-14 year-olds children, but not in all the items and suggest great difficulty of participants in solving these tasks. We conclude with some implications for training teachers in probability.

Key words: Statistics Education; teacher's training.

1. Introducción

En los últimos años se ha producido una reforma de la enseñanza obligatoria, que concede un mayor peso al estudio de la Probabilidad. Los currículos de la Ley Orgánica de Educación (Ley Orgánica de Educación, 2006) así como el Real Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la Educación primaria (Ministerio de Educación y Ciencia; 2006), donde se incluye un bloque de contenidos sobre Tratamiento de la información, azar y probabilidad desde el primer ciclo, enfatizan la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos probabilísticos y de hacer más activa y exploratoria la metodología de enseñanza, incidiendo en la comprensión de las informaciones presentes en los medios de comunicación, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos probabilísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en otros currículos, como por ejemplo en los estándares del National

Council of Teachers of Matematics (2000) o en los programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública de México (SEP, 2006). Pero un cambio efectivo de la enseñanza de la probabilidad requiere mejorar la formación de los profesores que han de llevarla a cabo (Stohl, 2005), pues, sin una formación específica, tendrían que confiar en sus creencias e intuiciones, con frecuencia erróneas, y que podrían transmitir a sus estudiantes (Cardeñoso, 2001; Ortiz et al., 2006).

Estructuramos este capítulo en siete secciones, la primera de las cuales es esta introducción. En la sección 2, presentamos el problema y los objetivos de esta investigación. En la sección 3, desarrollamos brevemente las nociones teóricas de "significado personal" y de "significado institucional" de los objetos matemáticos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero & Font, 2007), que hemos utilizado en este trabajo. Las investigaciones previas sobre formación de profesores y probabilidad así como el cuestionario y la metodología empleada se detallan en las secciones 4 y 5 respectivamente. En la sección 6, presentamos los resultados y su discusión, finalizando con las conclusiones y algunas reflexiones finales sobre la formación de profesores en el campo de la probabilidad, en la sección 7.

2. Problema y objetivos

Debido a la importancia que está adquiriendo la enseñanza de la probabilidad, incluso en los niveles de Educación primaria, y al hecho de que el profesor de primaria es el encargado de impartir estos contenidos, nos motivó a plantearnos la pregunta de si efectivamente estos futuros profesores tienen suficientes conocimientos de probabilidad para enseñar el tema.

Para obtener una primera aproximación a la respuesta, pretendemos realizar una evaluación inicial de la competencia de los futuros profesores de Educación primaria para resolver problemas elementales de probabilidad, en particular, problemas relacionados con la asignación y comparación de probabilidades. Para ello analizamos las respuestas de 102 estudiantes de magisterio a siete problemas tomados de Green (1983) y de Fischbein & Gazit (1984), estudiando los porcentajes de respuestas correctas y los argumentos proporcionados por los alumnos, y analizar después las semejanzas o diferencias con los resultados obtenidos por los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997).

Consideramos de interés este tipo de trabajo, ya que como indican numerosas investigaciones, que exponemos más adelante, es fundamental tener en cuenta los conocimientos que sobre el contenido matemático y pedagógico de probabilidad tienen los futuros profesores. A partir de ahí podremos diseñar y poner en práctica una instrucción adecuada para mejorar la formación probabilística de los futuros profesores.

3. Significado personal e institucional de los objetos matemáticos

En esta investigación utilizamos las nociones teóricas sobre el significado institucional y personal de los objetos matemáticos desarrolladas en el marco teórico llamado enfoque ontosemiotico (EOS) de la instrucción y cognición matemática (Godino, Batanero & Font, 2007), ya que consideramos que va a permitirnos interpretar de forma coherente algunos aspectos desarrollados en nuestro estudio. Por ello, los constructos de "objeto personal" y "significado personal de un objeto" pueden ser pertinentes, al abarcar la globalidad de las respuestas de los sujetos. Así mismo, nuestro interés por conocer el efecto de factores de tipo socio-cultural en el razonamiento probabilístico puede ser planteado de forma más comprensible desde la perspectiva antropológica implícita en el modelo desarrollado por los autores citados.

En esta teoría, el concepto de situación-problema se toma como noción primitiva y es el punto de partida. Generalmente los problemas no aparecen aislados, sino englobados en campos de problemas para los cuales pueden ser válidas la misma solución o soluciones parecidas. En particular, en esta investigación nos hemos interesado por el campo de problemas de comparación de probabilidades, como el ejemplo siguiente que ha sido uno de los propuestos a los futuros profesores de Educación Primaria en nuestro trabajo:

Problema 1. En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿Cuál elegirías para hacer la extracción?

En este enunciado nos encontramos ante una situación de decisión (elegir una urna) en un ambiente de incertidumbre (se trata de elegir entre dos experimentos aleatorios). No podemos saber con seguridad si obtendremos o no el premio en un ensayo particular con ninguna de las cajas. Sin embargo, la experiencia nos informa de que, a la larga, se obtiene con mayor frecuencia el resultado para el cual es mayor el cociente entre el número de casos favorables y posibles en el experimento. El alumno que elige la caja A siguiendo este razonamiento, muestra una intuición primaria del concepto que conocemos como "probabilidad", según el *significado laplaciano* de la misma.

Otros problemas semejantes al presentado en el problema 1 se pueden obtener cambiando las variables de tarea de este problema, en particular el número de bolas blancas y negras en las cajas. Si en vez de urnas con bolas cambiamos el contexto y utilizamos ruletas con áreas desiguales, la regla de Laplace ya no sería útil y sería preciso acudir a otros significados de la probabilidad, como por ejemplo, *la probabilidad de tipo frecuencial o probabilidad de tipo geométrica*. Hemos visto en estos ejemplos que en diferentes situaciones se asigna al término probabilidad un *significado* diferenciado y que el campo de problemas probabilísticos es muy amplio. En nuestro trabajo lo hemos restringido a subconjuntos de problemas de comparación de probabilidades que serán descritos en el apartado de metodología.

Los problemas son generalmente compartidos por distintas personas, de donde surge la idea de *institución*. Una institución para Godino & Batanero (1994) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. Como caso limite, podemos considerar una institución formada por una sola persona. Cuando una persona es miembro de una institución puede ocurrir a veces que el significado que atribuye a los objetos matemáticos no sea totalmente acorde con el que se acepta como válido dentro de la institución.

Por ello, en la teorización propuesta por Godino y Batanero se diferencia entre *significados personales* (subjetivos) e *institucionales* (objetivos) de los objetos matemáticos, que son dos dimensiones interdependientes y que tiene el interés de resaltar los conflictos que, como consecuencia de la no coincidencia de los puntos de vista personal e institucional tienen a veces los sujetos y que, en particular, en el caso de los alumnos, explican el fracaso en las tareas escolares.

En la resolución de los problemas matemáticos se realizan cierto tipo de *prácticas*, entendiendo por tal cualquier actuación o manifestación realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validarla o generalizarla. Una práctica es *significativa* si desempeña una función en algunos de los procesos descritos. Para cada campo de problemas e institución (persona) hay un sistema de prácticas institucionales (personales) significativas asociadas al campo de problemas.

Así, para decidir entre dos urnas en el problema 1, algunos alumnos compararon los casos posibles, otros optaron por elegir la urna A porque es mayor la diferencia entre bolas negras y blancas y por último, otros eligieron la urna que dé mayor cociente entre el número de bolas negras y blancas. Como hemos visto en el ejemplo, existen más de una práctica diferente en relación a un campo de problemas, por lo que hablamos del *sistema de prácticas* asociadas a un campo de problemas.

Se distingue también entre *prácticas personales* que pueden variar de una persona a otra y prácticas *institucionales* que son compartidas socialmente en una institución. Esta diferenciación es interesante desde el punto de vista didáctico, porque permite recoger en un único marco tanto los procedimientos y soluciones a los problemas que la institución considera correctos como los que considera incorrectos, pero que para los alumnos serían buenas soluciones al problema planteado. La primera y la tercera prácticas, descritas anteriormente, serían correctas desde el punto de vista de la institución matemática, mientras que la segunda práctica no se considera adecuada.

El objeto matemático, en nuestro caso la probabilidad, se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Esta emergencia es progresiva a lo largo del tiempo: sucesivamente el objeto es nombrado, generalizado o modificado o se emplea para resolver otros campos de problemas.

Cuando se quiere caracterizar el significado de un objeto en una institución o para una persona, las prácticas observables son los indicadores empíricos que nos permiten esta caracterización. El sistema de prácticas de donde emerge un objeto institucional (personal) se define como el *significado institucional (personal)* del objeto dado.

Por tanto, de un mismo campo de problemas C que en una institución ha dado lugar a un objeto O_I con significado S (O_I) en una persona puede dar lugar a un objeto O_P con significado personal S (O_P). La intersección de estos dos sistemas de prácticas es lo que desde el punto de vista de la institución se consideran manifestaciones correctas, esto es lo que la persona "conoce" o "comprende" del objeto O_I desde el punto de vista de I.

Con los constructos genéricos de objetos y significados los autores pretenden conseguir dos objetivos: el primero, distinguir entre las entidades emergentes (objetos) del sistema de prácticas de donde provienen (significado de objeto) y el segundo, distinguir las entidades psicológicas (personales) de las entidades epistemológicas (institucionales) que tienen un carácter colectivo. Estas distinciones nos parecen importantes para evitar un enfoque exclusivamente psicológico al estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en las instituciones educativas.

La diferenciación entre objeto y significado de un objeto supone también el reconocimiento de la problemática de la evaluación de los alumnos. Estos conocimientos tendrían un carácter inobservable, sin embargo las prácticas explicitadas durante la resolución de los problemas propuestos serían los indicadores empíricos utilizables en la evaluación de dicho conocimiento.

4. Investigaciones previas

Las investigaciones sobre formación de profesores, en el caso de la probabilidad, son limitadas, como se observa al analizar los contenidos de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education* o en el survey de Jones & Langrall (2007). Esta escasez de investigaciones puede deberse a que la introducción de la probabilidad, sobre todo en los niveles elementales, es todavía reciente. No obstante, hay algunos trabajos interesantes sobre el conocimiento que necesitan los profesores para enseñar probabilidad (Fischbein, 1975; Steinbring, 1991; Kvatinsky & Even, 2002) o que señalan la existencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad en este colectivo (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001; Mickelson & Heaton, 2004, Ortiz et al., 2006; Franklin & Mewborn, 2006). Presentamos a continuación un estudio detallado de las principales investigaciones sobre la probabilidad y la formación de profesores, clasificadas según el centro de interés.

Conocimiento del contenido probabilistico

En un estudio llevado a cabo en 22 profesores en servicio y 12 profesores de enseñanza elemental en prácticas, Begg & Edwards (1999) comprobaron que los docentes tenían un conocimiento poco sólido de la probabilidad, ya que sólo alrededor de dos tercios comprendían sucesos probables, y muy pocos comprendían el concepto de independencia. Carnell (1997) realizó un estudio sobre la comprensión de la probabilidad condicional en 13 profesores de enseñanza media en prácticas, donde todos demostraron tener conceptos erróneos que se correspondían con las dificultades relacionadas con la comprensión de la probabilidad condicional expuestas por Falk (1988), como por ejemplo, definir el elemento condicionante, el orden temporal del elemento condicionante y el elemento objetivo, o confundir la condicionalidad con la causalidad.

Watson (2001) realizó una encuesta a 15 profesores de primaria (enseñanza elemental) y a 28 profesores de secundaria de Australia, utilizando las respuestas de los profesores para buscar patrones y para describir características generales de éstos. En su informe referente a los conocimientos de probabilidad de los docentes, informó de que los profesores de secundaria tenían un nivel de seguridad significativamente más alto que los de primaria a la hora de enseñar conceptos básicos de probabilidad. Estos hallazgos han sido corroborados en investigaciones con profesores de secundaria (Nicholson &Darnton, 2003) y con profesores de primaria (Pereira-Mendoza, 2002).

Sobre las creencias de los profesores, Gattuso & Pannone (2002) informaron de que los profesores de secundaria (n=91) en Italia valoraban el estudio de la estadística, pero pensaban que restaba valor a otros aspectos del currículo de matemáticas y también reconocieron su inseguridad sobre cómo enseñar la estadística más correctamente, no por una falta de conocimiento estadístico, sino por no estar preparados con la didáctica adecuada para enseñar estas ideas.

Conocimiento del contenido pedagógico y conocimiento del aprendizaje de los estudiantes

Los resultados de la observación llevada a cabo por Haller (1997), como parte del seguimiento de cuatro profesores de enseñanza media que habían asistido a un curso de verano, indicaron que los profesores con un conocimiento del contenido más bajo cometían errores de contenido y de interpretación durante sus lecciones, dependían en gran medida de los libros de texto y no aprovechaban el contexto de la probabilidad para desarrollar relaciones entre las fracciones, los decimales y los porcentajes. Sin embargo, los profesores con un mayor conocimiento del contenido no cometían errores matemáticos, relacionaban los decimales, las fracciones y los porcentajes y añadían preguntas y actividades suplementarias, independientes del libro de texto. La experiencia docente no parecía tener tanta repercusión en la enseñanza de la probabilidad por los profesores.

Otros autores (por ejemplo, López, 2006) analizan la forma en que los profesores diseñan y llevan a cabo unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad, sobre todo en la escuela primaria, y muestran la gran dificultad de estos profesores al enfrentarse a conceptos nuevos para ellos. En un estudio con profesores de enseñanza elemental en prácticas, Dugdale (2001) utilizó la simulación por ordenador para revelar el conocimiento de contenido pedagógico. Observó que el uso de software permitió a los profesores diseñar un par de dados, con igual probabilidad de obtener pares que impares al multiplicar las cifras en cada tirada, simular un gran número de tiradas, computar las frecuencias relativas, convenciéndose así de que el juego creado era representativo. Así mismo, destacó que los profesores en prácticas podían usar este software como una herramienta para promover el debate y la comprensión de la probabilidad desde un punto de vista que normalmente no permite un número limitado de pruebas con un dado físico, y que no se conformaban con observar las frecuencias relativas generadas por la simulación por ordenador, sino que pasaban a razonar sobre las probabilidades teóricas para así verificar los resultados.

Stohl (2004), examina cómo treinta y cinco profesores de enseñanza media interpretan las interacciones de los alumnos con una herramienta de simulación. Las interpretaciones serán comparadas con un análisis sobre cómo los alumnos trabajan con la herramienta de simulación, para así determinar las semejanzas y las diferencias con las interpretaciones hechas por los profesores. Los resultados preliminares del análisis sobre el trabajo de los alumnos hecho por los profesores indican que estos últimos, a menudo, se centran en criticar la ausencia de ideas formales sobre probabilidad pasando por alto detalles sobre las acciones y el lenguaje de los alumnos que indican el desarrollo de ideas probabilísticas en ellos. Como consecuencia, parece que los profesores no comprenden que el desarrollo de ideas sobre probabilidad es un proceso complejo y difícil de valorar. Otras experiencias de enseñanza basadas en la simulación (Sánchez, 2002; Batanero, Godino & Cañizares, 2005), parecen ayudar a la superación de algunos sesgos en el razonamiento de los futuros profesores.

Watson (2001) examinó también el conocimiento de los profesores sobre las dificultades de sus alumnos con la probabilidad y la estadística. Cuando se les preguntó por las dificultades de los alumnos, sólo dos profesores de primaria que participaron en el estudio mencionaron haber encontrado dificultades, mientras que trece profesores de secundaria indicaron dificultades en aspectos procedimentales (como calcular probabilidades, permutaciones, diagramas de árbol) o conceptuales (como la probabilidad teórica, la inferencia o la probabilidad condicional). Aunque estos datos sugieren que los profesores son capaces de identificar los problemas de los alumnos, también muestran que éstos se centran principalmente en aspectos de procedimiento y su didáctica se basa en un enfoque computacional que busca las clásicas respuestas simples. Así mismo, afirmó que había pocas pruebas de que los profesores de secundaria usaran actividades basadas en la simulación y toma de muestras para reforzar la teoría y, por el contrario, aunque los profesores de primaria utilizaban lecciones basadas en actividades, no parecía existir un enfoque coherente hacia el estudio de los conceptos sobre el azar.

En este trabajo queremos contribuir a esta problemática, con objeto de mejorar nuestra acción didáctica de formación de profesores en el campo de la probabilidad.

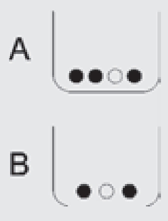
5. Metodología.

La muestra participante estuvo integrada por 102 futuros profesores de Educación primaria de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla, de los tres cursos y de todas las especialidades salvo Audición y Lenguaje, con una media aritmética de edad de 21 años. Estos estudiantes, en general, tienen escasa formación matemática, y en particular probabilística.

El cuestionario, que reproducimos a continuación, estuvo compuesto de 7 problemas en los que se pide decidir cuál, entre dos cajas con fichas blancas y negras da mayor probabilidad de un cierto color, y se pide argumentar la respuesta.

Problema 1. En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca.

Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿Cuál elegirías para hacer la extracción?



Señala la respuesta correcta:

A. La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra___
B. La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
C. Las dos cajas dan la misma posibilidad..................................... ___
D. No lo sé... ___

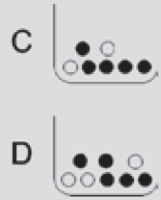
¿Por qué? ....

Problema 2. Otras dos cajas tienen en su interior algunas fichas negras y algunas fichas blancas.

Caja C: 5 negras y 2 blancas.

Caja D: 5 negras y 3 blancas

¿Qué caja (la C o la D) da más posibilidades de sacar una ficha negra?
¿O, por el contrario, dan las dos la misma probabilidad?



(A) Caja C........................ ___
(B) Caja D........................ ___
(C) La misma posibilidad....... ___
(D) No lo sé...................... ___

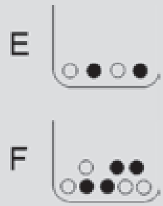
¿Por qué?

Problema 3. Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas:

Caja E: 2 negras y 2 blancas.

Caja F: 4 negras y 4 blancas

¿Qué caja da mayor posibilidad de obtener una ficha negra?



(A) Caja E....................... ___
(B) Caja F....................... ___
(C) La misma posibilidad......___
(D) No lo sé.....................___

¿Por qué?

Problema 4. Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

Problema 5. Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

Problema 6. Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas:

Caja G: 12 negras y 4 blancas.

Caja H: 20 negras y 10 blancas

¿Qué caja da mayor posibilidad de sacar una ficha negra?

(A) La misma posibilidad ___
(B) Caja G ___
(C) Caja H ___
(D) No lo sé ___

¿Por qué?

Problema 7. Otras dos cajas distintas de las anteriores tienen fichas negras y blancas.

Caja J: 7 negras y 5 blancas.

Caja K: 5 negras y 3 blancas

¿Qué caja da mayor posibilidad de sacar una ficha negra?

(A) La misma posibilidad ___

(B) Caja J ___

(C) Caja K ___

(D) No lo sé ___

¿Por qué?

Consideramos que, los problemas 1, 2, 3, 6 y 7, tomados de Green (1983), y los problemas 4 y 5, tomados de Fischbein & Gazit (1984), constituyen una muestra representativa del significado global de la comparación de probabilidades. Estos dos últimos, introducen algunos factores subjetivos que en la investigación de Cañizares (1997) tuvieron una influencia, tanto en los resultados como en las estrategias empleadas. Un punto importante es que un problema de comparación de probabilidades entraña la comparación de dos fracciones, por lo que un requisito es el nivel de desarrollo de razonamiento proporcional. Por ello, las tareas empleadas se organizan en función de los estadios descritos por Noelting (1980).

Puesto que en los problemas puede aplicarse el principio de indiferencia, nos encontramos ante un ejemplo en que la asignación de probabilidades debe hacerse aplicando la regla de Laplace. Para resolver el problema es necesario, por tanto, comparar dos fracciones dadas. Además de ello, se debe movilizar la concepción sobre el experimento aleatorio, diferenciar los posibles sucesos en este experimento (espacio muestral), asociar el número de casos favorables al suceso dado, el número de casos desfavorables al suceso contrario y considerar el número total de bolas como conjunto de posibilidades. En la Tabla 1 se clasifican los problemas de acuerdo al nivel requerido de razonamiento proporcional en la categoría de Noelting (1980).

Tabla 1. *Clasificación de los problemas según los niveles descritos por Noelting*

Problema	Composición (favorables, desfavorables) cada caja	Tipo (Noelting)	Estrategia posible	Otros
1	(3,1); (2,1)	Ia	Comparar casos favorables	
2	(5,2); (5,3)	Ib;	Comparar casos desfavorables	
3	(2,2); (4,4)	IIa;	Correspondencia	
4	(40,20); (30.15)	IIb;	Correspondencia	Factores subjetivos
5	(10,20); (30.60)	IIb;	Correspondencia	Factores subjetivos
6	(12,4); (20,10)	IIIa;	Correspondencia	
7	(7,5); (5,3)	IIIb;	Reducir común denominador	

6. Resultado y discusión.

En la Tabla 2 presentamos los porcentajes de respuestas correctas a los problemas propuestos en cada grupo de edad de los alumnos que participaron en la investigación de Cañizares (1997) que muestra una mejora general con la edad, en los tres primeros, habiendo mayor dificultad en los que involucran mayor nivel de razonamiento proporcional o elementos subjetivos.

En el caso de los futuros profesores de primaria se observa una mejora respecto a la media global de resultados de los niños de la investigación de Cañizares (1997) en todos los problemas, excepto en el primero. Por otro lado, el problema 7 resultó ser el más difícil (75 % errores en los futuros profesores de primaria), en que la falta de proporcionalidad entre las cuatro cifras presentadas obliga al sujeto a la aplicación de la regla de Laplace. Sin embargo, en este problema el distractor más fuerte no es la caja con el mayor número de bolas del color favorable, sino la opción de equiprobabilidad. Pensamos que esto se debe a que, en este problema, la diferencia entre los casos favorables y desfavorables en ambas cajas es la misma. Le sigue el problema 4, donde se produce la inversión del orden de dificultad, respecto al previsto en la clasificación de Noelting, posiblemente debido a los distractores de tipo subjetivo (70 % de errores en futuros profesores de primaria), lo que nos indica que un alto porcentaje de alumnos no llegó a establecer la proporcionalidad de las cajas o no la consideró relevante. Otro problema difícil es el 5 con 57% de errores, también con elementos subjetivos, donde además el número de bolas del color favorable era inferior al de desfavorables, al contrario que en el problema 4. En los dos se ha manifestado como respuesta errónea más frecuente la elección como más probable de la caja con mayor número de bolas del color favorable.

Otro problema especialmente difícil es el problema 6 (con un 40% de errores). En este caso sí existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables de cada urna pero la proporción no es la misma, lo que hace que las urnas no sean equivalentes. Aunque los futuros profesores de Educación primaria parecen ser conscientes de esta falta de equivalencia entre las dos urnas, sin embargo se decantan por la que tiene una mayor cantidad absoluta de casos favorables o la diferencia entre los casos favorables y desfavorables es mayor.

Tabla 2: *Porcentaje de respuestas correctas en los problemas*

	Alumnos					Futuros prof. E. P.
Problema	10-11 (n=36)	11-12 (n=37)	12-13 (n=38)	13-14 (n=32)	Total (n=143)	Total (102)
1	75.0	70.3	86.8	87.5	79.7	79.4
2	52.8	67.6	65.8	56.2	60.8	68.6
3	47.2	54.1	81.6	73.6	63.6	72.5
4	6.0	27.0	23.6	23.8	20.0	29.4
5	13.9	32.4	39.5	43.7	32.5	43.1
6	30.6	27.0	34.2	21.9	28.7	59.8
7	19.4	5.41	5.3	6.2	9.1	25.5

Los tres primeros problemas muestran un resultado algo mejor con solo un 30% aproximado de errores. No obstante, debemos destacar el fuerte impacto que tiene la opción de equiprobabilidad en los dos primeros problemas, aún sabiendo que hay igualdad de casos favorables o desfavorables, mientras que en problema 3 el distractor más fuerte es el de mayor número absoluto de casos favorables.

Hay que destacar, también, la aparición de una categoría de respuesta denominada ambigua o incompleta, bastante frecuente en el problema 4, y que se refiere exclusivamente al factor secundario introducido en estos dos problemas, de modo que el alumno hace algún comentario sobre dicho factor, sin llegar a tomar una decisión sobre cual de las dos cajas ofrece mayor probabilidad. Además, la redacción de estos dos problemas de respuesta abierta favorece la ambigüedad en las respuestas.

Si comparamos el orden de dificultad entre los alumnos de la investigación de Cañizares (1997) y los futuros profesores de Educación primaria observamos que los dos problemas más difíciles en ambos casos son el 7 y el 4. En el primero es necesario aplicar la regla de Laplace y en el segundo creemos que se debe a los elementos distractores. Estos resultados nos muestran que estas dificultades pueden persistir a lo largo del tiempo desde la Educación Secundaria hasta la edad actual de los futuros profesores de Educación primaria.

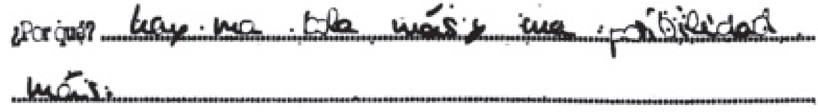
En el caso de los problemas 5 y 6 se produce un cambio en el orden de dificultad entre ambos colectivos. Para los futuros profesores de Educación Primaria el problema 5, sobre la equiprobabilidad de los juegos es más difícil que el 6 donde se ha de elegir entre dos urnas la más favorable. Puede ser que el concepto de juego justo haya sido menos trabajado tanto en su etapa de estudiante de secundaria como en el período de formación como maestro mientras que los alumnos de la investigación de Cañizares hayan tratado más estos temas, debido a que actualmente se le presta mayor atención. El orden de dificultad es el mismo entre ambos colectivos en los tres primeros problemas.

Estos resultados son preocupantes, dado la sencillez de los problemas (comparación de probabilidades simples) y el alto número de errores, tanto en los que involucran comparación de fracciones como en los que incluyen elementos subjetivos.

6.1. Estrategias de los futuros profesores en la comparación de probabilidades

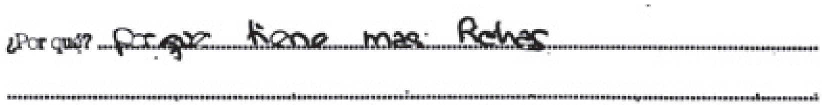
Un segundo punto de estudio fue el análisis de las estrategias empleadas, pues los futuros profesores pueden haber elegido una respuesta correcta siguiendo un razonamiento incorrecto. A continuación analizamos estas estrategias, usando la misma clasificación que Cañizares (1997) empleó con los alumnos de 10 a 14 años, que son las siguientes:

A1) Comparación del número de casos posibles: Consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas, sin considerar la proporcionalidad entre bolas blancas y negras en ambas urnas. Esta estrategia, aunque puede generar una respuesta correcta al problema 1, carece de base lógica y tiene su origen en la imposibilidad de los alumnos de comparar el conjunto total con un subconjunto, como ocurre en la respuesta del alumno 65 al problema 1: "(A). La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra"



¿Por qué? Hay una bola más y una posibilidad más.

