**UNIVERSIDAD DE GRANADA**

**Departamento de Didáctica de la Matemática**

# EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS SOBRE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS Y CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS DE FUTUROS PROFESORES

**José Pedro Arteaga Cezón**

**Directora: Carmen Batanero**

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS SOBRE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS Y CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS DE FUTUROS PROFESORES

TESIS DOCTORAL

MEMORIA realizada bajo la dirección de la
Dras. Carmen Batanero Bernabeu,
que presenta D. José Pedro Arteaga Cezón
para optar al grado de Doctor

Fdo:José Pedro Arteaga Cezón

Vo. Bo.

Dra. Carmen Batanero Bernabeu

Trabajo realizado en el marco de la beca FPU AP2007-03222, Proyectos SEJ2007-60110 /EDUC, MEC-FEDER y EDU2010.14947 (MCIN) y Grupo PAI FQM126 (Junta de Andalucía).

*A mi abuela Concha*

# AGRADECIMIENTOS

*En primer lugar quiero agradecer a mi tutora Carmen Batanero Bernabeu haberme dado la oportunidad de trabajar a su lado. Ha sido una experiencia muy gratificante el trabajar juntos durante estos años, periodo en el que he tenido que afrontar muchos retos profesionales que he podido ir superando gracias al respaldo y apoyo que he recibido de su parte en todo momento. También agradecer su preocupación constante por mi formación como investigador y profesor, brindándome desde el primer momento numerosas oportunidades formativas de las que sin duda he aprendido bastante, tanto a nivel profesional como personal.*

*A los integrantes del grupo de investigación sobre Educación Estadística de la Universidad de Granada por su interés en cómo iba la realización de mi trabajo, en especial, a Juan Díaz Godino, por estar siempre disponible para echarme una mano. Agradecerle muy sinceramente el haberme hecho un hueco en su despacho en el que poder trabajar.*

*A Jim Ridgway y Sean McCusker, por acogerme en el SMART CENTRE de la Universidad de Durham para realizar una estancia de investigación, por su recibimiento y porque me hicieron sentir como en casa en todo momento, por los consejos que me dieron sobre mi investigación y recomendarme lecturas que me han sido de gran utilidad.*

*A Mª Carmen Chamorro Plaza, por permitirme realizar una estancia en el ICE de la Universidad Complutense de Madrid, poniendo a mi disposición medios materiales necesarios para continuar con mi trabajo y dándome la oportunidad de realizar cursos de formación de profesorado universitario.*

*Quiero agradecer a los profesores del departamento de didáctica de las matemáticas que me han brindado la oportunidad de trabajar con ellos como profesor de prácticas. Desde muy pequeño siempre he querido ser profesor, motivado en gran medida por la admiración que siempre he sentido por el trabajo realizado por mi madre como profesora de educación primaria, por todo ello para mí ha sido muy importante dar el paso de poder dar clases como parte de mi formación.*

*A los profesores del departamento de didáctica de las matemáticas que me han ayudado y han sido pacientes conmigo cuando he tenido dudas en la preparación de las clases, en especial quiero agradecer a Marta Molina el haber estado siempre dispuesta a echarme una mano, además su cercanía y sus consejos siempre me han dado mucho ánimo.*

*A mis compañeros becarios de investigación, por los trabajos realizados conjuntamente y los momentos de descanso en los que hemos compartido café y risas. A Gabriela por la ayuda brindada en el periodo de máster y por los abrazos tan energéticos que me regala cuando me ve. A mi compañera Rubí, a la cual mando un abrazo muy especial.*

A compañeros doctorandos de otras Universidades con los que he coincidido en congresos y con los cuales he compartido momentos muy interesantes. A mis amigos de Durham, por su cariño y su ayuda con el inglés.

En este periodo de realización de mi tesis doctoral siempre han estado muy presentes mis amigos, aún recuerdo cuando decidí dejar el trabajo que tenía en Madrid por venirme a Granada, desde ese momento recibí gran apoyo por parte de ellos, los cuales creyeron en mí y apostaron porque todo fuese bien, dándome cariño y energía positiva. Gracias por las conversaciones, por los reencuentros que hemos vivido durante estos años, los consejos, las visitas, los abrazos, la comprensión, las sonrisas y las risas. Me siento una persona muy afortunada de tener unos amigos tan maravillosos, os quiero mucho y os agradezco que hayáis seguido siempre a mi lado.

Quiero también agradecer a todas aquellas personas que han aparecido en mi vida a lo largo de estos años en Granada y que han estado a mi lado, dándome alegría y fuerzas que me han ayudado a continuar con mi trabajo: personas que me han dado consejos con un cariño increíble que me han ayudado a tomar la decisión que hoy sé es correcta; personas con las que he aprendido que independientemente del día que tengas, la vida se ve mejor bailando; que me han mostrado que la amistad y la magia entre dos personas supera las fronteras del idioma; que me han transportado a mundos donde los despachos son de color naranja y tienen vistas a la sierra; y personas con las que he aprendido que la vida es caprichosa y a través de reencuentros mágicos, hace que dos personas se tropiecen en Granada.

Agradecer a Coral todos los momentos vividos juntos, en los que sus abrazos, su sonrisa y su cariño me han dado siempre la seguridad necesaria para seguir adelante con todos mis proyectos. Me siento feliz y afortunado de tener a mi lado una persona con un corazón tan grande.

A mi familia; a mis padres por apoyarme cuando decidí venir a Granada, a mi hermano por sus sabios consejos y por su gran calidad humana. Agradecer a mi tía Elena el apoyo que he recibido de su parte desde muy pequeño, por su gran inteligencia y su nobleza. A mi abuelo Manolo por su cariño y su preocupación porque me vaya todo bien y por último agradecer a mi abuela Concha su manera de quererme y hacerme sentir tan especial y por preocuparse e interesarse por todos los pasos que ido dando en mi vida.

Muchas gracias.

INTRODUCCIÓN 1

1. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción 5

1.2. El objeto de investigación 7

1.2.1. Gráficos estadísticos elementales 7

1.2.1.1. Gráficos estadísticos univariantes 8

1.2.1.2. Gráficos estadísticos bivariantes y multivariantes 13

1.2.2. Los gráficos como configuración de objetos matemáticos 16

1.2.2.1. Objetos estadísticos 17

1.2.2.2. Geometría 18

1.2.2.3. Sentido numérico 21

1.2.3. Gráficos y cultura estadística 23

1.3. Contexto educativo 29

1.4. Trabajo con proyectos en la clase de estadística 32

1.4.1. Introducción 32

1.4.2. Esquema del trabajo en un proyecto 33

1.4.3. Desarrollo de competencias básicas a través de proyectos 35

1.4.4. Justificación del uso de un proyecto en nuestro trabajo 37

1.5. Objetivos de la investigación 38

1.6. Hipótesis de la investigación 40

2. FUNDAMENTOS

2.1. Introducción 43

2.2. Algunas notas históricas 44

2.3. Marco teórico 48

2.3.1. Introducción 48

2.3.2. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas 48

2.3.3. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas 50

2.3.4. Relaciones entre objetos: función semiótica 54
2.3.5. Evaluación de la comprensión 55
2.3.6. Idoneidad didáctica y sus tipos 56
2.4. Marco curricular 58
2.4.1. Introducción 58
2.4.2. El Decreto de Enseñanzas Mínimas 59
2.4.3. La Junta de Andalucía 62
2.4.4. NCTM y Proyecto GAISE 63
2.4.5. Los gráficos estadísticos en los libros de texto de primaria 66
2.4.6. Los gráficos estadísticos en la formación de maestros 76
2.5. Conclusiones sobre los fundamentos del trabajo 78

3. ANTECEDENTES
3.1. Introducción 79
3.2. Formación de profesores para enseñar estadística 80
3.2.1. Introducción 80
3.2.2. Modelos del conocimiento del profesor de estadística 81
3.2.3. Actitudes y creencias 92
3.2.4. Conocimientos estadísticos 98
3.2.5. Conocimiento didáctico 103
3.2.6. Conclusiones sobre conocimientos de los profesores para enseñar estadística 106
3.3. Investigaciones sobre comprensión de gráficos estadísticos 108
3.3.1. Introducción 108
3.3.2. Elementos estructurales de los gráficos estadísticos 108
3.3.3. El gráfico como objeto semiótico 111
3.3.4. Definiciones de la comprensión gráfica 114
3.3.5. Niveles de comprensión de gráficos estadísticos 116
3.3.6. Comprensión crítica de los gráficos 119
3.3.7. Errores en la lectura y construcción de gráficos 121
3.3.8. Gráficos en el análisis exploratorio de datos 123
3.3.9. Comprensión gráfica de los futuros profesores 126

3.3.9.1. Construcción de gráficos 126
3.3.9.2. Lectura y traducción de gráficos 128
3.3.9.3. Conocimiento didáctico del contenido gráficos estadísticos 131
3.4. Conclusiones sobre las investigaciones sobre gráficos estadísticos. 134

4. EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS DE LOS PROFESORES SOBRE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS
4.1. Introducción 137
4.2. Descripción de la muestra 138
4.3. Análisis a priori del proyecto 139
4.3.1. La actividad 139
4.3.2. El proyecto 141
4.3.3. Solución esperada de los estudiantes 149
4.3.3.1. Análisis del número de caras 149
4.3.3.2. Análisis del número de rachas 153
4.3.3.3. Análisis de la longitud de la racha más larga 155
4.4. Complejidad semiótica de los gráficos construidos 156
4.5. Errores y dificultades en la construcción de gráficos 169
4.5.1. Clasificación de errores en la construcción de gráficos 169
4.5.2. Uso de ordenadores e influencia en los errores 193
4.5.3. Errores y complejidad semiótica 196
4.6. Lectura de los gráficos 201
4.6.1. Niveles de lectura de los gráficos 202
4.6.2. Niveles de lectura y complejidad semiótica 212
4.7. Conclusiones de los estudiantes 218
4.7.1. Clasificación de las conclusiones 219
4.7.2. Relación entre gráficas construidas y conclusiones 229
4.8. Conclusiones sobre los conocimientos matemáticos sobre los gráficos estadísticos. 237

5. EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE LOS PROFESORES A PARTIR DE LA EVALUACION DEL PROYECTO DESARROLLADO
5.1. Introducción 244
5.2. Descripción de la muestra 245
5.3. Análisis a priori de la actividad 245
5.3.1. La actividad 245
5.4. Metodología de análisis 250
5.5. Análisis de la idoneidad epistémica 252
5.5.1. Situaciones problema 254
5.5.2. Lenguaje 256
5.5.3. Definiciones, propiedades y procedimientos 258
5.5.4. Argumentos 260
5.5.5. Relaciones 262
5.6. Análisis de la idoneidad cognitiva 265
5.6.1. Conocimientos previos 267
5.6.2. Adaptaciones curriculares 269
5.6.3. Aprendizaje 271
5.7. Análisis de la idoneidad afectiva 275
5.7.1. Intereses y necesidades 275
5.7.2. Actitudes 277
5.7.3. Emociones 279
5.8. Análisis de la idoneidad mediacional 283
5.8.1. Recursos materiales 283
5.8.2. Número de alumnos, horario y condiciones del aula 286
5.8.3. Tiempo 289
5.9. Análisis de la idoneidad interaccional 292
5.9.1. Interacción docente-discente 293
5.9.2. Interacción entre alumnos 296
5.9.3. Autonomía y evaluación formativa 298
5.10. Análisis de la idoneidad ecológica 302
5.10.1. Adaptación al currículo y apertura a la innovación didáctica 303

5.10.2. Adaptación socio profesional. Conexiones intra e interdisciplinares 306
5.11. Síntesis de conocimientos didácticos 310
5.12. Conclusiones sobre el conocimiento didáctico 323

6. CONCLUSIONES
6.1. Introducción 329
6.2. Conclusiones respecto a los objetivos 330
6.3. Conclusiones sobre las hipótesis 338
6.4. Limitaciones del estudio 341
6.5. Líneas de investigación futuras 342

7. ENGLISH SUMMARY
7.1. The problem 343
7.1.1. Aims and hypotheses. Relevance for statistics and mathematics education 344
7.1.2. Project work in statistics classrooms 346
7.2. Background 346
7.2.1. Educational setting 346
7.2.2. Statistical graphs in the primary school curriculum and in the training of teachers 347
7.3. Theoretical background 349
7.4. Previous research 352
7.4.1. Training teachers to teach statistics 352
7.4.2. Understanding statistical graphs 354
7.5. Mathematical knowledge of preservice teachers 356
7.5.1. Method 357
7.5.2. A priori analysis of the task 358
7.5.3. Semiotic complexity of graphs 360
7.5.4. Errors in the graphs produced 363
7.5.5. Reading and conclusions 363
7.6. Didactic knowledge of teachers 368
7.6.1. Method 368

7.6.2. Results 372
7.7. Synthesis of findings 377

8. REFERENCIAS 381

ANEXOS
1. Protocolo de trabajo dado a los estudiantes 405
2. Pauta de análisis de la idoneidad didáctica 415

# INTRODUCCIÓN

Asistimos en la actualidad a un incremento de los contenidos de estadística que se recomiendan en la escuela primaria, hecho que se hace patente en los Decretos de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006 a; Consejería de Educación, 2007a).

Para que estas propuestas puedan llevarse a cabo, será necesario preparar a los futuros profesores, tanto en lo que respecta al conocimiento estadístico, como en el conocimiento didáctico relacionado con su enseñanza. Esta es una preocupación asumida por organismos internacionales como la IASE (International Association for Statistical Education) e ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) que organizaron un estudio internacional enfocado sobre la problemática de formación del profesorado en estadística, puesto que el problema no es exclusivo de España (http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/; Batanero, Burrill y Reading, en prensa).

Por otro lado, encontramos información estadística frecuentemente en la prensa y medios de comunicación, especialmente en forma de gráficos o tablas que deben ser interpretadas correctamente para desenvolverse en la sociedad de la información. Por ello, el conocimiento estadístico elemental se considera parte de la cultura estadística (Gal, 2002) necesaria para todo ciudadano.

Estos son algunos de los motivos que nos han llevado a interesarnos por los conocimientos de los futuros profesores de Educación Primaria requeridos para la enseñanza de la estadística y en particular de los gráficos estadísticos. Siguiendo las investigaciones recientes sobre conocimiento profesional y formación del profesor, nuestro trabajo trata de evaluar el componente matemático y didáctico de dicho conocimiento, a partir del desarrollo y posterior evaluación de un proyecto abierto de análisis de datos.

Comenzamos contextualizando el problema, analizando los gráficos estadísticos elementales incluidos en la Educación Primaria, así como los objetos matemáticos numéricos, geométricos y estadísticos que subyacen en el trabajo con los gráficos. Tras una reflexión sobre la importancia de los gráficos en la cultura estadística, se describe el contexto educativo, los objetivos e hipótesis del trabajo. Se finaliza el primer capítulo con unas reflexiones sobre el trabajo con proyectos y la justificación del uso de proyectos en esta investigación.

El segundo capítulo comienza con unas breves notas históricas y, a continuación, se describe algunos elementos del enfoque Onto- semiótico de la didáctica de la matemática, que será el marco teórico que apoya nuestro trabajo. Se analiza seguidamente el currículo de estadística en la Educación Primaria, prestando especial detalle a los gráficos estadísticos. Se finaliza con un breve análisis de la presentación de los gráficos estadísticos en una serie de libros de texto de educación primaria y en la formación recibida por los futuros profesores participantes en la investigación.

En el tercer capítulo se presenta un estado de la cuestión dividido en dos apartados: En el primero, se hace una síntesis de las escasas investigaciones relacionadas con la formación de profesores para enseñar estadística, enfatizando algunos modelos sobre el conocimiento del profesor que servirán de base para nuestro trabajo empírico. La segunda parte describe las investigaciones relacionadas con la comprensión de los gráficos estadísticos, que se clasifican en varios apartados, haciendo énfasis en los niveles de lectura y comprensión de gráfico, errores descritos sobre su construcción, e investigaciones relacionadas con la competencia gráfica o didáctica de los profesores.

En el capítulo 4 se presenta un estudio empírico de los informes elaborados por una muestra de 207 futuros profesores en su trabajo con un proyecto abierto de análisis de datos, con el fin de evaluar su conocimiento común y especializado del contenido gráficos estadísticos. Después de hacer un análisis a priori del proyecto propuesto, se analizan las gráficas producidas por los futuros profesores desde diversos puntos de vista.

En primer lugar se define un nivel de complejidad semiótica del gráfico, que es una aportación original de nuestro trabajo, estudiando los porcentajes de gráficos construidos en los diversos niveles de complejidad, para cada uno de los tres pares de variables que se han de comparar en el proyecto. Se realiza un estudio exhaustivo de los errores cometidos en la construcción de los gráficos, relacionándolos con las variables estudiadas, los niveles de complejidad semiótica del gráfico y el uso de ordenadores en la construcción. Se analizan también los niveles de lectura que alcanzan los participantes en los gráficos concluidos y las conclusiones que obtienen en el proyecto, relacionándolos con los niveles de complejidad del gráfico, y comparando las conclusiones obtenidas por los estudiantes que han construido gráficos con los que no los han construido.

En el capítulo 5 se analizan los informes producidos por una submuestra de 108 futuros profesores en una tarea abierta de análisis didáctico en que deben valorar la idoneidad didáctica del proceso de estudio experimentado por ellos mismos en el desarrollo del proyecto. Para llevar a cabo esta tarea, se proporcionó a los futuros profesores una "Guía de análisis de la idoneidad didáctica", en la que se describen componentes de dicha idoneidad y sus descriptores. Se define un nivel de aplicación de dichos descriptores, estudiando el nivel medio alcanzado en cada componente de la idoneidad didáctica del proceso de estudio y comparándolos entre sí. Con este estudio, valoramos el conocimiento especializado del contenido de los futuros profesores, así como su conocimiento del contenido y la enseñanza, el contenido y los estudiantes en relación con la enseñanza de la estadística en la educación primaria.

Finalmente se exponen las conclusiones de nuestro trabajo, respecto a los objetivos e hipótesis, las aportaciones principales y limitaciones y se sugieren algunas líneas de investigación para continuar este trabajo.

Se finaliza la tesis con un resumen en inglés, las referencias y anexos.

# CAPITULO 1:
# CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1.Introducción
1.2. El objeto de investigación
1.2.1. Gráficos estadísticos elementales
1.2.1.1. Gráficos estadísticos univariantes
1.2.1.2. Gráficos estadísticos bivariantes y multivariantes
1.2.2. Los gráficos como configuración de objetos matemáticos
1.2.2.1. Objetos estadísticos
1.2.2.2. Geometría
1.2.2.3. Sentido numérico
1.2.3. Gráficos y cultura estadística
1.3.Contexto educativo
1.4.Trabajo con proyectos en la clase de estadística
1.4.1. Introducción
1.4.2. Esquema del trabajo en un proyecto
1.4.3. Desarrollo de competencias básicas a través de proyectos
1.4.4. Justificación del uso de un proyecto en nuestro trabajo
1.5.Objetivos de la investigación
1.6.Hipótesis de la investigación

## 1.1. INTRODUCCIÓN

Uno de los retos de la enseñanza es ser conectada con la realidad y la sociedad del momento. Sin embargo, en la enseñanza de la estadística hay un distanciamiento claro entre la escuela y la vida cotidiana. En este sentido, los gráficos son un tema privilegiado, pues se utilizan con frecuencia en la prensa y medios de comunicación, con lo que podrían usarse como medio para establecer dicha conexión (Espinel, 2007).

Los gráficos pueden utilizarse para comunicar información y como instrumento de análisis de datos, así como para retener en la memoria una gran cantidad de información en forma eficiente (Cazorla, 2002). Además, el gran desarrollo actual de las nuevas tecnologías, posibilita la realización de gráficos estadísticos de modo rápido y eficaz.

El lenguaje gráfico tiene un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, al ser un instrumento de *transnumeración*. Esta es una de las formas básicas de razonamiento estadístico definidas por Wild y Pfannkuch (1999), que consiste en obtener una nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro. Por ejemplo, al pasar de un listado de datos a un histograma, el alumno puede percibir el valor de la moda de un conjunto de datos que antes no era visible en los datos brutos.

La Ciencia, utiliza para construir y comunicar los conceptos, representaciones semióticas externas (que usan sistemas de signos), como gráficas, diagramas, ecuaciones, ilustraciones o enunciados. Así, el aprendizaje de los conceptos científicos está ligado al de estas representaciones y al de sus procesos de formación y transformación. Las gráficas se usan en las ciencias como representaciones puente entre los datos experimentales y las formalizaciones científicas. Es decir, ayudan a determinar las relaciones entre las variables que intervienen en los fenómenos y así poder modelizarlos. En la enseñanza de las ciencias estas gráficas sirven para visualizar conceptos y relaciones abstractas difíciles de comprender (Postigo y Pozo, 2000).

La construcción e interpretación de gráficos estadísticos es también parte importante de la cultura estadística a la que cada vez se dedica más atención y que Gal (2002, pg. 2) define como la unión de dos competencias relacionadas:

> a) Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante. (Gal, 2002, pp. 2-3).

Sería entonces importante repensar la enseñanza que de los gráficos se realiza en la escuela, oportunidad que ahora se nos ofrece, al adelantarse este tema al primer ciclo de la Educación Primaria y ampliarse los contenidos durante este nivel educativo. Sin embargo, la mejora de la enseñanza de los gráficos estadísticos en la escuela, pasa por la mejor formación de los profesores que han de llevar a cabo esta enseñanza. Ello nos ha llevado a centrar una parte de nuestra investigación en el estudio de los conocimientos de los futuros profesores de Educación Primaria en relación a los gráficos estadísticos.

El objetivo de este capítulo es presentar y contextualizar el objeto de estudio en esta investigación. Con esta finalidad, comenzamos describiendo los gráficos estadísticos elementales que se incluyen en el currículo de educación primaria y analizando los conocimientos matemáticos requeridos en su construcción. Seguidamente, se describe el contexto curricular del trabajo y se analiza la importancia de los gráficos como componentes de la cultura estadística.

Se hace una breve introducción al trabajo con proyectos estadísticos y su importancia en la enseñanza de la estadística, puesto que los datos de esta investigación se toman dentro de un proyecto de análisis de datos que es, primeramente realizado y posteriormente analizado por los participantes. Finalizamos presentando los objetivos e hipótesis de la investigación.

## 1.2. EL OBJETO DE INVESTIGACIÓN

Hay una gran variedad de gráficos estadísticos, que sirven para representar diferentes tipos de datos, atendiendo al tipo de variables (nominales, ordinales, cuantitativas discretas o continuas) y el número de variables representadas (univariantes, bivariantes, multivariantes). En nuestro estudio analizaremos únicamente los de mayor uso en la escuela primaria y medios de comunicación, que son los que cabe esperar conozca un futuro profesor. En primer lugar describimos brevemente estos gráficos y en segundo analizamos los objetos matemáticos requeridos en su construcción e interpretación.

### 1.2.1. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS ELEMENTALES

En nuestro estudio serán de interés algunos gráficos estadísticos univariantes y bivariantes, que se incluyen en la Educación Primaria y que conocen los participantes en el estudio, bien por la enseñanza recibida en Educación Secundaria y Bachillerato, o como parte del estudio de estadística realizado en la asignatura Matemáticas y su Didáctica en la Facultad de Educación. También los alumnos podrían utilizar otros gráficos que conocen por su presencia en la prensa o por aparecer en materiales didácticos de otras asignaturas de su currículo. A continuación describimos brevemente estos gráficos, la mayoría de los cuáles previsiblemente, puedan construir los estudiantes como parte de la realización del proyecto que se describe en el Capítulo 4. No tendremos en cuenta los gráficos que sirven para representar distribuciones de frecuencias acumuladas, pues, aunque los futuros profesores habrán estudiado en la asignatura de Matemáticas y su Didáctica y en la educación secundaria los diagramas y polígonos de frecuencias acumuladas, estos gráficos no se incluyen explícitamente en el currículo de Educación Primaria y tampoco es probable que se utilicen en el desarrollo del proyecto.

#### 1.2.1.1. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS UNIVARIANTES

Entre los gráficos univariantes estudiados por los participantes, y que encuentran con frecuencia en la prensa y medios de comunicación destacan los diagramas de barras y sectores, histogramas y gráficos de líneas o polígonos de frecuencia, así como los pictogramas y los gráficos de puntos.

**Diagrama de barras**

Es una representación gráfica que puede ser usada para representar la distribución de frecuencia de variables cualitativas, cuantitativas discretas o incluso variables continuas, si han sido discretizadas y diferentes intervalos de valores se han transformado en categorías (Ver figura 1.2.1).

En todos estos casos, si denominamos $X$ a la variable y a la modalidad número $i$ de dicha variable con la notación $x_i$, $f_i$ representará el número de individuos o casos que presentan esa modalidad, que se denomina *frecuencia absoluta.* Para valorar la representatividad de cada categoría respecto al total de datos se calcula la *frecuencia relativa* $h_i$, dividiendo la frecuencia absoluta $f_i$ por el número total de observaciones ($N$), es decir:

$$h_i = f_i/N$$

En lugar de utilizar frecuencias relativas, usualmente se utilizan porcentajes, que se calculan multiplicando la frecuencia relativa por 100. El diagrama de barras puede construirse para frecuencias absolutas, relativas o porcentajes. En cualquiera de estos casos, para cada una de las modalidades del carácter (si la variable es cualitativa) o valores de la variable (si es cuantitativa discreta) la frecuencia de aparición se representa mediante una barra (Nortes, 1993). En este gráfico se suelen disponer los datos en el primer cuadrante de unos ejes de coordenadas cartesianas, levantando sobre el eje de abscisas un bloque o barra para cada modalidad de la variable observada. Mientras que en caso de variable cualitativa, el orden en que aparecen las categorías en el eje es irrelevante (aunque a veces se ordenan en función de la mayor o menor frecuencia), para variables cuantitativas discretas el orden de presentación de valores en el eje *X* ha de ser el orden numérico natural.

La altura de la barra ha de ser proporcional a la frecuencia absoluta o relativa, que se representará en el eje de ordenadas y el ancho es irrelevante. Es posible también intercambiar el papel de los ejes, aunque es menos usual, pero los programas de cálculo, como la hoja Excel proporcionan diagramas de barras tanto horizontales como verticales.

También se usan diagramas de barras para presentar varios estadísticos relacionados (por ejemplo, media, mediana y moda) de la misma variable cuantitativa. En este caso, se utiliza también aunque la variable cuantitativa sea continua.

Figura 1.2.1. Población en España en miles de personas en 2008 por tramos de edad (Fuente, INE base)

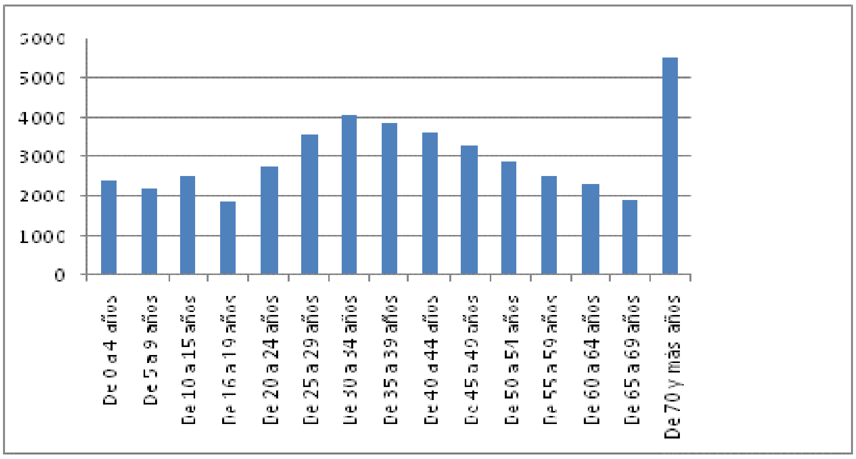
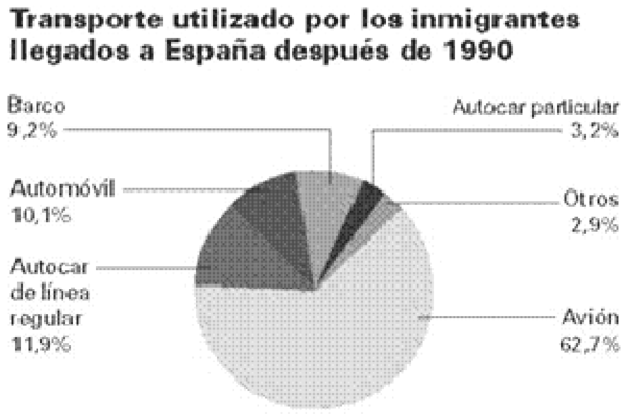



**Gráfico de sectores**

Si lo que nos interesa es información sobre el "peso" que la frecuencia $f_i$ de cada una de las modalidades $x_i$ observadas de la variable *X*, tiene en relación con el total y al mismo tiempo con las demás, podemos representar los datos en un diagrama de sectores (Nortes, 1993). Este es un diagrama cuya principal validez es para representar variables cualitativas, aunque algunos participantes en el estudio pudieran utilizarlo a pesar de que las variables del proyecto son cuantitativas discretas, sobre todo si trabajan con la hoja Excel que facilita su elaboración.

En este diagrama se representa cada modalidad de la variable *X* por un sector circular, cuyo ángulo central y, por lo tanto también el área de dicho sector, es proporcional a la frecuencia *fi* de la modalidad (Ver Figura 1.2.2). Una forma sencilla de construirlo es multiplicando la frecuencia relativa por 360; así obtendremos la amplitud del ángulo central que tendrán cada una de las modalidades observadas. En este tipo de gráfico no se representan posibles modalidades de la variable en estudio que tengan frecuencia nula. Se usa cuando se trabaja con datos que tienen grandes frecuencias, y los valores de la variable son pocos. La ventaja que tiene es su fácil interpretación. La desventaja que posee es que cuando los valores de la variable son muchos no visualiza bien la información y no es productivo.

Figura 1.2.2. Transporte utilizado por los inmigrantes llegados a Españas después de 1990 (Encuesta Nacional de Emigrantes, INE, 2007)



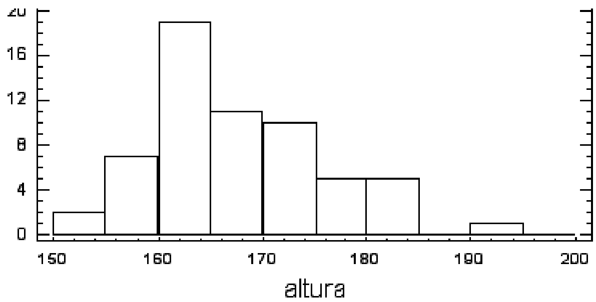

**Histogramas**

En el caso de variables cuantitativas continuas o discretas con un número elevado de valores, se suelen agrupar estos valores en intervalos, para simplificar la gráfica. Las representaciones que se utilizan frecuentemente para estas variables son los *histogramas* y los *polígonos de frecuencias.* Un histograma se obtiene construyendo sobre unos ejes cartesianos unos rectángulos cuyas áreas son proporcionales a las frecuencias con que aparecen los valores de cada intervalo. Las bases de los rectángulos, colocadas sobre el eje de abscisas, serán los intervalos de clase y las alturas serán las necesarias para obtener un área proporcional a la frecuencia de cada clase. La ventaja respecto al diagrama de barras en que presenta la información en forma más sintética y permite detectar rápidamente las tendencias (moda). La desventaja es que se pierde información, pues no se tiene representados todos los datos originales. (Ver figura 1.2.3).

La primera decisión que hay que tomar para agrupar una variable es el número de intervalos en que se debe dividir su rango de variación. No existe una regla fija, y en última instancia será un compromiso entre la pérdida de la información que supone el agrupamiento y la visión global y sintética que se persigue (Batanero y Diaz, 2008). Al construir el histograma se tiene en cuenta el *recorrido* de la variable o diferencia entre sus valores máximo y mínimo.

Este recorrido se divide en c*lases* o intervalos que pueden ser o no de la misma amplitud. Cada intervalo queda definido por un *extremo superior e inferior de la clase. La marca de clase* es el punto medio de cada clase. Una regla que se suele seguir en tomar un número de intervalos alrededor de la raíz cuadrada del número de datos (por ejemplo 10 si la muestra tiene tamaño 100). A veces conviene ensayar con varios anchos de intervalo, pues la forma del histograma suele variar con el número y los extremos de los intervalos.

Figura 1.2.3. Distribución de alturas de estudiantes (Batanero y Díaz, 2008, p. 45).



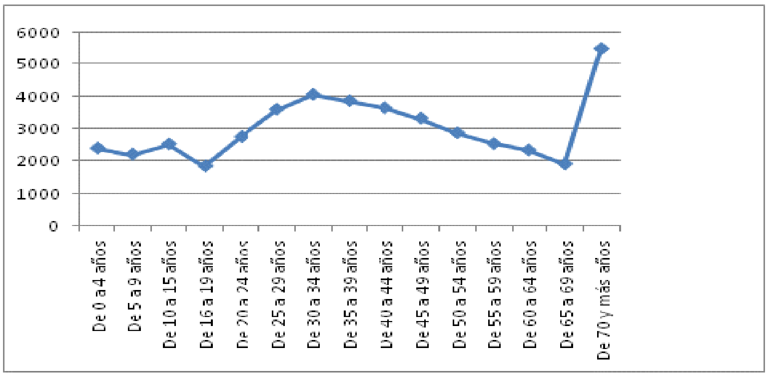

**Polígono de frecuencias y gráficos de líneas**

Otra forma de representar los datos es el polígono de frecuencias, que es la línea que resulta de unir los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos de un histograma de frecuencias. También se pueden representar polígonos de frecuencias a partir del diagrama de barras de una variable cuantitativa uniendo los extremos superiores de las barras. (Ver figura 1.2.4).

En estos gráficos la altura del punto en el que confluyen dos líneas es proporcional a la frecuencia de un valor. Si se trata de variable agrupada en intervalos, la altura es proporcional a la frecuencia en el intervalo sólo en el caso de intervalos de igual amplitud. En otro caso, sería proporcional a la frecuencia del intervalo dividida por la amplitud de la base (Nortes, 1993).

Los gráficos de líneas aparentemente son similares a los polígonos de frecuencias y en la hoja Excel no se diferencian. Pero matemáticamente son bastante diferentes, pues un gráfico de líneas se usa para representar, bien frecuencias de una variable cualitativa, o bien valores numéricos de una serie de datos, y no para representar variables cuantitativas. Un gráfico de líneas usa puntos conectados por líneas para mostrar cómo cambia el valor de algo (a lo largo del tiempo o del valor de la variable). Por ello no tiene mucho sentido al representar la distribución de frecuencias de variables cuantitativas.

Figura 1.2.4. Población en España en miles de personas en 2008 por tramos de edad (Fuente, INE base)




**Gráficos de puntos**

El denominado gráfico de puntos permite representar adecuadamente pequeños conjuntos de datos y tiene la gran ventaja de ser fácilmente construido a mano (Moore, 1999). Las gráficas de puntos se utilizan para variables cuantitativas, tanto discretas como continuas.

En este gráfico, la abscisa representa los valores de la variable estudiada; dentro del conjunto de datos, por cada valor de la variable que coincida con uno de los datos, se representa un punto encima de dicho valor. Los puntos están espaciados en forma homogénea, por lo que la altura del conjunto de puntos sobre un valor de la variable será proporcional a la frecuencia de aparición de dicho valor en el conjunto de datos estudiado y el número de puntos sobre cada valor de la variable representará la frecuencia de aparición de dicho valor en el conjunto de los datos. (Ver figura 1.2.5). Para la construcción de un gráfico de puntos, es necesario que el alumno conozca la representación de puntos en una recta graduada.

El gráfico de puntos es útil para detectar tendencias en conjuntos pequeños de datos, así como los valores extremos o intervalos de frecuencia nula. Una ventaja es que conserva el valor de los datos originales. Este tipo de gráficos podría ser también utilizado para representar datos de variables cualitativas, representando en el eje de abscisas los valores de cada una de las modalidades de la variable en estudio y poniendo sobre cada una de dichas modalidades tantos puntos como veces se repita dicha modalidad en el conjunto de datos que se está representando.

Figura 1.2.5. Número de caras en secuencias simuladas (Batanero, 2001, p. 153)

```
               x
               x
               x
               x
               x
               x
               x
               x
               x
               x    x
          x    x    x
          x    x    x    x
          x    x    x    x
 x        x    x    x    x
----------------------------
 7    8   9   10   11   12
```

## 1.2.1.2. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS BIVARIANTES Y MULTIVARIANTES

Los participantes en nuestro estudio también encuentran con frecuencia en la prensa y medios de comunicación o en otras materias gráficos que representan conjuntamente dos o más variables; por ejemplo, gráficos de barras adosados o apilados, gráficos de líneas, histogramas de frecuencia y gráficos de puntos múltiples.

**Gráficos de barras adosados o apilados**

En un gráfico de barras adosadas se puede representar los datos de una tabla de doble entrada, es decir graficar conjuntamente dos variables estadísticas A y B, generalmente cualitativas. En su construcción se seguirá el mismo procedimiento que para construir un gráfico simple de barras, pero en el eje de las abscisas, para cada modalidad de la variable A, se construirán tantas barras como modalidades tiene variable B (ver figura 1.2.6).

En un gráfico de barras apilado (ver figura 1.2.7) también se representan conjuntamente dos variables A y B, pero en lugar de ir las barras correspondientes a un mismo valor de la variable A y diferentes valores de la B unas junto a otras, se colocan unas sobre otras. En ambos gráficos se usan colores o tipos diferentes de trama para diferenciar los valores de las dos variables representadas; uno de los ejes sirve para presentar las categorías de una variable y el otro eje para representar las frecuencias.

Figura 1.2.6. Tasa anuales del IPC, base 2006 (Fuente, INE base)

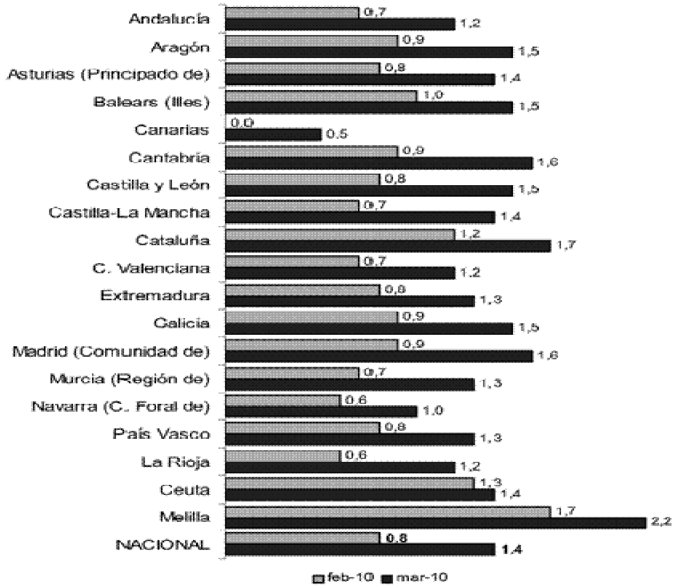
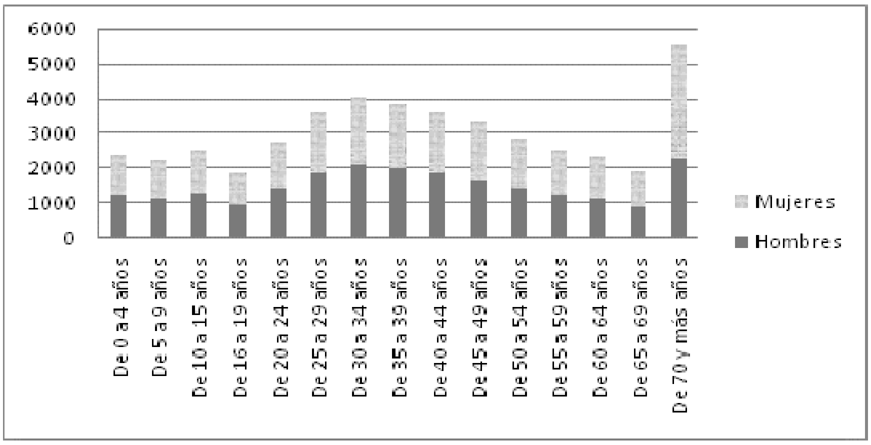



Figura 1.2.7. Población en España por sexo y tramos de edad en miles de personas en 2008 (Fuente, INE base)

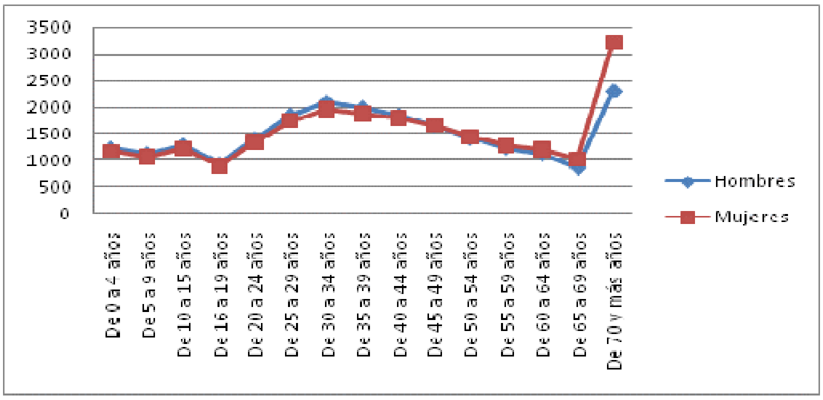



**Polígonos de frecuencias o gráficos de líneas múltiples**

Igualmente es posible representar mediante varios gráficos de líneas o polígonos de frecuencia superpuestos en el mismo marco una variable estadística doble o múltiple. De nuevo los colores o tipos de línea se usan para diferenciar las categorías de cada una de las variables (ver Figura 1.2.8).

