

# CONCEPCIONES SOBRE DISTRIBUCIONES ALEATORIAS PLANAS EN ALUMNOS DE SECUNDARIA

*Luis Serrano, Carmen Batanero, y M. Jesús Cañizares*  
*Epsilon, 43-44, 149-162, 1999*

## RESUMEN

La percepción subjetiva de la aleatoriedad por parte de los niños y adolescentes ha sido investigada mediante una variedad de tareas de producción y de discriminación de secuencias y distribuciones aleatorias, describiéndose como resultado una variedad de sesgos que caracterizan los razonamiento de los sujetos. Esta investigación es muy importante para la enseñanza, puesto que los nuevos currículos proponen incorporar el estudio de los fenómenos aleatorios en la educación primaria y secundaria. En este artículo comparamos el significado de la aleatoriedad para 277 alumnos en dos grupos de edad (14 y 17 años), a través de la identificación de las propiedades matemáticas que asocian a las distribuciones bidimensionales aleatorias y no aleatorias. En consecuencia, sugerimos algunas implicaciones para la práctica docente.

## SUMMARY

Subjective perception of randomness in children and adolescent has been researched using a variety of production and judgement tasks, resulting in a number of different descriptions for the biases that characterise children's performances. These research findings are highly pertinent to didactic practices, as new mathematics curricula for compulsory teaching levels are being proposed that incorporate increased study of random phenomena. In this article we compare the meaning of randomness for 277 secondary students in two age groups (14 and 17 year-olds), through the identification of the mathematical properties they associate to random and deterministic two-dimensional distributions. Some implications for teaching are then suggested.

## INTRODUCCIÓN

Las expresiones "experimento aleatorio", "suceso aleatorio", incluso los sustantivos el "azar", lo "aleatorio", aparecen con frecuencia, tanto en el lenguaje cotidiano, como en los manuales escolares. Pero su significado, al referirse a una entidad abstracta, no queda unívoca y nítidamente determinado, lo cual podría crear dificultades de comprensión en los estudiantes. Puesto que el nuevo conocimiento no se construye sobre el vacío, sino incorporando la nueva información a las creencias y concepciones previas de los estudiantes, la investigación didáctica debe difundir entre los profesores los resultados de las investigaciones sobre las mismas.

En este trabajo analizamos las concepciones que los estudiantes de secundaria tienen sobre la noción de aleatoriedad, a partir de actividades de reconocimiento y generación de sucesiones aleatorias de puntos en el plano. El interés y la necesidad de este estudio nos parece claro, ya que la mayor parte de los nuevos currículos de matemáticas de los niveles de enseñanza obligatoria proponen intensificar el estudio de los fenómenos aleatorios.

A pesar de ser el punto de partida en la enseñanza de la probabilidad, el concepto de aleatoriedad no tiene un significado sencillo. El análisis epistemológico y psicológico del concepto muestra que hay una contradicción aparente, que podría explicar las dificultades de comprensión del mismo. Por un lado la "aleatoriedad" indica que cualquier resultado posible podría ocurrir, pero por otro, no admitimos que un resultado es aleatorio, si aparece un patrón en el mismo ( por ejemplo, si al lanzar 3 monedas obtenemos 3 caras sucesivas). Además, las interpretaciones de la aleatoriedad han sido diferentes a lo largo de la historia, como pusimos de manifiesto en nuestros

trabajos previos sobre el tema (Batanero y Serrano, 1995, en prensa; Batanero, Serrano y Green, 1998). A continuación resumimos brevemente este análisis, ya que estos diversos significados se reflejan en las respuestas de nuestros estudiantes.

Hasta la Edad Media, la aleatoriedad se concebía como opuesto a lo causado y el "azar" se suponía que era la "causa" de los fenómenos aleatorios. Que esta interpretación no es adecuada, se deduce del hecho de que hay fenómenos, como la teoría cinética de los gases, con leyes conocidas, que precisamente son leyes de tipo aleatorio.

Al comenzar el desarrollo del Cálculo de probabilidades, se aplican al concepto de aleatoriedad las diversas ideas sobre la probabilidad, comenzando por la consideración de aleatoriedad como sinónimo de equiprobabilidad, posteriormente como fenómeno para el cual las frecuencias relativas se estabilizan a la larga, hasta llegar a la interpretación subjetiva (un fenómeno es o no aleatorio, dependiendo de nuestro conocimiento sobre el mismo).