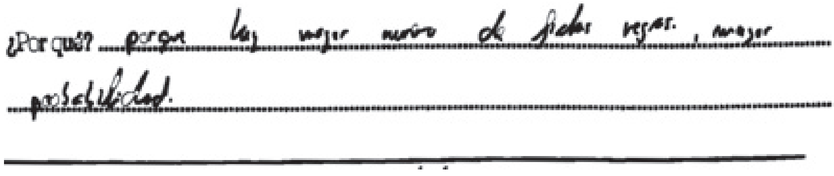
Otro ejemplo es la respuesta incorrecta del alumno 29 al problema 7: "(B). Caja J"



¿Por qué? Porque tiene más fichas.

Hemos encontrado esta estrategia en algunos futuros profesores de Educación primaria, pero hemos de indicar que no resultó persistente, ya que en general la utilizaban de forma aislada. Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 1, 3, 6 y 7 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores de Educación primaria están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en los problemas 2, 4 y 5 están algo por encima.

A2) Comparación del número de casos favorables: Esta estrategia consiste en elegir la caja que contenga un mayor número de fichas del color favorable. Es la estrategia más simple, ya que de los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos. Esta estrategia la hemos considerado pertinente en el problema 1, como ocurre en la respuesta del alumno 7 al problema 1: "(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra":

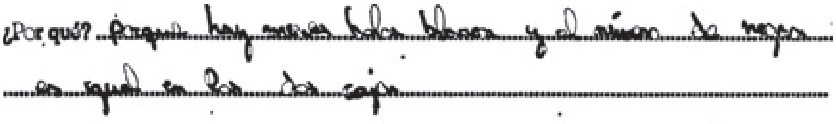


¿Por qué? porque hay mayor número de fichas negras, mayor
probabilidad

Esta estrategia aplicada a cualquier otro problema genera respuestas incorrectas, como la del alumno 28 al problema 6: "*(B) Caja H, porque tiene más negras*".

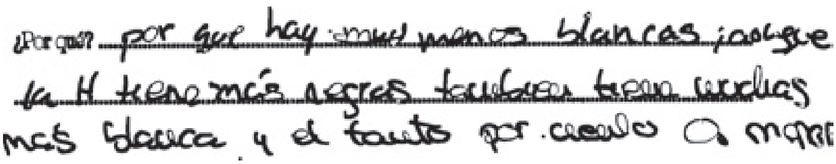
Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 3, 5, 6 y 7 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores de Educación primaria están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en el problema 1 donde consideramos pertinente esta estrategia está por encima, aunque también está por encima la utilización de esta estrategia que genera respuestas incorrectas en el problema 4. Los porcentajes de utilización en el problema 2 son prácticamente iguales.

A3) Comparación del número de casos desfavorables: Estrategia consistente en elegir la caja con menor número de fichas del color desfavorables. Cuando, una vez intentada la anterior, para comprobar si existe igualdad de casos favorables, los sujetos centran su atención sobre el número de casos desfavorables. El único problema en el que la justificación mediante esta estrategia daría lugar a una respuesta correcta es el problema 2, como sucede en la respuesta dada por el alumno 13: "(A) Caja C"



¿Por qué? porque hay menos bolas blancas y el número de negras
es igual en las dos cajas

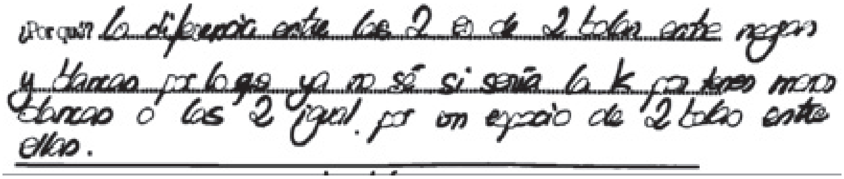
En los demás casos, aunque la respuesta sea correcta, esta estrategia la hemos considerado no pertinente, como ocurre con la respuesta del alumno 94 al problema 6: "(B) Caja G"



¿Por qué? por que hay ~~mue~~ menos blancas; aunque
la H tiene más negras tambien tiene muchas
más blanca y el tanto por ciento es menor

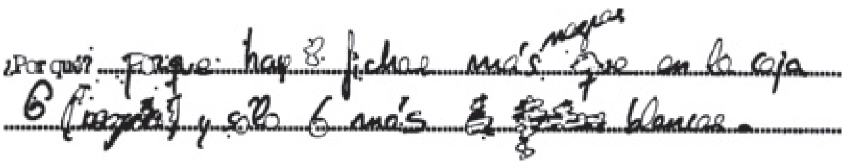
Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 2, 3, 4, 5 y 6 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores de Educación primaria están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en el problema 7 está por encima, siendo prácticamente igual en el problema 1. Es curioso que esta estrategia que se puede considerar pertinente para el problema 2 ya que genera una respuesta correcta la usen más los niños que los futuros profesores.

A4) Estrategias aditivas: Los alumnos que utilizan esta estrategia tienen en cuenta los casos favorables, los desfavorables y los posibles, simultáneamente, pero gestionan los datos por medio de alguna operación aditiva para poder establecer la comparación. En general, estas estrategias no se consideran pertinentes, como ocurre con la respuesta del alumno 52 al problema 7:"(D) No lo sé"



¿Por qué? La diferencia entre las 2 es de 2 bolas entre negras
y blancas por lo que ya no sé si sería la K por tener menos
blancas o las 2 igual por un espacio de 2 bolas entre
ellas.

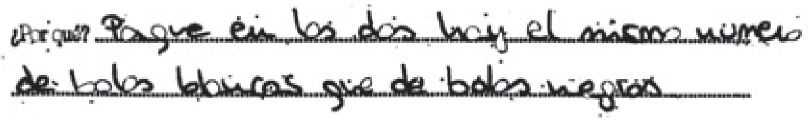
Otro ejemplo es la respuesta incorrecta del alumno 67 al problema 6: "(C) Caja H"



¿Por qué? porque hay 8 fichas más negras que en la caja
G y sólo 6 más blancas.

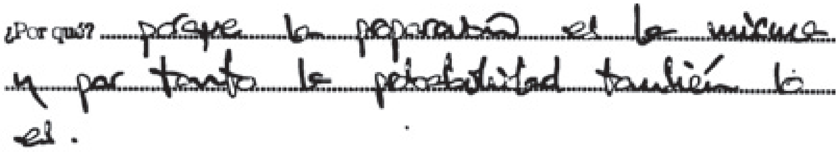
Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 1, 3, 4, 5 y 7 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores de Educación primaria están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en los problemas 2 y 6 está por encima. Destaca el alto porcentaje de futuros profesores que utiliza estrategias aditivas para los problemas 6 y 7 que ni genera respuestas correctas ni se consideran pertinentes. Incluso en el problema 6 este porcentaje está por encima de los niños de 10-14 años.

A5) Estrategia de correspondencia: Esta estrategia, según Pérez Echeverría (1990), consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra fracción. Piaget & Inhelder (1951) afirman que, a falta de un cálculo de fracciones, el sujeto determina las dobles relaciones por un sistema de correspondencias cuando las proporciones o desproporciones no aparecen como inmediatas. Nosotros hemos considerado este razonamiento pertinente para resolver correctamente los problemas 3, 4, 5 y 6. Un ejemplo es la respuesta del alumno 46 al problema 3: "(C) La misma posibilidad"



¿Por qué? Porque en las dos hay el mismo número
de bolas blancas que de bolas negras

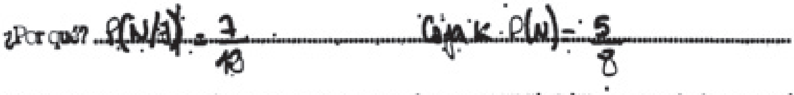
Un ejemplo de interpretación no adecuada de la proporcionalidad, que genera que genera una respuesta incorrecta del alumno 71, al problema 7, es la siguiente: "(A) La misma posibilidad":



¿Por qué? porque la proporción es la misma
y por tanto la probabilidad también lo
es.

Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 1, 2, los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores de Educación primaria están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en el resto de los problemas está por encima.

A6) Estrategias multiplicativas: Esta estrategia es la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Esta estrategia, desarrollada, según Piaget & Inhelder (1951), en el período de las operaciones formales, resuelve con éxito todos los problemas, como ocurre en la respuesta del alumno 30 al problema 7: "(C) La caja K"



¿Por qué? P(N/J) = 7/12 Caja K P(N)= 5/8

Otro ejemplo es la respuesta correcta del alumno 95 al problema 1, aunque expresa el resultado en porcentaje: "(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra"

¿Por qué? porque tengo un 75 % de probabilidad

¿Por qué? porque tengo un 75 % de probabilidad

Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores de Educación primaria están por encima en todos los problemas, lo que es normal dada la edad de los niños.

A7) Otros tipos: En este apartado incluimos a los futuros profesores que hacen referencia a la suerte, se fijan en la posición de las bolas en el dibujo o utilizan cualquier otro procedimiento.

En los sujetos que hacen referencia a la suerte, encontramos implícito el "sesgo de equiprobabilidad" (Lecoutre, 1992), consistente en suponer que todos los sucesos aleatorios son equiprobables por naturaleza y el "enfoque en el resultado aislado" (Konold, 1989), que consiste en pensar que es imposible estimar una probabilidad para los sucesos aleatorios ya que son impredecibles. Un ejemplo es la respuesta del alumno 9 al problema 1: "(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra"

¿Por qué? Es verdad que la caja A tiene más posibilidades de sacar una ficha negra pero eso nunca se sabe dependerá de la suerte.

¿Por qué? Es verdad que la caja A tiene más
posibilidades de sacar una ficha negra pero eso
nunca se sabe dependerá de la suerte

Otro tipo de argumentos es el que expresa el alumno 15 en la respuesta al problema 4:

No tiene nada que ver la probabilidad con la edad o inteligencia, a no ser, que Rosa piense que Pilar pueda hacer algún tipo de trampa...

No tiene nada que ver la probabilidad con la edad o
inteligencia, a no ser, que Rosa piense que Pilar pueda hacer
algún tipo de trampa…

En la tabla 3, donde se han sombreado las estrategias correctas para cada problema, observamos que para algunos problemas (7, 6 y 2) hay menor porcentaje de estrategias correctas que de respuestas correctas, lo que implica que la dificultad de los problemas es todavía mayor que la que aparece en la tabla anterior, puesto que algunos alumnos obtuvieron en estos problemas respuestas correctas con un razonamiento inadecuado. Por el contrario, en el problema 5 algunos estudiantes que usan estrategias adecuadas, no llegan a la solución, influidos por los elementos subjetivos del problema. En el resto, los porcentajes de estrategias y respuestas correctas se corresponden.

Tabla 3: *Porcentaje de estrategias según problema*

	Prob 1	Prob 2	Prob 3	Prob 4	Prob 5	Prob 6	Prob 7
Casos posibles	4	(2)	(2)	(2)	(2)	(0)	(2)
Casos favorables	(56.8)	(28.4)	(9.8)	(28.4)	11.8)	20.6)	(10.8)
Casos desfavorables	(2.9)	(31.4)	(0)	(0)	(2)	(8.8)	(4.9)
Aditivas	(5.9)	(13.7)	(6.9)	(1)	(1)	(24.5)	(36.3)
Correspondencia	(2)	(2.9)	(50)	(15.7)	(43.1)	(15.7)	(18.6)
Multiplicativa	(17.6)	(12.7)	(20.6)	(13.7)	(14.7)	(15.7)	(13.7)
No responde o incompleta	(9.8)	(7.8)	(9.8)	(30)	(12.8)	(13.7)	(11.8)

Respecto a la investigación de Cañizares (1997) los futuros profesores de Educación primaria hacen mayor uso de estrategias correctas y, en general multiplicativas y correspondencias, lo cual corresponde a mayor razonamiento proporcional, aunque todavía hay un grupo importante que usa estrategias aditivas.

7. Conclusiones.

Consideramos que los resultados obtenidos son preocupantes, dado la sencillez de los problemas (comparación de probabilidades simples) y el alto número de errores en todos los problemas. Además de la falta de razonamiento proporcional en algunos problemas, se ha observado la influencia de factores del problema que inducen la asignación de probabilidades subjetivas, especialmente en los dos problemas tomados del cuestionario de Fischbein y Gazit. Como consecuencia, el formador de profesores debe tenerlos en cuenta, además del razonamiento proporcional, al abordar la enseñanza de la probabilidad en las Facultades de Educación. En relación con las estrategias utilizadas para la resolución de los problemas propuestos, los futuros profesores de Educación primaria hacen mayor uso de estrategias correctas y, en general multiplicativas y correspondencias, que los alumnos que participaron en la investigación de Cañizares (1997), lo cual corresponde a un mayor razonamiento proporcional, aunque todavía hay un grupo importante que usa estrategias aditivas.

Destaca también el alto porcentaje de futuros profesores de Educación primaria que aparece en el apartado “No responde o incompleta” en todos los problemas, siempre por encima de los niños de 10-14 años, incluso en los problemas de menor dificultad, que puede indicar un desconocimiento de estos temas de probabilidad. Como indica Stohl (2005), el desarrollo del razonamiento probabilístico en los alumnos depende en gran medida de la comprensión de la probabilidad por parte de los docentes, además de otros aspectos, como las posibles interpretaciones incorrectas de los alumnos, por lo que difícilmente podrán enseñar un tema en que muestran dificultades tan notables.

Por todo ello, consideramos urgente reforzar la formación probabilística elemental de los futuros profesores de Educación primaria, prestando más atención al tema en los programas de formación de profesores de educación primaria (Vacc, 1995), cambiando no solo los contenidos sino la metodología. Por un lado, hemos de prepararlos adecuadamente tanto en el conocimiento específico de probabilidad como en el conocimiento pedagógico del mismo, ya que como hemos observado en nuestra investigación, los resultados obtenidos y las estrategias utilizadas por los futuros profesores de Educación primaria en varios problemas son muy similares a los niños de la investigación de Cañizares (1997), siendo por tanto alarmante que los futuros profesores cometan los mismos errores que los alumnos a los que han de formar. Para ello, debemos proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del significado global de la probabilidad, y prepararlos en las componentes didácticas básicas (Batanero, Godino y Roa, 2004), mostrándoles situaciones de uso en el aula, metodología didáctica y los aspectos cognitivos. Por otro lado, debemos realizar un cambio metodológico que incida en el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales y utilización de la simulación, que, además de mejorar la comprensión, proporcionan modelos de la forma en que han de trabajar en clase con sus alumnos (Godino et als., 2008).

Reconocimiento:

Esta investigación forma parte del Proyecto SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía y ha sido cofinanciada por el Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20.

Referencias bibliográficas

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.

Batanero, C., Godino, J. D. & Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference.* CD ROM. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Godino, J. D. & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12. On line: http://www.amstat.org/publications/jse/

Begg, A. & Edwards, R. (1999). *Teachers ideas about teaching statistics.* Paper presented at the combined annual meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education. Melbourne, Australia.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad.* Tesis Doctoral. Cádiz: Universidad de Cádiz.

Carnell, L. J. (1997). *Characteristics of reasoning about conditional probability (preservice teachers).* Unpublished doctoral dissertation, University of North Carolina-Greensboro.

Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools 17(1/2),* 173-182.

Falk, R. (1988). Conditional probabilies: Insights and difficulties. En R. Davidson & J. Swift (Eds.), *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statisitics (pp. 714-716).* Victoria, BC, Canada: University of Victoria.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics,* 15(1), 1-24.

Franklin, C. & Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Gattuso, L. & Pannone, M. A. (2002). Teachers training in a statistics teaching experiment. In B. Philips (Ed.), *Proceedings of the sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématigues*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. & Wilhelmi, M. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers trough project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading &A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey. México.

Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). University of Sheffield.

Haller, S. K. (1997). *Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers.* Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota.

Jones, G. A. & Langrall, C. W. (2007). Research probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-956). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., y N.C.T.M.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

Kvatinsky, T. & Even, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding of probability. *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* [CD-ROM], Hawthorn, VIC, Australia: International Statistical Institute.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, nº 106. Madrid: B.O.E.

López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahía) Brasil: International Statistical Institute. CD ROM, en prensa.

Mickelson, W. T. & Heaton, R. (2004). Primary teachers'statistical reasoning about data. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 353-373). Dordrecht, Netherlands:Kluwer.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.

N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA; N.C.T.M. On line: http://standards.nctm.org/

Nicholson, J.R. & Darnton, C. (2003). Mathematics teachers teaching statistics: Wath are the challe nges for the classroom teacher? In *Proceedings of the 54th Session of the International Statistical Institute.* Vooburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ration concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics,* 11 (2), 217-253.

Ortiz, J. J., Mohamed, N.; Batanero, C.; Serrano, L. & Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P, Bolea, M. J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Universidad Autónoma.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Sánchez, E. S. (2002). Teachers beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria*. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 135-167). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning.* Dodrecht: Kluwer.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). Nueva York: Springer.

Stohl, H. (2004). *Middle school teachers' development of stochastic understanding as it applies to pedagogical understanding when using simulations*. (Manuscrito en preparación)

Vacc, N. N. (1995). Supervisor and teacher educator perceived relevance of recommendations in the NCTM currículum standards. *School Science and Mathematics,* 95(6), 310-319.

Watson, J.M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education 4(4),* 305-337.

Capítulo 6

LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA DE LOS PROFESORES EN FORMACIÓN. INCIDENCIA DE LAS VARIABLES GÉNERO, ESPECIALIDAD Y FORMACIÓN PREVIA

Assumpta Estrada Roca
Universidad de Lleida

Resumen. El profesorado vive en la práctica mucho más alejado del dominio afectivo en la enseñanza que de la comprensión de conceptos y procesos y del desarrollo de destrezas en el dominio cognoscitivo. Pero olvidar las propias actitudes preconcebidas del profesorado ante la materia lleva a menudo al fracaso de la educación. Este tema puede tener importancia especial en el caso de la estadística, cuya enseñanza no llega a desarrollarse de acuerdo con las recomendaciones curriculares. El objetivo de este capitulo es presentar las investigaciones sobre actitudes hacia la Estadística analizando sus componentes, las variables que las afectan, así como los diferentes instrumentos de evaluación. Describimos también resumidamente los resultados de nuestra investigación sobre actitudes de los profesores de educación primaria.

Palabras clave: Actitudes hacia la Estadística, Educación Estadística, Formación de profesores, Escalas de Actitudes.

Abstract. In-service primary teachers tend to be much more distant to the affective domain within teaching than to the understanding of concepts, processes and strategy developments within the cognitive domain. However, forgetting the teachers' own preconceived attitudes towards their subject-matter often leads to the failure of education. This could be an important issue with regard to statistics, as the teaching of it fails to correlate to curricular recommendations. The aim of this study is to present attitude-related research on statistics by analysing its components, variables and assessment tools. Likewise, a descriptive summary of the results of this study on primary teachers' attitudes will be provided.

Key words: Attitudes towards Statistics, Statistical Education, Training teachers, Attitude Scale.

1. Introducción

No cabe duda de que la influencia de la estadística en la concepción del mundo actual ha sido y es enorme. Con la simple lectura del periódico, nos damos cuenta de que hacen falta unos conocimientos elementales para entender el significado de estadísticas de consumo, de nivel de vida, de previsiones electorales, económicas, etc. Además, desde varias áreas académicas, se aprecia la necesidad de una cierta formación en estadística aplicada, tanto por su carácter multidisciplinar (ciencias sociales, naturales...), como por ser un instrumento de análisis para el propio trabajo del alumno que de una u otra forma, se enfrenta a series de datos o conjuntos de mediciones, a partir de las cuales desea obtener información válida y fiable. Por todo ello, podríamos decir pues, que hay razones socioculturales y educativas suficientes, para tratar en la enseñanza obligatoria estos temas (Franklin i cols., 2005).

Pero a pesar de su utilidad reconocida y de figurar en los programas oficiales de nuestro país, la estadística es una materia frecuentemente olvidada en la educación primaria y secundaria, no sólo en España, sino a nivel internacional. La misma situación se reproduce en las Facultades de Ciencias de la Educación encargadas de formar al profesorado. Para algunos autores (Heaton, 2002; Gattuso y Pannone, 2002; Mendonça, Coutinho y Almouloud, 2006), esto es debido, en parte, a la escasa preparación estadística con la que el profesor termina sus estudios, lo que hace que cuente con pocos recursos a la hora de dar sus clases y, tienda a omitir el tema; acortarlo o, en el mejor de los casos, a presentarlo con una metodología inadecuada.

Asistimos, por tanto, a un círculo vicioso, en el que los profesores, faltos de formación, van generando actitudes negativas hacia la materia, infravalorando su utilidad, percibiéndola como un contenido difícil que no pueden llegar a dominar, incluso comparten concepciones erróneas y dificultades con sus alumnos (Watson, 2001; Makar y Confrey, 2004; Stohl, 2005), dudando de su capacidad para enseñar la materia y asumiendo que este tema no debe incluirse en la formación básica de sus alumnos. Estos sentimientos de rechazo les llevan inconscientemente a posponer su formación estadística, a prescindir del uso de un instrumento que podría mejorar muchos aspectos de su actuación profesional y, en lo posible, a omitir su enseñanza.

Todas estas razones nos han llevado a interesarnos en el estudio de las actitudes hacia la estadística de los profesores de educación primaria en formación y concretamente en la posible incidencia de las variables género, especialidad y formación previa. La investigación llevada a cabo se inscribe dentro de un proyecto más amplio, en el campo de la educación estadística, orientado al estudio de las actitudes y conocimientos estadísticos de los profesores y cuyo objetivo final es fundamentar la acción didáctica que permita incidir en las actitudes de los profesores e indirectamente en la mejora de la enseñanza de la estadística en la educación primaria.

2. Las actitudes hacia la estadística y sus componentes

Los trabajos de McLeod (1988, 1989, 1992, 1994) han contribuido en gran medida a reconocer la importancia de las cuestiones afectivas hacia las matemáticas. En ellos, las actitudes aparecen como un fenómeno de difícil definición, debido a que no constituyen una entidad observable, sino que son construcciones teóricas que se infieren de ciertos comportamientos externos, frecuentemente verbales.

Así, dependiendo del investigador, encontramos diversas definiciones. Para Auzmendi (1992, p. 17), las actitudes son “aspectos no directamente observables sino inferidos, compuestos tanto por las creencias como por los sentimientos y las predisposiciones comportamentales hacia el objeto al que se dirigen". Gómez Chacón (2000) entiende la actitud como: "una predisposición evaluativa (es decir positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento" (p. 23). Por otro lado, Gal y Garfield (1997) las consideran como "una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio" (p. 40).

Las actitudes hacia una materia de estudio son bastante estables, de diversa intensidad, y se expresan positiva o negativamente (agrado/desagrado, gusto/disgusto) y, en ocasiones, pueden representar sentimientos vinculados externamente a la materia (profesor, actividad, libro, etc.). Surgen en edades muy tempranas, si bien tienden a ser favorables en un principio (Callahan, 1971), tienen una evolución negativa (Suydam, 1984) que, según Aiken (1974), persiste con el paso del tiempo.

Según los estudios encontrados sobre la formación de actitudes, su origen proviene de:

- Las experiencias previas en contextos escolares, en el caso de la estadística, estas pueden estar basadas en aplicaciones rutinarias de fórmulas sin metodología ni aplicaciones reales adecuadas. En el caso de los profesores en formación, las imágenes procedentes de sus experiencias como alumnos, ayudan en algunos aspectos de su formación, pero también actúan como filtros a través de los cuales son examinadas las nuevas informaciones (Calderhead y Robson, 1991).
- Las nociones de estadística obtenidas a partir de la vida cotidiana fuera del aula, en la prensa o en los medios de comunicación que, según Gal y Ginsburg (1994), suelen estar asociadas a números y, a veces, son conceptualmente erróneas.
- Su vinculación con las Matemáticas, al considerar que la estadística es parte de las matemáticas, se transfieren las actitudes de una materia a otra. Así, se observa en algunos casos un bloqueo total delante de situaciones problemáticas que han de ser tratadas estadísticamente, en alumnos que infravaloran sus capacidades matemáticas (Brandstreat, 1996).

Los componentes de las actitudes

Si bien en un principio se consideraba la actitud como un constructo unidimensional, progresivamente se introducen los estudios multidimensionales, en los que las actitudes hacia una materia se estructuran en componentes. Así, para Wise (1985) existen solamente dos dominios diferenciados susceptibles de medición: las actitudes hacia el curso de estadística básica que están realizando los alumnos (componente curso) y las actitudes de los alumnos hacia el uso de la estadística en su campo de estudio correspondiente (componente campo).

Más adelante, los trabajos de Auzmendi (1992), Gil Flores (1999) y Gómez Chacón (2000) diferencian tres factores básicos en las actitudes, llamados también componentes pedagógicos:

- Componente cognitivo: se refiere a las expresiones de pensamiento, concepciones y creencias, acerca del objeto actitudinal, en este caso, la estadística.

- Componente afectivo o emocional: recogería todas aquellas emociones y sentimientos que despierta la estadística, y por ello son reacciones subjetivas de acercamiento/huida, o de placer/dolor.
- Componente conductual o tendencial: son expresiones de acción o intención conductista/conductual y representan la tendencia a resolverse en la acción de una manera determinada.
- Finalmente, en Schau y cols. (1995) se estructuran en cuatro dimensiones o componentes:
- Afectivo: sentimientos positivos o negativos hacia la estadística.
- Competencia cognitiva: percepción de la propia capacidad sobre conocimientos y habilidades intelectuales en estadística.
- Valor: utilidad, relevancia y valor percibido de la estadística en la vida personal y profesional.
- Dificultad: se refiere a la percibida de la estadística como asignatura. Aunque un estudiante pueda reconocer el valor de una materia, sentir interés hacia la misma (componente afectivo) y pensar que tiene suficientes conocimientos y habilidades (componente cognitivo), puede llevarlo a considerar la materia como fácil o difícil.
- Estas propuestas han servido de base para la elaboración de distintos cuestionarios de actitudes hacia la estadística que se describen a continuación

3. Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística

En la revisión realizada, todos los instrumentos para medir las actitudes hacia la estadística son cuestionarios compuestos de ítems con formato de respuesta tipo Likert y con características específicas distintas referidas a aspectos diferentes del constructo. Un análisis detallado de las evidencias de fiabilidad y validez de estos cuestionarios aparece en Carmona (2004).

Inventario de actitudes hacia la estadística de Roberts (SAS)

La primera escala de actitudes hacia la estadística que aparece utilizada por diferentes autores es el SAS -Statistics Attitude Survey- de Roberts y Bilderback (1980), elaborado para suplir las necesidades de medir las actitudes de los estudiantes por parte de los profesores de Estadística.

Para la elaboración de esta escala los autores revisan y adaptan varios de los ítems que componen el cuestionario propuesto por Dutton (1954) para medir las actitudes hacia la aritmética. Parte de 50 ítems tipo Likert con cinco posibilidades de elección que reduce después de una prueba inicial a 34 por baja correlación con la puntuación total de la escala. Los autores lo consideran como un cuestionario unidimensional.

Para Wise (1985) el SAS cubre una importante necesidad de medida del constructo, pero muchos de sus ítems son del todo inapropiados para alumnos que acaban de comenzar la asignatura de estadística y además parecen medir más el rendimiento de los estudiantes que sus actitudes hacia la estadística.