Los gráficos de línea múltiples suponen un ahorro de espacio, pero no se debe incluir un número excesivo de variables pues la visualización de estas se dificulta. Con frecuencia sirven para analizar la evolución de diferentes variables relacionadas a lo largo del tiempo.

Figura 1.2.8. Población en España en miles de personas en 2008 por tramos de edad (Fuente, INE base)




## Gráficos de puntos múltiples

También se suelen usar los gráficos de puntos adosados o múltiples para comparar dos conjuntos de datos. Los puntos correspondientes a las dos variables a representar se pueden situar a derecha e izquierda de un eje central, en el que se representan los valores comunes de la variable. Otra alternativa es rotar el gráfico representando las variables por encima y debajo de un eje.

Este tipo de gráfico, al representar pequeños conjuntos de datos permite realizar de manera sencilla comparaciones entre las dos variables estadísticas representadas; por ejemplo comparando la moda de los dos conjuntos de datos, o el recorrido o rango de las dos variables representadas (ver figura 1.2.9).

Figura 1.2.9.Comparación del número de caras en secuencias reales y simuladas (Batanero, 2001, p. 154)

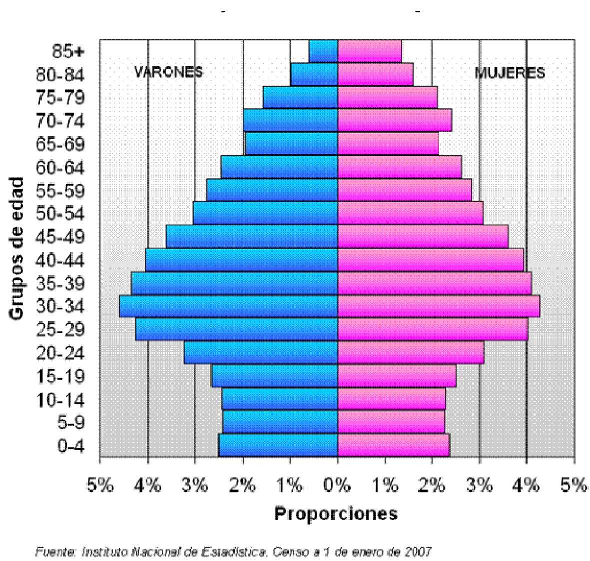
| ***Secuencia simulada*** | *N. Caras* | ***Secuencia real*** |
|---:|:---:|:---|
| *X* | *7* | *XX* |
| | *8* | *XXXXX* |
| *XXXX* | *9* | *XXXXXXX* |
| *XXXXXXXXXXXXXX* | *10* | *XXX* |
| *XXXXX* | *11* | *XXXXXXX* |
| *XXX* | *12* | *X* |
| | *13* | *X* |
| | *14* | *X* |

**Histogramas adosados**

En el caso de representar dos variables mediante histogramas en el mismo gráfico, se suelen contraponer en lugar de adosar. Una posibilidad es intercambiar el rol de los ejes usando el vertical para los valores de la variable y situando la frecuencia en el eje horizontal. El eje vertical se coloca en el centro del gráfico y a cada lado una de las variables. Obviamente la dirección de crecimiento del eje horizontal será diferente en cada mitad del gráfico, iniciándose el origen de coordenadas en el centro del mismo. De la misma forma se podría representa los histogramas adosados por encima y debajo de un eje central que representase los intervalos de valores de las variables.

Un caso particular de histogramas adosados se usa para representar la distribución de la población para hombre y mujeres y se conoce como pirámide de población (ver figura 1.2.10). El estudio de la pirámide de población se incluye en 5º o 6º año de primaria en los libros de matemáticas y de ciencias sociales.

Figura 1.2.10. Pirámide de población de España, 2007(Fuente INE base)




## 1.2.2. LOS GRÁFICOS COMO CONFIGURACIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS

Los ejemplos presentados de gráficos estadísticos elementales, aún sin incluir todos los tipos que se encuentran, bien en los medios de comunicación, bien en los libros de texto de educación primaria, permiten identificar claramente los diferentes objetos matemáticos que se deben comprender y dominar para una correcta comprensión gráfica y para desarrollar habilidades a la hora de tratar con gráficos estadísticos. Sin pretender ser exhaustivos, a continuación incluimos un breve análisis de algunos de estos objetos, que hemos clasificado de acuerdo a diferentes bloques del currículo de Educación Primaria. No hacemos acá referencia a los procesos matemáticos, que incluyen las diferentes categorías consideradas en nuestro marco teórico y que serán analizados en otras secciones posteriores de la tesis.

#### 1.2.2.1. OBJETOS ESTADÍSTICOS

En un gráfico estadístico se representan *datos,* esto es información, generalmente numérica, relacionada con un contexto, constituido por una parte de la realidad que se quiere representar (Moore, 1999). Como señalan Burrill y Biehler (en preparación), el contexto es tan importante como el valor numérico del dato. Precisamente algunas de las mayores dificultades que observaremos en los futuros profesores es no ser capaces de poner en relación el resultado del análisis estadístico con el contexto del proyecto.

Estos datos representarán *valores* de una o varias *variables estadísticas*. El concepto de variable es difícil para los estudiantes, quienes con frecuencia lo confunden con el de valor o no discriminan estos dos conceptos (Ruiz, Arteaga y Batanero, 2009). Las variables habrán sido obtenidas a partir de una *muestra* de resultados de un cierto *experimento estadístico*. Si el interés no se centra únicamente en esta muestra, sino en la *población* de donde se tomaron los datos, tendremos una *variable aleatoria* asociada, es decir una variable que describe los resultados de un *experimento aleatorio* en la población. La discriminación entre población y muestra, o variable estadística y aleatoria no es siempre sencilla para los estudiantes, según Ruiz, Arteaga y Batanero, (2009).

En uno u otro caso, la variable viene descrita por la distribución, que puede ser una *distribución de frecuencias* o una *distribución de probabilidad* (Reading y Canada, en preparación). La distribución de frecuencias estará constituida por el conjunto de valores de la variable estadística en la muestra, junto con sus frecuencias. La distribución de probabilidad estará constituida por los posibles valores de la variable aleatoria en la población, junto con sus probabilidades. La idea de distribución es quizás la más fundamental en estadística, pues se refiere no a cada dato sino al conjunto de ellos (Burrill y Biehler, en preparación). Puede ser también difícil discriminar para los estudiantes entre distribución de probabilidad y distribución de frecuencias o entre frecuencia y probabilidad.

Generalmente estas distribuciones vienen descritas por una serie de características: medidas de *posición central* (media, mediana, moda) y medidas de *dispersión* (rango y desviación típica) entre otras. Será importante atender a las dificultades descritas sobre estos conceptos, por ejemplo, las descritas por Mayén (2009) para las medidas de posición central.

Cuando la gráfica representa conjuntamente dos variables, en ocasiones interesa ver si existe una relación entre ellas. Por tanto aparecería un nuevo objeto: la *asociación estadística*, que amplía la dependencia funcional al caso de variables estadísticas o aleatorias (Estepa, 1993). En realidad el problema que se plantea en el proyecto que tuvieron que realizar los futuros profesores, implica el estudio de asociación entre una variable numérica (por ejemplo número de caras al lanzar 20 veces una moneda) y otra cualitativa (tipo de secuencia, simulada o real). Los alumnos estudiarán este problema analizando las diferencias entre dos distribuciones. Para Pfannkuch (2006) este problema (comparar dos distribuciones) es ya un problema de asociación e incluso de inferencia informal.

Muchos errores en la construcción del gráfico o en su correcta lectura e interpretación estarán ligados a falta de comprensión de algunos de los objetos estadísticos y sus relaciones que subyacen en el gráfico y que acabamos de describir. En el capítulo 2 analizaremos los contenidos estadísticos en los Decretos de Educación Primaria (MEC, 2006a) y observaremos la presencia de muchos de los objetos que acabamos de analizar, lo que implica que será necesaria su comprensión por parte de los profesores.

Además de objetos estadísticos, en los gráficos estadísticos están implícitos otros objetos geométricos y numéricos. Analizaremos en lo que sigue muy someramente algunos de ellos y la forma en que se reflejan en el currículo de primaria.

#### 1.2.2.2. GEOMETRÍA

El Ministerio de Educación (MEC, 2006a) incluye el Bloque 3, *Geometría*, que se orienta a la descripción, clasificación y análisis de propiedades de las figuras, cuerpos y sus transformaciones, así como a la orientación espacial. En dicho documento se recomienda ofrecer al niño oportunidades variadas y frecuentes de clasificar figuras geométricas, de acuerdo con sus propios criterios, construir, dibujar, y medir estas figuras y sus componentes. Se sugiere el interés de relacionar la Geometría con el resto de los bloques y con la naturaleza, el arte o la ciencia.

Los gráficos estadísticos son un tema que permite llevar a cabo esta puesta en relación. Como hemos visto, una parte importante de muchos de los gráficos presentados son los ejes, que sirven para representar los valores de la variable, intervalos de valores, frecuencias o bien algunos resúmenes estadísticos. Será importante, en la construcción de los gráficos por tanto, comprender el sistema de representación cartesiano, la perpendicularidad y el paralelismo, así como las ideas de distancia y proporcionalidad geométrica.

Dependiendo del tipo de gráfico aparecen otros objetos: la longitud de la barra en el diagrama de barras, la amplitud angular y amplitud del sector circular en el diagrama de sectores, el área de los rectángulos en el histograma, los segmentos y sus extremos en el diagrama de líneas.

En el Decreto encontramos, entre otros, los siguientes criterios de evaluación en relación a la geometría y que pueden tenerse en cuenta en el trabajo con gráficos estadísticos:

- Primer ciclo: *Reconocer en el entorno inmediato objetos y espacios con formas rectangulares, triangulares, circulares, cúbicas y esféricas.* Se valora la capacidad para reconocer estas figuras en situaciones familiares, utilizando con propiedad los términos geométricos propios del ciclo en forma oral o escrita.
- Tercer ciclo: *Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana.* Se evalúa si dichos contenidos son utilizados con propiedad para comprender y emitir informaciones diversas, y en la resolución de problemas geométricos del entorno.

Por su parte la Junta de Andalucía (Consejería de Educación, 2007a) incluye el contenido de Geometría en el Bloque 5 *Las formas y figuras y sus propiedades*, e indica que núcleo temático está relacionado con los siguientes contenidos sobre matemáticas del Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre: Bloque 1, Números, de primero, segundo y tercer ciclo; Bloque 2, La medida: estimación y cálculo de magnitudes y

Bloque 4, Tratamiento de la información, estadística y probabilidad. Se reiteran las sugerencias contenidas en el Decreto de Enseñanzas Mínimas.

Algunas oportunidades de trabajo geométrico se ofrecen en el trabajo con gráficos estadísticos donde los alumnos aplican sus conocimientos sobre sistemas de coordenadas, representación y elección de escalas en la recta, proporcionalidad geométrica, visualización, perpendicularidad y paralelismo, segmento, distancia, puntos, líneas, rectángulos, ángulos y sector circular, entre otros.

Pensamos que algunos posibles errores y dificultades de los estudiantes en relación a los gráficos estadísticos podrían estar relacionados con un inadecuado sentido geométrico. Por ejemplo, es frecuente que los estudiantes no aprecien que la frecuencia en un histograma ha de ser proporcional al área de cada rectángulo; en lugar de ello estiman la frecuencia de acuerdo a la altura del rectángulo. Posiblemente se arrastra este error por la confusión entre área y perímetro que es frecuente en muchos estudiantes.

Algunos estudiantes en nuestro trabajo previo (Arteaga, 2008) realizan una *elección inadecuada de un gráfico*, realizando representaciones en las que no se muestra adecuadamente la variabilidad de los datos. Por ejemplo, representan los valores aislados de los datos en un diagrama de sectores. Además de no ser capaz de formar la distribución, estos estudiantes no son conscientes de que al representar dato a dato en el diagrama, todos los sectores tendrán la misma amplitud, lo que hace la representación innecesaria. El alumno no conecta la amplitud del sector a la frecuencia y muestra un *fallo en razonamiento proporcional tanto numérico como geométrico.*

En el trabajo mencionado de Arteaga observamos la poca iniciativa de los alumnos a trabajar directamente a partir de la interpretación de una gráfica para calcular valores de determinados estadísticos a partir de estas. El alumno es más propenso a utilizar fórmulas matemáticas cuando tienen que determinar un resumen estadístico, en vez utilizar las gráficas directamente y basarse en las propiedades geométricas de las mismas. Por ejemplo, a la hora de calcular la moda o los percentiles a partir de una gráfica, la mayoría de los alumnos optaban por aplicar las fórmulas, en la mayoría de los casos de dificultad de memorización, en vez de utilizar un desarrollo geométrico basado en la semejanza de triángulos, donde además hay que trabajar elementos del sentido numérico como la proporcionalidad, concepto difícil para los estudiantes.

### 1.2.2.3. SENTIDO NUMÉRICO

Además de objetos estadísticos y geométricos, la interpretación y construcción de gráficos depende fuertemente del conocimiento numérico, como analizamos en Arteaga, Contreras y Ruiz (2008). El sentido numérico es mencionado en el Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria (MEC, 2006a), dentro del bloque 1 de Matemáticas: *Números y operaciones*. Se indica que este bloque pretende esencialmente el desarrollo del *sentido numérico*, entendido como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas. También se sugiere que los números deberían ser presentados a los estudiantes en diferentes contextos, al considerar prioritario la comprensión del significado de los resultados frente a la destreza de cálculo.

Entre los contenidos de dicho bloque se mencionan, para los números naturales, fracciones y decimales el recuento, medida, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana; su comparación en contextos familiares mediante ordenación y representación gráfica. Asimismo como criterio de evaluación se sugiere utilizar los números decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana. Todos estos objetos pueden aparecer en un gráfico estadístico, dependiendo del tipo de gráfico.

Por su parte la Consejería de Educación (2007a), en relación al Bloque 4 de Matemáticas para la Educación Primaria. *Desarrollo del sentido numérico. Medida de magnitude*s, define el *sentido numérico* como el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se pueden expresar en capacidades como la habilidad para descomponer números de forma natural, comprender y utilizar las estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos mentales y razonados.

En este documento se recuerda la interacción de este bloque con el Bloque 6. *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*, que se incluye desde el primer ciclo. Ello es debido a que el trabajo con gráficos estadísticos permite simultáneamente desarrollar el sentido numérico y capacidad de tratamiento de información, poniendo en relación estos dos bloques temáticos. Además, algunos errores frecuentes en la construcción de gráficos estadísticos descritos en investigaciones previas con futuros profesores, como las de Bruno y Espinel (2005) y en nuestro propio trabajo (Arteaga, 2008), están relacionados con el sentido numérico, como analizamos a continuación:

*Fallos en la formación de la distribución de frecuencias a partir de una lista de datos.* Algunos estudiantes no fueron capaces de formar una distribución de frecuencias a partir de una lista de datos en la investigación de Arteaga (2008). En consecuencia, no llegaron a agrupar los valores similares de la variable en estudio ni a calcular la frecuencia con la que aparecía dicho valor. En lugar de representar en el eje *X* los valores de la variable y en el eje *Y* los de la frecuencia de aparición, utilizan el eje *Y* para representar los valores de la variable. En el eje *X* representan mediante números naturales, las unidades estadísticas, asignándoles el número de orden en que los datos han sido obtenidos, sin tener en cuenta que es un orden artificial. Por tanto muestran *dificultades en la comprensión del orden numérico y clasificación* de los valores obtenidos de la variable y su *recuento,* y no son capaces de llegar a una *representación gráfica* adecuada de los datos. Tampoco son capaces de *dar sentido* a los datos recogidos en el contexto presentado.

*Errores en las escalas o divisiones de los ejes.* Algunos estudiantes no saben elegir una escala adecuada para el objetivo pretendido, así utilizan escalas que o bien no cubren todo el campo de variación de la variable representada o bien son excesivamente amplias. En otros casos se omite las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos o no especificar el origen de coordenadas. Otros estudiantes emplean escalas no homogéneas, mostrando fallo de razonamiento *proporcional.* Gal (2002) a este respecto señala que muchos estudiantes tienen dificultad de comprensión de conceptos básicos de razonamiento proporcional y en su aplicación a contextos estadísticos.

También pueden presentarse dificultades en la *representación de números naturales en la recta numérica*. Para variables que sólo toman valores enteros, el estudiante representa las frecuencias en un histograma cuyos rectángulos no están centrados en valores enteros (Bruno y Espinel, 2005). Subyace una confusión entre histograma y diagrama de barras, *falta de comprensión del significado de un intervalo de valores en la recta numérica* y del área en un histograma. En relación a este punto se dan casos en los que los estudiantes *realizan representaciones incorrectas* en la recta numérica, se trata de estudiantes que aunque sepan representar números en la recta numérica fallan al representar los extremos de los intervalos en un histograma (Espinel, 2007).

*Confusión entre variable dependiente e independiente en un gráfico*. Algunos estudiantes no hacen la distinción entre valor de la variable estadística y frecuencia. Bien intercambian los ejes para representarlas o bien las representan conjuntamente en un diagrama de barras adosadas. Estos estudiantes no relacionan las distintas formas de representación numérica con sus aplicaciones, ya que no discriminan las magnitudes que intervienen en el problema.

*Comparaciones numéricas sin sentido.* Algunos futuros profesores en la investigación de Arteaga (2008) mezclan en el mismo gráfico valores de variables diferentes, que incluso no son comparables. Por un lado, el estudiante no comprende el propósito del gráfico (que es representar la distribución), ni el concepto de distribución (que se aplica a una sola variable). Por otro, no discrimina las situaciones en las que tiene sentido comparar dos variables.

*Interpretación de información numérica de los gráficos*. Un último problema es que los futuros profesores no alcanzan los niveles superiores de interpretación de gráficos en la jerarquía de Friel, Curcio y Bright (2001). Es decir, aunque hacen una lectura literal, no llegan a visualizar las tendencias o *patrones numéricos* en los datos. En el trabajo de Arteaga (2008), por ejemplo, aunque las dos terceras de los participantes llegaron a construir un gráfico que visualizaba la distribución de los datos, en muchos casos los presentaban sin ninguna interpretación. Sólo una tercera parte de los estudiantes es capaz de visualizar la posición central y dispersión a partir del gráfico y de ellos sólo unos pocos estudiantes dieron una conclusión correcta, sobre la pregunta planteada en el problema.

### 1.2.3. GRÁFICOS Y CULTURA ESTADÍSTICA

Dentro del campo de la Educación estadística son varios los autores que han intentado describir la naturaleza de la *cultura estadística* y constructos relacionados con ella, tales como *conocimiento estadístico* y *razonamiento estadístico*. Aunque no hay un consenso entre los distintos autores sobre las características y naturaleza de la cultura estadística, todos ellos comparten la necesidad actual de que los ciudadanos sean capaces de tratar con diversos tipos de informaciones estadísticas y las representaciones que se le presentan por distintos medios de comunicación y en distintos contextos de su vida. Como hemos analizado en Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (en prensa), se hace necesario el trabajo con gráficos estadísticos, viendo estos tanto como modos de representar datos estadísticos como instrumento de análisis de datos, para el desarrollo de niveles aceptables de cultura estadística en los ciudadanos. A continuación vamos a analizar los estudios llevados por un lado por Watson y por otro por Ridgway y colaboradores, en los que se muestra la estrecha relación entre los gráficos estadísticos y la idea de cultura estadística.

**Estudios de Watson**

Watson (2006) ha llevado a cabo investigaciones sobre la comprensión de los distintos contenidos del currículo de estadística y probabilidad y su relación con el desarrollo de cultura estadística en los alumnos. Según la autora, es importante que los alumnos se enfrenten a problemas estadísticos en los que el contexto juegue un papel importante, ya que es con este tipo de problemas con el que se encontraran cuando acaben la educación secundaria. La autora, teniendo en cuenta los objetivos del currículo de probabilidad y estadística en la escuela primaria y secundaria y relacionándolos con las habilidades que debiera tener una persona adulta estadísticamente culta, define una jerarquía de niveles de cultura estadística útil para evaluar la comprensión de los estudiantes. Los niveles propuestos por Watson son los siguientes:

- El desarrollo del conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
- La comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo.
- Una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística.

La anterior clasificación es una jerarquía en la que cada nivel requiere un mayor número de habilidades que el inmediatamente anterior. Sin embargo, dentro de un determinado tema del currículo de estadística, podría proponerse una tarea relacionada directamente con el último nivel, para continuar desarrollando competencias relacionadas con los dos niveles anteriores. En este sentido la autora propone tareas basadas en artículos o gráficos obtenidos de los medios de comunicación, en los que la información presentada esté manipulada y así empezar fomentando una actitud crítica, pero a la vez poder ir desarrollando comprensión y conocimiento sobre conceptos estadísticos presentes en la tarea (nivel 1) y ser conscientes de la importancia del contexto de la tarea presentada (nivel 2).

Con el objetivo de formar ciudadanos estadísticamente cultos, Watson (2006) propone que en la escuela se deberían introducir de forma más generalizada el trabajo con asociación de variables. Para ello muestra la utilidad que pueden tener las representaciones gráficas, proponiendo tareas en las que los estudiantes deben crear sus producciones gráficas a partir de datos de distintas variables estadísticas proporcionados por el profesor. Los alumnos deberán pensar entre posibles relaciones entre las distintas variables y crear sus propias representaciones gráficas para así contrastar las hipótesis iniciales de las que partieron.

También propone tareas en las que los alumnos tengan que realizar gráficos a partir de afirmaciones estadísticas en las que de manera verbal se muestren relaciones entre variables, pero sin datos numéricos. La autora asegura que esta actividad es importante pues muchos alumnos tienen la idea de que no se puede construir un gráfico sin datos numéricos. Además, a lo largo de su vida se encontraran con informaciones estadísticas en las que no se muestren los datos en los que se basan y las representaciones gráficas pueden ser de gran ayuda para la comprensión de dichas informaciones.

Con respecto a la introducción de gráficos, sugiere que los gráficos de barras pueden introducirse desde edades tempranas y además ofrecen la oportunidad de desarrollar relaciones con otras áreas del currículo de matemáticas, ya que para la interpretación un gráfico sencillo de barras que trate temas familiares para los alumnos (por ejemplo medio de locomoción preferido por los alumnos de una clase para llegar a la escuela) son necesarias habilidades relacionadas con las correspondencias biunívoca, suma y resta. En niveles superiores y para gráficos de barras más complicados y elegidos a conciencia, serán necesarios conocimientos de proporcionalidad y porcentajes para una correcta interpretación, además de conceptos estadísticos como pueden ser distintos estadísticos como los promedios o los de dispersión.

Los gráficos de sectores han sido tema de controversia, debido a que su construcción requiere destrezas más complicadas, relacionadas con proporciones y ángulos. A pesar de ello la interpretación de este tipo de gráficos es importante debido a que puede ser de gran ayuda en la comprensión de la relación parte-todo en fracciones y porcentajes, además de que siguen siendo gráficos muy presentes en los medios de comunicación.

Según Watson, es importante también hacer notar las relaciones existentes entre los distintos gráficos y observar que no todos son adecuados para una misma situación, además el estudio de dichas relaciones puede facilitar la comprensión de gráficos más complejos. Por ejemplo la autora muestra la construcción de un gráfico de cajas a partir de un gráfico de puntos, lo que permitirá obtener los valores de los cuartiles de la distribución necesarios para construir el gráfico de cajas. Utilizando un marco común para los dos gráficos se podrá realizar la comparación de ambos y servirá de ayuda para comprender la manera de representar la información en un gráfico sencillo de cajas. Este tipo de ejercicios promueve la creación de relaciones por parte de los estudiantes entre los distintos tipos de gráficos, lo cual ayudará a fomentar su actitud crítica a la hora de decidir si un gráfico es más adecuado que otro a la hora de representar un mismo conjunto de datos.

**Estudios de Ridgway, Nicholson y McCusker**

Ridgway, Nicholson y McCusker (2008) indican que actualmente hay un emergente consenso, conducido, entre otros por la OECD y la Unión Europea, sobre la necesidad de medir el progreso de los distintos países, con un rango de indicadores, tales como la cohesión social, la riqueza o incluso la *felicidad* de los ciudadanos (medidas conceptualmente y técnicamente difíciles de definir). Por ello, dichos autores resaltan que se requieren nuevas formas de información y es por ello la necesidad de que los ciudadanos sean estadísticamente cultos nunca ha sido mayor.

Según Ridgway, Nicholson y McCusker, se espera que cualquier persona sea capaz de comprender las informaciones que provienen de diversas fuentes, como por ejemplo los medios de comunicación e Internet. En la actualidad hay un considerable aumento de nuevas tecnologías y del uso de de Internet por parte de los ciudadanos, ampliándose los medios de comunicación personal. Por ejemplo, por un lado es notable el aumento del uso de las redes sociales tales como *Youtube, Facebook*, *Tuenti* o *Twiter*, donde las personas tienen oportunidad de presentar información sobre ellos mismos, y por otro, el aumento también de páginas web donde se pueden encontrar y descargar gran variedad de datos estadísticos sobre diversos temas de actualidad.

Actualmente hay agencias y oficinas estadísticas (por ejemplo el INE) que ponen a disposición de los ciudadanos toda clase de datos, lo que requiere la necesidad de desarrollar una mejor comunicación entre los productores de estadísticas y los consumidores. Además en estos informes aparecen representaciones gráficas interactivas sobre datos multivariantes, en las que los usuarios pueden elegir que variables representar y que comparaciones realizar (Ridgway, et al., 2007). Una observación que realizan es que los datos estadísticos disponibles y sus representaciones suelen ser multivariantes, con interacciones complejas entre las distintas variables, que en muchas ocasiones no están relacionadas linealmente. Esto podría suponer un problema ya que el currículo de la escuela no prepara a los estudiantes para tratar con este tipo de datos.

Para aprovechar su potencial, se deberían aprovechar las posibilidades que brindan las nuevas tecnologías, de manera que se innovase en la presentación de los datos estadísticos en páginas públicas de Internet, proporcionándose también foros de debate en los que se pudiesen interpretar y razonar críticamente sobre los distintos conjuntos de datos (Ridgway McCusker y Nicholson, 2006). En principio este tipo de páginas y software tienen un gran potencial para ayudar a desarrollar la cultura estadística de los ciudadanos, pero para ello deben cumplir las siguientes características, según Ridgway, Nicholson y McCusker:

- Facilidad de búsqueda de los distintos conjuntos de datos; alta calidad de los conjuntos de datos disponibles y fiabilidad de las fuentes de información que los proporcionan.
- Alta calidad de las representaciones interactivas y que sean apropiadas para los datos que están siendo representados.
- Comentarios críticos sobre los datos, cuando estos puedan inducir errores de razonamiento y revisión dirigida a profesores de los errores conceptuales mostrados en dichos comentarios.

La realidad es que algunas páginas de Internet carecen de alguna de las anteriores características. Por ejemplo, pueden encontrarse conjuntos de datos de dudosa procedencia, representaciones pobres e inadecuadas y con poca interactividad, o que dificulten la comparación entre las distintas variables representadas. Otras veces hay pocos comentarios acerca de los distintos conjuntos de datos y en ocasiones no presentan demasiada facilidad para navegar e investigar sobre los distintos conjuntos de datos disponibles.

Aceptando las posibles contribuciones que podrían tener el tipo de páginas web antes citadas, en el Smart Centre de la Universidad de Durham (www.dur.ac.uk/smart.centre/) se ha diseñado una serie de materiales curriculares basados en programas interactivos de visualización, útiles para trabajar con representaciones dinámicas de datos multivariantes y basados en los siguientes principios:

- Transparencia de los programas, tratando de conseguir que los usuarios se envuelvan activamente en el trabajo con los datos para ir construyendo conocimientos.
- El inicio de cada uno de los programas empieza con interpretaciones basadas en el "sentido común".

Los datos usados tratan sobre distintos temas de interés y de actualidad para los alumnos, como pueden ser las enfermedades de transmisión sexual, factores de riesgo en enfermedades cardiovasculares, indicadores de pobreza, etc. Las representaciones que se ofrecen en estos programas son dinámicas y el alumno puede en cada momento elegir las distintas variables que quiere representar y ver sus relaciones. Por ejemplo, en el proyecto sobre enfermedades de transmisión sexual puede observar y conjeturar sobre las distintas relaciones entre variables como pueden ser la edad, sexo, las distintas enfermedades de transmisión sexual y el año en que se recogieron los datos, además de detectar tendencias a lo largo del tiempo en los distintos gráficos.

Al trabajar con este material, los alumnos se encontrarán con aparentes paradojas que les llevarán a definir hipótesis para más tarde contrastarlas. Para ello es necesario que dispongan de información acerca del tema que trata el proyecto, es decir del contexto. Esto ofrece grandes posibilidades (Ridgway et al., 2007) ya que, se pueden diseñar programas en los que tanto profesores como alumnos deban cruzar "fronteras" entre las distintas materias escolares. Además, los autores muestran que el diseño de sus materiales curriculares interactivos son coherentes con los siguientes principios de aprendizaje de la estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2007):

- Los estudiantes aprenden mediante la práctica y construcción de conocimiento y cuando se ven activamente envueltos en actividades de aprendizaje.
- Es fácil infravalorar la dificultad que los estudiantes tienen para comprender conceptos básicos de probabilidad y estadística y sobrevalorar su comprensión de los conceptos básicos.
- El aprendizaje mejora si se ayuda a los estudiantes a ser conscientes y a hacer frente a sus errores de razonamiento, pues aprenden mejor si reciben feedback en sus ejecuciones.

- Las herramientas tecnológicas deberían ser usadas para ayudar a los estudiantes a visualizar y explorar datos estadísticos.

Algunos de estos materiales han sido utilizados satisfactoriamente en diferentes escuelas (Ridgway et al., 2007: Ridgway et al., 2008). Como parte de los esfuerzos de los autores por conseguir mejoras en el currículo, han definido una serie de heurísticas que pueden ser útiles a la hora de explorar datos multivariantes:

- Ser crítico con la calidad de la fuente de los datos y ser cuidadoso al distinguir entre análisis y observación.
- Describir y explorar fenómenos antes de intentar obtener conclusiones e identificar variables.
- Fijarse en el efecto y no en la significación estadística de los datos (o además de ella), en el caso del estudio de inferencia.
- Comprobar que el tamaño del efecto es sustancialmente mayor que el del error aleatorio y buscar interacciones
- Buscar relaciones no lineales entre las distintas variables y cambios a lo largo del tiempo.

En estudios empíricos los autores muestran que alumnos de edades comprendidas entre los 9 y los 15 años son capaces de comprender datos multivariantes, si estos les son adecuadamente presentados y que, además, tareas con ordenadores en las que se trabaja con datos multivariantes, no son mucho más complicadas que tareas de lápiz y papel, en las que se trabaja como mucho con dos variables estadísticas.

## 1.3. CONTEXTO EDUCATIVO

Nuestra investigación se llevó a cabo en la Diplomatura de Magisterio, especialidad Educación Primaria, dirigida a la formación de maestros y maestras generalistas, que podrán impartir todas las áreas de conocimiento asociadas a la Educación Primaria, aunque incide principalmente en las de Lengua, Matemáticas, Conocimiento del Medio Social, Natural y Cultural y Expresión Artística.

La titulación, en el momento en que se tomaron los datos, estaba en proceso de adaptación a las normativas europeas enmarcado en el denominado Espacio Europeo de

Educación Superior (EEES). Un elemento fundamental de cambio es considerar como prioritario el trabajo del alumnado en las distintas asignaturas. Así, el número de créditos de una determinada asignatura tratará de coincidir con el tiempo de trabajo que el alumnado debe dedicar a superar con éxito esa asignatura, mientras que en la actualidad está asociado al tiempo dedicado en el aula de clase. Otro elemento importante de cambio es hacer mayor énfasis en la adquisición de competencias que tengan relación con la profesión hacia la que van dirigidas.

El curso 2004/05 se comenzó a experimentar en los primeros cursos de algunas titulaciones y en particular en la de Educación Primaria. Esta experimentación, se extendió posteriormente al resto de los cursos, entre ellos los participantes en el estudio. Los datos se tomaron dentro de la asignatura "Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria", que es una asignatura de carácter eminentemente práctico (dos tercios de las horas docentes se dedican a actividades prácticas), cuyo contenido exclusivo es la Didáctica de la Matemática, entendida respecto a la matemática incluida en el currículo de educación primaria en España, que abarca cuatro bloques temáticos: *Números y operaciones, La medida: estimación y cálculo de magnitudes, Geometría, Tratamiento de la información, azar y probabilidad* (MEC, 2006 a).

La actividad de la cual obtuvimos nuestros datos formaba parte de una práctica a la que se dedicó dos sesiones de clase de dos horas de duración cada una y se relaciona con el cuarto bloque del currículo de matemáticas en la educación primaria: *Tratamiento de la información, azar y probabilidad* teniendo, además, los estudiantes que realizar un desarrollo personal de la actividad y producir un informe escrito individual fuera del horario lectivo. Este requisito es parte de la metodología de enseñanza universitaria implantada en la Facultad de Ciencias de la Educación para adecuar los planes de estudio al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), iniciativa seguida por los países europeos para homogeneizar los títulos profesionales y hacerlos válidos en todo el territorio europeo. Ello implica similitud de contenidos y metodología de enseñanza, disminuyendo la parte dedicada a lecciones magistrales y aumentando el trabajo individual y en grupos de los estudiantes.

Los estudiantes en cuestión habían cursado también una asignatura de "Matemáticas y su Didáctica" en el primer curso de la Diplomatura de Magisterio (el año anterior a la experiencia), asignatura de contenido exclusivamente matemático, aunque restringida a las matemáticas que el futuro maestro tendrá que enseñar en la Educación Primaria.

También, como su nombre indica, se trata de relacionar en todo momento la matemática, con la enseñanza de la misma, aunque la parte puramente didáctica se deja para la asignatura de "Currículo Matemático en la Educación Primaria" a que hemos hecho referencia.

Dentro de los contenidos de "Matemáticas y su Didáctica" (asignatura de 9 créditos, cada uno de los cuales equivale 10 horas en el aula de clase y que equivaldría a 25 horas de trabajo del estudiante, incluido el trabajo dentro y fuera del aula, en los nuevos planes de estudio) se dedicaron 2 créditos (20 horas de clase y 50 horas del estudiante) al bloque de *Tratamiento de la información, azar y probabilidad.*

Los estudiantes revisaron y ampliaron su información sobre datos, variables estadísticas, distribuciones de frecuencias, gráficos sencillos (diagramas de barras, polígonos de frecuencias, histogramas, gráficos de sectores), medidas de posición central (media, mediana y moda) y medidas de dispersión (rango y desviación típica). También se revisaron y ampliaron las ideas de aleatoriedad, probabilidad y la asignación de probabilidades mediante regla de Laplace o probabilidad frecuencial. No se hizo un estudio formal de conceptos como el de variable aleatoria. Los estudiantes habían trabajado también en "Matemáticas y su Didáctica" con un proyecto sencillo de análisis de datos (aunque una sola vez y los datos no fueron recogidos personalmente, sino que fueron dados por el profesor).

Hay que tener también en cuenta que los estudiantes proceden de diferentes bachilleratos, siendo en su mayoría alumnos provenientes de bachillerato de humanidades y ciencias sociales, en el cual los contenidos matemáticos son menores que en los otros bachilleratos, aunque hay mayor contenido de estadística.

En todo caso, cualquiera que sea el bachillerato cursado, durante la Enseñanza Primaria (6-12 años) y Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años) todos los estudiantes deberían haber recibido una enseñanza mínima de estadística que incluye los mismos conceptos trabajados el primer año de la Facultad en la asignatura de "Matemáticas y su Didáctica".

## 1.4. TRABAJO CON PROYECTOS EN LA CLASE DE ESTADÍSTICA

### 1.4.1. INTRODUCCIÓN

En algunos trabajos previos (Díaz, Arteaga y Batanero, 2007; Díaz y Arteaga, 2008) hemos analizado las posibilidades que brinda el trabajo con proyectos en la enseñanza de la estadística para contribuir a la adquisición de las competencias básicas incluidas en los recientes decretos de enseñanza mínimas para la Educación Primaria y en la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2006 a y b). Este método también es recomendable en el trabajo con futuros profesores de Educación Primaria (Batanero, 2001). Creemos importante incluir acá alguna de estas ideas puesto que la recogida de datos se hace a través de un proyecto.

El interés del trabajo con proyectos en la clase de estadística ha sido sugerido anteriormente por muchos otros autores. Por ejemplo Biehler (1997) indica que ayudan a superar la distancia entre la comprensión de los conceptos y los medios técnicos de cálculo para poder aplicarlos.

Batanero y Díaz (2004) sugieren que la mejor forma de lograr la cultura estadística de los estudiantes es introducir en las clases de estadística el trabajo con proyectos. En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas como los que aparecen en los libros de texto, consistentes en calcular un promedio o hacer un gráfico y que son difíciles de encontrar en la vida real, un proyecto permite presentar las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado.

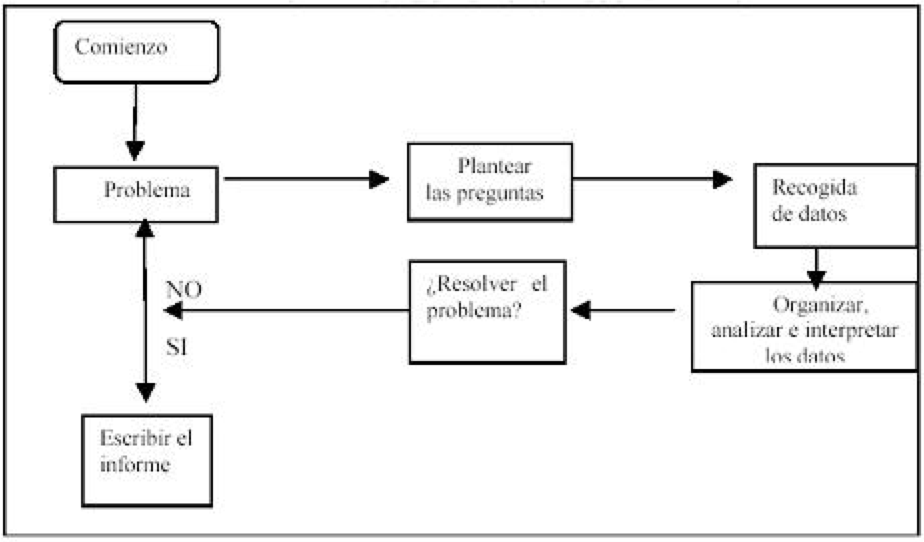
Los proyectos aumentan la motivación de los estudiantes (Holmes, 1997), puesto que los datos surgen de un problema relevante para el alumno, tienen para él un significado y tienen que ser interpretados. Por tanto, se aprende mejor qué son los datos reales, y se introducen ideas que no aparecen con los “datos inventados por el profesor”: precisión, variabilidad, fiabilidad, posibilidad de medición, sesgo, etc. Se muestra también que la estadística no se reduce a contenidos matemáticos (McGilliwray y Pereira-Mendoza, en preparación).

Por otro lado, hay que diferenciar entre conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La habilidad para aplicar los conocimientos matemáticos es mucho más difícil de lo que se supone, porque requiere no sólo conocimientos técnicos (tales como preparar un gráfico o calcular un promedio), sino también conocimientos estratégicos (saber cuándo hay que usar un concepto o gráfico dado) (Connor, Davies y Payne, 2002). Los problemas y ejercicios de los libros de texto sólo suelen concentrarse en los conocimientos técnicos, mientras que cuando trabajan con proyectos los alumnos desarrollan conocimientos estratégicos (Starkings, 1997).

