

## **Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato**

*Luis Serrano Romero, Carmen Batanero Bernabeu y Juan J. Ortiz de Haro*

*Suma, 22, 43-50, 1996*

### **Resumen**

*En este trabajo presentamos un estudio de la interpretación que hacen 277 alumnos de bachillerato de enunciados de probabilidad desde el punto de vista frecuencial. Como resultado proporcionamos a los profesores información sobre posibles dificultades de sus alumnos en la interpretación de estas enunciados, extendiendo los resultados de las investigaciones de Konold.*

Nota: Este trabajo ha sido financiado por los Proyectos de la DGICYT PS91-0114.1 y PR95-064.

Actualmente asistimos a una propuesta de cambio curricular en la enseñanza de la probabilidad en todos los niveles educativos. En los nuevos diseños curriculares, no sólo en España, sino en otros países, se sugiere iniciar esta enseñanza a una edad más temprana e introducir la probabilidad en su acepción frecuencial. La metodología recomendada está basada en la experimentación y simulación de experimentos aleatorios. Por ejemplo, en los estándares del NCTM se indica que los estudiantes deben explorar mediante situaciones y de forma activa, los modelos de probabilidad. A través de la experimentación y la simulación, los estudiantes deben formular hipótesis, comprobar conjeturas y depurar sus teorías sobre la base de la nueva información. Se supone que esta metodología ayudará a superar las dificultades y obstáculos que, sobre el desarrollo de la intuición estocástica han descrito distintos autores, como Fischbein y Gazit (1984), Fischbein y cols. (1991), Kahneman y cols. (1982) y Shaughnessy (1992).

Sin embargo, este enfoque de la enseñanza pudiera no ser tan simple como parece. En Serrano (1993) y Serrano y Batanero (1994) se sugieren, como posibles fuentes de obstáculos al aprendizaje, la heurística de la representatividad (Kahneman y cols., 1982), el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) y la interpretación incorrecta de enunciados de probabilidad en su acepción frecuencial.

En este trabajo realizamos un estudio descriptivo de las dificultades que tienen los alumnos sobre este último aspecto, esto es, para interpretar enunciados de probabilidad, desde el punto de vista frecuencial, partiendo de las investigaciones de Konold (1989, 1991) y Konold y cols. (1993). La muestra ha consistido en 147 alumnos de primer curso de bachillerato y 130 estudiantes del Curso de Orientación Universitaria. Nuestros resultados ponen de manifiesto que una proporción importante de alumnos presentan estas dificultades. Esperamos que estos resultados sean tenidos en cuenta por los profesores para detectar los estudiantes que tienen estos problemas y seleccionar actividades tendentes a su superación. Los ítems que presentamos podrían también ser empleados con finalidad diagnóstica en la enseñanza de la probabilidad.

### **Investigaciones sobre la comprensión de la probabilidad desde un punto de vista frecuencial**

Como se expone en Godino y cols. (1987), aunque axiomáticamente se admite una única definición del término probabilidad, desde el punto de vista de la asignación

inicial de probabilidades a los sucesos, existe una pluralidad de puntos de vista. Entre ellos se incluyen los enfoques clásico, frecuencial, lógico y subjetivo. La interpretación frecuencial de la probabilidad o probabilidad empírica, se restringe a fenómenos en los cuales es posible repetir indefinidamente ensayos idénticos. Bajo este punto de vista se considera que la probabilidad se calcula a partir de las frecuencias relativas observadas de cada uno de los diferentes resultados en pruebas repetidas.

Aunque esta interpretación se considera dentro de las corrientes objetivas, no significa que esté libre de consideraciones de tipo subjetivo. Por el contrario, requiere que el sujeto acepte que los resultados de una larga serie de experimentos puedan ser considerados idénticos, para el fin de acumular la frecuencia de aparición de cada suceso particular. Por ejemplo, el hecho de que todos los lanzamientos que hacemos con una misma moneda puedan ser considerados idénticos es, hasta cierto punto, subjetivo, ya que la persona que las lanza, puede introducir sesgos en algunos de los lanzamientos.

Konold ha investigado la comprensión, por parte de estudiantes universitarios, de enunciados de probabilidad en que la asignación de probabilidades es de tipo frecuencial. En sus trabajos se interesó por el modo en que los alumnos interpretan las preguntas sobre la probabilidad o el valor de una probabilidad. En Konold (1989) se describe la dificultad que tienen algunos estudiantes para interpretar la repetición de un experimento aleatorio como parte de una serie de ensayos. Los sujetos que muestran esta dificultad consideran que cada una de las repeticiones del experimento está aislada; no tiene por qué guardar relación con las anteriores o posteriores. Denomina a esta conducta *outcome approach* (enfoque en un solo resultado).

