

# INFLUENCIA DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y DE LAS CREENCIAS SUBJETIVAS EN LA COMPARACION DE PROBABILIDADES

*M. Jesús Cañizares y Carmen Batanero*

*UNO, 14, 99-114, 1997*

## RESUMEN

*En este trabajo presentamos un estudio sobre la capacidad de comparación de probabilidades de alumnos de 10 a 14 años. Contemplamos los distintos niveles de dificultad de comparación de fracciones identificados por Noelting, aunque en algunos ítems se incorporan elementos de tipo subjetivo, que han hecho variar el orden de dificultad previsto. El análisis de los argumentos de los alumnos nos permite determinar las estrategias seguidas, que agregan el "enfoque en el resultado aislado" a las descritas clásicamente. El análisis de los patrones de respuestas del mismo alumno en los diferentes ítems nos hacen apreciar que la coincidencia entre el nivel de dificultad de las tareas probabilísticas y proporcionales no es total y la existencia de diversas tipologías de razonamiento probabilístico para un mismo nivel de razonamiento proporcional.*

## INTRODUCCION

En los últimos años asistimos a una reforma de la enseñanza obligatoria que concede un mayor peso al estudio de la Probabilidad por parte de los niños. Los nuevos diseños curriculares enfatizan la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y de cambiar la metodología de enseñanza para hacerla más activa y exploratoria. Sin embargo, el éxito de esta propuesta descansa en la elección adecuada de las tareas a plantear a los alumnos, según sus capacidades en el razonamiento estocástico y sus prerrequisitos. Uno de los más importantes es el razonamiento proporcional, que es preciso para la estimación y comparación de probabilidades, más allá de las tareas muy elementales.

### *Antecedentes*

La investigación sobre la capacidad de comparar probabilidades, por parte de los niños, comienza con Piaget e Inhelder (1951), quienes utilizaron como dispositivo experimental dos colecciones de fichas blancas, con o sin cruz en su revés, preguntando a los sujetos de estudio en cual de dos colecciones de diferente composición, en cuanto al número de casos favorables y posibles, sería más fácil obtener una de las fichas marcadas con la cruz. Variando la composición de las tareas investigan los razonamientos de los niños, según los diferentes estadios de su teoría del desarrollo.

Sus resultados indican que, en el nivel IA, no se está en posesión de las operaciones lógicas elementales (inclusión de la parte en un todo, susceptible de conservación y disyunción), ni de las operaciones aritméticas, por lo que sólo se resuelven con facilidad la comparación de probabilidades en los casos de doble imposibilidad, doble certeza o certeza- imposibilidad. En el nivel IB se resuelven los casos que dependen de una sola variable. El niño no es capaz de incluir los casos favorables en el conjunto de casos posibles ni de instituir una comparación cuantitativa

entre la parte (casos favorables) y el todo(casos posibles) o entre la parte y la parte complementaria (casos desfavorables), pero va adquiriendo la intuición de que la probabilidad depende del número de casos favorables.

El nivel IIA se caracteriza por el éxito en los problemas que implican la comparación de una sola variable, que pueden resolverse mediante comparaciones aditivas y el fracaso sistemático en los casos de composición proporcional. El nivel IIB, se caracteriza por una solución empírica progresiva de las cuestiones de proporcionalidad y en el estadio III por fin, el conjunto de problemas da lugar a una solución general y rápida.

La investigación de Piaget e Inhelder inspiró una serie de trabajos posteriores, entre los que destacan los de Yost y cols. (1962), Goldberg (1966), Davies (1965), Hoeman y Ross (1971), Falk y cols. (1980) y, más recientemente, Truran (1994). Particular interés para la educación tiene el trabajo de Fischbein y cols. (1970), quienes compararon el razonamiento de grupos de niños sin instrucción y con una instrucción breve, aunque sistemática sobre la forma de resolver los problemas. La instrucción no mostró mejora para los niños pequeños, pero sí a partir de 9-10 años, lo que confirma la opinión de los autores sobre la conveniencia de una enseñanza de la probabilidad a partir de estas edades.

### ***Comparación de fracciones.***

Puesto que un problema de comparación de probabilidades entraña la comparación de dos fracciones, el trabajo de Piaget en el campo de la probabilidad originó un interés notable por el razonamiento proporcional. Estos estudios han confirmado que el concepto se adquiere bien entrada la adolescencia (Fischbein, Pamput y Minzat, 1970; Karplus y Peterson, 1970, Behr y cols., 1992). Noelting (1980), a partir de un problema de comparación de dos mezclas (agua y zumo de naranja) extiende las categorías de problemas de comparación de fracciones consideradas por Piaget e Inhelder (1951) en su estudio sobre la probabilidad y diferencia diversos niveles en estos problemas y en las estrategias que le son asociadas, según las etapas de desarrollo de Piaget. Un resumen de estos y otros trabajos se incluye en Pérez Echeverría (1990), quien opina que, aunque algunos autores defienden que el razonamiento proporcional y probabilístico se desarrollan paralelamente, en general, los problemas presentados en un contexto proporcional son más fáciles que los presentados en un contexto probabilístico.