### 1.4.2. ESQUEMA DEL TRABAJO EN UN PROYECTO

Los proyectos se conciben como investigaciones sencillas, y abordables por los estudiantes en un tiempo razonable, donde se integra la estadística dentro del proceso general de una investigación (Graham, 1987). La finalidad es que los estudiantes puedan comprender la utilidad de la estadística para resolver problemas de otras materias o de la vida cotidiana. Para conseguir estos objetivos, los proyectos deben escogerse con cuidado, basarse en problemas reales (incluso cuando sean versiones simplificadas de un problema dado) abiertos y apropiados al nivel del alumno (McGilliwray y Pereira-Mendoza, en preparación). Se comienza planteando un problema práctico y se usa luego la estadística para resolverlo.

Figura 1.4.1. Esquema del desarrollo de un Proyecto




La figura 1.4.1. muestra el esquema de la forma de trabajo en un proyecto en la que se ve que la parte puramente "matemática" de la estadística (la reducción, análisis e interpretación de los datos) es sólo una de las fases del proyecto, y aún la interpretación ha de hacerse en función del contexto del problema planteado (Pimenta, 2003).

Una de las fases más difíciles de un proyecto es el planteamiento de preguntas, pues los alumnos tienen dificultad para formular el problema de forma clara. El papel del profesor es ayudarles a pasar de un tema general a una pregunta que pueda contestarse mediante la estadística. Dicho de otro modo, al pasar del problema en la vida real (que es difuso y no completamente cerrado) a preguntas concretas que puedan resolverse con la estadística, el alumno pasa de la realidad a la matemática y comienza a modelizar (Starkings, 1997).

En algunos casos los datos serán dados por el profesor, pero en otros, para completar el proyecto, el alumno necesita recoger datos, que pueden provenir de diversas fuentes: por ejemplo, un experimento en la clase (como ocurre en el proyecto de nuestra investigación), una encuesta o una medida física. Consideramos importante que el alumno tenga la oportunidad de apreciar la diversidad de los datos estadísticos y experimente estas distintas formas de recogida de datos.

Algunas veces los datos se encuentran disponibles, pero hay que saber localizarlos de diferentes fuentes, como libros o anuarios estadísticos. Internet proporciona en la actualidad datos para cualquier tema por el que los alumnos estén interesados, bien a partir de servidores estadísticos específicos donde los profesores de estadística han puesto sus datos al servicio de la enseñanza, bien recurriendo a organismos oficiales como el INE (Instituto Nacional de Estadística), Eurostat, Unesco u otros. En la Tabla 1.4.1. mostramos algunos de estos servidores.

Tabla 1.4.1. Algunas fuentes de datos en Internet

| | |
|---|---|
| Journal of Statistical Education | http://www.amstat.org/publications/jse/ |
| The Chance Database | http://www.geom.umn.edu/docs/education/chance/ |
| The Data and Story Library | http://lib.stat.cmu.edu/DASL/ |
| Census at School | http://www.censusatschool.ca/r000-eng.htm |
| CAUSE | http://www.causeweb.org/ |
| Exploring Data | http://exploringdata.net/ |
| Statlib | http://lib.stat.cmu.edu/datasets/ |

La elección del conjunto de datos es muy importante, pues dependiendo del tipo de datos, podremos aplicar más o menos técnicas estadísticas. Por ejemplo, en el caso de los gráficos no podemos hacer un histograma con datos cualitativos y no se recomienda hacer la media con datos ordinales. Es importante que los estudiantes experimenten estos diversos tipos de datos para que adquieran capacidad de seleccionar una técnica estadística adecuada (Batanero y Díaz, 2004). En nuestro estudio trabajaremos con variables cuantitativas pero que sólo toman valores enteros, por lo cual podremos aplicar todas las técnicas que se han estudiado en primaria y secundaria.

Cuando sea posible, los alumnos pueden usar ordenadores para llevar a cabo sus proyectos, no sólo para el análisis de los datos, sino también para elaborar sus informes con procesador de texto en el que pueden incorporar los resultados gráficos y numéricos de los programas estadísticos. El proyecto contribuye así a aprender estas herramientas informáticas que son hoy día esenciales.

Respecto a los programas estadísticos existe una gran variedad, desde programas profesionales, como SPSS hasta las hojas de cálculo como Excel. En anteriores trabajos (Arteaga 2008, Arteaga y Batanero, 2010) se ha mostrado que algunos de nuestros estudiantes han utilizado la hoja Excel en la realización del proyecto, aunque como en el proyecto no se trabaja con un número elevado de datos, tanto los gráficos como los distintos análisis estadísticos se pueden llevar a cabo a mano o con calculadora.

### 1.4.3. DESARROLLO DE COMPETENCIAS BÁSICAS A TRAVÉS DE PROYECTOS

En los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2006 a y b) se indican que los contenidos del área de Matemáticas se orientan de manera prioritaria a garantizar el mejor desarrollo de la competencia matemática en todos y cada uno de sus aspectos. Se resalta también que el desarrollo del pensamiento matemático contribuye a la formación de las siguientes competencias, que también se desarrollan en el trabajo con proyectos:

- *Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.* El trabajo con proyectos posibilita la comprensión de sucesos de la actualidad y sus consecuencias y el análisis de fenómenos sociales desde diversos puntos de vista. Hace también posible identificar preguntas o problemas en la vida diaria o en la actualidad y obtener conclusiones basadas en pruebas, con la finalidad de comprender y tomar decisiones. Procura una habilidad progresiva para poner en práctica los procesos y actitudes propios del análisis sistemático de una tarea y de indagación científica, ya que los proyectos se conciben como auténticas investigaciones.

- *Tratamiento de la información y competencia digital.* En las fases de "recogida de datos" y "organización, análisis e interpretación de los datos", se habitúa a los alumnos a buscar, obtener y procesar información para transformarla en conocimiento. Los proyectos contribuyen al aprendizaje del uso de calculadora, ordenadores y software y adquirir destrezas de razonamiento para organizar la información, relacionarla, analizarla, sintetizarla y hacer inferencias y deducciones de distinto nivel de complejidad.
- *Autonomía e iniciativa personal.* Es preferible que los proyectos sean planteados por los propios alumnos, fomentando así su capacidad de elegir con criterio propio, de ejercitar su imaginación y de llevar adelante las acciones necesarias para desarrollar las acciones y planes personales. Además en el proyecto el estudiante no depende tanto del profesor, pues tiene libertad para elegir las estrategias de resolución.
- *Competencia para aprender a aprender*, se ejercita la curiosidad de plantearse preguntas, identificar y manejar las diversas técnicas y estrategias con las que afrontar una misma situación problemática y afrontar la toma de decisiones con la información de la que se dispone. Se ejercitan habilidades para obtener información y para transformar dicha información en conocimientos propios.
- *Competencia en comunicación lingüística.* Durante el desarrollo del proyecto los alumnos se ejercitan en la comunicación oral y escrita; la representación, interpretación y comprensión de la realidad; la construcción y comunicación del conocimiento y la organización y autorregulación del pensamiento. Además adquieren destrezas y actitudes como formarse un juicio crítico, generar ideas, estructurar el conocimiento, tomar decisiones y disfrutar expresándose tanto de forma oral (exponiendo las conclusiones obtenidas a sus compañeros) como escrita (redactando el informe del proyecto).
- *Competencia social y ciudadana*, pues se adquieren conocimientos diversos y habilidades complejas que permiten participar, tomar decisiones y responsabilizarse de las elecciones y decisiones adoptadas. Además, se conciencia a los alumnos de la importancia de la estadística en la sociedad actual, implicándose a través de procesos estadísticos en la mejora de la sociedad (participando en los censos, etc.). Por otro lado, los proyectos es aconsejable realizarlos en grupos de 2 o 3 personas,

lo cual fomenta la cooperación y la valoración del trabajo de los demás. Finalmente ayuda a tener una actitud crítica y reflexiva en la valoración de la información disponible, contrastándola cuando es necesario, y respetando las normas de conducta acordadas socialmente.

### 1.4.4. JUSTIFICACIÓN DEL USO DE UN PROYECTO EN NUESTRO TRABAJO

Por todos los motivos mencionados anteriormente, es deseable el uso de proyectos en la formación estadística de los futuros profesores, para de este modo introducir en la clase de matemáticas el trabajo cooperativo y una filosofía exploratoria, de acuerdo con las recomendaciones recientes sobre enseñanza de la estadística. Además, puesto que el uso de proyectos se recomienda en la enseñanza de la estadística desde la Educación Primaria, al utilizarlos en la formación de profesores se proporciona a éstos ejemplos de proyectos y pautas sobre la metodología de trabajo con los mismos, aunque siempre hay que tener en cuenta las adaptaciones que deben realizarse en los distintos proyectos dependiendo de la edad de los estudiantes.

En nuestra investigación se escogió un proyecto concreto que cubriese el contenido elemental de estadística contemplado en los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria. El proyecto además es realista pues plantea un problema en el que mediante la recogida y análisis de los datos se puede contestar a una pregunta de interés para los alumnos. De esta manera la estadística se contextualiza, se muestra su utilidad para la comprobación de conjeturas y el análisis de datos en experimentos y esto ayuda a que los estudiantes aprecien su valor en diversas situaciones de la vida real.

En el desarrollo del proyecto los estudiantes no sólo tienen que realizar cálculos matemáticos o gráficos, sino elaborar un informe en que usen estos resultados para apoyar sus argumentos. En la producción del informe final el estudiante debe situar el análisis de sus datos dentro de un argumento coherente y convincente que apoye sus hipótesis. La comunicación de ideas a partir de tablas y gráficos es especialmente importante en el razonamiento estadístico.

Siguiendo a Murray y Gal (2002) hemos tratado de desarrollar en los estudiantes la comprensión e interpretación de la información estadística, que no sólo requiere conocimiento estadístico o matemático, sino también habilidades lingüísticas, conocimiento del contexto, capacidad para plantear preguntas y una postura crítica ante la información. También Nolan y Speed (1999) resaltan la importancia de desarrollar la capacidad discursiva de los estudiantes, como medio de ampliar sus habilidades de pensamiento crítico.

## 1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Como se ha señalado, nuestro trabajo se interesa por la formación estadística de los futuros profesores de primaria y más concretamente por sus conocimientos matemáticos en relación a los gráficos estadísticos y conocimiento del contenido didáctico matemático de estadística que los futuros profesores ponen en juego al analizar un proyecto de análisis de datos.

La importancia de la formación en estadística y su didáctica de los futuros profesores de primaria se deduce claramente del papel asignado a la Estadística en los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria, donde se incluye el Bloque Tratamiento de la información, azar y probabilidad, desde primer ciclo de educación primaria. Este interés se deduce, además, de los errores detectados en la evaluación de conocimientos estadísticos elementales en futuros profesores que se han descrito, por ejemplo en las investigaciones de en Estepa (1993), Bruno y Espinel (2005) o Espinel (2007). Como ya hemos indicado estos problemas se producen en otros países y han llevado a la organización de un estudio internacional (Joint ICMI/IASE Study; Batanero, Burrill y Reading, en prensa) sobre los conocimientos estadísticos y didácticos que debería tener un futuro profesor.

Dentro de este objetivo general, enumeraremos brevemente los objetivos específicos que nos proponemos, que serán perfilados más tarde, una vez descritos el marco teórico y los antecedentes del trabajo:

*Objetivo 1. Evaluar los conocimientos matemáticos de los futuros profesores de educación primaria en relación a los gráficos estadísticos.*

Más concretamente nos centraremos en el conocimiento común del contenido (Ball, Thames y Phelps, 2005), tanto respecto a la construcción de gráficos como respecto a su lectura e interpretación, y su uso para obtener conclusiones. Para abordar este objetivo se plantea un proyecto abierto de análisis de datos a una muestra de futuros profesores de educación primaria. Se recogen los informes elaborados y se analizan los gráficos elaborados. Se estudian los errores producidos y la influencia del ordenador, el nivel de lectura de los gráficos y la capacidad de extraer conclusiones sobre el problema planteado. Todo ello se presenta en el Capítulo 4.

*Objetivo 2. Definir una jerarquía inicial de niveles de complejidad en la construcción de gráficos estadísticos, que complemente los niveles de lectura definidos por diversos autores y ayude a explicar el éxito de los sujetos en la lectura y obtención de conclusiones sobre los gráficos.*

Completaremos el análisis iniciado en Arteaga (2008) y produciremos una primera categorización de los gráficos que en el futuro se pueda mejorar y pueda ser útil tanto para la enseñanza como para la investigación. Este es un objetivo interés en el estudio, en cuanto no hemos encontrado investigaciones que describan niveles en la construcción de gráficos y de este modo aportaríamos un resultado original. También se relaciona la complejidad del gráfico con los errores cometidos, los niveles de lectura alcanzados y las conclusiones obtenidas.

*Objetivo 3. Evaluar los conocimientos didácticos de los profesores respecto a la estadística, a partir del análisis que realizan del proyecto desarrollado por ellos mismos y de toda la situación didáctica.*

En el capítulo 5 se analizan los protocolos producidos por los futuros profesores al analizar la idoneidad didáctica del proyecto anteriormente descrito, utilizando para ello una *Pauta de análisis de la idoneidad didáctica de Procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática*, proporcionada por los profesores de la asignatura y con la cual los participantes habían trabajado previamente en otras actividades.

Se analiza el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, y el conocimiento del contenido y la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2005). Aunque nuestro interés se centra preferentemente en los gráficos, en la actividad de análisis didáctico los futuros profesores producen un informe sobre la idoneidad global del proceso de estudio para el aprendizaje de la estadística. Es por ello que en esta parte de la tesis, ampliamos nuestro foco de atención para centrarnos en el conocimiento didáctico sobre la estadística de los futuros profesores, particularizándolo al conocimiento didáctico sobre los gráficos estadísticos, cuando sea posible.

## 1.6. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Una primera revisión literaria sobre los conocimientos matemáticos con respecto a los gráficos de futuros profesores de educación primaria, nos muestra que estos tienen dificultades en la construcción de gráficos estadísticos (Bruno y Espinel, 2005) e incluso en la lectura e interpretación de estos (Monteiro y Ainley, 2006, 2007). Por otro lado, aunque en menor medida, se dan investigaciones que muestran los problemas que los profesores o futuros profesores tienen en relación con el conocimiento didáctico del contenido de estadística, en particular con respecto a los gráficos estadísticos (Pinto, 2010). Teniendo en cuenta las distintas dificultades con las que se encuentran los futuros profesores a la hora de trabajar con gráficos estadísticos, además de los problemas relacionados con conocimientos didácticos de contenidos de estadística, nuestras hipótesis son las siguientes:

*Hipótesis 1. Los futuros profesores de nuestra muestra, al construir los gráficos estadísticos para llevar a cabo la tarea propuesta, cometen muchos de los errores ya detectados en investigaciones sobre dificultades y errores en la construcción de los gráficos estadísticos.*

En nuestra investigación los alumnos participantes en el estudio seleccionarán ellos mismos los gráficos que crean pertinentes para resolver el problema que se les planteó. Por ello esperamos encontrar una variedad de distintos tipos de gráficos y muchos de los errores ya encontrados en distintos estudios sobre la construcción de los distintos tipos de gráficos estadísticos (Espinel, 2007; Espinel Bruno y Plasencia, 2008).

*Hipótesis 2. Los niveles superiores de complejidad semiótica definidos en nuestra investigación son alcanzados por la mayoría de los estudiantes de la muestra de nuestro estudio. Sin embargo, no todos los estudiantes alcanzan un nivel de lectura suficiente de los gráficos producidos.*

Al observar que las habilidades en la lectura e interpretación de los gráficos estadísticos es difícil de alcanzar, según investigaciones previas (Friel, Curcio y Bright, 2001; Aoyama, 2007), pensamos que los estudiantes de nuestra muestra no llegarán a los niveles más altos de complejidad en la lectura de los gráficos. Con ello se replicarían los resultados de Arteaga (2008), donde muchos alcanzan un alto nivel en la construcción de sus gráficos, pero fallan en la lectura.

*Hipótesis 3. Los futuros profesores son capaces de aplicar adecuadamente elementos de cada uno de los componentes de la guía de análisis de la idoneidad didáctica proporcionada. Sin embargo, la aplicación no es homogénea en todos los descriptores y componentes.*

Esperamos que los futuros profesores hayan adquirido un cierto nivel de conocimiento especializado del contenido, pero creemos su nivel de conocimiento del contenido y la enseñanza será menor que la relativa a otros componentes, debido a que fueron muy pocas el número de horas dedicadas durante su formación al estudio de la didáctica de la estadística. Cabría esperar que debido a que los futuros profesores de nuestra muestra analizaron didácticamente el proyecto que ellos mismos realizaron, componentes relacionados con los afectos y emociones, es decir, aspectos del conocimiento del contenido y los estudiantes, sean aplicados correctamente.

# CAPÍTULO 2.

# FUNDAMENTOS

2.1. Introducción
2.2. Algunas notas históricas
2.3. Marco teórico
2.3.1. Introducción
2.3.2. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas
2.3.3. Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas
2.3.4. Relaciones entre objetos: función semiótica
2.3.5. Evaluación de la comprensión
2.3.6. Idoneidad didáctica y sus tipos
2.4. Marco curricular
2.4.1. Introducción
2.4.2. Decreto de Enseñanzas Mínimas
2.4.3. La Junta de Andalucía
2.4.4. NCTM y Proyecto GAISE
2.4.5. Los gráficos estadísticos en los libros de texto de primaria
2.4.6. Los gráficos estadísticos en la formación de maestros
2.5. Conclusiones sobre los fundamentos del trabajo

## 2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los fundamentos de nuestro trabajo, tanto desde el punto de vista del marco teórico, como desde el análisis del marco curricular relativo a los gráficos estadísticos en la formación de profesores de Educación Primaria.

Para contextualizar la investigación comenzaremos haciendo un breve resumen del origen histórico de los gráficos estadísticos, con objeto de mostrar la rápida evolución en las últimas décadas, no sólo de las variedades de gráficos, sino de la filosofía de su aplicación en estadística. De este modo añadimos una nueva justificación a la importancia que hoy día reciben los gráficos en la enseñanza.

El capítulo continúa con la presentación de algunos elementos teóricos que se van a utilizar y que forman parte del Enfoque Ontosemiótico desarrollado por Godino y sus colaboradores. Entre los elementos elaborados en este marco teórico, utilizaremos en nuestro trabajo los de configuraciones de objetos y procesos matemáticos, función semiótica e idoneidad didáctica. Analizaremos estos elementos teóricos y otros relacionados con ellos.

Seguidamente presentamos el marco curricular, analizando los Decretos de Enseñanzas Mínimas del Ministerio de Educación y la Junta de Andalucía, así como los estándares del National Council of Teachers of Mathematics y el proyecto Gaise, en los cuáles se han inspirado las actuales directrices españolas sobre la enseñanza de la estadística. Mostramos la forma en que estas directrices se interpretan en una serie completa de libros de textos de Educación Primaria y hacemos también un resumen de la formación estadística que reciben los futuros profesores de educación primaria en relación a los gráficos estadísticos. Finalizamos el capítulo con unas conclusiones.

## 2.2. ALGUNAS NOTAS HISTÓRICAS

Comenzamos el capítulo con unas breves notas sobre la historia de los gráficos, cuyo uso en estadística es relativamente reciente, debido a la variedad de habilidades que se requieren para su construcción y su lectura e interpretación. Los primeros indicios de visualización surgieron en los diagramas geométricos, las tablas de posición de las estrellas y otros cuerpos celestes, los mapas que sirvieron de ayuda a la navegación y exploración de nuevos territorios. La idea de coordenada se usó en el antiguo Egipto por los constructores que las usaban para planificar sus ciudades. Las ideas de longitud y latitud se conocen en astronomía, al menos desde el año 200 (Friendly, 2007).

Según Cazorla (2002) el sistema de coordenadas cartesianas, tal como lo conocemos aparece en 1637, en el libro *La Géométrie,* de Descartes. Los científicos de la época utilizaron gráficos cartesianos para explorar la relación entre variables con una filosofía de análisis exploratorio de datos. Las curvas se emplearon en estadística para comprender la estructura de los datos empíricos relativos a los fenómenos estudiados (Wainer y Thissen, 1981).

Desde 1600 la realización sistemática de estudios y recogida datos sociales comenzó en varios países Europeos, bajo la denominación de “aritmética política”. Los trabajos de John Graun sobre 1662 y William Petty hacia 1665 tienen la finalidad de informar al estado sobre asuntos de salud pública, población y agricultura, impuestos, etc. También se realizan trabajos estadísticos con fines comerciales, tales como el establecimiento de primas de seguros, que se basan en las tablas de vida iniciadas por Jan de Witt, hacia 1671. Aproximadamente al mismo tiempo surge la teoría de la probabilidad. Esta teoría junto con la idea de coordenada es aplicada por Christiaan Huygens en 1669 para construir el primer gráfico de una distribución continua. Al final de este siglo los elementos para el desarrollo de los métodos gráficos estaban disponibles: datos reales de interés, una teoría para darles sentido y algunas ideas sobre visualización (Friendly, 2007).

Uno de los pioneros en el uso de los gráficos fue William Playfair (1759 - 1823), ingeniero y economista, que introdujo el histograma, los gráficos de barras y líneas para analizar datos económicos sobre 1786 y unos 10 años más tarde los gráficos de sectores. El primer gráfico de barras fue presentado por Playfair en 1786 en su libro *Commercial and Political Atlas* y el primer gráfico de sectores 1801, en su libro *The Statistical Breviary*.

Con las innovaciones en el diseño y la técnica, la primera mitad del siglo XIX fue testigo de una explosión de crecimiento en el desarrollo de los gráficos estadísticos y la cartografía, a una velocidad no superada hasta la etapa actual. Gráficos de barras y sectores, histogramas, gráficos de líneas, series de tiempo, gráficos de contorno, diagramas de dispersión y otros son perfeccionados en este periodo (Friendly, 2007).

Mientras que los primeros tuvieron una aceptación inmediata, el gráfico de sectores no se comienza a usar habitualmente hasta 1860, cuando Charles Joseph Minard (1781 - 1870), comenzó a emplearlo para añadir una tercera dimensión de información sobre mapas (Lewandowsky y Spence, 1989). Playfair desarrolló los fundamentos del diseño gráfico, para hacer la estadística más intuitiva, en sustitución de las tablas con información numérica. Sin embargo la aceptación de sus gráficos fue lenta por la limitación de la técnica del momento para reproducir gráficos y el coste que suponía la elaboración manual de los mismos (Wainer, 1992).

Una aportación impactante fue el mapa de flujo realizado por Minard, titulado *Carte figurative des pertes successives en hommes de l’Armée Française dans la campagne de*

*Russie 1812-1813*, publicado en 1869, con el objetivo de representar la campaña de invasión de Napoleón sobre Rusia. Este gráfico representaba en dos dimensiones multitud de datos precisos, como la ubicación y dirección de los ejércitos, dónde y cuándo partían y/o se reunían sus destacamentos, la disminución del grueso de las filas e incluso las bajas temperaturas.

El uso social y político de los gráficos también se evidencia en el diagrama polar (posteriormente conocido como gráfico polar) inventado por Florence Nightingale (1820–1910) para iniciar una campaña para mejorar las condiciones sanitarias en los campos de batalla y el auxilio a los heridos. Otra contribución importante es la de Francis Galton (1822-1911) quien desarrolla las ideas de correlación y regresión. Además a través de su intuición conjeturó que en una distribución normal bivariante las isolíneas de igual frecuencia aparecerían en elipses concéntricas y que el lugar geométrico de las líneas de regresión $y \mid x$ ; $x \mid y$ serían los diámetros conjugados de estas elipses. Para analizar estas conjeturas, el autor se basó en el análisis visual, tanto como en la aplicación de técnicas de suavizado a los datos.

El resurgir actual de la representación gráfica ha sido debido a los trabajos de Tukey (1915-2000), que con su filosofía de análisis exploratorio de datos defiende el uso de los gráficos como herramienta de análisis estadístico y no solo de representación de datos. Aunque utiliza gráficos tradicionales, inventa otros como el diagrama de tallo y hojas publicado en 1972 y descrito por completo en 1977 o los gráficos de caja en 1977 y diagramas de caras de Chernoff (descrito entre 1973 e 1975); los gráficos P-P, Q-Q, en 1968, y diagramas de puntos, entre otros (Tufte, 1983). Su obra pionera *The Future of Data Analysis* escrito en 1962 contiene una ardiente defensa del reconocimiento del análisis exploratorio de datos como una rama legítima de la estadística diferente de la estadística matemática.

En Francia Jacques Bertin (1918–) publica su libro *Semiologie Graphique* (Bertin, 1967), que organiza los elementos visuales y perceptivos de los gráficos, de acuerdo con las características y relaciones en los datos. En paralelo, pero simultáneamente, otro trabajo gráfico importante es el realizado con los datos multivariantes por Jean-Paul Benzecri (1932–) que crea la escuela europea de “L´Analyse des Données”, creando métodos como el análisis clúster y de correspondencias, cuya finalidad última es la visualización de datos complejos multivariantes.

Más recientemente, Cleveland desarrolla nuevos métodos gráficos tales como la matriz de diagramas de dispersión (Cleveland, 1987) e impulsa los estudios metodológicos sobre su uso y el tipo de información que debe representarse en cada uno, tanto para visualizar los datos como para ajustar un modelo. Se comienza a hablar de visualización de datos, concibiendo el gráfico como un vehículo visual para mostrar la información cuantitativa.

Un factor crucial en toda la historia del desarrollo de los gráficos estadísticos fue la innovación tecnológica y la facilidad para producir gráficos en pocos instantes, permitiendo también los gráficos estadísticos dinámicos, que, a diferencia de los gráficos tradicionales, puede cambiar o transformarse para brindar diferentes visiones de la estructura de los datos. En dichos gráficos dinámicos los cambios se ejecutan a partir de una acción directa del usuario sobre el propio gráfico y se producen instantáneamente, en tiempo real. Las posibilidades de manipulación son diversas y dependen del tipo de gráfico, pero, entre las usuales podemos citar:

- Localizar e iluminar los nombres de las unidades de análisis, observaciones o variables sobre el propio gráfico; borrarlas o añadirlas.
- Rotar un gráfico en tres dimensiones, controlar el sentido, y dirección de giro.
- Cambiar la escala; o el número y amplitud de intervalos.

En resumen, después de un lento nacimiento, ligado a las necesidades políticas y comerciales, a partir del siglo XIX y sobre todo del XX se produce un crecimiento notable, tanto del tipo de gráficos utilizables en el análisis estadístico, como, sobre todo de la visión del papel de los gráficos en la estadística. A partir del trabajo de Tukey los gráficos no son ya instrumentos didácticos de presentación a otra persona del resultado de un análisis hecho por algún otro método. Los gráficos se convierten en sí mismos en instrumento de análisis y descubrimiento. Como indica Wild y Pfannkuch (1999) en su idea de “transnumeración”, el cambio de un gráfico a otro permite encontrar nueva información. La tecnología, su disponibilidad y fácil uso han extendido la aplicación y tipos de gráficos, y los han introducido en la enseñanza, por lo que el problema de formación de profesores cobra especial relevancia.

## 2.3. MARCO TEÓRICO

### 2.3.1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo vamos a utilizar nociones teóricas desarrolladas por Godino y colaboradores en el marco teórico llamado Enfoque Ontosemiótico (EOS), que nos van a resultar de utilidad para analizar las producciones gráficas realizadas por una muestra de futuros profesores en un proyecto abierto de análisis de datos, evaluando los conocimientos matemáticos que estos ponen en juego, además de servirnos para evaluar los conocimientos didácitos que ponen de manifiesto parte de dichos futuros profesores al analizar la idoneidad del proyecto.

El marco teórico propone tres dimensiones en el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que son: la epistemológica, la cognitiva e instruccional. Cada una de ellas se aborda con herramientas teóricas agrupadas en tres modelos teóricos: teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998a y b); teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005; Font, Godino y D'Amore, 2007) y teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Font, Planas y Godino, 2010).

### 2.3.2. SISTEMAS DE PRÁCTICAS OPERATIVAS Y DISCURSIVAS LIGADAS A CAMPOS O TIPOS DE PROBLEMAS

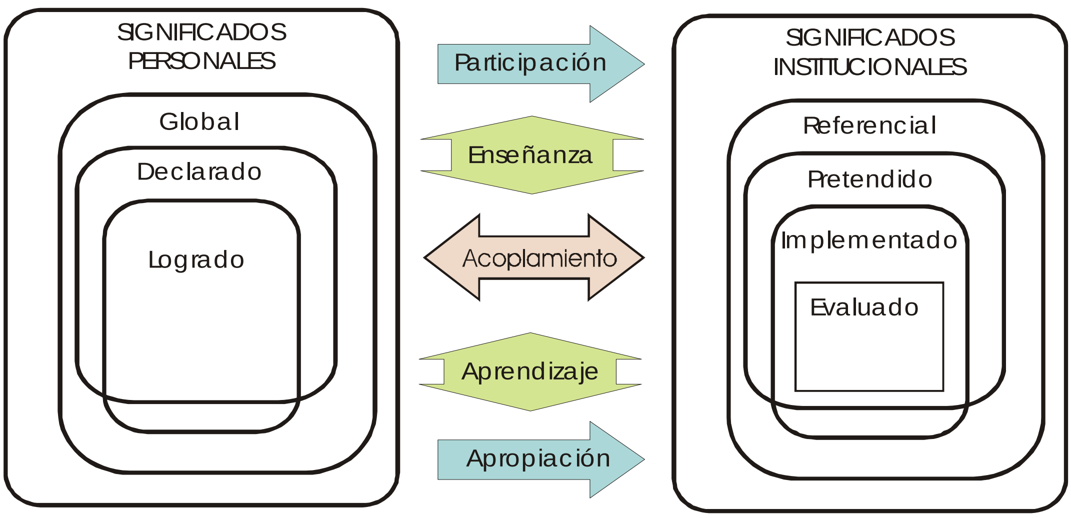
En diversas publicaciones, los autores que han desarrollado este marco teórico se interesan por los objetos matemáticos que surgen de las prácticas matemáticas realizadas para resolver un problema que puede ser matemático o extra-matemático (Godino y Batanero, 1994; 1998a; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Los autores toman como noción primitiva la de situación-problemática. Esta puede ser cualquier situación (problema, proyecto, ejercicio, tarea), cuya solución requiere una actividad de matematización. A partir de esta idea los autores definen los conceptos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado. Una *práctica matemática* es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida y validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

Las prácticas pueden ser específicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas interesadas en resolver una misma clase de situaciones problemáticas. La pertenencia a una institución conlleva a la realización de unas prácticas sociales que son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento.

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas que realizan las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, sobre qué es el objeto matemático gráfico de barras, por ejemplo, y qué significa esta expresión, se propone como respuesta, el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales se requiere construir o interpretar un gráfico de barras.

Puesto que los significados dependen de los contextos sociales y de los sujetos, su carácter es relativo. Su uso en el análisis didáctico lleva, en consecuencia, a introducir la tipología básica de significados que se resume en la Figura 2.3.1 (Godino, 2003, p. 141). Respecto al significado institucional, se dan distintos tipos de significados: el referencial (qué significado del histograma se considera en una enseñanza o investigación), pretendido (qué se pretende enseñar del histograma en una experiencia de enseñanza), implementado (qué se logra enseñar) y evaluado (qué parte se evalúa).

Figura 2.3.1. Tipos de significados institucionales y personales



Respecto al significado personal, se diferencia entre tres tipos: el significado global (es decir, todo lo que un sujeto conoce y es capaz de hacer sobre el histograma), declarado (lo que, una vez pasada la evaluación, la persona ha conseguido mostrar que sabe sobre los histogramas, por medio de la evaluación) y logrado (la parte del conocimiento sobre los histogramas, que está de acuerdo con el significado institucional).

En la parte central de la Figura 2.3.1 se representan las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación progresiva del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados (Godino, 2003).

### 2.3.3. OBJETOS INTERVINIENTES Y EMERGENTES DE LOS SISTEMAS DE PRÁCTICAS

Godino, Batanero y Font (2007) indican que de los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos, que serán objetos institucionales si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución o serán objetos personales si dichos sistemas de prácticas son realizados por una persona. Es decir, se tienen en cuenta las dimensiones social y personal del conocimiento y también el hecho de que una práctica personal pudiera ser o no adecuada desde el punto de vista de la institución.

Para permitir analizar con detalle los procesos didácticos, en el EOS se formula una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad socialmente compartida de resolución de problemas, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado (Godino y Batanero, 1994; 1998a; Godino, Batanero y Font, 2007). A continuación se muestran las categorías de objetos o entidades matemáticas primarias propuestas desde el EOS. Cualquiera de estas entidades puede ser objeto de análisis didáctico. Así en nuestro caso, en el capítulo 4, nos centramos en los gráficos estadísticos, mientras otras investigaciones podrían centrarse en los problemas, en algún concepto o proposición específica, etc.

- *Situaciones-problemas*: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, acciones que inducen una actividad matemática. En nuestro caso la situación planteada es el estudio de las intuiciones de los estudiantes (situación extra-matemática) que se transforma durante su resolución en un problema matemático (comparación de dos series de datos). Para resolver este problema matemático y el extra-matemático relacionado los estudiantes harán una serie de prácticas, como efectuar un recuento de los datos y construir gráficas estadísticas. En el análisis que haremos en el capítulo 4 no consideramos las situaciones-problemas, ya que son fijas para todos los estudiantes y para todos los gráficos analizados.
- *Lenguajes*: términos, expresiones, notaciones, gráficos que se utilizan para representar los datos del problema, las operaciones que hacemos con ellos, los objetos matemáticos que se utilizan y la solución encontrada. Nosotros nos interesaremos por los gráficos producidos por los estudiantes que por un lado, serían en sí mismos, parte del lenguaje matemático. Pero, por otro, se pueden considerar a su vez como objetos matemáticos complejos, dentro de los cuales aparecen diversos tipos de lenguaje. Esperamos que en los gráficos construidos los alumnos mezclen el lenguaje verbal y gráfico, aunque también pudieran usar el simbólico. Este tipo de lenguajes se organizan dentro del gráfico en función de varios elementos del mismo: su título, ejes, escalas, marcas del eje y elementos geométricos específicos del gráfico.
- *Conceptos- definición*: En las prácticas que llevan a cabo los estudiantes para resolver un problema matemático (en este caso cuando resuelven el problema planteado o construyen los gráficos) se usan implícita o explícitamente objetos matemáticos, de los cuáles el alumno ha de recordar o aplicar la definición. Por ejemplo, los estudiantes usarán implícitamente los objetos: números enteros y decimales, fracciones, variable estadística, valor, rango de la variable, frecuencia y en algunos tipos de gráficos la proporcionalidad, sistema de coordenadas cartesianas, orden numérico, longitud, segmento u otros.
- *Proposiciones* o enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que igualmente se han de emplear al resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, cuando los estudiantes han de usar la relación de proporcionalidad entre una frecuencia y la altura de una barra cuando construyen el diagrama de barras o para comprobar si su representación es completa han de recordar el hecho de que la suma

de frecuencias ha de ser igual al tamaño de la muestra o incluso cuando detectan visualmente la moda, han de buscar el valor (o valores) de la variable con mayor frecuencia.

- *Procedimientos*: Serían los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo que los estudiantes han aprendido durante la enseñanza previa y que aplican al resolver el problema. En nuestro ejemplo, los alumnos aplican algoritmos de representación de números enteros en la recta numérica, ordenación y recuento de datos. En el capítulo 4 haremos un análisis detallado del lenguaje, conceptos, proposiciones y procedimientos empleados en algunos de los gráficos producidos por los estudiantes.
- *Argumentos*: Serían los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o bien la solución de los problemas. Los estudiantes en nuestro estudio usan argumentos para comparar los datos o justificar si las intuiciones de los estudiantes son o no correctas. Nosotros analizaremos separadamente los argumentos de los estudiantes en los apartados 4.6 y 4.7.

Estos seis tipos de objetos matemáticos amplían, según Godino, Batanero y Font (2007), la distinción usual entre conceptos y procedimientos, pues se podría hablar de comprensión procedimental y conceptual, pero también se podría hablar de comprensión argumentativa y lingüística. Las situaciones-problemas son el origen de la actividad matemática; el lenguaje sirve para representar los problemas, procedimientos, conceptos y proposiciones; los argumentos justifican los procedimientos y las soluciones de los problemas, y las proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Como vemos en la Figura 2.3.2 cada uno de estos objetos tiene asociado un proceso matemático: problematización, comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino y Font, 2007). Además estos autores contemplan los objetos anteriores desde diferentes facetas duales:

- *Personal – institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales” (Godino y Batanero, 1994, p. 338).
- *Ostensivo – no ostensivo.* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que se puede mostrar a otro, es decir, materializado de alguna forma.
- *Expresión – contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica

(de lo cual se habla en el siguiente apartado, 2.3.4).

- *Extensivo – intensivo*. Un objeto que interviene como un caso particular, por ejemplo el cálculo de la mediana en un gráfico de puntos por simple conteo de puntos, o un caso más general, en el que se da la fórmula de la mediana de un conjunto de datos y representar dicho valor en un determinado gráfico.
- *Unitario – sistémico.* En algunas circunstancias los objetos matemáticos *se consideran unitar*ios (un dato) y en otros como compuestos de varios objetos (la distribución de datos).

Figura 2.3.2. Tipos de objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas


También en la Figura 2.3.2 se consideran una serie de procesos asociados a estas dualidades: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización/ concreción – idealización/abstracción; expresión/representación – significación.

De todos estos objetos y procesos, en nuestro estudio nos interesamos sobre todo por los objetos elementales: problemas, lenguaje, definiciones, proposiciones, argumentos y procedimientos, aunque eventualmente haremos referencia a las dualidades o a los procesos descritos en esta sección.

## 2.3.4. RELACIONES ENTRE OBJETOS: FUNCIÓN SEMIÓTICA

Otro punto de interés en nuestro estudio es el de función semiótica que sirve para resaltar los procesos de interpretación que se llevan a cabo en la actividad matemática y en los cuales a veces pueden aparecer desajustes (conflictos) de interpretación entre alumnos y profesor. Partiendo de diversos autores, Godino (2002) y posteriormente Font, Godino y D'Amore (2007) describen la idea de función semiótica como correspondencia entre un antecedente y un consecuente, establecida por un sujeto (persona o institución).

Un gráfico estadístico, en sí mismo, puede considerarse como una función semiótica, donde el antecedente es el propio gráfico y lo representado es la distribución estadística de los datos, siendo la correspondencia el conjunto de convenios establecidos en estadística para el gráfico particular, que permite a la persona que lee el gráfico interpretarlo o bien a la persona que tiene los datos construirlo. En este ejemplo se pone de manifiesto la posibilidad de que una persona no conozca los convenios citados y por tanto no interprete o interprete incorrectamente el gráfico, produciéndose un conflicto que los autores denominan semiótico. En todo caso es una función semiótica compleja, constituida a su vez de funciones semióticas elementales, como discutiremos en el capítulo 4. Cada elemento del gráfico (ejes, escalas, etiquetas, elementos, etc.) constituye en sí mismo una función semiótica simple.

El antecedente (expresión) y consecuente (significado) de una función semiótica no se restringen a conceptos, sino abarcan toda la anterior ontología de objetos matemáticos u organizaciones de estos en entidades más complejas como sistemas conceptuales o teorías. Así en nuestro estudio, podemos descomponer el gráfico estadístico en sus distintos elementos estructurales (que como hemos dicho es un objeto matemático complejo) y centrarnos en partes del mismo, observando una multiplicidad de funciones semióticas dentro del gráfico. Por ejemplo, si el título de un gráfico es "Distribución del número de caras en la secuencia real" observamos que algunas palabras de este título (lenguaje) hacen referencia a una serie de conceptos matemáticos (distribución, número, secuencia).

Dichas funciones semióticas juegan un papel fundamental en los procesos matemáticos que se realizan en cualquier práctica matemática, en los que se relacionan entidades primarias mostradas anteriormente, o grupo de ellas. Algunos de los procesos matemáticos citados por los autores son los de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización. ) y argumentación.

Las entidades u objetos primarios pueden relacionarse entre sí formando lo que dichos autores denominan "configuraciones", definidas como redes de los objetos intervinientes y emergentes en las prácticas matemáticas y las relaciones entre ellos (Godino, 2002). Hay dos tipos de configuraciones: configuración epistémica (redes de objetos institucionales) y configuración cognitiva (redes de objetos personales).