Konold (1991), como resultado de sus entrevistas a estudiantes universitarios, llegó a la conclusión de que estos interpretaban una pregunta sobre la probabilidad de forma no probabilística. Cuando se pide explícitamente calcular la probabilidad de un suceso, se interpreta como tener que predecir si el suceso en cuestión ocurrirá o no en el siguiente experimento. Al interpretar una predicción meteorológica en la que se dan unas probabilidades de lluvia de un 70%, muchos sujetos indican que lloverá el día en cuestión. Si el día en cuestión no llueve, pensarán que el meteorólogo se equivocó en sus predicciones. Si llueve un 70% de días para los que se pronosticó un 70% de probabilidades de lluvia, pensarán que el meteorólogo es poco fiable.

Sin embargo, son este tipo de situaciones sobre problemas reales las que se recomienda en los estándares del NCTM (1991) para el estudio de la probabilidad: "*Estas investigaciones deben incorporar diversos problemas reales a partir de preguntas sobre acontecimientos deportivos o sobre si va a llover el día de la excursión*" (p. 111).

Este tipo de sujetos evalúa las probabilidades comparándolas con los valores 0%, 50% y 100%. Si la probabilidad de un suceso dado se acerca a los extremos 0% o 100%, se considerará como imposible o seguro, respectivamente. Sólo si se acerca al 50% se considerará verdaderamente aleatorio. Los estudiantes que muestran este tipo de comportamientos tienden a buscar explicaciones causales en lugar de aleatorias a la ocurrencia de resultados inesperados y a la variabilidad de los fenómenos aleatorios. Por ejemplo, la frase "70% de posibilidades de lluvia" se interpreta como 70% de superficie cubierta por las nubes o 70% de humedad relativa. Asimismo se ignora la información de tipo frecuencial basando los juicios en consideraciones subjetivas sobre el fenómeno. En consecuencia, construyen teorías sobre el suceso bajo estudio, que les resultan útiles como base para la predicción y también para la explicación de resultados inesperados.

## Objetivos de la investigación y descripción del cuestionario

El estudio ha sido realizado sobre una muestra de 277 alumnos, 130 de ellos de primer curso de bachillerato, y el resto del COU de las distintas especialidades. La muestra incluía aproximadamente igual número de varones y mujeres y alumnos de diversos centros de bachillerato de la ciudad de Melilla, El motivo para elegir estos dos grupos es analizar los posibles cambios en las concepciones de los alumnos y alumnas a lo largo de sus estudios de bachillerato, así como su mayor maduración psicológica.

Los ítems que analizamos evalúan la interpretación que hacen los alumnos de los enunciados frecuenciales de probabilidad. El primero, que se presenta a continuación, ha sido tomado del test de Garfield (1991). Recoge la pregunta típica que Konold (1991) usó en su investigación, aunque esta fue llevada a cabo por medio de entrevistas.

**Ítem 1.** El Centro Meteorológico de Springfields quiso determinar la precisión de su meteorólogo. Buscaron sus registros de aquellos días en los que el meteorólogo había informado que había un 70 por ciento de posibilidades de lluvia. Compararon estas predicciones con los registros que indicaban si llovió o no en esos días en particular. Elige la opción que crees es la más apropiada:

a) La predicción del 70 por ciento de posibilidades de lluvia puede considerarse muy precisa, si llovió:

- a. Entre el 95 por ciento y el 100 por ciento de esos días
- b. Entre el 85 por ciento y el 94 por ciento de esos días
- c. Entre el 75 por ciento y el 84 por ciento de esos días
- d. d)\* Entre el 65 por ciento y el 74 por ciento de esos días
- e. e) Entre el 55 por ciento y el 64 por ciento de esos días
- f. f) No sabe, no contesta.

b) Supongamos que este hombre del tiempo dice que mañana hay un 70 por ciento de posibilidades de lluvia y mañana no llueve. ¿Qué conclusión sacarías sobre su predicción de que había un 70 por ciento de posibilidades de lluvia?