Al final del siglo XIX y comenzar la producción de tablas de números aleatorios, se llegó a la conclusión de que era posible obtener secuencias de resultados aleatorios, incluso con algoritmos deterministas. A partir de este momento, se intentaron dar definiciones formales del concepto, aunque las diversas definiciones aportadas, por ejemplo, por Kolmogorov y Von Mises no han estado exentas de críticas, debidas a problemas filosóficos implícitos en las mismas. La moderna concepción sobre la aleatoriedad, admitida dentro de la estadística, es considerar que la aleatoriedad no es una única propiedad de los objetos o fenómenos, sino que está integrada por una serie de modelos que el sujeto aplica para discriminar las situaciones que considera como aleatorias. Por ejemplo, pensaremos que una moneda con la cual estamos realizando una serie de lanzamientos se comporta aleatoriamente, si la sucesión obtenida sigue una serie de modelos, como el teorema de Bernoulli, la distribución binomial o la geométrica.

Si la distribución obtenida de caras y cruces se aparta mucho de las proporciones esperadas (igualdad aproximada de caras y cruces) consideraremos que no hay una verdadera aleatoriedad. Pero, incluso aunque la distribución de caras y cruces sea la esperada, esto no basta para que consideremos aleatorio el experimento. Cualquiera de nosotros sospecharía de la moneda si, por ejemplo obtenemos una sucesión del tipo: C+C+C+C+C+.....C+C+C+, porque esperamos la aparición de algunas rachas, si la moneda se comporta aleatoriamente.

Vemos que el reconocimiento de la aleatoriedad requiere comprobar más de una propiedad (en general una serie de modelos) y en esta comprobación siempre hay implícito un contraste estadístico, por lo que existe la posibilidad de cometer errores, incluso cuando se aplique un modelo matemático normativo. En este sentido, la aleatoriedad no es una propiedad de los fenómenos que caracterizamos como aleatorios, porque no podemos con seguridad determinar si un fenómeno es o no aleatorio. La aleatoriedad es pues un conjunto de modelos matemáticos que aplicamos a diferentes situaciones porque nos resulta adecuado para predecirlas. Lo que nos interesa conocer, desde el punto de vista didáctico, es si los modelos espontáneos que aplica el alumno en estas situaciones se corresponden o no con los adecuados desde el punto de vista del cálculo de probabilidades. Estos modelos podrían, además, variar en los distintos individuos, o no ser intuitivos por lo cual los alumnos no los aplicarían sin una instrucción previa.

## **ALGUNAS INVESTIGACIONES PREVIAS**

Piaget e Inhelder (1974) pensaron que el desarrollo de la idea de azar en el niño es complementaria a la de la relación causa-efecto. Para ellos, sin esta comprensión de la causación, no hay un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios. En consecuencia, hasta la etapa de las operaciones concretas, en la que comienzan a apreciarse los factores que caracterizan los fenómenos causados, el niño no puede comprender la idea de azar.

Según Piaget e Inhelder, el azar se considera debido a la interferencia de una serie de causas independientes y a la "no presencia" de todas las combinaciones posibles, salvo en el caso en que hubiera un gran número de repeticiones del experimento. Cada caso aislado es indeterminado o imprevisible, pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. A partir de este razonamiento aparece la idea de probabilidad, como razón entre las posibilidades de un caso y el conjunto de posibilidades. En consecuencia, para Piaget, ni la idea de azar ni la de probabilidad pueden ser totalmente comprendida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las operaciones formales (12-14 años).

Piaget e Inhelder (1974) investigaron la comprensión que tienen los niños de los patrones que aparecen en las secuencias de resultados aleatorios. Diseñaron para ello un instrumento que simulaba la caída de gotas de lluvia sobre las baldosas de un pavimento. Al preguntar a los niños donde caería la siguiente gota de lluvia, se mostró una idea de regularidad: los niños del estadio 1 (6 a 9 años) las distribuían aproximadamente en igual número sobre cada cuadro de la cuadrícula. Si la retícula tenía todos los cuadros con alguna gota, excepto un cuadro vacío, los niños colocaban la gota en el cuadro vacío de modo que se lograra un patrón uniforme. Al aumentar la edad, y aparecer el razonamiento proporcional se acepta la irregularidad de la distribución. Piaget e Inhelder creen que los niños de esta edad comprenden la ley de los grandes números, que contempla a la vez la regularidad global y la variabilidad particular de cada experimento. Sin embargo, esta teoría es discutida por Green (1983, 1989, 1991), quien construyó diversos cuestionarios para obtener versiones de papel y lápiz de las tareas piagetianas. En sus investigaciones con 2930 escolares observó que el porcentaje de niños que reconocía la distribución aleatoria o semi-aleatoria descendía al aumentar la edad. Sin embargo encontró una relación positiva entre la percepción de la aleatoriedad y la inteligencia del niño, medida por un test de razonamiento de tipo general.

