Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada

Rafael Roa, Carmen Batanero, Juan D. Godino y M. Jesús Cañizares

Epsilon, 36, 433-446, 1997

En este trabajo se presenta un estudio de los procesos de resolución de problemas combinatorios simples y compuestos en cuatro estudiantes de quinto curso de la licenciatura de Matemáticas. Estos estudiantes fueron seleccionados entre los que obtuvieron los mejores y peores resultados en la resolución de 13 problemas combinatorios elementales presentados a 29 estudiantes en un cuestionario escrito. Los datos sobre los procesos de resolución se obtuvieron mediante entrevistas en profundidad realizadas individualmente. Los resultados muestran una dificultad elevada de estos problemas, incluso para estudiantes con una sólida preparación matemática. Los buenos resolutores han estado caracterizados por la identificación de la configuración combinatoria pedida, la comprensión de la relevancia del orden y la repetición en el enunciado del problema; la capacidad de enumeración sistemática; la capacidad recursiva y de generalización y la identificación de la operación combinatoria adecuada, o bien de la serie de operaciones aritméticas equivalentes. Por el contrario, las principales causas de fracaso han sido la confusión sobre la relevancia del orden o la repetición, confusión sobre el tipo de elementos que se combinan, falta de capacidad de enumeración y fallos de tipo aritmético.

RAZONAMIENTO COMBINATORIO Y PENSAMIENTO FORMAL

Además de su importancia en el desarrollo de la idea de Probabilidad, la capacidad combinatoria es un componente fundamental del pensamiento formal. El razonamiento combinatorio representa algo más que una simple parcela de las Matemáticas, siendo un esquema tan general como la proporcionalidad y la correlación, que emergen simultáneamente a partir de la edad de 12 o 13 años.

De acuerdo con Inhelder y Piaget (1955), el razonamiento hipotético-deductivo opera con las posibilidades existente en una situación problemática, las cuales son descubiertas y evaluadas por el sujeto por medio de operaciones combinatorias. Esta capacidad puede relacionarse con los estadios descritos en la teoría de Piaget: después del período de las operaciones formales, el adolescente descubre procedimientos sistemáticos de construcción combinatoria, aunque para las permutaciones es necesario esperar hasta la edad de 15 años. Para estos autores, la combinación supone la coordinación de la seriación y la correspondencia, la permutación implica una reordenación respecto a un sistema de referencia móvil y reversible; por tanto, las operaciones combinatorias son operaciones sobre operaciones, características del nivel del pensamiento formal.

Sin embargo, los resultados de Fischbein (1975) muestran que la capacidad de resolver problemas combinatorios, no siempre se alcanza en el nivel de las operaciones formales, si no hay una enseñanza específica. En Fischbein y Grossman (en prensa) analizan la interacción entre la intuición y los esquemas subyacentes en estimaciones intuitivas del valor de las operaciones combinatorias con diversos tipos de sujetos, entre los que se cuentan adultos sin instrucción sobre combinatoria. Observaron que en las estimaciones intuitivas de los sujetos subyacían cálculos tácitos relacionados con las operaciones combinatorias, y el número de elementos que se trata de combinar. Sin embargo, estos cálculos se reducían a operaciones multiplicativas binarias, en lugar de realizar el conjunto requerido de operaciones, lo que sugiere que los esquemas combinatorios sufren un proceso de "compresión", reduciéndose a una estructura mínima, para apoyar las intuiciones erróneas de los sujetos.

Algunos autores como Marchand (1994) indican que la edad media de acceso al estadio formal es substancialmente diferente de la indicada en las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951) y que un número importante de sujetos no llega nunca a alcanzar esta etapa. Piaget (1972) reformuló su primera concepción sobre el pensamiento formal y admite que la edad donde se alcanza debe ser extendida hacia los 15-20 años, indicando además el papel crucial del ambiente, las capacidades del sujeto y la especialización profesional en la construcción de la estructura de las operaciones formales.