En una interpretación normativa de la probabilidad, la opción correcta al primer apartado del ítem es la *d*. Sin embargo, los sujetos que presentan el *outcome approach* elegirán típicamente una de las respuestas a o b, según los resultados de Konold. La segunda parte del ítem ha sido también tomada de las investigaciones de Garfield (1991) y Konold (1991). Se trata de confrontar a los alumnos con una situación no prevista, para ver si mantienen un argumento coherente con la opción elegida en la primera parte.

El segundo ítem ha sido construido para esta investigación. Aunque el enunciado de este ítem es bastante similar al anterior, el contexto es mucho más familiar al alumno. Además, la información frecuencial se da en términos del tanto por ciento de hámsters que prefiere un alimento, en lugar de usar el término más técnico de posibilidades o probabilidades.

**Ítem 2.** Al inicio de un camino que conduce a dos posibles orificios A y B se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia su alimento situado al final del camino. En el orificio A ponemos pipas y en el B cacahuetes. Según un amigo mío que ha criado muchos hámsters, el 70 de cada 100 hámsters prefieren las pipas a los cacahuetes. a) Si hacemos la prueba con un hámster y este se dirige hacia B ¿piensas que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué? b) Si hacemos la prueba con 10 hámsters y 3 de ellos se dirigen a B (eligen los cacahuetes) ¿pensarías que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?

## Resultados y discusión

Una vez recogidos los datos se analizaron no sólo las opciones elegidas en los ítems, sino también los argumentos proporcionados por los alumnos, para lo cual se llegó a un sistema de categorías, mediante un proceso de análisis y refinamiento sucesivo. Con las categorías obtenidas se elaboraron tablas de frecuencias clasificadas según el grupo del alumno. A estas tablas se aplicó el test Chi cuadrado, agrupando las frecuencias de categorías similares cuando la frecuencia esperada en alguna de las celdas era menor que 5.

Las respuestas elegidas por los alumnos al primer ítem se incluyen en la tabla 1. La comprensión de la probabilidad frecuencial en esta pregunta parece razonable, ya que la mayor parte de los alumnos ha elegido los valores próximos al 70 por ciento (opción d, que ha sido elegida por el 43%). Sin embargo, una proporción bastante notable de alumnos eligen opciones sesgadas, especialmente las opciones a y b que indican que la frecuencia esperada de lluvia se sitúa por encima del 85 por ciento.

**Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de respuestas al ítem 1 a**

Respuesta	Alumnos de 14 años		Alumnos de 17 años		Total	
	Frec	%	Frec	%	Frec	%
A	17	11.6	14	10.8	31	11.2
B	19	12.9	8	6.2	27	9.7
C	32	21.8	20	15.4	52	18.8
D *	51	34.7	68	52.3	119	43.0
E	28	19.0	18	13.8	46	16.6
Blanco	0	0,0	2	1.5	2	0.7
Total	147		130		277	

Estos alumnos no relacionarían la probabilidad teórica con la frecuencia esperada de días de lluvia, sobrestimando la frecuencia esperada, debido a que la probabilidad de días de lluvia es alta. Al comparar los dos grupos, observamos que la interpretación correcta ha mejorado con la edad. Mientras que el 34.7% de alumnos de 14 años da la respuesta correcta y el 24.5 % una estimación por encima del 85 por ciento para la frecuencia relativa esperada, en los alumnos de 18 años estos porcentajes son el 52.3% y 17% respectivamente. La significación estadística de estas diferencias ha sido probada mediante el contraste Chi cuadrado de homogeneidad de muestras, obteniéndose un valor  $X^2 = 10,881$  con 4 g.l. ( $p=0.029$ ). Sin embargo, es importante aún el número de alumnos de 18 años que interpretan incorrectamente un enunciado frecuencial de probabilidad.

Los argumentos dados en la segunda parte del ítem han sido clasificados según el siguiente esquema:

a) *Cae dentro del 30% de probabilidades.* Recogemos en este argumento el caso de los alumnos que piensan que el pronóstico del hombre del tiempo era correcto), pero debido al 30% de posibilidades en contra de la lluvia, el suceso que ha ocurrido cae dentro de

estas posibilidades: "*Pues que como existía un 30% de posibilidades de que no llovería, se ha cumplido*"

b) *Explicación de tipo causal.* Estos alumnos creen que debiera llover y buscan una explicación de tipo causal al fallo en su predicción: "*Que lo mas seguro es que llueva todavía*". "*Que hubo viento y se llevó las nubes*". Hay que tener en cuenta que un enfoque probabilístico formal no niega necesariamente la existencia de mecanismos causales subyacentes (Batanero y Serrano, 1995). Ven (1962) analizó este punto, indicando que el calculo de probabilidades adopta una posición por la cual se ignoran los posibles mecanismos causales, centrándose en las regularidades que ocurren en una serie independientes de estos posibles agentes. Sin embargo, en el *outcome approach* se intenta alcanzar la predicción a partir del análisis de posibles esquemas causales. Puesto que, para estos sujetos, 70% se interpreta como seguridad, la no coincidencia debe deducirse del análisis de los factores (causas) que la producen, más que de los datos de las frecuencias.