La escala de actitudes hacia la estadística (ATS) de Wise

En vista de las dificultades planteadas por el SAS, Wise (1985) aborda la construcción de una escala alternativa: el ATS –Attitudes Toward Statistics Scale- con ítems netamente actitudinales, que tiene como finalidad medir el cambio actitudinal en estudiantes de estadística básica. Se clasifican dos dominios diferenciados susceptibles de medición en el ATS: actitudes hacia el curso que están realizando y actitudes de los alumnos hacia el uso de la estadística en su campo de estudio.

La construcción de la prueba comienza con la elaboración de 40 ítems tipo Likert con cinco posibilidades de elección que se sometieron a validación por "panel de jueces" y correlación ítem-total, con lo que se reduce a 29 sentencias con valores de coeficiente alfa y fiabilidad test-retest elevados.

La escala multidimensional de Auzmendi

A pesar de que las escalas antes descritas ATS y SAS son pruebas fiabilizadas y validadas ampliamente, los estudios realizados con ellas se hicieron en muestras de estudiantes con unas características socioeducativas muy diferentes a las nuestras, razón fundamental que anima a Auzmendi (1992) a crear un nuevo instrumento de medida que se adecue a nuestra realidad social y que contemple la consideración multidimensional de las actitudes hacia las matemáticas y hacia la estadística, recogiendo los factores más significativos.

Respecto a la selección de las dimensiones de la escala se realiza según el criterio de mayor frecuencia de aparición del factor, en una serie de escalas, curiosamente de actitudes hacia las matemáticas. Los factores escogidos son cinco (utilidad, ansiedad, confianza, agrado y motivación) y se redactan los ítems de la escala adaptando las afirmaciones de los instrumentos de mediada analizados, a cada factor.

Después de un estudio piloto, se seleccionan 40 sentencias (8 por factor) que se someten a un análisis factorial con lo que la prueba definitiva resultante consta de 25 ítems que se reparten en los 5 factores básicos que han servido de guía para la elaboración del instrumento de medida con una consistencia interna y validez elevada.

El cuestionario de actitudes hacia la estadística (SATS)

Según Schau y cols. (1995), los instrumentos de medida de las actitudes hacia la estadística, hasta ahora descritos, si quieren utilizarse de una manera óptima en docencia y en investigación, deberían tener una serie de características clave:

– Incluir los componentes más importantes de las actitudes.
– Ser aplicables con los menores cambios posibles durante todo el curso y en diferentes cursos de estadística.
– Ser cortos, para aplicarlos en poco tiempo y con ítems que midan tanto actitudes positivas como negativas.
– Habrían de explicar el desarrollo y validación de la experiencia incluyendo las orientaciones a los alumnos para una aplicación correcta.

– Finalmente el análisis de resultados debería utilizar técnicas que conformen el factor dominante (CFA).

Contemplando todas estas características, diseñaron el cuestionario de actitudes hacia la estadística SATS –Survey of Attitudes Toward Statistics- utilizando una variación de la técnica denominada de grupo nominal (NGT), Moore (1987). Los 28 ítems resultantes después de la validación por análisis factorial confirmatorio se estructuran en cuatro componentes: afectivo, competencia cognitiva, valor y dificultad, ya explicados en el apartado anterior.

Presentan dos formularios, un formulario "pre" para alumnos que no han realizado un curso de estadística y un formulario "post" que se administrará durante o al finalizar el curso.

4. Investigaciones sobre actitudes hacia la estadística

El análisis de las actitudes hacia la estadística tiene ya una cierta tradición (Carmona, 2004) y, sobre todo en las dos últimas décadas, se han elaborado un número importante de trabajos. Un análisis detallado de estas investigaciones previas aparece en Estrada (2002), complementado posteriormente por Carmona (2004) con el estudio de las evidencias basadas en la relación de las actitudes con diferentes variables externas.

Las investigaciones realizadas se han orientado fundamentalmente hacia la construcción de un instrumento de medida, explicados en el apartado anterior y entre los que destacamos el SAS de Roberts y Bilderback (1980), el ATS de Wise (1985) y el SATS de Schau, Stevens, Dauphinee y Del Vecchio (1995), por ser los cuestionarios más utilizados. Otros trabajos analizan de la influencia de diversas variables tales como el género (Harvey, Plake y Wise, 1985; Anastasiadou, 2005), el rendimiento académico (Harvey, Plake y Wise, 1985; Roberts y Reese 1987; Nasser, 2004), la experiencia formativa en matemáticas y estadística (Elmore y Vasu, 1980, 1986; Auzmendi, 1992; Mastracci 2000), el tipo de bachillerato o el área de estudios (Silva y cols., 1999; Gil Flores, 1999; Cuesta y cols. 2001).

En la literatura sobre educación estadística también encontramos como trabajo destacado la revisión de Cashin y Elmore (2000) completada por Carmona (2004) con una recopilación de la mayoría de las investigaciones sobre actitudes y ansiedad hacia la estadística y centradas fundamentalmente en las evidencias de fiabilidad y validez de los instrumentos de evaluación.

En nuestra revisión observamos que en general las investigaciones realizadas se han dirigido a estudiantes universitarios y no a los profesores, posiblemente, porque la estadística no es una materia obligatoria en su formación. Sólo los trabajos de Onwuegbuzie, (1998, 2003), los de Watson y cols.. (2003) y Nasser (1999,2004) dedican su atención a este colectivo estudiando sus actitudes juntamente con otras variables.

Así Onwuegbuzie utiliza un modelo multivariado para la predicción del rendimiento en asignaturas de Estadística. Se dedica fundamentalmente al estudio de la ansiedad y de las actitudes de los profesores, medidas estas últimas a través del ATS. Entre sus conclusiones destacamos por un lado, las correlaciones significativas entre el número de asignaturas de estadística cursadas con anterioridad y las puntuaciones en ATS-Campo y ATS-Asignatura (Onwuegbuzie, 1998). Por otro lado, al aplicar el modelo, comprueba que las actitudes y la ansiedad hacia la estadística influyen en los resultados de los cursos por lo que animan a los formadores de profesores a crear entornos de aprendizaje adecuados (cognitivos y afectivos) en sus clases para que sus alumnos puedan explorar diferentes metodologías, adquieran seguridad en sus propias capacidades para aprender y enseñar estadística y, sobre todo, valoren el importante papel que tiene esta materia en la sociedad actual (Onwuegbuzie, 2003).

Watson, Kromrey, Ferron, Lang y Hogarty, (2003) aplicaron conjuntamente el SATS y el cuestionario de ansiedad denominado STARS a una muestra de 200 graduados universitarios matriculados en Facultades de Educación. La correlación entre las puntuaciones totales del SATS y del STARS fue de -0,89. Además es uno de los pocos estudios en los que se complementan las preguntas habituales —formato de respuesta tipo Likert— con preguntas abiertas de cuyas respuestas infieren las motivaciones y causas de las actitudes de sus alumnos.

El trabajo de Huedo y cols.(2003) en nuestro país presenta la planificación y primeros resultados de una investigación con profesores en formación de la Universidad de Murcia. Se analizan los conocimientos y actitudes hacia la estadística y hacia las matemáticas contrastando los resultados con estudios previos.

Finalmente, Nasser y sus colaboradores han realizado en la última década varios estudios en los que también analizan la relación entre las actitudes o la ansiedad y el rendimiento; (Nasser, 1999; Wisenbaker, Nasser y Scott, 1999) y en Nasser (2004) es donde trata de construir un modelo estadístico para predecir las actitudes de futuros profesores en función de diferentes variables. Para ello analiza la posible relación entre las actitudes y la ansiedad hacia las matemáticas y la estadística, la aptitud matemática, la motivación y los resultados en estadística de 167 profesores en formación de lengua árabe matriculados a cursos de introducción a la estadística en Israel. En sus conclusiones se confirma la influencia de la aptitud matemática en los resultados en estadística como la más robusta y también indican que la aptitud matemática, la motivación, las actitudes hacia las matemáticas y la estadística, y la ansiedad hacia las matemáticas, explican el 36% de la varianza del rendimiento en estadística.

5. Análisis de resultados

Después de analizar las diferentes escalas de evaluación existentes en la literatura internacional decidimos utilizar para nuestro estudio el SATS de Schau y cols. (1995) como instrumento de medida de las actitudes hacia la estadística.

La principal variable dependiente de este estudio fue la actitud hacia la estadística de profesores en formación, operacionalizada a partir de la puntuación total en la escala SATS.

Asimismo, fueron variables dependientes los componentes de las actitudes, a saber: competencia cognitiva, afectiva, valor y dificultad, respectivamente operacionalizados a partir de las puntuaciones en los diferentes componentes que conforman la escala elegida. Como variables explicativas de la actitud se analizaron el género, la especialidad (dentro de los estudios de Magisterio) y el número de cursos previos realizados sobre estadística.

La muestra estuvo formada por 367 profesores en formación de la Universitat de Lleida, repartidos entre las especialidades que se imparten en el centro de Lleida (Educación Física, Musical. Infantil, Primaria, Especial y Lenguas Extranjeras). El 77% de la muestra son mujeres, entre 19 y 20 años de edad, con estudios previos de Estadística escasos, ya que la mayoría sólo la estudió como parte de un curso de Matemáticas en Bachillerato o en COU, y muy raramente en la enseñanza obligatoria.

Resultados globales del estudio con futuros profesores

Las actitudes de los futuros profesores resultaron neutras con una ligera tendencia a la positividad, como podemos deducir de los resúmenes estadísticos presentados en la Tabla 1, donde observamos que las medias obtenidas en la puntuación total y para las diferentes componentes presentan puntuaciones superiores a los valores teóricos, con desviaciones típicas, en general pequeñas, lo que asegura un buen grado de acuerdo en la respuesta.

Al comparar la puntuación tipificada de la medias con el valor teórico, la competencia cognitiva aparece como el factor más valorado, a gran distancia de los otros tres componentes, que presentan puntuaciones inferiores y poco diferenciadas entre sí. Es decir, los profesores consideran tener bastante capacidad para aprender la materia, a pesar de que el valor que le conceden no es excesivo, no les gusta demasiado y no la ven demasiado fácil.

Tabla 1. *Resúmenes estadísticos de los componentes y puntuación total*

Componente	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típica	Máximo posible	Media teórica	Puntuación tipificada (media)
Afectivo	6	29	18,67	4,17	30	15	0,88
C. cognitiva	9	30	20,47	3,57	30	15	1,53
Valor	14	43	29,60	5,03	45	25	0,91
Dificultad	11	28	20,33	3,32	35	17,5	0,85
Puntuación total	48	123	88,76	13,33	140	70	1,40

Tabla 2. Resultados en los ítems para el total de la muestra

Enunciado del ítem	1	2	3	4	5	$\bar{x}$	s
Me gusta la Estadística.	37	61	145	105	10	2,97	1,00
Me siento inseguro cuando hago problemas de Estadística.	29	111	119	84	17	2,86	1,02
No entiendo mucho la Estadística debido a mi manera de pensar.	10	51	131	127	42	3,39	0,96
Las fórmulas estadísticas son fáciles de entender.	25	107	108	115	11	2,95	1,00
La Estadística no sirve para nada.	2	24	78	164	96	3,90	0,89
La Estadística es una asignatura complicada.	23	123	109	84	20	2,87	1,02
La Estadística es un requisito en mi formación como profesional.	35	106	136	80	9	2,79	0,97
Mis habilidades estadísticas me facilitarán el acceso al mundo laboral.	35	121	139	62	9	2,70	0,94
No tengo ni idea de qué va la Estadística.	13	38	49	203	63	3,72	0,98
La Estadística no es útil para el profesional de “a pie”.	7	32	137	154	29	3,46	0,84
Me siento frustrado al hacer pruebas de Estadística.	12	53	142	132	27	3,30	0,92
Los conceptos estadísticos no se aplican fuera del trabajo.	9	38	78	189	50	3,64	0,93
Utilizo la Estadística en la vida cotidiana.	55	85	120	97	9	2,78	1,07
En las clases de Estadística estoy en tensión.	8	50	160	106	37	3,32	0,91
Disfruto en clase de Estadística.	39	76	173	64	11	2,81	0,95
Las conclusiones estadísticas raramente se dan en la vida.	2	48	102	168	44	3,56	0,89
La mayoría de la gente aprende Estadística rápidamente.	32	139	152	33	8	2,58	0,86
Aprender Estadística requiere mucha disciplina.	10	55	160	117	22	3,24	0,88
En mi profesión no usaré Estadística.	8	39	118	154	43	3,51	0,92
Cometo muchos errores matemáticos cuando hago Estadística.	19	80	131	122	13	3,08	0,95
Me da miedo la Estadística.	14	59	101	131	59	3,45	1,06
La Estadística implica mucho cálculo.	32	164	100	59	4	2,55	0,91
Puedo aprender Estadística.	3	15	40	221	86	4,02	0,76
Entiendo las formulas estadísticas.	10	67	142	137	7	3,18	0,85
La Estadística no es importante en mi vida.	6	62	154	115	28	3,27	0,89
La Estadística es muy técnica.	19	108	156	76	5	2,84	0,86
Me resulta difícil comprender los conceptos estadísticos.	16	88	125	126	9	3,07	0,93
La mayoría de la gente debe cambiar su manera de pensar para hacer Estadística.	5	46	168	114	30	3,33	0,85

En la tabla 2 presentamos los resultados referentes a cada uno de los 28 ítems de la escala, y frecuencia de cada una de las categorías (1 = muy en desacuerdo, 2 = en desacuerdo, 3 = indiferente, 4 = de acuerdo, 5 = muy de acuerdo) para el total de la muestra. Presentamos también las medias y desviaciones típicas de las puntuaciones obtenidas con el criterio anterior. Hacemos notar que los ítems que tienen un enunciado desfavorable a la actitud que tratamos de medir (por ejemplo, el ítem 2) fueron puntuados en forma inversa al calcular su media, de forma que todas las medias sean directamente comparables (una media alta indica siempre una actitud positiva). De esta manera, la puntuación total (suma de las puntuaciones de los 28 ítems) representará la actitud de cada encuestado respecto a la Estadística, que será tanto más favorable cuanto más elevada sea la puntuación.

Los ítems mejor valorados: piensan que pueden aprender (ítem 23) y que la Estadística es útil (ítem 5), corresponden a los componentes competencia cognitiva y valor, respectivamente y los peores corresponden a aspectos relacionados con la dificultad que implica el aprendizaje de la disciplina (ítems 22 y 17).

Influencia de variables

Los resultados del análisis de covarianza Tabla 3, indican que sólo el número de años de estudio tuvo un efecto estadísticamente significativo sobre la puntuación media en la escala de actitudes. No aparece influencia de género, especialidad o interacción, ni en la puntuación total ni en ítems aislados. Sin embargo aparece una ligera diferencia de puntuaciones medias entre hombres y mujeres que coincide con el trabajo de Cazorla y cols. (1998), quienes obtienen actitudes más negativa en el caso de las mujeres.

Tabla 3. *Resultados del análisis de varianza de la puntuación total en función de las variables independientes*

	Suma de cuadrados tipus III	Gl.	Media cuadràtica	F.	Sig.	Potencia observada
Años de estudio	1552,58	1	1552,58	10,10	0	0,89
Genero	502,02	1	502,02	3,26	0,07	0,44
Especialidad	1416,50	5	283,30	1,84	0,11	0,63
Interacción	458,11	5	91,62	0,60	0,7	0,22
Error	44289,68	288	153,78			
Total	2423421,00	301				
Total corregida	53418,74	300				

Calculado con alfa = 0,05

En la Tabla 4 presentamos las medias, desviaciones típicas e intervalos de confianza totales, según las variables independientes que nos ayudarán a completar el estudio.

Respecto al género, la diferencia de puntuaciones medias entre varones y mujeres, es mayor que la obtenida en el estudio exploratorio de Estrada y cols.(2004), lo que, en consecuencia, nos acerca más a los resultados de otras investigaciones anteriores que indican que la actitud hacia la Estadística es peor en el caso de las mujeres. Así mismo, de acuerdo con los resultados del análisis de varianza, la diferencia entre especialidades es de más de trece puntos, y observamos una mejor actitud en los profesores en formación de educación especial, respecto a la que presentan los de las otras especialidades, aunque en realidad, para los efectos prácticos no consideramos que la diferencia sea notable, si eliminamos los dos extremos (Infantil y Especial).

Tabla 4. Medias, desviaciones típicas e intervalos de confianza

		Media	Error	Intervalo de confianza del 95%	
				Límite inferior	Límite superior
Total		88,76	13,33	91,81	97,07
Genero	Hombre	94,44	11,03	85,30	88,80
	Mujer	87,05	13,51	87,26	90,27
Especialidad	Infantil	82,11	13,52	78,73	85,49
	Musical	89,14	11,62	86,11	92,16
	Primaria	89,22	12,05	86,28	92,16
	E. Física	91,38	14,02	87,62	95,13
	E. Especial	95,77	13,14	91,26	100,28
	L. Extranjera	87,40	12,18	81,70	93,10
Años estudio	0	83,13	8,57	79,43	86,84
	1	88,56	13,75	86,82	90,29
	2	93,43	11,42	89,17	97,70
	3	96,80	10,66	83,56	110,04

En cuanto a los años de estudio, y desde el punto de vista práctico vemos que se aprecia un cambio importante de actitud favorable a medida que se aumenta la instrucción en la materia, lo que corrobora nuestro objetivo de incidencia en los planes de estudio de las facultades de Educación y escuelas de Magisterio.

Respecto al estudio por componentes, Tabla 5, hallamos un efecto estadísticamente significativo referente al número de años de estudio en relación a tres de los componentes (utilidad, afectivo y valor), aunque no se aprecia una mejora en la dificultad percibida del tema.

Tabla 5. *Pruebas de los efectos inter-sujetos (Sólo contrastes que fueron significativos)*

Efecto	Variable dependiente	Suma de cuadrados tipus III	G.l.	Media cuadrática	F.	Sig.	Potencia observada
Años de estudio	C. afectivo	128,67	1	128,70	8,15	0,01	0,81
	C.c.cognitiu	132,84	1	132,84	11,09	0,00	0,91
	C. dificultat	65,45	1	65,45	2,68	0,10	0,37
	Comp. valor	71,27	1	71,27	6,70	0,01	0,73

Calculado con alfa = 0,05

6. Conclusiones

Nuestros resultados sugieren que la actitud de los futuros profesores respecto a la estadística presenta una ligera tendencia positiva, globalmente y en sus distintos componentes, destacando la puntuación total, así como el componente cognitivo, que sería el más valorado por los profesores en formación.

La variable género no influye en las actitudes globales, componentes o ítems aislados de las actitudes hacia la estadística de los profesores en formación, al contrario que ocurre con el número de años de estudio, donde observamos un relación directa y positiva.

Las diferencias de actitudes debidas a la especialidad en los profesores en formación no son determinantes.

Los años de estudio de Estadística tienen un efecto estadísticamente significativo tanto en lo que se refiere a la actitud global como a los componentes: de utilidad, afectivo y de valor.

Para terminar sólo añadir que a pesar de que los trabajos sobre actitudes hacia la Estadística han ido aumentando en la última década, queda camino por recorrer y es preciso fomentar la investigación en temas actitudinales pues aunque sabemos que la medida de las actitudes es una tarea difícil, pues conlleva conocer lo que realmente una persona siente y valora, la medición y evaluación de actitudes es un capitulo central, tanto para la investigación científica como para la practica educativa.

Reconocimiento: Este trabajo se desarrolla en el marco del Proyecto SEJ2007-60110/EDUC del Grupo de investigación sobre Educación Estadística.

Referencias bibliográficas

Aiken, L. R. Jr. (1974). Two scales of attitude toward mathematics. *Journal for Reseach in Mathematics Education*, 5, 67-71.

Anastasiadou, S. (2005). Affective reactions and attitudes of the last class of greek high school students towards statistics *Proceedings of CERME IV, European Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Girona: CERME.* Disponible en: http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero. Bilbao.

Bradstreat, T. E. (1996). Teaching introductory statistics course so that nonstaticians experience statistical reeasoning. *The American Statician,* 50, 69-78.

Calderhead, J. y Robson, M. (1991). Images of teaching. *Teaching & Teacher education,* 7, 1-8.

Callahan, W. J. (1971). Adolescent attitudes toward mathematics. *Mathematics Teacher*, 64, 751-755.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal,* 3 (1), 5-28. Disponible en: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ3(1)_marquez.pdf

Cashin, S.E. y Elmore, P.B. (2000). The Students Attitude Toward Statistics scale: A construct validity study. Comunicación presentada al *Annual Meeting of the Mid-Western Educational Research Association,* Chicago.

Cazorla, I. M., Silva, C. B. da, Vendramini,C. y Brito, M. R. F.(1998). Adaptaçao e validaçao de uma escala de attitudes em relaçao à Estatística. En: Actas de la *Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística* (pp. 45-58). PRESTA. Florianópolis.

Cuesta, M., Rifá, H., y Herrero, F.J. (2001). Un estudio exploratorio, en estudiantes de psicología, de una escala de actitudes hacia la estadística. *Póster presentado en el VII Congreso de Metodología de las Ciencias Sociales y de la Salud,* Madrid.

Dutton, W. (1954). Measuring attitudes toward arithmetic. *The Elementary School Journal*, 55, 24-31.

Elmore, P. B. y Vasu, E. S. (1980). Relationship between selection variables an statistics achievement. *Journal of Educational Psychology*, 72, 457-467.

Elmore, P. B. y Vasu, E. S. (1986). A model of statistics achievement using spatial ability feminist attitudes and mathematics. Related variables as prediction. *Educational and Psychological Measurement*, 46, 215-222.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Estrada, A., Batanero, C y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias,* 22 (2), 263-274.

Estrada, A. (1999). *Análisis de actitudes hacia la Estadística.* Memoria de Tercer Ciclo. Departament de Didáctica de les Matemátiques i les Ciencies Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.

Estrada, A. (2009). *Las actitudes hacia la estadística en la formación de los profesores*. Milenio. Lleida.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education.* GAISE report. American Statistical Association. On line: http://www.amstat.org/education/gaise/

Gal, I. y Garfield J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En: I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). IOS, Press, Voorburg.

Gal, I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: towards an assesment framework. *Journal of Statistics Education,* 2 (2). Disponible en: http://www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html

Gattuso, L. y Pannone, M. (2002). Teacher's training in a statistic teaching experimentation. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*, (pp. 685-692). Cape Town: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la Estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía*, 214, 567-590.

Gómez Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Narcea. Madrid.

Harvey, A.L., Plake, B.S., y Wise, S.L. (1985). The validity of six beliefs about factors related to statistics achievement. Comunicación presentada en el *Annual Meeting of the American Educational Research Association,* Chicago.

Heaton, R. (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 5, 35-59.

Huedo, T., López, J.A., Martínez, R. y Nortes, A. (2003, abril). Contenidos y actitudes en estadística: Un estudio en maestros en formación. *Proceedings of 27 Spanish National Conference of Statistics and Operational Research. Universit of Lleida. CD ROM.*

Makar, K. M. y Confrey, J. (2004). Secondary teachers' reasoning about comparing two groups. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 327-352). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Mastracci, M. (2000). *Gli aspecti emotive nell'evolution dell'apprendimento della statistica e della sua valutazione. Un caso di studio sugli studenti di SSA.* Tesis de Laurea. Universidad La Sapienza de Roma.

Mc Leod, D. B. (1988). Affective issues in Mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19, 134-140.

Mc Leod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes and emotions: new vewof affect in mathematics education. En: D. B. Mc Leod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 245-258). New York: Springer-Verlag.

Mc Leod, D. B. (1992). Reseach on affect in mathematics education: A reconceptualization*.* En: D.A. Grows (ed.). *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). Macmillam N.C.T.M. New York.

Mc Leod, D. B. (1994). Reseach on affect and mathematics learning in JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), 637-647.

Mendonça, T., Coutinho, C. y Almouloud, S. (2006). Mathematics education and statistics education: meeting points and perspectives. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* CD ROM. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Moore, C. M. (1987) *Group techniques for idea building*. Newbury Park, CA: Sage.

Nasser, F. (1999). *Prediction of college students achievement in Introductory Statistics Course.* Comunicación presentada a la 52nd ISI –International Statistical Institute- Session, Helsinki.

Nasser, F. M. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. *Journal of Statistics Education,* 12 (1). Disponible en: www.amstat.org/publications/jse/v12n1/nasser.html.

Onwuegbuzie, A.J. (1998). Teachers` attitudes toward statistics. *Psychological Reports, 83*, 1008-1010.

Onwuegbuzie, A.J. (2003). Modeling statistics achievement among graduate students. *Educational and Psychological Measurement*, 63(6), 1020-1038.

Roberts, D.M. y Bilderback, E.W. (1980). Reliability and validity of a statistics attitude survey. *Educational and Psychological Measurement,* 40, 235-238.

Roberts, D.M. y Reese, C.M. (1987). A comparison of two scales measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 47, 759-764.

Silva, C.B., Cazorla, I.M., y Brito, M.R.F. (1999). *Concepçôes e atitudes em relaçao à estatística*. Comunicación presentada a la Conferência Internacional *Experiências e Expectativas do Ensino da Estatística: Desafios para o Século XXI,* Florianópolis.

Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. y del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement,* 55 (5), 868-875.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. Jones (ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning*. Dordrecht: Kluwer.

Suydam, M. N. (1984). Research report: Attitudes toward mathematics. *Arithmetic Teacher*, 32, 12.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 305-337.

Watson, F., Kromrey, J., Ferron, J., Lang, T. y Hogarty, K. (2003). *An assessment blueprint for Encstat: A statistics anxiety intervention program*. Comunicación presentada al AERA Annual Meeting, San Diego.

Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401-405.

Wisenbaker, J., Nasser, F., y Scott, J.S. (1999, agosto). *A cross-cultural comparison of path models relating attitudes about and achievement in Introductory Statistics Courses*. Comunicación presentada a la 52nd ISI –International Statistical Institute- Session, Helsinki.

Capítulo 7
LAS GRÁFICAS ESTADÍSTICAS

Mª Candelaria Espinel F.
Universidad de La Laguna, España
Mª Teresa González A.
Universidad de Salamanca, España
Alicia Bruno C.
Universidad de La Laguna, España
Jesús Pinto S.
Universidad Autónoma del Yucatán, México

Resumen. Comunicar datos estadísticos de forma gráfica es una manera eficaz de hacer que la información llegue al ciudadano. Este trabajo recopila en primer lugar, resultados de investigaciones sobre la enseñanza aprendizaje de los gráficos estadísticos. A continuación, se presentan dos líneas de investigación realizadas con profesores de primaria, secundaria y universidad sobre este tópico. Se finaliza el capítulo con algunas reflexiones puntuales sobre la necesidad de mejora en la formación de los gráficos estadísticos.

Palabras clave: gráficos estadísticos, formación de profesores, conocimiento del profesor.

Abstract. Communicating statistical information in a graphical form is an effective way the information reaches the citizens. This work collects the results of different researches about the teaching and learning of the statistical graphs. Then, two different lines of research with primary, secondary and university teachers are described and finally we reflect about the current need for teachers' training in statistical graphs.