Interesados por el razonamiento combinatorio, comenzamos en 1991 un proyecto de investigación para evaluar la capacidad combinatoria de los alumnos de los niveles de enseñanza secundaria. Dentro de este proyecto,. Navarro-Pelayo (1994) analizó el razonamiento de alumnos de secundaria con y sin enseñanza en el tema. El análisis de las respuestas de 720 alumnos de 14 y 15 años mostró una dificultad bastante generalizada en la resolución de los problemas (Batanero y Navarro-Pelayo, 1996). El análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes probó la dependencia de los tipos de error respecto de las variables de tarea de los problemas (Batanero y cols. en prensa).

En el desarrollo de la citada investigación colaboraron otras muestras de alumnos de diversos niveles educativos que, voluntariamente, prestaron su ayuda en el análisis de la legibilidad, la dificultad y el tiempo de cumplimentación de las sucesivas versiones del cuestionario, con objeto de llegar a la versión definitiva. Una de estas muestras, con la que obtuvimos un resultado no esperado y para el que no encontramos una explicación inmediata, fue un grupo reducido de estudiantes de 5º curso de la licenciatura de Matemáticas. Encontramos que un porcentaje elevado de estos estudiantes sólo resolvieron correctamente una pequeña parte de los problemas combinatorios simples que les propusimos, a pesar de su fuerte preparación matemática y la evidente relación de la tarea con su futura labor profesional. Como consecuencia nos preguntamos si aquellos resultados constituirían un hecho aislado de aquellos estudiantes particulares o por el contrario, nos encontrábamos con un fenómeno cognitivo de alcance más generalizado, consistente en la dificultad de resolución de problemas combinatorios simples, incluso para sujetos con una alta preparación matemática. En tal caso, ¿cómo podríamos explicar la falta de capacidad de razonamiento combinatorio en esta clase de sujetos?

El interés de encontrar unas posibles respuestas a estas preguntas dió origen a un nuevo proyecto de investigación, esta vez sobre el razonamiento combinatorio de alumnos universitarios, cuyos primeros resultados presentamos en este trabajo. Estos primeros resultados se refieren a los índices de dificultad de once problemas combinatorios simples y dos compuestos en una muestra de 29 estudiantes de quinto curso de matemáticas y los procesos de resolución de cuatro de estos alumnos, obtenidos mediante entrevista individual.

Como consecuencia de nuestro análisis destacamos las estrategias que diferencian los buenos y malos resolutores y los puntos donde aquellos han encontrado mayor dificultad. Basándonos en estos puntos presentamos propuestas concretas sobre el modo de abordar la enseñanza de la combinatoria y sobre el papel que ésta puede jugar para la enseñanza de estrategias generales en la resolución de problemas matemáticos.

METODOLOGÍA

La muestra sobre la que se realizó el estudio de las estrategias estuvo formada por cuatro estudiantes de quinto curso de la licenciatura de matemáticas, que coloboraron voluntariamente. Estos estudiantes fueron seleccionados entre los que obtuvieron mejores y peores resultados en un cuestionario escrito, que describimos a continuación, y que fue presentado como una actividad dentro de una de sus asignaturas a un total de 29 alumnos de quinto curso de matemáticas. Los datos sobre los procesos de resolución se obtuvieron mediante entrevistas en profundidad realizadas individualmente a los cuatro alumnos.

Descripcion del cuestionario

El cuestionario empleado se presenta como apéndice y se compone de 11 problemas combinatorios simples y 2 compuestos. Los problemas combinatorios simples (problemas 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 y 13) han sido tomados del cuestionario de Navarro-Pelayo (1994) y pueden dividirse, según el modo en que Dubois (1984) clasifica las configuraciones combinatorias simples en tres modelos diferentes: Selección, que enfatiza la idea de muestreo, colocación, relacionado con el concepto de aplicación y partición o división de un conjunto en subconjuntos.

En el modelo de selección (items 1, 6, 11 y 13) se considera un conjunto de m objetos (generalmente distintos), de los cuales se extrae una muestra de n elementos. Según podamos repetir los elementos y si el orden en que la muestra es extraída es relevante o no, obtenemos las cuatro operaciones combinatorias básicas.

Otro tipo de problemas (ítems 3, 8, 9 y 12) se refiere a la colocación de una serie de n objetos en m celdas. Hay muchas posibilidades diferentes en este modelo, dependiendo de las siguientes características:

- si los objetos a colocar son idénticos o no;
- si las celdas son idénticas o no;
- si debemos ordenar los objetos colocados dentro de las celdas;
- las condiciones que se añadan a la colocación, tales como el máximo número de objetos en cada celda, o la posibilidad de tener celdas vacías, etc.

