RAZONAMIENTO SOBRE PROBABILIDAD CONDICIONAL E IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

Epsilon, 2005, 59, 245-260.

Carmen Díaz e Inmaculada de la Fuente
Departamento de Psicología Social y Metodología de las Ciencias del Comportamiento, Universidad de Granada, mcdiaz@ugr.es, edfuente@ugr.es

En este trabajo realizamos una revisión de las principales investigaciones en Psicología y Educación sobre razonamiento y comprensión de la probabilidad condicional. Finalizamos con algunas implicaciones para la enseñanza de la estadística.

INTRODUCCIÓN

La probabilidad condicional es fundamental en las aplicaciones de la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información. Es también un concepto teórico básico requerido en la construcción del espacio muestral producto. Por ello, su correcta comprensión y el razonamiento sobre la misma son requisitos en el estudio de la inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana, así como en el estudio de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales. En el terreno profesional e incluso en la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional.

Sin embargo, la Psicología del razonamiento, así como algunas investigaciones recientes en didáctica de la probabilidad muestran la existencia de intuiciones incorrectas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión y aplicación de este concepto. Algunos de ellos están bastante extendidos y una enseñanza formal de la probabilidad es insuficiente para superarlos. Es necesario que el sujeto se haga consciente de estas dificultades y aprenda a afrontar los problemas condicionales con unas herramientas adecuadas.

En lo que sigue analizamos las principales investigaciones relacionadas con la comprensión de las ideas de probabilidad condicional e independencia, tanto en el campo de la Psicología, como en el de la Educación. La finalidad es proporcionar una clasificación de las principales dificultades con las que nos enfrentamos en este tipo de razonamiento, mostrando ejemplos de tareas usadas en dichas investigaciones, así como las respuestas típicas a las mismas. Creemos que esta información es valiosa para los profesores de matemáticas y estadística, quienes pueden usar estas tareas para evaluar los conocimientos y razonamientos previos de sus alumnos o como recurso de enseñanza del tema.

COMPRENSIÓN INTUITIVA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA

La probabilidad condicional puede definirse con diversos grados de formalización. Intuitivamente podemos decir que la probabilidad condicional $P(A/B)$ de un suceso A dado otro suceso B es simplemente la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado. Desde un punto de vista más formal se define mediante la expresión (1).

(1) $P\,(A/B) = P\,(A \cap B)/P(B)$, siempre que $P(B) > 0$.

Un concepto relacionado es el de independencia. Matemáticamente puede deducirse de la regla del producto de probabilidades, mediante la definición (2).

(2) *A y B son independientes si y sólo si* $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$,

Intuitivamente también se relaciona con el de probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro (definición intuitiva, “a priori” de independencia, según Maury, 1986).

Estas definiciones no tienen dificultad de comprensión, desde el punto de vista matemático, ya que no requieren cálculos complejos. Pero, desde un punto de vista psicológico y didáctico son difíciles, especialmente al aplicarlas en la resolución de problemas y toma de decisiones. Es complicado, en muchos casos, saber si dos sucesos reales son o no independientes; por ejemplo, demostrar la relación entre fumar y desarrollar un cáncer ha supuesto muchos años de investigación. En lo que sigue analizamos algunas de estas dificultades.

Maury (1986) analiza la comprensión intuitiva de 374 estudiantes del curso preuniversitario y últimos cursos de Bachillerato, respecto a la probabilidad condicional usando cuatro problemas similares al Problema 1 (contexto de bolas en urnas y ruletas; con y sin reemplazamiento). También utiliza dos tipos de vocabulario (técnico y cotidiano) al plantear el problema 1.

Problema 1. Se tiene una bolsa con 1 bola azul y 2 bolas rojas. Se saca una bola al azar. Sin reponerla otra vez en la bolsa se saca una segunda bola. ¿Cuál suceso es más probable?

- *Sacar dos bolas rojas.*
- *Sacar primero una bola roja y luego una azul.*

Sólo la cuarta parte de los alumnos produce respuestas correctas, mientras que los mismos alumnos obtienen un 60% de aciertos con problemas de probabilidad simple. La autora supone que la dificultad no está ligada, en sí, a la noción de independencia, sino que el hecho de que los dos sucesos (azul /rojo) sean no equiprobables introduce un distractor que aumenta la dificultad de las tareas. Esta suposición se confirma en otro experimento (Maury, 1985; 1986) en la que plantea a 290 alumnos de entre 13 y 16 años el Problema 2.

Problema 2. Una persona lanza 3 veces la misma moneda, obteniendo en este orden los resultados siguientes: cara, cruz, cruz. Lanza la moneda una cuarta vez. ¿Piensas que en el cuarto resultado es más probable la cara o la cruz?