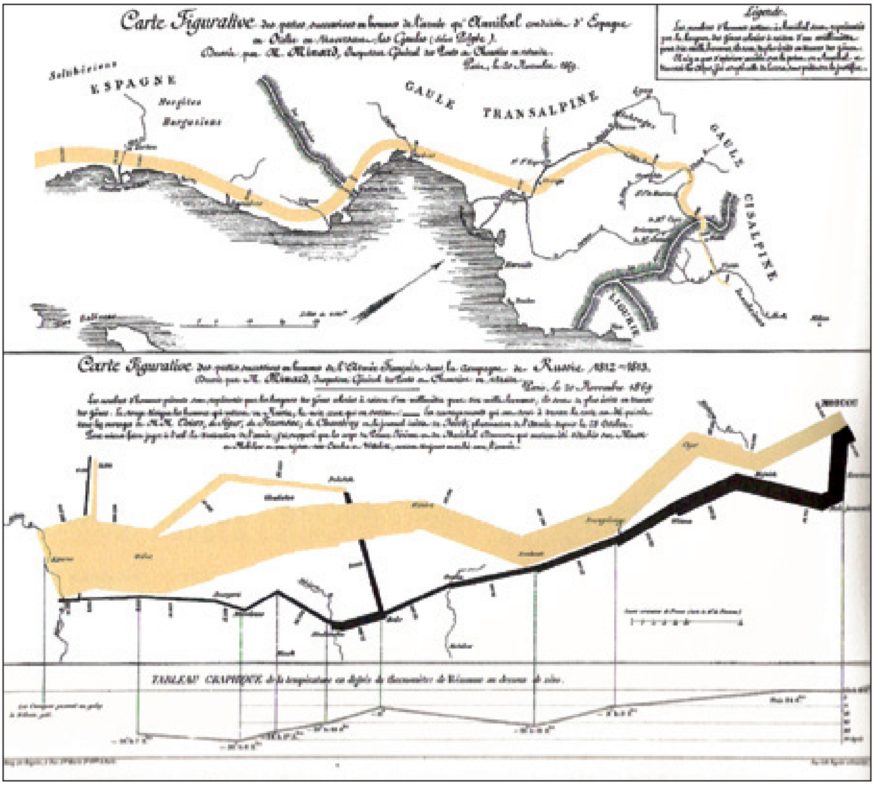
Keywords: statistical graphs, teachers' training, teachers' knowledge.

1. Introducción

Las representaciones gráficas de datos datan de 1789 dado que se atribuye al ingeniero y economista escocés Willian Playfair la invención del gráfico de barras y de sectores, además de los gráficos de línea (Wainer, 2005). Posteriormente, el ingeniero francés Charles Minard construye en 1869 un impresionante y famoso gráfico que representaba las devastadoras pérdidas del ejército durante la campaña de Napoleón en Rusia (Figura 1). Una banda ancha atraviesa Europa y va disminuyendo según el número de soldados que sobreviven, y debajo otra banda muestra la retirada, un rio negro. Es uno de los mejores gráficos producidos, casi como una pintura, muestra en una página, y de manera elocuente, la brutalidad de la situación. Del mismo modo representa el viaje de Anibal, general cartaginense, a través de los Alpes, en la Segunda Guerra Púnica, para sorprender a Roma atacando por el norte, utilizando para ello un hermoso gráfico que se recoge también en la

Figura 1. Anibal parte de España con más de 97 000 hombres, pero los rigores del viaje los reducen a 6000. Charles Minard, en 1869, describe tales hechos con la siguiente metáfora: las pérdidas humanas son como un río sobre un mapa, que se va estrechando según pasa el tiempo (Tufte, 2001).

Figura 1: Ejercito de Aníbal y Napoleón



Otras representaciones estadísticas, son inventos más recientes, como el gráfico de tallo y hojas o el gráfico de caja que propone John Tukey en 1976, como parte del Análisis Exploratorio de Datos (DEA) que él mismo promueve (Tufle, 2001).

En la sociedad tecnológica actual, los gráficos estadísticos tienen un papel esencial. Están presentes en todos los medios de comunicación e información y los encontramos en todos los ámbitos de nuestra vida: la economía, la sociedad, la política, la biología, la psicología,... Cada día, la prensa brinda una amplia variedad de gráficos estadísticos. En algunos casos los gráficos son incorrectos, lo que puede usarse para establecer un buen debate en el aula sobre ellos (ver por ejemplo, http://www.malaprensa.com/). Además la disponibilidad de programas informáticos permite que la prensa recurra a todo un abanico de gráficos, muchos de los cuales no son los gráficos cartesianos que se enseñan en las aulas. Por ejemplo, en la prensa se puede encontrar, además de los clásicos sectores circulares (que sí se enseñan en el aula), un rectángulo dividido en porcentajes, con utilidad semejante a los sectores circulares, que ocupa menos espacio. En un mundo globalizado, distribuir puntos u otros símbolos sobre mapas resulta extremadamente visual. Por ello, los círculos proporcionales, colocados sobre mapas, con área proporcional a la cantidad que representan, expresada en porcentaje, es otro caso de representación, cuya construcción ni interpretación forma parte del currículo escolar (Espinel, 2007). Los gráficos de barras presentan múltiples apariencias, en la prensa se pueden encontrar diagramas de rectángulos para variables cualitativas, rectángulos divididos o diagramas de barras con datos agrupados en intervalos, diagramas de barras compuestos,... El alumno joven difícilmente puede captar toda la información de la representación, pues suelen ser gráficos multivariantes, ya que corresponden a un conjunto de variables.

Para ser un ciudadano alfabetizado es necesario desarrollar la habilidad de leer y comprender las tablas y gráficos estadísticos así que en muchos países se introducen estos contenidos estadísticos desde la educación primaria, aunque, en general, esta habilidad no se alcanza durante la educación obligatoria (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2009).

En nuestro país, los gráficos estadísticos se incluyen desde el segundo ciclo de primaria, con los siguientes contenidos (R.D. 1513/2006 de 7 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Primaria):

- Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos.
- Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos.

Y para tercer ciclo de primaria, se señala:

- Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos.
- Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos.
- Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara.
- Obtención y utilización de información para la realización de gráficos.

Pero, ¿qué son los gráficos estadísticos y para qué se usan? Los gráficos estadísticos se pueden considerar como representaciones gráficas en las que por medio de diferentes formas geométricas o bien, números, se muestran hechos numéricos o sus relaciones con el objetivo de comunicarlos o analizarlos. Así, los gráficos estadísticos utilizan características espaciales para representar cantidades.

Un gráfico estadístico está constituido por cuatro componentes (Friel, Curcio y Bright, 2001):

- Un *marco* que proporciona información acerca de las medidas usadas y los datos medidos y que está formado por ejes, escalas, marcas,...
- Los *especificadores* que suelen ser líneas, barras u otras marcas que indican las relaciones entre los datos representados.
- Las *etiquetas* que indican el tipo de medida usada, los datos a los que se aplica esa medida o el título del gráfico.

- El *fondo* que incluye los colores, la cuadrícula e imágenes sobre el que puede ser sobre impuesto el gráfico.

A lo largo de las siguientes páginas haremos una revisión de investigaciones realizadas acerca de los procesos implicados en la enseñanza/aprendizaje de las gráficas estadísticas, fijándonos en primer lugar en lo que se ha hecho a nivel internacional y dejando para el final las investigaciones que se están realizando en nuestro país.

2. La comprensión de los gráficos estadísticos

La mayoría de las investigaciones realizadas en torno a los gráficos estadísticos se han centrado en el estudio de su comprensión que incluye aspectos relativos a su lectura, interpretación, selección, construcción o invención. La comprensión de los gráficos es una habilidad de los lectores que permite obtener información a partir de un gráfico creado por ellos mismos o por otros (Friel, Curcio y Bright, 2001). Esto involucra tres tipos de procesos: *traslación*, *interpretación* y *extrapolación/interpolación*. La *traslación* permite la traducción de una forma de representación a otra, por ejemplo de una tabla a un gráfico, de un gráfico a una descripción verbal, de un gráfico a un número o relación numérica,… La *interpretación* requiere establecer relaciones entre los datos representados para seleccionar aquellos que son relevantes frente a los que no lo son. Estas relaciones se pueden realizar entre los especificadores de un gráfico o entre un especificador y una etiqueta. La *extrapolación y la interpolación* van más allá de la interpretación y se produce al percibir las tendencias o al especificar las implicaciones a partir de los datos.

Wu (2004) en su investigación sobre comprensión gráfica en estadística con estudiantes de una escuela secundaria de Singapur define ésta en función de cuatro elementos: lectura, interpretación, construcción y evaluación de gráficos. Cada elemento cuenta con varios componentes y las habilidades que debe tener un estudiante de secundaria en cada elemento son:

- *Lectura de gráfico*: extraer los datos directamente de uno o más gráficos y generar información calculando o mostrando datos de forma explícita en uno o más gráficos
- *Interpretación de gráficos*: formular opiniones de uno o más gráficos
- *Construcción de gráficos*: presentar o editar datos en forma gráfica
- *Evaluación de gráficos*: evaluar un gráfico respecto a su exactitud y efectividad

Una visión global de estas cuatro habilidades ha sido la que han utilizado diversos autores para determinar las preguntas que pueden surgir a partir de un gráfico. Estas preguntas se han agrupado para caracterizar tres niveles de comprensión gráfica. Curcio (1987) distingue tres niveles de comprensión gráfica que han sido identificados por otros autores usando diferente terminología que son:

- *Leer los datos*: se refiere a observar lo que está representado en el gráfico, lo que implica localizar los datos necesarios y traducirlos a un lenguaje verbal.
- *Leer entre los datos*: implica realizar comparaciones o interpolaciones relacionando los datos representados.
- *Leer más allá de los datos*: significa extraer la estructura de los datos realizando predicciones e inferencias.

Posteriormente, se introduce un cuarto nivel: *Lectura por detrás de los datos* que incluye establecer conexiones entre el contexto y el gráfico que surge a partir de él, buscando los condicionantes de por qué en un momento determinado se produzcan unos datos y no otros (Shaughnessy, 2007). Por ejemplo, si los datos se refieren al número de hermanos que tienen los alumnos de una clase, se deberían relacionar los datos obtenidos con la situación económica, demográfica y social del entorno (región o país) en el momento de su nacimiento, con el objeto de dar una explicación a los datos.

Gal (2002) considera que las tres habilidades: interpretación, construcción y evaluación, constituyen una parte importante de la alfabetización estadística, ya que es la unión de dos competencias interrelacionadas: *interpretar* y *evaluar* críticamente información estadística de una amplia variedad de fuentes, y *formular* y *comunicar* una opinión razonada de esa información. Más recientemente, Aoyama (2007) analizando la interpretación que hacen los alumnos de algunos gráficos ha establecido los siguientes niveles de comprensión del gráfico:

1. *Nivel Racional/literal*: Los estudiantes leen correctamente los gráficos, interpolan, detectan tendencias y predicen. Usan las características del gráfico para responder a las cuestiones propuestas pero no critican la información y no proporcionan explicaciones alternativas.
2. *Nivel Crítico*: Los estudiantes leen el gráfico, comprenden el contexto y evalúan la fiabilidad de la información; pero no son capaces de pensar en hipótesis alternativas que expliquen la disparidad entre un gráfico y una conclusión.
3. *Nivel Hipotético*: Los estudiantes leen el gráfico, lo interpretan, evalúan la información y son capaces de crear sus propias hipótesis y modelos.

Las investigaciones sobre la comprensión e interpretación de gráficos han conducido a determinar cuáles son los componentes necesarios para desarrollar un buen *sentido gráfico* (Friel, Curcio y Bright, 2001) que se adquiere gradualmente a partir de la creación de gráficos propios y del uso de gráficos diseñados por otros, en una variedad situaciones que requieren dotar de sentido a los datos. Así, se han establecido que los comportamientos que determinan si se ha adquirido el sentido gráfico son los siguientes:

1. Reconocer los componentes de los gráficos, las interrelaciones entre esos componentes y el efecto de esos componentes en la presentación de la información en los gráficos.
2. Utilizar el lenguaje específico de los gráficos cuando se razona sobre la información desplegada en ellos.

3. Comprender las relaciones entre una tabla, un gráfico y los datos que se están analizando.
4. Responder a los diferentes niveles de preguntas asociada con la comprensión gráfico, más generalmente, interpretar información desarrollada en los gráficos.
5. Reconocer cuándo un gráfico es más útil que otro, según la tarea que se pretende realizar y el tipo de datos que hay que representar.
6. Estar seguro de las relaciones entre uno mismo y el contexto al que se refiere el gráfico, para dotar de significado a lo se ha representado en el gráfico y evitar la personalización de los datos.

A nivel internacional, en la investigación sobre formación estadística aparecen tres términos: *cultura estadística*, *razonamiento estadístico* y *pensamiento estadístico.* En todos ellos, además de otros conceptos estadísticos, están presentes las representaciones gráficas estadísticas, de un modo u otro.

En principio, estos términos no tienen un significado preciso y según sea el autor de referencia puede variar su sentido (delMas, Garfield y Ooms, 2005). Así se suele entender *cultura estadística* como la habilidad para conocer, interpretar y evaluar información estadística de tablas y gráficos. El *razonamiento estadístico* como el camino a través del cual las personas piensan y dan significado a las ideas estadísticas. Esto tiene que ver con interpretar un conjunto de datos, realizar representaciones gráficas y hacer resúmenes estadísticos. La mayoría de las veces el razonamiento estadístico combina datos y probabilidad, ya que su finalidad es realizar conclusiones e inferencias de un conjunto de datos. Para ello, se necesita conocer conceptos estadísticos como distribución, gráficas, etc., que pertenecen a la cultura estadística. La noción de *pensamiento estadístico* incluye entre sus componentes "lo que hace un estadístico". Los procesos que se incluyen en este hacer son: organizar un conjunto de datos, resolver un problema concreto, razonar siguiendo un proceso y comprobar las soluciones. Quizá lo que diferencia al *pensamiento estadístico* del *razonamiento o* la *cultura estadística* es la habilidad para ver todo el proceso holísticamente, y para explorar los datos por caminos no convencionales o académicos y, por tanto, generar nuevas preguntas de investigación no formuladas *a priori*. Un pensador estadístico es capaz de ir más allá de lo que aprende curricularmente en la enseñada reglada, pudiendo formular nuevas preguntas e investigar sobre los resultados y datos obtenidos en un contexto específico. Concretamente, para el razonamiento estadístico se considera que una de las componentes esenciales es la transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999), es decir, la comprensión de los datos a partir del cambio de representación gráfica.

3. Resultados sobre distintas investigaciones en relación con gráficos estadísticos

Se han realizado distintas investigaciones en relación a las dificultades, errores y obstáculos más frecuentes que impiden un conocimiento de las distintas gráficas, y cuyo conocimiento supone una ayuda desde la perspectiva profesional. Un estado de la cuestión sobre las investigaciones realizadas se puede encontrar en Friel, Curcio y Bright (2001) y en Shaughnessy (2007). A continuación, se resumen algunos puntos, que dichas investigaciones y otras más recientes, han aportado y que pueden mostrar al profesor la variedad de dificultades más frecuentes en relación con los gráficos.

La construcción de una gráfica lleva conceptos asociados, como contar, tablas, escala, origen, ejes, variable, independencia, dependencia, coordenadas, discreto, continúo, frecuencia, distribución. En relación con las *escalas*, el mecanismo de construcción es muy difícil, de hecho se sabe que muchos niños leen una escala, pero tienen dificultades para elegir la escala apropiada a un conjunto de datos. Las escalas deben estar presentes en ambos ejes, con suficientes divisiones y especificando el origen de coordenadas (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2009). Cada gráfico presenta unas dificultades específicas. Así, el primer gráfico que suele trabajarse es el *pictograma* con un ideógrafo para cada ítem, pero para un niño, supone cierta dificultad cuando el dibujo representa un conjunto de ítems y se agudiza cuando se representa una parte del ideógrafo. Una propuesta es seguir, en el aula de primaria, los principios que Bruner propuso en 1960. Para manejar el gráfico *tallo-hoja* hay que conocer unidades, decenas, etc., y para un niño puede suponer un problema cuando algún tallo no tiene dato o aparece el cero. Las *barras* es el gráfico más utilizado para representar datos numéricos y categóricos. La confusión entre barras e histogramas se ha constatado por distintos investigadores (Lee y Meletiou, 2003). El *histograma* es la principal herramienta gráfica para mostrar la forma de la distribución de los datos, pero necesita de muchos conocimientos previos y además presenta una gran dificultad conceptual. Es preciso tener habilidad para agrupar números y conocer el orden en los números decimales. Se sabe que los estudiantes tienen dificultades en la construcción, interpretación y en las aplicaciones de los histogramas. El *polígono de frecuencia* es fundamental para el tránsito a la curva de densidad y para observar la forma de las distribuciones de distintas variables. Los *diagramas lineales* se utilizan principalmente para mostrar cambios en el tiempo. El *gráfico de sectores* supone transformar datos en proporciones y estos en ángulos. Los conceptos de razón, proporción y la comprensión de porcentajes son fundamentales, así como la idea de aumento o disminución experimentado en el tiempo (Schield, 2006).

La idea de asociación entre variables lleva a la *nube de puntos,* y el profesor puede conectar con el modelo funcional propio de las matemáticas, permitir el ajuste visual o utilizar la tecnología. Además, sería deseable poner de manifiesto lo sensible que es la recta de regresión a los valores extremos y conociendo, la dificultad de justificar este ajuste a determinados niveles, optar por la línea mediana-mediana o recta resistente, del Análisis Exploratorio de Datos.

El *gráfico de caja* es una representación muy diferente a otras, algunos estudiantes interpretan erróneamente que cuanto mayor es la caja, mayor es el porcentaje de datos que hay en ella. La riqueza de este gráfico está en que vincula los conceptos de mediana, cuartiles, valor mínimo y máximo permitiendo comparar, por yuxtaposición, una secuencia de varias cajas para una variable que discrimine entre ellas. Las dificultades que presenta este gráfico para estudiantes de secundaria y la observación del comportamiento de algunos profesores (Pfannkuch, 2006) ha llevado a sugerir que su inclusión en el currículo se retrase más allá de la enseñanza obligatoria, y que se utilice para un inicio a la inferencia estadística.

3.1. Algunos estudios sobre el caso de los Profesores de Primaria en formación

A continuación, se resumen algunas investigaciones que se han desarrollado principalmente en el marco del Proyecto de Investigación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, Programa del Plan Nacional de I+D+I), que lleva por título: *Comprensión de las gráficas Estadísticas. Comprensión curricular y cognitiva con la recta numérica*. En el proceso de la investigación se han detectado algunas de las dificultades de estudiantes para profesores de primaria de la Universidad de la Laguna (España), en relación con algunos de los gráficos estadísticos más habituales.

La investigación que estamos desarrollando se centra, principalmente, en analizar las capacidades y dificultades de futuros docentes de primaria sobre la lectura, interpretación y construcción de determinadas gráficas estadísticas.

A partir de diferentes estudios, se han analizado de forma cuantitativa y cualitativa, los resultados sobre: 1. La interacción entre la recta numérica, escalas y gráficas estadísticas; 2. Las representaciones de series temporales y gráficos de la prensa que muestran porcentajes y variaciones. 3. La construcción de histogramas; 4. La traducciones entre distintas representaciones; 5. La lectura, interpretación y razonamiento sobre distribuciones de datos.

1. Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas cartesianas

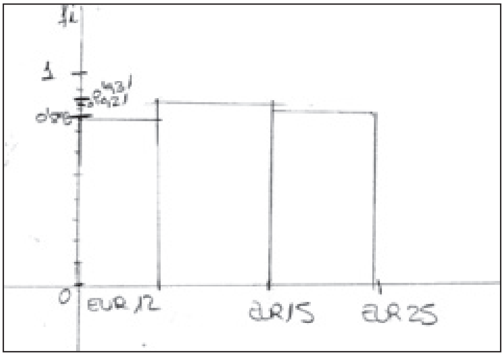
El trabajo realizado sobre cómo influye el dominio de las representaciones de los números en la recta numérica y de las escalas en la construcción de gráficos estadísticos, por parte de futuros profesores de primaria, formó parte de los estudios preliminares del citado Proyecto de Investigación. El trabajo de Friel, Curcio y Bright (2001) constituye la base de nuestra investigación en los aspectos dedicados a escalas, construcción y lectura de gráficas y elección de la gráfica apropiada.

En Bruno y Espinel (2005) se muestran los resultados de un cuestionario realizado por futuros profesores de primaria en el que se les pedía representar números en la recta, leer números de la recta y construir diagramas de barras e histogramas. De manera que se contrastó y relacionó el domino que poseían de las representaciones en la recta numérica frente a la construcción de las citadas gráficas estadísticas.

Los resultados mostraron que los estudiantes cometen determinados errores procedimentales en la construcción de los diagramas de barras para variables cualitativas y en los histogramas. Por ejemplo, hay alumnos que al construir diagramas de barras para variables discretas y cualitativas denominan las barras poniendo el nombre en el centro de la barra, y utilizan la misma técnica en el histograma, es decir, etiquetan la barra con un intervalo, sin tener en cuenta, que deben colocar los números en el lugar que les corresponde del eje de abscisas. Algunos alumnos realizan el proceso contrario, es decir, que siguiendo la técnica que han aprendido para el histograma, colocan el nombre de la modalidad en el extremo de la barra para variables discretas y cualitativas (ver figura 2).

Los resultados indican que hay alumnos que no diferencian los procedimientos de representación de los diagramas de barras para lo cualitativo y discreto frente a los histogramas para lo continuo o agrupado en intervalos. Consideramos que este problema se debe abordar a través de una enseñanza que incida explícitamente en esta diferencia.

Figura 2. Uso de una escala inadecuada y modalidades mal colocadas



Con respecto a las representaciones de los números en la recta encontramos respuestas que evidencian poco dominio de las representaciones. En general, para los estudiantes fue más fácil interpretar puntos marcados en la recta que representarlos por ellos mismos, aunque la dificultad depende del tipo de números. Algunos alumnos también mostraron dificultades con las escalas que pueden influir en la calidad de los gráficos que realizan, como se puede ver en el gráfico de la figura 2, en el que el alumno elige una escala inadecuada y apiña los números en eje de ordenadas.

Es necesario seguir indagando en cómo el conocimiento de la recta numérica puede incidir en la comprensión e interpretación de los gráficos estadísticos, y no sólo en la construcción, tal y como hemos realizado en el citado trabajo.

2. *Representaciones de series temporales y gráficos que aparecen en prensa y muestran porcentajes y variaciones*

Tomando como base el trabajo de Shaughnessy (2007) sobre la complejidad de las series temporales, hemos orientado parte de nuestra investigación a analizar las estrategias a las que recurren los futuros profesores para extraer información y para leer números en los ejes de coordenadas de series temporales, y para averiguar un incremento dado en las citadas gráficas. Parte de los resultados de este estudio se recogen en Espinel y Bruno (2009). Para ello, se preparó una prueba escrita en la que se mostró un perfil o gráfica lineal que representaba una serie temporal y se pedía a los estudiantes: leer números en el eje Y (para lo que habían de completar una escala), y averiguar un incremento analizando dicho perfil (ya sea de forma visual o con cálculos).

Los futuros profesores no mostraron dificultad en completar la escala, aunque se observó falta de procedimiento para organizar la información que les mostraba el gráfico. Las respuestas de los alumnos en esta actividad se analizaron teniendo en cuenta los niveles de Curcio (1987), encontrándose que se sitúan en los dos primeros niveles, estos se denominan “leer” y “entre”. Los resultados de este trabajo muestran que los alumnos podían “leer” la información dada en el gráfico, pero no disponían de una estrategia para “leer incrementos”. A pesar de la aparente simplicidad del gráfico temporal, hallamos que los futuros profesores no disponen de un método que les ayude a leer o interpretar cambios en el tiempo, y muchos encuentran los incrementos o decrementos en el tiempo a través de la observación visual o del uso de “regla de tres”.

La prensa, especialmente cuando los datos son sobre economía, sigue mostrando información cuantitativa mediante gráficos. Una variación, creciente o decreciente, expresada en porcentaje, forma parte del lenguaje diario. Los gráficos longitudinales permiten comparar información, estudiar tendencias, diferencia o asociaciones. Los resultados de nuestra investigación, muestran que los estudiantes para profesores cometen pocos errores en la localización de puntos en el gráfico, pero en la mayoría de los casos, no disponen de un método para comparar y evaluar cambios en un gráfico temporal. Nuestra propuesta es que, en la formación matemática del profesor, se incentive el conocimiento de razón, proporción, porcentaje y variaciones porcentuales (incremento y decremento) en contextos estadísticos.

3. Construcción de histogramas y polígonos de frecuencia

Centrándonos en los aspectos más técnicos de la construcción de gráficos estadísticos, hemos constatado numerosos errores procedimentales que cometen los estudiantes futuros profesores de primaria (Espinel, 2007 y Bruno y Espinel, 2009).

Esta orientación de nuestra investigación, sobre construcción de gráficos por parte de estudiantes para profesores de primaria muestra cómo algunos procedimientos han sido integrados erróneamente, lo cual puede llevar a que los trasmitan a sus estudiantes creyendo que son correctos.

En la investigación que hemos realizado pedimos a los futuros profesores de primaria través de una prueba escrita, que construyeran un histograma y un polígono de frecuencia a partir de unos datos organizados por intervalos, uno de los cuales tenía frecuencia nula. Los estudiantes cometieron errores en el procedimiento de construcción que se pueden clasificar en tres tipos para los histogramas: *construir el histograma con barras separadas*, *etiquetar las barras de forma incorrecta* y *omitir los intervalos de frecuencia nula*; y otros tres errores para los polígonos de frecuencia: *no unir por las marcas de clase*, *omitir el intervalo de frecuencia nula en el polígono* y *confundir la frecuencia con los intervalos*. En las figuras 3 y 4, se observan algunas de las construcciones realizadas por estudiantes universitarios.

Figura 3. Histograma con barras separada

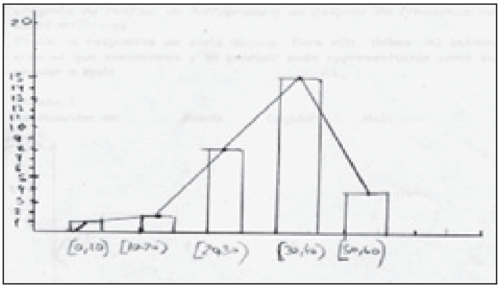
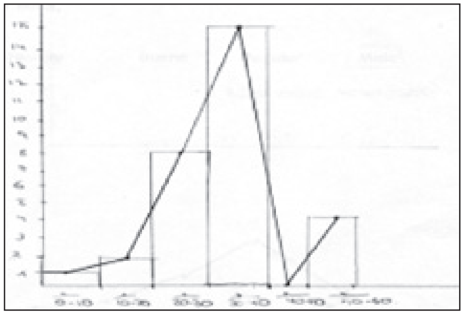
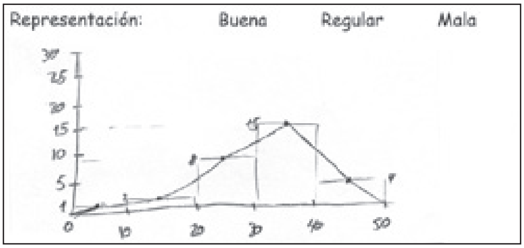


Figura 4. Incorrecta notación de los intervalos



Además, a estos estudiantes se les mostraron gráficas (que contenían errores) construidas por otros estudiantes y se les pidió que identificasen los errores que observaban. En las respuestas de algunos estudiantes encontramos coherencia entre su propia construcción de los gráficos y la evaluación que realizaron. Así, encontramos estudiantes que habían cometido errores al construir sus gráficos y los ratificaban en la evaluación que realizaban. Es el caso del alumno que realiza la representación de la figura 5, el cual comete el error de poner una *incorrecta notación en el eje de abscisas* cuando hace su construcción del histograma, y exige lo mismo a la representación que se le pide evaluar, es decir, indica que el error de la gráfica evaluada es que los intervalos deben ser las etiquetas de las barras.