c) *Se equivocó, debería llover el 100% de los días.* Como en el caso anterior, los sujetos manifiestan una interpretación incorrecta de la probabilidad frecuencial, llegando al punto de pensar que el pronóstico era equivocado: "*Que sus cálculos están mal hechos, pues habiendo calculado que hay mayores posibilidades de lluvia, después no llueve*". Los sujetos traducen los enunciados 70% de posibilidades de lluvia' a otros más cualitativo: "Va a llover". Los valores de probabilidad son convertidos a tres puntos, 0%, 50%, 100%, de acuerdo con criterios de proximidad. Por ello 70% se asimila a la ocurrencia, esto es, al 100%.

d) *Imposible sacar conclusiones.* Son los sujetos que creen que el carácter aleatorio del experimento lo hace imposible de controlar o predecir, decir, ni siquiera en términos probabilidades. Explican el fallo de su predicción por el carácter aleatorio del experimento: "*el tiempo es impredecible*". Serían los sujetos que subjetivamente han asimilado los datos al caso del 50% de ocurrencia, pensando que no puede darse ningún tipo de predicción.

Contrasta el resultados de la segunda parte del ítem (tabla 2) con el de la primera. La mayor parte elige la opción c en la que se especifica que hubo un error por parte del meteorólogo. Esta es una respuesta típica que Konold ha encontrado en los sujetos que presentan el sesgo del *outcome approach*. Konold denomina característica del "ensayo simple" a la tendencia a centrarse en el resultados de un solo experimento. Esta tendencia contrasta con la aproximación frecuencial, en la que el objetivo se concentra en una muestra de ensayos. Mientras que en el ensayo simple el objetivo es predecir un resultado y, por tanto, un proceso de decisión, en el enfoque frecuencial el objetivo es predecir el promedio en una muestra. Es decir, la estimación de la frecuencia de ocurrencia un resultado particular en una serie de ensayos.

Otros sujetos (18,4%, respuesta d) creen que es imposible sacar conclusiones sobre el hecho planteado. Finalmente un grupo importante de alumnos 27.8%, respuesta a) hace una interpretación correcta de la probabilidad frecuencial, alegando que el hombre del tiempo podría estar dentro del 30% de posibilidades de que no lloviese. Como hemos indicado, este porcentaje es inferior al que dio la respuesta correcta.

Al comparar los dos grupos de alumnos, vemos de nuevo la mejora con la edad, especialmente si comparamos los porcentajes de respuestas a las opciones a y c. La diferencia fue significativa ( $X^2 = 11,407$  con 3 gl.,  $p < 0,001$ ). Asimismo se observó la

consistencia entre respuesta y argumento, ya que el argumento correcto fue elegido mayoritariamente por los alumnos que eligieron la respuesta correcta. Ello confirma nuestra interpretación de los resultados en el primer apartado del ítem, pues los argumentos c y d predominan entre los alumnos que predijeron una alta frecuencia de días de lluvia.

Las respuestas al ítem 2 se presentan en la tabla 3. En total 20 alumnos creen que había una equivocación en las frecuencias dadas. En definitiva se está razonando aplicando el outcome approach. Hay una mayoría de alumnos, sin embargo, que dan una respuesta correcta y la proporción aumenta con la edad de los alumnos. Las diferencias entre los dos grupos fueron estadísticamente significativas ( $X^2 = 8.39$ , 1 gl,  $p = .001$ ). Los argumentos en este ítem fueron clasificados con los mismos criterios que en el caso anterior, y se presentan en la tabla 4.