## **DESCRIPCION DE LA INVESTIGACION**

Nosotros también opinamos que, aunque el dominio del cálculo de proporciones sea un prerequisite para el cómputo adecuado de probabilidades, no es el único. Una diferencia importante entre las dos tareas estriba en que el resultado de un problema proporcional se refiere a un acontecimiento seguro, mientras que el resultado de un problema probabilístico implica un grado de incertidumbre. Por otro lado, los sujetos incluyen a veces elementos subjetivos en la asignación de probabilidades, en lugar de guiarse por un razonamiento proporcional o combinatorio, como pusimos de manifiesto en Godino y cols. (1994), al mostrar la falta de correlación entre el éxito en dos instrumentos de evaluación del razonamiento probabilístico, uno de los cuales incluía elementos de tipo subjetivo.

En este trabajo continuamos el estudio de la influencia de estos elementos subjetivos, en la asignación de probabilidades, analizando las estrategias que siguen los niños al comparar probabilidades en tareas que contienen estos elementos y su nivel de dificultad, frente a los problemas que no los contienen. Con este fin aplicamos un cuestionario escrito (complementado con entrevistas individuales a algunos alumnos) a una muestra de 134 alumnos de 10 a 14 años, que no habían estudiado probabilidad, en un colegio privado de la ciudad de Granada el curso 1995-96. A continuación describimos el cuestionario y los resultados obtenidos.

### ***Cuestionario***

El cuestionario estuvo compuesto de 8 ítems de enunciado muy parecido. En los ítem 1, 2, 3, 6 y 7, tomados de Green (1983) proponemos a los alumnos una serie de situaciones en las que deben decidir cual, entre dos urnas dadas, da mayor probabilidad de obtener una ficha de un determinado color. El enunciado de estos ítems es similar al siguiente, variando la composición de las urnas y el orden de los distractores.

**Item 1.-** En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. ( Se proporcionaba a los niños un dibujo mostrando la composición de las urnas)

Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿Cuál elegirías para hacerla extracción? Señala la respuesta correcta:

- A. La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra \_\_\_\_
- B. La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra \_\_\_\_
- C. Las dos cajas dan la misma posibilidad..... \_\_\_\_
- D. No lo se..... \_\_\_\_

Por qué? .....

Puesto que, en la situación dada, puede aplicarse el principio de indiferencia, y no disponemos de información de tipo frecuencial, nos encontramos ante un ejemplo en que la asignación de probabilidades debe hacerse aplicando la regla de Laplace. Es decir, la comparación de probabilidades de un mismo color en las dos urnas se reduce a la comparación de la fracción entre el número de bolas del color deseado (casos favorables) y el número total de bolas de la urna (casos posibles) en cada una de las urnas. Para resolver el problema es necesario, por tanto, comparar dos fracciones dadas. Además de ello, el niño debe movilizar su concepción sobre el experimento aleatorio. Debe ser capaz de diferenciar los posibles sucesos en este experimento (espacio muestral), asociar el número de casos favorables al suceso dado, el número de casos desfavorables al suceso contrario y considerar el número total de bolas como conjunto de posibilidades. Finalmente, debe aplicar el principio de indiferencia a la situación dada.

Además, hemos añadido los ítems 4 y 5, tomados del cuestionario de Fischbein y Gazit (1984), con los siguientes enunciados:

**Item 4.-** Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión?

**Item 5.-** Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión ?

**Tabla 1. Clasificación de los ítems según los niveles descritos por Noelting**

Item	Fracciones	Tipo (Noelting)	Otros	Edad media
1	(3,1); (2,1)	Ia comparación 11 término		3.6
2	(5,2); (5,3)	Ib; comparación 21 término		6.4
3	(2,2); (4,4)	IIa; clase equivalencia unidad		8.1
4	(40,20); (30,15)	IIb; cualquier clase de equivalencia	Factores subjetivos	10.5
5	(10,20); (30,60)	IIb; cualquier clase de equivalencia y dos términos proporcionales	Factores subjetivos	10.5
6	(12,4); (20,10)	IIIa;		12.2
7	(7,5); (5,3)	IIIb; cualquier fracción		15.10

En estos dos ítems se introducen como distractores elementos subjetivos que podrían afectar a la asignación de probabilidades por los niños. El primero de estos factores es de tipo causal (la edad del niño que extrae la bola puede afectar el resultado) y pretende estudiar si se discrimina los factores deterministas y aleatorios en la situación dada, así como la creencia de algunos niños en la posibilidad de control de los fenómenos aleatorios (Fischbein y cols., 1991). En el ítem 8 se introduce como distractor otra idea muy extendida entre los niños y que diferencia, a nuestro juicio un problema de comparación de probabilidades de otro de comparación de fracciones. Se trata de la creencia en que, a pesar de tener igual proporciones de casos favorables y posibles, el número absoluto de casos posibles representa una ventaja. Puesto que el problema implica la comparación de fracciones, hemos representado en los distintos ítems los niveles de dificultad identificados por Noelting (1980a) y b) y recogidos por Pérez Echeverría (1990), como se indica en la Tabla.1.