No hay una operación combinatoria distinta para cada colocación diferente y posible, y más aún, se puede obtener la misma operación combinatoria con diferentes problemas de colocación. En consecuencia, no es posible traducir cada problema de colocación en un problema de muestreo. El lector interesado puede encontrar un estudio más completo de las diferentes posibilidades del modelo de colocación en Dubois (1984).

Finalmente, podríamos estar interesados en dividir un conjunto de n objetos en m subconjuntos, es decir, en efectuar una partición de un conjunto (ítems 4, 5 y 10).

Podemos visualizar la colocación de n objetos en m celdas como la partición de un conjunto de n elementos en m subconjuntos (las celdas). Por tanto, hay una correspondencia biyectiva entre los modelos de partición y colocación, aunque para el alumno esto podría no ser tan evidente.

Consecuentemente, no podemos suponer que los tres tipos de problemas descritos (selección, colocación y partición) sean equivalentes en dificultad, incluso aunque puedan corresponder a la misma operación combinatoria. Más aún, Navarro-Pelayo mostró que el modelo combinatorio implícito en el problema es una variable de tarea fundamental para evaluar la capacidad combinatoria de los alumnos.

Además de estos problemas combinatorios simples, en los que tenemos en cuenta las diferentes operaciones combinatorias, tipo de elementos y valores de los parámetros, hemos incluído dos problemas combinatorios compuestos, tomados de Gascón (1988). Son los problemas 2 y 7, en cada uno de los cuales interviene un problema de selección y otro de colocación ligados por la regla del producto.

RESULTADOS Y DISCUSION

Como hemos indicado, el cuestionario fue cumplimentado por un total de 29 estudiantes de quinto curso de la licenciatura de matemáticas empleando un tiempo aproximado de dos horas. Puesto que estos estudiantes se preparaban para ser futuros profesores, se les indicó el motivo de la investigación, pidiéndoles que explicasen lo más detalladamente sus respuestas y el proceso de resolución, tal como ellos lo explicarían a sus futuros alumnos de secundaria.

Tabla 1: Frecuencias y porcentajes de soluciones correctas en los items del cuestionario

Item	Frecuencia	Porcentaje
1	20	69
2	11	38
3	22	76
4	2	7
5	22	76
6	17	59
7	4	14
8	15	52
9	13	45
10	20	69
11	14	48
12	13	45
13	21	72

En la tabla 1 presentamos la frecuencia y porcentaje de aciertos a cada uno de los ítems en el total de los 29 estudiantes, donde podemos observar la diferencia de dificultad entre problemas aparentemente similares. Aunque los problemas combinatorios compuestos (2 y 7) han sido en general más difíciles que los simples, también se da el caso de problemas combinatorios simples, como el 4 en el que la mayor parte de estudiantes ha sido incapaz de hallar la solución correcta. En general, hemos encontrado mayor dificultad en los problemas de variaciones con repetición (ítems 4, 9 y 11), dentro de los problemas combinatorios simples.

En la tabla 2 presentamos la distribución del número total de ítems resueltos correctamente por cada estudiante, donde queda constancia de la variabilidad en la dificultad que encuentran en estos problemas los diferentes estudiantes. Mientras algunos de ellos resolvieron todos o casi todos los problemas una proporción importante (62.07%) no fue capaz de hallar la solución de más de la mitad de los problemas. Este resultado es preocupante, si se tiene en cuenta que la mayor parte de los problemas combinatorios son simples (es decir su solución es una de las operaciones combinatorias elementales) y que el razonamiento combinatorio es esencial como base en el estudio de la matemática discreta.

Por otro lado, como hemos dicho, la intención de estos alumnos era la de dedicarse a la enseñanza de las matemáticas, por lo que es también previsible que una parte de los mismos tenga necesidad de enseñar combinatoria o probabilidad, por lo cual sus modos de razonamiento incorrecto pueden ser transmitidos a sus futuros alumnos. Finalmente, si después de un entrenamiento tan fuerte en matemáticas no se dispone de las herramientas heurísticas suficientes para abordar con éxito los problemas combinatorios simples, es necesario replantearse los principios en que debe basarse la instrucción en resolución de problemas en estos alumnos en particular y en los alumnos de secundaria, en general.