Los resultados mejoran en este caso hasta el 70 % de éxitos, lo que para Maury indica el reconocimiento intuitivo de la independencia por parte de los alumnos. El problema es planteado en cuatro variantes, cambiando la forma de la pregunta final y la autora observa un éxito mayor cuando en la pregunta se listan todos los sucesos posibles del espacio muestral, que cuando no se listan.

Totohasina (1992) propone a 67 alumnos del curso preuniversitario, que habían estudiado la probabilidad, pero no la probabilidad condicional, la siguiente pregunta:

Problema 3. Una tienda almacena sus productos en cajas. Estas cajas son de dos colores: rojo (25% de las cajas) o azul (75%). Las cajas están envueltas por envoltorio de papel. Algunos de estos envoltorios tienen la marca M en la parte inferior. Entre los envoltorios que contienen una caja roja, el 45% tiene la marca M. Entre los envoltorios que contienen una caja azul, el 60% tiene la marca M. Tomamos una caja envuelta, la abrimos y vemos que es roja, ¿cuál es la probabilidad de que el envoltorio tenga la marca M?

Si el envoltorio tiene la marca M, ¿cuál es la probabilidad de que la caja sea azul?

Aproximadamente el 60% de los alumnos dieron una respuesta correcta, muchos de ellos apoyándose en representaciones usadas espontáneamente para resolver el problema, como diagrama en árbol, representación mediante tabla de doble entrada o representación rectangular. Entre las dificultades encontradas por los alumnos en la resolución del problema, encuentra:

- Interpretación no probabilística del enunciado, haciendo uso sólo de las frecuencias absolutas de casos, pero no de los porcentajes.
- No restringir el espacio muestral al calcular las probabilidades, lo que implica una comprensión deficiente de la idea de condicionamiento.
- Confusión entre la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional: *"tenemos un 25% de bolas rojas en el conjunto y de ellas el 45% tienen la marca M; luego (25/100)x(45/100)= 11.25% de las bolas rojas tienen la marca"*.

Este tipo de dificultad no es exclusivo de estos alumnos, sino que algunos estudios muestran la persistencia de esas ideas, y el olvido total de la regla del producto o la definición de independencia estocástica, en sujetos que, en algún momento, habían realizado un curso de probabilidad que incluía estos conceptos. Por ejemplo, Sánchez (1996) pasa un cuestionario de probabilidad a 88 profesores de Matemáticas que participaban en México en un programa de actualización, que incluía el problema siguiente.

Problema 4. Se extrae una carta al azar de una baraja americana: sea A el evento "se extrae un trébol" y B el evento "se extrae una reina" ¿Los eventos A y B son independientes?

Sólo 44 profesores hicieron intentos sistemáticos por resolver el problema; de éstos, 39 llegaron a una respuesta, pero sólo 4 lo hicieron correctamente, utilizando la regla del producto. En las respuestas incorrectas encuentra dos tipos de razonamiento:

a) Creer que eventos independientes son lo mismo que eventos excluyentes: *"No son independientes porque tenemos la reina de tréboles"*. Este es un error muy extendido, y ha sido descrito, entre otros autores, por Kelly y Zwiers (1986). Los autores sugieren que el error puede ser debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que "independiente" puede significar, a veces, separado. Por otro lado, tanto en la definición formal de independencia como en la de sucesos excluyentes interviene la operación de intersección. Usualmente decimos que dos sucesos son independientes cuando la aparición /no-aparición de uno de ellos no proporciona información sobre la ocurrencia del otro. En el caso de sucesos excluyentes la aparición de uno implica la no-aparición del otro, por tanto dos sucesos excluyentes son siempre dependientes.

b) Creer que sólo se puede aplicar la idea de independencia a sucesiones de experiencias: *"si extraemos una carta para verificar el evento A y se vuelve a colocar en la baraja para verificar el evento B entonces A y B son independientes. Si se extrae la carta para verificar A y no se regresa, entonces A y B no son independientes"*.

CONDICIONAMIENTO Y CAUSACIÓN

La causalidad es un concepto científico, filosófico y psicológico complejo. Por otro lado es también un concepto intuitivamente comprendido y aceptado por las personas ya que construimos nuestro conocimiento del mundo sobre la base de relaciones de causa y efecto entre diferentes sucesos.

Desde el punto de vista de la probabilidad, si un suceso *A* es la causa estricta de un suceso *B*, siempre que suceda *A*, sucederá *B*, por lo que *P(B/ A)=1.* La relación causal estricta es difícil de hallar en el mundo real y hablamos de relación de *causa débil* cuando al suceder A cambia la probabilidad de que ocurra B. Es decir, cuando *P(B/A)* es diferente de *P(B),* por lo cual una relación de causalidad implica una dependencia de tipo estadístico entre los sucesos implicados.