Figura 5. *Representación Buena evaluada como Mala*



Otros investigadores han encontrado varios de los errores mencionados en nuestro estudio en distintos niveles educativos. En particular, Lee y Meleteu (2003) indican algunas concepciones erróneas en estudiantes de universidad que coinciden con nuestra investigación.

4. Traducciones entre distintas representaciones de datos

El propósito de esta orientación es indagar la habilidad y capacidad para traducir entre distintas formas de presentar información, esto es, pasar de un gráfico a otro, o entre otras formas de mostrar datos, para ello utilizamos el término *traducción*. Los resultados de esta línea de trabajo se recogen en las referencias: Carrión y Espinel (2005a, 2005b, 2006) y Espinel y Carrión (2008).

El procedimiento de *traducción* hace referencia al proceso de *intercambio de información entre gráficos y tablas o texto*. Este último aspecto consiste en describir los datos de una tabla en forma de texto o interpretar un gráfico a un nivel descriptivo con comentarios sobre su estructura; en nuestra investigación hemos realizado un cuestionario que consta de varios ítems, los cuales miden la capacidad de traducir entre distintas representaciones los datos estadísticos, en concreto, traducir de:

I. *texto escrito* a *gráfica*	II. *tabla* a *gráfica*
III. *gráfica* a *texto escrito*	IV. *gráfica* a *tabla*
V. *texto escrito* a *tabla*	VI. *tabla* a *texto escrito*.

El cuestionario fue contestado por alumnos de secundaria y estudiantes para profesores de primaria, antes y después de impartir el tema de estadística, en las asignaturas de matemáticas y didáctica de la matemática, respectivamente.

Los primeros resultados del cuestionario se presentaron en Carrión y Espinel (2005a; 2005b; 2006) y recogen los porcentajes de éxitos en relación a las seis traducciones consideradas. Dado que el cuestionario pretende evaluar, además de las traducciones entre tipos de gráficas, los razonamientos efectuados por los alumnos ante la elección de sus respuestas, se recurrió a analizarlos mediante la metodología de Rasch, con el objetivo de identificar estudiantes con respuestas atípicas, así como de detectar otras dificultades que nos son debidas a las distintas traducciones (Espinel y Carrión, 2008).

En la literatura existen varios antecedentes en el uso de Rasch y el conocimiento de gráficas estadísticas (Wu, 2004; Aoyama, 2007). La característica más utilizada por los investigadores, y que con más frecuencia aparece en las publicaciones de educación, es que el modelo crea un continuo en el que se localizan tanto el rendimiento del alumno como la dificultad del ítem, y una función probabilística relaciona estos componentes.

Los datos de esta investigación que se han analizado con el modelo de Rasch muestran un ajuste al modelo aceptable, y una fiabilidad promedio de las estimaciones de los ítems de .93 y de los estudiantes de .69. El análisis ha mostrado algunos ítems que desajustan y varios estudiantes con respuestas atípicas que son buenos candidatos para un posterior estudio de casos mediante entrevistas. Además, en el continuo lineal que aporta el modelo de Rasch se observa cómo la traducción *gráfica* a *texto escrito*, tiene sus ítems repartidos a lo largo del continuo lineal con distintos niveles de dificultad: fácil, medio y difícil. Así mismo, muestra cómo la traducción *texto escrito* a *gráfica*, tiene sus ítems por debajo de la media y además, dos de ellos son contestados por pocos estudiantes.

En general, las traducciones que han resultado más difíciles para todos los alumnos son aquellas en las que aparecen la gráfica *tallo-hoja* y el gráfico de *cajas*. A pesar de estar estos gráficos en el currículo de la secundaria obligatoria parece que hay estudiantes para profesores que no los conocen. Es interesante observar que el *gráfico de puntos*, que es poco frecuente, sea el que resulta más fácil a los estudiantes, quizás porque los relacionan con los gráficos de funciones.

En conclusión, el análisis mediante el modelo de Rasch nos ha permitido ilustrar algunas de las ventajas de su uso como herramienta de evaluación para un diagnóstico individual de preguntas y de casos.

5. Lectura, interpretación y razonamiento sobre distribuciones de datos

En Espinel (2007) realizamos un estudio sobre los conocimientos de determinados gráficos y de distribuciones de datos por parte de futuros profesores de primaria, que habían finalizada su formación matemática en la universidad. El objetivo a largo plazo es tener información para modificar y mejorar la enseñanza de este contenido en el futuro.

Para conocer si los estudiantes para profesores, son capaces de leer e interpretar correctamente distribuciones de datos, se utilizó una prueba sobre razonamiento estadístico, diseñada en el proyecto ARTIST (*Assessmet Resource Tools for Improving Statistical Thinking,* delMas, Garfield y Ooms, 2005), para estudiantes de "College" (primer año de universidad) de la que se seleccionaron y adaptaron algunas cuestiones que se adecuaban al currículo seguido por los estudiantes para profesores de primaria. Las preguntas de dicha prueba están relacionadas con representaciones gráficas de distribuciones de datos.

A modo de ejemplo mostramos, en la figura 6, una de las preguntas de la prueba con los resultados. En esta pregunta 4 de la prueba, los alumnos han de elegir el gráfico de cajas que se empareja con el histograma. Se considera que es una pregunta de *razonamiento estadístico*, ya que han de manejar conceptos como cuartiles o recorrido. Dos de las opciones muestran gráficos de cajas parecidos, con un valor atípico que también está en el histograma. Los alumnos tienen que fijarse en el límite inferior y en la asimetría para discernir la elección correcta, que es la B.

Los resultados que se muestra en la tabla 1, son relativamente buenos, ya que eligen la respuesta correcta, un 55,8% de alumnos del "College" y un 48,9% en el caso de los estudiantes para profesores de nuestra investigación (Maestros). Hay que señalar que la mayoría de los estudiantes para profesores en su formación previa a la universidad, están más habituados a trabajar con los histogramas que con los gráficos de cajas.

Las justificaciones que apuntan la mayoría de los estudiantes que eligen la opción correcta B, apuntan a que se fijan en la media, el valor atípico y el recorrido; y lo acompañan de comentarios del tipo "hay un vacío de 3 a 5 igual que en el histograma", "los números coinciden" o "los datos están entre 5 y 10". También hay estudiantes que afirman que a partir de los datos del histograma realizan el gráfico de cajas. La opción A, la defienden "por la simetría de la caja", "porque los números 6 y 8 aparecen en el histograma", "porque la media es 7 y la desviación l", o sencillamente, "porque los valores de los números coinciden". Los estudiantes que marcan la opción C, aportan distintas justificaciones, como que "el gráfico va de 3 a 10, igual que en la caja", "porque están los cuartiles", "porque abarca toda la pirámide", "por el recorrido 7", o "porque es la que más se parece al gráfico". En esta pregunta se produce un efecto del aprendizaje reciente del gráfico de cajas y del concepto de cuartil.

Figura 6

Pregunta 4. El siguiente gráfico muestra el número de horas que durmió ayer por la noche un grupo de estudiantes de universidad.
¿Cuál de los siguientes gráficos de caja representa los mismos datos que el histograma?

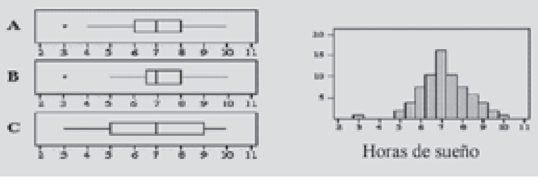


Tabla 1. Frecuencias de respuestas en la pregunta 4

Respuesta	"College"	Maestros
A	30	24,2
B	**55,8**	**48,9**
C	14,2	25,8
Blanco		1,0

El resumen de esta orientación de nuestra línea de investigación es que es necesario aprender a razonar sobre distribuciones de datos, ya que es uno de los conceptos claves en estadística, y sin embargo, los alumnos no disponen de un método para realizar dichos razonamientos. Para desarrollar este tipo de razonamiento es útil realizar actividades en las que los alumnos reconozcan y asocien patrones a variables o, también actividades en las que tengan que analizar las propiedades de las distribuciones, mediante comparaciones (utilizando medidas de tendencia central, dispersión y sesgo).

A modo de resumen

Como consecuencia de las investigaciones descritas, sugerimos que es necesario mejorar la formación de los profesores de primaria, incentivando el desarrollo de la *cultura estadística* (Gal, 2002). En nuestro trabajo hemos encontrado determinados puntos problemáticos sobre los que debemos trabajar. Por ejemplo: (a) diferenciar las gráficas de barras para variables discretas y diagramas rectángulos para cualitativas, frente al histograma para las variables continuas o agrupadas en intervalos; (b) Atender a las representaciones de datos presentes en la prensa, de manera que se aprenda a interpretar informaciones importantes como porcentajes, incrementos o decrementos; y (c) impulsar el uso de histogramas y polígonos de frecuencia para percibir la forma de las distribuciones de determinadas variables.

3.2. Investigaciones sobre el Conocimiento Didáctico de las gráficas estadísticas

El conocimiento didáctico del contenido (CDC) ha recibido, desde el trabajo pionero de Shulman (1986), un interés creciente como modelo para mejorar la formación de profesores. Graber y Tirosh (2008) caracteriza el CDC a partir de tres componentes: el conocimiento del contenido a enseñar, el conocimiento de los procesos de aprendizaje de los alumnos y el conocimiento de las representaciones instruccionales. A continuación describimos dos investigaciones centradas en estos tres componentes.

1. *Concepciones de los futuros profesores de secundaria acerca de la enseñanza de los gráficos estadísticos*

En relación con el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de Estadística en González y Pinto (2008) se trató de identificar las formas de conocimiento y las concepciones de cuatro estudiantes para profesor de matemáticas de Secundaria respecto a la enseñanza de la representación gráfica en Estadística y la relación que guarda su concepción de la matemática con la de Estadística. El trabajo de González y Pinto (2008) se basa en el estudio de dos dimensiones del conocimiento del contenido a enseñar y del conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales del CDC, respectivamente: las concepciones del tópico y las concepciones de la enseñanza y aprendizaje del tópico (ver dimensiones e indicadores del CDC en Pinto y González, 2006).

Se realizó un estudio cualitativo de cuatro casos (Ana, Carlos, Carmen y Diego) utilizando, por un lado, la metodología de Llinares (2000) y Sánchez y Llinares (2003) relativa a la clasificación de problemas por parte de los futuros profesores, y por otro los niveles cognitivos de representación gráfica de Curcio (1987) y Friel, Curcio y Bright (2001). La investigación se realizó en tres fases en las que los futuros profesores tenían que: 1) clasificar 20 problemas de representación gráfica seleccionados de diferentes libros de textos de Educación Secundaria que incluían diferentes gráficos (histogramas, sector circular, barras, tallo y hoja) y cuyas preguntas se clasificaron según los diferentes niveles cognitivos de Curcio (1987); 2) realizar un análisis específico de cinco problemas de representación gráfica, seleccionados entre los 20 anteriores con el propósito de explorar las razones por las que se debería incluir cada problema para enseñar la representación gráfica, qué significado le dan a cada problema, cómo enseñarían la representación gráfica a partir de ellos y cómo ayudarían a sus estudiantes a que aprendan; y, finalmente, 3) una entrevista individual semi-estructurada, con el propósito de profundizar en las respuestas dadas por los futuros profesores, así como obtener información sobre su formación matemática y su concepción de la matemática y su enseñanza.

Entre los resultados se observó que la enseñanza es percibida por estos alumnos de manera similar a la expresada por Sánchez y Llinares (2003) como transmisión de contenidos, manejo de instrumentos útiles y como comunicación, de forma que el aprendizaje, aunque requiera esfuerzo personal, también está ligado a una buena transmisión por parte del profesor o la satisfacción personal del estudiante. En el siguiente extracto se puede observar la valoración de Carmen, que es similar a la de los otros tres casos:

> *Cm: Sobre todo que sepan explicar bien, porque como no se sepa explicar, yo creo que desconectas, y ya no, pierdes el interés por lo que está haciendo*
> *Cm:…es también cuando te saben dar la regla y te lo aplican a cualquier cosa*

Los cuatro valoran la utilidad de la estadística en contextos sociales y la necesidad de que la formación en Estadística esté centrada en la resolución de problemas. Así, Ana y Diego señalan en relación con la enseñanza de la Estadística comparándola con la enseñanza de otras partes de la matemática:

> *A: Pues pondría más ejemplos y lo intentaría hacer de una forma mucho más práctica porque creo que lo entenderían mejor, que no fórmula, tabla, distribuciones ¿no? Pues, intentaría llevar cosas a clase…, no sé de una forma un poco más práctica.*
> *D: si haces bastantes ejercicios y explicas bien los conceptos, la mayoría de los alumnos van a superar ese nivel [se refiere a la educación secundaria], no me parece difícil de explicar… En secundaria está muy bien porque le das una herramienta matemática para que sepan valorar desde otro punto de vista, pues gráficos que pueden encontrar en cualquier periódico ¿no?*

Aunque consideran que las situaciones deben estar contextualizados, mantienen sus reservas acerca de algunas situaciones, por ejemplo, no pondrían situaciones sobre el número de suspensos de una clase porque tiene un carácter negativo, o sobre los residuos urbanos porque “no sólo tienen un sentido negativo sino que no aporta nada al aprendizaje de las matemáticas” y de política “no se debe hablar en clase”.

No obstante, aunque los futuros profesores consideran a la Estadística como una parte de las matemáticas que es fácil de aprender, no son capaces de percibir dificultades asociadas con su aprendizaje, mostraron un conocimiento precario de la estadística y un escaso o nulo conocimiento sobre las representaciones gráficas. Así, Carlos explica en relación con un gráfico de tallo y hojas en el que se pedía a los alumnos que comparan la media y la mediana:

> *C: A mí lo que me sugiere una representación de tallo y hojas es montar luego una tabla de frecuencias o cualquier cosa…*
> *E: Bueno, aquí, en esta pregunta, se les dice a los alumnos, sin hacer ningún cálculo di si la media es mayor, menor o igual que la mediana ¿cómo crees tú que podrían hacer eso los alumnos?*
> *C: Sí, o sea, se puede hacer directamente contando [se refiere a la mediana], y la media, poco más o menos,…, porque contando se puede determinar cuál es la mediana y viendo la cantidad de ceros que hay se va a ver que la media es muy baja, …*

No se da cuenta de que los ceros que aparecen en las hojas corresponden a un tallo, y ese tallo es el que no está teniendo en cuenta para valorar si la media es mayor, menor o igual que la mediana. De hecho, en el caso de este ejercicio, la media era bastante mayor que la mediana. Diego, insiste en este papel de los ceros y dice "aquí números con ceros a la izquierda no aportan nada, ni en el aprendizaje ni para resolver el ejercicio."

Desconocen los diferentes niveles cognitivos de Curcio (1987) asociados a la representación gráfica y de varios componentes y procesos en su interpretación. Para enseñar los gráficos estadísticos, de acuerdo a su concepción, hay que seguir diferentes fases relacionadas con: la construcción de gráficos, la interpretación de gráficos (que para ellos es simplemente una lectura del gráfico) y la aplicación de algoritmos y fórmulas. Se concluye, por tanto, que los futuros profesores necesitan una formación específica sobre diferentes representaciones gráficas, sus características, dificultades y valor en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

2. *Conocimiento didáctico del contenido de profesores universitarios*

En Pinto y González (2008) se presenta un estudio del CDC de un profesor universitario de Estadística sobre el tema de la representación gráfica, que se originó a partir seis focos-problema: a) la prevalencia de una enseñanza de la Estadística basada en el cálculo, b) la falta o insuficiencia de libros de texto o materiales didácticos en castellano basada en los nuevos estándares de la enseñanza de la Estadística, c) las conclusiones de algunos estudios que demuestran el uso incorrecto de la Estadística por parte de los profesores, d) la falta de contextualización de la Estadística en la formación de alumnos, e) un conocimiento muy superficial de la Estadística, tanto por parte de los alumnos como de los profesores y f) la falta de investigación específica orientada sobre la educación y desarrollo profesional de profesor universitario para enseñar Estadística y más concretamente centrada en el CDC.

Estos seis elementos justifican la necesidad de investigar sobre el conocimiento que tiene el profesor de las estrategias específicas de enseñanza y su aplicación cuando imparte clases, sobre el uso y selección de libros y ejercicios, sobre el origen y formas de usar el contenido estadístico en sus clases, la forma como contextualiza la enseñanza a alumnos con características e intereses diferentes a los matemáticos y la amplitud (en tiempo y profundidad) de la Estadística como programa de estudios, su concepción sobre el contenido estadístico y sobre su enseñanza–aprendizaje, así como su conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales y del estudiante. Es decir, el conocimiento didáctico del contenido que tiene sobre el contenido estadístico, particularmente de la representación gráfica.

El objetivo de este estudió se centró en identificar y comprender qué conoce el profesor sobre las estrategias y representaciones instruccionales de la representación gráfica y cómo este conocimiento se transforma en el salón de clases en conocimiento enseñable, tratar de comprender cómo utilizan estas representaciones y explicar cuál es su origen.

Desde una aproximación multi-método, se realizó un estudio de caso desde la perspectiva cualitativa. Se trata de una profesora universitaria novel (Alicia) cuya formación es matemática y que enseñan la asignatura de Estadística a estudiantes de Educación.

Los métodos de recogida de datos incluyeron diferentes técnicas: a) entrevista contextual y biográfica, b) entrevista sobre la planeación de las clases sobre representación gráfica, c) cuestionario didáctico sobre representación gráfica, d) entrevista en profundidad respecto de las respuestas al cuestionario, e) análisis de materiales para la enseñanza de la representación gráfica (por ejemplo, notas de curso, ejercicios, exámenes, programa de curso, libros de textos, libretas de los estudiantes). Las entrevistas fueron grabadas y transcritas en su totalidad para posteriormente ser analizadas. La utilización de estos diferentes instrumentos aseguró la triangulación.

La construcción del cuestionario didáctico sobre representación gráfica, consistió en cuatro situaciones hipotéticas de enseñanza – aprendizaje (casos) de la representación gráfica, específicamente del tallo y hoja, histograma, barras y pictograma, respectivamente. Los casos fueron construidos a partir de situaciones donde el estudiante debía identificar errores conceptuales en la construcción e interpretación del gráfico, así como seleccionar, criticar, evaluar y resolver problemas sobre la escritura, interpretación y comunicación de los resultados a partir del gráfico. El diseño del cuestionario siguió las siguientes fases: 1) definición de los objetivos de aprendizaje de la representación gráfica a nivel de pensamiento estadístico, 2) identificación y elaboración de una base de 66 ítems que miden la representación gráfica en diferentes niveles cognitivos, 3) construcción y administración de un cuestionario dirigido a alumnos para explorar errores, concepciones y dificultades conceptuales sobre la representación gráfica, 4) identificación, organización y clasificación del tipo de preguntas dirigidas al profesor para explorar el CDC según el SDI, 5) construcción de la versión preliminar del cuestionario, 6) validación del cuestionario con base en el programa del curso, la literatura, la opinión de varios especialistas y una prueba piloto que se pasó a profesores de Estadística.

A continuación presentamos los resultados referentes a la concepción de esa profesora sobre la representación gráfica (Pinto y González, 2008), así como el conocimiento que tiene sobre el currículo y las estrategias específicas que utiliza para enseñarla. Esta profesora tiene una concepción dogmático-conservadora de la matemática que incide en su manera de enseñar Estadística, basada en el enfoque transmisivo, rígido y bajo una estructura jerárquica de los contenidos. En cuanto a las representaciones gráficas se centra en su construcción y la realización de cálculos estadísticos, y no trata la interpretación y análisis de éstos como se ve en el siguiente extracto de su entrevista:

> *E: ¿trabajas alguna actividad en tus clases para hacer que el estudiante comprenda este aspecto de la interpretación, de la toma de decisiones a partir de un gráfico, de la escritura de esa interpretación? (C-3)*
> *A: Básicamente es la definición, algunos ejemplos y algunas características por ejemplo, que el tipo de variable, de información, pero no profundizo tanto.*

Las estrategias específicas que utiliza son: la explicación con interrogatorio así, cuando después de explicarles un determinado gráfico a través de un ejemplo les hace preguntas como: "¿cuál es la variable a estudiar?" "¿qué tan precisos quieren ser con sus gráficos?". También en el aula plantea la resolución de ejercicios a través de grupos pequeños, con contadas aplicaciones al contexto de Educación, lo que queda reflejado en descripciones como:

> *A: Hicieron algunos ejercicios en clase en donde tenían que hacer, desde sus distribuciones de frecuencias, luego algunas gráficas, manejamos histogramas, mmm... algunos pictogramas. Entonces les pedí ejercicios en donde les daba algunos datos y tuvieran que hacer sus distribuciones y sus gráficas.*

Se ha constatado una ausencia de reflexión que tiene la profesora sobre las concepciones, errores y dificultades de los estudiantes.

> *A: .. Lo que me llamó la atención es que por lo general no te pones a pensar si realmente ya entendieron el gráfico, como que al menos en mi caso doy por sentado de que sí lo entendieron, de que sí saben de qué se trata un histograma*

Asimismo, a partir de este estudio, se confirmó la representación gráfica no se trabaja a nivel de pensamiento estadístico, no sólo por la falta de estrategias de la profesora sino debido fundamentalmente al currículo escolar que busca sólo revisar los gráficos más usuales para la presentación de resultados de investigación.

Como conclusión se puede establecer la necesidad de investigar el CDC de los profesores noveles que enseñan en contextos diferentes a las matemáticas ya que arroja luz acerca del pensamiento del profesor así como del origen y naturaleza del CDC que tienen acerca de la representación gráfica en Estadística. Además debería realizarse una revisión y adecuación de los programas de Estadística del nivel universitario.

4. Discusión y conclusiones

Hoy las representaciones gráficas son una de las herramientas matemáticas más valoradas para utilizar por científicos, economistas, gobierno, industria y comercio... Por ello, todos los alumnos deberían recibir alguna preparación para trabajar con gráficos. El ciudadano que no es capaz de leer un grafico es un miembro de la sociedad que vive en desventaja.

Behar y Grima (2001), en su artículo "Mil y una dimensiones del aprendizaje de la estadística" (*Estadística Española*, 43, 148, 189-207), señalan que la enseñanza básica de la estadística debe fomentar las siguientes competencias:

– La habilidad para ligar la estadística con situaciones del mundo real.
– Los conocimientos de los conceptos básicos de estadística.
– La habilidad para sintetizar los componentes de un estudio estadístico.
– La capacidad para comunicar los resultados de una manera clara.

En esta misma línea, estadísticos como David Moore (1998) reflejan en sus textos, como el titulado "Estadística Básica", que los alumnos deben desarrollar un sentido de la información cuantitativa al usar gráficos y como se ha de incidir en la formación de profesorado (Moore, 2005).

En general, el recurso más utilizado por el profesorado son los *libros de texto*, si bien, los ejercicios que éstos proponen se refieren a la construcción y lectura de gráficos para aplicar los conocimientos técnicos y, a veces, sin presentarlos en un contexto determinado. La estadística es inseparable de las aplicaciones, por lo que un recurso es el trabajo con proyectos, donde el alumno pase, a ser posible, por las distintas fases: plantear el problema, recoger, organizar y analizar los datos, y extraer conclusiones o elaborar un informe, en relación al problema planteado. Este recurso es ya habitual, y se llegan a organizar competiciones (un ejemplo: http://www.sinewton.org/concursoistac). El trabajo con *proyectos* incentiva el razonamiento estadístico en las cinco componentes del modelo de Wild y Pfannkuck (1999): Reconocer la necesidad de los datos, transnumeración, percepción de la variabilidad, razonamiento con modelos matemáticos y la integración de la estadística y el contexto. De ellas, hemos resaltados la transnumeración, en dos sentidos, como el paso de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer información de los mismos, y como comunicación de esta información de forma que sea comprensible para otros.

El profesor ha de tener habilidad para secuenciar el conocimiento que se ha de enseñar y realizar la *adaptación a distintos niveles*. Encontrar una forma de secuenciar el aprendizaje de los distintos tipos de gráficos, describir cuáles son los más adecuados de acuerdo a la edad y sugerir el tipo de preguntas para una mejor comprensión de los gráficos (Friel, Curcio y Bright, 2001).

El conocimiento profesional también implica saber elegir la gráfica apropiada. Hay que concienciar al profesor de la importancia de una gráfica cuidada y con cualidades estéticas, así como de los posibles sesgos que, voluntaria o involuntariamente se pueden trasmitir, principalmente cuando se elige la escala. Conocer algunas cuestiones de *percepción* puede ser una ayuda, por ejemplo, los porcentajes se perciben mejor si tienen un marco de referencia. También, sería deseable que el profesor conozca los engaños y trucos que a veces aparecen en la prensa, mostrando algunos "malos gráficos".

El profesor debería dominar una bolsa de *ejemplos* que le permitan enseñar los contenidos deseados. Así, en primaria, el niño quiere poder identificarse en el gráfico, por ello se debe recurrir a: Gustos (helados, yogurt, comidas, animales domésticos, deportes preferidos, música, tiempo libre), Cuerpo (número calzado, estatura, mes de nacimiento, color de pelo), Familia (marca de coche, revistas o periódicos, casa), Deportes (longitud de salto, maratón en metros, maratón en vueltas), Sociales (número de habitantes de poblaciones cercanas, pirámides de población, periódicos). Entre 12 y 16 años, el joven forma parte de un grupo, por ello, los temas objeto de análisis pueden ser: Aficiones (música, cine, moda, deportes) y datos tomados de otras disciplinas como Ciencias de la Naturaleza, Educación Física, Geografía, Historia, Ciencias Sociales.

El profesor ha de disponer de *herramientas didácticas* que le faciliten su trabajo. Las estrategias y remedios para que sus alumnos superen dificultades pueden ser muy variadas. Una de las posibles estrategias es utilizar metáforas o analogías. Otra estrategia pedagógica son los gráficos que aparecen en la prensa, que pueden ser excelentes para motivar a los alumnos en el contexto escolar. Se ha encontrando que muchos profesores no tenían conocimientos matemáticos suficientes para llevar a cabo dicha lectura (Monteiro y Ainley, 2007), así que sería deseable que en la formación de profesores se incentive la lectura y discusión crítica de gráficos tomados de la prensa diaria, en especial de los gráficos tendenciosos.

El profesor debe saber localizar servidores útiles para encontrar conjuntos de datos, como pueden ser los institutos de estadística de su región o país. Disponer de bases de datos es fundamental para cambiar el enfoque expositivo en la clase de estadística y reforzar el trabajo práctico, donde se incremente la capacidad argumentativa, la comprensión de diferentes representaciones y el cambio de una representación a otra. También el profesor ha de saber generar datos, que le permita el estudio de interrelaciones entre variables, como por ejemplo tomar de sus alumnos las siguientes cuatro variables: número de calzado (variable discreta), sexo (dicotómica), estatura en centímetros (variable continua), deporte o música preferida (variable cualitativa).