## RESULTADOS Y DISCUSION

En la Tabla 2 presentamos los porcentajes de respuestas correctas en cada grupo de edad y según el rendimiento académico del alumno, que fue valorado por su profesor. Además del porcentaje total de respuestas correctas en cada ítem (total), presentamos también el porcentaje de respuestas correctas, eliminados los alumnos que en este ítem proporcionan una respuesta ambigua o incompleta (total corregido). Cabe destacar la dificultad del ítem 7 en que la falta de proporcionalidad entre las cuatro

cifras presentadas obliga al sujeto a un cálculo de proporciones. El otro ítem especialmente difícil es el ítem 6, donde existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables de cada urna, pero la proporción no es la misma, lo que hace que las urnas no sean equivalentes. Los resultados nos muestran que esta comparación no es en absoluto espontánea, ni siquiera para los alumnos mayores, que conocían la herramienta de las fracciones, imprescindible para establecer tal relación. Destacamos también la inversión del orden de dificultad, respecto al previsto en la clasificación de Noelting en el ítem 4 tomado de Fischbein y Gazit (1984), donde introducimos distractores de tipo subjetivo.

**Tabla 2 : Porcentaje de respuestas correctas en los ítems**

Ítem	Edad de los alumnos				Rendimiento			Total (n=143)	Total corregido
	10-11 (n=36)	11-12 (n=37)	12-13 (n=38)	13-14 (n=32)	Bajo (n=43)	Medio (n=58)	Alto (n=42)		
1	75.0	70.3	86.8	87.5	81.4	67.2	95.2	79.7	80.8
2	52.8	67.6	65.8	56.2	62.8	56.9	64.3	60.8	62.6
3	47.2	54.1	81.6	73.6	65.1	60.3	78.6	63.6	66.9
4	6.0	27.0	23.6	23.8	9.5	22.4	28.5	20.0	25.7
5	13.9	32.4	39.5	43.7	25.7	26.6	47.6	32.5	37.0
6	30.6	27.0	34.2	21.9	27.9	25.9	33.3	28.7	30.4
7	19.4	5.41	5.3	6.2	11.6	6.9	9.5	9.1	9.8

Creemos que la inversión de dificultad de los ítems 2 y 3, respecto a lo previsto por las teorías sobre razonamiento proporcional, es debido a que en una situación de decisión en ambiente aleatorio, la atención se centra preferentemente en los casos favorables y no en los desfavorables.

En general hay una mejora de la respuesta con la edad, aunque no en todos los tramos ni todos los ítems. Excepto en el ítem 7, se observa invariablemente un porcentaje más alto de respuestas correctas en los alumnos de alto rendimiento académico, aunque no podemos afirmar que el porcentaje haya ido creciendo en función del rendimiento, pues en la mayoría de los ítems, los alumnos de rendimiento bajo superan en sus respuestas a los de rendimiento medio.

## **ESTRATEGIAS DE LOS ALUMNOS EN LA COMPARACION DE PROBABILIDADES**

La simple consideración de las respuestas correctas nos puede llevar a conclusiones engañosas sobre el razonamiento probabilístico de los alumnos, pues pueden haber elegido una respuesta siguiendo un razonamiento correcto o incorrecto. En esta sección analizamos los argumentos proporcionados por los alumnos para justificar sus respuesta, clasificándolos según las estrategias seguidas en la comparación de las dos probabilidades. Las categorías que hemos considerado son las siguientes:

A) *Comparación de una sola variable*: Hemos encontrado tres tipos de estrategias en las que el alumno sólo tiene en cuenta una variable del problema, que son típicas del nivel preoperacional, según Piaget e Inhelder (1951):

A1) *Comparación absoluta del número de casos posibles*: Consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas, aunque también en algunas ocasiones el alumno ve como más probable la caja con menos bolas, como lo demuestra la respuesta de Bruno (10;11) al ítem 8: "*Que es mejor para él (Eduardo), que tiene menos bolas y tiene más oportunidades de sacar la blanca*". En este caso los alumnos sólo tienen en cuenta el número de casos posibles de ambas cajas, sin considerar la relatividad de las proporciones de bolas blancas y negras. Esta estrategia, aunque puede generar una respuesta correcta al ítem 1, carece de base lógica y está engendrada por la imposibilidad de los alumnos de comparar el conjunto total con un subconjunto.