En nuestro trabajo cuando analizamos las producciones gráficas estadísticas realizadas por los alumnos lo que estudiaremos son las configuraciones cognitivas, que es una herramienta potente que consiste en un desglose de las prácticas de los alumnos en entidades situacionales, ligüísticas, actuativas, conceptuales, proposicionales y argumentativas que permiten un análisis más fino del aprendizaje matemático llevado a cabo por estos. En nuestro trabajo esto nos permitirá identificar la estructura de los objetos que han hecho posible la realización del gráfico por parte del alumno (práctica matemática), identificar incluso conflictos semióticos y llegar a definir una clasificación de los gráficos elaborados por los alumnos según unos niveles de complejidad semiótica que definiremos en el apartado 4.

### 2.3.5. EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN

Para analizar la comprensión que de un cierto objeto matemático poseen un grupo de sujetos, es necesario antes de nada responder a las siguientes preguntas: *qué* es lo que entendemos por comprensión de un cierto objeto matemático y *qué* y *cómo* hacer para lograr dicha comprensión (Godino, 1996). En el modelo de comprensión propuesto por Godino (1996), se tienen en cuenta dos ejes: uno *descriptivo*, que indica los aspectos o componentes de los objetos de los cuales queremos evaluar su comprensión, y otro *procesual* que indica las fases o niveles necesarios en el logro de una "buena" comprensión.

En el modelo de Godino (1996) se resalta que la comprensión personal de un determinado objeto por parte de un sujeto, no puede ser observada directamente, pero lo que sí puede observarse directamente son las prácticas personales (significado personal). Por lo tanto, en el Enfoque Ontosemiótico (dentro del cual se desarrolla el modelo de comprensión citado) la evaluación de la comprensión sería el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales. Esta evaluación, por tanto, depende de la institución desde donde se lleva a cabo, ya que es la que determina si un sujeto "comprende" el significado de un objeto. Las prácticas observables son los indicadores empíricos que nos permiten realizar esta evaluación. En esta investigación, en el capítulo 4, seguiremos este sistema para evaluar los conocimientos matemáticos que futuros profesores de Educación Primaria tienen sobre los gráficos estadísticos, observando sus prácticas personales al realizar un proyecto estadístico.

A este respecto, Batanero y Díaz (2005) recuerdan los diferentes procesos de inferencia llevado a cabo en un proceso de evaluación y que condiciona la generalizabilidad de los resultados. La evaluación supone un muestreo de estudiantes, preguntas y circunstancias, cada una de las cuáles afecta a la posibilidad de inferencia.

### 2.3.6. IDONEIDAD DIDÁCTICA Y SUS TIPOS

Otro concepto que usamos en nuestro trabajo es la noción de idoneidad didáctica, que se introduce en el EOS para abordar de manera sistemática los problemas relacionados con el diseño, desarrollo y evaluación de propuestas de intervención en el aula. A partir de esta noción los autores proponen criterios para evaluar las situaciones didácticas y procesos de enseñanza y aprendizaje. Usaremos este concepto en el capítulo 5, donde se propone a los futuros profesores que evalúen la idoneidad didáctica de un proceso de estudio, con la finalidad de evaluar sus conocimientos didácticos del contenido estadístico.

Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) indican que el objetivo de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas está en la base de cualquier esfuerzo de investigación e innovación. Por ello tratan de buscar criterios que ayuden a determinar en qué medida un proceso de estudio o instrucción matemática reúne ciertas características que permitan calificarlo como "idóneo" para los fines pretendidos y adaptado a las circunstancias e instrumentos disponibles. Godino, Contreras y Font (2006) definen la idoneidad didáctica como articulación de seis componentes:

- *Idoneidad epistémica*: Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Sería si los significados de los objetos presentes en un proceso son adecuados desde el punto de vista matemático.
- *Idoneidad cognitiva:* Grado en que los significados pretendidos/ implementados son

asequibles a los alumnos, así como el grado en el que los significados personales logrados por los alumnos son los significados pretendidos por el profesor.

- *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional:* Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional:* Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica:* Grado de adecuación del proceso de estudio llevado a cabo con respecto a los currículos oficiales, al proyecto educativo del centro, a la sociedad, etc.

El análisis de la idoneidad epistémica comienza por la definición de un significado de referencia para el proceso de estudio matemático (efectivo o potencial) que se desea analizar (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009). En nuestro caso, el significado de referencia que usarán los futuros profesores al evaluar la idoneidad epistémica será el contenido estadístico fijado en los Decretos de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006a) para la Educación Primaria.

Las situaciones-problemas han de ser representativas de las incluidas en el significado de referencia y permitir contextualizar los conocimientos pretendidos, ejercitarlos y aplicarlos a situaciones relacionadas. Desde el punto de vista de los procesos, una idoneidad alta estará asociada a la presencia de momentos de "generación del problema" en que los propios alumnos tengan ocasión de formular o reformular los problemas planteados. Los lenguajes utilizados deben ser una muestra representativa de los identificados en el significado de referencia; también se tienen en cuenta las transformaciones, traducciones y conversiones entre los mismos. Las definiciones, proposiciones y procedimientos son representativos de los identificados en el significado de referencia y adaptados al nivel, capacidades y recursos disponibles. El proceso incluye momentos en los que se generan y negocian las reglas mejor adaptadas a las circunstancias, que son explicadas y justificadas mediante argumentos representativos y adaptados (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

Según los autores, el juicio positivo sobre la idoneidad cognitiva de un proceso de estudio se basará en los siguientes criterios: (a) la existencia de una evaluación inicial de los significados personales de los estudiantes, a fin de comprobar que los significados pretendidos suponen un reto manejable, (b) la existencia de adaptaciones curriculares que tengan en cuenta las diferencias individuales y (c) que los aprendizajes logrados estén lo más próximos posible a los significados institucionales pretendidos/ implementados.

La idoneidad interaccional, según Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005), se valora por la medida en que las configuraciones didácticas posibilitan que el profesor y los alumnos identifiquen conflictos semióticos *potenciales* (a priori), *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales* (a posteriori) y resolver dichos conflictos mediante la *negociación de significados.*

Diremos que un proceso de estudio tiene idoneidad emocional alta en la medida en que las configuraciones didácticas motiven a la acción y participación a los alumnos; esto supone la creación de un ambiente de trabajo que tenga en cuenta los intereses, afectos y emociones de los alumnos hacia las matemáticas.

La idoneidad mediacional del proceso de estudio será alta si el profesor y los estudiantes tienen a su alcance los medios materiales mejor adaptados a los significados pretendidos. La planificación y el desarrollo del proceso de estudio se valorarán positivamente si la cantidad y gestión del tiempo dedicado al estudio es adecuado a los objetivos de aprendizaje.

La idoneidad ecológica es el grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social-profesional, etc., en que se implementa. También se tendrán en cuenta las conexiones que se establezcan con otros contenidos (significados) intradisciplinares (otros temas de matemáticas) e interdisciplinares (otras materias del programa de estudios.

## 2.4. MARCO CURRICULAR

### 2.4.1. INTRODUCCIÓN

Como se ha indicado, nuestro estudio aborda la formación de los futuros profesores de Educación Primaria. El marco curricular, por tanto, ha de tener en cuenta, tanto la propia formación del profesor, como las orientaciones curriculares para la Educación Primaria. Aunque la enseñanza de la estadística ha estado presente en la escuela en las últimas décadas, recientemente se introduce en la Educación Primaria y su enseñanza se hace más activa, para proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia (e.g., NCTM. 2000; MEC 2006 a y b, Consejería de Educación, 2007 a y b). Observamos también un incremento de los contenidos de estadística que se recomiendan en todos los ciclos educativos.

A continuación vamos a analizar los contenidos que se incluyen en estos decretos y también en los estándares del NCTM (2000) y el proyecto GAISE (Franklin y cols., 2005), puesto que estos documentos han inspirado en gran medida los decretos españoles en lo que se refiere a estadística. Hacemos el análisis para todo el bloque de estadística porque al trabajar con gráficos se usan también la mayoría de los contenidos del bloque: aleatoriedad, dato, variables, valor de la variable, frecuencias, medidas de posición central y dispersión.

### 2.4.2. EL DECRETO DE ENSEÑANZA MÍNINAS

El incremento de los contenidos de estadística que se recomiendan en la escuela primaria, se hace patente en los Decretos de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006a). En dichos Decretos se dispone que la Educación primaria tiene carácter obligatorio y gratuito y comprende seis cursos organizados en tres ciclos de dos cursos cada uno, debiéndose incorporar los alumnos al primer curso el año natural en el que cumplan seis años. Una de las áreas de conocimiento obligatorias que se impartirán en los tres ciclos es la de Matemáticas, y se observa que desde primer ciclo se incluye dentro de dicha área un nuevo Bloque (Bloque 4) llamado *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*, presentando los siguientes contenidos:

*Primer Ciclo:*

- Gráficos estadísticos: Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos a los niños. Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos.
- Azar y probabilidad: Carácter aleatorio de algunas experiencias. Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.

*Segundo Ciclo:*

- Gráficos y tablas: Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos. Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.
- Azar y probabilidad: Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar.

*Tercer Ciclo:*

- Gráficos y parámetros estadísticos: Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. La media aritmética, la moda y el rango, aplicación a situaciones familiares.
- Azar y probabilidad: Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso

En relación a estos contenidos se indica que:

Los contenidos adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Igualmente el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y ayudar a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones, normalmente sobre cuestiones que estudian otras áreas. Tienen especial importancia en el bloque los contenidos actitudinales, que favorecen la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y permiten descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria. A su vez, los contenidos de este bloque deben iniciar en el uso crítico de la información recibida por diferentes medios (MEC 2006a p. 43096).

Observamos que, además de los contenidos tradicionales, y de iniciar antes la enseñanza de los temas estadísticos, hay también un cambio en el enfoque, recomendándose el desarrollo del razonamiento estadístico de los niños y la presentación de la estadística como un instrumento para resolver problemas y no sólo como un conjunto de técnicas. Uno de los objetivos concretos es utilizar las técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones del entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

Con respecto a los gráficos estadísticos, en el primer ciclo se comienza con interpretaciones de determinados elementos de un gráfico sencillo relacionado con fenómenos cercanos a los niños y progresivamente se pasa a los contenidos del tercer ciclo en los que se estudiarán distintos tipos de gráficos estadísticos y se deberá conseguir que los niños aprecien la importancia que tiene el poder valorar críticamente informaciones que son presentadas a través de gráficos. Además se manifiesta que la destreza en la utilización de representaciones gráficas para interpretar la información aporta una herramienta muy valiosa para conocer y analizar mejor la realidad.

Dentro del bloque de Tratamiento de la información, azar y probabilidad se proponen los siguientes criterios de evaluación:

*Primer Ciclo:*

> Realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficas de barras. Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos. Con este criterio se trata de valorar la capacidad de interpretar gráficos sencillos de situaciones familiares y verificar la habilidad para reconocer gráficamente informaciones cuantificables. (MEC, 2006a, p. 43098).

El criterio anterior también se repite en relación al segundo ciclo.

*Segundo Ciclo:*

> Recoger datos sobre hechos y objetos de la vida cotidiana utilizando técnicas sencillas de recuento, ordenar estos datos atendiendo a un criterio de clasificación y expresar el resultado de forma de tabla o gráfica. Este criterio trata de valorar la

> capacidad para realizar un efectivo recuento de datos y representar el resultado utilizando los gráficos estadísticos más adecuados a la situación. Es asimismo motivo de evaluación la capacidad para describir e interpretar gráficos sencillos relativos a situaciones familiares. (MEC, 2006a, p. 43100).

*Tercer Ciclo:* Además de repetir el criterio anterior, se incluye el siguiente:

> Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. Este criterio trata de comprobar la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, de utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... y de comprender y comunicar la información así expresada. (MEC 2006a, p. 43101).

### 2.4.3. LA JUNTA DE ANDALUCÍA

La Consejería de Educación (2007a), por su parte, remite a los contenidos de estadística cuando describe el Bloque 6 que incluye en el currículo de matemáticas. Los contenidos a tratar se encuentran recogidos en el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre: Bloque 4, *Tratamiento de la información, estadística y azar*. Los documentos citados indican las importantes conexiones de este bloque con los otros bloques temáticos y sugieren que sus contenidos sólo adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Indica que este núcleo temático está relacionado con los siguientes contenidos sobre matemáticas del Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre: Bloque 1, Números y operaciones, Bloque 2, La medida: estimación y cálculo de magnitudes y Bloque 3, Geometría.

La Consejería indica que el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de la información estadística que con frecuencia aparece en prensa y en general en los medios de comunicación. También indica la importancia de los conocimientos estadísticos ante la toma de decisiones. Se sugiere la necesidad de promover actitudes positivas en este bloque temático, que permita a las niñas y niños interpretar fenómenos de su vida cotidiana.

El documento sugiere las múltiples aplicaciones de la estadística y probabilidad en prácticamente todos los campos de la actividad humana y su amplio reconocimiento social. Ello incide en la promoción del aprendizaje de la estadística en todos los niveles educativos, para conseguir una cultura estadística que debe adquirirse progresivamente desde la educación primaria.

Como sugerencia metodológica se indica la conveniencia de utilizar tablas y gráficos tomados de medios de comunicación, Internet o publicidad, que facilitarán ejemplos suficientes y servirán para valorar la necesidad y la importancia del tema. Además de obtener conclusiones de los datos expuestos en un gráfico o en una tabla es necesario conocer los procesos previos a su representación. Abordar tareas como la planificación para la recogida de la información, utilizar técnicas de recuento y de manipulación de los datos, así como la forma para agruparlos, son tan importantes como los cálculos que con ellos puedan realizarse. Se sugiere el interés del trabajo con proyectos estadísticos, relacionados con temas de interés para el alumno, abordando el proceso de un estudio estadístico completando todos los pasos previos al análisis de resultados para exponer las conclusiones que de ellos se deduzcan.

La evaluación considerará, además de los aspectos propios de la clasificación y representación de datos, la capacidad para deducir relaciones entre ellos y, sobre todo, la deducción de conclusiones y estimaciones a partir de los datos representados. En los estudios estadísticos se debe valorar que el alumnado sea capaz de diseñar y utilizar técnicas adecuadas para la obtención de datos, de cuantificar, representar y sacar conclusiones del trabajo realizado.

### 2.4.4. NCTM Y PROYECTO GAISE

Existen dos documentos que han sido fundamentales para la mejora de la educación estadística en los Estados Unidos: Los principios y estándares para la matemática escolar (NCTM 2000), y el proyecto GAISE (Franklin y cols., 2005). Pero estos documentos no sólo han tenido un impacto en ese país, sino que han influido en el cambio de otros currículos, que han seguido las directrices contenidas en ellos. Por este motivo, se hace a continuación un breve resumen de su contenido en relación a la estadística.

**NCTM (2000)**

Los Estándares del National Council of Teachers of Mathematics justifican el bloque de Análisis de Datos y Probabilidad por la cantidad de datos disponibles para la toma de decisiones en los diversos campos profesionales y en la vida diaria.

Indican que con frecuencia la información estadística se utiliza de manera incorrecta para orientar la opinión pública en una determinada dirección o dar una imagen sesgada de la efectividad de algunos productos comerciales. Esto lleva a que es necesario que los ciudadanos tengan una base suficiente sobre el análisis de datos y algunas nociones elementales de probabilidad para poder razonar de manera estadística; destreza necesaria para convertirse en ciudadanos informados y consumidores inteligentes.

Respecto a la representación gráfica se incluye en los diferentes niveles educativos. Para el grado 2 (nivel K-2) propone que el currículo incluya experiencias con análisis de datos para que los alumnos sean capaces de:

- Plantear preguntas y recoger datos sobre ellos mismos y su ambiente.
- Clasificar objetos de acuerdo a sus atributos y organizar datos sobre los objetos.
- Representar datos usando objetos concretos, dibujos y gráficos.
- Describir partes de los datos y el conjunto de datos como un todo, indicando qué muestran los datos.

Se indica que las actividades informales de clasificación y recuento pueden proporcionar un inicio de la comprensión y análisis de los datos por parte de los niños. Se animará a los niños a plantearse preguntas, organizar las respuestas y crear representaciones para sus datos, así como a razonar y comprobar sus ideas comparándolas con los datos.

En los grados 3 a 5 los niños deben ser capaces de:

- Diseñar investigaciones para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de recogida de datos afectan al conjunto de datos.
- Recoger datos de observación, encuestas y experimentos.
- Representar datos en tablas, gráficos de línea, puntos y barras.
- Reconocer las diferencias al representar datos numéricos y categóricos.
- Usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos.

- Comparar distintas representaciones de los mismos datos y evaluar qué aspectos importantes del conjunto de dato se muestra mejor con cada una de ellas.
- Proporcionar y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos y diseñar estudios para estudiar mejor las conclusiones y predicciones.

Los niños han de aprender a decidir si sus datos proporcionan la información necesaria para responder sus preguntas. Podrían recoger sus propios datos dentro del aula o usar otros disponibles en la escuela o en la ciudad, por ejemplo, datos del censo o sobre el tiempo o datos disponibles en Internet. La experiencia con una variedad de gráficos les permitirá comprender los valores en los ejes horizontal y vertical, la utilidad de las escalas y cómo representar el cero en una gráfica. Los niños deberían también usar software y ordenadores que les ayude a representar gráficos, por ejemplo, las hojas de cálculo.

**Proyecto GAISE**

Este proyecto (Franklin y cols., 2005) está dirigido a dos grupos de estudiantes: para la educación K-12 y para estudiantes en cursos preuniversitarios. Fueron elaborados por la Asociación Americana de Estadística y el National Council of Teachers of Mathematics. En relación al periodo K-12 (desde preescolar hasta final de la secundaria), se indica que cualquier curso de estadística debe tener como principal objetivo ayudar a los estudiantes a aprender los elementos básicos del razonamiento estadístico, que son los siguientes:

- *La necesidad de datos.* Reconocer la necesidad de basar las decisiones personales en la evidencia (datos), además de reconocer los problemas y peligros que pueden surgir al actuar sobre supuestos que no están respaldados por datos.
- *La importancia de generar buenos datos*. Reconocer la dificultad de conseguir datos de calidad, resaltando que en ocasiones es necesario emplear bastante tiempo en la obtención de datos de buena calidad y este tiempo no debe considerarse como perdido.
- *La presencia de la variabilidad.* Reconocer que la variabilidad está presente en muchos fenómenos cotidianos. La variabilidad es la esencia de la estadística como disciplina y no puede ser entendida solamente a través de su estudio, sino que debe ser experimentada.
- *La cuantificación y explicación de la variabilidad.* Reconocer que la variabilidad puede ser medida y explicada, tomando en consideración la aceptación de la idea de aleatoriedad y variable aleatoria: estudiando y analizando los promedios y estadísticos

de dispersión de dichas variables y por medio de una variedad de modelos matemáticos y estadísticos.

- *Más datos y conceptos y menos fórmulas.* Cualquier curso en estadística puede ser mejorado poniendo más énfasis en los datos y conceptos, y menos en los algoritmos. En la mayor medida de lo posible, se debe dedicar más tiempo a actividades de interpretación de cálculos estadísticos y gráficos.
- *Fomento del aprendizaje activo.* Los profesores de estadística deberían basarse mucho menos en las lecciones magistrales y mucho más en otras opciones tales como proyectos estadísticos, ejercicios de laboratorio y resolución de problemas en equipo y discusión y debates sobre las actividades y resultados de las mismas. Unos de los objetivos sería que los estudiantes tuviesen una participación más activa.

A raíz de estudiar dichos documentos, se concluye que el currículo norteamericano es muy avanzado en lo que se refiere a estadística y se supone que al ingresar en la universidad los estudiantes comprenden los rudimentos de la estadística descriptiva y análisis de datos. Este currículo ha tenido mucha influencia en el desarrollo del actual currículo de Educación Primaria en España, por lo que sus recomendaciones debieran tenerse en cuenta en la formación de profesores.

### 2.4.5. LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LOS LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA

El análisis realizado de las orientaciones curriculares muestra la importancia dada a los gráficos en la educación primaria. Un último nivel de análisis es el de los libros de texto que, en última instancia, concretizan el currículo y proporcionan a los profesores apoyo en su labor docente. Desde las orientaciones curriculares al aula, hay toda una labor que los autores de los textos realizan de secuenciación de contenidos y contextualización en actividades que les den sentido.

Respecto a las orientaciones sobre cómo poder introducir los distintos gráficos estadísticos en la escuela, Ragencroft (1992) afirma que es muy importante estudiar en el orden en qué deben introducirse estos en las aulas. Los nuevos libros de texto tratan de adaptarse a las directrices de los Decretos de Enseñanzas Mínimas y comienzan a incluir actividades relacionadas con los gráficos estadísticos desde el primer ciclo.

En esta sección analizaremos una serie completa de textos de primaria (Santillana, colección “un paso más”), para mostrar un ejemplo de la forma en que los contenidos de los Decretos de Educación Primaria han sido interpretados por los autores. Aunque, debido a que sólo analizamos una serie es difícil generalizar los resultados, nos parece importante mostrar un ejemplo del material con que los futuros profesores de Educación Primaria podrían encontrarse en su futuro trabajo profesional, al tratar de explicar el tema de los gráficos estadísticos. Los textos analizados son los correspondientes a los niveles comprendidos desde 1º a 6º de Educación Primaria, cuyos autores son Mercedes Garín y Magdalena Rodríguez y han sido publicados en los años 2005 y 2006.

Los contenidos relacionados con la enseñanza de los gráficos incluidos en la citada colección son los siguientes:

- *Primer curso.* Gráficos de barras, interpretación y representación. Tablas. Interpretación y realización. Problemas de suma y resta buscando los datos en un gráfico de barras o una tabla.
- *Segundo curso.* Interpretar y representar datos en gráficos de barras. Interpretar y representar datos en gráficos de barras de dos características. Interpretar un pictograma.
- *Tercer* curso. Coordenadas de casillas en una cuadrícula. Gráficos de barras de una característica. Gráficos de barras de dos características. Gráficos de puntos. Pictogramas.
- Cuarto *curso.* Coordenadas de puntos en una cuadrícula. Gráficos de barras de dos y de tres características. Interpretar gráficos lineales. Representar datos en gráficos lineales. Interpretar pictogramas. Representar datos en un pictograma. Buscar datos en un gráfico.
- *Quinto curso.* Gráficos de barras de dos y tres características. Interpretar gráficos lineales de dos características. Representar datos en gráficos lineales de dos características. Interpretar pictogramas. Representar datos en un pictograma. Buscar datos en un gráfico.
- *Sexto curso.* Gráficos lineales de dos o tres características. Pictogramas. Histogramas. Pirámides de población. Interpretar gráficos de sectores. Representar datos en gráficos de sectores.

En cuanto a los tipos de gráficos incluidos, presentamos un resumen en la tabla 2.4.1.

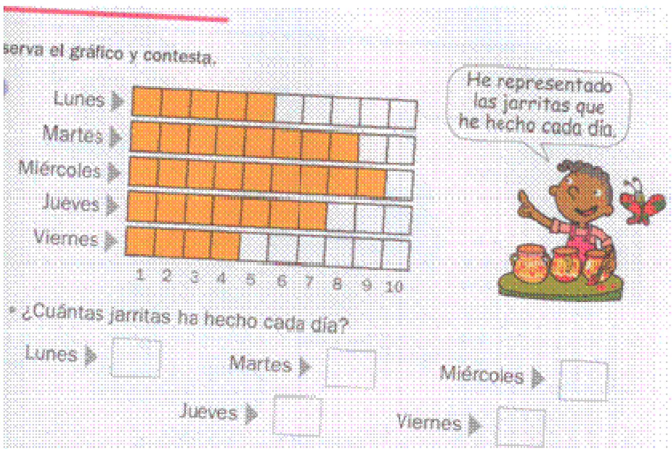
Tabla 2.4.1. Tipos de gráficos y actividades incluidos en la serie "Un paso más"

| | 1º | 2º | 3º | 4º | 5º | 6º |
|---|---|---|---|---|---|---|
| G. Barras | Leer, Completar, Interpretar. | Leer, interpretar, completar, pasar a tabla. | Leer, representar, interpretar. | Pasar a gráfico lineal. | | |
| G. Barras dobles | | Leer, interpretar | Leer, interpretar | Representar Pasar de tabla a gráfico | Pasar a gráfico lineal doble | |
| G. Barras triples | | | | Leer, interpretar, completar | Interpretar, Pasar de tabla a gráfico | |
| Pictograma | Leer | Leer, interpretar | | Pasar de tabla y de gráfico de barras a pictograma | Pasar de tabla y de gráfico de barras a pictograma | |
| Pictogramas múltiples | | | | | | Leer, interpretar, pasar tabla a pictograma |
| Coordenadas cartesianas; gráficos puntos | | | Leer representar puntos; escribir las coordenadas | Leer, identificar puntos con iguales coordenadas | | |
| Gráficos lineales | | | | Leer, construir, interpretar, pasar a tabla, | | |
| Gráficos lineales dobles o triples | | | | | Leer, construir, interpretar, pasar de tabla a gráfico y viceversa | Leer, interpretar, pasar de tabla a gráfico y viceversa |
| Histogramas | | | | | | Leer, pasar a tabla y viceversa |
| Pirámides de población | | | | | | Leer, interpretar, pasar de tabla a pirámide |
| Gráfico de sectores | | | | | | Leer, construir interpretar, pasar a tabla y viceversa |

En la anterior tabla (tabla 2.4.1) observamos que, desde primer curso se incluyen actividades sencillas de lectura de gráficos de barras y pictogramas y también alguna actividad de construcción e interpretación. En segundo curso se incluye actividad de cambio de representación de gráfico a tabla. El tipo de gráficos y las actividades se van haciendo más complejos en tercer curso, donde ya se incluyen los gráficos de barras dobles y gráficos de puntos con una introducción a las coordenadas. Los gráficos lineales se incluyen desde cuarto curso, ampliando el número de actividades de todos los gráficos ya conocidos, con lectura, interpretación y cambio de una representación a otra o a representación tabular. En quinto curso se inician los gráficos múltiples de líneas y en sexto las pirámides de población y diagrama de sectores.

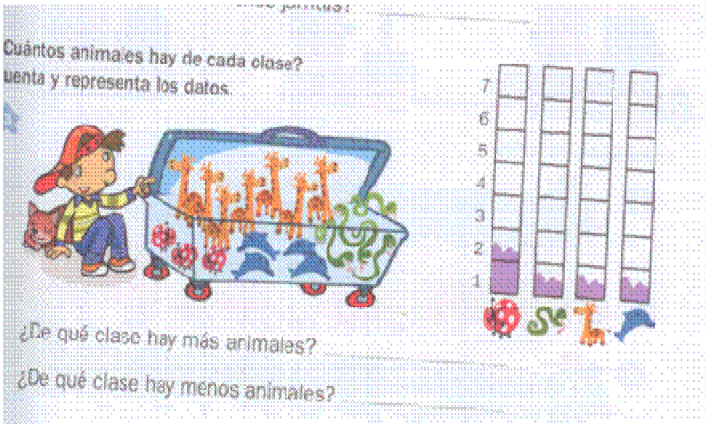
En primer curso estos gráficos son muy rudimentarios (ver Figura 2.4.1) y se han discretizado. En este ejemplo, por medio de cuadrados que el alumno debe contar (en caso de lectura) o colorear (en caso de construcción del gráfico). Mientras en la actividad mostrada en la figura 2.4.1 el alumno sólo debe leer el gráfico a un nivel elemental (leer los datos, según Curcio, 1989), ya en la actividad mostrada en la figura 2.4.2, el alumno ha de hacer un recuento de datos clasificándolos, construir el gráfico coloreando los cuadros y hay una actividad de interpretación, pues se pregunta por el más frecuente lo que requiere una comparación de los datos (nivel leer entre los datos de Curcio, 1989).

Figura 2.4.1. Ejemplo de actividad de lectura de gráfico (Santillana, 1º curso, p. 107)



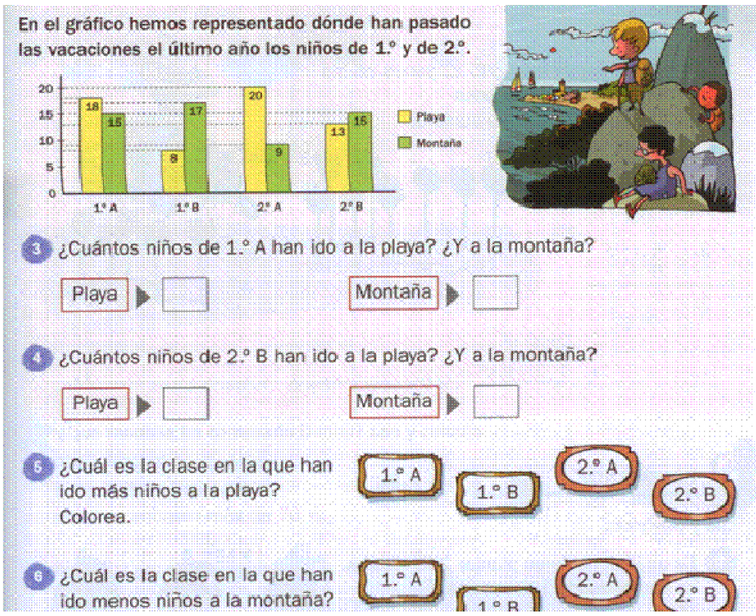

Progresivamente se van formalizando los gráficos y ya en segundo curso se incluye gráficos de barras más abstractos (Ver figura 2.4.3) y se amplía el número actividades que implican un nivel de lectura “leer entre los datos” en la categorización de Curcio (1989).

Figura 2.4.2. Actividad de lectura e interpretación de gráficos (Santillana, 1º curso, p. 107)



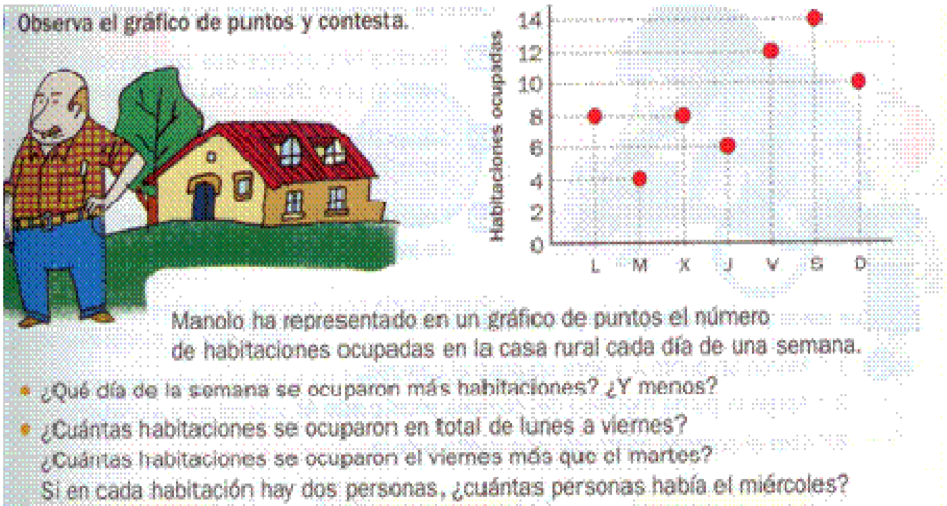

En la figura 2.4.3 observamos una actividad sobre un diagrama de barras doble, que implica la lectura e interpretación de una representación simultánea de dos variables estadísticas. Además la actividad llega al nivel “leer entre los datos”, pues para ver la clase donde han ido más niños a la playa, hay que leer el gráfico sumar todos los datos para cada una de las dos clases y finalmente compara entre sí.

Figura 2.4.3. Lectura e interpretación de gráfico de barras (Santillana, 2º curso, p. 28)



Los gráficos de puntos se introducen ya desde tercer curso, comenzando con la exposición de las coordenadas cartesianas. En la Figura 2.4.4 se presenta una actividad para este nivel educativo en el que el alumno ha de leer puntos en una representación cartesiana. Esta actividad supone la coordinación de los valores de dos variables y la representación sintética de cada par de valores (par de coordenadas) por un solo punto. La sustitución de pares de valores de la variable bidimensional por puntos permite el trabajo con la geometría, por ejemplo, detectar distancias entre puntos o forma aproximada de la nube de puntos (recta, curva). Aunque esta solución es elegante y da una gran potencia matemática, para el niño puede suponer una fuente de posibles dificultades. Observamos que además de leer el gráfico se incluyen preguntas del segundo nivel de Curcio (1989), pues implican comparación y operaciones con los datos del gráfico.

Figura 2.4.4. Interpretación de gráfico de puntos (Santillana, 3º curso, p. 152)




Encontramos en el cuarto y quinto curso actividades de cambio de una representación a otra, tanto en gráficos univariantes (Figura 2.4.5) como bivariantes (2.4.6).

Estas actividades de traducción al pasar de un gráfico a otro, tanto en el caso univariante como en el bivariante, permitirán comprender la ventaja de un gráfico frente a otro, pero supone el dominio de cada tipo de gráfico. Implican un proceso de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999), al poner de manifiesto las diferencias al pasar de una representación a otra.

Figura 2.4.5. Cambio de una representación a otra: caso univariante (Santillana, 4º curso, p. 126)

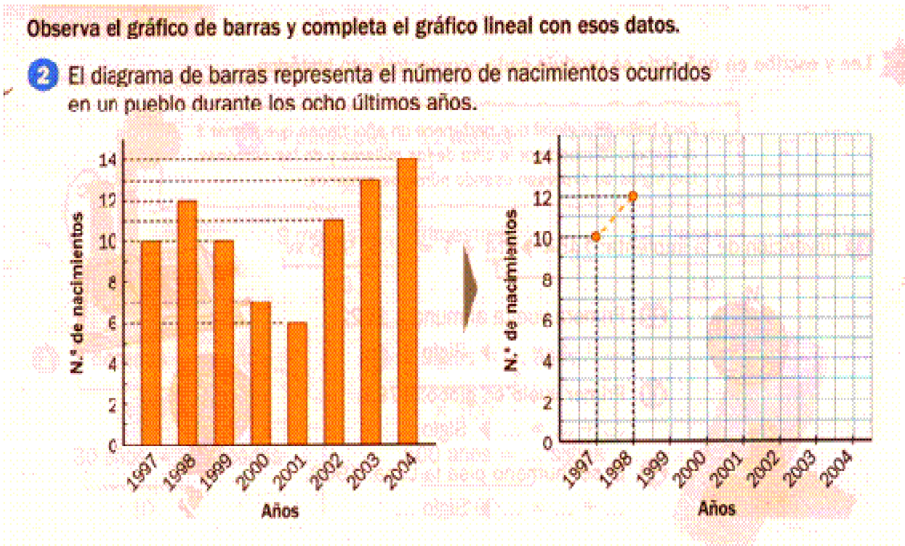
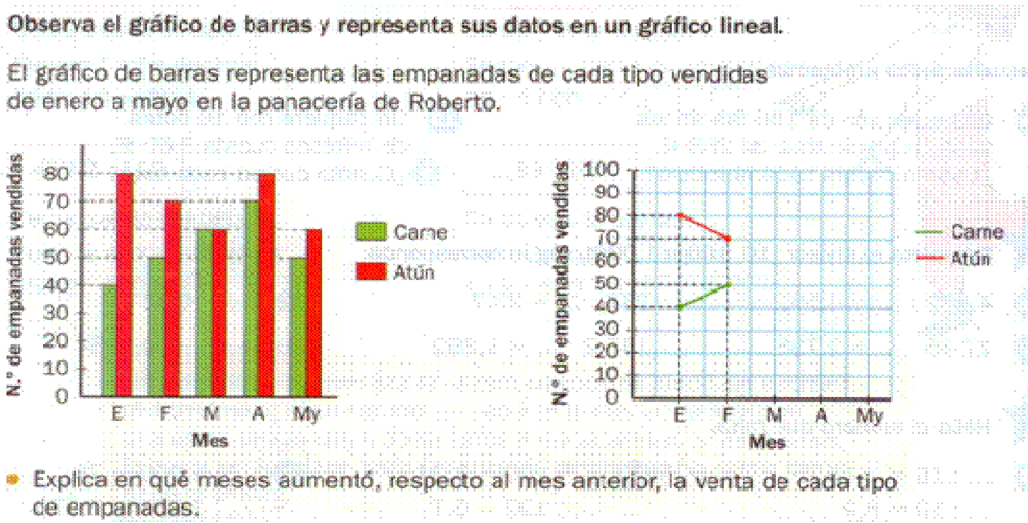


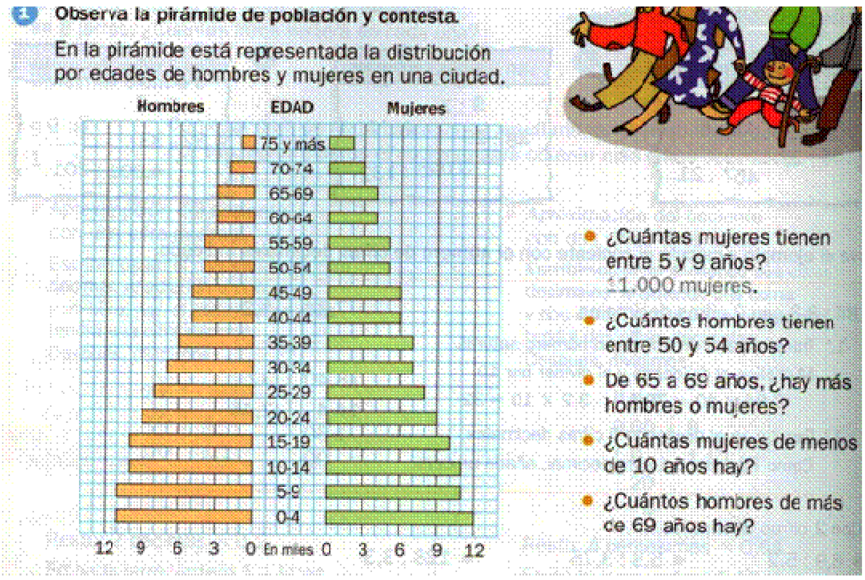

Figura 2.4.6. Cambio de una representación a otra: caso bivariante (Santillana 5º curso, p. 126)




Ragencroft (1992) observa que hay una tendencia por parte de los profesores a repetir durante el primer año de escuela Secundaria (alumnos de 11-12 años) el trabajo ya realizado en la escuela primaria sobre los gráficos de barras, para de repente, a partir del segundo año introducir una gran variedad de distintos gráficos estadísticos que implican nuevos conceptos. Por lo tanto, puede llegar a ocurrir que los alumnos muestren dificultad ante la comprensión de los distintos gráficos nuevos para ellos, entre otras cosas porque no hayan sido utilizados previamente en la escuela primaria. En la serie de libros analizados, en el caso del 6º curso de primaria que son alumnos de las edades señaladas por Ragencroft, se introducen gráficos nuevos y de complejidad superior a la trabajada en los gráficos de cursos anteriores.

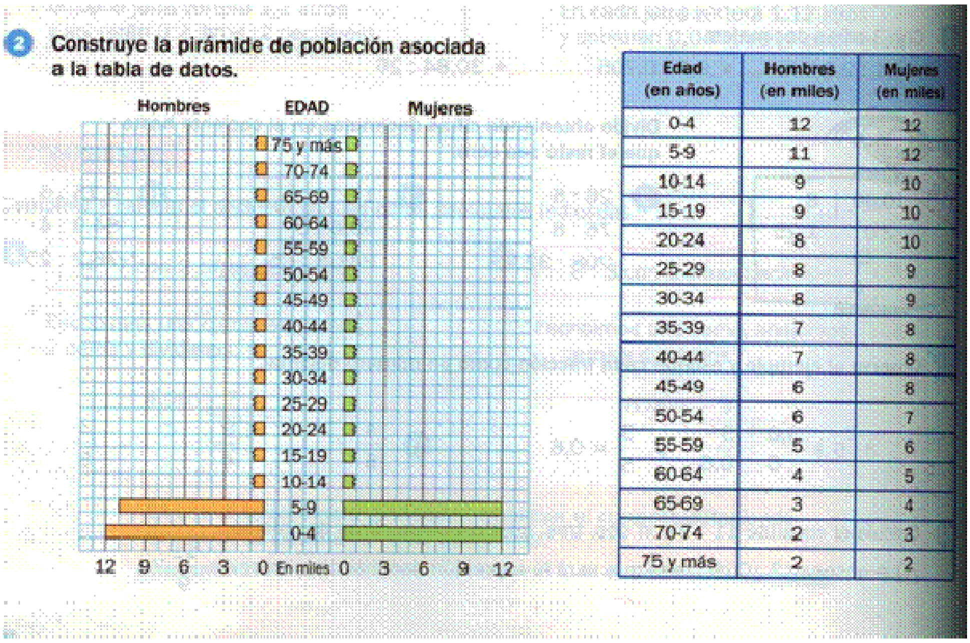
Así, observamos, que, además de los gráficos ya trabajados en los niveles anteriores, la serie "un paso más" introduce las pirámides de población, tanto en lo que se refiere a su interpretación (Figura 2.4.7), como su construcción (Figura 2.4.8). Esta es una gráfica ya notablemente compleja, pues representa dos distribuciones simultáneamente en el mismo gráfico. En el capítulo 4 indicaremos que estos gráficos tienen una mayor complejidad semiótica y por tanto son más difíciles de interpretar. Además en el caso de la pirámide de población, otra dificultad añadida es que cada categoría se refiere a un intervalo de valores y no a valores aislados.