## **LA INVESTIGACION EXPERIMENTAL**

En este trabajo mostramos parte de los resultados de un estudio más amplio (Serrano, 1996) realizado con 277 estudiantes con el fin de evaluar sus concepciones sobre la aleatoriedad y la probabilidad y, en particular, estudiar la percepción subjetiva que tienen sobre las distribuciones aleatorias de puntos en el plano.

En un fenómeno aleatorio podemos diferenciar dos componentes: el proceso y el resultado. Desde el punto de vista del proceso, un experimento es aleatorio si es repetible en las mismas condiciones y los resultados de pruebas sucesivas son independientes. Bajo las condiciones dadas, se obtendría una secuencia de resultados aleatorios. Esta definición, aunque aparentemente sencilla, da origen a una multitud de modelos probabilísticos, entre otros la distribución binomial, geométrica y el teorema de Bernoulli (Serrano et al., 1991).

En muchas aplicaciones tratamos con ensayos de Bernoulli donde el número de ensayos es comparativamente grande y la probabilidad de obtener éxito en cada uno de los ensayos es pequeña, mientras que el producto de esa probabilidad por el número de ensayos tiene un tamaño moderado. En estos casos, el valor aproximado de la probabilidad de obtener un número determinado de éxitos en una cantidad de ensayos puede aproximarse por la distribución de Poisson. Una de las aplicaciones de esta distribución se obtiene en los procesos puntuales de Poisson, que se visualiza en la distribución aleatoria de puntos en el plano. Estas distribuciones siguen el modelo de Poisson y aparecen con frecuencia en la naturaleza, por ejemplo, el patrón que forman las primeras gotas de lluvia que caen sobre un embaldosado; la distribución de conchas en la arena de la playa o la distribución de un tipo particular de planta en una superficie extensa.

En nuestra investigación pretendemos analizar las propiedades que los alumnos atribuyen a las distribuciones aleatorias de puntos en el plano y evaluar las diferencias entre los grupos de alumnos a los que se les pasó el cuestionario. También quisimos completar los trabajos de Green y Toohey (1995), quienes se habían centrado preferentemente en el estudio de la capacidad de discriminación de estas distribuciones por niños de 11 a 16 años, sin preocuparse de las razones en que basaban esta identificación. Además quisimos extenderlo a los alumnos de 17 – 18 años, edades de las que no había datos disponibles.

### Muestra

Los cuestionarios se pasaron en cinco centros de la ciudad de Melilla. Aproximadamente la mitad de los estudiantes ( $n = 147$ ) cursaban 8º de E.G.B. (14 años) y previamente no habían estudiado probabilidad. El resto de los estudiantes ( $n=130$ ) cursaban el C.O.U. (17 años) y habían estudiado probabilidad con un enfoque clásico, aproximadamente un mes en primero de Bachillerato y otro mes el año escolar previo.

## DISCRIMINACIÓN DE PROPIEDADES EN DISTRIBUCIONES ALEATORIAS DE PUNTOS EN EL PLANO

Los estudiantes completaron un cuestionario escrito incluyendo 4 ítems tomados de la investigación de Green, cambiando tan sólo los nombres de los supuestos niños, ya que estábamos interesados en comparar nuestros resultados con los del citado autor. Para hacer que los alumnos comprendiesen mejor la tarea que se les proponía, se incluyó el siguiente ejemplo inicial:

**Ejemplo:** Pablo juega a un juego en el que se dispone de 16 fichas numeradas del 1 al 16. Pone las fichas en una bolsa vacía. Después de mover la bolsa con fuerza para mezclar las fichas, elige una ficha con los ojos cerrados. Es la ficha número 7. Pablo pone una cruz en la casilla 7 y devuelve la ficha a la bolsa, antes de continuar el juego.