Sin embargo lo contrario no es cierto, ya que dos sucesos pueden ser estadísticamente dependientes, sin que uno de ellos sea causa del otro. Por ejemplo, es sabido que los países con mayor esperanza de vida tienen una menor tasa de natalidad (por ello hay una correlación inversa entre esperanza de vida y tasa de natalidad), pero esto no implica que la tasa de natalidad sea causa de la esperanza de vida o al contrario, ya que si conseguimos aumentar la natalidad de un país esto no incide automáticamente en la esperanza de vida de sus habitantes. La existencia de una relación condicional indica que una relación causal es posible, pero no segura. Una asociación estadística entre variables puede ser debida a otras variables intervinientes o incluso ser espúrea y no implica relación causal.

Desde el punto de vista psicológico, la persona que evalúa una probabilidad condicional P(A/ B) va a percibir dos relaciones muy diferentes entre A (suceso evaluado) y B (suceso condicionante) dependiendo del contexto. Veamos el siguiente ejemplo:

> *Problema 5 ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable? a) Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules. b) Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules. c) Los dos sucesos son igual de probables" (Pollatsek y cols., 1987).*

- Si dentro del contexto se percibe que *B* (suceso condicionante) es una causa de *A*, la persona establecerá entre *A* y *B* una *relación causal*. En la primera opción, A sería que la niña tenga los ojos azules (efecto), *B* que la madre tenga los ojos azules (causa). Por tanto, *P(A/ B),* es una relación causal. En este caso el estudiante tendrá que realizar un razonamiento causal, estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas.
- Si dentro del contexto se percibe *A* como una causa de *B*, la persona establecerá entre *A* y *B* una *relación diagnóstica*. En la segunda opción *A* sería que la madre tenga los ojos azules (causa) y *B* que la niña tenga los ojos azules, por tanto *P(A/ B*), es una relación diagnóstica. En este caso se realizaría un razonamiento diagnóstico, estimando la causa dado el conocimiento del efecto.

Aunque matemáticamente los dos enunciados son equivalentes, desde un punto de vista psicológico no son percibidos como idénticos por las personas. Un efecto muy estudiado es la creencia que las relaciones causales son más fuertes que las relaciones diagnósticas. Tversky y Kahneman (1982a) encontraron que las personas encontraban más probable que "una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules" que "una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules", aunque la casi la mitad de los sujetos de su estudio respondieron correctamente "ambos sucesos son igual de probables". Tversky y Kahneman explican este hallazgo con la existencia de un sesgo causal cuando las personas se enfrentan con tareas relacionadas con la probabilidad condicional.

CONDICIONAMIENTO Y TEMPORALIDAD

La relación de causalidad también se asocia, a menudo, con la secuencia temporal. El problema 6 (Falk, 1986) ilustra como algunos estudiantes tienen problemas con la condicionalidad cuando se invierte el eje de tiempo en que los sucesos ocurren de una forma natural.

Problema 6. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento.
¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? P (N2/ N1)
¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? P (N1/ N2)"

Mientras los alumnos de Falk no tenían dificultad para resolver la primera parte del problema 6, muchos eran incapaces de dar una solución a la segunda, a la que responden que el resultado en la segunda extracción no afecta a la primera. Muchos de ellos dan como respuesta 1/2, teniendo en cuenta sólo la composición de la urna y sin utilizar el dato del resultado posterior. Este tipo de respuestas rechazando considerar la evidencia ocurrida después del suceso que juzgamos, se conoce como *falacia del eje temporal* y consiste en suponer que el suceso condicionante en la probabilidad condicional ha de preceder temporalmente al condicionado.

También aquí hay un mecanismo implícito que supone la confusión entre condicionamiento y causación. En el ejemplo, el resultado en la segunda extracción depende causalmente del suceso obtenido en la primera Esto no ocurre al revés, pero conocer el color de la segunda bola influye en la predicción del color de la primera, de la misma forma que conocer el resultado en la primera extracción influye en la estimación del resultado en la segunda. Ello se debe al hecho de que al saber que la segunda bola fue negra, quita esta bola de los posibles resultados en la primera extracción, por tanto ha habido una reducción del espacio muestral y $P(N_1/N_2)$ sería un tercio, igual que la $P(N_2/N_1)$.

En la primera situación, la inferencia causal es una situación natural y compatible con el eje temporal, pero la segunda situación donde se nos pide hacer una inferencia inversa, que requiere un razonamiento probabilístico que es indiferente al orden temporal, lo que puede crear dificultades psicológicas. Entender que la probabilidad de un suceso puede ser revisada a la luz de resultados posteriores es importante, sobre todo dentro del marco de la inferencia bayesiana, donde la actualización de las probabilidades a la luz de los resultados juega un papel tan importante.