Figura 2.4.7. Interpretación pirámide de población (Santillana, 6º curso, p.128)




Las pirámides de población son en realidad un par de histogramas esquemáticos. Por ello puede plantear problemas de interpretación, por ejemplo, en qué categoría se incluya a una persona de 59 años y tres meses. Hay un convenio implícito que estas personas se incluirían en la categoría 55-59, pero esto puede no ser claro para el estudiante y plantear un conflicto semiótico. El autor del libro de texto trata de solventar este posible conflicto, dando la tabla ya construida antes de pedir la construcción de la pirámide de población (Figura 2.4.8), pero este conflicto posiblemente aparezca si no se proporciona dicha tabla.

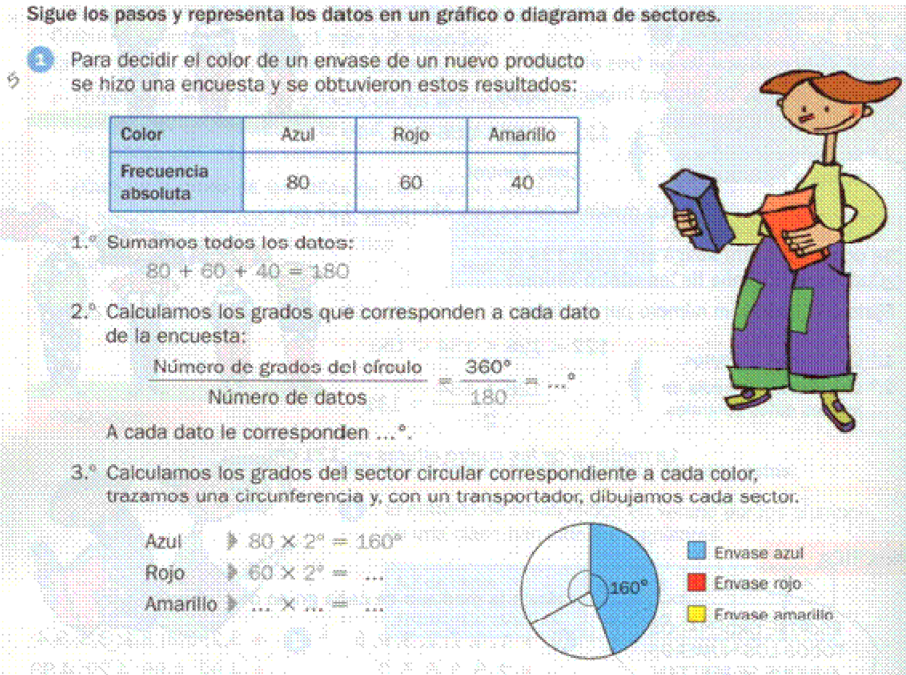
Figura 2.4.8. Construcción pirámide de población (Santillana, 6º curso, p.128)




| Edad (en años) | Hombres (en miles) | Mujeres (en miles) |
|---|---|---|
| 0-4 | 12 | 12 |
| 5-9 | 11 | 12 |
| 10-14 | 9 | 10 |
| 15-19 | 9 | 10 |
| 20-24 | 8 | 10 |
| 25-29 | 8 | 9 |
| 30-34 | 8 | 9 |
| 35-39 | 7 | 8 |
| 40-44 | 7 | 8 |
| 45-49 | 6 | 8 |
| 50-54 | 6 | 7 |
| 55-59 | 5 | 6 |
| 60-64 | 4 | 5 |
| 65-69 | 3 | 4 |
| 70-74 | 2 | 3 |
| 75 y más | 2 | 2 |

Finalmente se introducen en sexto curso los gráficos de sectores (Figura 2.4.9) que suponen un cambio en los anteriores pues la frecuencia ahora se representa mediante áreas y no mediante longitudes.

Figura 2.4.9. Construcción gráfico de sectores (Santillana, 6º curso, p. 171)




| Color | Azul | Rojo | Amarillo |
|---|---|---|---|
| Frecuencia absoluta | 80 | 60 | 40 |

El cálculo de la amplitud de los sectores, además supone un ejercicio en el manejo de las proporciones y pone en relación datos estadísticos, frecuencia, proporcionalidad, amplitud angular, área y sector circular. Ragencroft (2002) indica que el trabajo con gráficos de sectores puede utilizarse en la transición de representar las frecuencias con las alturas a representarlas con áreas en los histogramas, y esto es debido a que en los diagramas de sectores el área de un segmento circular está relacionada con el ángulo que abarca que es una medida unidimensional. Pero muchas veces el trabajo con gráficos de sectores se aplaza debido a la dificultad que parece tener el calcular y dibujar ángulos.

Ragengroft (2002) sugiere que uno de los principales problemas para los alumnos es el uso de escalas. Por ello sugiere hacer mostrar a los alumnos la necesidad de la escala por medio de ejemplos. En los libros analizados, la escala viene impuesta en el mismo ejercicio, por lo que sería necesario realizar otros en que los alumnos deben elegir ellos mismos las escalas. Aunque muchos alumnos son capaces de dibujar o leer con una escala dada, la elección de esta para un determinado conjunto de datos supone un salto conceptual que no hay que subestimar. Por ello es aconsejable que los alumnos puedan tomar sus propias decisiones en la elección de las escalas, contando siempre con los consejos y ayudas necesarias según Ragencroft.

Según la autora, resulta difícil elegir en qué orden son introducidos los distintos gráficos, porque, hay discrepancia entre distintos autores. Uno de los mayores desafíos es el uso de áreas en lugar de alturas para representar las frecuencias en gráficos como los histogramas y los gráficos de sectores. Vemos que en la serie de Santillana, se ha tenido en cuenta este punto, dejando el gráfico de sectores al final de la etapa.

Los histogramas son mucho más difíciles conceptualmente y por lo tanto causan mayores problemas a los estudiantes. Otros gráficos como el de tallo y hojas desarrollados por Tukey (1977) podrían también introducirse al principio de la Secundaria. Ragencroft (1992) también afirma que, una vez que se han introducido los gráficos “básicos”, hay gráficos muy interesantes con los que trabajar en la escuela secundaria, por ejemplo los gráficos de cajas, que una vez calculados la mediana y los cuartiles, son fáciles de representar y proporcionan una herramienta muy útil en la comparación de distintos conjuntos de datos o distribuciones. Ninguno de estos gráficos se incluye en la serie analizada, pero podría hacerse en los últimos cursos de educación primaria, siguiendo consideraciones como las aportadas por Ragencroft.

### 2.4.6. LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS

El estudio de los gráficos estadísticos elementales también se incluye en la preparación de futuros maestros, dentro de la asignatura "Matemáticas y su Didáctica", que con carácter troncal se ha incluido hasta la fecha en la mayor parte de los planes de estudio de Magisterio, tanto en la especialidad de Educación Primaria como en otras especialidades, aunque con un número menor de créditos. En los nuevos planes de estudio, asignaturas de contenido matemático, con diversa denominación también tratan estos contenidos.

Con mayor o menor extensión se dedica uno o dos temas al estudio de la estadística y la probabilidad en dicha asignatura. Se comienza el estudio de la estadística con la consideración sobre diferentes tipos de datos, los instrumentos, métodos (observación, encuesta y medida) y fuentes de datos utilizables en la enseñanza. Se pasa seguidamente al estudio de los métodos de clasificación, recuento y representación de datos, incluyendo tablas simples y de doble entrada, puesto que la lectura de estas se incluye en el segundo ciclo de educación primaria.

También se presta especial atención a los gráficos estadísticos elementales, su correcta construcción y lectura, un tema en que los futuros profesores muestran gran dificultad. Por ejemplo, en la guía docente de la asignatura "Matemáticas y su Didáctica" de la Diplomatura de Magisterio, Educación Primaria, cursada por los alumnos participantes en la muestra en la Universidad de Granada se incluía el siguiente tema:

*Tema 6: INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA Y A LA PROBABILIDAD. La Estadística y sus usos. Población, muestra y variables estadísticas. Tablas y gráficos. Medidas de posición central. Medidas de dispersión. Fenómenos aleatorios. Conceptos de probabilidad. Asignación de probabilidad: regla de Laplace. La Estadística como conocimiento cultural*.

Como bibliografía de carácter general para esta asignatura se recomendaron tan sólo dos referencias, una de las cuáles es la colección Edumat-Maestros, en la cual se incluye un libro de "Estocástica para maestros" (Batanero y Godino, 2002) dedicado a la probabilidad y estadística. Respecto a la estadística trata los siguientes contenidos:

1. Estadística y sus aplicaciones: ¿Qué es la estadística? Breves notas históricas. Panorama actual. Estudios estadísticos.
2. Variables estadísticas Tablas y gráficos. Población, individuos y caracteres. Tipos

de estudios estadísticos Censos y muestras extraídas de una población. Variables estadísticas. Tablas de frecuencias. Gráficos estadísticos. Agrupación de variables en intervalos. Representación gráfica de frecuencias acumuladas, Gráfico del tronco.

3. Características de posición central y dispersión de una distribución de frecuencias. Medidas de tendencia central. Características de dispersión.

Entre los gráficos, se presentan el diagrama de barras e histograma, gráfico de sectores, diagramas y polígonos de frecuencias acumuladas y gráficos del tronco. En los ejercicios que se muestran se incluyen algunos gráficos de dispersión e histogramas adosados. Hay también ejemplos de proyectos sencillos en los que el alumno ha de realizar todo el proceso de una investigación estadística.

En la segunda referencia citada (Vallecillos, 2001) aparece el contenido *Representaciones gráficas;* en este apartado se introduce el gráfico de barras, polígonos de frecuencias y frecuencias acumuladas, gráfico de sectores, histograma, gráfico de tallo y hojas, gráficos de barras adosadas y gráficos de cajas. Respecto a ellos se plantean problemas construcción a partir de un listado de datos, pasando previamente por una tabla, traducción de uno a otro tipo de gráfico. Hay también un apartado sobre "gráficos engañosos" que alerta sobre la lectura crítica de gráficos. No se plantea el trabajo con proyectos.

En el segundo curso de la Diplomatura, en la Universidad de Granada, los alumnos participantes han cursado la asignatura "Currículo de matemáticas en la educación primaria" (4,5 créditos) de carácter eminentemente práctico y orientado a la formación didáctica del futuro profesor. Esta asignatura se imparte por última vez el curso 2010-2011 y tendrá continuación en otra de similar contenido y mayor número de créditos. Dentro de la citada asignatura se realizan actividades prácticas de análisis didáctico, una de las cuáles es precisamente la actividad que hemos utilizado en la toma de datos, y que se centra en la estadística. En los Capítulos 4 y 5 se describe con detalle esta práctica, a la que se dedica dos sesiones, la primera centrada en la resolución de un proyecto de análisis de datos y la segunda en el análisis didáctico de dicho proyecto.

Se proporciona a los estudiantes, dentro del material de apoyo un tema sobre "didáctica de la estocástica para maestros" (Batanero y Godino, 2002), que incluye los siguientes contenidos: *La estadística en la sociedad y la enseñanza obligatoria. Diseño curricular base del MEC. Principios y estándares para la matemática escolar del NCTM. Desarrollo* *cognitivo y progresión en el aprendizaje. Situaciones y recursos. Investigaciones y proyectos. Datos y fuentes de datos. Recursos en Internet. Conflictos en el aprendizaje Instrumentos de evaluación. Comprensión de tablas y gráficos estadísticos. Medidas de posición central. Características de dispersión. Ítems de evaluación. Taller de didáctica. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didáctica. Análisis de respuestas a tareas de evaluación.* Este texto no es de estudio obligado para el examen, aún así, los alumnos debieron consultarlo para la práctica que se describe en los capítulos 4 y 5.

## 2.5. CONCLUSIONES SOBRE LOS FUNDAMENTOS DEL TRABAJO

En este capítulo se ha analizado la evolución histórica de los gráficos, el marco teórico que se utilizará en el trabajo, el currículo de Educación Primaria y la formación que reciben los futuros profesores participantes en el tema "Gráficos estadísticos".

El estudio histórico muestra la rápida evolución y creciente importancia actual de los gráficos estadísticos en la propia estadística, justificado con un nuevo argumento su inclusión en el currículo. También el lento desarrollo inicial indica que la sencillez de su aprendizaje podría ser tan sólo aparente y podría requerirse un periodo dilatado de tiempo para conseguir una competencia gráfica completa.

El análisis del currículo y los libros de texto indica que los gráficos estadísticos elementales que los participantes en este trabajo podrían elaborar para resolver el proyecto planteado son objeto de enseñanza a los niños de 6 a 12 años. Por ello debiera exigirse que los futuros maestros finalizasen su preparación con unos conocimientos matemáticos suficientes, no sólo a nivel de conocimiento común del contenido, sino de conocimiento especializado en la terminología de Ball, Thames y Phelps (2005). La preparación de los futuros profesores, en el momento en que se hizo el estudio, aunque contempla estos contenidos, no dedicaba tiempo suficiente para conseguir su dominio. Es por ello importante realizar estudios de evaluación, similares al que pretendemos llevar a cabo en el trabajo, para guiar la mejora de la enseñanza en los nuevos planes de estudio.

En el capítulo también se han mostrado algunos elementos del marco teórico que se completarán más tarde a lo largo de la tesis. Este marco teórico nos ha parecido adecuado, al permitirnos realizar un análisis detallado de la actividad matemática implicada en la elaboración de los gráficos (capítulo 4) y de los conocimientos didácticos del contenido mostrados por los futuros profesores (capítulo 5).

# CAPÍTULO 3

# ANTECEDENTES

3.1. Introducción
3.2. Formación de profesores para enseñar estadística
3.2.1. Introducción
3.2.2. Modelos del conocimiento del profesor de estadística
3.2.3. Actitudes y creencias
3.2.4. Conocimientos estadísticos
3.2.5. Conocimiento didáctico
3.2.6. Conclusiones sobre los conocimientos de los profesores para enseñar estadística
3.3. Investigaciones sobre comprensión de gráficos estadísticos
3.3.1. Introducción
3.3.2. Elementos estructurales de los gráficos estadísticos
3.3.3. El gráfico como objeto semiótico complejo
3.3.4. Definiciones de la comprensión gráfica
3.3.5. Niveles de comprensión de gráficos estadísticos
3.3.6. Comprensión crítica de los gráficos
3.3.7. Errores en la lectura y construcción de gráficos
3.3.8. Gráficos en el análisis exploratorio de datos
3.3.9. Comprensión gráfica de los futuros profesores
3.3.9.1. Construcción de gráficos
3.3.9.2.Lectura y traducción de gráficos
3.3.9.3.Conocimiento didáctico del contenido gráficos estadísticos
3.4.Conclusiones sobre la comprensión de gráficos estadísticos

## 3.1. INTRODUCCIÓN

Como se ha indicado, nuestro trabajo se centra en la formación de profesores de Educación Primaria, en relación a los gráficos estadísticos y los conocimientos didácticos que los futuros profesores ponen en juego al analizar un proyecto estadístico. Para poder fundamentarlo, es necesario realizar una revisión de las investigaciones que han tratado estas temáticas o algunos puntos de las mismas. En este capítulo presentamos una síntesis de las investigaciones que sirven de base a nuestro trabajo y que pueden clasificarse en dos grandes grupos.

En primer lugar, nuestro trabajo se encuadra dentro de las *investigaciones sobre* *formación de profesores para enseñar estadística.* Los profesores tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas (Ponte, 2001). Esta razón ha llevado a un interés creciente en las últimas dos décadas por la formación de profesores, el pensamiento del profesor y su desarrollo profesional y esta temática se ha convertido en una de las principales líneas de investigación en Didáctica de la Matemática.

Al igual que en otras ramas de la matemática, el cambio curricular propuesto para la estadística sólo será efectivo cuando se pueda convencer a los profesores de que la estadística es un tema importante para sus estudiantes y que todos ellos tienen capacidad para adquirir algunos conceptos elementales sobre este tema (Gattuso, 2006). Una primera parte de nuestro estado de la cuestión resume las escasas investigaciones relacionadas con la formación de profesores para enseñar estadística. Después de hacer una introducción sobre el estado actual de la investigación en esta temática específica, se sintetizan los trabajos que se han centrado en las actitudes y creencias sobre la estadística, los conocimientos estadísticos y los conocimientos didácticos para enseñar estadística de los profesores.

En segundo lugar, nuestro trabajo se incluye en las *investigaciones sobre comprensión de gráficos estadísticos.* Al contrario que en el apartado anterior, hay una gran cantidad de investigación sobre comprensión de gráficos. En este estado de la cuestión nos restringiremos a las investigaciones sobre gráficos estadísticos, que también son bastante numerosas y que han tocado diversos puntos. En concreto, analizaremos los elementos del gráfico, su consideración como objeto semiótico complejo, los trabajos sobre la comprensión gráfica, los que definen niveles de comprensión en la lectura de gráficos o su interpretación, las investigaciones sobre errores en la construcción de gráficos estadísticos y, finalmente, las investigaciones centradas en la comprensión gráfica y formación de profesores respecto a los gráficos estadísticos.

## 3.2. FORMACIÓN DE PROFESORES PARA ENSEÑAR ESTADÍSTICA

### 3.2.1. INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la formación del profesor de matemáticas y su desarrollo profesional ha sido muy amplia en los últimos quince años. Podemos ver esta extensión en los capítulos que, sobre el tema se incluyen en diferentes "Handbooks" de investigación en educación matemática (Brown y Borko, 1992; Thompson, 1992; Llinares y Krainer, 2006; Ponte y Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007 y los cuatro volúmenes del reciente "Handbook" editado por Wood, 2008), así como en la existencia de revistas como *Journal of Mathematics Teacher Education,* y en el ICMI Study 15 sobre "La formación y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas" (Even y Ball, 2009). En España destaca la investigación sobre el tema realizada desde los grupos de investigación coordinados por Salvador Llinares, Victoria Sánchez, José Carrillo y Lorenzo Blanco, entre otros, potenciada desde el Grupo de Investigación, "Conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas" de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Todo este esfuerzo por analizar los componentes de la formación del profesor y las actividades para llevarlas a cabo ha tenido poco eco en educación estadística, aunque en España encontramos algunas tesis doctorales centradas en la formación de profesores para enseñar probabilidad, como las de Azcárate (1995) y Cardeñoso (1998), así como algunos trabajos posteriores de estos autores. Este olvido ha sido reconocido por ICMI e IASE que han promovido un "Joint ICMI/IASE Study" específicamente orientado a promover la investigación a nivel internacional sobre la educación y desarrollo profesional de profesor para enseñar estadística. Tras la conferencia del estudio, organizada en 2008 en Monterrey, México (Batanero, Burrill, Reading y Rossman, 2008), sus resultados se recogerán en Batanero, Burrill y Reading (en preparación).

Debido a la amplitud de la investigación sobre formación de profesores de matemáticas, no entramos a analizarla con detalle en este capítulo. Tan sólo nos centraremos en la escasa investigación previa sobre formación de profesores para enseñar estadística. A continuación comenzamos analizando los modelos del conocimiento del profesor aplicables al caso de la estadística, y seguidamente, los resultados de las investigaciones sobre actitudes y creencias, conocimientos estadísticos y conocimientos didácticos de los profesores o futuros profesores de estadística.

### 3.2.2. MODELOS DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE ESTADÍSTICA

La adquisición por parte de los profesores del conocimiento necesario para enseñar, la forma en que se conceptualiza dicho conocimiento, y las variables que influyen en su adquisición han recibido mucha atención. En trabajos que tratan dichos temas, aprender a enseñar se ve como un proceso activo en el que el individuo construye su conocimiento tomando como referencia su conocimiento previo y el contexto en el que desarrolla su labor (Llinares, 1998). Investigaciones en este campo tratan entre otros temas el conocimiento de las matemáticas y del contenido pedagógico específico para enseñarlas, la relación entre creencias, conocimiento y acción del profesor.

El interés por el conocimiento didáctico específico para enseñar una determinada materia, entre ellas matemáticas, es iniciado por las investigaciones de Shulman (1986). Shulman (1987), además del conocimiento de la materia impartida, reconoce la necesidad de que los profesores aprendan otros contenidos, tales como: (a) conocimientos pedagógicos generales, como los relacionados con la gestión y organización de la clase; (b) conocimiento del currículo, materiales de enseñanza y directrices curriculares; (c) conocimiento didáctico del contenido (o conocimiento pedagógico del contenido), que sería el conocimiento pedagógico específico de la materia, “conocimiento que va más allá del conocimiento de la materia en sí, hacia un conocimiento de la materia para enseñar” (Shulman, 1986, p.9); (e) conocimiento de los alumnos y de sus características; (f) conocimiento del contexto educativo; y (h) conocimiento de los objetivos, valores y fines educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos.

Especial interés en la investigación ha tenido el conocimiento didáctico del contenido (CDC) que incluye, según Shulman (1986), formas productivas de representación de las ideas a enseñar, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones de la materia que hacen a ésta comprensible por otros. Es decir, las estrategias educativas válidas para una materia específica.

El CDC conceptualiza cómo el contenido específico puede ser interpretado en una situación de enseñanza y se basa en la experiencia e ideas del profesor acerca de las matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje (Cooney, 1994). Hace referencia al:

> Conocimiento del profesor del contenido que tiene que enseñar considerándolo desde la perspectiva de la enseñanza-aprendizaje. Se centra en el conocimiento del profesor de las potencialidades y limitaciones de los diferentes modos de representación del contenido matemático como medios para hacer comprensible a los estudiantes dicho contenido y el conocimiento de las dificultades y errores más comunes de los alumnos en relación a un contenido específico (Llinares, 1998, p. 161).

Pinto (2010, p. 12) resume las características que diferentes autores han asignado al CDC de la forma siguiente:

> Estas características pueden agruparse en cuatro aspectos: (1) el CDC es contextualizado, tanto con base en la naturaleza del contenido de la asignatura, como de la instrucción; (2) consiste en la transformación, transferencia o transposición didáctica del contenido para la enseñanza (o al ámbito escolar), (3) es diferente al conocimiento de la materia y no es una simple conjunción o mezcla de pedagogía y contenido ni tampoco un modelo único de desarrollo, por lo cual requiere de características especiales para su formación y estudio con los profesores; y (4) para la formación de los profesores, se requiere la reflexión y aplicación sobre la acción, la integración de psicología y contenido, la investigación en didáctica de la disciplina y el estudio de los diferentes modos de representar el contenido a enseñar.

**Modelos sobre el conocimiento del profesor de matemáticas**

Si queremos analizar el conocimiento didáctico del profesor, se requiere un modelo de los componentes de dicho conocimiento. Varios modelos se han desarrollado para la didáctica de la matemática, algunos de los cuáles pueden ser útiles en nuestro trabajo. Ya Shulman (1986) propuso tres componentes esenciales del CDC, que posteriormente han sido analizados por muchos autores. Estos elementos, según Shulman, están ligados, ya que la mayoría de las representaciones y estrategias de enseñanza tienen relación tanto con la forma de comprender el proceso de aprendizaje de los estudiantes como con el conocimiento de la materia:

1. *El conocimiento del contenido enseñable o conocimiento de la materia* (que puede ser enseñada en un contexto escolar). El profesor necesita unos conocimientos suficientes de aquello que va a enseñar. Esta es una condición necesaria, pero no suficiente para ser un buen profesor. La investigación sobre el conocimiento del contenido matemático del profesor se orienta a analizar su naturaleza conceptual y epistemológica, sus componentes, características y el grado de conocimiento matemático (genérico o específico) que tienen los profesores, así como sus relaciones con la enseñanza y el aprendizaje y con otros dominios de conocimiento (Even, 1990, 1993).
2. *Las formas de representación o estrategias para enseñar el tema*. Este componente combina el conocimiento de las representaciones de la materia en cuestión y las estrategias educativas, tales como: analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones

y demostraciones. Las representaciones son elementos utilizados por el profesor para ayudar en la generación del conocimiento en los alumnos (Llinares, Sánchez y García, 1994) y un profesor debiera usar un amplio repertorio de representaciones y estrategias en la enseñanza, según Shulman (1986).

3. *Conocimiento del aprendizaje del estudiante*, incluyendo el conocimiento de estrategias para ayudar al alumno. Shulman indica la necesidad de que el profesor conozca los errores, dificultades, creencias y concepciones de sus estudiantes y de las condiciones necesarias para lograr transformar estas concepciones de manera adecuada y correcta.

Posteriormente a Shulman, muchos investigadores han tratado de refinar las categorías propuestas por este autor o describir otras nuevas. No pretendemos ser exhaustivos, debido a la amplitud de la bibliografía, tan sólo haremos mención a algunas propuestas útiles en nuestro trabajo.

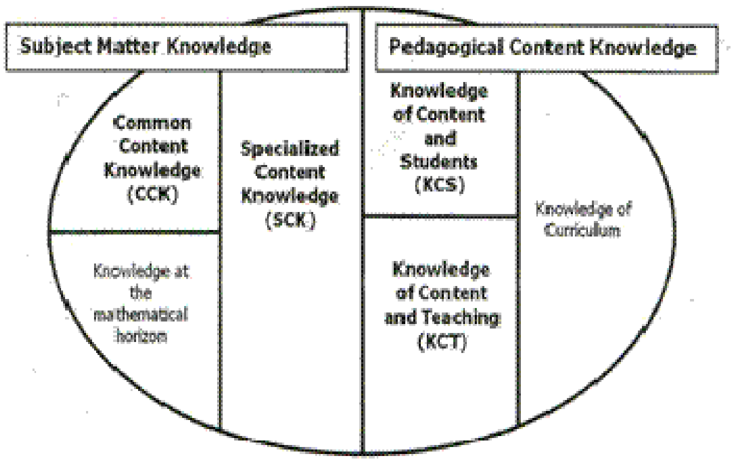
Por ejemplo, Even (1990) sugiere que el conocimiento de la materia por parte del profesor (Teachers' subject matter knowledge) acerca de un tópico específico, debe integrar cuatro aspectos: (a) el rol e importancia del tópico en matemáticas y en el currículo matemático, (b) los conocimientos aportados por la investigación y marco teórico sobre el aprendizaje, (c) conocimiento y comprensión de conceptos matemáticos en general y, en particular, del tópico específico, y (d) conocimiento de la investigación y marco teórico sobre el conocimiento de la materia del profesor y su rol en la enseñanza.

Otros estudios recientes de evaluación del conocimiento de los profesores de matemáticas, dividen el conocimiento del profesor en los siguientes componentes: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del contenido y los estudiantes (Ball, Thames y Phelps, 2005).

Más adelante Hill, Ball, y Schilling (2008) proponen tener en cuenta los siguientes componentes del conocimiento matemático del profesor: Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático. El conocimiento común del contenido (CCK) se refiere al conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un adulto con suficiente conocimiento, está capacitado; el segundo, el conocimiento especializado del contenido (SCK) indica un conocimiento especial del profesor que lo habilita para planificar y desarrollar secuencias de enseñanza del contenido. Con el "conocimiento en el horizonte matemático" se refieren a aspectos más avanzados que aportan perspectivas al profesor, por ejemplo detección de posibles desvíos respecto a las ideas matemáticas, aspectos históricos, etc.

Respecto al conocimiento didáctico del contenido, describen los siguientes componentes: Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y Conocimiento del Currículo. "El Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular" (p. 375). Incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático. Respecto al Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas. El conocimiento del currículo se refiere a las directrices curriculares, orientaciones, fines y motivaciones de las mismas, materiales curriculares y secuenciación del tema en los diferentes ciclos formativos.

Figura 3.2.1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), Hill et al., 2007 (reproducida de Delaney et al., 2008, p. 174)




Este mismo modelo se puede tener en cuenta para el caso de la estadística considerando las características específicas de la materia. En la figura 3.2.1 se muestra un esquema de los diferentes tipos de *conocimiento matemático para la enseñanza* en el modelo de Hill, Ball y Schilling, algunos de los cuales serán evaluados en nuestro trabajo. (Capítulos 4 y 5).

**Modelos específicos para la estadística**

La literatura sobre formación de profesores para enseñar estadística es mucho más escasa y reciente que la relacionada con la enseñanza de las matemáticas. Una de las primeras referencias al estudio del conocimiento del profesor para explicar estadística se hace en Godino, Batanero y Flores (1999), quienes describen los siguientes componentes básicos en dicho conocimiento:

- *La reflexión epistemológica* sobre el significado de los conceptos y procedimientos (en general objetos) particulares que se pretenden enseñar, es decir, la reflexión epistemológica sobre la naturaleza del conocimiento estocástico, su desarrollo y evolución.
- *Análisis de las transformaciones del conocimiento* para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza. Este análisis permite reflexionar sobre los diversos niveles de comprensión posibles respecto a un mismo conocimiento y valorar el nivel y forma particular en que un determinado concepto podría ser enseñado a una persona particular.
- *Estudio de las dificultades, errores y obstáculos* de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas que permitirá orientar mejor la tarea de enseñanza y evaluación del aprendizaje.
- *Análisis del currículo, situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos*. Todo ello forma parte de los recursos metodológicos disponibles para mejorar la acción didáctica.

Batanero, Garfield, Ottaviani y Truran (2000) proponen la evaluación del conocimiento del profesor de estadística como tema prioritario de investigación en su descripción de algunas líneas prioritarias en el año 2000. Al delimitar los dominios de conocimiento que debe tener el profesor de Estadística los autores se refieren al “conocimiento pedagógico en estadística”, el cual está integrado por conceptos de pedagogía, conceptos de psicología, conceptos específicos sobre concepciones erróneas, conceptos sobre intuiciones, epistemología, currículo y materiales en Estadística.

Otra mención temprana al CDC en estadística es el trabajo de Watson (2001). Sobre los tipos de conocimiento de Shulman (1986 y 1987), la autora diseñó un instrumento para medir los perfiles de competencia de los profesores en estadística. El cuestionario contiene ítems que permitían evaluar los tipos de conocimiento propuestos por Shulman, incluyendo el conocimiento de factores significativos en la enseñanza, planificación de la enseñanza, prácticas de enseñanza y evaluación de las dificultades de los estudiantes; creencias acerca de la Estadística en la vida diaria, evaluación de respuestas de estudiantes y cómo usarlas en la clase.

Batanero (2002) sugirió que la formación de profesores debe considerar tanto el conocimiento estadístico, como el conocimiento didáctico del contenido y describe como componentes básicos del mismo los mismos componentes descritos en Godino, Batanero y Flores (1999). Estos componentes son ampliados en Batanero, Godino y Roa (2004), quienes incluyen las siguientes facetas en la formación de profesores para enseñar estadística, sugiriendo también la necesidad de utilizar situaciones de tipo constructivista en la formación de los profesores:

- Reflexión epistemológica sobre el significado de los conceptos que se enseñan (por ejemplo, sobre los significados diferenciados de la probabilidad). Esta reflexión incluiría conocimiento de tipo histórico, filosófico y cultural, así como las relaciones con otros dominios de las ciencias.
- Experiencias para adaptar el conocimiento estadístico a diferentes niveles de enseñanza y a la capacidad de los estudiantes, organizando e implementando proyectos estadísticos, simulaciones y gráficos, no sólo como ayudas metodológicas sino como formas útiles de aprender y comprender la estadística.
- Capacidad crítica para analizar libros de texto y materiales curriculares.
- Predicción de las dificultades, errores, estrategias y obstáculos de los estudiantes al resolver problemas, para así desarrollar y analizar ítems de evaluación e interpretar las respuestas de los estudiantes a los mismos.
- Experiencia con buenos ejemplos de situaciones didácticas, materiales y recursos.

Sorto (2004) usa la noción de CDC de Shulman como un modelo teórico para analizar el conocimiento del profesor y valorar diferentes documentos que en Estados Unidos se utilizan para la formación de profesores (estándares nacionales y estatales para la acreditación de profesores). Para ella el CDC sintetiza los tres tipos de conocimiento que todo profesor deber tener: de la matemática, de los estudiantes y de las prácticas de instrucción.

Burgess (2008) compara varios marcos teóricos de las investigaciones en educación matemática y estadística y propone un modelo que puede ser usado para estudiar el conocimiento del profesor y el conocimiento estadístico para la enseñanza. Para ello cruza los cuatro componentes definidos por Ball, Thames y Phelps (2005) con las categorías que definen los modos esenciales de razonamiento estadístico y construye un modelo bidimensional (ver Figura 3.2.2) que es útil para proporcionar distintos perfiles de profesores según su conocimiento estadístico para la enseñanza. El modelo que propone Burgess (2006) toma en cuenta los componentes de razonamiento y pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999): reconocer la necesidad de datos, transnumeración (cambio de representaciones de esos datos para conseguir extraer información nueva de ellos), consideración de la variación (reconocer la variación en los datos, describir patrones acerca de la variación y tratar de comprender los datos en relación al contexto), razonamiento con modelos estadísticos (desde los simples, como tablas y gráficos, a los complejos) e integración de la estadística y el contexto.

Además añade otros elementos del modelo de razonamiento estadístico de Wild y Pfannkuch: ciclo de investigación (problema, plan, datos, análisis y conclusión), el ciclo interrogativo (generar, buscar, interpretar, criticar y juzgar) y las disposiciones, tales como escepticismo e imaginación.

Figura 3.2.2. Modelo de conocimiento profesional de Burgess (2008, p.3)

| | | | Statistical knowledge for teaching | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Content knowledge | | Pedagogical content knowledge | |
| | | | Common knowledge of content (ckc) | Specialised knowledge of content (skc) | Knowledge of content and students (kcs) | Knowledge of content and teaching (kct) |
| Statistical thinking in empirical enquiry | Types of thinking | Need for data | | | | |
| | | Transnumeration | | | | |
| | | Variation | | | | |
| | | Reasoning with models | | | | |
| | | Integration of statistical and contextual | | | | |
| | Investigative cycle | | | | | |
| | Interrogative cycle | | | | | |
| | Dispositions | | | | | |

La estadística es un tema en que es imprescindible el uso de la tecnología, como se reconoce en los diseños curriculares, donde se recomienda el uso de calculadoras gráficas e incluso de la hoja Excel al final de la educación primaria. Lee y Hollebrands (2008) presentan un marco para describir el conocimiento profesional para enseñar estadística con apoyo de la tecnología. Consideran cuatro componentes: (a) Concepciones de qué significa enseñar un tema particular integrando la tecnología en el proceso de aprendizaje; (b) Conocimiento de las estrategias de enseñanza y las representaciones para enseñar temas particulares con la tecnología; (c) Conocimiento sobre la comprensión, razonamiento y aprendizaje de los estudiantes con la tecnología y (d) Conocimiento del currículo y materiales curriculares que integran la tecnología en el aprendizaje y ponen el énfasis en el razonamiento estadístico.

Garfield y Ben-Zvi (2008) proponen otro modelo de conocimiento profesional para enseñar estadística que incluye cinco competencias que se ha de desarrollar en la formación de profesores: (a) ideas estadísticas fundamentales; (b) uso de datos reales; (c) uso de actividades para el aula; integración de las herramientas tecnológicas; (d) implementación del discurso en el aula y (e) uso de métodos alternativos de evaluación. Estos componentes, sin embargo no se relacionan con los descritos en la literatura de formación de profesores ya que más bien serían aspectos a tener en cuenta en la formación estadística, tanto de alumnos como de profesores.

**Un modelo integrador**

Godino y colaboradores (Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008) elaboran un modelo general para el conocimiento profesional del profesor de matemáticas con seis dimensiones: epistemológica (conocimiento del contenido estadístico, las adaptaciones para ser enseñado, su desarrollo histórico y problemas filosóficos asociados), cognitiva (desarrollo del razonamiento estadístico en los estudiantes, dificultades de aprendizaje), afectiva (actitudes, afectos, emociones de los estudiantes respecto al tema), interacional (relaciones profesor – estudiantes, y entre los propios estudiantes y organización del discurso en la clase), mediacional (uso de recursos tecnológicos y el tiempo requerido para el estudio), ecológica (aspectos curriculares, socioculturales y relaciones con el entorno). Estos componentes, se relacionan con el concepto de idoneidad didáctica, concepto desarrollado también dentro del enfoque onto-semiótico y descrito en el capítulo 2 del presente trabajo. Si se quiere conseguir una idoneidad didáctica alta en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, será necesaria la capacidad del profesor para valorar cada uno de los distintos componentes de la idoneidad (idoneidad epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica), lo que supone la adquisición de conocimientos específicos relacionados con cada uno de estos componentes.

Godino (2009) refina el modelo de niveles y facetas del conocimiento matemático didáctico del profesor que engloba los conocimientos citados anteriormente y propone, asimismo una guía para la formulación de cuestiones de evaluación de dicho conocimiento. El autor propone tener en cuenta las siguientes facetas para analizar los procesos de instrucción matemática:

- *Epistémica:* Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
- *Cognitiva:* Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
- *Afectiva:* Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso enseñanza aprendizaje seguido.
- *Mediacional*: Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
- *Interaccional:* Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
- *Ecológica:* Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, que soporta y condiciona el proceso de estudio.

La importancia dada al componente epistémico en el modelo de Godino (2009) hace que sea aplicable al caso particular de la estadística. Puesto que la estadística tiene sus propios problemas, lenguaje, conceptos, propiedades, argumentos y procedimientos, el profesor requiere un conocimiento específico de los mismos y de su interacción con el resto de componentes del modelo. Es decir, se requiere una didáctica específica de la estadística. En consonancia con el resto del marco teórico descrito en el capítulo 2 y puesto que el modelo reconoce la especificidad de la estadística, a través de la componente epistémica, lo utilizaremos en este trabajo, específicamente en el capítulo

5. Asimismo, usaremos el modelo de Hill, Ball, y Schilling (2008) en los capítulos 4 y 5 en la evaluación de los conocimientos matemáticos y didácticos de los futuros profesores de nuestra muestra.

Godino (2009) también propone diferentes niveles de análisis didáctico, que pueden usarse, tanto en la formación de profesores, como en la evaluación de su conocimiento o incluso que el propio profesor puede utilizar para mejorar su práctica docente:

1. Prácticas matemáticas y didácticas. En este primer nivel se analizan las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes. Nosotros no usaremos este nivel.
2. Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos). Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje. Nosotros usaremos este tipo de análisis en el capítulo 4 para explicar los errores de los estudiantes en la producción e interpretación de sus gráficos.
3. Normas y metanormas. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones. Este nivel de análisis no se usa en nuestro trabajo.
4. Idoneidad. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica. En el capítulo 5 se propondrá a los futuros profesores realizar este análisis de la idoneidad del proceso didáctico vivido por ellos mismos con fin de evaluar su conocimiento didáctico.

Sin entrar en el detalle de todas las categorías de conocimientos y tipos de análisis contemplados en este modelo, si utilizaremos la metodología propuesta por Godino (2009) que consiste en dos pasos:

1. Elegir una tarea matemática cuya solución ponga en juego los principales aspectos del contenido, o de las competencias a desarrollar;
2. Formular consignas que cubran las distintas (o principales) facetas y niveles de análisis didáctico del modelo propuesto por el autor. Dicha consigna consistiría en: (a) resolver el problema (para evaluar el conocimiento común del contenido); (b)

identificar los objetos y procesos matemáticos puesto en juego en la solución (para el conocimiento especializado del contenido); (c) para el conocimiento del contenido y los estudiantes, entre otras propone como consignas posibles describir los razonamientos que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta o los principales conflictos en dicha solución; (d) como veremos en el capítulo 5 el análisis de las diferentes categorías de idoneidad didáctica permite evaluar los distintos componentes del conocimiento didáctico del profesor.

### 3.2.3. ACTITUDES Y CREENCIAS

Una parte de la investigación previa sobre formación de profesores para enseñar estadística se ha centrado en sus actitudes y creencias hacia la materia, pues los aspectos afectivos de los profesores se han de tener en cuenta en cualquier movimiento para cambiar la enseñanza de las matemáticas y al mismo tiempo inciden en los conocimientos y las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas (Chapman, 1999). El aspecto afectivo es muy importante en la formación de profesores, ya que creencias incorrectas o actitudes negativas podrían condicionar la enseñanza y repercutir en las futuras creencias y actitudes de sus alumnos, por lo que será necesaria una labor de motivación si queremos que la enseñanza de la estadística y probabilidad sea una realidad y no simplemente un deseo expresado en las orientaciones curriculares (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004a).