A2) *Comparación absoluta del número de casos favorables*: Es la estrategia más simple de todas, ya que de los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos y se ignoran los demás. Piaget e Inhelder (1951) encuentran que los niños tratan de comparar en primer lugar los casos posibles (estrategia A1) y, a igualdad de casos posibles, centran su atención en la comparación de los casos favorables, eligiendo la caja que tiene más. Nosotros no estamos totalmente de acuerdo con esta afirmación, a la luz de nuestros resultados, que muestran un gran porcentaje de alumnos que usan esta estrategia en el ítem 1, sin comparar previamente los casos posibles. Pensamos que esta diferencia puede ser debida al tipo de tarea presentada, ya que en los experimentos de Piaget e Inhelder se utilizaban grupos de fichas iguales, donde algunas de ellas tenían una cruz en el reverso, lo que, a nuestro entender, puede favorecer la consideración, por parte del alumno del conjunto de fichas, como un todo, más que como compuesto de dos partes. En nuestras tareas las bolas son de dos colores distintos, lo que perceptivamente anima a la consideración del conjunto partido. Esta estrategia la hemos considerado pertinente en el ítem 1, ya que su aplicación a cualquier otro ítem no será adecuada y generará respuestas incorrectas. Un claro ejemplo de esta estrategia nos lo proporciona la respuesta de Pilar (10;11) al argumentar que prefiere la caja A (correcta) en el ítem 1 "*porque hay más fichas negras*".

Nos queda por expresar nuestro reparo a considerar que, como indican Piaget e Inhelder, en esta estrategia sólo se está considerando la comparación de una sola variable. Creemos que esto sería así en los casos en que da lugar a respuestas incorrectas, donde claramente se ignora el número de bolas desfavorables o posibles, pero en el caso en que justifica una respuesta correcta, aunque no lo explicita, el alumno podría basar su elección en el número de bolas favorables, después de darse cuenta que el número de bolas desfavorables era el mismo en ambas cajas.

A3) *Comparación absoluta del número de casos desfavorables*: Cuando, una vez intentada la anterior, existe igualdad de casos favorables, los sujetos centran su atención sobre el número de casos desfavorables. El único ítem en el que la justificación mediante esta estrategia daría lugar a una respuesta correcta es el 2, y de nuevo ponemos en duda el hecho de que el alumno esté considerando una sola variable, sino que puede estar utilizando una correspondencia del tipo "a igualdad de casos favorables en las dos cajas, elijo la que presente mayor número de desfavorables", sin llegar a explicitarlo. Un ejemplo de ella nos lo proporciona Carlos (11;5) que elige la caja correcta (C) en el ítem 2 porque "*hay menos fichas blancas*".

*B) Estrategias de dos variables:* En este tipo de estrategia, los alumnos buscan la solución del problema comparando, de alguna manera, todos los datos que aparecen en el enunciado. Hemos encontrado los casos siguientes:

*B1) Estrategias aditivas:* Los alumnos que utilizan esta estrategia tiene en cuenta los casos favorables, los desfavorables y los posibles, simultáneamente, pero gestionan los datos por medio de alguna operación aditiva para poder establecer la comparación. En general, salvo para las tareas en que el número de casos favorables o desfavorables coinciden, estas estrategias no se consideran pertinentes. Para Piaget e Inhelder, estos argumentos son característicos del período de operaciones concretas, en el que observan un fracaso sistemático en las tareas de proporciones. Un ejemplo de este tipo de razonamiento lo tenemos en Antonio (12;3), que en el ítem 1, elige la opción correcta (caja A) "*porque hay mayor diferencia entre los colores de la fichas*".

*B2) Estrategia de correspondencia:* Esta estrategia consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra. Piaget e Inhelder (1951) afirman al respecto que, a falta de un cálculo de fracciones, el sujeto determina las dobles relaciones por un sistema de correspondencias cuando las proporciones o desproporciones no aparecen como inmediatas. Esta estrategia se desarrolla en el período de operaciones formales, aunque en los casos más sencillos de cajas proporcionales aparece durante el periodo de operaciones concretas. Nosotros hemos considerado este razonamiento pertinente para resolver correctamente los ítems 3,4, 5 y 6. Un claro ejemplo de esta estrategia es el que nos proporciona la respuesta de José María (12;2) al ítem 6, en que elige, correctamente, la caja G "*porque la caja G tiene el triple de negras y la caja H tiene el doble de negras que de blancas*".

*B3) Estrategias multiplicativas:* Esta estrategia, desarrollada, según Piaget e Inhelder (1951) en el período de las operaciones formales, es sin duda, la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Es necesario, bien poner en relación el número de casos favorables con el número de casos posibles, es decir, la parte con el todo, o bien establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después compararlas, aplicando la regla de Laplace. Esta estrategia resuelve con éxito todos los ítems de comparación de probabilidades, especialmente los problemas semejantes al 7 que no son resueltos por ninguna de las estrategias anteriores. Ricardo (14;2) da el siguiente razonamiento para justificar su respuesta al ítem 7: "*la caja K, por ser mayor el número de negras respecto a las blancas en la K que en la J. (K:  $5/3 = 25/15$  21/15 = 7/5: J)*".