Gras y Totohasina (1995) identifican tres tipos de concepciones erróneas sobre la probabilidad condicional en estudiantes:

- En la *concepción cronológica* los estudiantes interpretan la probabilidad condicional *P(A/B)* como una relación temporal, donde el evento condicionante B siempre precede al suceso A.
- En la *concepción causal*, los estudiantes interpretan la probabilidad condicional *P(A/B*) como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante B es la causa y A la consecuencia.
- En la *concepción cardinal* los estudiantes interpretan la probabilidad condicional

P(A/B) como la proporción $\frac{\text{Card}\,(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$, que es correcta en el caso de un espacio muestral finito equiprobable. Aún así, cuando se maneja un espacio muestral continuo o las probabilidades de los diferentes sucesos no son iguales, esta concepción lleva a un error. Otros estudiantes interpretan *P(A/B)* como la proporción $\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(B)}$, que es siempre falso.

Para estimar la proporción de estudiantes con este tipo de concepciones, Gras y Totohasina (1995) hicieron las siguientes preguntas a una muestra de 75 estudiantes de secundaria (17-18 años), después de haber recibido una enseñanza experimental sobre probabilidad condicional:

Pregunta A. Para calcular la probabilidad condicional P (A/B), ¿Debe ocurrir el suceso B cronológicamente antes que el suceso A? Si__ No__ No sabe__
Pregunta B. Para calcular la probabilidad condicional P (A/B), ¿Debemos asumir que el suceso B es la causa y el suceso A el efecto o la consecuencia de B? Si__ No__ No sé__

El 63 % de los estudiantes dio una respuesta afirmativa a la pregunta A y un 28 % respondió afirmativamente a la pregunta B. Los autores sugieren que el origen de las dos primeras concepciones erróneas es cognitivo, mientras que la concepción cardinal es inducida por la enseñanza.

INTERCAMBIO DE SUCESOS EN LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Falk (1986) sugiere que muchos estudiantes no discriminan adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional *P(A/ B)* y *P(B/ A)* y denomina a este error *falacia de la condicional transpuesta*. Este error se ha observado en problemas de contextos médicos, donde se confunde la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positivo el test de diagnóstico con la probabilidad de un resultado positivo en el test de diagnóstico, dado que se tiene la enfermedad (Eddy, 1982). La prevalencia de este error puede tener consecuencias importantes; por ejemplo la confusión entre la probabilidad de que un niño afectado con síndrome de Down dé una amniocentesis prenatal positiva, que es alta y el hecho de que, siendo la prueba positiva el niño realmente tenga síndrome de Down, que es mucho menor.

En otro contexto Pollatsek y cols (1987) encontraron que el 69% de los sujetos de su estudio consideran correcta la opción c) en el problema 7, lo que implica que igualan una probabilidad condicional y su transpuesta.

Problema 7. ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?

a. *Que un taxi azul sea correctamente identificado por la noche como un taxi azul,*
b. *Que un taxi identificado por la noche como azul sea realmente un taxi azul,*
c. *Los dos sucesos son iguales de probables.*

También se ha encontrado esta misma confusión en la interpretación de tablas de contingencia por parte de estudiantes donde, según Batanero y cols. (1996), alrededor del 20% de los estudiantes del curso preuniversitario en su trabajo confunden "porcentaje de fumadores que contraen cáncer de pulmón" con "porcentaje de personas con cáncer de pulmón que fuman".

Esta confusión se extiende al contexto de la interpretación del nivel de significación α en los contrastes de hipótesis. El nivel de significación α se define como la probabilidad condicional de obtener un resultado R en la región de rechazo cuando la hipótesis nula H_o es cierta, es decir $\alpha=P(R/\ H_o)$. Cuando un contraste de hipótesis resulta significativo (lo que quiere decir que R ha ocurrido) y alguien pregunta por la probabilidad de haber cometido un error (la probabilidad de que H_0 sea cierta) a menudo se contesta con α. En esta situación se estaría confundiendo $P(R/\ H_o)$ con $P(H_o/\ R)$.

Una posible explicación dada por Falk (1986) de la prevalencia de este error es que el lenguaje ordinario, que es el que usamos en el enunciado de los problemas de probabilidad condicional no tiene la suficiente precisión y es por ello ambiguo. Cuando escribimos una probabilidad condicional usando la notación matemática es claro cuál es el suceso condicionante y cuál el condicionado, pero en el lenguaje ordinario la probabilidad condicional (tener cáncer si se es fumador) y su inversa (ser fumador si se tiene cáncer) no siempre se distinguen claramente entre sí o de la probabilidad conjunta (ser fumador y tener cáncer). También en el caso del contraste estadístico de hipótesis la frecuente definición de α como "probabilidad de cometer error tipo I" podría contribuir a su incorrecta interpretación porque en la anterior frase sólo se hace referencia a un suceso (error tipo I) y no a una probabilidad condicional.