1	2	3	4
5	6	7 <sub>x</sub>	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Una vez que los alumnos leyeron este enunciado y se les resolvió las dudas sobre la finalidad del juego, se les plantearon los cuatro ítems siguientes:

**Ítems 1 a 4 .** Se pidió a algunos niños que jugaran al juego de Pablo, eligiendo cada uno de ellos 16 veces una ficha de la bolsa con los ojos cerrados y devolviendo la ficha a la bolsa después de cada extracción. Los resultados obtenidos se indican a continuación. ¿Piensas que los niños jugaron correctamente o alguno de ellos hizo trampa en el juego?

X X		X					X	XX
	x	X <sup>X</sup>	X <sup>X</sup>				X <sup>X</sup> X	X <sup>X</sup> X
X	x		X <sup>X</sup>		x	X <sup>X</sup>		
	x x				x	X <sup>XX</sup>		

Jaime

María

1. ¿ Hizo trampas Jaime ? ¿Por qué? \_\_\_\_    2. Hizo trampas María? ¿Por qué? \_\_\_\_

X X	X <sup>X</sup>				x	X	x	X
		X <sup>X</sup>	X <sup>X</sup>		x	x	X	X
	X <sup>X</sup>		X <sup>X</sup>		X	x	X	X
	x x		x x		x	x	X	X

Miguel

Luis

3. ¿ Hizo trampas Miguel ? ¿Por qué? \_\_\_\_    4. ¿ Hizo trampas Luis? ¿Por qué? \_\_\_\_

Con estos ítems se pretende simular el resultado de una sucesión de experimentos aleatorios, introduciendo la variedad bidimensional, lo que produce nuevos elementos conceptuales no presentes en otras investigaciones sobre secuencias aleatorias unidimensionales. El modelo teórico es la distribución de Poisson en el plano. Puesto que, en cada cuadrado, tenemos 16 casillas equiprobables, que representan los resultados de extraer al azar una de las 16 fichas, la probabilidad de que en un intento del juego se coloque una cruz en una de las casillas es 1/16. Al repetir n veces el experimento y estudiar el número de cruces en cada casilla, obtenemos la distribución binomial  $B(n, 1/16)$ , que puede aproximarse por la distribución de Poisson de parámetro  $\lambda = n/16$ . En la tabla 1 mostramos la distribución teórica esperada para  $n=16$  ( $\lambda =1$ ) y  $n=30$  ( $\lambda =1.875$ ), que son los valores usados en nuestro trabajo.

Para comparar la distribución teórica mostrada en la Tabla 1 para el valor ( $\lambda =1$ ) con el número observado de cuadros con  $x = 0, 1, 2, \dots$  puntos en cada uno de los ítems 1 a 4, hemos calculado el contraste  $\chi^2$  de adherencia de ajuste, obteniendo un valor  $\chi^2 = 1$  en el ítem 1 (Jaime),  $\chi^2 = 2.3$  en el ítem 2 (María), aunque la disposición diagonal de los puntos hace que se aparte bastante del patrón aleatorio,  $\chi^2 = 11$  en el ítem 3 (Miguel) y  $\chi^2 = 24.3$  en el ítem 4 (Luis). En consecuencia, sólo el ítem 1 se acerca al patrón esperado en una distribución aleatoria.

**Tabla 1. Distribución de probabilidad y número esperado de cuadros con x puntos en la distribución de Poisson**

Puntos por cuadro	$(\lambda = 1)$	-	$(\lambda = 1.875)$	
x	$p(\xi = x)$	N. esperado de cuadros	$p(\xi = x)$	N. esperado de cuadros
0	0.3679	5.9	0.1535	2.5
1	0.3679	5.9	0.2875	4.6
2	0.1839	3	0.2694	4.3
3	0.0613	1	0.1684	2.7
4	.0153	0.2	0.0789	1.3
5			0.0296	0.5