Tabla 2: Distribución del número de respuestas correctas por estudiante

N. items	Frecuencia	%	Acum.
2	1	3.4	3.4
4	6	20.7	24.13
5	4	13.8	37.93
6	7	24.14	62.07
7	2	6.8	68.87
8	2	6.8	75.67
9	2	6.8	82.47
10	2	6.8	89.27
12	1	3.4	92.67
13	2	6.8	100
Total	29	100	

Con objeto de analizar las estrategias seguidas por los estudiantes y discriminar las que han sido productivas frente a las improductivas, así como para detectar los puntos erróneos de estas últimas, se seleccionaron dos de los mejores y peores estudiantes de este grupo, en cuanto a los resultados del cuestionario. En cada uno de estos grupos se tomó un estudiante que, como estrategia habitual tratara de identificar la fórmula de la operación combinatoria que da la solución del problema y otro que intentara resolverlos mediante otras técnicas, como enumeración. De este modo podríamos comparar la efectividad de estos dos tipos de estrategias para la solución de los problemas combinatorios.

Cada uno de estos alumnos fue entrevistado individualmente durante un espacio de una hora a hora y media sobre los procesos seguidos para resolver cada uno de los problemas y los razonamientos subyacentes. A continuación presentamos un resumen de los resultados de las entrevistas individuales de estos estudiantes (los nombres usados han sido cambiados para preservar el anonimato).

Julián (resuelve correctamente 4 problemas)

Fue uno de los estudiantes con menor tasa de éxito entre los 29 del grupo, aunque no el peor de ellos, ya que, como se desprende de la Tabla 2, un total de 7 estudiantes resolvieron 4 o menos problemas. Este estudiante, en todos los casos, intenta identificar la operación combinatoria que da la solución del problema, para aplicar directamente su fórmula. Por ello, a lo largo de la entrevista hace referencia al orden y la repetición, cuando se le pide que describa su estrategia, intentando encajar el contexto del problema en la definición aprendida.

Usa la enumeración sólo como modo de reafirmarse en la solución hallada y, en general, sus métodos de enumeración no son sistemáticos. Los cuatro problemas que resuelve correctamente los hace mediante la identificación de la operación combinatoria correcta y el uso de la fórmula. El fallo en los 9 problemas restantes ha sido debido a una de las siguientes causas:

a) Generalización incorrecta, depués de haber tratado de resolver el problema fijando una variable para reducirlo a otro más sencillo. Aunque este problema más sencillo lo resuelva mediante enumeración no sistemática o fórmula, la generalización que hace de las soluciones parciales, para hallar la solución completa del problema primitivo no es, en general, adecuada (2 problemas). Es precisamente la dificultad de generalización uno de los puntos señalados por Hadar y Hadass (1981) como causa de los errores en los problemas combinatorios.

Por ejemplo, en el problema 1 considera el caso de que la primera ficha extraída sea azul y completa los tres lugares restantes con las otras fichas combinadas de todas las formas posibles. Comprueba que hay 6 formas de hacerlo; intenta generalizar al caso de que la primera ficha extraida sea blanca o roja y aplicando la regla de la suma, obtiene 6+6+6=18 formas de seleccionar las fichas. El error está en que, si bien es cierto que en el caso de que la primera ficha extraída sea azul, le quedan tres fichas de colores diferentes para ocupar las tres posiciones restantes, cuando fija como primera ficha la roja o la blanca, dos de las fichas que quedan tienen el mismo color, por lo que sólo hay tres posibilidades de colocarlas en las tres posiciones.

b) Error de interpretación de los datos del problema: tipo de objetos, orden, repetición o configuración pedida (5 problemas). Por ejemplo, en el problema 2 obtiene las alineaciones de cartas en que esté al menos una de las figuras; en el problema 9 considera a los niños como indistinguibles.

c) Enumeración asistemática y errores de tipo aritmético (problema 8).

d) Fallo en la traducción del problema desde un modelo de colocación o partición a uno de selección, que es el modelo que utiliza en las definiciones que conoce de las operaciones combinatorias. Este fallo le lleva a identificar una operación combinatoria incorrecta (problema 4 para el que no tiene en cuenta la posibilidad de repetición).