CONFUNSIÓN DE PROBABILIDAD CONDICIONAL Y PROBABILIDAD CONJUNTA

En los ejemplos anteriores los alumnos podrían confundir la probabilidad condicional y la probabilidad conjunta. Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987) coinciden con Falk (1986) en que muchas de las dificultades que las personas tienen con la comprensión de la probabilidad condicional pueden deberse a dificultades con la sintaxis de los enunciados de la probabilidad condicional y que la ejecución de tareas que implican probabilidades condicionales depende de cómo se redacten los enunciados. Un ejemplo de esto lo encontraron Einhorn y Hogarth (1986) con los enunciados que usan la conjunción "y". Para estos autores estos enunciados pueden llevar a confundir la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional. Los autores plantearon a 24 estudiantes la pregunta: *"¿Cuál es la probabilidad de ir al supermercado y comprar café?"*. Esta pregunta se refiere a la probabilidad conjunta, pero 9 de los 24 estudiantes la interpretaron en forma condicional como P (comprar café/ ir al supermercado).

También en la investigación de Ojeda (1995), las preguntas sobre intersección de sucesos fueron más difíciles que las de probabilidad condicional y la mitad de los sujetos del estudio interpretaron la intersección como condicionamiento. Un error relacionado es la *falacia de la conjunción* (Tversky y Kahneman, 1982b) o creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de uno de ellos por separado o la de su unión. Estos autores plantearon a estudiantes sin formación estadística el Problema 8, a partir de los resultados de una encuesta de salud realizada en una muestra de hombres adultos de todas las edades y ocupaciones.

Problema 8 ¿Qué porcentaje de los hombres entrevistados tienen más de 55 años y además han tenido uno o más ataques al corazón?"
"¿Qué porcentaje de los hombres entrevistados ha tenido uno o más ataques al corazón?"
"De los hombres entrevistados con más de 55 años, ¿qué porcentaje ha tenido uno o más ataques al corazón?"

Muchos alumnos dan un mayor porcentaje a la primera pregunta que a las otras dos. Según Tversky y Kahneman el error es resultado de considerar a la conjunción como más representativa de la población generadora que cada evento separado o bien del hecho que la conjunción hace que los sujetos recuerden o imaginen más ejemplos de una categoría o modelo más restringido.

SITUACIONES SINCRÓNICAS Y DIACRÓNICAS

Otra variable influyente en la dificultad de las tareas de probabilidad condicional es si se percibe o no el experimento compuesto como una serie de experimentos simples sucesivos. A este respecto se pueden distinguir dos tipos de situaciones relacionadas con la probabilidad condicional:

- *Situaciones sincrónicas:* son situaciones estáticas, en las que no subyace una secuencia de experimentos, sino que los experimentos aleatorios se realizan simultáneamente. Un ejemplo lo encontramos en el siguiente problema, descrito en Falk (1986). La mayor parte de los estudiantes dan como respuesta 1/2 porque sólo perciben un experimento y suponen que la tarjeta con las dos caras rojas no es relevante para calcular la probabilidad condicional.

Problema 9. En una urna hay tres tarjetas: una es azul por ambos lados, otra es roja por ambos lados y la última es por un lado azul y por otro roja. Seleccionamos una tarjeta al azar y la ponemos sobre la mesa tal y como la sacamos de la urna. La cara que vemos es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja también?

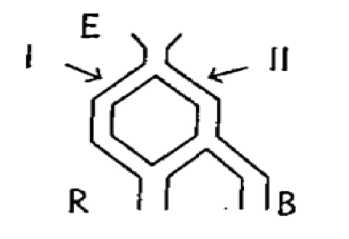
- *Situaciones diacrónicas*: son situaciones en las que hay una clara secuencia temporal, donde se realizan un experimento detrás de otro. Un ejemplo se muestra en el problema 10.

Problema 10. En una urna hay dos bolas blancas y dos bolas negras. Tomamos una bola blanca de la urna y sin reemplazarla tomamos una segunda bola al azar de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca?

Cuando calculamos una probabilidad condicional, es clave que cambiemos el espacio muestral al suceso condicionante. Para los estudiantes resulta difícil identificar el espacio muestral y el suceso condicionante. Especialmente las situaciones sincrónicas dificultan el cambio de espacio muestral, como comprueba Ojeda (1995) al plantear el problema 9 a 26 alumnos de entre 14 y 16 años, el 60% de los cuáles ignoraron la información dada por la cara mostrada al resolver el problema.

La autora propone también los problemas 8 y 11 a 255 alumnos de Bachillerato, después de estudiar probabilidad condicional. Estos dos problemas tienen la misma estructura matemática, pero el problema 11 se percibe más fácilmente como una secuencia de experimentos. La proporción de respuestas correctas sube del 25% (problema 8) al 40% (problema 11), aunque los alumnos todavía siguen con dificultades y no reducen convenientemente el espacio muestral al resolver el problema.

Problema 11. Una bola se suelta en E. Si sale por R, ¿qué es más probable, que haya seguido el canal I, o que se haya ido por el canal II?