En la Tabla 2 presentamos los porcentajes de respuestas de los alumnos. Podemos ver como la proporción de alumnos que considera no aleatoria la distribución aumenta cuando aumenta la diferencia entre las frecuencias esperadas y las observadas, lo que muestra que los alumnos parecen tener una intuición correcta sobre estas frecuencias. Sin embargo, el hecho de que la distribución del ítem 2 se concentre en la diagonal no parece llamar la atención, pues, a pesar de ello, todavía un 57 % de alumnos de 14 años y un 58% de alumnos de 17 creen que la distribución de Maríaes aleatoria. No hemos encontrado una gran diferencia en los porcentajes de alumnos de cada grupo que consideran aleatorias las diferentes distribuciones. Parece en consecuencia que la enseñanza de la probabilidad no ha modificado substancialmente las concepciones iniciales de los alumnos sobre las ditribuciones aleatorias de puntos en el plano. Los porcentajes y resultados son similares a los obtenidos por Green en sus investigaciones

Green en su investigación no pidió a los alumnos que argumentasen sus respuestas sobre la aleatoriedad o no de la distribución. Nosotros lo hicimos y hemos agrupado los argumentos obtenidos en las siguientes categorías:

**Tabla 2: Porcentajes de respuestas en los ítems 1 a 4**

Ítem	Respuesta	Edad=14	Edad=17
	Real	85	85
1. Jaime: $\chi^2=1$	Falsa	14	12
	No sabe	1	3
	Real	57	58
2. María: $\chi^2=2.3$ (diagonal)	Falsa	42	38
	No sabe	1	4
	Real	36	38
3. Jesús: $\chi^2=11$	Falsa	63	58
	No sabe	1	4
	Real	25	22
4. Luis: $\chi^2=24.3$	Falsa	74	75
	No sabe	1	3

a) Hay un patrón regular en la distribución de puntos: Este razonamiento se refiere a la distribución espacial de los puntos en la cuadrícula y al hecho de que esta distribución parece demasiado regular, o bien que sigue un cierto patrón u orden, como en los siguientes casos: *"Está todo demasiado correcto, todo en su sitio bien ordenado"*, *"Es demasiada casualidad que salgan las casillas de los extremos superior derecho e inferior izquierdo con las cruces y en las otras no salga nada"*.

b) La distribución sigue un patrón irregular. Este es un argumento contrario al anterior, por lo que no necesita ejemplos aclaratorios. En ambos argumentos podría estar encubierta la heurística de la representatividad (Kahneman et al., 1982) por la cual los sucesos aleatorios se conciben como no ordenados, ya que se espera que cualquier muestra de resultados aleatorio reproduzca las características de la población.

c) Las frecuencias de los distintos resultados son parecidas. Este argumento es el característico de todos los sujetos que hacen referencia a la semejanza de las frecuencias de distintos resultados. Es el argumento más usado para justificar sus repuestas en el ítem que se refiere a Luis. Sirvan como modelos de respuestas a este argumento los siguientes: *"Es muy difícil que no salga ninguno repetido"*, *"Es muy difícil que salgan todas las fichas el mismo número de veces"*. Los alumnos están aplicando aquí un modelo de proceso aleatorio en el que se espera una convergencia de las frecuencias relativas a las probabilidades teóricas, pero con una lógica variabilidad.

d) Las frecuencias de los distintos resultados son diferentes. Al contrario del caso anterior, los sujetos que entran en esta categoría dan más importancia a las diferencias entre los resultados que se presentan. La justificación la dan con este argumento principalmente al ítem referido a Jaime: *"Creo que deben salir los resultados más igualados, no tan diferentes el número de veces que se repiten"*, En otros ítems hemos obtenido estos ejemplos: *"Los resultados son muy variados, desde una X hasta 4X y por lo tanto razonables"*, *"Los resultados son muy diferentes, parecen que están hechos al azar"*. Un razonamiento relacionado es el de los alumnos que argumentan que debe haber igualdad de posibilidades para cada cuadro de la cuadrícula. En estos alumnos se manifiesta de nuevo la representatividad, esperando que la convergencia estocástica se manifieste incluso en las pequeñas muestras.

e) Hay una celda con demasiados puntos. Este argumento es bastante usado para justificar los ítems primero y segundo. Sería equivalente a argumentar que existen rachas largas en las secuencias aleatorias de extracción de una moneda, porque implica la idea de independencia. Ejemplos de respuestas aquí englobadas son: *"Tiene demasiadas cruces en algunos cuadros y deja en blanco otros"*, *"En los cuadros de Jaime hay algunos que tienen demasiadas cruces"*. Los alumnos esperan un mayor número de alternancias en un proceso aleatorio de las que teóricamente suelen ocurrir.