*C) Otros tipos:*

*C1) Hacer referencia a la suerte:* En este caso los alumnos se niegan a tomar una decisión sobre las urnas, alegando que es imposible saber cual es el suceso que ocurrirá. El razonamiento subyacente parece ajustarse a uno de los patrones del "sesgo de la equiprobabilidad" (Lecoutre, 1992) o el "outcome approach" (enfoque en el resultado, descrito por Konold. 1989). Los sujetos que utilizan la primera estrategia tienden a suponer que todos los sucesos aleatorios son equiprobables por naturaleza, es decir, generalizan indebidamente la regla de Laplace.

En el segundo caso, se interpreta que lo que pide la pregunta es adivinar el suceso que ocurrirá y se argumenta que es imposible predecir el resultado, debido al

carácter aleatorio del experimento. Así, Lina (11;3) responde al ítem 7 que ambas cajas tienen la misma probabilidad *"porque es el destino"*. En ciertos casos nos hemos encontrado con cierta contradicción entre su intuición de lo imprevisible asociada a la aleatoriedad, y su tendencia a la cuantificación de los datos presentados, sobre todo en las tareas más elementales, como lo demuestra la misma alumna de antes, Lina al responder al ítem 3 que prefiere la caja F *"porque tiene más fichas negras, aunque también es el destino"*.

**Tabla 3: Porcentaje de alumnos que emplean las distintas estrategias**

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7
Casos posibles	4.9	1.4	5.6	1.4	0.7	7.0	7.7
Casos favorables	51.7	29.4	16.8	25.0	42.7	27.3	13.3
Casos desfavorables	2.8	34.3	1.4	0.7	4.9	11.2	2.1
Aditivas	7.7	4.9	15.4	2.9	4.2	21.0	39.9
Corresponden.	13.3	11.9	36.4	15.0	26.6	6.3	1.4
Multiplicativa	1.4	0.0	0.7	0.0	0.0	0.7	1.4
Suerte	11.2	4.2	4.2	27.1	4.9	8.4	7.7
Otras	5.6	11.2	14.7	5.0	4.2	12.6	18.9
No responde o incompleta	1.4	2.8	4.9	22.1	12.1	5.6	7.7

Naturalmente, aunque esta estrategia puede producir respuestas correctas a los ítems con cajas proporcionales (el 4, el 5 y el 6), no la consideramos pertinente cuando hace mención explícita a la suerte o al destino, y sí cuando se limita a decir que "las dos ofrecen la misma posibilidad", sin más explicación.

C2) *Otras estrategias*: Las dos más frecuentes son tomar la decisión de equiprobabilidad alegando que "en las dos cajas hay bolas negras", y realizar la elección en función de la disposición que presentan las bolas en los dibujos, como Laura (11;3) que en el 2 elige la caja F, *"porque hay dos negras en lo alto y una blanca al lado"*.

Aunque, en general, predomina la estrategia de comparar casos favorables, vemos en la Tabla 3 que los alumnos cambian de estrategia, adaptando el nivel de las mismas a la dificultad de los problemas. En los problemas más sencillos usan estrategias de una variable, aunque pasan a las diferencias entre casos favorables y desfavorables o las correspondencias en los problemas más complejos.

## **ANÁLISIS DE PATRONES DE RESPUESTAS**

Una vez analizadas las respuestas y estrategias de comparación de probabilidades, hemos realizado un análisis de los patrones de respuestas a los diferentes ítems. Esta técnica, tomada de Serrano y cols., (1992), permite analizar la consistencia de un mismo alumno en las respuestas a ítems similares, así como las variables que influyen en sus cambios de estrategia. También nos servirá para comparar el nivel de razonamiento proporcional y probabilístico en el mismo alumno. En esta tabla hemos ordenado los ítems según su porcentaje de éxito (es decir, ítems 1, 3, 2, 5, 6, 4 y 7). El patrón de éxitos de un alumno en el conjunto de ítems viene representado por un vector de 7 componentes, donde representamos con 1 el éxito en cada ítem y 0 el fallo en el mismo. Así, por ejemplo, el patrón 0 1 0 0 0 1 0 es el de un alumno que falla todos los ítems, excepto el 3 (que ocupa el segundo lugar en dificultad) y el 4 (que ocupa el penúltimo).

Este tipo de representación se usa también en la técnica del escalograma de Gutman, empleada en la investigación de Noelting (1980 b) para comprobar si la dificultad en los diferentes ítems de una prueba sigue un orden lineal. En este supuesto, los alumnos que tuviesen un número dado  $n$  de aciertos en la prueba de  $m$  ítems, deberían (al menos en su mayor parte) acertar sistemáticamente los  $n$  ítems más sencillos y fallar en los  $m-n$  restantes. Esto no ocurre en nuestra prueba, donde sólo 66 casos de los 144 siguen el patrón supuesto por el escalograma de Gutman y 78 casos no los siguen, lo que creemos también apunta a la diferencia entre el razonamiento proporcional y probabilístico, ya que en la investigación de Noelting, los ítems propuestos del mismo nivel que los que empleamos en esta investigación, seguían el patrón de Gutman,