Varias agencias de estadística de las comunidades autónomas en España han abierto páginas de Internet donde se intenta promover la educación estadística en los niños y jóvenes. Un ejemplo es Comunidad del País Vaco y Galicia, además de la página, ya citada del Instituto Canario de Estadística (ISTAC) en colaboración con la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton".

Otra opción es el uso de *applets*, que el profesor debería estar capacitado para evaluar. Otros recursos didácticos específicos son las revistas, como Teaching Statistics, dirigida a profesores; o las páginas Web (www.cbs.nl/isi/iase.htm) de IASE (International Association for Statistical Education) y en particular el material de los ICOTS (International Conference on Teaching of Statistics), con temas específicos sobre educación estadística.

Reconocimiento: Parte de este trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, Programa del Plan Nacional de I+D+I).

Referencias bibliográficas

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education 2* (3). Disponible en: http://www.iejme/

Batanero, C., Arteaga, P., & Ruiz, B. (2009). Statistical graphs produced by prospective teachers in comparing two distributions. *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*, Lyon, 2009.

Bruno, A., & Espinel, M.C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática VII*, 57-85.

Bruno, A., & Espinel, M.C. (2009). Construction and evaluation of histograms teacher training. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 40, 4, 473-493.

Carrión, J. C., & Espinel, M. C. (2005a). Aptitudes and difficulties of 10 to 12 years old students when translating information between different types of statistical representations. Proceedings of the *55 th Session of the International Statistical Institute*. Sydney. Australia.

Disponible en: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Carrión, J. C., & Espinel, M. C. (2005b). Gráficas estadísticas: comprensión e implicaciones en la enseñanza. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática VII*, 183-196.

Carrión, J.C., & Espinel, M.C. (2006). An investigation about translation and interpretation of statistical graphs and tables by students of primary educations. ICOTS-7. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~**iase**/publications/17/C332

Curcio, F.R. (1987) Comprehension of mathematical relationships experienced in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 382-393.

delMas, R., Garfield, J., & Ooms, A. (2005). Using assessment items to study students´ difficulty reading and interpreting graphical representations of distributions. *Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy. University of Auckland*. Disponible en: https://app.gen.umn.edu/artist/articles/SRTL4_ARTIST.pdf

Espinel, M. C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Actas XI SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática), 99-119.* La Laguna. Tenerife. España.

Espinel, M.C., & Bruno, A. (2009). Una expèriencia con gráficas estadísticas temporales en la formación de profesores de primaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática IX* (pendiente publicación).

Espinel, M. C., & Carrión, J.C. (2008). Análisis de un cuestionario mediante el modelo de Rasch para medir la capacidad de traducción entre distintas representaciones de datos estadísticos. *IUDE Documento de Trabajo*. Serie Estudios N 2008/75. Instituto Universitario de la Empresa. Universidad de La Laguna. Disponible en: http://webpages.ull.es/users/iude/investigacion/publicaciones/pdf_docs_trabajo/200873.pdf

Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education 32*(2), 124-158.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review 70*(1), 1-25.

González, M.T., & Pinto, J. (2008) Conceptions of four preservice teachers on graphical representation. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (2008). *Proceedings of the Joint ICMI /IASE Study eaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education.* Monterrey, México: ICMI e IASE. CD ROM. Disponible en: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/

Graeber, A., & Tirosh, B. (2008). Pedagogical content knowledge: useful concept or elusive notion. In P. Sullivan & T. Wood (eds.) *The International Handbook of mathematics teacher education. Vol 1 Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. (pp. 117-132). Rotterdam: Sense Publishers.

Lee, C., & Meletiou, M. (2003): "Some difficulties of learning histograms in introductory statistics". *Joint Statistical Meetings- Section on Statistical Education.* Disponible en: http://www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf

Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional knowledge: a case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: theory and practice*, 6 (1), 41-62.

Monteiro, C., & Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 2 (3), 188-207. Disponible en: http://www.iejme/.

Moore, D. (1998). *Estadística Aplicada Básica.* Barcelona: Antoni Bosch editorial D.L.

Moore, D. (2005). Preparing Graduate Students to Teach Statistics: Introductions*. American Statistical Associations*, 59, 1, 1-3.

Pfannkuch, M. (2006). Comparing box distributions: A teacher´s reasoning. *Statistics Educations Research Journal*, 5, 2, 27-45. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/serj

Pinto, J., & González, M.T. (2006) Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento de contenido pedagógico en matemáticas. Una aproximación para su estudio. *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 237-255.

Pinto, J., & González, M.T. (2008). Pedagogical content knowledge of a novel teacher: a case from the teaching of graphical representation. *ICME11*. Disponible en: http://tsg.icme11.org/document/get/477

Sánchez, M.V., & Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teachers Education* 6, 5-25

Schield, M. (2006). Statistical literacy survey results: Reading graphs and tables of rates percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistic learning and reasoning. In F. K. Lester (Ed*.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Greenwich, CT. NCTM, 957-1049.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *15* (2), 4-14.

Tufle, E. R. (2001). *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, CT: Graphics Press.

Wainer, H. (2005). *Graphical Presentation of Longitudinal Data.* Encyclopedia of Statistics in Behavioral Science. John Wiley &Sons, Ltf.
Disponible en: http://www.wiley.com/legacy/wileychi/eosbs/pdfs/bsa261.pdf

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review 67* (3), 223-265.

Wu, Y. (2004). Singapore secondary school students' understanding of statistical graphs, *ICME 10*.
Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/11/Yingkang.doc

Capítulo 8
LA SIMULACIÓN COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

Luis Serrano R., Juan J. Ortiz, Jesús D. Rodríguez
Universidad de Granada

Resumen. Presentamos un análisis exploratorio de las intuiciones que estudiantes de educación secundaria tienen sobre sucesiones aleatorias, analizamos las intuiciones de los sujetos sobre sucesiones aleatorias, desde la concepción frecuencial e intentamos determinar la posible influencia que la simulación puede tener en sus intuiciones previas. Como recurso didáctico para simular procesos aleatorios elementales (ensayos de Bernoulli) se ha utilizado un applet disponible en Internet.

Palabras clave. Enseñanza de la probabilidad, uso de la simulación.

Abstract. We present an exploratory analysis of the secondary students´ intuitions on random sequences, we discuss these subjects´ intuitions on randomized succession, from the design frequency and try to determine the possible influence that the simulation may have on their previous intuitions. As a teaching resource to simulate elementary random processes (Bernoulli´ trials) an applet available on the Internet has been used.

Keywords: Teaching of probability, using the simulation.

1. Introducción

A diario miles de profesores y de alumnos se enfrentan con la enseñanza o aprendizaje de la probabilidad y de hechos aleatorios, muchos profesores piensan que el comienzo de ese camino está en la introducción a este mundo con situaciones prácticas, con juegos de azar equitativos, aunque esta opción también es en sí misma difícil y no tan primaria como se supone. La causalidad y el pensamiento lógico es mucho más claro que el azar, aunque éste es una realidad y esta realidad justifica su presencia en los currículos actuales por ser un medio significativo de aplicar ideas matemáticas en situaciones reales a diferencia de otras ramas de las matemáticas donde la aplicación a la realidad es más directa o intuitiva.

El concepto de probabilidad no es ni natural ni intuitivo, sino que es fruto de una difícil reflexión y de un contraste con la realidad (Engel, 1971). Además este concepto de probabilidad tiene múltiples significados, cada uno de los cuáles puede ser más apropiado en determinadas circunstancias y que no excluye a los demás, así puede entenderse como cociente entre casos favorables y posibles, límite de la frecuencia, grado de certeza lógico, propensión, o creencia subjetiva en la posibilidad de ocurrencia de un suceso (Borovnick y Peard, 1996; Batanero, Henry y Parzysz, 2005), lo que redunda en su complejidad de conceptualización.

También hemos de tener en cuenta que en esta conceptualización podemos encontrarnos con dificultades previas o predisposiciones que predeterminan una tendencia en el razonamiento estocástico. En este campo la investigación es extensa, principalmente en temas asociados a las heurísticas y sesgos en este razonamiento: Kahneman et al. (1982), Tversky y Kahneman, (1982), o las investigaciones de Konold (1989 y 1991) sobre el enfoque en el resultado, indicando que los estudiantes consideraban que un resultado previo en un prueba aleatoria podía influir en sus enfoques predictivos; consideran que es más probable sacar cruz después obtener de varia caras en una secuencia de lanzamientos de monedas, enfoque este que influye en varios aspectos del razonamiento de los alumnos, como el concepto de probabilidad y de independencia.

Por otro lado el desarrollo histórico reciente de la estocástica sugiere y explica la mayor dificultad que ésta tiene en su enseñanza y en su aprendizaje si se compara con otras partes de las matemáticas escolares (Hacking, 1975), todo ello ha hecho que desde distintas instancias se proponga un cambio de metodología en su enseñanza, propiciando un cambio en las concepciones curriculares. Las consecuencias de la tendencia a organizar la enseñanza de la probabilidad según la teoría, "son mucho peores que en otras ramas de la enseñanza de las matemáticas, ya que el conocimiento estocástico tiene un carácter teórico especial" Steinbring (1991).

Hawkins (1990) sugiere que la formación estocástica no puede reducirse a aprender unas estructuras conceptuales y unas herramientas para la resolución de problemas; también se deben desarrollar razonamientos y un robusto sistema de intuiciones correctas en los alumnos.

La estructura axiomática de Kolmogorov no refleja la complejidad de las ideas estocásticas, por lo que se proponen nuevos diseños curriculares donde la formalización de estos conceptos sea precedida de una aproximación intuitiva a la idea de azar y de probabilidad con la realización de experiencias aleatorias reales o simuladas basándose en el estudio de las frecuencias relativas para que sirva de soporte de una enseñanza formal, cambiando la presentación axiomática la teoría de las probabilidades y la asignación de probabilidades que se basa en la regla de Laplace y en el cálculo combinatorio.

Shaughnessy (1992) abogó por investigar sobre la comprensión de la estocástica en los docentes, sobre el conocimiento de la probabilidad y sobre proyectos para el desarrollo del conocimiento de la estocástica como dominio de contenidos en los profesores y su eficacia didáctica, pero esta investigación hasta ahora ha sido escasa o dificultosa.

Con la intención de contribuir a este posible cambio de metodología hemos iniciado un estudio exploratorio para identificar posibles intuiciones (en el sentido de Fischbein, 1987), de los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria, sobre secuencias de resultados de un experimento aleatorio en su versión más simple la de ensayos de Bernoulli. Pretendemos con ello ampliar los realizados en investigaciones previas (Serrano 1993, 1996; Batanero y Serrano, 1996; El Bothouri, 2003), con la novedad de observar estas intuiciones a partir de una actividad de simulación con ordenador. Completamos también de este modo la poca información de investigaciones sobre el uso de herramientas informáticas en el aula para la enseñanza de la estocástica (Mills, 2002), escasez que contrasta con la idea generalmente aceptada de que la simulación física y por ordenador se complementan para dar lugar a estrategias didácticas efectivas que aumentan la comprensión del estudiante, siendo la simulación por ordenador la que más potencia ofrece.

La modelización de situaciones concretas es un paso obligatorio en el aprendizaje del conocimiento científico y además en la enseñanza de la probabilidad puede ser un poderoso instrumento. Por lo tanto en la enseñanza de la estocástica debe incorporarse la modelización como herramienta. Heitele (1975) incluye la simulación entre su lista de ideas estocásticas fundamentales. La simulación podría ser usada como un modelo pseudoconcreto en diferentes situaciones reales y ofrece la posibilidad de trabajar sin los formalismos matemáticos cuando se analizan situaciones aleatorias. La simulación actúa como intermediaria entre la realidad y el modelo matemático, como herramienta matemática puede servir para mejorar las intuiciones probabilísticas de los estudiantes, para enseñar los diferentes pasos en el trabajo de la modelización y para ayudar a discriminar entre modelo y realidad.

2. Descripción de la muestra y del test de entrevista

Para detectar los planteamientos prácticos en situaciones de simulación de sucesos aleatorios preparamos el test que describiremos más adelante y que se pasaron a un grupo de cuarenta y cinco alumnos de 3º de Educación Secundaria, con una distribución de treinta alumnas y quince alumnos, todos del mismo centro que nombraremos como JAPF, pertenecientes a dos grupos (A y B) de un nivel socio-cultural medio-bajo y homogéneo de la ciudad de Melilla. La edad de estos alumnos es de 14-15 años. El motivo por el que se eligió a estos dos grupos para obtener una muestra de forma aleatoria fue la facilidad de acceso a los mismos, ya que eran grupos a los que se impartía clases, y la posibilidad de utilizar del aula de informática del centro. Tomamos esta muestra de modo intencional, con el objeto de contrastar el análisis de concepciones y de resultados sin simulación y con simulación.

El grupo de A estaba formado por 23 alumnos con nivel de conocimientos medio-alto, la nota media en la asignatura de matemáticas era de notable, con buenos hábitos de estudio, interesados en la materia y solamente tres alumnos no habían superado las matemáticas del curso anterior.

El grupo de B estaba formado por 22 alumnos con características parecidas al anterior, aunque el número de alumnos con bajo interés por el aprendizaje es superior que el grupo A, habiendo mayor número de sujetos con asignaturas no aprobadas de curso anterior, siendo la nota media de bien en la asignatura de matemáticas de este grupo.

La fase experimental de nuestro estudio se llevó a cabo con el test que constan de una serie de cuestiones a contestar por el alumno, simulando situaciones aleatorias mediante el applet llamado Box Model del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), en adelante BM.

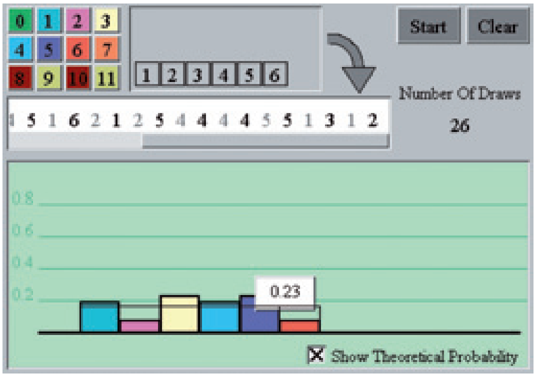
Este applet está disponible en: http://www.eastonsd.org/Mathematics/Newest%20MathResources/AAB%20NCTM%20Standards%20and%20Illuminations/Illuminations/imath/6-8/BoxModel/index.html

Pertenece a un sitio Web i-Math investigation del NCTM, donde alojan un extenso y rico conjunto de recursos didácticos virtuales en la modalidad de "applets" y otros tipos de programas interactivos destinados a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, siguiendo una de las máximas de esta organización: *promover el desarrollo y difusión de recursos para los distintos contenidos matemáticos y niveles educativos*.

Para facilitar el trabajo de los alumnos hemos traducido íntegramente los textos introductorios al manejo del applet, mientras que el resto se ha mantenido igual.

La herramienta interactiva denominada Box Models (BM), que en castellano hemos traducido por "Modelo de Urna", sirve para explorar la relación entre las probabilidades teóricas y experimentales, este dispositivo estadístico se puede utilizar para simular experimentos estándares de probabilidad tales como lanzar una moneda o tirar un dado.

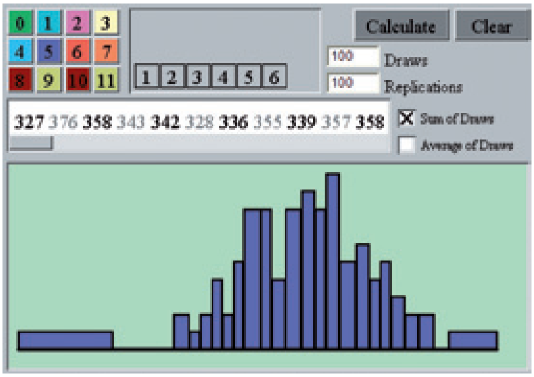
Gráfico 1



Su aspecto básico, puede observarse en el gráfico 1, en él destacan, en la parte superior izquierda los números del uno al once en distintos colores, que serán los elegidos para entrar en la "urna", situada justamente a la derecha y vacía al principio. Podemos determinar el peso que en la simulación se dé a cada uno de ellos, eligiendo varias veces el mismo número. Una vez elegidos los números comenzamos la simulación haciendo clic en Start, en este momento, el applet elige aleatoriamente con reemplazamiento los números de la "urna" y los dispone en secuencia en la caja blanca inferior. Para pausar hacemos clic en el botón de pausa y en este momento se puede hacer clic en cualquier barra de color correspondiente a un número introducido para exhibir la frecuencia relativa actual de dicho número, en modo pausa, se puede también examinar la muestra con los números elegidos hasta el momento.

En la misma página Web se dispone de otro BM, con un mecanismo parecido, que permite realizar la simulación de un número elevado de elecciones, y después investigar la distribución de la suma de tiradas o el promedio de tiradas, como mostramos en el gráfico 2.

Gráfico 2



El modelo de urna es una de las herramientas de probabilidades más versátiles que hemos encontrado, básicamente la única limitación es la imaginación del usuario. Para crear el modelo de un problema de probabilidad, como por ejemplo lanzar una moneda o un dado, el usuario simplemente coloca en la caja la colección apropiada de números y permite que la simulación proceda con los lanzamientos.

Para crear el modelo para el lanzamiento de una moneda justa, podemos colocar (haciendo clic en el número) un 1 para la cara y un 0 para la cruz (o tres veces en 1 para tres caras y tres veces en 5 para tres cruces, o bien cualquier otra combinación de uno y ceros, representando caras y cruces, respectivamente). Estas propuestas que hacemos son para simulaciones de equiprobabilidad o de monedas equilibradas, pudiendo aumentar el número de unos y disminuir el de ceros para situaciones de no equiprobablidad, situación esta que no vamos a tratar en esta prueba.

Para comenzar la simulación, se hace clic en *Iniciar* y se van extrayendo aleatoriamente números de la caja y colocados en una caja blanca, mostrando su proporción relativa en un gráfico de barras. Cada número es devuelto a la caja antes de la siguiente extracción. Por ejemplo, si al simular 30 extracciones (lanzamientos de una moneda) obtenemos dieciséis unos (53.3%) y catorce ceros (46.7%), las barras mostrarán aproximadamente 53% y 47%, respectivamente. Al hacer clic en *Mostrar Probabilidad Teórica*, los porcentajes estimados de 50% y 50% serán los que se muestren. Al realizar la simulación, podemos observar cómo los resultados se aproximan a los valores teóricos, pero rara vez se igualan a ellos exactamente. Los resultados obtenidos también demuestran con qué frecuencia ocurren ciertos eventos. Por ejemplo, en una simulación obtuvimos cinco veces uno (cinco caras) de manera consecutiva. Con un poco más de paciencia podríamos observar cuánto tiempo se demora en obtener diez unos (o diez ceros) de manera consecutiva, con lo que podemos estudiar sus rachas. Si varios estudiantes están trabajando al mismo tiempo, sería muy instructivo que cada uno de ellos haga el mismo experimento y comparen sus resultados.

Muchos problemas comunes de probabilidad están en términos de urnas con bolas de colores, los cuales también se pueden simular fácilmente con el BM, como lanzamiento de dos dados, ruletas, etc.

Este programa permite que los estudiantes interactúen con sus propios ejemplos, pero usando los resultados para beneficiosas discusiones en grupo y que la formulación de preguntas les lleve a nuevos experimentos y conjeturas.

En nuestro trabajo se hizo una primera intervención para explicar cómo se trabajaba con el simulador, a modo de introducción a la herramienta de trabajo BM, a fin de familiarizar a los alumnos participantes, indagar sobre lo que entienden entiende por simulación, cómo podemos simular hechos cotidianos y con qué herramientas podemos contar para hacer estas simulaciones. Se explicó que hoy en día contamos con el ordenador como herramienta potentísima que puede acercarnos a situaciones reales que se dan en la vida cotidiana y el software que debidamente programado nos presentan situaciones virtuales análogas a las reales.

Contando con ello se les explicó cómo se iban a simular situaciones en las que intervenía el azar y la aleatoriedad, palabras estas familiares a la mayoría de los participantes.

Tras esta introducción se les pasó el test que consta de las siguientes preguntas / actividades distribuidas en los ítems mostrados en el anexo de este capítulo y obtenidos de Serrano (1996) y Green (1991). Con este test se han tratado conceptos tales como experimento aleatorio y simulación experimentos aleatorios, sucesiones de Bernoulli, teorema de Bernoulli y ley de los grandes números, rachas en una sucesión aleatoria, heurísticas en el razonamiento aleatorio. Se pretende estudiar la concepción que los sujetos entrevistados tienen sobre hechos aleatorios y cómo muestran diferentes niveles de percepción de la aleatoriedad en situaciones de simulación. También estudiar si saben transcribir a papel las diferentes situaciones aleatorias generadas por el simulador informático y efectuar el estudio de esas simulaciones para diferenciar hechos aleatorios de otros no aleatorios así como la predicción de secuencias aleatorias. Analizar cómo puede influir diferentes heurísticas en el razonamiento aleatorio de estos sujetos y si saben diferenciar las situaciones de simulación entre grandes y pequeñas muestras.

En principio se pensó desarrollar entrevista en una sola sesión de una hora y media, pero hubo de ampliarse estas sesiones que pasaron a tres sesiones de una hora, dada la dificultad que detectamos planteaba la trascripción de los resultados después de realizar la actividad con el simulador informático. En las dos primeras sesiones los alumnos individualmente completaban los ítems donde fuera imprescindible el uso del ordenador (simulación), la tercera sesión sirvió para analizar los resultados y realizar las cuestiones de interpretación de los resultados obtenidos, ya sin el ordenador.

El trabajo con el simulador BM presentó cierta dificultad inicial, superada tras explicar qué significaba cada uno de los elementos del BM y qué significaba cada uno de ellos, como ya se ha indicado en párrafos anteriores.

En cuanto a los ítems propuestos, los alumnos, tuvieron muchas dificultades en consignar los resultados en los lugares apropiados y en muchos casos se tuvo que intervenir para orientar el trabajo, pese a la sesión primera de inicio al manejo del programa. Aunque ellos manejen el ordenador para otras actividades o programas, se sienten inseguros y presentan cierta inmadurez al interpretar el cuestionario y realizar las instrucciones que en él se dan.

En las preguntas de interpretación se insistió a menudo para que explicaran detalladamente sus decisiones y que no bastaba con responder si o no.

3. Estudio de los resultados de la prueba

En este trabajo proponemos diferentes situaciones para estudiar si los alumnos ven características aleatorias en las sucesiones de distribución binaria en pequeñas y grandes pruebas, realizando simulaciones y proponiendo posibles resultados aleatorios.

Analizaremos las prácticas hechas por los alumnos al realizar la simulación y al proponer secuencias de resultados que ellos estiman aleatorias. Queremos que intenten generar secuencias de sucesiones de Bernoulli y ver cómo el "significado personal" o subjetivo se relaciona con el "significado institucional" del objeto matemático, intentando con ello lograr la coincidencia de ambos puntos de vista. (Godino y Batanero, 1994).

Las propiedades de las sucesiones generadas por los alumnos se estudian a continuación, según las sucesiones presentadas por ellos y pensando que si presentan alguna de las propiedades características es porque las identifican y asocian con sus experiencias y observaciones de actividades previas en sus juegos y contactos con el mundo del azar.

A continuación mostramos el ítem 1 del anexo y pasamos a describir el proceso seguido por los entrevistados para su cumplimentación así como el análisis de lso resultados obtenidos.

ITEM 1

1.1.- Con el simulador Box Model podemos simular el lanzamiento de una moneda correcta, selecciona 0 para cuando salga cara y 1 para cuando salga cruz. Simula ahora cinco lanzamientos, escribe tus resultados en cada celda de la siguiente tabla.

Repite ahora nueve veces estos cinco lanzamientos y anota tus resultados en las siguientes celdas.

Observa si se repiten seguidos los unos o los ceros, sin alternarse, por ejemplo 1,1,1. Esto es una racha. Es decir, una racha es la repetición seguida del mismo suceso al lanzar un dado, por ejemplo que salga tres veces seguidas el uno o que salga cinco veces seguidas cara al lanza una moneda.

Cuando hay un cambio del suceso que ha salido, se dice que hay una alternancia o cambio, es decir en 1,1,2,1 hay dos cambios, uno entre 1,1,2 y otro entre 2,1

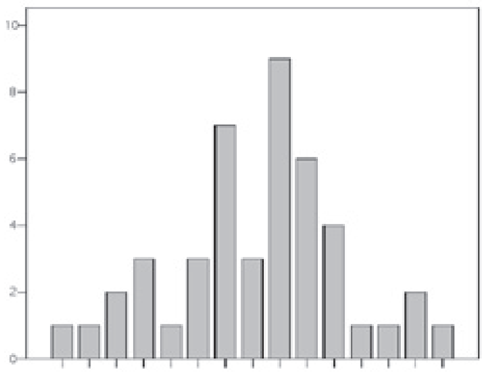
1.2.- Según lo anterior, completa ahora la siguiente tabla teniendo en cuenta los resultados que has obtenido en las anteriores simulaciones:

	Número de caras	Racha más larga	Número de cambios
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			
6ª			
7ª			
8ª			
9ª			
10ª			

Después de haber trascrito los resultados de la simulación a la tabla, se les pide que recuenten el número de caras, la longitud de la racha más larga y el número de cambios realizados en cada una de estas diez simulaciones cortas. Era la primera vez que trabajaban con un simulador estadístico y eso se nota a la hora de transcribir los resultados, ya que hubo que asesorarles además de que un 10 por ciento de los encuestados dejaron en blanco varias series de lanzamientos.

En el recuento del número total de caras se ha obtenido una media de 24,2 para un total de 50 lanzamientos, con una desviación típica de 3,56 lo que prueba no solo que la simulación está dentro de la normalidad sino que han sabido realizar un recuento adecuado de sus trabajos y tabularlo adecuadamente. Además han podido observar la variabilidad de los resultados en algunos de los casos como se observa en la figura 1 que muestra las frecuencias de los resultados obtenidos.

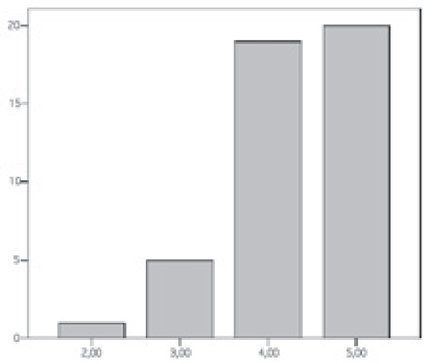
***Figura 1** Frecuencias de número de caras en el ítem 1.2*



Otra de las observaciones que hemos hecho es el recuento del número máximo y mínimo de caras, correspondiendo respectivamente a los valores 4 con una frecuencia de 28 y 1 con frecuencia de 27, lo que prueba que de los seis posibles valores (0 a 5) la mayoría de los resultados son valores no muy cercanos a los centrales lo que puede favorecer la formación de conceptos aleatorios erróneos, pero esa posible inconsistencia de las pequeñas muestras es totalmente justificable precisamente por el hecho de ser pequeñas, hecho éste que convendría destacar a los alumnos y contrastarlo con el recuento de todas las muestras o resultados obtenidos como una sola experiencia aleatoria.