f) No hay celdas con varios puntos, o las celdas tienen muy pocos puntos. Es el contrario al anterior e indica que los alumnos han prestado atención a la existencia de resultados múltiples en experimentos aleatorios.

g) Impredecibilidad de los resultados de los experimentos aleatorios: *"Salen así porque es a la suerte de cada uno, no se podrá saber"*. Algunos alumnos admiten cualquiera de los resultados, basándose en la impredecibilidad de los experimentos aleatorios. Para ellos cualquier resultado posible, incluso aún cuando aparezca un patrón muy evidente, podría ocurrir, no diferenciando entre sucesos probables y sucesos improbables. Este razonamiento ha sido descrito por Konold (1989) con el nombre de "enfoco en el resultado aislado", y se piensa que es debido a que los alumnos interpretan las preguntas probabilísticas en términos no probabilísticos.

**Tabla 3: Porcentajes de argumentos en los ítems 1 a 4**

Argumento	Jaime		María		Jesús		Luis	
	14	17	14	17	14	17	14	17
Patrón regular	1	1	7	45	52	45	38	6
Patrón irregular	36	21	24	5	10	5	0	0
Frecuencias iguales	1	0	0	5	3	5	41	65
Frecuencias diferentes	9	11	5	0	0	0	1	1
Clusters	8	2	26	0	0	0	1	0
Impredecible	30	44	29	35	24	35	10	22
No da argumento	15	21	9	10	11	10	9	6

En la Tabla 3 se aprecia que globalmente, la mayor frecuencia aparece en los argumentos basados en la imprevisibilidad de los resultados de experimentos aleatorios, siendo los estudiantes de 17 años los que más lo emplean. Pero existe una diferenciación de la argumentación según el ítem: frecuencias demasiado parecidas en Luis, patrón regular en Jesús, María y Luis, patrón irregular en Jaime. Esta multiplicidad de argumentaciones muestra la capacidad de los estudiantes en la diferenciación de las características de cada ítem.

En la Tabla 4 analizamos la diferencia existente en la argumentación según consideren la distribución aleatoria o no. Las razones que apoyan la no aleatoriedad son principalmente el patrón regular que se suele emplear en casi todos los ítems con este fin y el hecho de que algunas celdas tengan demasiados puntos o las frecuencias iguales en algunos ítems. Para sustentar que la distribución es aleatoria los argumentos más empleados son la imprevisibilidad y el uso de patrón irregular, lo que apunta a unas concepciones correctas por parte de los alumnos, excepto en la argumentación de que si hay muchos puntos en la misma celda la distribución no es aleatoria.

**Tabla 4: Porcentaje de argumentos según la distribución se considera o no aleatoria**

Argumento	Jaime		María		Jesús		Luis	
	Real	Falso	Real	Falso	Real	Falso	Real	Falso
Patrón regular	3	1	2	17	9	74	14	27
Patrón irregular	31	20	28	6	12	6	0	0
Frecuencias iguales	0	0	0	0	0	1	25	63
Frecuencias diferentes	11	5	4	5	4	2	3	0
Clusters	1	33	6	47	0	2	0	0
Impredecible	39	25	46	20	62	10	40	8
No da argumento	17	14	14	5	14	5	18	2



## GENERACIÓN DE DISTRIBUCIONES ALEATORIAS EN EL PLANO

Para completar el cuestionario propusimos a los alumnos la tarea de generar distribuciones aleatorias en el plano, en una cuadrícula igual a las presentadas anteriormente. Con ello nos proponíamos analizar las características que los entrevistados asignaban a estas distribuciones y cómo estas asignaciones variaban en los dos grupos de alumnos. Queríamos también comparar estos resultados de generación con los de reconocimiento de distribuciones aleatorias. A continuación presentamos los ítems de este apartado.

**Ítem 5.-** Imagínate que estás jugando al juego anterior y sacas treinta veces una ficha con el mismo procedimiento que se indica más arriba. Pon en la siguiente cuadrícula 30 cruces en los lugares que creas que puedes obtener si jugaras al juego sin hacer trampas.