Cuando se estudia una materia, se desarrollan una serie de sentimientos, tales como gusto o disgusto; miedo o interés; aburrimiento o entretenimiento; valoración o falta de valoración hacia la misma. La suma de todos estos sentimientos se define mediante los constructos “creencias, actitudes y emociones”. Mientras que las emociones son pasajeras, las actitudes y creencias son estables y difíciles de cambiar, de ahí su interés en la enseñanza.

La diferencia entre creencias y actitudes es que las primeras están más relacionadas con la cognición y las segundas con los afectos. Ambas inciden en la acción de las personas. En general, la relación entre el dominio afectivo (emociones, actitudes y creencias) y el aprendizaje, no va en un único sentido, ya que los afectos condicionan el comportamiento y la capacidad de aprender y recíprocamente el proceso de aprendizaje provoca reacciones afectivas (Estrada, 2007).

**Actitudes hacia la estadística**

Diversos estudios han analizado las actitudes hacia la estadística. Gal, Ginsburg y Garfield (1997) definen las actitudes como "*una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio*" (p. 40). En general se consideran un constructo mental, no directamente observable sino que ha de ser inferido a partir de la valoración en una escala de actitudes o de la observación del comportamiento de los sujetos.

Profundizando en el estudio de las actitudes, Estrada (2002) les asigna las siguientes características: Son predisposiciones (no se confunden con la conducta); incluyen procesos cognitivos y afectivos; son referenciales (evocan a un objeto o sector de la realidad); son relativamente estables, al contrario que un sentimiento, que puede ser pasajero; También sugiere que son siempre algo adquirido, bien por la acumulación de experiencias, bien imitando el comportamiento de los demás.

Son muchas las escalas de medición de actitudes disponibles, cuyas características psicométricas, son descritas con detalle por Carmona (2004), quien realiza un extenso informe sobre los estudios de actitudes hacia la estadística. Estos estudios son numerosos y se han centrado preferentemente en estudiantes universitarios. Analizan no sólo las actitudes en sí, sino también el efecto de variables como rendimiento, género o estudios previos de estadística sobre las actitudes.

Los trabajos centrados en las actitudes de los profesores hacia la estadística son bastante escasos, pero hay algunos: Por ejemplo, Onwuegbuzie (1998) utiliza un modelo multivariado para estudiar la ansiedad y actitudes de los profesores, encontrando correlaciones significativas entre el número de asignaturas de estadística cursadas con anterioridad y las puntuaciones en el cuestionario de actitudes. También comprueba que las actitudes y la ansiedad hacia la estadística influyen en los resultados de aprendizaje de la estadística, por lo que animan a los formadores de profesores a crear entornos de aprendizaje adecuados (cognitivos y afectivos) en sus clases para que sus alumnos adquieran seguridad en sus propias capacidades para aprender y enseñar estadística y, sobre todo, valoren el importante papel que tiene esta materia en la sociedad actual.

Watson, Kromrey, Ferron, Lang y Hogarty (2003) aplicaron conjuntamente a estudiantes de educación un cuestionario de actitudes (SATS) y otro sobre ansiedad, mostrando una correlación negativa entre los instrumentos. Encontraron una alta correlación entre ansiedad y actitud. Este es uno de los pocos trabajos de actitudes que complementan las escalas de medición habituales, con preguntas abiertas de cuyas respuestas infieren las motivaciones y causas de las actitudes de sus alumnos.

Nasser y sus colaboradores han realizado varios estudios en los que también analizan la relación entre las actitudes o la ansiedad y el rendimiento (Nasser. 1999; Wisenbaker, Nasser y Scott, 1999; Nasser 2004). Los autores usan un modelo estadístico para predecir las actitudes de futuros profesores en función de diferentes variables: ansiedad hacia las matemáticas y la estadística, aptitud matemática, la motivación y las puntuaciones en un curso de estadística de 167 profesores en formación. Muestran el efecto de la aptitud matemática en las actitudes y el conjunto de variables explican el 36% de la varianza del rendimiento en estadística.

El trabajo de Huedo, López, Martínez y Nortes (2003) presenta resultados de una investigación con profesores en formación de la Universidad de Murcia, y analiza los conocimientos y actitudes hacia la Estadística y hacia las Matemáticas contrastando los resultados con estudios previos.

Estrada en varios trabajos (Estrada, 2002, 2007, Estrada, Batanero y Fortuny, 2004a) ha analizado con mayor detalle en España las actitudes hacia la estadística de profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. Igualmente ha relacionado estas actitudes con variables como años de docencia, especialidad (en caso de futuros profesores) y conocimientos estadísticos. Uno de sus resultados más importantes es mostrar que las actitudes mejoran en general con los conocimientos y la práctica profesional.

Estrada (2002) midió las actitudes hacia la estadística de 66 futuros profesores y 74 profesores en activo de educación primaria. Construyó para ello su propia escala que tenía 25 ítems tomados de los cuestionarios SAS, ATS y del cuestionario de Auzmendi (1991). En su escala complementó los tres componentes clásicos de las actitudes (afecto, cognición, comportamiento) con otros tres nuevos (a) Social: percepción del valor de la estadística en la sociedad; (b) Educativo: interés en aprender y enseñar estadística; y (c) Instrumental: percepción del uso de la estadística en otras áreas.

Los resultados del estudio muestran actitudes neutras en los dos grupos, obteniendo mejores puntuaciones los ítems relacionados con el rol instrumental de la estadística (por ejemplo “Yo comprendo mejor los resultados de las elecciones cuando estos son presentados en gráficos estadísticos”) y el valor educativo de la estadística (por ejemplo “Se debería aprender estadística en la escuela”). Puntuaciones más bajas se corresponden con ítems relacionados con la seguridad y confianza en la estadística (“La realidad puede ser manipulada con la estadística") y los afectos ("Yo disfruto en los cursos de estadística").

En estudios posteriores Estrada, Batanero, Fortuny y Díaz (2005) aplicaron el cuestionario de actitudes SATS a una muestra de 367 futuros profesores de educación primaria en España. Los resultados mostraron de manera moderada actitudes positivas en ítems sobre competencia cognitiva ("Yo puedo aprender estadística") e ítems relacionados con el valor de la Estadística ("La estadística no sirve para nada") los cuales obtuvieron las puntuaciones más altas. Se encontraron correlaciones entre las subescalas de Afectos y Competencia Cognitiva y Afectos y Valor de la Estadística. Consecuentemente el gusto o no por la estadística en dichos futuros profesores estuvo relacionado con su propia percepción de su capacidad para aprender estadística y el valor dado a la estadística.

Estrada y colaboradores (2005) también analizaron las relaciones entre las actitudes de los futuros profesores de educación primaria y sus conocimientos estadísticos, evaluando dichas relaciones a través de 9 ítems abiertos tomados del cuestionario *Evaluación de Razonamiento Estadístico (SRA)* (Garfield, 2003). Los ítems sirvieron para evaluar la comprensión de los principales contenidos de estadística en el currículo de educación primaria en España: razonamiento sobre datos estadísticos, gráficos, promedios y dispersión, sesgos en muestreos y azar. Los autores encontraron un significativo y preocupante porcentaje de futuros profesores en la muestra de su estudio, que no comprendían algunos de los conceptos elementales en estadística que en un futuro tendrían que enseñar en las clases de educación primaria. Se observó una importante correlación entre las actitudes y el número de cursos de estadística que los alumnos habían cursado previamente. Análisis más detallados de las puntuaciones obtenidas mostraron que las actitudes mejoraron considerablemente con el número de cursos y los conocimientos estadísticos de los participantes.

Con el objetivo de comprender mejor las actitudes y concepciones erróneas de futuros profesores de educación primaria, Estrada y Batanero (2008) llevaron a cabo un estudio complementario con una nueva muestra 121 futuros profesores a los que se les pasó únicamente los ítems que mostraron puntuaciones más bajas en el estudio previo de Estrada y colaboradores (2005). A dichos participantes se les pidió que primeramente completaran todos los ítems y posteriormente justificasen sus respuestas. Las autoras realizaron un análisis cualitativo de las respuestas y justificaciones abiertas de los futuros profesores, que sirvió para clasificar las principales razones que explicasen las puntuaciones tanto positivas como negativas en el estudio.

Las principales explicaciones dadas a las actitudes positivas incluían: (a) consideración de la estadística como un tema fácil; (b) experiencias satisfactorias de aprendizaje; (c) lo novedoso del tema; (d) percepción de la utilidad de la estadística para un profesor; o (e) el valor formativo de la estadística. Las principales razones para las puntuaciones negativas fueron las siguientes: (a) falta de conocimientos previos o aprendizaje; (b) dificultad con el razonamiento estadístico; (c) demasiado contenido formal.

Estrada y Batanero (2008) y Lancaster (2008) indican que los profesores reconocen la importancia práctica de la estadística, están dispuestos a aprender más y dedicar más tiempo a su enseñanza, pero se sienten poco preparados para ayudar a los estudiantes en sus dificultades con el tema. Es decir, sería necesario desarrollar los componentes cognitivo y dificultad de las actitudes hacia la estadística además de los componentes afectivo y de valor de la materia.

**Creencias sobre la estadística**

Los profesores tienen también creencias referentes a los contenidos y fines de la enseñanza, que pueden incidir fuertemente en la forma que enseñan estadística. La "práctica profesional del profesor" indica todo lo que el profesor hace (diseñar tareas y organizar el contenido matemático en las lecciones, interactuar con sus alumnos y evaluarlos, etc.) y su comprensión de los instrumentos que utiliza y del propósito de su uso (Ponte, 2001).

En el caso de la matemática estas prácticas vendrán caracterizadas por las interacciones entre el profesor, los alumnos y la tarea matemática a realizar mediados por los objetivos pretendidos. Dicha práctica está condicionada por su reconstrucción subjetiva de las nociones matemáticas (currículum) como objetos de enseñanza-aprendizaje y de la definición de los objetivos de enseñanza. Estos procesos de reconstrucción vienen determinados por la experiencia previa del profesor y el contexto curricular (Llinares, 1998).

Sus actividades en el aula vienen determinadas en parte por su visión de los objetivos educativos que pretenden en el aprendizaje del contenido matemático de los estudiantes. McLeod (1992) distingue las categorías siguientes de creencias:

- Creencias acerca de las matemáticas como disciplina, es decir sobre su naturaleza y donde el aspecto afectivo no es el dominante.

- Creencias acerca de sí mismo y su relación con las matemáticas. Se refieren a aspectos vinculados al aprendizaje de la materia, respecto al cual los alumnos poseen una serie de expectativas sobre cómo ha de ser el aprendizaje, el papel del profesor, la metodología e incluso el contexto social al que pertenecen.

Son pocas las investigaciones que analizan las creencias de los profesores hacia la estadística, siendo una de las primeras la de Steinbring (1990), quien sugirió que los formadores de profesores tienen que hacer frente al problema de concienciar a los profesores de la naturaleza particular de la estadística y probabilidad, que es diferente de la matemática tradicional enseñada en la escuela. Si bien las matemáticas tradicionales se enseñan sobre la base de una cantidad acumulativa y jerárquica de conceptos, que se aprenden en una secuencia lineal, el conocimiento estadístico es más complejo y sistémico y se basa mucho más en las actividades interpretativas que otras áreas de las matemáticas. Así, los conceptos muy elementales están interrelacionados con el contexto en el que se aplican y están sujetos a controversias, como ocurre, por ejemplo, con la inferencia o con la probabilidad.

Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) realizan un estudio mediante cuestionarios y entrevistas para comprender las razones por las cuáles los profesores omiten la enseñanza de la probabilidad en la escuela y las fuentes de información que pueden influenciar esta decisión. Para ello realizan un estudio de casos de cinco profesores, presentando los resultados obtenidos para dos de ellos, ninguno de los cuáles enseñaba probabilidad. El primero (A), licenciado en matemáticas con especialidad de estadística y 5 años de experiencia. El segundo (B), también matemático, pero no especialista en estadística con 2 años de experiencia.

Mientras que las fuentes de información consideradas por el profesor (A) para llevar a cabo innovaciones son el contacto con colegas que favorezcan dichas informaciones, la omisión de la enseñanza de la probabilidad era debida a su creencia de que la probabilidad no tiene suficiente consistencia educativa en la enseñanza obligatoria ni garantiza ningún propósito práctico para estos estudiantes. Estos argumentos son apoyados por la visión formal presentada tanto en su formación como profesor, como en los libros de texto de secundaria. El profesor (B) por su parte rechazaba enseñar probabilidades pensando en las dificultades que el estudiante podría tener con el tema y a que la metodología usual para otros temas no sería útil para esta materia. La falta de apoyo de miembros de su seminario y faltas de fuente de información suponían otros obstáculos para incorporar la probabilidad en la enseñanza.

En un estudio cualitativo con profesores alemanes Eichler (2008) diferencia entre el currículo oficial (marcado por las directrices curriculares), el pretendido por el profesor, el llevado al aula y el aprendido por los estudiantes. Clasifica a los profesores en su investigación respecto a su visión estática frente a una visión más dinámica de las matemáticas y la orientación hacia la matemática formal versus aplicaciones matemáticas. Realiza una investigación sobre las creencias de los profesores alemanes sobre la estadística, en relación con cada una de las fases del currículo anteriormente citadas.

Respecto al currículo pretendido, Eichler indica una alta aceptación del currículo de estadística por parte de los profesores, la mayoría de los cuáles está, en principio, a favor de su enseñanza, lo que concuerda con los resultados de los trabajos citados de Estrada y sus colaboradores. Otro resultado del autor es que el currículo pretendido por los profesores en su estudio se adecuaba, en general, al currículo oficial marcado en las directrices curriculares. Sin embargo, el autor muestra como el currículo efectivamente implementado en la clase para alumnos del mismo nivel educativo varía considerablemente dependiendo de estas creencias, sobre todo de la visión estática o dinámica de la estadística y la preferencia por la formalización frente a las aplicaciones. También el aprendizaje del estudiante depende en gran medida de estas ideas, pues está influenciado por la enseñanza que recibe, marcada fuertemente por las creencias del profesor.

### 3.2.4. CONOCIMIENTOS ESTADÍSTICOS

La forma en que el profesor comprende el contenido matemático ha sido analizada usando diferentes marcos teóricos o conceptuales, intentando describir qué conocen y cómo lo conocen en relación al contenido matemático. Con este tipo de preguntas de investigación el marco teórico utilizado determina las categorías de análisis del conocimiento de matemáticas de los profesores o estudiantes para profesor (Llinares, 1998).

Como hemos indicado, Ball, Lubienski y Mewborn (2001) hablan del conocimiento matemático para la enseñanza, que se describe en Hill, Ball, y Schilling (2008) como *"el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno."* (p. 374). Dentro del conocimiento del contenido matemático distinguen entre Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático.

El interés de analizar los conocimientos matemáticos de los profesores se debe a que muchas tareas cotidianas del profesor en la clase de matemáticas, tales como "*indagar lo que los estudiantes conocen, elegir y manejar representaciones de las ideas matemáticas, seleccionar y modificar los libros de texto, decidir entre modos posibles de acción*" (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001, p. 453) dependen de su razonamiento y conocimientos matemáticos.

En el caso de la estadística, la investigación que resumimos a continuación revela una variedad de dificultades y errores conceptuales entre los futuros profesores de educación primaria. En esta sección analizamos las dificultades que afectan al conocimiento de los objetos matemáticos ligados a los gráficos que fueron analizados en el capítulo 1. Las dificultades específicas de los profesores relacionadas con los gráficos estadísticos se analizan independientemente en la sección 3.3.9.3.

**Medidas de posición central**

Batanero, Godino y Navas (1997) analizan las respuestas de 273 estudiantes de una Facultad de Ciencias de la Educación a un cuestionario escrito que incluye cuatro ítems de opciones múltiples sobre distintos aspectos interpretativos de la media aritmética. Complementan el cuestionario con entrevistas a alumnos que exhiben errores típicos.

Sus resultados muestran la existencia de errores conceptuales y dificultad de aplicación práctica de los conocimientos sobre los promedios en los estudiantes. Entre los más frecuentes, encuentran que el 40% de la muestra no desecha los valores atípicos para calcular la media, el 30% sobrevalora la dispersión de los datos y el 60% no conoce la relación entre media, mediana y moda en distribuciones simétricas. Los autores sugieren que estos resultados muestran la necesidad de potenciar los contenidos estadísticos en la formación de profesores. Además explican el alto porcentaje de errores en los ítems analizados por el hecho de que en la enseñanza primaria y secundaria se da un escaso o nulo tratamiento adecuado de los valores atípicos y a que la enseñanza de los promedios se centra habitualmente en la presentación de los algoritmos y fórmulas y su aplicación a casos estereotipados. Concluyen que esta aproximación no permite que los alumnos comprendan el significado integral del concepto.

Estrada, Batanero y Fortuny (2004b) llevaron a cabo un estudio con 387 futuros profesores en la universidad de Lleida, mostrando que una proporción preocupante de los participantes no dominaban los conceptos elementales de estadística que han de enseñar a sus futuros alumnos. Un 45% de la muestra no tuvo en cuenta el efecto de los valores atípicos sobre la media, 28% interpretaron incorrectamente la concepción frecuencial de la probabilidad, 45% confundieron correlación y causalidad, 24% no invirtieron adecuadamente el algoritmo de la media, 30% fueron insensibles al sesgo en el muestreo, 15% pensaron que no es posible dar una estimación cuando hay fluctuación aleatoria y otro 30% tuvo otras confusiones respecto al muestreo.

Groth y Bergner (2006) investigaron sobre la comprensión de los conceptos de media, mediana y moda por parte de 46 profesores en formación de escuela primaria y secundaria. En su estudio los participantes tuvieron que explicar las diferencias y similitudes entre los conceptos estadísticos de media, mediana y moda. Los autores distinguieron entre 4 diferentes categorías sobre la comprensión de dichos conceptos estadísticos por parte de los futuros profesores: (a) uniestructural/concreto simbólico; (b) multiestructural/concreto simbólico; (c) relacional/concreto simbólico; (d) abstracto.

Hubo 8 futuros profesores que trabajaron en el nivel uniestructural/ concreto simbólico debido a que sus respuestas sólo usaban la definición literal de los conceptos de media, mediana y moda para obtener similitudes y diferencias entre los distintos promedios. Veintiún futuros profesores respondieron dentro del nivel multiestructural/concreto simbólico, ya que sus respuestas mostraban que los promedios que tenían que estudiar representaban más un objeto matemático que un simple procedimiento de cálculo. Trece de los participantes mostraron en sus respuestas el nivel relacional/concreto simbólico, pues sus respuestas iban más allá de procedimientos para encontrar determinadas medidas para así concluir a cerca de características "típicas" sobre un conjunto particular de datos. Finalmente 3 futuros profesores trabajaron dentro del nivel superior o nivel abstracto, ya que las respuestas que proporcionaron iban más allá de conocimiento procedimental e incluían una discusión sobre cuando una determinada medida de posición central sería más útil para un cierto conjunto de datos.

**Variación**

La importancia del concepto de variación en estadística ha sido resaltada por Wild y Pfannkuch (1999), quienes la consideran por como el núcleo de su modelo sobre razonamiento estadístico. A pesar de ello, la investigación de Silva y Coutinho (2008) muestra que el razonamiento predominante de los profesores brasileños sobre la variación es verbal, lo que les impide enseñar a sus estudiantes el significado de medidas tales como la desviación típica, limitándose a la enseñanza de algoritmos.

Para llevar a cabo dicha investigación se pidió a los profesores que realizasen una encuesta y usasen los datos obtenidos sobre la edad de los participantes en la encuesta para crear su distribución. Los autores analizaron el razonamiento de la variación por parte de los profesores cuando estos analizaron la distribución de las edades. Después de organizar los datos una tabla de frecuencias y representarlos en un histograma, se pidió a los profesores pensar sobre distintos modos de representar el conjunto de las edades. Ninguno fue capaz de integrar el razonamiento sobre la media, con el significado de la desviación respecto a la media, ni estimar la frecuencia en el intervalo de k desviaciones típicas desde la media.

Makar y Confrey (2005) analizaron por medio de varias entrevistas realizadas a lo largo del curso que estaban atendiendo17 futuros profesores de educación secundaria de matemáticas y ciencias, como estos usaban la noción de variación cuando comparaban dos distribuciones El estudio mostró cómo los futuros profesores expresaban importantes ideas sobre variación al comparar dos distribuciones y que lo hacían a través de un lenguaje tanto estándar como no estándar. Algunos ejemplos de expresiones estándar en estadística de las usadas por los futuros profesores fueron: proporción, media, máximo/mínimo, tamaño muestral, valores atípicos, rango, forma y desviación típica. La inclusión de lenguaje estándar en las respuestas de los futuros profesores fue aumentando desde la primera semana hasta el final del curso, destacando que el término desviación típica fue usado por uno solo de los participantes en la primera entrevista y por sólo dos de ellos en la segunda.

En los intentos de los profesores de expresar ideas sobre la variación, en las entrevistas llevadas a cabo con los mismos, emergieron dos categorías de términos no estándar para al expresar ideas sobre la variación y que correspondían a ideas intuitivas sobre dispersión (agrupado, disperso) y distribución (triadas, agrupaciones modales); el uso de estos términos también creció.

**Distribución**

Respecto a la distribución, otra idea central del razonamiento estadístico, y que aparece implícita en los gráficos estadísticos, Canada (2008) analizó el razonamiento de estudiantes de secundaria y futuros profesores cuando comparan conjuntos de datos con la misma media y diferente dispersión. El autor indica que la comprensión de la idea de distribución se mostrará cuando el sujeto sea capaz de razonar simultáneamente respecto a los promedios y dispersión para realizar dicha comparación. A pesar de ello, aunque el grupo de futuros profesores tuvo mejor rendimiento que el de los estudiantes en la tarea propuesta, todavía un 35% de los futuros profesores pensaba que dos conjuntos de datos con la misma media eran iguales, aunque la dispersión fuese muy diferente. Por tanto su comprensión de la idea de distribución no era completa.

Mickelson y Heaton (2004) estudiaron como una profesora de tercer curso de primaria razonaba con la idea de distribución a la hora de aplicar sus conocimientos en unas clases donde enseñaba a sus alumnos mediante una investigación estadística. Dependiendo de los distintos contextos, la profesora aplicaba razonamientos estadísticos sobre distribuciones, tanto de manera adecuada como demasiado ingenua. Parecía también que era menos capaz de mostrar un conocimiento profundo sobre la idea de distribución cuando la investigación llevada a cabo en la clase implicaba el trabajo con tareas abiertas basadas en datos reales que al trabajar con tareas estándares tomadas de libros de texto.

Pfannkuch (2006) estudió el razonamiento llevado a cabo por un profesor de secundaria cuando este realizaba inferencias informales al comparar gráficos de cajas e interpretar las distribuciones representadas por dichos gráficos. La investigación permitió desarrollar un modelo compuesto de diez elementos diferenciados que categorizan el pensamiento del profesor y permiten describir la naturaleza y el tipo de razonamiento inferencial informal cuando los estudiantes trabajan comparando distribuciones.

**Conocimiento puesto en práctica**

Respecto al conocimiento de la estadística puesto en práctica en la enseñanza, es decir, el conocimiento especializado del contenido estadístico, algunas investigaciones examinan a profesores en ejercicio durante su enseñanza, observándolos a lo largo de un periodo de tiempo y deduciendo su conocimiento a partir de esta observación complementada con entrevistas o a través de otros medios. Las pocas investigaciones al respecto indican que este conocimiento especializado de la estadística es también escaso Los tres profesores participantes en el estudio de Jacobbe (2008) fueron entrevistados a lo largo de un periodo dilatado, observando sus clases y las tareas propuestas a los alumnos durante las mismas. A pesar de tratarse de profesores muy motivados y tener una amplia experiencia de enseñanza, el estudio mostró no poseían suficiente conocimiento de la mediana para enseñarla. Por ejemplo, algunos hacían errores de cálculo elementales, como no ordenar los datos para calcular la mediana; otros no sabían decidir en qué situaciones es necesario calcular la media o la mediana, ni eran capaces de describir verbalmente la diferencia entre los dos conceptos.

Son pocos los profesores que tienen experiencia previa con investigaciones y proyectos estadísticos o con experimentos y simulaciones en probabilidad. Así en el estudio de Stohl (2005) los profesores observados fallaron al implementar el enfoque experimental en la enseñanza de la probabilidad, porque las tareas que proponían a los estudiantes eran casi en exclusividad tareas con muestras pequeñas. Por este motivo los estudiantes de estos profesores no pudieron apreciar la convergencia o el efecto del tamaño de la muestra sobre la misma, es decir no llegaron al punto central del enfoque frecuencial de la probabilidad. En otras sesiones, al trabajar con proyectos estadísticos en la clase, los profesores perdieron oportunidades para implicar a los estudiantes en la investigación y para profundizar en sus razonamientos. Especialmente se perdieron estas oportunidades en las fases de análisis de los datos e interpretación de los resultados obtenidos.

### 3.2.5. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

Los profesores también necesitan formación en el conocimiento del contenido didáctico relacionado con la educación estadística, a la que no pueden transferirse algunos principios generales válidos para otras ramas de las matemáticas (Batanero, Godino y Roa, 2004). Estos conocimientos se adquirirán preferentemente durante el ejercicio de la docencia y esto es especialmente problemático en el caso de la estadística. La razón es que hasta el momento se ha dado poca oportunidad para un desarrollo profesional de los profesores de educación primaria en estadística, al tratarse de un tema nuevo en los currículos. Por este motivo, aunque reconocemos el papel de la práctica profesional en la adquisición del CDC por parte de los profesores, será necesario dotarlos con algunos elementos iniciales de este conocimiento, que permita su desarrollo posterior.

Por otro lado, las escasas investigaciones relacionadas con el conocimiento del contenido didáctico de los profesores para enseñar estadística sugieren que este conocimiento es escaso. En esta sección analizaremos las investigaciones relacionadas con el conocimiento del profesor para enseñar otros temas estadísticos y posteriormente se analizarán los conocimientos requeridos para la enseñanza de los gráficos estadísticos.

Cai y Gorowara (2002) llevaron a cabo una investigación en la que participaron 12 profesores noveles y 11 profesores experimentados en la práctica docente. En dicha investigación se estudiaron las concepciones y la construcción de representaciones para la enseñanza del concepto de media por parte de los dos grupos de profesores. Los profesores noveles se iniciaban en la enseñanza como una segunda carrera y/o poseían una licenciatura en matemáticas o psicología. Los profesores experimentados eran profesores de grados 6 o 7 y que poseían dotes de liderazgo en sus escuelas.

Para dicha investigación se recogieron los datos por medio de las siguientes tareas que tuvieron que realizar los profesores: (1) planificar una lección centrada en el concepto de media; (2) responder a los posibles modos en que los estudiantes de grado 6 o 7 podrían responder a una serie de preguntas que estaban relacionadas con la media; (3) evaluar las respuestas de los estudiantes a algunas preguntas anteriores.

Los resultados mostraron que los dos grupos de profesores (con o sin experiencia) fueron capaces de responder a las preguntas que se les propuso en el apartado (2) anteriormente citado. Del total de la muestra fueron 8 los profesores experimentados y 2 los profesores noveles que fueron capaces de proporcionar múltiples estrategias para resolver los problemas. Dentro del conjunto de profesores noveles, sólo uno de ellos fue capaz de resolver las tareas sin usar un enfoque algorítmico.

Otro aspecto a destacar en los resultados de este estudio fue que aunque se pidió a los profesores que indicaran los modos en los que los estudiantes podrían resolver las preguntas, los profesores sin experiencia no trataron los posibles errores conceptuales que podrían tener los estudiantes mientras que los profesores experimentados sí que tuvieron en cuenta los posibles errores conceptuales al resolver casi todas las tareas. El resto de tareas que estaban relacionadas con la planificación de una lección y la evaluación de las respuestas de los estudiantes proporcionaron resultados similares en ambos grupos. Sin embargo, los resultados del estudio mostraron que según los profesores ganan experiencia docente y adoptan mayores roles de liderazgo son más capaces de reflexionar sobre los posibles errores conceptuales de sus estudiantes para mejorar su propia comprensión y así como para mejorar su habilidad al hacer frente a los errores mostrados por sus estudiantes.

Es también patente la dificultad de algunos profesores al trabajar con proyectos y problemas abiertos en matemáticas (Jaworski, 1994; Ponte, 2001). En el caso de la estadística, un tema fundamental es que los proyectos se usen para enseñar razonamiento estadístico y no cálculos rutinarios. Por ello es importante ver si los profesores son capaces de reconocer qué conceptos pueden ser estudiados a partir de un proyecto o un conjunto de datos dado e implementar una enseñanza efectiva en una clase utilizando proyectos estadísticos.

En la investigación de Chick y Pierce (2008) los profesores participantes no hicieron un uso adecuado de los datos y proyectos al planificar sus lecciones, pues fallaron en sacar a la luz los conceptos latentes, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada. Por el contrario se limitaron a pedir cálculos o nuevos gráficos, con pocas actividades de interpretación.

Por otro lado, los libros de texto y materiales curriculares preparados son insuficientes, en algunos casos, como soporte para el profesor. Ello es debido a que presentan una visión muy parcial de los conceptos (por ejemplo, sólo la aproximación clásica a la probabilidad o la inferencia). En otros casos las aplicaciones se limitan a juegos de azar, o no se basan en datos tomados de aplicaciones reales. También aparecen en ocasiones definiciones incorrectas o incompletas de los conceptos (Cardeñoso, Azcárate y Serradó, 2005).

Watson (2001) examinó el conocimiento de los profesores sobre las dificultades de sus alumnos con la probabilidad y la estadística. Cuando se les preguntó por las dificultades de los alumnos, sólo dos profesores de primaria que participaron en el estudio mencionaron haber encontrado dificultades, mientras que trece profesores de secundaria indicaron dificultades en aspectos procedimentales o conceptuales. Aunque estos datos sugieren que los profesores son capaces de identificar los problemas de los alumnos, también muestran que estos se centran principalmente en aspectos de procedimiento y su didáctica se basa en un enfoque computacional que busca las clásicas respuestas simples.

Así mismo, Watson afirmó que había pocas pruebas de que los profesores de secundaria usaran actividades basadas en la simulación y toma de muestras para reforzar la teoría. Por otro lado, aunque los profesores de primaria utilizaban lecciones basadas en actividades, no parecía existir un enfoque coherente hacia el estudio de los conceptos estadísticos.

Watson (2001) mostró que algunos profesores tenían una apreciación muy limitada de cómo sus alumnos podrían contestar preguntas tales como encontrar un error en un gráfico circular o identificar un error en un informe relacionado con la media en el muestreo de una población. Asimismo, los profesores, a menudo se limitaban a sugerir cómo ellos podrían utilizar las respuestas de sus alumnos en su salón de clases. Posteriormente, Watson (2005), utilizó el cuestionario anterior como base para un nuevo cuestionario que permitiera evaluar el conocimiento que tienen los profesores para conseguir una alfabetización cuantitativa (quantitative literacy), es decir, la habilidad que tienen para usar las matemáticas en la vida cotidiana, en el trabajo, la comunidad y la vida diaria.

Burgess (2008) se interesó en explorar los conocimientos del profesor para enseñar estadística usando su modelo de conocimiento (Burgess, 2006) descrito anteriormente. Para ello, comparó el conocimiento de dos profesores de educación primaria, en una experiencia de enseñanza que usaba varios conjuntos de datos multivariados. Los profesores desarrollaron su propia secuencia de la lección. El desarrollo de cada una de ellas fue grabado en video. El autor analiza el conocimiento puesto en práctica (o que no pudo poner en práctica) por cada profesor en las diferentes categorías de su marco teórico, mostrando con episodios los diferentes tipos de conocimientos.

En algunos casos, las observaciones indicaron oportunidades perdidas de usar uno de estos tipos de conocimiento. Mientras que uno de los profesores sólo perdió cuatro oportunidades cuando podía haber usado el conocimiento el otro perdió catorce. Ejemplo de estas oportunidades perdidas serían no verificar la corrección de la interpretación de un ejercicio por parte de los alumnos, perder oportunidad de usar conocimiento relacionado con la transnumeración; o bien con conocimiento del contenido y los estudiantes.

### 3.2.6. CONCLUSIONES SOBRE CONOCIMIENTOS DE LOS PROFESORES PARA ENSEÑAR ESTADÍSTICA

Para finalizar esta primera parte del estado de la cuestión, recogemos las conclusiones más importantes extraídas de su estudio. Observamos, en primer lugar, la poca atención que en la investigación didáctica se ha dado al estudio de las actitudes, creencias y conocimientos de los profesores de estadística, en comparación con la abundante literatura existente para el caso de la matemática. Solo con el reciente Joint

ICMI/IASE Study "Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education" ha surgido el interés por la investigación en este tema y el estudio de algunos modelos sobre el conocimiento del profesor en el campo de la estadística. Hay que destacar que esta investigación está aumentando notablemente desde que se inició la llamada a dicho estudio en el año 2005, por lo que consideramos este dato apunta a la relevancia actual de nuestro propio trabajo, ya que en el capítulo 5 evaluamos los conocimientos didácticos estadísticos que los futuros profesores de educación primaria ponen en juego al analizar una proceso de enseñanza.

Respecto al estudio de las actitudes, los trabajos existentes se centran en su mayor parte en profesores de educación primaria e indican una actitud positiva e interés por la enseñanza, aunque también desconfianza en sus propias capacidades para enseñar la materia e incluso miedo o percepción de la dificultad para aprenderla. Similares resultados arrojan los estudios sobre creencias y muestran la relevancia que estas creencias pueden tener sobre el currículo realmente aprendido por los estudiantes. Sería interesante, entonces continuar el estudio de las actitudes y creencias de los profesores de secundaria y con el diseño de planes para su mejora.

Las investigaciones sobre conocimientos de los profesores, también realizados en su mayor parte con futuros profesores de educación primaria, muestran un conocimiento muy deficiente de temas básicos que han de enseñar a sus alumnos. Aunque en esta parte del estado de la cuestión no hemos hecho referencia a los gráficos estadísticos, que se presentan más adelante, los resultados son semejantes en el caso de los gráficos. No obstante, las muestras empleadas han sido muy limitadas y las tareas muy cerradas, por lo que se deduce el interés de continuar esta línea de investigación.

Finalmente, las investigaciones que tratan de evaluar o desarrollar el conocimiento didáctico del contenido o sus componentes para el caso de la estadística son prácticamente inexistentes, por lo que nuestra aportación en este apartado contribuirá a cubrir una necesidad actual en la formación de profesores.

## 3.3. INVESTIGACIONES SOBRE COMPRENSIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS.

### 3.3.1. INTRODUCCIÓN

Watson (2006) indica que son muchas las habilidades necesarias para llegar a desarrollar una buena competencia gráfica, y el desarrollo de las mismas está relacionado con el aprendizaje de distintos elementos del currículo de matemáticas como pueden ser los porcentajes, fracciones, proporcionalidad, o geometría, como ya se analizó en el capítulo 1.

En lo que sigue resumimos las investigaciones relacionadas con las competencias y niveles de comprensión de gráficos estadísticos, así como errores frecuentes relacionados con los mismos. En primer lugar, se analizan los elementos que componen el gráfico, para seguidamente reflexionar sobre su carácter semiótico; precisamente la actividad semiótica necesaria para la construcción e interpretación de gráficos la usaremos para definir posteriormente un nivel de complejidad semiótica en los gráficos construidos por los participantes en el estudio.

Son numerosas las investigaciones sobre comprensión de gráficos estadísticos; por ello dedicamos unos apartados al análisis de la definición de comprensión gráfica, el estudio de los niveles de comprensión gráfica y de comprensión crítica de gráficos. Otro grupo de investigaciones se ha centrado en los errores en la lectura y elaboración de gráficos, que se presentan muy resumidamente, así como algunas reflexiones sobre el uso de los gráficos en análisis exploratorio de datos.

Puesto que nuestro trabajo se centra en futuros profesores, dedicamos también un apartado a las investigaciones que han analizado la comprensión gráfica en este colectivo. Diferenciamos las que se refieren a la construcción de gráficos, la lectura e interpretación y el conocimiento didáctico del contenido. Finalmente presentamos nuestras conclusiones sobre esta parte del estado de la cuestión.

### 3.3.2. ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Un primer punto investigado por diversos autores es la competencia en la lectura de gráficos. Encontramos gráficos en la prensa diaria, en Internet y también en textos de materias como las ciencias sociales. Sería por tanto necesario que una persona culta fuese capaz de comprender la información expresada en los mismos, aunque esta competencia no es sencilla, pues para ello es necesario conocer los elementos estructurales de los distintos gráficos estadísticos, que varían de unos gráficos a otros y cuya identificación permite una posterior interpretación y lectura del gráfico. Mostramos a continuación diversas investigaciones en las que se definen distintos elementos constituyentes de los gráficos.

Para Kosslyn (1985) un gráfico tiene los siguientes elementos constituyentes:

- *Segundo plano* o *plano de fondo,* que sirve de soporte al gráfico y que en la mayoría de los gráficos es blanco, pero que podría variar dependiendo del gráfico y tratarse de una fotografía o dibujo.
- *Estructura* del gráfico, que nos da información sobre las entidades que están siendo representadas y que se relacionan entre sí. En muchos de los gráficos dicha *estructura* está constituida por los ejes cartesianos, pero no siempre*;* por ejemplo en los gráficos de sectores.
- *Contenido pictórico*, que consiste en la forma por la que los datos son representados y transmitidos a través del gráfico, siendo líneas en el gráfico de líneas, barras para los histogramas y gráficos de barras, círculos y sectores circulares en los gráficos de sectores, etc.
- *Rótulos*, que proporcionan información de ayuda a la hora de interpretar los distintos gráficos. Dichos rótulos están formados por letras, palabras, frases y números, dentro de título del gráfico y de los ejes, marcas, etc.

Cuando se pide a un estudiante interpretar un gráfico, el estudiante debe realizar la traducción entre lo representado en el gráfico y la realidad, por lo que esta traducción requiere conocimientos sobre las componentes y los convenios de construcción del gráfico. Un gráfico queda determinado por los siguientes elementos (Curcio, 1987):

- Las *palabras* que aparecen en el gráfico, como el título del gráfico, las etiquetas de los ejes y de las escalas, y que proporcionan las claves necesarias para comprender el contexto, las variables y las relaciones expresadas en el gráfico.
- El *contenido matemático* subyacente. Por ejemplo, los conjuntos numéricos empleados y otros conceptos matemáticos implícitos en el gráfico que el estudiante ha de dominar para interpretarlo, como los de área en un gráfico de sectores,

longitud en un gráfico de líneas o sistema de coordenadas cartesianas en un diagrama de dispersión.

- Los *convenios específicos* que se usan en cada tipo de gráfico y que se deben conocer para poder realizar una lectura o construcción correcta. Por ejemplo, el alumno ha de conocer que en un diagrama de sectores, la amplitud del sector es proporcional a la frecuencia. En diagrama de dispersión, cada punto representa un caso y las coordenadas del punto los valores de las dos variables representadas. En algunos gráficos estadísticos estos convenios no son sencillos, como ocurre en el gráfico de la caja.

Partiendo del análisis anterior, Friel, Curcio y Bright (2001) identifican los siguientes elementos estructurales de un gráfico estadístico:

- El *título* y las *etiquetas* indican el contenido contextual del gráfico y cuáles son las variables en él representadas. Será importante incluir un título y etiquetas no ambiguos.
- El *marco* del gráfico, que incluye los ejes, escalas, y marcas de referencia en cada eje. Dicho marco proporciona información sobre las unidades de medida de las magnitudes representadas. Puede haber diferentes tipos de marcos y sistemas de coordenadas (lineales, cartesianas bidimensionales o multidimensionales, polares).
- Los *especificadores* del gráfico son los elementos usados para representar los datos, como los rectángulos (en el histograma) o los puntos (en el diagrama de dispersión). Los autores nos alertan de que no todos los especificadores son igualmente sencillos de comprender, sugiriendo el siguiente orden de dificultad: (a) Posición en una escala homogénea (gráficos de línea, de barras, de puntos, algunos pictogramas e histogramas); (b) posición en una escala no homogénea (gráficos polares, gráficos bivariantes); (c) longitud (gráficos poligonales o estrellados sin ejes de referencia, árboles); (d) ángulo o pendiente (gráfico de sectores, discos); (e) área (círculos, pictogramas), volumen (cubos, algunos mapas estadísticos); y (f) color (mapas estadísticos codificados mediante color).
- *El fondo* que incluye los colores, la cuadrícula e imágenes sobre el que puede ser representado el gráfico.