**Tabla 2: Frecuencias y porcentajes de argumentos en el ítem 1. b**

Argumentos	Alumnos de 14 años		Alumnos de 17 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
a	29	19.7	48	36.9	77	27.8
b	5	3.4	1	0.8	6	2.2
c	74	50.3	49	37.7	123	44.4
d	27	18.4	24	18.5	51	18.4
Blanco	12	8.2	8	6.2	20	7.2
Total	147		130		247	

**Tabla 3: Frecuencias y porcentajes de respuestas en el ítem 2.a**

Respuestas	Alumnos de 14 años		Alumnos de 17 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
Si	16	10.9	4	3.1	20	7.2
No	127	86.4	126	96.9	253	91.4
Blanco	4	2.7	0	0.0	4	1.4
Total	147		130		277	

Vemos que un porcentaje apreciable de alumnos da el argumento correcto basándose en que una probabilidad del 30 por ciento implica que el suceso puede ocurrir y no sería demasiado raro. Sin embargo este porcentaje es mucho menor que el que da la respuesta correcta, lo que señala la conveniencia de analizar los argumentos de los alumnos. También aparecen aquí de nuevo los casos en que los alumnos emplean sus teorías previas sin guiarse por los datos objetivos (respuesta h). Otros grupos amplios de alumnos aplica el outcome approach. (respuesta c) o cree que. al ser el suceso aleatorio podría ocurrir cualquier cosa, independientemente de las probabilidades (respuesta d), Una parte de las respuestas correctas se eligen por razón incorrecta.

**Tabla 4. Frecuencias y porcentajes de argumentos en el ítem 2.a**

	Alumnos de 14 años		Alumnos de 17 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
a	40	27,2	71	54,6	111	40,1
b	10	6,8	3	2,3	13	4,7
c	55	37,4	33	25,4	88	31,8
d	5	3,4	8	6,2	13	4,7
Blanco	37	25,2	15	11,5	52	18,8
Total	147		130		277	

Al comparar los dos grupos de alumnos vemos una diferencia muy notable entre las proporciones de respuesta e que es correcta y d que es incorrecta, siendo la primera superior al 50%, en alumnos de 18 años. Es también mayor el número de alumnos de 14 años que no da argumento. Las diferencias fueron estadísticamente significativas ( $X^2=23,523$  con 3 g.l.,  $p=0,00003$ ). La opción mayoritaria en el apartado h del ítem 2 es que no, correcta, aumentando con la edad. Las diferencias fueron estadísticamente significativas a favor de los alumnos de 18 años ( $X^2=5,541$ , 1 gl,  $p=0,0186$ ). Además de los argumentos ya comentados aparecieron los siguientes.

e) *Se mantiene la proporción.* La respuesta se basa en el parecido de la proporción muestral y la poblacional. Aunque la respuesta puede tener encubierto el empleo de la heurística de la representatividad, la consideramos correcta porque no tenemos datos para discriminar el uso de esta heurística: *"El resultado parece casual, ha sido igual que lo predicho"*

f) *Hay pocos hámsters.* El tamaño de la muestra nos permite sacar conclusiones: *"Hay pocos datos"*.

La mayor parte de los alumnos han elegido las opciones correctas, es decir, se basan en que el caso se ajusta exactamente a las probabilidades teóricas. Los sujetos que eligen b y d creen que el suceso es impredecible o buscan explicaciones causales. Las diferencias fueron de nuevo significativas. Los alumnos de 18 años eligen en mayor proporción las respuestas correctas, mientras que los de 14 eligen las incorrectas en mayor medida. Solo el 59.6% de los alumnos da un argumento correcto.

### Conclusiones

En resumen, podemos concluir que un grupo importante de alumnos manifiestan dificultades en la interpretación frecuencial de una probabilidad. Esto se ha notado especialmente en el ítem 1, aunque el contexto más familiar del ítem 2 ha facilitado su interpretación por parte de los alumnos.

Aunque la opción elegida (en especial en los apartados del ítem 2) ha sido con frecuencia correcta, los argumentos en que se apoya la elección no son siempre normativos. Entre los argumentos incorrectos que hemos encontrado con mayor frecuencia destacamos los siguientes:

**Tabla 5. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el ítem 2.b**

Argumentos	Alumnos de 14 años		Alumnos de 17 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
Si	16	10.9	3	2.3	19	6.9
No	127	86.4	124	95.4	151	99.6
Blanco	4	2.7	3	2.3	7	2.5
Total	147		130		247	