A estos errores se unen otros como, uso incorrecto del diagrama en árbol, error en fórmula o aplicación indebida de la regla del producto.

Jaime (5 problemas)

Nunca utiliza fórmulas para resolver los problemas, ni hace referencia a la necesidad de tener en cuenta el orden o la repetición, es decir no intenta identificar directamente una operación combinatoria como solución al problema. Sus estrategias básicas son la enumeración o el uso de un diagrama en árbol. Esto le lleva, cuando el número de casos es abundante, a tres posibles situaciones:

a) Encuentra un reducido número de casos que se repiten y generaliza correctamente.

b) No llega a la solución, ante la dificultad de enumerar sistemáticamente un número alto de casos, como en el problema 7.

c) Produce un diagrama en árbol inadecuado, lo que lleva a una solución errónea. Esto le ocurre en los problemas 6 y 11.

Suele reducir el problema a otro más sencillo, fijando una variable, pero al no usar métodos sistemáticos de enumeración, olvida algunos casos.

Ha tenido también errores en la interpretación de datos del problema, como considerar indistinguibles elementos que no lo son en el problema 4, confusión en la configuración combinatoria pedida en el problema 4 y el 10 y error de orden en el problema 3.

Luisa (12 problemas)

Su estrategia, casi exclusiva, es identificar la operación combinatoria que da la solución del problema y aplicar la fómula correspondiente. Recuerda con claridad estas definiciones y analiza en cada problema si es necesario tener en cuenta el orden o la repetición para aplicar esta definición en el contexto dado. Ha resuelto por este método 12 de los 13 problemas, en la mayor parte de los casos, traduciendo los problemas al modelo de selección, para poder aplicar la definición de las operaciones combinatorias.

Usa la enumeración de algunas posibilidades en algunos casos, pero más como medio de comprobar su solución o bien para tratar de comprender los datos del enunciado e identificar la operación combinatoria. Sólo una vez intenta usar el diagrama en árbol, aunque sin éxito.

Los problemas compuestos los ha descompuesto en partes, resolviendo cada parte mediante una fórmula y aplicando con éxito la regla del producto. También descompone en partes un problema de partición (el 4) y otro de colocación (el 8), que no es capaz de traducir al modelo de selección, resolviéndolos parcialmente mediante fórmulas. Destacamos este hecho porque, a pesar del conocimiento que muestra del tema y la capacidad combinatoria y de resolución de problemas, esta alumna ha tenido dificultad en traducir directamente el enunciado de estos problemas a la definición de las operaciones combinatorias que le han sido enseñadas. Como indica Fsichbein (1989) muchas de las dificultades de los alumnos en ciencias y matemáticas se debe a la influencia de los modelos intuitivos, que tienen un papel importante en el razonamiento y la resolución de problemas. En uno de estos dos problemas (el 4), fracasa, a pesar de que el planteamiento es correcto, porque ha confundido el valor de los parámetros.

Adolfo (13 problemas)

Resuelve corectamente todos los problemas, aunque nunca usa las definiciones ni fórmulas de las operaciones combinatorias. Tampoco usa el diagrama en árbol ni ningún otro diagrama. Ha identificado correctamente todos los datos de los problemas. Sus soluciones se basan en la enumeración sistemática, total o parcial de las configuraciones pedidas, que combina con las siguientes estrategias, en el caso de que el número de configuraciones sea elevado:

a) Descomponer el problema en partes, hallar las soluciones parciales mediante enumeración, generalizando casos semejantes y aplicando la regla de la suma o el producto (7 problemas: 2, 4, 6, 7, 9, 11 y 13).

b) Traducir el problema a otro equivalente más simple o reducir su dimensión; resolver este nuevo problema y generalizar al primero (4 problemas): el 1, el 8 y el 12 los reduce de tamaño fijando un elemento; el 3 lo transforma en seleccionar un sobre para dejarlo vacío.

c) Enumeración directa cuando el tamaño es pequeño (2 problemas: 5 y 10)

Como resumen de los expuesto, presentamos las tablas 3 y 4. De la tabla 3 deducimos una primera diferencia entre los buenos y malos resolutores en los problemas propuestos que es la correcta interpretación de los datos del enunciado, también indicada por Hadar y Hadass (1981). Observamos que éste es un punto fundamental, ya que el único error de Luisa es de este tipo y es el que produce su única solución incorrecta. Adolfo no tiene errores de interpretación, mientras que éstos son frecuentes en los dos alumnos con una baja tasa de éxito.