**Ítem 6.-** Imagínate ahora que juegas este juego 16 veces sin hacer trampas. Pon 16 cruces en la siguiente cuadrícula.


Los datos obtenidos de estos dos ítems nos permitieron realizar un estudio estadístico de las características de las distribuciones generadas por los alumnos, así como las diferencias entre los resultados en los dos grupos. En el ítem 6 pedimos a los alumnos representar 16 puntos, coincidiendo con el número de sucesos posibles en el espacio muestral del experimento aleatorio asociado, por lo que el sujeto que espere una correspondencia exacta entre las características de la población y la muestra tenderá a colocar un punto en cada una de las casillas. Las variables obtenidas sobre las distribuciones producidas por los alumnos se analizan a continuación.

### *Distribución del número de puntos por celda*

La distribución teórica que debieran seguir los puntos en la cuadrícula se ajusta al modelo Poisson. Puesto que tenemos 16 casillas equiprobables, siendo 30 el número de ensayos en el primer caso y 16 en el segundo, podemos determinar el parámetro de las correspondientes distribuciones que es  $\lambda=1,875$  en el primer caso y  $\lambda=1$  en el segundo. Con estos datos podremos decir que el número esperado de cuadros vacíos en el ítem 5 es 2 ó 3 y 6 ó 7 en el ítem 6. Sin embargo, se observa en las tablas 4 y 5 que los alumnos tienden a no dejar cuadros vacíos, o dejar muy pocos. Los valores medios se apartan bastante de los teóricos. Destaquemos que en ítem 5 la mitad de los alumnos en cada grupo no ha dejado ningún cuadro vacío y que hay algunos casos en que se dejan hasta 13 ó 16 cuadros vacíos, lo que también se aparta mucho del valor teórico.

**Tabla 5. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros vacíos en el ítem 5**

N	18 años	14 años
16	*	*
13	*	*
10	**	****
9	*	**
8		****
7	**	*****
6	*****	*****
5	*****	*****
4	*****	*****
3	*****	*****
2	*69	*74
1		
0		

Se aprecia en la tabla 5 que en el ítem 6 aumenta el número de alumnos que dejan cuadros vacíos, pero son minoría los alumnos que se acercan al número esperado de cuadros vacíos. Todo ello parece confirmar las teorías de Piaget en cuanto a la regularidad que los alumnos buscan en la aleatoriedad. Especialmente, los alumnos que no dejan cuadros vacíos se acercan más al estadio II que al III en los estudios de Piaget, a pesar de que algunos de ellos alcanzan los 18 años.

**Tabla 6. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros vacíos en el ítem 6**

n	18 años	14 años
16		*
13	**	**
11	*	***
10	**	*
9	***	***
8	*****	*****
7	*****	*****
6	*****	*****
5	M*****	M*****
4	*****	*****
3	*****	*****
2	****	*****
1	*****	*****
0		

También hemos analizado la distribución del número de celdas con un punto, aunque no la reproducimos aquí debido a la limitación de espacio. Nuestros resultados fueron que los valores medios son, en las respuestas a los dos ítems, más próximos a los valores esperados, que en el caso anterior, habiendo una sobreestimación de ese valor en las respuestas al ítem 6. Lo mismo ocurrió respecto a las celdas con dos puntos.

En general, en nuestro estudio vimos que los alumnos en sus distribuciones estiman a la baja el número de celdas vacías, que en el ítem 6 son sustituidas por celdas con un punto y por dos puntos en el ítem 5. Como estos valores enteros (uno y dos) son los que más se aproximan al parámetro de la distribución de Poisson respectivamente en esos ítems, consideramos que los alumnos han intentado reproducir este número medio

de puntos en la mayor parte de los cuadros, aunque admitiendo ligeras fluctuaciones que no llegan a reflejar toda la variabilidad de la distribución de Poisson en el plano.

#### *Número máximo de cuadros vacíos adyacentes*

Otro punto estudiado fue la colocación espacial de los cuadros vacíos. Algunos alumnos no tienen en cuenta la distribución espacial de los cuadrados vacíos, que colocan consecutivamente, ya que en el modelo aleatorio estos cuadros vacíos deberían distribuirse casi uniformemente y algunos de ellos se encontrarían adyacentes. También hemos encontrado casos de alumnos que han dejado vacíos consecutivamente hasta la mitad de la cuadrícula. Todo esto nos indica que los alumnos se han concentrado más en las frecuencias de las celdas particulares que en la distribución global de puntos, reflejando una concepción local y no global de la aleatoriedad según Toohey (1995).