RAZONAMIENTO BAYESIANO

En la segunda parte del problema planteado por Totohasina (1992) a sus estudiantes (problema 4) sólo el 25% de 67 alumnos del curso preuniversitario dieron una respuesta correcta. Totohasina encuentra las siguientes estrategias espontáneas entre los alumnos que llegaron a resolverlo:

- Cambio de referencial: *"En el total de cajas azules o rojas 45/4 +45=225/4 tienen la marca M. En 36 cajas rojas 45/4 llevan la marca. La probabilidad de que la caja con marca sea roja es P(D)= (45/4)/ (225/4)= 1/5"*.
- Cálculo de cocientes de porcentajes, lo que implica, en la práctica la fórmula de Bayes: *"Porcentaje de bolas con la marca: (45/199)x(25/100)+(60/100)x(75/100) = 56.25%. Por tanto, probabilidad de que la caja con marca sea roja = (45/100)x(25/100) /56.25/100=20 %"*.

Después de realizar un experimento de enseñanza de la probabilidad condicional, pero en el que no se introduce formalmente el teorema de Bayes, aunque se plantean y resuelven problemas de probabilidad inversa basándose en árboles y tablas de doble entrada, propone a los alumnos el problema 12.

Problema 12. Una persona se somete a una prueba para detectar una cierta enfermedad. Si la persona está enferma, el test será positivo con 96% de certeza. Si la persona está sana el test será negativo con 94% de certeza. Se sabe también que 1 de cada 100 personas de esta edad está enferma.
a) El test resulta positivo. ¿Cuál es la probabilidad de la persona esté enferma?
b) El test resulta negativo. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté sana?

Este problema tiene la misma estructura matemática que el problema 4, aunque el aspecto de causalidad está más marcado. El dato "1 persona de 100" podría inducir el uso de la concepción cardinalista. Asimismo, una vez enseñado el teorema de Bayes, el autor propone el problema 13.

Problema 13. Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 es defectuoso.
a. Tomamos una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?
b. Si la bola es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?

El autor argumenta que el problema 13 se aproxima más a un modelo de urnas que el 12 y mientras se acentúa la causalidad, la temporalidad está ausente. El autor examina los tipos de diagramas en árbol utilizados por los alumnos. De un total de 65 alumnos, 26 construyen un árbol directo marcando el aspecto secuencial de los experimentos (cálculo de la probabilidad directa) y 9 llegan al árbol inverso. Otros 7 alumnos usan el árbol, pero no contemplan el aspecto secuencial y no llegan a asignar correctamente las probabilidades. Sólo 9 alumnos llegan a la solución correcta de los problemas.

Para tratar de explicar las dificultades en éste y otros problemas similares, analiza los procedimientos que los alumnos siguen para resolverlos. El autor supone que los alumnos pueden encontrarse con dificultades en función del tipo de representación elegida para resolver el problema, que les es dado en formato verbal.

Al pasar, por ejemplo, a una tabla de doble entrada, se dificulta la percepción de la naturaleza secuencial de algunos problemas, porque lo que queda más visible es la intersección de los dos sucesos y puede llevar a los alumnos a confundir la probabilidad condicional y la conjunta. Otra dificultad es la necesidad de invertir condición y condicionado en los problemas tipo Bayes, ya que, como hemos señalado, los alumnos con frecuencia confunden el papel de estos dos sucesos en una probabilidad condicional y por tanto confunden una probabilidad condicional con su inversa. Totohasina sugiere que este obstáculo de “reversibilidad” también aparece en el aprendizaje de otras nociones matemáticas, por ejemplo al aprender el concepto de primitiva de una función, partiendo del de derivada.

Parece que el uso de un árbol es el recurso más efectivo para resolver problemas de probabilidad condicional, sobre todo cuando se refiere a un problema diacrónico (dirigido en el tiempo). Pero puede reforzar las concepciones causalista o cronologista en los alumnos que las manifiestan.

INFLUENCIA DE LA PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Pollatesk y cols. (1987) analizan los factores que pueden influir en la comprensión de los problemas de probabilidad condicional. Estos factores incluyen la forma en que están expresados los enunciados, y que el contexto esté basado o no en el conocimiento de los alumnos sobre mundo real. Estos autores en su experimento incluyeron dos tipos de problemas: problemas probabilísticos y problemas porcentuales. Plantean a los mismos alumnos el problema 5 y una variante del mismo (Problema 14).

Problema 14. “Indica cuál de los siguientes porcentajes es mayor:
El porcentaje de madres con los ojos azules que tienen hijas con ojos azules
El porcentaje de hijas con los ojos azules que tienen madres con ojos azules
Los dos porcentajes son iguales”

Aunque en otros problemas que se presentaron en las dos versiones (probabilística, porcentual) el porcentaje de respuestas correctas fue similar para las dos versiones, en el caso en que el factor causal se hacía presente (como los problemas 5 y 14 sobre madre e hija), la versión porcentual es más sencilla y los alumnos dan mayor número de respuestas correctas que en la versión probabilística. Los autores sugieren que el uso de la palabra “si” en la versión probabilística elicita un razonamiento causal.