Tabla 3: Errores de los alumnos en la resolución de los problemas

Errores	Julian (4 problemas)	Jaime (5 problemas)	Luisa (12 problemas)	Adolfo (13 problemas)
Tipo elementos	2	3		
Orden	2	1		
Repetición	1			
Configuración	4	2		
Parámetros			1	
D. árbol	1	2		
Fórmula	1			
Aritméticos	2			
P. combinatoria		1		

Del análisis de la tabla 4 deducimos que no hay una ventaja del uso de las fórmulas, respecto a la enumeración para asegurar la resolución de los problemas, ya que ambas estrategias se han encontrado en los buenos y malos resolutores. Sí es fundamental, sin embargo, asegurar que la enumeración sea sistemática, ya que la principal causa de fallo, en el caso de usar la enumeración, ha sido este problema.

Por otro lado, en caso de tratar de usar la fórmula de la operación combinatoria, el principal fallo ha sido no saber traducir uno de los modelos de colocación o partición al modelo de selección, que es el usado en la definición de las operaciones combinatorias. Consecuentemente, deducimos la importancia de tener en cuenta este punto en la enseñanza y enfatizar en los alumnos la actividad de análisis de los problemas y traducción entre unos modelos y otros.

Tabla 4: Estrategias usadas por los alumnos en la resolución de los problemas

Estrategias	Julián (4 problemas)	Jaime (5 problemas)	Luisa (12 problemas)	Adolfo (13 problemas)
Identificar O.C.	4 correctas. 2 con e. aritm. 2 incorrectas		12 correctas.	
Enumeración	4 correctas 2 incorrectas	8 correctas 1 incorrecta	7 correctas	14 correctas
D. árbol	1 incorrecto	3 correctos 3 incorrectos	1 incorrecto	
Fijar variable	2 correctas	4 correctas		8 correctas
Descomponer en partes	2 correctas	2 correctas	3 correctas	7 correctas
Generalizar	2 incorrectas	4 correctas		7 correctas
Traducir a p. equivalente				4 correctas
R. producto	1 correcta 2 incorrectas	2 correctas	2 correctas	3 correctas
R. Suma		1 correctas	1 correctas	8 correctas

CONCLUSIONES

Un punto que merece destacarse en nuestro análisis es la dificultad y el escaso uso que hacen los estudiantes del diagrama en árbol. A pesar de la importancia que le concede Fischbein (1975) como recurso productivo en la resolución de problemas probabilísticos y combinatorios, los alumnos han evitado su uso y, cuando lo emplean es con un escaso éxito. Creemos que el uso de este recurso debe ser reforzado en la enseñanza, pues Fischbein (1987) lo presenta como modelo figurativo que permite sugerir la generalización iterativa (extensión de un cierto procedimiento a cualquier número de elementos y la generalización constructiva (adaptación a nuevos problemas derivados que es carácterística del razonamiento recursivo). Es justamente en estos dos puntos donde se han observado muchos de los fallos de los estudiantes en la resolución de lor problemas propuestos.

Las estrategias generales en la resolución de problemas: fijar variables, reducir el tamaño del problema, traducir a otro problema semejante más sencillo, descomponer el problema en partes, generalizar las soluciones, se han mostrado también como elementos que separan a los buenos y malos resolutores. Estas estrategias, bien aplicadas se han mostrado fundamentales a la hora de resolver los problemas de un modo adecuado, especialmente combinadas con la enumeración sistemática.

Por otro lado, la Combiantoria es un campo donde pueden ejemplificarse con facilidad y ejercitarse estas estrategias. En consecuencia, creemos que los problemas combinatorios pueden jugar un papel fundamental en el aprendizaje de técnicas generales de resolución de problemas.