**Tabla 6. Frecuencias y porcentajes de argumentos en el ítem 2.b**

Argumentos	Alumnos de 14 años		Alumnos de 17 años		Total	
	Fi	%	Fi	%	Fi	%
a	9	6.1	20	15.4	29	10.5
b	26	17.7	9	6.9	35	12.6
c	2	1.4	2	1.5	4	1.4
d	35	23.8	20	15.4	55	19.9
e	66	44.9	70	53.8	136	49.1
f	9	6,1	9	6.9	18	6.3
Total	147		130		247	

- a. Creencia en que ha habido un error en los datos del problema y en la equivalencia entre alta probabilidad y seguridad en la ocurrencia del suceso.
  - b. Búsqueda de razones de tipos causal para explicar un suceso no esperado.
- 
- a. Justificar los resultados por la impredecibilidades de los experimentos aleatorios, sin tener en cuenta la probabilidad de los sucesos.

Podríamos pensar que el outcome approach sería semejante a una asignación subjetiva de probabilidades pues en ambos casos hay un grado de creencia implicado. Sin embargo, un enfoque subjetivo no llevaría a un proceso de decisión ocurrencia/ no ocurrencia, como se muestra en los argumentos de los alumnos. Los modelos probabilísticos no se centran sobre la predicción y control de sucesos particulares. sino en las tendencias en muestras de suficiente tamaño. Todos estos resultados suponen la necesidad de un diseño cuidadoso de las situaciones de enseñanza, para tener en cuenta estos tipos de problemas y ayudar a los alumnos a construir prácticas significativas para su resolución. Como indica Konold (1995), no es suficiente pedir a los alumnos que hagan predicciones y las comparen con sus datos experimentales para cambiar sus concepciones incorrectas, porque raramente se recogen suficientes datos para revelar los patrones probabilísticos. Además la atención de los alumnos es limitada y la variabilidad del muestreo se suele ignorar. Por nuestra parte. en Godino y cols. (1987) y

Shaughnessy y Batanero (1995) sugerimos algunos ejemplos de como llevan a cabo esta enseñanza.

### Referencias

BATANERO, C. y SERRANO, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5, 15-28.

GARFIEL, J. (1991). Evaluating students' understanding of statistics: Development of the statistical reasoning assesment. En R. UNDERHILL (Ed.), *Proceedings of the XIII PME-NA*, (v.2, pp. 1-7), Blacksbourg, Va.

GODINO, J., BATANERO, C. y CAÑIZARES, M. J. (1987), *Azar y probabilidad Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

FISCHBEIN, E. y GAZIT, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 1-24.

FISCHBEIN, E, SAINATI, M. y SCIOLIS, M. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

LECOUTRE, M. P. (1992). Cognitive models and problems space in "purely random situations". *Educational Studies in Mathematics*, 23. 557-568.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (1982): *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*, Cambridge: University Press.

KONOLD, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

KONOLD, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von GLASERSFELD (Ed.), *Radical constructivism in Mathematics Education* (139-156). Dordrecht: Kluwer.

KONOLD, C. (1995). Confessions of a coin flipper and would-be instructor. *The American Statistician*, 49(2), 203-209.

KONOLD, C. y otros (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, 392-414.

MOORE, D. (1995), *The basic practice of statistics*. New York: Freeman.

M.E.C. (1992). *Educación Primaria. Area de Matemáticas*, MEC, Madrid.

N.C.T.M. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*, Traducción de la SAEM Thales, Sevilla.

ROA, R., BATANERO, C., GODINO, J. D. y CAÑIZARES, M. J. (1996). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433-446

SERRANO, L. (1993). *Aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad y conceptos elementales sobre procesos estocásticos: un estudio de concepciones iniciales*, Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

SERRANO, L. Y BATANERO, C. (1994). Concepciones sobre la convergencia estocástica y heurística de representatividad en una situación de simulación. *Actas de las V Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, Universidad de Badajoz, 571-574.

SERRANO, L., BATANERO, C. y GODINO, J. D. (1991). Sucesiones de ensayos de Bernoulli y procesos estocásticos asociados. *Actas de las V Jornadas de Profesores de Matemáticas de THALES* (pp. 233 - 247). Granada: Sociedad Thales.

SHAUGHNESSY, J. M. (1992): Research in probability and statistics; reflections and directions. En A. GROWS (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Mc Millan

SHAUGHNESSY, J. M. y BATANERO, C. (1995). Un enfoque visual para enseñar las probabilidades binomiales. *UNO*, 5, 103-112.

VENN, J. (1962): *The logic of chance*, Mac Millan. London. (Edición original de 1988).