### 3.3.3. EL GRÁFICO COMO OBJETO SEMIÓTICO

Definidas las componentes del gráfico, pasamos a analizar la actividad semiótica involucrada en su interpretación según diversos autores.

Bertin (1967) desarrolló una taxonomía de los componentes de los gráficos, introduciendo una gramática para su descripción, cuyos elementos son símbolos que indican por ejemplo el tipo de variable representada o cómo debe ser ésta representada en un gráfico. Para este autor un gráfico es más eficaz que otro cuando para obtener una respuesta correcta a una cuestión, el tiempo de inspección de dicho gráfico es menor que para otro que represente la misma información. Así la eficacia de un gráfico está ligada a la facilidad de obtener información en cualquiera de las etapas de su lectura.

Bertin asume la premisa de que un gráfico es un texto multimodal; tanto en su conjunto como los elementos que lo componen están constituidos por conjuntos de signos que requieren una actividad semiótica por aquellos que los interpretan. Considera el gráfico como un sistema semiótico complejo, e indica que se requiere un conjunto mínimo de elementos para poder construir o interpretar un gráfico, es decir transmitir la información necesaria para establecer una correspondencia entre cada símbolo y su significado.

Bertin desarrolló la llamada *teoría de la imagen,* que consta de dos puntos: las etapas en el proceso de lectura de un gráfico y las posibles cuestiones y niveles de lectura. Para leer un gráfico el lector tiene que realizar tres operaciones sucesivas:

- *Identificación externa,* proceso consistente en encontrar los referentes conceptuales y del mundo real relativos a la información contenida en el gráfico y que se extrae a través del análisis de los rótulos alfanuméricos del gráfico.
- *Identificación interna,* consiste en identificar las dimensiones relevantes de variación en el contenido pictórico del gráfico y determinar correspondencias entre las dimensiones visuales y las conceptuales o escalas.
- *Percepción de la correspondencia,* operación por la cual se usan los niveles particulares de cada dimensión visual para obtener conclusiones sobre los niveles particulares de cada dimensión conceptual.

Observamos que, en cada uno de los pasos descritos por Bertin en la lectura de un gráfico se puede identificar una o varias funciones semióticas, en el sentido de Eco (1977), quien las define como correspondencia entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido), establecida por un sujeto. En la lectura de gráficos el estudiante debe realizar varias actividades de traducción, entre el gráfico en su conjunto o una parte del gráfico y lo representado.

Una información que se obtiene de un gráfico consiste en una relación que puede ser establecida entre elementos, subconjuntos o conjuntos de dicho gráfico. Así para un conjunto de datos se puede hacer un número finito de preguntas para obtener información. Bertin argumenta que en general, siempre son posibles dos tipos de preguntas: (a) dada una entrada $X$ encontrar el valor de $Y$, lo que corresponde a una lectura directa ó (b) para un determinado valor de $Y$ encontrar la entrada o entradas correspondientes $X$ lo que corresponde a una lectura inversa.

Bertin (1967) definió *imagen* como una forma visual significativa-perceptiva dentro de un instante mínimo de visión. Una imagen se forma a través de la percepción de las correspondencias originadas por una cuestión: (a) primero se define una entrada en X, (b) luego se observa la correspondencia: por ejemplo un punto, (c) y por último una identificación de salida, es decir la respuesta. El autor denominó selección *visual* al proceso de centrarse en una información aislándola de las demás contenidas en el gráfico y todo ello en un instante mínimo de visión. Hay gráficos que permiten con un solo golpe de vista resaltar todas las correspondencias en una única forma visual. Así Bertin considera que un gráfico es más eficaz cuando cualquier tipo de pregunta, del nivel que sea, puede ser respondida a través de una sola imagen.

Por su parte Cleveland y McGill (1984) estudiaron la percepción gráfica e identificaron una serie de tareas que una persona debía poner en juego al leer un gráfico para obtener la información cuantitativa presente en éste. Para estos autores, al construir un gráfico, la información cuantitativa y categórica es codificada (por ejemplo por medio de la posición o del tamaño) y cuando un persona lee un gráfico debe descodificar la información por medio del proceso denominado percepción gráfica que consiste en la "*descodificación visual de la información codificada en un gráfico*" (p. 531).

El objetivo de los autores fue identificar ciertas tareas elementales de percepción gráfica que son ejecutadas durante el proceso de descodificación visual de la información cuantitativa contenida en un gráfico. Los autores eligieron la expresión *tareas elementales de percepción gráfica* porque una persona realiza una o más de dichas tareas visuales para extraer mentalmente el significado de lo representado en la mayoría de los gráficos. Algunas tareas elementales de percepción gráfica propuestas por los autores, que son utilizadas por las personas para extraer información cuantitativa de los gráficos son las siguientes: (a) Comparar la posición de varios elementos a lo largo de una escala común; (b) comparar la posición de un elemento con respecto a escalas diferentes; y (c) determinar la longitud, dirección, ángulo, área, volumen, curvatura de un elemento del gráfico.

Por ejemplo en un gráfico de barras, una primera tarea sería observar la posición de un valor de la variable con respecto una escala común, pero también sería posible llevar a cabo tareas como las de comparar las longitudes o las áreas de las barras. En los gráficos de dispersión se utilizará la tarea de observar la posición de los puntos con respecto a dos escalas (la de cada eje), pero se pueden extraer propiedades como por ejemplo la ausencia o no de correlación lineal entre las dos variables representadas, por medio de la percepción de la dispersión y dirección de los puntos representados en el gráfico.

Otro de los objetivos de estos autores fue el de ordenar las anteriores tareas según el grado de precisión que permiten en las conclusiones obtenidas en la lectura de los gráficos. A partir de resultados experimentales y basándose en las leyes de la psicofísica los autores ordenaron las tareas elementales, de mayor a menor precisión, como sigue:

- Determinar la posición de un punto o elemento a lo largo de una escala común.
- Determinar la posición cuando se emplean dos escalas no alineadas, por ejemplo, en el diagrama de dispersión.
- Determinar longitud, dirección y ángulo.
- Estimar un área.
- Estimar volumen o curvatura.

Cleveland y McGill (1984) observaron que la identificación y ordenación de las tareas elementales no proporcionaba un método completo de cómo construir un gráfico, ya que existen otros factores que deben tenerse en cuenta, como por ejemplo, el tipo de gráfico adecuado a la información. Por otro lado, para estos autores un gráfico es más adecuado que otro si proporciona conclusiones más exactas a la hora de interpretarlo. Por ello consideran que un gráfico será más útil que otro que represente la misma información sí su lectura requiere tareas que proporcionan conclusiones más precisas. Consideran que un gráfico es *excelente* si permite al lector extraer información cuantitativa, organizar y percibir patrones y estructuras que no son reveladas por otros medios de representación de datos.

Cleveland y McGill señalan que si en un mismo gráfico cartesiano se representan dos o más distribuciones o funciones, resulta más difícil de interpretar. Sin embargo, Lewandowsky y Spence (1989) argumentan que es posible representar en un mismo gráfico dos o más distribuciones o funciones si se utilizan símbolos o estrategias que permitan distinguirlas claramente.

### 3.3.4. DEFINICIONES DE LA COMPRENSIÓN GRÁFICA

Otro tema de investigación abordado por varios autores es analizar las definiciones, y componentes en la comprensión gráfica.

Kosslyn (1985) construye una teoría de procesos cognitivos basada en modelos de redes computacionales. Este modelo está apoyado en datos neurológicos y neuropsicológicos que parecen apoyar cada uno de los procesos y estrategias que intervienen en la generación, inspección y transformación de las imágenes. Así, el autor, definió tres niveles de análisis de la comprensión gráfica:

- *Nivel sintáctico*: En este nivel se consideran las propiedades de los elementos gráficos, como por ejemplo decidir si existen distorsiones visuales, o si los elementos están ordenados o agrupados adecuadamente en relación con las capacidades perceptivas de las personas.
- *Nivel semántico*, en el cual el objetivo es realizar interpretaciones cuantitativas y cualitativas y la valoración del significado del gráfico.
- *Nivel pragmático,* nivel en el que se busca reconocer la intención del gráfico y examinar la finalidad de la información que se transmite.

Según Pinker (1990), en la lectura de un gráfico se activan una serie de procesos que están ligados a las capacidades cognitivas del lector: (a) proceso de reconocimiento que permite clasificar un gráfico como perteneciente a un tipo particular; (b) proceso de creación de un mensaje conceptual, en el que se selecciona la información disponible a ser extraída; (c) proceso de cuestionamiento por medio del cual se recupera o codifica una nueva información basada en los mensajes conceptuales (información deseada); (d) proceso inferencial que a través de las reglas de inferencia lógica y matemática permite obtener la información que se deduce del gráfico, pero no está explícitamente representada.

Además Pinker (1990) afirma que la lectura eficiente de gráficos depende de dos factores. El primero de ellos está ligado a la competencia del lector, dependiendo de su capacidad de procesamiento de información. El segundo está ligado a la eficacia del gráfico, es decir, a la capacidad del gráfico en sí de transmitir información, que es dependiente del tipo de gráfico, los conceptos implicados y de su complejidad matemática. Friel, Curcio y Bright (2001) definen comprensión gráfica en la forma siguiente:

> Por comprensión gráfica nosotros entendemos las habilidades de los lectores de gráficos para entender el significado de gráficos creados por otros o por ellos mismos. Diferentes niveles al hacerse preguntas provocan diferentes niveles de comprensión (pg. 132).

Según estos autores, la comprensión de los gráficos o de otra información escrita incluye tres capacidades: traducción, interpretación y extrapolación/interpolación. En relación con los componentes del gráfico, su lectura y construcción, se requieren, según los autores los siguientes tipos de competencias relacionadas con el lenguaje de los gráficos:

- *Reconocer los elementos estructurales del gráfico* (ejes, escalas, etiquetas, elementos específicos) *y sus relaciones*. Esta competencia se adquiere cuando es posible distinguir cada uno de estos elementos y si cada elemento es o no apropiado en el gráfico particular, por ejemplo, detectar si una escala es adecuada o no para un gráfico particular.
- *Apreciar el impacto de cada uno de estos componentes* sobre la presentación de la información en un gráfico (por ejemplo, ser capaz de predecir como cambiaría el gráfico al variar la escala de un eje).
- *Traducir las relaciones reflejadas en el gráfico a los datos* que se representan en el mismo y viceversa. Por ejemplo, cuando un diagrama de dispersión es creciente, comprender que la relación representada entre las dos variables es directa.
- *Reconocer cuando un gráfico es más útil que otro,* en función del juicio requerido y de los datos representados, es decir, saber elegir el gráfico adecuado al tipo de variable y al tipo de problema.

Wu (2004) se interesa por la comprensión gráfica por parte de alumnos de Secundaria en Singapur. Para ello define un marco conceptual con cuatro componentes sobre la comprensión de gráficos estadísticos: lectura gráfica, construcción gráfica, interpretación gráfica y evaluación de gráficos estadísticos. El autor justifica la inclusión de la evaluación de gráficos estadísticos como componente de la comprensión gráfica debido al incremento del uso de gráficos estadísticos en los distintos medios de comunicación.

### 3.3.5. NIVELES DE COMPRENSIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Además de las competencias anteriores, algunos autores definen niveles de comprensión en la lectura crítica de datos y muestran que no todos los alumnos alcanzan el nivel más alto durante la educación secundaria o incluso niveles universitarios. A continuación resumimos las teorías de diversos autores al respecto.

Como hemos indicado, Bertin (1967) sugiere que la lectura de un gráfico comienza con una *identificación externa* (título, etiquetas), seguida de una *identificación interna*, (variables representadas y escala). Finalmente se produce una *percepción de la correspondencia* entre los niveles de cada dimensión visual para obtener conclusiones sobre cada variable y sus relaciones en la realidad representada. A partir de estos supuestos define diversos niveles de lectura de un gráfico:

- *Extracción de datos*, que consiste en poner en relación un elemento de un eje con el de otro eje. Por ejemplo, en un diagrama de barras leer la frecuencia asociada a un valor de la variable o bien en un diagrama de dispersión leer las coordenadas de uno de los puntos.
- *Extracción de tendencias*, cuando se es capaz de percibir en el gráfico una relación entre dos subconjuntos de datos que pueden ser definidos a priori o visualmente. Por ejemplo al determinar visualmente la moda de una distribución en un diagrama de barras, se clasifica los datos en subconjuntos (que tienen un mismo valor para la variable) y se comparan entre si estos subconjuntos para ver cuál tiene mayor frecuencia. Otro ejemplo sería detectar la simetría o asimetría de una distribución a partir de su representación en un histograma.
- *Análisis de la estructura* de los datos, comparando tendencias o agrupamientos y efectuando predicciones. Por ejemplo, cuando se representa en un diagrama de barras adosadas dos distribuciones y se analizan las diferencias en promedios y dispersión de las mismas.

Para Bertin (1967) un gráfico que permite un determinado nivel de lectura permite también los niveles anteriores, pero lo inverso no es cierto. Otra clasificación en niveles de comprensión de los gráficos, muy similar a la anterior, con un gran impacto en educación estadística se debe a Curcio (1989), que denominó a los tres niveles definidos por Bertin como *leer entre los datos* (lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo), *leer dentro de los datos* (interpretación e integración de los datos en el gráfico) y *leer más allá de los datos* (realizar predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico). Este autor mostró que las principales dificultades aparecen en los dos niveles superiores y que el nivel progresa con la edad de los estudiantes.

Friel, Curcio y Bright (2001) amplían la clasificación anterior definiendo un nuevo nivel *leer detrás de los datos* consistente en valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones.

Wainer (1992) por su parte clasifica el tipo de preguntas que se pueden plantear a partir de un gráfico, en tres niveles:

- *Nivel elemental*. Preguntas relacionadas únicamente con la extracción de datos directamente del gráfico.
- *Nivel intermedio*. Preguntas relacionadas con la evaluación de tendencias basándose en una parte de los datos.
- *Nivel superior*. Preguntas acerca de la estructura profunda de los datos presentados en su totalidad, usualmente comparando tendencias y viendo agrupaciones.

La base de su formulación se basa en la distinción entre relaciones de primera, segunda y tercera clase. Las relaciones de primera clase consideran una sola variable por ejemplo el peso. Las de segunda clase relacionan dos objetos, por ejemplo el peso de un libro. Las de tercera conectan tres variables, como el peso de un libro de texto. En los niveles de Wainer las preguntas de nivel elemental se corresponderían con relaciones de primera clase, las de nivel intermedio con relaciones de segunda clase y las de nivel superior con las de tercera clase.

Un modelo algo más complejo es debido a Gerber, Boulton-Lewis y Bruce (1995), quienes diferencian siete niveles de comprensión de gráficos, en función de las competencias de los estudiantes para interpretarlos:

- *Nivel 1*. Los estudiantes no se centran en los datos, sino que asocian algunas características de los mismos, con su conocimiento del mundo en forma imprecisa. Por ejemplo, si les hacemos una pregunta sobre edades de niños representados en un gráfico, pueden responder dando su edad.
- *Niveles 2 y 3*. Los estudiantes se centran en los datos representados, pero de forma incompleta. En el nivel 2 no llegan a apreciar el propósito del gráfico e interpretan sólo aspectos parciales de los datos, por ejemplo, sólo leen una de las barras del diagrama de barras. En el nivel 3 los estudiantes aprecian el propósito del gráfico y analizan todos los elementos uno a uno, pero no llegan a una síntesis global, al no comprender algún elemento específico que es clave en la representación. Un caso sería el estudiante que en una pirámide de población interpreta los grupos de edad (que se refieren a un conjunto de personas) como edades de sujetos individuales.
- *Niveles 4, 5 y 6*. Una vez que el estudiante llega a una síntesis global, puede todavía tener una interpretación estática de los gráficos, y podemos diferenciar tres niveles diferentes. En el nivel 4 los estudiantes son capaces de analizar una a una las variables representadas en el mismo gráfico, pero no conjuntamente, por ejemplo, si representamos la esperanza de vida de hombre y mujeres en diversos países en un gráfico de líneas, los alumnos interpretan por un lado la esperanza de vida de los hombres y por otro los de las mujeres. En el nivel 5 se comparan varias variables representadas en el mismo gráfico; en el ejemplo anterior podrían deducir que la esperanza de vida en las mujeres es superior a la de los hombres en la mayoría de países. En el nivel 6 los estudiantes usan los gráficos para apoyar o refutar sus teorías. No sólo comparan varias variables en el mismo gráfico, sino sacan conclusiones generales respecto a una hipótesis, por ejemplo, podrían usar el gráfico anterior para refutar la idea de que la mujer es más débil que el hombre.
- *Nivel 7*. En el último nivel los estudiantes son capaces de hacer extrapolaciones, y hacer predicciones para otros datos no representados en el gráfico; en el ejemplo anterior, podrían deducir la esperanza de vida del hombre, conocida la esperanza de vida de la mujer, para un país no representado en el gráfico.

Tabla 3.3.1.Taxonomía de las habilidades requeridas para responder preguntas en cada nivel[1]

| | Nivel | | |
|---|---|---|---|
| Autor | Nivel elemental | Nivel intermedio | Nivel superior |
| Bertin (1983) | Extracción de información elemental. | Reducción en el numero de categorías de datos a través de la combinación y compilación de los datos | Reducción de todos los datos a una afirmación simple o a una relación sobre los datos. |
| Curcio (1987) | Obtención de información para responder preguntas explicitas para las que la respuesta obvia está en el gráfico | Interpretación e integración de información presente en el gráfico. El lector completa al menos una etapa de inferencia lógica o pragmática para pasar de la pregunta a la respuesta. | Extensión, predicción o inferencias para responder preguntas. El lector da una respuesta que requiere mayor conocimiento. |
| Wainer (1992) | Extracción de datos | Identificación de tendencias vistas en partes de los datos | Comprensión profunda de la estructura de los datos, a través de las comparaciones de tendencias en grupos. |

(1) Tomada de Friel, Curcio y Brigth (2001), pg. 130-131

Friel, Curcio y Bright (2001) resumen algunos de los trabajos anteriores en la tabla 3.3.1. Los autores han caracterizado los tipos de preguntas que pueden responderse con los gráficos. Así se consideran tres niveles de comprensión gráfica relacionados con los tipos de preguntas: un nivel elemental consistente en extraer datos del gráfico, un nivel intermedio en el cual se da interpolación y encuentran relaciones entre los datos mostrados en el gráfico y finalmente un nivel superior en el cual se da extrapolación y análisis de las relaciones encontradas en el gráfico.

### 3.3.6. COMPRENSIÓN CRÍTICA DE LOS GRÁFICOS

Espinel, González, Bruno y Pinto (2009) señalan el papel esencial de los gráficos estadísticos en la sociedad tecnológica actual, donde los encontramos en todos los medios de comunicación e información y todas las ramas de la ciencia y vida profesional. Por ello, un ciudadano competente debiera poder leer críticamente dichos gráficos, identificar las tendencias y variabilidad de los datos, y detectar los posibles errores que puedan distorsionar la información representada (Schield, 2006). Será importante, entonces asegurar no sólo un adecuado nivel de lectura del gráfico, sino también su comprensión crítica, que ha sido analizada por algunos autores.

Cuando en los niveles de lectura vistos en el apartado anterior, se presta atención no sólo a la interpretación de los gráficos sino también a su valoración crítica, los niveles superiores se modifican ligeramente (Aoyama y Stephen, 2003, Aoyama, 2007). Supongamos, por ejemplo, que se da a los estudiantes un gráfico que presenta datos sobre el número de horas que los adolescentes dedican a los juegos con videoconsola y el número de episodios de violencia escolar en que se ven implicados. La gráfica muestra claramente un crecimiento del número de episodios de violencia cuando aumenta el tiempo dedicado a este tipo de juegos. Se pregunta a los estudiantes si piensan que la violencia escolar disminuiría si se prohibiesen las videoconsolas. Una vez que los estudiantes llegan a la fase superior en la clasificación anterior, todavía podríamos diferenciar tres grupos, en función de su capacidad crítica, respecto a la información reflejada en el gráfico.

- *Nivel Racional/Literal.* Los estudiantes leen correctamente el gráfico, incluyendo la interpolación, detección de tendencias y predicción. Para responder la pregunta planteada, usan las características del gráfico, pero no cuestionan la información, ni dan explicaciones alternativas. Una respuesta típica sería “Sí, ya que el grupo de chicos que jugó juegos durante mucho tiempo también tuvo muchos episodios de violencia”.
- *Nivel Crítico.* Los estudiantes leen los gráficos, comprenden el contexto y evalúan la fiabilidad de la información, cuestionándola a veces, pero no son capaces de buscar otras hipótesis: “Pienso que no, pues aunque los que más juegan aparecen como más violentos en el gráfico, podría haber otras causas, aunque no me imagino cuáles”.
- *Nivel Hipotético:* Los estudiantes leen los gráficos los interpretan y evalúan la información. Forman sus propias hipótesis y modelos: “No estoy de acuerdo en que la causa de la violencia sea el juego; quizás la falta de atención de los padres puede llevar a la vez a que el chico sea violento y que dedique más horas a jugar con la consola”.

El trabajo de estos autores muestra que muchos estudiantes, incluso cuando alcanzan el tercer nivel de lectura en la clasificación de Friel, Curcio y Bright, no alcanzan el nivel hipotético en la lectura de los mismos. En nuestro trabajo, además de evaluar el nivel de lectura de los gráficos en los futuros profesores, también trataremos de analizar la comprensión crítica que alcanzan en dicha lectura.

### 3.3.7. ERRORES EN LA LECTURA Y CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS

Con respecto a la construcción de gráficos, Watson (2006) asegura que es importante dejar libertad a los estudiantes para que en determinados momentos sean capaces de construir gráficos sin demasiadas restricciones. Esto llevará en muchos casos a que los estudiantes realicen representaciones originales de los datos que aunque no sean correctas estadísticamente, puedan mostrar buenas intuiciones por parte de los estudiantes. Además los gráficos incorrectos pueden ser analizados por el conjunto de la clase, lo que fomentara una visión crítica, cosa fundamental para desarrollar el nivel superior en la jerarquía de cultura estadística, ya que dentro de este nivel y en relación con los gráficos estadísticos, es importante desarrollar una mentalidad crítica y curiosa en los estudiantes para que sean capaces de detectar gráficos manipulados y erróneos que se encuentren en sus vidas fuera del contexto escolar.

Algunas investigaciones analizan los errores frecuentes en la producción de los mismos. El primer paso en su construcción sería elegir un gráfico adecuado, tanto al tipo de variable, como al problema planteado, pero los estudiantes fallan con frecuencia en esta elección. Li y Shen, (1992) analizaron los gráficos realizados en los proyectos estadísticos de sus estudiantes, encontrado alumnos que utilizan polígonos de frecuencias con variables cualitativas, o diagrama de barras horizontal para representar datos que debieran representarse en un diagrama de dispersión. Otras veces, construyen gráficos sin sentido, por ejemplo se representan variables no relacionadas entre sí en un mismo gráfico.

Respecto a las escalas de los gráficos construidos por los estudiantes Li y Shen (1992) encontraron los siguientes problemas:

- Elegir una escala inadecuada para el objetivo pretendido (por ejemplo no se cubre todo el campo de variación de la variable representada).
- Omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos.
- No especificar el origen de coordenadas.
- No proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes.

Encontramos también investigaciones sobre los errores en la lectura y comprensión de gráficos específicos. En el diagrama de barras, al variar la disposición de los datos (por ejemplo al usar un diagrama de barras horizontal en lugar de vertical) los estudiantes pueden tener errores simples de lectura (Pereira Mendoza y Mellor, 1990).

Lee y Meletiou (2003) nos alertan de cuatro principales categorías de razonamientos erróneos a la hora de construir, interpretar y aplicar los histogramas en diferentes contextos de la vida real:

- Percepción de los histogramas como representación de datos aislados, suponiendo que cada rectángulo se refiere a una observación particular y no a un intervalo de valores.
- Tendencia a observar el eje vertical y comparar las diferencias en las alturas de las barras cuando comparan la variación de dos histogramas.
- Interpretación determinista, sin apreciar que los datos representan un fenómeno aleatorio que podría variar al tomar diferentes muestras de la misma población.
- Tendencia a interpretar los histogramas como gráficos de dos variables (es decir, como diagramas de dispersión).

Wu (2004) trató de clasificar los distintos errores que una muestra de estudiantes de secundaria en Singapur cometían al trabajar con los distintos tipos de gráficos. Para ello usa un test, que consistía en 10 preguntas con 53 ítems, que pasó a una muestra de 907 estudiantes de secundaria de edades comprendidas entre 13 y 15 años, realizando entrevistas a 63 de los alumnos.

El análisis de los resultados mostró que los estudiantes poseían en general habilidades relacionadas con la comprensión gráfica pero que tuvieron más dificultad al interpretar o evaluar distintos gráficos estadísticos, debido a que este tipo de tareas requería de realización de inferencias a informaciones no mostradas directamente en el gráfico.

Para resolver los ítems propuestos por el autor, los estudiantes deberían poseer habilidades relacionadas con la comprensión, comunicación y habilidades de cálculo. Una vez analizadas las respuestas se encontraron las siguientes categorías de error: (1) errores de comprensión, (2) explicaciones incorrectas, (3) errores de cálculo, (4) errores en las escalas, (5) errores en títulos, etiquetas o especificadores, (6) errores en gráficos de sectores, (7) problemas con el tamaño de los elementos en un pictograma, (8) confusión entre gráficos parecidos pero de naturaleza distinta (por ejemplo, entre histograma y gráfico de barras), (9) confusión entre frecuencia y valor de la variable, (10) errores al manejar información proveniente de los gráficos, (11) problemas en el uso del contexto. Los más comunes fueron los referentes a las escalas y especificadores del gráfico, siendo también frecuentes los errores de comprensión de la información representada.

### 3.3.8. GRÁFICOS EN ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

Como se analizó en el capítulo 1, las representaciones gráficas de datos cobran un peso importante en el análisis exploratorio de datos, que potencia y valora el uso de las representaciones gráficas como una buena herramienta de análisis y no sólo como un medio de comunicación. La importancia de los gráficos dentro del análisis exploratorio de datos es también resaltada por Ben-Zvi (2000), quien sugiere que:

> El análisis exploratorio de datos es la disciplina de organización, descripción, representación y análisis de datos, con una fuerte confianza en las herramientas analíticas y visuales. Su objetivo principal es dar sentido y buscar más allá de los datos para que, de esta manera, junto a la inferencia, se puedan explorar nuevos datos (p. 130).

Hasta la década de los 90, el análisis de datos se basó fundamentalmente en el cálculo de estadísticos, y equiparando el análisis con el modelo confirmatorio. En esta visión, el único propósito era poner a prueba una determinada hipótesis, suponiendo que el conjunto de valores se ajusta a un modelo preestablecido, sin pretender explorar cualquier otra información que puede deducirse de ellos (Batanero, Estepa y Godino, 1991).

Según estos autores, una idea fundamental del análisis exploratorio de datos es que el uso de diversas representaciones favorece la producción de nuevos conocimientos. Por ejemplo pasando de tablas a gráficos, se visualiza la estructura de los datos. La escala en la que una de las variables es observada y registrada no es única, por lo que, a veces, transformando los valores originales a una nueva escala se puede lograr mejor visualización.

Aunque cualquier gráfico se puede usar dentro del análisis exploratorio de datos, se han desarrollado algunos como los diagramas de tronco y los gráficos de la caja específicamente dentro de esta corriente, ya que se facilita la comparación de varias muestras y ayudan a que los estudiantes comprendan conceptos más complejos de inferencia, como los intervalos de confianza (Biehler, 1994). La experiencia con estos gráficos también puede contribuir a mejorar la comprensión crítica, debido a que ayudan a centrar la atención en aspectos particulares de la distribución.

Según Batanero (2001), la emergencia del análisis exploratorio de datos está muy relacionada con la de los métodos multivariantes. Esta posibilidad puede extenderse, según Biehler (1994), añadiendo etiquetas a algunos de los valores del gráfico, o añadiendo símbolos o colores para los valores de alguna segunda variable. Estas características constituyen una relación con los datos completamente diferente de la que se obtiene con la estadística clásica. Por todo ello, diversos autores han analizado el uso de los gráficos, dentro del análisis exploratorio de datos por parte de los estudiantes, como resumimos a continuación.

Baker, Derry y Konold (2006) diseñaron experimentos con el fin de fomentar en alumnos de grado 6 (11 años) razonamientos estadísticos sobre medidas de posición central y variación a partir del trabajo con gráficos. Los alumnos trabajaron con *Tinkerplots*, que es un software diseñado particularmente para trabajar con análisis exploratorio de datos en la escuela secundaria y permite trabajar con múltiples representaciones de datos estadísticos. Una de sus ventajas es que se puede pasar fácilmente de un gráfico a otro, lo que permite a los alumnos crear conexiones entre los distintos gráficos estadísticos.

Los datos se obtuvieron por medio de un proyecto, que constaba de distintos experimentos en que había que comparar las distribuciones de las longitudes de una muestra de peces criados en una piscifactoría y cuyo crecimiento es modificado genéticamente y otra muestra de peces normales, donde cada alumno obtenía los datos mediante simulación. Inicialmente los alumnos realizaron gráficos estadísticos de las dos distribuciones. A partir de los gráficos observaban si había una parte del gráfico dónde se agrupasen mayor cantidad de valores (moda). Esta noción intuitiva la utilizaban los autores como precursora de otras medidas de tendencia central como la media. También se observó cómo determinados estudiantes fueron capaces de observar diferentes tipos de variación: entre las distribuciones y entre el tamaño de las muestras.

En otra parte del proyecto, se pedía a los alumnos realizar predicciones y estudiar las formas de las distribuciones a partir de los gráficos que realizaban con Tinkerplots. También se estudió el razonamiento de los alumnos cuando estos tenían que modificar los tamaños muestrales, ya fuese por medio de simulación o por conjuntos de datos disponibles en el software utilizado. Los autores concluyen que el trabajar con proyectos estadísticos y Tinkerplots y sus distintas opciones puede ayudar a los alumnos a desarrollar lenguaje estadístico y familiarizarse con los gráficos para extraer información de ellos, empezando a razonar intuitivamente con conceptos estadísticos como algunas medidas de tendencia central y dispersión.

Ben-Zvi y Friedlander (1997) analizan los gráficos producidos por sus alumnos al trabajar con proyectos de análisis de datos con ayuda del ordenador, identificando cuatro categorías:

- *Uso acrítico:* Los estudiantes construyen gráficos rutinariamente aceptando las opciones por defecto del software, aunque no sean adecuadas. Tienen también dificultad en valorar las relaciones sugeridas en sus representaciones gráficas, identificando sólo la información obvia, por ejemplo los máximos.
- *Uso significativo de una representación:* Los estudiantes construyen correctamente un gráfico si se les indica cuál ha de utilizar; también lo pueden justificar en base al tipo de datos o al problema planteado. Son capaces de modificar y transformar la gráfica (por ejemplo, cambiar una opción del software) e interpretan los resultados, pero no son capaces de seleccionar la gráfica más adecuada cuando tienen varias para elegir.
- *Manejo significativo de representaciones múltiples:* En este caso, los alumnos toman decisiones en la selección de los gráficos más adecuados, toman en consideración cuál es la contribución de éstos a su problema.
- *Uso creativo:* Cuando el alumno elabora un gráfico correcto, no habitual, para presentar y justificar sus ideas.

En otra investigación posterior Ben-Zvi (2002) evalúa las capacidades de los alumnos de 13 años para dar sentido a datos estadísticos y a sus representaciones. Trata también de analizar las dificultades con las que pueden encontrarse los alumnos para pasar de una *visión local* de los datos (por ejemplo fijarse solamente en un punto de un gráfico) a un *visión global* en la que se necesitan habilidades para buscar, describir y explicar patrones y tendencias en un conjunto de datos. Sugiere que la obtención de una visión global de los datos puede ser un proceso complejo para los estudiantes.

El autor propuso una tarea a 80 alumnos que trabajaron en parejas y habían recibido clases de análisis exploratorio de datos durante 10 semanas. En una primera parte se pidió a los estudiantes que realizasen preguntas e hipótesis acerca de la inmigración en Israel (desde 1948) a partir de los datos oficiales sobre el número de inmigrantes por año. En la tarea no se les dio muchas indicaciones a los alumnos para así observar las capacidades de estos al definir preguntas e hipótesis de investigación y al utilizar herramientas estadísticas para analizar datos reales. Las preguntas e hipótesis que formularon los alumnos fueron clasificadas en: contextuales (¿Cuál es el origen de la mayoría de la inmigración en Israel?), locales (¿Cuál fue el año de mayor inmigración en Israel?) y globales (¿Cuál es la tendencia en la inmigración en Israel a lo largo de los años?).

En la segunda parte los estudiantes tenían que realizar e interpretar representaciones de los datos de los que disponían. Se observó que muchos de los estudiantes trabajaron experimentando con distintos gráficos antes de elegir el que pensaban fuese más adecuado para obtener conclusiones a la tarea propuesta. Además, aproximadamente un tercio de los alumnos fueron capaces de realizar cambios en sus gráficos, por ejemplo modificando las escalas, para investigar las tendencias de los datos. Las interpretaciones de las representaciones gráficas de los alumnos fueron clasificadas en locales y globales, y se observó que la mayoría de los estudiantes fueron capaces de interpretar el gráfico de una manera global, observando al menos una de las siguientes características de los datos: sub-grupos, la existencia de variabilidad, ciclos, tendencias o asociaciones.

El autor pudo observar la tendencia de los alumnos a una visión local cuando empezaron su formación en análisis exploratorio de datos, que fue evolucionando a una visión global, sobre todo, de las representaciones gráficas que realizaron.

### 3.3.9. COMPRENSIÓN GRÁFICA DE LOS FUTUROS PROFESORES

Las dificultades con los gráficos estadísticos no son exclusiva de los estudiantes, sino que también se presentan en los futuros profesores, más concretamente en los alumnos de las Facultades de Ciencias de la Educación. A continuación se examinan las investigaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores en formación en relación a los gráficos estadísticos.

#### 3.3.9.1. CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS

Bruno y Espinel (2005) estudian la forma en que futuros profesores construyen un histograma de frecuencias a partir de una lista de datos. Dicha investigación se desarrolló en dos fases.

En la primera de ellas se partía de la hipótesis de que la habilidad para representar números en la recta numérica condiciona la comprensión y la realización de gráficas estadísticas, en este caso de histogramas y polígonos de frecuencias. Las autoras indican que agrupar números con decimales en intervalos de clases, para construir un histograma, requiere un claro conocimiento de estos números. Para estudiar esta hipótesis se les pasó a 39 alumnos de la Facultad de Educación una prueba escrita con datos tomados de la prensa diaria. En la primera pregunta de esta fase se pide a los alumnos construir una tabla de frecuencias absolutas y relativas y un histograma usando las frecuencias relativas e intervalos de igual longitud. Sólo 11 alumnos representan las frecuencias relativas, aunque los alumnos no tuvieron dificultades en representar números decimales en el eje vertical.

Se observa que los alumnos tienen dificultades en representar valores en el eje *X* aún cuando son capaces de agrupar los datos en intervalos. Por ejemplo colocan todo el intervalo en un punto (sin utilizar la marca de clase). Otro error observado es que representan las barras no solapadas en los histogramas aún siendo conscientes de que están trabajando con variables continuas, y estos errores no son atribuibles a la falta de dominio de la recta numérica.

La segunda fase de esta primera investigación consistió en pasar a los futuros profesores dos cuestiones. En la primera se les pedía construir un histograma y un polígono de frecuencias a partir de una tabla de datos ya agrupados en intervalos y en la segunda tenían que evaluar cinco gráficas realizadas por estudiantes (también futuros profesores de primaria) de las cuales sólo una era correcta. Esta pregunta tenía como objetivo observar si los errores de construcción de los histogramas son persistentes en la lectura reflexiva de los mismos por parte de los futuros profesores.

Los principales errores encontrados en la construcción de los histogramas fueron: usar barras no adosadas, no colocar etiquetas y omitir intervalos de frecuencia nula. Los principales errores encontrados en la construcción de los polígonos de frecuencias fueron: no unir por las marcas de clase, omitir intervalo de frecuencia nula y confusión entre frecuencia e intervalos. Una reflexión de las autoras es que a partir de ciertos momentos hay conceptos que se consideran asimilados por parte de los futuros profesores de primaria y ese es uno de los argumentos que se usan para no enseñar gráficos estadísticos en la Universidad. Su investigación resalta tanto errores de carácter técnico pero también otros de carácter conceptual como el no diferenciar lo discreto de lo continuo.

Continuando la investigación, Bruno y Espinel tratan de comparar los errores de los futuros profesores en la construcción del histograma y el polígono de frecuencias, con su evaluación de histogramas producidos por posibles estudiantes. Prácticamente todos los estudiantes cometen algún error al construir los gráficos, pero lo más preocupante es la falta de coherencia entre la forma que los futuros profesores construyen un gráfico y la forma en que lo evalúan. Además, en caso de coherencia se trata de alumnos que cometen errores en la interpretación de los gráficos, y también consideran correctos los gráficos incorrectos de sus posibles estudiantes.

### 3.3.9.2. LECTURA Y TRADUCCIÓN DE GRÁFICOS

Preocupadas por estos resultados las autoras continúan la investigación utilizando un cuestionario sobre cultura y razonamiento estadístico en relación a los gráficos (Espinel, 2007; Espinel Bruno y Plasencia, 2008). Para ello se adaptaron y seleccionaron una serie de cuestiones, diseñadas en el proyecto ARTIST (delMas, Garfield y Ooms, 2005). Dos preguntas evaluaban la cultura estadística, otras dos el razonamiento estadístico y la restante ambos aspectos. Además se comparan los resultados obtenidos por estudiantes de La Laguna (137 alumnos) con los obtenidos en la investigación de delMas en estudiantes norteamericanos (345 alumnos).

Una de las dos preguntas referentes a la cultura estadística consiste en la lectura de un histograma y la otra en la interpretación de información estadística contenida en otro histograma. Al comparar los resultados de estas preguntas obtenidos por los estudiantes españoles, se ve que obtienen mejores resultados estos en la primera pregunta que los norteamericanos.

La pregunta de mayor dificultad de las planteadas en la prueba fue la referente al razonamiento estadístico y que consistía en emparejar un gráfico con una descripción. Parte de esta dificultad puede deberse a que en lo gráficos utilizados para esta cuestión no aparecían escalas o valores para poder asociar los gráficos a las descripciones basándose en los contextos. La otra pregunta relacionada con el razonamiento estadístico consistía en emparejar un histograma dado con un gráfico de cajas de tres que les fueron presentados a los alumnos, el resultado de esta pregunta fue relativamente bueno en estudiantes americanos y españoles. Por último la pregunta relacionada tanto con la cultura como con el razonamiento estadístico consistía en que los alumnos eligiesen de entre los gráficos que se les presentaba el que mejor caracterizase la forma de la distribución de los datos que se les mostraba en la pregunta, esta pregunta resultó ser muy difícil.

Como conclusiones que se obtuvieron de este estudio fueron que a pesar de la confusión entre histograma y diagrama de barras, esto parece no impedir el traducir los datos representados en un histograma a otro gráfico construido con los mismos dato y se observa que a los estudiantes españoles les resulta difícil reflexionar sobre la forma de las distribuciones a partir de una descripción.

Carrión y Espinel (2005a y b; 2006) desarrollaron una investigación comparativa entre estudiantes de España (Las Palmas) y Nueva Zelanda (Auckland) de 10 a 12 años de edad. Para ello se utilizó un cuestionario cuyo objetivo era identificar y analizar qué dificultades y limitaciones tienen los estudiantes con histogramas, gráficos de dispersión, caja, tallo y hoja en el análisis de datos. Otro propósito de su trabajo es indagar la habilidad y capacidad para traducir entre distintas formas de presentar información, esto es, pasar de un gráfico a otro.

El cuestionario contenía cuatro tareas (una por cada gráfico) con un total de 14 ítems. Se les pidió a los alumnos que seleccionaran entre tres opciones la que ellos pensaran que era la más apropiada a la situación. El estudiante debería elegir la mejor opción para traducir el gráfico en una tabla o viceversa, según fuera la situación presentada. Los autores indican que pocos estudiantes fueron capaces de comprender las relaciones entre los diferentes tipos de gráficos y tuvieron dificultades al traducir de una a otra representación. En general, las traducciones más difíciles fueron aquellas en las que aparecen la gráfica tallo-hoja y el gráfico de cajas. Es interesante observar que el gráfico de puntos, que es poco frecuente, sea el que resulta más fácil a los estudiantes, quizás porque los relacionan con los gráficos de funciones.