**Tabla 4: Patrones de respuestas en los ítems de comparación de probabilidades**

Patrón de respuesta 1 3 2 5 6 4 7	N.éxitos	Frecuencia
1 1 1 1 1 1 1	7	2
1 1 1 1 1 1 0	6	5
1 1 1 1 0 1 0	5	6
1 1 1 1 1 0 0	5	7
Otros patrones	5	3
1 1 1 0 1 0 0	4	13
1 1 1 1 0 0 0	4	14
Otros patrones	4	14
1 1 1 0 0 0 0	3	14
Otros patrones	3	13
1 1 0 0 0 0 0	2	5
Otros patrones	2	10
0 0 1 0 0 0 0	1	3
0 1 0 0 0 0 0	1	7
1 0 0 0 0 0 0	1	19
0 0 0 0 0 0 0	0	9

A continuación comentamos los patrones encontrados, cuya frecuencia se muestra en la tabla 4. Observaremos que, con un mismo número de respuestas correctas se aprecian diferentes tipologías de razonamiento probabilístico.

*a) Alumnos con 7 respuestas correctas (Nivel IIIB).* Son sólo dos alumnos de 11 años y cuatro meses y 14 años y 2 meses respectivamente, que han dado pruebas de un razonamiento proporcional correspondiente al nivel IIIB de Piaget ya que han sido capaces de responder correctamente el ítem de este nivel y todos los anteriores. Asimismo han usado repetidamente estrategias multiplicativas propias de este nivel. No se han visto afectados por los distractores incluidos en los ítems 4 y 5.

*b) Alumnos con 6 respuestas correctas (Niveles IIIA y IIB).* Todos ellos (5 alumnos) tienen el mismo patrón de respuestas, puesto que fallan el mismo ítem 7. Aunque los alumnos de este grupo han resuelto correctamente el ítem 6 (Nivel IIIA), sólo dos de ellos lo han hecho utilizando una estrategia pertinente y estarían en este nivel. El resto ha usado diferencia entre casos favorables y posibles o simplemente comparación de casos favorables y estarían en nivel IIB.

*c) Alumnos con 5 respuestas correctas (Nivel IIIA y IIB).* Se aprecian dos patrones predominantes:

c1) Alumnos que fallan los ítems 6 y 7, que serían los más difíciles, respecto al razonamiento proporcional (6 casos). Generalmente han empleado estrategias aditivas para intentar resolver estos dos problemas, aunque en el ítem 2 y 3 algunos han empleado la correspondencia. Tres alumnos (nivel IIIA) emplean estrategias multiplicativas en el ítem 5 y el resto, que estaría en el nivel IIB de razonamiento proporcional, una estrategia de correspondencia.

c2) Alumnos que fallan uno de los ítems 4 o 5 (nivel IIB), contestando correctamente el ítem 6 (nivel IIIA), lo cual contradice lo esperado en el desarrollo del razonamiento proporcional (9 casos). El fallo en los ítems 4 y 5 ha sido debido al "enfoco en el resultado aislado", o a creencias subjetivas.

d) Alumnos con 4 respuestas correctas (Niveles IIIA, IIB, IIA y IB).

d1) Alumnos que aciertan los cuatro ítems más sencillos, fallando el 4, 6 y 7 (15 casos). El ítem 5 es de nivel IIB (cualquier clase de equivalencia) y además, tiene dos términos de las fracciones a comparar complementarios, con lo que ha resultado más sencillo que el ítem 4, que también es de nivel IIB. Consideramos que estos alumnos comienzan a resolver los problemas más sencillos del nivel IIB, aunque todavía tienen dificultad, por no haber afianzado suficientemente este tipo de problemas. Han usado comparación de casos favorables o desfavorables en los ítems 1 y 2 y estrategias de correspondencia en el ítem 3 (nivel IIA), excepto un alumno, que usa la diferencia entre casos favorables y posibles y otro que no razona su respuesta.

En el ítem 5 algunos usaron estrategias proporcionales o bien el concepto de juego equitativo, que implica también la comparación de las proporciones en las dos urnas. El ítem 4 lo han fallado debido al razonamiento del "enfoco en el resultado aislado", a comparar sólo el número de casos favorables o el número de casos desfavorables.

d2) Alumnos que aciertan los problemas 1,2 y 3 fallan los dos problemas 4 y 5 (nivel IIB) resolviendo correctamente el 6 (nivel IIIA; 13 alumnos). En los tres primeros ítems se observa una gran variedad de estrategias, incluyendo las aditivas, comparación de casos favorables o desfavorables. Hacemos notar también que 7 alumnos usaron las estrategias de comparación de casos desfavorables o diferencia entre casos favorables y desfavorables en los ítems 6 e 7 que les ha resultado válida en el ítem 6 pero no en el 7. Por ello estos alumnos no alcanzarían el nivel IIIA, aunque habrían superado el IIB. En los ítems 4 y 5 el fallo se ha producido por conceder mayor probabilidad a la urna con mayor número de casos favorables, incluso habiendo la misma proporción. También han aparecido el "enfoque en el resultado aislado" y las respuestas ambiguas.