Conscientes de que los alumnos generalmente subestiman o no consideran otros parámetros para medir la posible variabilidad aleatoria se les propuso el recuento del número de elementos que tiene la racha más larga en cada una de las anteriores extracciones. Bajo esta idea los alumnos han de transcribir lo que ellos consideran racha, llegando alguno de ellos a considerar una racha cuando se producen desde dos sucesos iguales seguidos, por ejemplo dos caras, hasta la posibilidad de que se produzcan cinco sucesos idénticos en estas secuencias de cinco lanzamientos binarios. En esta idea, los resultados de sus transcripciones han sido los que se reflejan en la figura 2. Hemos comprobado que realizaron bien la trascripción de los resultados obtenidos por el simulador y que comprenden el concepto de racha, después de haber pasado la fase inicial de introducción al mundo de la simulación.

Figura 2 *Frecuencias de longitud de la racha en el ítem 1.2*



La última de las cuantificaciones que habrían de hacer en este ítem es el número de cambios que se han producido en esos cincuenta lanzamientos con el simulador BM. Con ello queríamos precisar si entienden que una de las características de la aleatoriedad es la imprecisión de los posibles resultados. Contábamos con los resultados generados por el BM y deberían hacer el recuento del número de cambios producidos en cada una de las diez secuencias y no lo considerábamos todo agrupado como un solo lanzamiento. Por lo que si en cada secuencia se pueden producir cuatro cambios, el número total de cambios posibles será de cuarenta.

En la tabla 1 mostramos los resultados que han trascrito los entrevistados y en ella podemos observar que hay una cierta tendencia a la normalidad en los resultados obtenidos, al haber unos valores centrales de la distribución muy parecidos, como observamos en la referida tabla.

Tabla 1 *Frecuencias número de cambios*

Nº de Cambios	6	16	17	18	19	20	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Frecuencia	1	1	2	1	3	1	4	9	5	3	7	3	1	1	1	1	1
Media 23,42 Mediana 24 Moda 23																	

Con la última parte de este ítem, que mostramos a continuación, queremos comprobar las concepciones de los entrevistados sobre los conceptos obtenidos en los apartados anteriores 1.1 y 1.2 de este mismo ítem, en concreto sobre la alternancia o continuidad en sucesos binarios.

Contesta ahora las siguientes preguntas:
a) Al lanzar 5 veces una moneda, ¿es raro que aparezcan dos o tres caras seguidas? Explica tu respuesta.
b) ¿Es raro que aparezcan dos o tres cruces seguidas? Explica tu respuesta.

En principio tienen que emitir su juicio sobre la racha de caras o la de cruces, destacamos que se hacen estas preguntas por separado porque pensamos que puede existir discrepancia de la racha según que los sucesos sean cara o cruz. Hay sujetos que piensan que es más posible que el suceso sea cara a que sea cruz o viceversa. A continuación deben razonar su juicio, lo que nos puede permitir observar si de alguna forma caracterizan a los sucesos aleatorios.

En ambos casos, pregunta a o pregunta b, los resultados de sus respuestas son muy parecidos; la mayoría responden que no es raro que aparezcan tres caras o tres cruces y que eso se debe al azar. En la primera pregunta responden de esta forma 25 de 45 sujetos y en la segunda 22 de 45 entienden que estos dos hechos no son contradictorios y que se puede producir por igual, asociando así el azar con la imprevisibilidad de los resultados. En la tabla 2 presentamos los argumentos empleados en las respuestas de los entrevistados en estos dos apartados y la codificación de dichos argumentos para la representación gráfica de las respectivas distribuciones que se muestran en las figuras 3 y 4.

Tabla 4.2 *Argumentos de respuesta a los apartados a) y b) del ítem 1*

Código	Argumento	Frecuencias	
		Apartado a)	Apartado b)
1	Sí	2	3
2	No	1	4
3	Sí, debido al azar	3	4
4	No, debido al azar	25	22
5	Sí, por experiencia	1	1
6	No, por experiencia	3	3
7	Sí, por posibilidad	0	0
8	No, por posibilidad	10	8

Figura 4.3.- Frecuencias de argumentos en al apartado a)

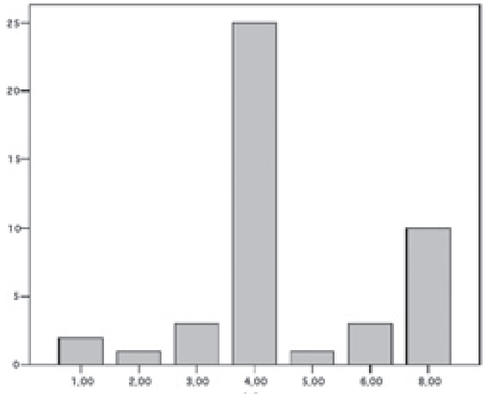
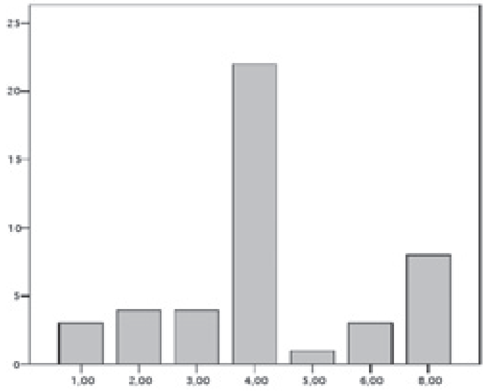


Figura 4.4.- Frecuencias de argumentos en al apartado b)



Podemos observar la gran similitud en las respuestas de ambos apartados, existiendo diferencias poco significativas como las de los argumentos 2 y 3 de la tabla 2. Además de justificar mayoritariamente sus respuestas con el argumento 4 (*debido al azar y no es raro que aparezcan dos o tres caras o cruces seguidas*), también hay una tendencia mayoritaria en ambos apartados a justificar con *la posibilidad* la fácil presencia de varias caras o cruces seguidas, entendiendo que puede existir un paralelismo entre posibilidad y probabilidad dado el nivel formativo de estos alumnos de tercer curso de Educación Secundaria y que aún no han estudiado formalmente el concepto de probabilidad, por lo que lo asocian al de posibilidad.

Similar a lo pedido en el ítem 1 ahora se trata de hacer una simulación más larga, anotar los resultados en sus celdas respectivas y recontar el número de caras y cruces a fin de ver si hay aproximadamente el mismo número de caras y cruces dada la simetría de la moneda que se supone no sesgada. En este caso se ha duplicado el tamaño de los resultados obtenidos en cada una de las simulaciones del primer ítem como paso intermedio entre él y lo que se pedirá en el último ítem, donde el tamaño pasará a ser de veinte. A esta pregunta todos los alumnos menos uno han trascrito bien a su tabla la simulación que obtuvieron en el BM, no se ha notado dificultad en la mayoría de los alumnos en la codificación de la trascripción diferente en este ítem y la correspondiente a la del ítem 1. Ahora se les pide que anoten C o X en lugar de 0 ó 1, tal y como sale en el BM.

ITEM 2

2.1.- Simula con Box Model el lanzamiento al aire diez veces de una moneda correcta y anota el resultado en la tabla adjunta. Cuando aparezca 0 anota una C; cuando aparezca 1 anota X. Cuenta y escribe el número de caras y cruces obtenidas:

Lanzamiento nº:									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de caras: **Número de cruces:**									

2.2.- ¿Puedes predecir el resultado del siguiente lanzamiento?

2.3.- Compara tus resultados con los de tu compañero. ¿Has obtenido el mismo número de caras y cruces?

Con el aparado 2.2 de este ítem intentaremos averiguar si existe en los alumnos la creencia en la posibilidad de predicción de un suceso aleatorio o lo plantean como una imposibilidad de saberlo dado que son hechos debidos al azar. En este punto y citando a Serrano (1996) podemos indicar que si el entrevistado dice que puede predecir el resultado, podrían darse las siguientes situaciones:

– El alumno utiliza la heurística de la representatividad y basa su predicción en la “recencia positiva” o “negativa” (Piaget e Inhelder, 1951).
– El alumno piensa que puede influenciar el azar, por ejemplo, controlando la fuerza con que lanza la moneda y su posición inicial podrá obtener un resultado concreto. Esta creencia de ciertos alumnos es descrita en el trabajo de Fischbein et al. (1991).

Las respuestas dadas en apartado 2.2 las hemos categorizado en seis grupos de argumentos que se incluyen en la tabla 3 donde se expresan las frecuencias de cada una de las respuestas. Vemos que el argumento más usual es *no se puede predecir el resultado y que esto es debido al azar*, usado por 25 alumnos, argumento este similar al de *no, por probabilidad*, usado por 2 alumnos, lo que hace que un 60 % de los entrevistados señalen como característica de los fenómenos aleatorios la impredecibilidad y la falta de seguridad al pronosticar un posible resultado. Algunos, el 6,6 %, argumentan que la *experiencia hace que sepan lo que va a salir*, respuesta que está en la línea del uso de la heurística de la representatividad. Unos pocos alumnos solo responde *si* o *no* sin justificar sus respuestas, 2,2 % y 8,9 % respectivamente, y un 17,8 % dan respuestas absurdas (por ejemplo: *no* *soy adivino o mago*, *porque es una tirada doble*, *el ordenador y yo no pensamos igual,* etc) como muestra de la inseguridad en este tipo de experiencias no deterministas lo que denota su falta de hábito en el tratamiento con experiencias aleatorias.

Tabla 3. *Argumentos de respuesta al apartado 2.2 del ítem 2*

Código	Argumento	Frecuencias	Porcentaje
1	Sí	1	2,2
2	No	4	8,9
3	No, debido al azar	25	55,6
4	Sí, por experiencia	3	6,7
5	No, por probabilidad	2	4,4
6	Respuesta absurda	8	17,8
7	En blanco	2	4,4

Con el apartado 2.3 queríamos que los alumnos comprobasen la posibilidad de discrepancia o no en las simulaciones obtenidas por el BM. Es bastante posible que en muestras pequeñas, como en nuestro caso extraer solo diez monedas, no hubiese igualdad en el número de caras y cruces, y así sucedió según las respuestas dadas por los alumnos, que indicaron la falta de concordancia en los resultados obtenidos. De cuarenta y cinco, uno no respondió y del resto cuarenta y uno indicaron que había diferencia en el número de caras y cruces con su compañero. Estas experiencias, que deben hacerse con bastante asiduidad en la enseñanza en estos niveles, probarán que estos resultados son habituales en pruebas pequeñas y que a la larga se estabilizará, dando más confianza al alumno, de estos niveles educativos, en el tratamiento del azar.

ITEM 3

3.1.- Vamos a comprobar qué tal son tus intuiciones respecto a los resultados aleatorios. Abajo tienes dos filas de cuadrículas, en la primera fila escribe 20 resultados sin realizar realmente el experimento. Después, con el Box Model, simula el lanzamiento de una moneda correcta 20 veces y escribe los resultados obtenidos en la segunda fila. Pon C para cara y X para cruz.

En este ítem sobre lanzamientos de monedas correctas, hemos intentado enfrentar los resultados de los entrevistados con los obtenidos en la simulación del BM en muestras relativamente grandes, 20 extracciones. Antes de que contestasen se les comentó el ítem y se hicieron preguntas generales introductorias como: ¿cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una monedad 20 veces seguidas? ¿Serías capaz de predecir esos 20 resultados? ¿Podría otra persona, al ver esa predicción que tú has hecho, asegurar que esos resultados no han sido obtenidos en un verdadero lanzamiento de monedas?

Este comentario en grupo antes de la experiencia, sin aclaraciones explicativas por parte del profesor entrevistador parece aclarar las preguntas que se van a hacer en los siguientes apartados de este ítem. Tras ello se les pide que escriban veinte posibles resultados que posteriormente van a contrastar con otros veintes resultados obtenidos con el BM.

Para el análisis comparativo de ambas simulaciones no nos limitamos al recuento del número de caras o cruces, hemos utilizado diferentes parámetros que pueden considerarse determinantes en la apreciación de la aleatoriedad en estas secuencias, como:

A: número de caras — B: números de cambios
C: longitud de la racha más larga — D: número total de rachas

parámetros estos que presentamos en la tabla 4 con las frecuencias en las dos simulaciones: la pensada por el alumno y la realizada con el BM.

***Tabla 4** Frecuencias de las respuestas al ítem 3.1 según los parámetros:*
A) número de caras, B) Número de cambios,
C) Longitud de la racha más larga, D) Número total de rachas

Parámetros			Valores													
			2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	17
A	Alumno	Frecuencia	-	-	-	-	-	1	3	10	16	11	2	2	-	-
	B M		-	-	-	1	-	5	6	10	9	9	3	1	1	-
B	Alumno	Frecuencias	-	-	-	-	-	2	1	2	9	14	12	-	5	-
	B M		-	-	-	-	3	1	3	11	6	7	9	3	1	1
C	Alumno	Frecuencias	6	24	6	7	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-
	B M		1	11	20	5	3	2	-	2	-	1	-	-	-	-
D	Alumno	Frecuencias	-	1	2	21	17	3	-	-	-	1	-	-	-	-
	B M		1	6	8	19	10	-	-	-	-	-	1	-	-	-

Con el primero de los parámetros, "Número de caras", podemos comparar la situación del valor teórico esperado con las frecuencias de las simulaciones propuestas por los alumnos y las generadas por el BM. En general los alumnos han sido bastantes exactos al reflejar la frecuencia relativa de las caras al agruparse en torno a 10, coincidiendo con el valor teórico esperado. El valor medio del número de caras en las secuencias producidas por los alumnos ha sido de 10,04, que se aproxima 9,6, valor medio del número de caras producido por el generador BM en su simulación.

Con el resto de los parámetros podremos apreciar la variabilidad de las secuencias producidas y la permanencia en esas variaciones. Para el segundo de los parámetros, "Números de cambios", tenemos una media de 11,07 en la secuencia de los alumnos y de 10,27 en la generado por el BM. Destacamos que hay cierta diferencia en cuanto a estos cambios en ambos procedimientos de generación de las secuencias, los alumnos por ejemplo producen más cambios que el BM, habiendo menos dispersión en los valores de ésta distribución que en la de los alumnos, por lo que puede pensarse que los alumnos esperan cierta permanencia en la variabilidad de estas secuencias.

Por otro lado los parámetros "Longitud de la racha más larga" y "Número total de rachas", estrechamente relacionados, pueden indicar también la creencia en la variabilidad constante de estos sucesos aleatorios así como la presencia de la "heurística de la representatividad".

Si medimos la dispersión de las distribuciones de las secuencias producidas por los alumnos y por el BM observamos que es significativamente menor que la teórica. La distribución teórica seguiría una distribución binomial B(20,0.5) de media 10 y de varianza 5. La varianza de las distribuciones producidas por los alumnos 1.54 y la del BM 3.20, valor éste que aunque no coincide con el teórico, duplica al anterior y parece que mejora la variabilidad de la secuencia producida con BM.

En cuanto a las rachas producidas observamos que aunque son próximos los números de rachas producidos por los alumnos y por el BM, la mayoría en ambos casos producen cinco rachas en cada sucesión (hay 21 alumnos y 19 del BM con cinco rachas), la distribución media de "rachas número de …" es de 5.56 y de 4.87 para cada caso respectivamente. Respecto a la longitud de la racha más larga observamos que en general los alumnos producen rachas demasiado cortas, siendo la más larga generalmente de tres sucesos (24 sujetos) y con el BM hay una mayoría de rachas de secuencias de longitud cuatro (20 simulaciones). Además se pueden observar rachas de gran longitud, casi la mitad de la simulación, (se han producido una racha de longitud 11 en ambos casos), rachas éstas que Green llama de "replicantes". A diferencia de este caso se producen con más frecuencia en los alumnos las rachas cortas, de longitud dos, alternando las caras con las cruces, que con BM (en los alumnos hay 8 casos y con BM solo 1). Por ello podíamos conjeturar que hay dificultades en la percepción de la independencia en estos experimentos repetidos.

Después de esta primera parte del ítem 3 se proponen las siguientes cuestiones a fin de conseguir averiguar la forma de razonar por los alumnos entrevistados, respecto al tema que nos ocupa, la aleatoriedad y su opinión sobre su control.

3.1.1.- ¿Piensas que son parecidos los resultados reales (con Box Model) y los inventados por ti?

3.1.2.- ¿Cómo podríamos comparar las dos secuencias?

Con las dos primeras cuestiones 3.1.1 y 3.1.2 intentamos que comparen sus resultados con los del BM, vean si hay diferencias y a qué se pueden deber. Para comparar los resultados obtenidos en ambas sucesiones un reducido grupo (6 sujetos) propone comparar la igualdad de ambas secuencias, viendo una por una la coincidencia de los resultados, por otro lado la mayoría (36 sujetos) se inclina por comparar los resultados contando el número de caras de ambas secuencias para ver si coinciden estos números, intentando con ello justificar su juicio con la simetría de los posibles resultados y la tendencia a la probabilidad teórica, hechos teóricos que los alumnos no conocen aunque parece que intuyen.

	Frecuencia
Parecidos	30
No parecidos	14
Blanco	1

Tabla 5 *Frecuencias de las respuestas al apartado 3.1.1*

	Frecuencia
Comparan globalmente	36
Comparan una a una	6
Blanco	3

Tabla 6 *Frecuencias de las respuestas al apartado 3.1.2*

Después de estas dos preguntas se les pide que comparen las frecuencias de ambas secuencias y a fin de ver su percepción sobre la variabilidad de las sucesiones, que comparen el número de rachas y sus longitudes, para que en el apartado 3.1.6 de este mismo ítem emitan su juicio y saber la conclusión a la que pueden haber llegado.

3.1.3.- Compara el número de caras de las dos secuencias.
3.1.4.- Compara el número de rachas de las dos secuencias, la simulada por el ordenador y la tuya.
3.1.5.- Compara la longitud de la racha más larga las dos secuencias.

En estas comparaciones, presentadas en la tabla 7, observamos que hay cierta dificultad en la realización de estas comparaciones. Hay más sujetos que no responden a estas cuestiones que en los ítems anteriores, pensamos que por no saber cómo hacerlo. Así en el apartado 3.1.3 hay 4 que lo dejan en blanco, en el apartado 3.1.4. hay 7 y en el apartado 3.1.5. hay 3. Esto nos da una idea de la dificultad con que estos sujetos se enfrentan con este campo de las matemáticas en el que tiene que emitir un juicio no determinista cuando han estado educados desde pequeños a unas matemáticas concisas y con unas reglas y algoritmos precisos. Por otro lado en la comparación del número de caras (apartado 3.1.3) hay más alumnos que la hace bien (26 sujetos), pero hay una gran mayoría (15 sujetos) que, pese a facilidad de la pregunta, no logran contestar bien, puede que no sepan cómo comparar esas caras, si individualmente o grupalmente.

	Frecuencia apartado 3.1.3	Frecuencia apartado 3.1.4	Frecuencia apartado 3.1.5
Bien comparado	26	14	31
Mal comparado	15	24	11
Blanco	4	7	3

Tabla 7 *Frecuencias de las respuestas en los apartados 3.1.3; 3.1.4; 3.1.5*

En las respuestas a los ítems relacionados con el concepto de racha hay cierta disonancia ya que por un lado parece que no han conseguido comprender este concepto, como se puede deducir de los resultados de las respuestas que figuran en la tabla 7, donde observamos que 24 sujetos no logran comparar adecuadamente ambas secuencias, y por otro lado, a la hora de medir y comparar la longitudes de las rachas, más del 75 % de los sujetos hacen una buena comparación de rachas. Esto nos puede dar pie para profundizar en futuras exploraciones en este concepto y en sus relaciones con la variabilidad estocástica.

3.1.6.- ¿Has llegado a alguna conclusión?

En este apartado hemos categorizado las respuestas en los siguientes grupos:

a) He aprendido
b) Se debe a la influencia del azar
c) Sé el resultado que va a salir
d) No sé el resultado que va a salir
e) No
f) Blanco

En la tabla 8 podemos observar que hay tres grandes grupos de argumentos en las respuestas: el apartado c) *Sé el resultado que va a salir* con un 26.7 % de respuestas; el apartado b) *Se debe a la influencia del azar* con un 24.4 % y el apartado e) *No* con otro 24.5 %. La mayoría (26.7 %) señala que pueden influir en los resultado que se van a producir y que de estas comparaciones se pueden encontrar ciertas características que indique el futuro resultado. Con ello constatamos la presencia de la falacia del jugador, por la que el sujeto, por ejemplo, intuitivamente espera la aparición de una cara tras una racha de no ocurrencias de este suceso e incluso que el sujeto puede predecir el resultado futuro después de haber repetido el experimento varias veces, como indica Fischbein et al. (1991). Un 24.4 % justifica que los resultados de estas comparaciones se deben al azar, creen en la impredecibilidad y variabilidad de los resultados y hay otro gran grupo (24.5 %) que no llegan a conclusión alguna. A este último grupo las cuestiones previas no les han servido para que intenten formar un juicio sobre este tipo de sucesos ni tampoco han emitido un juicio elaborado según sus concepciones previas ni según su contacto con juegos de azar.

Tabla 8 *Frecuencias de argumentos de respuestas al apartado 3.1.6 del ítem 3*

Argumento	Frecuencias	Porcentaje
a) He aprendido	2	4.4
b) Se debe a la influencia del azar	11	24.4
c) Sé el resultado que va a salir	12	26.7
d) No sé el resultado que va a salir	6	13.3
e) No	11	24.5
f) Blanco	3	6.7

Podemos unificar los argumentos b) y d) que pueden caracterizar la impredecibilidad del resultado, y en consecuencia el no saber el resultado futuro. Esta unificación agrupa en

17 los sujetos, dando un porcentaje de 37,7% (24.4 % + 13.3 % = 37.7 %) que representan una mayoría significativa, que a primera vista manifiestan la comprensión de las características de los experimentos aleatorios, aunque visto globalmente es casi un tercio del total, el restante grupo es el 62,3 %. Podemos deducir que este grupo restante ante hechos aleatorios no tiene capacidad de elaborar un juicio claro, están indecisos o creen dominar estas situaciones, como los que dan el argumento c) *Sé el resultado que va a salir*.

4. Conclusiones

Por todo ello podemos deducir que la en la mayoría de las situaciones presentadas comprenden que son situaciones aleatorias y denotan la presencia del azar como componente de esa situación, frente a otros hechos en los que no existe esta presencia o son totalmente deterministas. Así indican que, en esas actividades y en la mayoría de los resultados obtenidos en las simulaciones, se da variabilidad e impredecibilidad en los resultados. Sin embargo no saben cómo resolver cuestiones básicas del mundo de la estocástica, como el cálculo de probabilidades en situaciones de equiprobabilidad, pese a que en determinadas actividades han sido bastante exactos al reflejar el valor de la frecuencia relativa.

También hemos detectado intuiciones probabilística correctas casi en el 80% de la población, lo que puede servir de base para afianzar un aprendizaje matematizado de la probabilidad.

Otro de los resultados obtenidos es la falta de familiaridad y confianza con lo aprendido o estudiado en su currículum académico, hace que a la hora de justificar resultados, presenten dificultades en la explicación o en el razonamiento de las respuestas dadas, sobre todo en las de comparación, no teniendo claro qué comparar o qué responder.

Por otro lado no se han detectado grandes diferencias entre las concepciones estocásticas de los entrevistados antes de la simulación y después de la misma. En las pequeñas experimentaciones, hay cierta variabilidad de lo propuesto por el alumno y lo simulado por el BM, en las grandes suele haber cierta semejanza entre lo simulado y el resultado esperado.

Hemos de tener en cuenta también que debido a la dificultad de que en la simulación salgan resultados que se aproximen a la probabilidad teórica, si no se hacen gran cantidad de simulaciones y comparaciones sobre un mismo contenido en la enseñanza de la estocástica caeremos en falsas expectativas, confusiones, sesgos y posibles fundamentaciones de falacias futuras.

Reconocimiento: Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110/EDUC.MEC-FEDER y Grupo FQM-126 Junta de Andalucía y ha sido cofinanciada por el Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20.

Referencias bibliográficas

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5, 15-28.

Borovnicnk, M., & Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop, K. Clemens, C. Keitel, J. Kilpatrick. & C. Laborde (Eds), *International handbook in mathematics education* (Part 1, pp. 239-288). Dordrechct: Kluwer.

El Bothouri, M. (2003). *Un estudio comparado de heurísticas y sesgos en alumnos marroquíes y españoles.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Engel, A. (1971) Teaching probability in intermediate grades. *International Journal of Mathematical Educational,* 2(3), 15-25.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Kluwer

Fischbein, E., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523 - 549.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 14 (3), 325-355.

Green, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D. Vere Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320 - 328). Dunedin: University of Otago

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability.* Cambridge, MA: Cambridge University Press

Hawkins, A. (1990). *Training teachers to teach statistics.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastical ideas. Educational Studies in Mathematics, 6, 187-205.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.). (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

Mills J. D. (2002). Using Computer Simulations Methods to teach Statistics: A Review of the literatura. Journal of Statistics education. Volumen 10, Number 1. 2002.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA; NCTM Disponible en Internet http://standards.nctm.org/

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant. París: Presses Universitaires de France.

Shaughnessy, J. M. Research in probability and statistics: Reflections and Directions en Grows D. A. , (Editor), 1992, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, New York: Macmillan Publishing Company. pp.465-494.

Serrano, L. (1993). *Aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad y concepciones iniciales sobre procesos estocásticos*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Serrano, L. (1996) Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Tesis Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Tversky, A. y Kahneman,D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (1982), Judgement under uncertainty: heuristics and biases (pp. 84 - 100) Cambrige: Cambrige University Press.

ITEM 1

1.1. Con el simulador Box Model podemos simular el lanzamiento de una moneda correcta, selecciona 0 para cuando salga cara y 1 para cuando salga cruz.

Simula ahora cinco lanzamientos, escribe tus resultados en cada celda de la siguiente tabla.

Repite ahora nueve veces estos cinco lanzamientos y anota tus resultados en las siguientes celdas.

Observa si se repiten seguidos los unos o los ceros sin alternarse, por ejemplo 1,1,1. Esto es una racha. Es decir, una racha es la repetición seguida del mismo suceso al lanzar un dado, por ejemplo que salga tres veces seguidas el uno o que salga cinco veces seguidas cara al lanza una moneda.

Cuando hay un cambio del suceso que ha salido, se dice que hay una alternancia o cambio, es decir en 1, 1, 2, 1 hay dos cambios; uno entre 1,1,2 y otro entre 2,1

1.2. Según lo anterior, completa ahora la siguiente tabla teniendo en cuenta los resultados que has obtenido en las anteriores simulaciones:

	Número de caras	Racha más larga	Número de cambios
1ª			
2ª			
3ª			
4ª			
5ª			
6ª			
7ª			
8ª			
9ª			
10ª			

Contesta ahora las siguientes preguntas:

a) Al lanzar 5 veces una moneda, ¿es raro que aparezcan dos o tres caras seguidas? Explica tu respuesta.

b) ¿Es raro que aparezcan dos o tres cruces seguidas? Explica tu respuesta.

ITEM 2

2.1. Simula con Box Model el lanzamiento al aire diez veces de una moneda correcta y anota el resultado en la tabla adjunta. Cuando aparezca 0 anota una C; cuando aparezca 1 anota X. Cuenta y escribe el número de caras y cruces obtenidas:

Lanzamiento nº:									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de caras: Número de cruces:									

2.2. ¿Puedes predecir el resultado del siguiente lanzamiento?