El modelo combinatorio implícito, ha mostrado sus fuertes efectos en la dificultad del problema y en los tipos de error, ya que los estudiantes no siempre han sido capaces de traducir el problema de un modelo de partición o colocación al modelo de selección y ello ha dificultado la identificación directa de la operación combinatoria. Estas variables deben tenerse en cuenta para evaluar el razonamiento combinatorio de los alumnos. También deben ser tenidas en cuenta para organizar la enseñanza, la cual debería, además, hacer hincapié en el razonamiento recursivo y en los procedimientos sistemáticos de enumeración, en lugar de meramente centrarse en aspectos algorítmicos y en las definiciones de las operaciones combinatorias. El lector puede encontrar en Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) una propuesta de desarrollo del currículo de Combinatoria para el rango de edades de 10 a 18 años.

Agradecimientos. Este trabajo se ha realizado dentro del Proyecto de Investigación PS93-0196 subvencionado por la DGICYT (M.E.C, Madrid).

APÉNDICE : CUESTIONARIO PARA LA EVALUACIÓN DEL RAZONAMIENTO COMBINATORIO

1. En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin devolver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha, y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

2. Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuantas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas, con la condición de que siempre estén alineadas las tres figuras? Ejemplo: sota, caballo, rey, 1.

3. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

4. Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes

puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

5. Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

6. Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

7. ¿Cuános números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ohos). Ejemplo 88124.

8. El garaje de Angel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora sólo hay tres coches; el de Angel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

Por ejemplo, Angel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Angel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?

9. Cuatro niños Alicia, Berta, Carlos y Diana, van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

10. María y Carmen tienen cuatro cromos numerados de 1 a 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos cromos para cada una). □De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2, y Carmen con los cromos 3 y 4.

11. En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola del bombo y anotamos su número. La bola extraida se introduce en el bombo. Se elige una segunda bola y se anota su número. La bola extraida se vuelve a introducir en el bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. □Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: se puede obtener el número 222.

12. Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A, B, C, C y C. □De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de la otra formando una hilera? Ejemplo: pueden estar colocadas de la siguiente forma ACBCC.

13. Se quiere elegir un comité formado por tres miembros, presidente, tesorero y secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos?

Ejemplo: que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

REFERENCIAS

BATANERO, C., GODINO, J. D. y NAVARRO-PELAYO, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

BATANERO, C., GODINO, J. y NAVARRO-PELAYO, V. (1995). The use of implicative and correspondence analysis for assesing pupil’s combinatorial reasoning. En: R. Gras y M. Artigue (Eds), *Colloque "Méthodes d'analyses statistiques multidimmensionnelles en Didactique des Mathematiques."* (pp. 245-256). Caen: A.R.D.M.

BATANERO, C., GODINO, J. y NAVARRO-PELAYO, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press

BATANERO, C., NAVARRO-PELAYO, C. y GODINO, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics* 32 (2), 181-199.

BATANERO, C., NAVARRO-PELAYO, V. y GODINO, J.D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática* , 8(1), 26-39, 1996

DUBOIS, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 37-57.

FISCHBEIN, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and Mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Reidel.

FISCHBEIN, E. y GROSSMAN, A. (En prensa). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*.

GASCÓN, J. (1988). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

HADAR, N. AND HADASS, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn wih pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 435-443.

INHELDER, B. y PIAGET, J. (1955*). De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent. París:* Presses Universitaires de France.

LECOUTRE, M. P. y DURAND, J. L. (1988). Jugements probabilistes et modéles cognitifs: étude d'une situation aléatories. *Educational Studies in Mathematics,* 19 (3), 357-368.

MARCHAND, H. M. (1994). The resolution of two combinatorial tasks by mathematics teachers. *Proceeding of the 18 PME Conference*, Lisbon (Short oral presentation).

NAVARRO-PELAYO, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

NAVARRO-PELAYO, V. y BATANERO, C. (1991). La combinatoria en los textos de Bachillerato. *Investigación en la Escuela*, 14, 123-127.

NAVARRO-PELAYO, V., BATANERO, C. y GODINO, J. D. (1991). Combinatorics and its teaching. Analysis of teachers' reponses to a survey. *Proceedings of the XV Conference on the Pychology of Mathematics Education.* (v.1, p. XI). Asisi. Italia.

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1951). *La génèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.