d3) Otros patrones no sistemáticos (15 alumnos). Aparece una variedad de patrones con respuestas correctas a ítems de diferentes dificultad, como fallos en el ítem 1 o 3, acertando el 7. El acierto en los ítems difíciles, como el 7 se debe a que la estrategia usada ha sido válida para los datos de este problema, pero no para el caso general. El fallo en los ítems fáciles ha sido debido a elegir una estrategia no adecuada al problema. En general estos niños tienen un nivel bajo de razonamiento proporcional, incluido entre el nivel IB (ya que recurren a la estrategia de comparación del segundo término de la fracción) y IIA (alumnos que resuelven los 3 primeros problemas y usan la estrategia de correspondencia).

*e) Alumnos con 3 respuestas correctas (Niveles IIA, IB, IA).*

*e1)* Alumnos que responden correctamente los tres primeros ítems (13 casos). En el ítem 5 con frecuencia se influencia por el mayor número de casos favorables y en el 4 dan respuestas ambiguas o manifiestan el "enfoque en el resultado aislado". Hay algunos alumnos muy consistente en su estrategia, que usan casi siempre una estrategia aditiva. La estrategia de correspondencia aparece con menor frecuencia que en los casos anteriores y, cuando se usa es en los problemas más sencillos que fueron resueltos correctamente. Se diría que el alumno no es capaz de extender esta estrategia a los casos más complejo por un insuficiente razonamiento proporcional. En su conjunto estos alumnos se sitúan al nivel IIA, pues han resuelto correctamente hasta este nivel de dificultad.

*e2)* Alumnos que responden correctamente el ítem 1 y 2, empleando preferentemente la comparación de casos favorables en el 1y la de casos desfavorables en el 2y fallan el ítem 3, no llegando a aplicar la estrategia de correspondencia (7 casos) . Estarían en el nivel IB. Aunque aciertan algún otro problema, ha sido porque la estrategia (incorrecta) empleada les ha sido productiva para ese problema particular.

*e3)* El resto de los casos (5) no muestra patrones sistemáticos, salvo responder correctamente el ítem 1, lo que correspondería a un nivel IA).

*f) Alumnos con 2 respuestas correctas. (Nivel IA, Ib, IIA).*

*f1) Respuestas correctas a los ítems 1 y 3 (5 casos).* Generalmente el ítem 3 lo resuelven con una estrategia de diferencia, que es, en general incorrecta, aunque les ha servido para este caso. El ítem 1 y 3 lo resuelven mediante comparación de casos favorables. No llegan a comparar casos desfavorables en el ítem 2, lo que lleva a una solución incorrecta. Por ello los situamos en el nivel IA.

f2) Alumnos con solución correcta al ítem 2, mediante comparación aditiva, que estarían situados en el nivel IB.

f3) Un alumno resuelve correctamente los ítems 2 y 3, usando la correspondencia en éste último, aunque falla en el primer ítem, posiblemente por falta de atención. Creemos que este alumno estaría en el nivel IIA.

f4) El resto de alumnos (8) no muestra patrones identificables. En algunos de ellos aparece sistemáticamente el "outcome approach" o creencias subjetivas.

g) *Alumnos con 1 respuesta correcta* (IIA, IB, IA o inferior).

g1) Alumnos que sólo resuelven el ítem 1, generalmente con estrategias aditivas, por lo que estarían en nivel IA (19 casos) . Con frecuencia estos alumnos conservan la misma estrategia en todos los ítems, o cambian a otro tipo de estrategia aditiva, lo que les lleva al fracaso en los más difíciles. No aparecen estrategias de correspondencia. En los ítems 4 y 5, o bien usan estrategias aditivas, justifican su creencia en la "suerte" , dan respuestas ambigüas, se basan en el mayor número de bolas de un color o invocan factores causales.

g2) Alumnos que han resuelto correctamente y con estrategia adecuada el ítem 2 (nivel IB), aunque han fallado en el 1 (nivel A1, por usar una estrategia incorrecta o basarse en el "outcome approach". Estos alumnos estarían iniciando el nivel IB.(2 casos)

g3) El resto de alumnos (8) sólo resuelve correctamente el ítem 3. Sin embargo, no usan una estrategia adecuada, sino que se caracterizan por dar sistemáticamente una respuesta basada en el "enfoque en el resultado aislado" y han dado la solución correcta al ítem 3 porque se trata de un caso de equiprobabilidad. Consideramos, en consecuencia que estos niños tienen un nivel muy bajo de razonamiento proporcional, que no alcanza incluso el IA. Sin embargo se aprecia una cierta idea de probabilidad, aunque incorrecta.

h) *Alumnos que han fallado todos los ítems* (Ausencia de razonamiento proporcional)

Finalmente los alumnos que han fallado todos los ítems (9 casos) se dividen en dos tipos generales: o bien usan solamente la comparación de casos favorables, sin que les resulte productiva por falta de razonamiento proporcional o bien manifiestan sistemáticamente el "enfoque en el resultado aislado" o una combinación de ambos. Son los alumnos en los cuales el razonamiento proporcional no ha empezado a desarrollarse o bien mantienen una creencias erróneas sobre la probabilidad.