Problemas Planteados en Términos de Frecuencias

Gigerenzer (1994) sugiere que la dificultad en la resolución de problemas referidos al teorema de Bayes desaparece cuando las preguntas se plantean en términos de frecuencias. Analiza un experimento que plantea el problema 15 a sus sujetos quienes, en promedio, dan una probabilidad de 85% como respuesta (cercana a la tasa base del 90%):

Problema 15: Un dispositivo sirve para identificar una cierta enfermedad. Si alguien está enfermo, hay un 90% de posibilidades de que la prueba sea positiva. Si no está enfermo hay todavía un 1% de posibilidades de que la prueba sea positiva. Aproximadamente el 1% de la población está enferma. Smith pasa la prueba y resulta positiva. La probabilidad de que tenga la enfermedad es:

Gigerenzer (1994) analiza estas respuestas y otras investigaciones en las que se cambia el enunciado, pasando a darlo en términos de frecuencia y en los que se observa un aumento notable de los razonamientos de tipo Bayesiano. Un ejemplo de tales enunciados se plantea en el problema 16.

Problema 16. Uno de cada 1000 americanos tiene una enfermedad. Una prueba ha sido diseñada para detectarla. Cada vez que la persona está enferma, el test da positivo, pero también da positivo en 50 de cada 1000 personas sanas. ¿Cuantas personas de entre aquellas a las que el test dio positivo tendrán realmente la enfermedad?

Gigerenzer sugiere que nuestra mente está mejor equipada para resolver problemas bayesianos cuando la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias. Llama a este formato *frecuencias naturales* porque se asemeja más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de *muestreo natural* a lo largo de nuestra experiencia (por ejemplo un médico en su consulta). Cuando la información se ofrece en términos de frecuencia, el cálculo de la probabilidad a posteriori es más natural, porque el sujeto no tiene que aplicar toda la complejidad del teorema de Bayes, sino sólo tener en cuenta los casos favorables y posibles, de modo que el problema se transforma en un problema simple de probabilidad. En el ejemplo, la persona razona en la siguiente forma: *"En 1000 americanos hay 999 sanos y uno enfermo. Al pasar el test 50 (aproximadamente) de los 999 sanos darán positivos y también el sujeto enfermo. Luego la probabilidad de que el sujeto esté enfermo si el test es positivo es 1/51 porque solo hay un enfermo entre los 51 a los que el test dio positivo"*.

Estos resultados coinciden con los de Ojeda (1995), puesto que alrededor del 45 % de estudiantes de secundaria (255 alumnos en la muestra) fueron capaces de resolver el siguiente problema, que requiere un razonamiento bayesiano:

> *Problema 17. En una ciudad hay 60 hombres y 40 mujeres por cada 100 habitantes. La mitad de los hombres y una tercera parte de las mujeres fuman. Si se selecciona al azar un fumador, ¿qué es más probable, que sea hombre o mujer?*

Resultados similares se han obtenido al plantear otros problemas probabilísticos en términos frecuenciales, por lo que Gigerenzer y colaboradores recomiendan, cuando sea posible, cambiar a frecuencias el formato de las preguntas. En el caso particular de la *falacia de la conjunción* Fiedler (1988) encontró una reducción considerable del número de respuestas incorrectas al plantear las preguntas en formato de frecuencias.

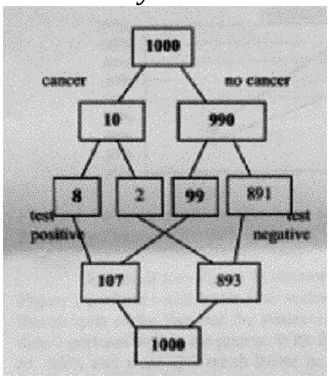
Uso de representaciones en la solución de los problemas

Por otro lado Martignon y Wassner (2002) plantean el uso de una representación especial en forma de diagrama en árbol, junto con las frecuencias naturales para enseñar la resolución de problemas que involucren el Teorema de Bayes. Estos autores indican que, mientras que los problemas de probabilidad que los estudiantes encuentran en la vida diaria son concretos y numéricos, los instrumentos de cálculo que les presentamos (por ejemplo el teorema de Bayes) son altamente formalizados. Los alumnos adquieren reglas nemotécnicas de aplicación que olvidan fácilmente.

Las representaciones juegan un papel primordial en la resolución de problemas matemáticos. Los sistemas de representación son entidades abstractas compartidas que se usan para organizar la información mediante determinadas reglas sintácticas. En este proceso se comienza identificando los sucesos a que se refiere la pregunta del problema y se les denota. A continuación se les organiza para operar con ellos, por ejemplo, sustituyéndolos en una fórmula y finalmente se opera para obtener la solución.