2.3. Compara tus resultados con los de tu compañero. ¿Has obtenido el mismo número de caras y cruces?

ITEM 3

3.1. Vamos a comprobar qué tal son tus intuiciones respecto a los resultados aleatorios. Abajo tienes dos filas de cuadrículas, en la primera fila escribe 20 resultados sin realizar realmente el experimento. Después, con el Box Model, simula el lanzamiento de una moneda correcta 20 veces y escribe los resultados obtenidos en la segunda fila. Pon C para cara y X para cruz.

3.1.1. ¿Piensas que son parecidos los resultados reales (con Box Model) y los inventados por ti?

3.1.2. ¿Cómo podríamos comparar las dos secuencias?

3.1.3. Compara el número de caras de las dos secuencias.

3.1.4. Compara el número de rachas de las dos secuencias, la simulada por el ordenador y la tuya.

3.1.5. Compara la longitud de la racha más larga las dos secuencias.

3.1.6. ¿Has llegado a alguna conclusión?

Capítulo 9

UN ANÁLISIS SEMIÓTICO DEL PROBLEMA DE MONTY HALL

José Miguel Contreras y Carmen Batanero

Universidad de Granada

José António Fernández

Universidad do Minho

Resumen. En este trabajo aplicamos el modelo onto-semiótico al estudio de la actividad dearrollada en la solución del problema de Monty Hall. El análisis incluye el estudio de los objetos y procesos matemáticos en algunas soluciones correctas, y la explicación de los razonamientos erróneos más frecuentes en términos de conflictos semióticos. Se concluye con la utilidad de este problema en la enseñanza de la probabilidad condicional y la formación de profesores.

Palabras clave: Probabilidad condicional, análisis onto-semiótico, problema de Monty Hall, conflictos semióticos

Abstract. In this paper we apply the onto-semiotic model to study the activity developed when solving the Monty Hall problem. The analysis include the study of the mathematical objects and processes in some correct solutions and the explanation of some frequent mistaken reasoning in terms of semiotic conflicts. We conclude the usefulness of this problem in the teaching of conditional probability and in training the teachers.

Keywords: Conditional probability, onto-semiotic analysis, the Monty Hall problem, semiotic conflicts.

1. Introducción

La comprensión y correcta aplicación de la probabilidad condicional es fundamental en la vida diaria y las aplicaciones de la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información (Díaz y de la Fuente, 2005). Ello explica que este tema se introduzca en la enseñanza secundaria (MEC, 2007). Sin embargo, muchas investigaciones muestran la existencia de intuiciones incorrectas en la aplicación de este concepto y la enseñanza formal es insuficiente para superarlas. Es necesario que el alumno se haga consciente de estas dificultades y aprenda a afrontar los problemas condicionales con unas herramientas adecuadas.

En este trabajo analizamos un juego (para el cual existen simuladores en Internet) que podría ser útil para lograr enfrentar a estudiantes con algunas de estas intuiciones incorrectas, incluso en cursos de formación de profesores. El juego está inspirado en el concurso televisivo Let's Make a Deal (Hagamos un trato), emitido entre 1963 y 1986 en la televisión americana y su nombre proviene del presentador del concurso, Monty Hall. El concurso generó bastante polémica en relación a posibles soluciones del problema matemático latente y muestra las intuiciones incorrectas en relación a la probabilidad condicional. La formulación más conocida de dicho problema (Bohl, Liberatore y Nydick, 1995) se reproduce a continuación:

Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras cabras. Escoges una puerta, digamos la nº 1, y el presentador, que sabe lo que hay detrás de las puertas, abre otra, digamos la nº 3, que contiene una cabra. Entonces te pregunta: ¿No prefieres escoger la nº 2? ¿Es mejor para ti cambiar tu elección?

El problema original fue planteado por Selvin (1975 a y b). Un problema análogo denominado "problema de los tres prisioneros", fue publicado por Gadner (1959), aunque su versión hace el proceso de elección explícito, evitando las suposiciones de la versión original. En este trabajo primero estudiamos las posibles soluciones correctas al problema de búsqueda de la mejor estrategia en el juego. Seguidamente, basados en elementos tomados de Godino, Font y Wilhelmi (2008) analizamos los sistemas de prácticas y objetos matemáticos implícitos en estas soluciones correctas y algunos posibles conflictos semióticos. Finalizamos con algunas conclusiones sobre la idoneidad didáctica del trabajo con este problema en cursos de formación de profesores.

2. Solución Matemática del Problema de Monty Hall

Cuando se trabaja con el problema de Monty Hall, en un curso de probabilidad, podemos hacer a los estudiantes alguna pregunta del tipo: *¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia entre cambiar o no?* Les pediremos que justifiquen su decisión con un argumento de tipo probabilístico.

La solución consiste en ver que tipo de jugador tiene la mayor probabilidad de ganar el coche, el que nunca cambia de puerta y el que cambia siempre. En caso de que los estudiantes no logren dar la solución o den una solución errónea (lo cuál es lo más frecuente), se puede dar oportunidad de simular el juego usando uno de los applets disponibles en Internet y obtener datos experimentales que les ayuden a intuir la solución correcta.

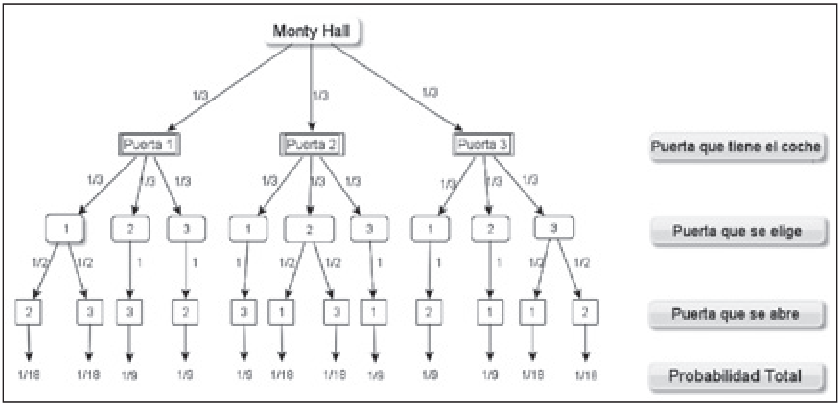
Solución intuitiva 1

Con ayuda de un diagrama en árbol podemos ver las distintas posibilidades. Hay dos puertas sin premio y una con premio. Por tanto la posibilidad de elegir la puerta premiada es 1/3. Si no cambiamos solo tenemos 1/3 de posibilidades de ganar y 2/3 de perder. Si, por el contrario, cambio de puerta, la probabilidad de ganar será la misma que elegir inicialmente la puerta sin premio, es decir 2/3.

Solución intuitiva 2

Consideramos, en primer lugar, el experimento "puerta que tiene el premio" (cada puerta tiene probabilidad 1/3). A continuación, consideramos la puerta que se elige (1/3 cada puerta). Estos dos primeros experimentos son independientes. El tercer experimento es la puerta que abre el locutor, que es dependiente de los anteriores (Figura 1).

Figura 1: *Diagrama de árbol ilustrando el juego*



Observamos que si no cambiamos de puerta, sumando las probabilidades de todas las ramas del árbol (elegir puerta 1 si el coche está en la 1; elegir puerta 2, si el coche está en la puerta 2 y elegir puerta 3 si el coche está en la 3), las posibilidades de ganar son de 1/3. Cada uno de estos sucesos compuestos tiene probabilidad 1/9.

Suponemos que cambiamos. Si escogemos una puerta con una cabra, el presentador muestra la otra cabra. Cambiamos (a la puerta que tiene el coche) y ganamos. Por ejemplo, si estando el coche en la puerta 1, elegimos la puerta 2, el presentador nos muestra la puerta 3 y sólo podemos cambiar a la 1, que es la que tiene el coche. Este suceso tiene probabilidad 1/9. Lo mismo ocurriría si estando el coche en la puerta 1, elegimos la 3.

Si elegimos la puerta con coche, el presentador nos muestra una de las dos puertas que tiene la cabra. Si estando el coche en la puerta 1, elegimos la puerta 1, el presentador te abre bien la puerta 2 o la 3, cada una de ellas con probabilidad 1/18, en total 1/9. Si cambiamos de puerta perdemos con probabilidad 1/9. Como hay tres puertas, la probabilidad total de ganar cambiando sería 2/3 y la de perder cambiando sería 1/3.

Solución experimental

El trabajo de los alumnos con el *applet*, experimentando con el juego, proporciona a los estudiantes una experiencia intuitiva sobre los resultados que se obtienen en este juego con cada una de las dos estrategias, cambiar o no cambiar de puerta. Partiendo de la evidencia de estos resultados, claramente se observa experimentalmente que las posibilidades de ganar el juego son el doble al cambiar la puerta. El alumno ve sus intuiciones contradichas. Es decir, se produce un conflicto cognitivo y al tratar de resolverlo, eventualmente, puede llegar a uno de los razonamientos intuitivos mostrados anteriormente.

Teniendo en cuenta que los resultados son aleatorios, deberíamos realizar el juego un número de veces considerable para que los resultados se ajusten a la solución del problema, pero el ordenador permite un gran número de simulaciones rápidamente. El *applet* nos proporciona una solución experimental sobre cuál es la estrategia ganadora, pero no nos explica la razón de por qué una estrategia es preferible a la otra. Será necesario que el profesor trate de reconducir al estudiante a una de las soluciones intuitivas anteriores o las formales, que se presentan a continuación.

Solución formal 1

La solución formal de este problema utiliza las propiedades de la probabilidad condicionada, que es un objeto cuya definición es sencilla de entender pero difícil de aplicar. Para llegar a la solución definimos los siguientes sucesos:

- *A:* El jugador selecciona la puerta que contiene el coche en su selección inicial.
- *B:* El jugador selecciona una puerta que contiene una cabra en su selección inicial.
- *G:* El jugador gana el coche.

Estamos interesados en calcular $P(G)$ para cada tipo de jugador, el que cambia de puerta y el que no cambia. Para calcular $P(G)$, basta con notar que $G = (G \cap A) \cup (G \cap B)$, ya que $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B = \Omega$. Esto es equivalente a decir que $\{A, B\}$ es una partición de Ω, siendo Ω el espacio muestral del experimento; por tanto, aplicando el axioma de la unión de probabilidades.

$$P(G) = P((G \cap A) \cup (G \cap B)) = P(G \cap A) + P(G \cap B) = P(G/A)P(A) + P(G/B)P(B)$$

Por aplicación de la regla de Laplace: $P(A)=1/3$ *y* $P(B)=2/3$ pues hay un coche y dos cabras. Finalmente, tenemos que calcular la probabilidad de ganar de cada tipo de jugador:

- *Jugador que nunca cambia:* En este caso $P(G/A) = 1$ *y* $P(G/B) = 0$. Por lo tanto, $P(G) = 1/3$.
- *Jugador que siempre cambia:* En este caso $P(G/A) = 0$ *y* $P(G/B) = 1$. Por donde, $P(G) = 2/3$.

Solución formal 2

Sea ξ*:* $(\Omega,P) \rightarrow \{1,2,3\}$ la variable aleatoria que asigna un número de puerta (aquella detrás de la cual se encuentra el coche). Esta variable aleatoria tiene distribución discreta uniforme (es decir todos los valores son equiprobables) y son estocásticamente independientes.

Sea ϕ*:* $(\Omega", P") \rightarrow \{n\}$ la variable aleatoria número de la puerta que abre el presentador y que dependerá de las anteriores. Si $\eta=\xi$ (el concursante elige el coche), entonces hay dos posibles valores con probabilidad 1/2½ (los números de las dos puertas no elegidas por el concursante). En caso contrario, solo hay un valor, con probabilidad 1 (el número de la puerta sin coche). La probabilidad que el concursante se lleve el coche bajo el supuesto que él no cambia de puerta es entonces $P(\eta=\xi)=1/3$. La probabilidad que el candidato se lleve el coche bajo el supuesto que él cambia de puerta es entonces $P(\eta\neq\xi)=2/3$.

3. Objetos Matemáticos Puestos en Juego

Presentadas algunas soluciones (intuitivas, experimentales y formales), analizaremos la actividad matemática realizada en estas soluciones recurriendo al marco teórico desarrollado en Godino (2002) y Godino, Batanero y Font (2007). Los autores describen diferentes categorías en los objetos ligados a las prácticas matemáticas, que pueden ser previos (si el alumno los conocía ya) o emergentes (si los aprende durante la práctica):

- *Situaciones-problemas*: Aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, acciones que inducen una actividad matemática. En nuestro caso el problema es la búsqueda de una estrategia óptima en el juego de Monty Hall.
- *Lenguajes*: Cualquier forma de representar los objetos matemáticos. En las soluciones analizadas hemos usado diagramas en árbol, símbolos, palabras. En la solución experimental también usamos el lenguaje gráfico e icónico.
- *Conceptos-definición*: En las prácticas que llevan a cabo los estudiantes para resolver un problema matemático se usan implícita o explícitamente conceptos matemáticos, de los cuáles el alumno ha de recordar o aplicar la definición. Por ejemplo, los estudiantes usarán implícitamente o explícitamente los objetos: aleatoriedad, espacio muestral, suceso, probabilidad simple, probabilidad condicional, probabilidad conjunta, independencia, frecuencia relativa.
- *Proposiciones* o enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que igualmente se han de emplear al resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando los estudiantes tienen que recordar que la suma de probabilidades en el espacio muestral es igual a la unidad. En la solución experimental se usaría la ley de los grandes números.
- *Procedimientos*: En nuestro caso, usamos la regla de Laplace, regla del producto y regla de la suma de probabilidades, enumeración de sucesos, construcción del diagrama en árbol, operaciones aritméticas, ejecutar el *applet* y comparar frecuencias.
- *Argumentos*: Son los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o bien la solución de los problemas.

Al resolver matemáticamente el juego mediante las soluciones anteriores se utilizan los objetos matemáticos que se muestran en la Tabla 1. Observamos que, dependiendo de la solución, se pueden usar una configuración diferente de objetos matemáticos, siendo más complejas las soluciones formales, especialmente la segunda que involucra la idea de variable aleatoria. Tanto el juego como el tipo de solución determinan el trabajo matemático que se hace en la clase. Ello hace que se pueda trabajar a diversos niveles de profundidad, dependiendo del tipo de estudiante.

Tabla 1. Configuraciones epistémicas en las soluciones

TIPO	Objetos matemáticos en la situación	Significado en la situación	Sol. Int. 1	Sol. Int. 2	Sol Exp.	Sol. Form 1	Sol. Form 2
Problema	- Elección de la puerta	- Determinar la estrategia que da mayor número de éxitos	X	X	X	X	X
Lenguaje	- Verbal	- Explicación de la situación	X	X	X	X	X
	- Gráfico	- Diagrama en árbol - Representación icónica del juego	X	X			
	- Simbólico	- Expresión de sucesos y probabilidades				X	X
	- Numérico: Probabilidades	- Probabilidades de cada suceso	X	X		X	X
	- Numérico: Frecuencias	- Resultados del experimento			X		
	- Icónico	- Iconos que representan los sucesos y resultados			X		
Conceptos-Definición	- Experimento aleatorio	- Elegir una puerta - Puerta que abre el locutor - Ganar el premio	X X X	X X X	X X X	X X X	X X X
	- Sucesos; espacio muestral	- Puertas 1, 2, 3 - Ganar/no ganar	X X	X X	X X	X X	X X
	- Experimento compuesto	- Composición de los experimentos anteriores	X	X	X	X	X
	- Sucesos en el experimento compuesto	- Producto cartesiano de los espacios muestrales anteriores	X	X	X	X	X
	- Frecuencia relativa	- Exitos / número experimentos			X		
	- Convergencia	- Tendencia de la frecuencia a la probabilidad			X		
	- Intersección de sucesos	- Parte común de un conjunto de sucesos				X	
	- Unión de sucesos	- Conjunto que contiene los sucesos de uno u otro conjunto				X	
	- Suceso imposible	- Intersección de un suceso y su complementario				X	
	- Probabilidad clásica	- Proporción de casos favorables a posibles.	X	X		X	X
	- Probabilidad frecuencial	- Límite de la frecuencia			X		
	- Axiomas probabilidad	- Explicitación de los axiomas				X	X
	- Probabilidad condicional	- Proporción de cada suceso respecto al total de veces que ha ocurrido otro suceso.	X	X	X	X	X
	- Regla de la suma	- Probabilidad de ganar el coche	X	X		X	X
	- Regla del producto	- Probabilidad conjunta; dependencia	X	X		X	X
	- Variable aleatoria	- Número de la puerta en la que está el premio - Número de puerta elegida					X
	- Igualdad de variables aleatorias	- Coincidencia de valores; acierto					X
	- Distribución discreta uniforme	- Conjunto de valores con sus probabilidades					X
	- Variables aleatorias independientes	- La distribución de una no depende de la de la otra					X

Procedimientos	- Cálculo de probabilidades intuitivo	- Aplicar reglas de cálculo intuitivo	X	X			
	- Cálculo de probabilidades formal	- Aplicar reglas de cálculo formal				X	X
	- Cálculo de probabilidad frecuencias	- Estimar la probabilidad mediante la frecuencia			X		
	- Representación gráfica	- Construcción del diagrama en árbol	X	X			
Proposiciones	- Relación entre probabilidad condicionada y simple	- Restricción del espacio muestral	X	X		X	X
	- La frecuencia converge a la probabilidad	- Ley empírica de los grandes números			X		
	- Teorema probabilidad total	- Aplicar a la situación				X	
	- Axioma de unión	-La probabilidad de la suma es suma de probabilidades	X	X		X	X
Argumento	- Razonamiento deductivo	- Demostración de la solución	X	X		X	X
	- Razonamiento empírico	- Comparar aciertos con distintas estrategias			X		

4. Dificultades Posibles de los Estudiantes

La complejidad del problema, aparentemente simple, se muestra en el análisis realizado de objetos matemáticos y de procesos. También en la literatura relacionada con este problema se han descrito varias soluciones erróneas, relacionadas con una deficiente intuición sobre la probabilidad, que comentamos a continuación. Estas soluciones pueden ser debidas a errores en el proceso de representación-interpretación (conflictos semióticos) o bien a la atribución de propiedades que no tienen aciertos objetos o situaciones, como vemos en los casos que siguen.

Razonamiento erróneo 1. Percepción de la independencia

Un primer problema se produce porque *no se percibe la dependencia de los sucesivos experimentos*. Es decir, o no se comprende la estructura del experimento compuesto o se suponen los sucesivos experimentos independientes, habiendo un conflicto consistente en atribuir una propiedad (independencia) que no tienen los experimentos. Pensamos que esto es un conflicto semiótico pues no se ha interpretado correctamente la descripción verbal del experimento, ha habido un fallo de interpretación de esta descripción verbal, que no es más que la representación del experimento real.

A primera vista parece obvio que da igual cambiar de puerta o no, pues no se visualiza la forma en que la información proporcionada por el locutor afecta a la probabilidad inicial de obtener un premio que, sin esta información, es 1/3. De nuevo hay un fallo en percibir una propiedad: Se puede condicionar un suceso por otro que aparece antes o después de él y este condicionamiento puede cambiar la probabilidad inicial del suceso.

Este error de razonamiento es explicado mediante la "falacia del eje temporal" descrita por Falk (1986), que consiste en que las personas creen erróneamente que una información actual (la puerta mostrada por el locutor) no puede afectar a un suceso que ocurrió con anterioridad a la misma (en qué puerta estaba el premio). Esta falacia puede estar causada, en parte, por la confusión entre condicionamiento y causalidad (nuevo conflicto semiótico al confundir entre si dos conceptos diferentes).

Desde el punto de vista de la probabilidad, si un suceso A es la causa estricta de un suceso B, siempre que suceda A, sucederá B, por lo que $P(B/A) = 1$. Donde, si un suceso A es causa de otro suceso B, entonces B es dependiente de A, pero el contrario no siempre se cumple. Según Falk (1986), un suceso B puede ser dependiente de otro suceso A sin que uno sea la causa del otro. Por ejemplo, se sabe que el cáncer de pulmón depende del hábito de fumar; pero fumar en si mismo no es siempre la causa del cáncer.

Razonamiento erróneo 2. Incorrecta percepción del espacio muestral

Otra posibilidad de error en este problema es una incorrecta enumeración del espacio muestral en uno o varios de los experimentos que intervienen. Es decir, habría un fallo en pasar de la idea espacio muestral (intensivo) al espacio muestral concreto (extensivo). La intuición nos dice que, una vez elegida la puerta, y quitando la puerta que abre el locutor, que nunca tiene premio, sólo quedan dos posibilidades equiprobables. Por tanto, la puerta que nosotros escogimos tiene un 50 % de tener una cabra, donde da igual cambiar que no hacerlo. En este razonamiento se está realizando una incorrecta enumeración del espacio muestral al calcular la probabilidad condicionada, otro sesgo descrito por Gras y Totohasina (1995).

El problema radica en que estamos cometiendo un error en este planteamiento y es que no consideramos la información disponible de que "el presentador conoce donde está el premio". Ya que el presentador abre la puerta *después* de la elección de jugador, la elección del jugador afecta a la puerta que abre el presentador, por tanto el espacio muestral en el segundo experimento depende del resultado del primero:

- Si el jugador escoge en su primera opción la puerta que contiene el coche (con una probabilidad de 1/3), entonces el presentador puede abrir cualquiera de las dos puertas restantes. El espacio muestral tiene dos posibilidades con probabilidad 1/2. Además, el jugador pierde el coche si cambia cuando se le ofrece la oportunidad.
- Pero, si el jugador escoge una cabra en su primera opción (con una probabilidad de 2/3), el presentador *sólo* tiene la opción de abrir una puerta, y esta es la única puerta restante que contiene una cabra. En ese caso, el espacio muestral tiene un solo elemento, la puerta restante *tiene* que contener el coche, por lo que cambiando lo gana.

Razonamiento erróneo 3. Incorrecta asignación inicial de probabilidades

Otra solución incorrecta se obtiene de la siguiente interpretación, que es una variante de la anterior: Una vez que el presentador escoge la puerta, la probabilidad que el candidato se lleve el coche (en el caso de no cambiar de puerta) es 1/2 pues el coche ha de estar en una de las puertas no abiertas. El razonamiento erróneo se debe a incorrecta aplicación de la regla de la suma de probabilidades.

Esto sucede porque lo que muestra el presentador no afecta a la elección original, sino sólo a las otras dos puertas no escogidas. Una vez se abre una puerta y se muestra la cabra, esa puerta tiene una probabilidad de 0 de contener un coche, por lo que deja de tenerse en cuenta. Si el conjunto de esta puerta más la que no has elegido tenían una probabilidad de contener el coche de 2/3 en el experimento inicial (elegir la puerta), entonces, si la puerta abierta tiene probabilidad de 0 en el segundo experimento (que la puerta tenga el coche), la puerta no elegida ni abierta debe tener una probabilidad de 2/3. Es decir, la probabilidad de 2/3 se traspasa entera a la puerta no escogida ni abierta por el locutor (en lugar de dividirse entre las dos puertas sin abrir), porque en ningún caso puede el presentador abrir la puerta escogida inicialmente.

Razonamiento erróneo 4. Interpretación incorrecta de la convergencia

Podría originarse una reafirmación en la creencia de que es indiferente cambiar o no de puerta si, al experimental con el *applet*, el alumno obtiene (debido a la aleatoriedad) un resultado parecido con las dos estrategias.

Esta posibilidad es mayor cuando el número de experimentos que se hagan con el *applet* sea pequeño, pues la convergencia de las frecuencias relativas a la probabilidad se cumple a largo plazo, pero no en pequeñas series de ensayos.

Si el alumno obtiene este resultado, podría llegar a admitir que su suposición inicial era correcta. Habría acá el peligro de que se reafirme en la "creencia en la ley de los pequeños números" (Tversky y Kahneman, 1982), que consiste en esperar convergencia en pequeñas series de experimentos.

5. Conclusiones

En este trabajo hemos hecho algunos análisis didácticos de una posible situación de enseñanza de la probabilidad, el juego de Monty Hall, que está basado en una paradoja de Bertrand (1888). El juego, que no tiene una solución inmediata, puede utilizarse en la formación de profesores y en la enseñanza de la probabilidad condicional y de la probabilidad simple. Su solución ilustra algunos principios básicos, incluidos en los axiomas de Kolmogorov, así como la construcción del espacio muestral en experimentos dependientes y los conceptos de dependencia e independencia.

En el trabajo en el aula, se plantearía el problema, dejando un tiempo para que los estudiantes lleguen a una posible solución. Seguidamente se discutirían con los estudiantes las soluciones correctas e incorrectas encontradas por los mismos, hasta lograr que se acepte alguna de las correctas. El profesor ayudaría a analizar las causas de los errores y haría un resumen de lo aprendido. En caso de resistencia a la solución, se dejaría confrontar las soluciones con la evidencia empírica producida por el applet *para que los estudiantes comprendan las causas de sus intuiciones erróneas y las revisen.*

Pensamos que en este juego se dan las condiciones de idoneidad didáctica, que Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) definen como la articulación de seis componentes:

- *Idoneidad epistémica o matemática*: Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. El proceso descrito podría se idóneo para el estudio de los conceptos de: probabilidad condicional, experimento compuesto, dependencia e independencia y experimentos dependientes e independientes, pero esta idoneidad depende del tipo de solución encontrada. En general las soluciones formales tienen mayor idoneidad en un curso universitario y de formación de profesores, pero en un curso de secundaria las soluciones intuitivas podrían ser suficientes. La solución empírica, tiene, en general, baja idoneidad matemática, a menos que se complemente con una solución intuitiva o formal.
- *Idoneidad cognitiva:* Grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los pretendidos por el profesor. La situación planteada tiene suficiente idoneidad en cursos de formación de profesores de secundaria y los últimos cursos de secundaria, pues los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos.
- *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción. Este tipo de idoneidad dependerá de cómo organiza el profesor el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en grupos para que surja el conflicto y se explicite. Será importante también organizar una discusión colectiva de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los puntos equivocados.
- *Idoneidad mediacional:* Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. No se precisa de muchos recursos, pues incluso podría hacerse una simulación con objetos físicos o con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente.
- *Idoneidad emocional:* Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. Pensamos que esta es la más alta de todas, pues el juego interesa a todo el que trata de resolverlo.

En los cursos de formación de profesores, el análisis didáctico, similar al descrito, sirve para aumentar el conocimiento de los profesores sobre probabilidad, metodología de la enseñanza de la probabilidad y algunos razonamientos erróneos de los estudiantes. Se podría mejorar el proceso si se dispone de soluciones dadas por alumnos reales que los profesores puedan analizar para detectar los errores descritos.

Agradecimiento: Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC- FEDER) y beca FPI BES-2008-009562.

Referencias bibliográficas

Bertrand, J. (1888). *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier Villars.

Bohl, A. H., Liberatore, M. J. y Nydick, R. L. (1995). A tale of two goats and a car, or the importance of assumptions in problem solutions. *Journal of Recreational Mathematics,* 1-9.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Gardner, M. (1959). Mathematical games. *Scientific American*, 219, 180-182.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 22 (2 y 3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones,* 38, 25-48.

Godino, J., Wilhelmi, M. R. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education,* 4(2), 1-26.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15(1), 49-95.

Selvin, S. (1975a). A problem in probability. *American Statistician* 29(1), 67.

Selvin, S. (1975b). On the Monty Hall problem. *American Statistician* 29(3), 134.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 3-20). Cambridge: Cambridge University Press.

Universidad de Granada

ISBN 978-84-682-4161-6