## CONCLUSIONES

Como consecuencia del análisis de los patrones de respuestas obtenemos la siguiente distribución de niveles de razonamiento proporcional de los niños es: nivel 0 (15 alumnos), IA (29 alumno), IB (32 alumnos), IIA (20 alumnos), IIB (24 alumnos), IIIA (12 alumnos) y IIIB (2 alumnos). Vemos que, en general el nivel de razonamiento proporcional de los alumnos es bajo. Ello podría ser un obstáculo para el aprendizaje de las probabilidades, aunque, también la enseñanza de la probabilidad podría ser un

contexto muy rico que favoreciese el desarrollo del razonamiento proporcional de estos alumnos.

Con un mismo nivel de desarrollo de razonamiento proporcional el éxito en los problemas probabilístico de comparación de probabilidades ha sido muy variado, salvo en el caso de los niveles IIIB (7 aciertos) y IIIA ( 6 aciertos). En el nivel IIB de razonamiento proporcional el número de aciertos en los problemas probabilísticos oscila de 6 a 4, en el nivel IIA y IB de 4 a 1, en el IA de 3 a 1 y niños que no llegan a éste nivel han tenido hasta 3 aciertos. Vemos, en consecuencia, que no hay una coincidencia total, aunque sí bastante relación entre el nivel de razonamiento proporcional y el éxito en tareas probabilísticas de un nivel proporcional dado. Los desajustes son debidos a los siguientes casos:

a) Factores del problema que inducen la asignación de probabilidades subjetivas, especialmente en los dos ítems tomados del cuestionario de Fischbein y Gazit.

b) Creencia en la imposibilidad de asignar probabilidades a los sucesos aleatorios, razonando de acuerdo al "enfoque en el resultado aislado" descrito por Konold o bien mediante el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre.

c) Mayor fijación en los casos favorables, incluso en aquellos problemas que han de resolverse mediante la comparación de casos desfavorables.

Ahora bien, estos tres mecanismos no son pertinentes en los problemas de comparación de proporciones, mientras que pueden actuar en un problema probabilístico, incluso tan simple como los planteados. Como consecuencia, el profesor debe tenerlos en cuenta, además del razonamiento proporcional, al abordar la enseñanza de la probabilidad a sus alumnos. Creemos que un medio de enfrentar a los alumnos con estas concepciones y ayudarles a superarlas es ponerle en contacto con situaciones experimentales sobre probabilidad, como las recomendadas en los nuevos diseños curriculares.

## REFERENCIAS

BATANERO, C. y SERRANO, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, 15-28.

BEHR, M.J., HAREL, G., POST, T. y LESH, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

CAÑIZARES, M. J., BATANERO, C., SERRANO, L., y ORTIZ, J. J. (1997). Subjective elements in children's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed). *Proceedings of the 21st Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 49-56).

DAVIES, H. (1965). Development of the probability concept in children. *Child Development*, 99, 29-39.

FALK, R., FALK, R. y LEVIN, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 181-204.

FISCHBEIN, E., PAMPUT, E. y MINZAT, I. (1970). Comparison of fractions and the chance concepts in children. *Child Development*, 41, 365-376.

FISCHBEIN y GAZIT (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24.

GODINO, J. D.; CAÑIZARES, M. J. y BATANERO, C. (1994). A comparative study of two instruments for evaluating primary probabilistic reasoning. En: J. Garfield (Eds). *Research Papers from the Fourth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS IV)*. The International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics. University of Minnesota.

GOLDBERG, E. (1966). Probability judgment by preschool children. *Child Development*, 37, 157-167.

GREEN, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). University of Sheffield.

HOEMANN, H. W. y ROSS, B. M. (1982). Children's concepts of chance and probability. En Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition* (pp. 93 - 121). Berlín: Springer Verlag.

KARPLUS, R. y PETERSON, R. W. (1970), Intellectual development beyond elementary school II; Ratio, a survey. *School Science and Mathematics*, 70, 813-120.

NAVARRO-PELAYO, V., BATANERO, C., GODINO, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación matemática*, 8(1), 26-39.

NOELTING, G. (1980 a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (2), 217-253.

NOELTING, G. (1980 b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at successive stages: problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in mathematics*, 11(3), 331-363.

PEREZ ECHEVERRIA, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Universidad Autónoma.

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

TRURAN, J. (1994). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte and J. F. Matos (Eds), *Proceedings of the XVIII PME Conference* (v4, pp. 337-344). Universidad de Lisboa.

YOST, P., SIEGEL, A. y ANDREWS, J. N. (1962). Non verbal probability judgement by young children. *Child Development*, 33, 769-780.