### **IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA**

En este trabajo hemos analizado las concepciones sobre la aleatoriedad en los alumnos de secundaria, utilizando para ello sus respuestas a un cuestionario sobre discriminación y generación de distribuciones aleatorias de puntos en el plano. Partimos para ellos de nuestros estudios previos, en los que se señala la dificultad epistemológica de este concepto, que muchas veces pasa desapercibida. Creemos que los profesores deben ser conscientes de esta complejidad, para comprender las dificultades con las que se enfrentan sus alumnos al iniciar el estudio del tema.

Nuestros resultados señalan en los alumnos un buen número de concepciones correctas, como la impredecibilidad de los resultados aleatorios, la ausencia de patrones o la idea de convergencia. Sin embargo, otras propiedades no han sido fácilmente reconocidas, debido a la insuficiencia de los modelos matemáticos implícitos que les podrían ayudar a realizar este reconocimiento. Creemos que se debe aumentar el estudio de las características del aprendizaje de los hechos aleatorios, profundizando con ello en el conocimiento de las concepciones erróneas que puede generar una defectuosa formación inicial.

La enseñanza debiera comenzar mostrando al alumno ejemplos sencillos de fenómenos aleatorios con sucesos equiprobables, tales como juegos con monedas, dados o bolas en urnas. Progresivamente podríamos pasar al estudio de casos no equiprobables (chinchetas o ruletas con sectores de diferente amplitud), para pasar poco a poco a mostrar la rica fenomenología de lo aleatorio. En particular el estudio de la aleatoriedad en el plano es muy importante dentro de las aplicaciones de la probabilidad e incluso ha servido de base para estudio de las concepciones probabilísticas desde el punto de vista de la psicología. Una última sugerencia de nuestro estudio es que este campo podría aprovecharse para plantear situaciones didácticas que sirvan de introducción en la enseñanza de la probabilidad. Ejemplos como los ítems mostrados en nuestro trabajo, la distribución de errores mecanográficos en un documento, de estrellas en una galaxia, de conchas en la arena de la playa, de nidos o árboles en una superficie pueden servir como contextos para introducir estas distribuciones.

*Agradecimiento:* Esta investigación forma parte del Proyecto PB96-1411 (Promoción general del conocimiento, DGES, MEC, Madrid)

## REFERENCIAS

- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5, 15-28.
- Batanero, C. y Serrano (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Educatio*. 30(5), 558-567
- Batanero, C. y Serrano, L. (1997). The meaning of randomness for secondary school students and implications for teaching probability. En *Proceedings of the 51st Session of the International Statistical Institute. Invited Papers. Bulletin of the International Statistical Institute* (v.1, pp. 415-418). Estambul: International Statistical Institute.
- Batanero, C., Serrano, L. y Green, D. R. (1998). Randomness, its meanings and implications for teaching probability. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 29 (1), 113-123.
- Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997). Subjective elements in children's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the XXI Conference on the Psychology of Mathematics Education*(v.2, pp. 49-56). University of Lahti.
- Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1999). Comprension de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, 37, 37-55.
- Falk, R. y Konold, C. (1997). Making sense of randomness: Implicit encoding as a basis for judgement. *Psychological Review*, 104, 301-318.
- Green, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D. Vere Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320 - 328). Dunedin: University of Otago
- Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 students edadd 11-16 years. In D.R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the I International Conference on Teaching Statistics* ( v.2, pp. 766-783). University of Sheffield.
- Green, D.R. (1989). Schools students's understanding of randomness. In R. Morris (Ed): *Studies in Mathematics education. v.7: The Teaching of Statistics* (pp. 27-39). París: Unesco.
- Kahneman, D., Slovic P. y Tversky, A. (Eds.). (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59 - 98.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1974). *La genése de l' idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Serrano, L. (1996). *Significados personales e institucionales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad*. Ph. D. University of Granada.

Serrano, L., Batanero, C. y Godino, J. D. (1991). Sucesiones de ensayos de Bernoulli y procesos estocásticos asociados. *Actas de las V Jornadas de Profesores de Matemáticas de THALES* (pp. 233 - 247). Granada: Sociedad Thales.

Serrano, L., Batanero C. y Ortiz, J. J (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 22, 43-50.

Toohey, P. G. (1995). *Adolescent perceptions of the concept of randomness*. Master Thesis. The University of Adelaide.