Gigerenzer y Hoffrage (1995) indican que una representación adecuada de los problemas facilita el cálculo y produce soluciones acertadas a los problemas tratados. Apoyándose en esta recomendación, Martignon y Wassner (2002) sugieren el uso de un esquema similar al de la Figura 1 para representar los datos del problema y como ayuda en su resolución. En sus ensayos con estudiantes de los últimos cursos de secundaria, alcanzan casi un 80 % de éxitos con este método.

Figura 1. Representación mediante árbol y frecuencias naturales de un problema de Bayes



Los autores indican que este éxito se debe a la estrecha relación entre esta representación y la forma inductiva en que procesamos la información en las tareas bayesianas. En primer lugar dividimos la muestra (1000 personas en el ejemplo) en función de la tasa base (1 de cada 100) obteniendo una división en dos grupos (10 enfermos y 990 sanos) lo que hace imposible que en el resto del problema olvidemos la tasa base. La división en el primer nivel del árbol produce una división binaria (sujetos con y sin la condición). Seguidamente incluimos la información dada por los condicionales y llegamos al tercer nivel del árbol que consiste en una segmentación produciendo cuatro sucesos intersección.

A partir de aquí, sumamos los sucesos que correspondan a la condición nueva (test positivo) que se identifican fácilmente y obtenemos la cuarta rama que es una nueva división dicotómica de la muestra, para la nueva condición (test positivo o negativo). En este momento es posible resolver el problema de una forma muy sencilla simplemente aplicando la regla de Laplace, puesto que los casos favorables (intersección de enfermos con prueba positiva) y posibles (prueba positiva) se identifican claramente del diagrama.

Usando la regla matemática de Bayes realizaríamos las mismas operaciones, pero en un orden diferente, es decir, siguiendo un proceso deductivo, y aunque nuestra mente está equipada para ambos tipos de procesos, el primero es más intuitivo y natural.

IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

En los apartados anteriores hemos realizado una revisión de las investigaciones en Psicología y Educación sobre comprensión de la probabilidad condicional y razonamiento condicional, incluyendo el razonamiento sobre probabilidad conjunta, independencia y teorema de Bayes. Se han descrito diferentes errores y algunas de las razones para los mismos, así como algunas variables que facilitan la resolución de los problemas sobre estos conceptos.

Como indicamos en la introducción, la probabilidad condicional es un concepto básico en Estadística. Las distribuciones de los estadísticos en el muestreo, el nivel de significación y potencia en un contraste de hipótesis, las distribuciones marginales, las rectas de regresión, entre otros conceptos, se definen mediante una probabilidad condicional. Es, por tanto, necesario asegurarnos que el alumno adquiere un conocimiento y competencia básica en este tema, antes de avanzar en el estudio de la estadística, si no queremos que los errores y dificultades sobre la probabilidad condicional aumenten la dificultad de otros muchos temas e imposibiliten su correcta aplicación.

No obstante, la investigación revisada muestra que este no es un tema sencillo, que tiene una amplia variedad de matices y los alumnos lo asocian con la problemática de la causalidad y temporalidad, teniendo dificultad en la percepción de los experimentos compuestos en el caso de situaciones sincrónicas. Se confunde independencia y exclusión, se cambian los términos de la probabilidad condicional, se confunde ésta con la conjunta y se asigna a la probabilidad conjunta un valor mayor que a la probabilidad simple, violando las reglas lógicas del cálculo de probabilidades.

Los problemas que hemos mostrado como ejemplos a lo largo del trabajo pueden usarse para diagnosticar las dificultades de los alumnos, incluso antes de la enseñanza del tema, pues el alumno puede llegar a la clase con intuiciones incorrectas en el campo de la probabilidad. Las soluciones erróneas pueden discutirse colectivamente y la simulación de las experiencias descritas en los problemas, con ayuda de tablas de números aleatorios, calculadoras u ordenadores permitirá la superación gradual de estos sesgos. El uso de formato de frecuencias y de diversas representaciones, como árboles, o diagramas rectangulares puede también contribuir a la mejora del aprendizaje de estos conceptos.

Nota: *El trabajo es parte del Proyecto BSO2002-0334-7 y Beca FPU: AP2003-5130.*

REFERENCIAS

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27 (2), 151 – 169.

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Einhorn, H.J. y Hogart, R.M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin.* 99, 3 –19.

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Fiedler, K. (1988). The dependence of the conjunction fallacy on subtle lingüistic factors. *Psychological Research,* 50, 123-129.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15(1), 49-95.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161). Chichester: Wiley.

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats (pp. 129-161). *Psychological Review,* 102, 684-704.

Kelly, I. W. y Zwiers, F. W. (1986). Mutually exclusive and independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. *Teaching Statistics* 8, 96-100.

Martignon, L. y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.

Maury, S. (1985). Influence de la question dans una épreuve relative á la notion d'independance. *Educational Studies in Mathematics,* 16, 283-301.

Maury, S. (1986). *Contribution à l'étude didacique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problémes.* Tesis doctoral. Universidad de Montpéllier II.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes.* 40, 255 – 269.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). México.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.