Una vez pasado dicho cuestionario a alumnos de educación primaria se pasó a alumnos de magisterio pertenecientes a dos grupos diferenciados, el primer grupo (A) de 40 alumnos realizó el cuestionario con antelación a la instrucción en Estadística, y un segundo grupo (B) de 37 alumnos realizó el cuestionario después del proceso de instrucción de los contenidos de Estadística de la asignatura que estaban cursando.

En el caso de los futuros profesores la tarea más difícil fue pasar de información en forma de texto a un gráfico (gráfico de barras, hojas y tallos y gráfico de cajas). Dentro de esta tarea el mayor porcentaje de éxito se da dentro de la pregunta relacionada con el gráfico de barras (66%) y el menor porcentaje de respuestas correctas (28%) se da dentro de la pregunta en la que había que pasar de un texto a un gráfico de cajas, que tiene mayor complejidad. La pregunta relacionada con el gráfico de tallo y hojas fue más sencilla a pesar de ser también un gráfico menos familiar.

En el estudio comparativo entre los grupos A y B, se nota una mejoría en las respuestas relacionadas con los gráficos de cajas y tallo-hoja en el grupo B, es decir después de instrucción en Estadística. Por otra parte, se compararon los resultados con los de estudios previos con alumnos de Educación Primaria, observándose similitudes entre los errores cometidos de ambos tipos de estudiantes.

**Lectura de gráficos no escolares**

Monteiro y Ainley (2006, 2007) sugieren que, para interpretar un gráfico estadístico, es necesario "sentido crítico" para referirse al modo en el cual un lector de gráficos estadísticos necesita poner en juego una variedad de distintos conocimientos y experiencias.

En el contexto escolar, la interpretación gráfica se ha centrado sobre todo en conocimientos y procesos estadísticos, prestando poca atención en el contexto social del que han sido tomados los datos presentes en el gráfico. Por ello los autores proponen el trabajo con gráficos extraídos de los medios de comunicación, como estrategia pedagógica para acortar distancias entre el uso de los gráficos en contextos escolares y contextos fuera de la escuela. Pero advierten que el trabajar en las aulas con gráficos obtenidos de los medios de comunicación requiere cuidadosas consideraciones en la elección de estos.

Para obtener los datos de su investigación se elaboró un cuestionario con gráficos tomados de la prensa, que se eligieron teniendo en cuenta que el nivel de complejidad del gráfico fuese accesible para los alumnos, que el tema del gráfico fuese familiar y además que los gráficos seleccionados no tuviesen errores o información engañosa. El cuestionario se pasó a estudiantes británicos y brasileños. Los brasileños eran profesores de educación primaria en formación junto con la mayoría de los británicos, aunque entre estos había también estudiantes ya graduados.

Los resultados obtenidos en una de las preguntas del cuestionario muestran una notable diferencia entre los estudiantes británicos y los brasileños. Los primeros responden incluyendo aspectos del gráfico, mientras que los últimos lo hacen bajo consideraciones personales acerca del contexto de los datos. Los autores conjeturan que puede ser debido a que en el Reino Unido los alumnos tienen mayor experiencia al trabajar con temas de análisis de datos que en Brasil. Por otro lado, los alumnos brasileños están más acostumbrados a leer los periódicos.

Al estudiar la competencia de futuros profesores en la lectura de gráficos tomados de la prensa diaria, los autores encontraron que muchos no tenían conocimientos matemáticos suficientes para llevar a cabo dicha lectura. La mayoría indicó que no tuvo formación específica en la lectura de gráficos estadísticos durante sus estudios en la universidad y reconoció su necesidad que tenían de formación al respecto. También se observó como la interpretación de los gráficos moviliza conocimientos y sentimientos que inciden en su comprensión; por ejemplo, se obtuvo mucho mejores resultados al interpretar un gráfico sobre incidencia de cáncer en las mujeres que otro matemáticamente equivalente sobre tiempo de gestación de diferentes especies animales.

Además se observó que la mayoría de los estudiantes mostraron habilidades para pensar críticamente sobre los datos representados en los gráficos y que ponían en juego distintos tipos de conocimientos para realizar la interpretación de los gráficos. Los autores ven esto positivo porque argumentan que una lectura completa de un gráfico necesita conectar las relaciones cuantitativas expresadas en el gráfico con los conocimientos estadísticos y del contexto social de los datos que aparecen representados en el gráfico Finalizan indicando que la enseñanza de gráficos estadísticos debería tener en cuenta la variedad de elementos a tener en cuenta en la interpretación de los gráficos.

#### 3.3.9.3. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Son muy pocas las investigaciones que se centran en el conocimiento didáctico de los futuros profesores respecto a la enseñanza de los gráficos y han sido realizadas por González y Pinto. Los autores indican que, para el desarrollo profesional del profesor, éste necesita conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico y conocimiento pedagógico del contenido, y con respecto a las gráficas estadísticas se observa que incluso después de un proceso de formación el futuro profesor encuentra dificultades y es importante que éste sea capaz de reconocer dichas dificultades, por ejemplo la confusión entre histogramas y diagramas de barras. Sugieren que es importante mostrar a los futuros profesores las distintas formas de representar la información, incentivando así el trabajo con gráficos distintos que representen los mismos datos, carencia encontrada en muchos libros de texto de primaria y secundaria. Además hay que tener presentes las características de cada tipo de gráfico para así poder ser capaz de ver que gráfico es más adecuado ante una situación problemática.

En un estudio cualitativo González y Pinto (2008) analizan la forma en que algunos futuros profesores seleccionan y clasifican gráficos para preparar una unidad didáctica dirigida a la enseñanza del tema en educación primaria. Los estudiantes de su muestra parecen desconocer todo lo relacionado con las dificultades de los futuros alumnos o los niveles de comprensión de gráficos. Además, a la hora de clasificarlos o seleccionarlos sólo tienen en cuenta los aspectos procedimentales y no la utilidad del gráfico para un problema particular o las posibles actividades interpretativas que pueden llevarse a cabo con ellos.

**Conocimiento didáctico del contenido**

En relación con el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de Estadística González y Pinto (2008) estudian el conocimiento y las concepciones de cuatro estudiantes para profesor de matemáticas de Secundaria respecto a la enseñanza de la representación gráfica en Estadística. Su trabajo se basa en el estudio de dos dimensiones del CDC: conocimiento del contenido a enseñar y conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales.

Se realizó un estudio cualitativo de cuatro casos usando la metodología de las investigaciones de Llinares sobre pensamiento del profesor y los niveles de lectura de gráfico de Curcio (1987) y Friel, Curcio y Bright (2001). Se pidió a los profesores clasificar problemas de representación gráfica tomados de libros de textos de Educación Secundaria sobre varios tipos de gráfico (histogramas, sector circular, barras, tallo y hoja). También se preguntó como interpretaban cada problema y como enseñarían la representación gráfica a partir de ellos y cómo ayudarían a sus estudiantes.

Entre los resultados se observó que la enseñanza es percibida por estos profesores como transmisión de contenidos, manejo de recursos y comunicación, de forma que el aprendizaje, aunque requiera esfuerzo personal, también está ligado a una buena transmisión por parte del profesor. La investigación de González y Pinto (2008) muestra que algunos estudiantes para profesor tienen escasos conocimientos didácticos en relación a los gráficos estadísticos. Por ejemplo, no son capaces de distinguir los diferentes niveles cognitivos asociados a la lectura de gráficos definidos en investigaciones como la de Friel, Curcio y Bright (2001), ni comprenden los diferentes componentes y procesos ligados a esta interpretación. Los participantes desconocen asimismo varios componentes y procesos en la interpretación de gráficos. Para enseñar los gráficos estadísticos, de acuerdo a su concepción, hay que seguir diferentes fases relacionadas con: la construcción de gráficos, la interpretación de gráficos (que para ellos es simplemente una lectura y la aplicación de algoritmos y fórmulas). Cuando se les pide clasificar los gráficos de los libros de texto, se centran sólo en los aspectos procedimentales, mostrando falta de conocimiento sobre el aprendizaje de los gráficos o las dificultades de los estudiantes en el tema.

En Pinto y González (2008) se presenta un estudio del CDC de un profesor universitario de Estadística sobre el tema de la representación gráfica, con diferentes métodos de recogida de datos: (a) entrevista contextual y sobre la planificación de las clases, (b) cuestionario didáctico sobre representación gráfica, (c) entrevista en profundidad respecto de las respuestas al cuestionario, (e) análisis de materiales para la enseñanza.

La profesora estudiada mostró una concepción dogmático-conservadora de la matemática que incide en su manera de enseñar estadística, basada en el enfoque de transmisión de conocimientos, muy rígido y bajo una estructura jerárquica de los contenidos. En cuanto a las representaciones gráficas, se centra en su construcción y la realización de cálculos estadísticos, y no trata la interpretación y análisis de los gráficos. Los contenidos no los trabaja en clase a nivel de razonamiento, sino sólo a un nivel muy básico, y tenía pocos conocimientos sobre las posibles dificultades y errores de sus estudiantes en el tema.

Este estudio es ampliado por Pinto (2010) en su tesis doctoral, donde realiza un estudio comparado de dos casos (dos profesores universitarios, un matemático y un psicólogo que enseñan estadística en educación y psicología, respectivamente). Tras una amplia revisión de la literatura sobre CDC y sobre la investigación en gráficos estadísticos determina un Sistema de Dimensiones e Indicadores (SDI) del CDC que le permiten analizar tres componentes del CDC: el conocimiento del contenido de la disciplina a enseñar, el conocimiento de estrategias y representaciones instruccionales y el conocimiento del estudiante. Utiliza los mismos instrumentos que hemos descrito para el trabajo anteriormente citado.

Los resultados de este estudio revelan que el CDC de cada profesor está influenciado por su concepción hacia la matemática y la estadística, la formación que recibió como estudiante y su experiencia profesional. Por ejemplo, uno de los profesores, que suele colaborar en el análisis estadístico de datos en psicología, suele usar la enseñanza a través de proyectos e investigaciones y está mucho más interesado en un enfoque constructivista de la enseñanza que su compañero.

Se encontró que se utiliza un repertorio reducido de estrategias para la enseñanza de la representación gráfica y que exclusivamente se estudia al nivel de lectura de gráficos, es decir no se alcanzan los niveles superiores en la categorización de Curcio (1989). El autor sugiere que es posible que esto sea forzado por los programas de la asignatura que sólo consideran los gráficos como instrumento de presentación de datos y no de análisis.

Otro resultado es que los profesores sostienen una concepción diferente sobre la estadística que sobre la representación gráfica, su aprendizaje y enseñanza. Asimismo, presentan algunas dificultades relacionadas con la adquisición del CDC, por ejemplo, para relacionar el conocimiento del contenido a enseñar con las representaciones instruccionales y el conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante; utilizar una variedad de recursos y materiales para la enseñanza de la representación gráfica; y conocer el contenido y estudio de la representación gráfica, más allá de la construcción de gráficos.

## 3.4. CONCLUSIONES SOBRE LAS INVESTIGACIONES SOBRE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

La investigación reseñada muestra que la lectura e interpretación del lenguaje gráfico es una habilidad altamente compleja, que no se adquiere espontáneamente, pero, por desgracia, tampoco parece alcanzarse con la enseñanza. Una posible explicación de las dificultades surgidas con el lenguaje gráfico es que la simplicidad de este es sólo aparente, pues incluso el más simple de los gráficos puede considerarse un modelo matemático. Al reducir los datos, pasando de casos individuales a los valores de una variable y sus frecuencias, se introduce la *distribución de frecuencias,* concepto complejo, que se refiere al agregado (población o muestra) y no a los datos particulares.

A pesar de la importancia de los gráficos estadísticos, la investigación en didáctica de la matemática nos alerta que la competencia relacionada con el lenguaje de las gráficas estadísticas no se alcanza en la educación obligatoria (Cazorla, 2002) ni tampoco en la preparación de los futuros profesores de Educación Primaria (Espinel, 2007). Para explicar estas dificultades se ha argumentado la influencia de factores como: carencias en el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Berg y Smith, 1994) y / o en sus habilidades para construir e interpretar gráficas y el uso pasivo de estas gráficas en las aulas, que excluye su construcción e interpretación por parte de los estudiantes (Ainley, Nardi y Pratt, 2000). En nuestro trabajo trataremos de dar una explicación de esta dificultad a partir del análisis semiótico de la actividad relacionada con la construcción y lectura de los gráficos.

Friel, Curcio y Bright (2001) indican que muchos investigadores han estudiado la comprensión de los gráficos pero muy pocos se han interesado por las dificultades en su construcción y en la elección del gráfico adecuado para resolver un problema. Uno de los objetivos de nuestra investigación será precisamente indagar estas capacidades en los futuros profesores.

Otra conclusión que podemos extraer del análisis de estas investigaciones es que la preparación de los profesores para enseñar los gráficos estadísticos es un tema importante para la investigación y para los formadores de profesores. La evaluación del conocimiento del profesor sigue siendo un tema relevante, debido a la escasez de investigaciones y las demandas de que los estudiantes sean enseñados por profesores bien cualificados, la necesidad de evidenciar los resultados de los programas de formación de profesores y el debate establecido acerca de cuál es el contenido matemático para la enseñanza que debe poseer el profesor y la necesidad de definirlo (Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007). Esto es especialmente importante en el campo de la estadística, debido a la escasez de investigación previa. Nuestra investigación trata de contribuir a proporcionar más información al respecto con el fin de poder mejorar en el futuro la preparación de los profesores.

# CAPÍTULO 4.
# EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS DE LOS PROFESORES SOBRE LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

4.1. Introducción
4.2. Descripción de la muestra
4.3. Análisis a priori del proyecto
4.3.1. La actividad
4.3.2. El proyecto
4.3.3. Solución esperada de los estudiantes
4.3.3.1. Análisis del número de caras
4.3.3.2. Análisis del número de rachas
4.3.3.3. Análisis de la longitud de la racha más larga
4.4. Complejidad semiótica de los gráficos construidos
4.5. Errores y dificultades en la construcción de gráficos
4.5.1. Clasificación de errores en la construcción de gráficos
4.5.2. Uso del ordenador e influencia en los errores
4.5.3. Errores y complejidad semiótica
4.6. Lectura de los gráficos
4.6.1. Niveles de lectura de los gráficos
4.6.2. Niveles de lectura y complejidad semiótica
4.7. Conclusiones de los estudiantes
4.7.1. Clasificación de las conclusiones
4.7.2. Relación entre gráficas construidas y conclusiones
4.8. Conclusiones sobre los conocimientos matemáticos sobre los gráficos estadísticos

## 4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo analizamos los gráficos producidos por varias muestras de estudiantes de Magisterio en la realización de un proyecto abierto de análisis de datos. Aunque la actividad con la que se tomaron los datos es más amplia, y requería también la elaboración de tablas y resúmenes estadísticos, nosotros nos centramos sólo en el estudio de los gráficos producidos, que analizaremos desde distintos puntos de vista. Los datos se tomaron en dos cursos académicos consecutivos (2007-2008 y 2008-2009) y en varios grupos de estudiantes cada uno de los cursos, todos ellos dentro de la misma especialidad y asignatura.

Primeramente describimos las muestras que participan en el estudio, para continuar con el análisis a priori del proyecto que tuvieron que realizar los futuros profesores de dichas muestras. Seguidamente clasificamos los gráficos construidos por los estudiantes según unos niveles de complejidad semiótica (Arteaga, 2008), niveles definidos teniendo en cuenta algunas ideas teóricas de Font, Godino y D'Amore (2007). Para cada nivel presentaremos un ejemplo realizando un análisis semiótico de los mismos para mostrar la diversidad de objetos y procesos matemáticos involucrados en los diferentes niveles definidos. Analizamos también la corrección de los gráficos, realizando una clasificación de los errores detectados, relacionándolos con la complejidad semiótica del gráfico y con el uso del ordenador. A continuación se estudian los niveles de lectura mostrados por los participantes de los gráficos construidos y la relación entre niveles de lectura y complejidad semiótica del gráfico. Finalmente se estudian las conclusiones obtenidas por los futuros profesores respecto al proyecto planteado y la relación entre corrección de la conclusión y complejidad semiótica del gráfico. Finalizamos con la discusión de las conclusiones sobre los conocimientos común y especializado del contenido que permiten evaluar los análisis anteriores.

## 4.2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

La actividad se ha llevado a cabo con dos muestras sucesivas (en total 207 estudiantes), formadas por alumnos que cursaban el segundo año del plan de estudio de la Diplomatura de Magisterio, en la especialidad de Educación Primaria. Todos los datos se tomaron la asignatura "Currículo de matemáticas en educación primaria":

- El curso 2007-2008 participaron 101 alumnos, que estaban divididos en tres grupos, impartido cada uno por diferente profesor, aunque la actividad, el material usado y el análisis es el mismo para todos los grupos.
- El curso 2008-2009 participaron 106 alumnos, que estaban divididos en tres grupos, impartido cada uno por diferente profesor, aunque la actividad, el material usado y el análisis es el mismo para todos los grupos e igual al usado el primer año. Los profesores fueron los mismos el primer y segundo año.

Como maestros generalistas, estos estudiantes no están especializados en matemáticas, sino que en su vida profesional tendrán que impartir las diferentes materias (matemáticas, lengua, ciencias naturales, ciencias sociales, etc.) dentro de su aula. Sus edades oscilan, en la mayoría entre los 19 y 21 años, con predominio de los que tienen 19 años, aunque en algunos casos nos encontramos con estudiantes de 40 o más años; se trata de personas que por diferentes motivos realizan la diplomatura en otros periodos de sus vidas, por ejemplo, amas de casa. En la especialidad de Maestro de Educación Primaria, el curso 2007-2008 hubo un total de 318 alumnos matriculados en la asignatura de Currículo de Matemáticas en Educación Primaria con 50 de ellos (15,7 %) repetidores, e igualmente en el curso 2008-2009 el número total de alumnos y alumnos repetidores en estas asignaturas fue muy parecido. De entre ellos se eligieron tres grupos naturales en cada curso que formaron la muestra de nuestro estudio, siendo estos grupos similares en sus características al total de alumnos matriculados.

La proporción de alumnos repetidores en la asignatura de Matemáticas y su Didáctica dichos cursos fue alrededor del 40%, lo que indica que los estudiantes, en general tienen dificultades en la materia. Dichas dificultades son compartidas por futuros profesores en otras universidades españolas, como lo muestran varias investigaciones, por ejemplo, Hernández, Noda, Palarea y Socas (2003).

## 4.3. ANÁLISIS A PRIORI DEL PROYECTO

### 4.3.1. LA ACTIVIDAD

La actividad con la que se tomaron los datos era parte de una práctica a la que se dedicó dos sesiones de clase de dos horas de duración cada una, dentro de la asignatura citada (Currículo de Matemáticas en Educación Primaria) y se relaciona con el cuarto bloque del currículo de matemáticas en la Educación Primaria: *Tratamiento de la información, azar y probabilidad.*

Los estudiantes realizaron la actividad individualmente y produjeron un informe escrito fuera del horario lectivo. Este requisito es parte de la metodología de enseñanza universitaria implantada en la Facultad de Ciencias de la Educación para adecuar los planes de estudio al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), iniciativa seguida por los países europeos para homogeneizar los títulos profesionales y hacerlos válidos en todo el territorio europeo. Ello implica similitud de contenidos y metodología de enseñanza, disminuyendo la parte dedicada a lecciones magistrales y aumentando el trabajo individual y en grupos de los estudiantes. El enunciado del proyecto dado a los estudiantes se incluye en el Anexo 1.

Dicha práctica, titulada *Evaluación de experiencias de enseñanza: estadística en primaria* tenía como objetivos adquirir competencias de análisis didáctico de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y también competencias de búsqueda de recursos didácticos. Puesto que es difícil llevar a todos los estudiantes a un aula de primaria a observar una sesión de clase, en lugar de ello, se realiza una experiencia de enseñanza de la estadística en la misma aula, consistente en un proyecto de análisis de datos, siendo en este caso los alumnos los futuros profesores (primera sesión) y posteriormente esta experiencia es analizada desde el punto de vista didáctico (segunda sesión):

- La primera sesión, cuyos resultados se analizan en este capítulo se dedicó al trabajo con el proyecto "Comprueba tus intuiciones sobre el azar". Siguiendo la metodología habitual en los proyectos estadísticos, se comienza planteando una investigación para comprobar si los alumnos de la clase (futuros profesores) en su conjunto tienen una buena intuición respecto a los experimentos aleatorios. Durante la sesión de clase se propone y realiza un experimento, para estudiar estas intuiciones y se recogen datos del experimento. Una vez realizado, se recogen colectivamente los datos de cada alumno en una hoja de registro (cada alumno tiene una copia). Queda como tarea para entregar al comienzo de la segunda sesión el análisis de los datos obtenidos y la producción de un informe escrito, incluyendo el análisis estadístico y las conclusiones sobre la pregunta planteada (si las intuiciones del conjunto de la clase sobre los fenómenos aleatorios son buenas o no). El alumno tiene libertad para usar cualquiera de los procedimientos estadísticos o gráficos que ya conoce.
- La segunda sesión se dedica al análisis didáctico de todo el proceso de enseñanza, incluyendo el trabajo realizado en clase, así como la tarea individual de los estudiantes, valorando su idoneidad didáctica global y cada uno de sus componentes. Este análisis didáctico se describe en el Capítulo 5, así como también los resultados de los informes individuales escritos de los estudiantes sobre el análisis didáctico realizado.

En este capítulo sólo nos ocupamos del componente matemático y por tanto de la primera parte de la práctica consistente en la realización del proyecto “Comprueba tus intuiciones sobre el azar”.

### 4.3.2. EL PROYECTO

El proyecto “Comprueba tus intuiciones sobre el azar” es parte de una unidad didáctica diseñada para introducir los temas sobre “tratamiento de la información, azar y probabilidad” en los primeros años de Educación Secundaria Obligatoria, pero su contenido estadístico es también adecuado para la formación de maestros (Batanero, 2001). Fines complementarios de este proyecto son mostrar la utilidad de la estadística para probar conjeturas y comprobar que las intuiciones sobre el azar a veces son engañosas. La secuencia de actividades se describe a continuación (una descripción más completa puede analizarse en Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008).

**Presentación del proyecto, instrucciones iniciales y discusión colectiva**

El profesor comienza explicando la organización global de la práctica y los dos componentes (matemático y didáctico) en que se trabajará durante las dos sesiones. Razona con los estudiantes el interés que tiene para un futuro maestro la observación y análisis didáctico de un proceso de enseñanza tal y como se lleva a cabo en el aula. Puesto que es imposible llevar al grupo completo de estudiantes a una escuela, lo que se va a hacer es organizar, como práctica de la asignatura, una sesión de clase, donde el profesor (formador de profesores) hace el papel de maestra/o y los futuros profesores el papel de alumnos.

Se indica que la secuencia didáctica que se va a experimentar trata del Bloque Estadística y Probabilidad, bloque de reciente inclusión en los Decretos de Enseñanza Mínima que los contemplan desde primer ciclo de Educación Primaria (MEC, 2006a). También se avisa que la metodología que se va a emplear es la de trabajo con proyectos, que es la recomendada ahora en la enseñanza, pero en la cual los futuros profesores pudieran no tener demasiada experiencia.

Se les pregunta si trabajaron el curso anterior con un proyecto de estadística, y la mayoría dice que sí, pero algunos no lo recuerdan o piensan que nunca han trabajado con proyectos. El profesor indica que la experiencia además permitirá ver el modelo de trabajo con un proyecto, que comienza con el planteamiento de un problema, sigue con la recogida de datos necesarios, su análisis y la elaboración de un informe de conclusiones. Recuerda a los estudiantes que este es el esquema general de investigación y que puede utilizarse en otras materias. También advierte que lo importante no es sólo el análisis de los datos, sino el proceso completo de investigación.

A continuación les indica que el proyecto es interdisciplinar, como ocurre con muchos proyectos estadísticos y que el campo de aplicación es la Psicología, más concretamente el estudio de las intuiciones. Se continúa con algunas preguntas sobre si ellos piensan que tienen o no buenas intuiciones, a las cuales diferentes estudiantes dan respuestas variadas.

Una vez conseguido el interés del estudiante se centra la discusión sobre la aleatoriedad y la intuición sobre los fenómenos aleatorios. Se pide a los estudiantes que den ejemplos de fenómenos aleatorios, respondiendo en la mayoría con juegos de azar tales como la lotería, lanzar un dado o lanzar una moneda. El profesor añade otros ejemplos diferentes, en meteorología y en la predicción del género de un niño que va a nacer. Se continúa la sesión con una discusión sobre si las personas tienen o no buena intuición respecto a los fenómenos aleatorios. El profesor pregunta a los alumnos qué interés puede tener el educar la intuición sobre los fenómenos aleatorios; los alumnos no parecen tenerlo claro. El profesor describe problemas asociados a las intuiciones erróneas en este campo, como la ludopatía, la interpretación incorrecta de resultados de pruebas médicas, o la valoración incorrecta de la evidencia en juicios u otras situaciones de toma de decisión.

**Introducción del experimento**

Conseguida la motivación de los alumnos, están de acuerdo evaluar sus propias intuiciones. Para conseguirlo se propuso a los futuros profesores llevar a cabo un experimento para decidir si la clase en conjunto tenía o no buenas intuiciones respecto a dichos fenómenos. Como el experimento aleatorio más sencillo entre todos los descritos en la clase consiste en lanzar la moneda, se opta por este experimento.

Los estudiantes expresan sus ideas sobre cómo organizar el estudio de las intuiciones; algunos proponen que se cuente el número de veces que cada estudiante acierta (cara o cruz) al lanzar una moneda al aire. Manifiestan el *Outcome approach* descrito por Konold (1991) por la cual los estudiantes interpretan una pregunta probabilística en forma determinista concentrándose en adivinar el resultado que saldrá al realizar el experimento.

Razonamos con los estudiantes en que, puesto que el experimento es aleatorio, la probabilidad de acertar por puro azar es 1/2 y no demostraría nada sobre la buena intuición del estudiante. Por ello conviene trabajar con una serie de experimentos, que, por un lado sea suficientemente larga para que se vean los posibles patrones, pero no tan larga que suponga excesivo tiempo de realizar el experimento. Se propone trabajar con 20 lanzamientos de una moneda.

El profesor explica que lo que se plantea en el proyecto es el estudio de las intuiciones globales del conjunto de la clase, es decir, no interesa saber si un estudiante aislado tiene buena o mala intuición, sino cómo son las intuiciones de las personas. Supuesto que las personas de la clase pueden representar a otras, al ser el grupo bastante numeroso, el estudio de la clase nos da una idea de las intuiciones de las personas en general, o al menos de los estudiantes de la Facultad. El profesor también explica que el experimento que se va a hacer reproduce otros experimentos hechos por psicólogos sobre percepción de la aleatoriedad en adultos y que en realidad estamos replicando estas investigaciones en la clase.

Indica que tener una buena intuición supondría que las personas fuesen (al menos en su mayoría) capaces de simular los fenómenos aleatorios. Lo mismo que una persona que sabe lo que es un rectángulo es capaz de dibujar uno correctamente, una buena intuición supondría ser capaz de escribir una serie de resultados del experimento, de modo que sean similares a una sucesión de resultados aleatorios. Se plantea el experimento, por medio de preguntas como las siguientes:

*1.* ***Introducción del proyecto***

*¿Tienes una buena intuición sobre el azar? ¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda 20 veces seguidas? ¿Serías capaz de escribir 20 resultados de lanzar una moneda (sin lanzarla realmente, sino como tú pienses que debieran salir) de forma que otras personas piensen que has lanzado la moneda en realidad? O, ¿podría otra persona adivinar que estás haciendo trampa?*

## Realización del experimento individual

El experimento propuesto consiste en inventar una secuencia de 20 posibles resultados al lanzar una moneda equilibrada (sin lanzarla realmente) de modo que la secuencia pueda pasar como aleatoria para otra persona y comparar con los resultados de 20 lanzamientos reales de una moneda. Este experimento está adaptado de otros realizados en las investigaciones sobre percepción subjetiva de la aleatoriedad (por ejemplo, de la investigación de Serrano, 1996).

Se da a los estudiantes una hoja de registro como la reproducida en la figura 4.3.1 y se les pide que completen, en primer lugar la parte de arriba, inventando una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda equilibrada, y que traten de repartir las caras y cruces, tal como ellos piensan que podrían salir al azar. Seguidamente cada estudiante lanza 20 veces una moneda y registra los resultados en la segunda parte.

Figura 4.3.1. Hoja de registro

| Secuencia simulada | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Secuencia real | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Decisión sobre qué variables analizar: estudio del número de caras**

Finalizado el experimento, el profesor inicia la discusión sobre cómo comparar los resultados de la totalidad de la clase en las secuencias reales y simuladas. Pregunta a los estudiantes qué se podría hacer para comparar las secuencias producidas por los estudiantes, haciendo alguna pregunta como la siguiente:

*¿Cómo podremos distinguir una secuencia realmente aleatoria de otra que hemos inventado?*
*Pero, ¿hemos de obtener exactamente 10 caras y 10 cruces? ¿Qué pasa si obtenemos 11 caras y 9 cruces? ¿Y si obtenemos 18 y 2?*
*¿Qué os parece si comparamos el número de caras en las secuencias real y simulada de todos los alumnos de la clase? Cada alumno puede contar el número de caras en sus secuencias simulada y real ¿Qué valores habéis obtenido? ¿Cuáles son el valor mínimo y máximo obtenido? ¿Cuál es el valor más frecuente? ¿Cómo representar los datos de modo que sepamos cuántas veces aparece cada valor? ¿Cómo podríamos organizar y resumir estos datos?*

Los estudiantes, en seguida proponen comparar el número de caras y cruces en las dos secuencias, a lo cual el profesor cuenta las que él ha obtenido en su experimento, que ha registrado en la pizarra (10 caras en la secuencia simulada y 11 en la real) y pregunta a los estudiantes que han obtenido ellos, con lo cual cada uno cuenta las caras en sus dos secuencias y van dando la respuestas.

El profesor pregunta si el hecho de obtener 10 caras en la secuencia simulada indica buena intuición. Algunos alumnos dicen que sí, porque ya que hay 20 lanzamientos y las caras y cruces tienen las mismas posibilidades; se ha de esperar más o menos 10 caras en los 20 lanzamientos. El profesor pide levantar la mano a los estudiantes que obtuvieron 10 caras en la secuencia simulada, que es la mayoría de la clase, resultado que les produce bastante satisfacción, al pensar que indica que tienen buenas intuiciones. Entonces el profesor pide los resultados de las secuencias simuladas, que son bastante más dispersos y les pregunta si es que la moneda está sesgada o por qué ahora no aparecen tantas veces las 10 caras. Algunos alumnos indican que, al ser un experimento aleatorio, podrían obtenerse valores diferentes de 10 aunque espera que no sean demasiado diferentes.

Figura 4.3.2. Gráfico de puntos conjunto para la secuencia real y simulada

| *Secuencia simulada* | Nº. Caras | *Secuencia real* |
|---:|:---:|:---|
| X | 7 | XX |
| | 8 | XXXXX |
| XXXX | 9 | XXXXXXX |
| XXXXXXXXXXXXXX | 10 | XXX |
| XXXXX | 11 | XXXXXXX |
| XXX | 12 | X |
| | 13 | X |
| | 14 | X |

El profesor guía la clase a la conclusión de que, para poder comparar los resultados del conjunto de alumnos de la clase para el número de caras, tendríamos de algún modo que resumir todos los datos de las secuencias reales por un lado y por otro de las secuencias simuladas y compararlos. Unos alumnos piensan que habría que calcular las medias, otros que hacer una tabla. Finalmente uno sugiere hacer un gráfico.

El profesor, con ayuda de la clase construye un gráfico de puntos del número de caras en las secuencias reales y simuladas, como se muestra en la Figura 4.3.2. El profesor va pidiendo que levanten la mano los que tuvieron 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13 caras en la secuencia simulada y va anotando un punto por cada estudiante. Lo mismo con las reales. La gráfica deja muy claro las semejanzas de los valores centrales y la diferencia de dispersión de los resultados, pero el profesor no lo explicita, sino que pide a los estudiantes que completen el estudio en casa, analicen las semejanzas y diferencias y preparen un informe con sus conclusiones sobre las intuiciones del conjunto de la clase. Ruiz (en preparación) indica que en esta actividad aparecen dos variables aleatorias:

- La variable aleatoria $\eta_r$: número de caras en 20 lanzamientos de la moneda equilibrada, que es una variable aleatoria Binomial con parámetros $n=20$ $p=q=1/2$. Su media, sería igual a $np=10$ y su varianza igual a $npq=5$.

- La variable aleatoria $\eta_s$: número de caras en la secuencia de longitud 20 inventada por los estudiantes y que usamos como modelo matemático para reflejar las intuiciones colectivas sobre los experimentos aleatorios. No sería una variable Binomial, pues la investigación didáctica (por ejemplo, Serrano, 1996) muestra que los ensayos producidos por las personas en este tipo de experimentos no son independientes, aunque la probabilidad de cara sigue siendo $p$=1/2.

Puesto que cada estudiante realiza el experimento y cuenta el número de caras obtenidas, tenemos una serie de *m* ensayos de cada una de las variables aleatorias anteriores, siendo *m* el número de estudiantes de la muestra, y por lo tanto obtenemos dos variables estadísticas cuyas distribuciones ha de comparar el estudiante para conjeturar sobre las semejanzas o diferencias entre $\eta_r$ *y* $\eta_s$ y de acá deducir sobre las intuiciones respecto al azar.

**Número de rachas y longitud de la racha más larga**

Finalizado el análisis preliminar del número de caras, el profesor propone a los alumnos estudiar las rachas (número de veces que aparecen seguidas el mismo suceso). Explica lo que son las rachas a los alumnos y la manera de contarlas en el estudio. Para ello, escribe en la pizarra las secuencias que obtuvo él (Figura 4.3.3) y marca las rachas, observando además que, mientras en la secuencia simulada su racha más larga fue sólo de 3 sucesos, en la real obtuvo hasta 5 cruces seguida. Pregunta a los estudiantes cuántas rachas obtuvieron en cada una de las secuencias y cuál fue la racha más larga que obtuvieron en ambas secuencias (en la mayoría de los casos de 3 en la secuencia simulada), siendo más larga en general en la real.

Figura 4.3.3. Resultado del experimento hecho por el profesor

Lanzamiento simulado:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | C | + | C | + | + | + | C | C | + | C | + | C | + | + | C | C | C | + | + |

Lanzamiento real:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + | C | + | C | + | + | C | C | + | C | C | C | + | + | + | + | + | C | + | + |

El profesor explica a los estudiantes que las personas tienen dificultad para percibir las rachas en los sucesos aleatorios, atribuyendo la aparición de rachas a la mala suerte. Sin embargo, indica, es relativamente frecuente una racha larga. Por ejemplo, el caso de familias que tienen 3 varones antes de tener una niña: tener 3 varones seguidos ocurre con una probabilidad 1/8, por lo que una de cada ocho familias de tres hijos tendrá tres varones. En una de las clases, un alumno para ilustrar este hecho, indica que en su familia son siete hermanos y los seis primeros fueron chicos.

El profesor razona que hay otras situaciones más importantes, donde una mala intuición sobre las rachas puede producir decisiones incorrectas. Explica la bien conocida la falacia del jugador (Shaughnessy, 1992) por la que esperamos que, tras una corta racha de, por ejemplo caras, la probabilidad de que aparezca una cruz aumente. Esta creencia pudiera estar detrás de la costumbre popular de abonarse al mismo número de la lotería, que es irrazonable, pues cada vez que hay un sorteo se meten en el bombo todos los números, incluso los que salieron con anterioridad. También puede explicar algunas ludopatía, que es un problema de adicción al juego.

Una vez motivado el estudio de las rachas, el profesor pide a los estudiantes que busquen cuál es la racha más larga en cada una de sus dos secuencias, así como que cuenten el número de rachas. De este modo se toman datos de otros dos pares de variables estadísticas (número de rachas y racha más larga) en las secuencias real y simulada. Los alumnos han de compararlas para obtener una conclusión sobre las correspondientes variables aleatorias subyacentes (ver Ruiz, en elaboración) y de ahí obtener una conclusión sobre las intuiciones de los estudiantes.

### Recogida de datos y elaboración de un informe individual

A continuación el profesor proporciona una hoja de registro a cada alumno y se procede a recoger los datos colectivamente. Para recoger estos datos, una vez finalizados los experimentos, el profesor pide a los alumnos que, según el orden en que están colocados en la clase, fueran dando en voz alta sus datos para el número de caras, número de rachas y longitud de la racha mayor, en cada una de las secuencias. Cada vez que un estudiante da sus datos, todos los compañeros lo anotan en una nueva fila de la tabla. Como vemos se tiene una tabla de datos (Tabla 4.3.1) con tantas filas como alumnos en la clase y seis columnas correspondientes a las seis variables estadísticas del proyecto: número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en la secuencia real y simulada.

Tabla 4.3.1. Número de caras, número de rachas y longitud de la racha mayor obtenidas en cada una de las secuencias en uno de los grupos

| Secuencia simulada | | | Secuencia real | | |
|---|---|---|---|---|---|
| N. caras | N. rachas | Racha mayor | N. caras | N. rachas | Racha mayor |
| 10 | 14 | 4 | 11 | 9 | 4 |
| 12 | 9 | 4 | 11 | 16 | 2 |
| 11 | 12 | 4 | 11 | 16 | 2 |
| 10 | 9 | 4 | 8 | 9 | 4 |
| 11 | 11 | 3 | 7 | 11 | 4 |
| 9 | 13 | 3 | 8 | 10 | 5 |
| 10 | 12 | 3 | 9 | 9 | 4 |
| 11 | 14 | 3 | 11 | 4 | 7 |
| 9 | 13 | 3 | 10 | 12 | 3 |
| 10 | 8 | 5 | 9 | 9 | 5 |
| 10 | 12 | 3 | 9 | 10 | 5 |
| 10 | 12 | 3 | 9 | 10 | 5 |
| 7 | 10 | 6 | 9 | 10 | 5 |
| 10 | 11 | 3 | 14 | 11 | 5 |
| 10 | 13 | 4 | 7 | 7 | 5 |
| 10 | 11 | 3 | 10 | 10 | 3 |
| 10 | 12 | 4 | 9 | 12 | 3 |
| 12 | 10 | 4 | 10 | 11 | 4 |
| 11 | 12 | 4 | 11 | 14 | 3 |
| 10 | 13 | 3 | 13 | 12 | 4 |
| 9 | 7 | 3 | 11 | 5 | 4 |
| 10 | 13 | 3 | 8 | 11 | 5 |
| 10 | 11 | 4 | 8 | 10 | 7 |
| 9 | 14 | 3 | 11 | 11 | 4 |
| 10 | 7 | 2 | 12 | 4 | 4 |
| 12 | 13 | 3 | 9 | 10 | 5 |
| 11 | 14 | 3 | 8 | 8 | 5 |

Una vez que los estudiantes completan la hoja con los datos de estas variables, se llega al fin de la sesión de clase (primera sesión). A este punto, el profesor entrega una hoja con las instrucciones para el análisis de datos, que se reproducen a continuación. El profesor hace hincapié en que es importante que el informe incluya el análisis de datos que los alumnos realicen y que no se dan pautas para el análisis, sino se dejaba a los estudiantes decidir sobre cuáles métodos necesitan para resolver el problema. También se insiste en la necesidad de llegar a una conclusión sobre las intuiciones del grupo clase como un todo y no limitarse a reproducir sólo el análisis estadístico, es decir obtener una conclusión que dé solución a la pregunta que da origen al proyecto.

> ***Trabajo individual para la semana próxima***
>
> *1. Analizar los datos obtenidos en la clase durante el experimento realizado para evaluar las concepciones sobre la aleatoriedad.*
>
> *2. Preparar un informe sobre el análisis, incluyendo todas las tablas y gráficos estadísticos elaborados.*
>
> *3. Resumir las conclusiones obtenidas del estudio anterior acerca de las intuiciones que tiene el conjunto de alumnos de la clase sobre los experimentos aleatorios.*

### 4.3.3. SOLUCIÓN ESPERADA DE LOS ESTUDIANTES

Como hemos dicho, el profesor dio a los alumnos una hoja de registro como la que reproducimos en la Tabla 4.3.1, que muestra los datos obtenidos en uno de los grupos de estudiantes que participaron en este Proyecto. En otros grupos los resultados varían algo, aunque sus características son muy similares, de modo que limitamos el estudio de la solución esperada al de uno de los grupos.

Al comenzar el trabajo individual, disponiendo ya los alumnos de la lista de datos (tabla 4.3.1), se ha pasado de un problema extra-matemático (decidir sobre las intuiciones respecto al azar del conjunto de la clase) a otro matemático (comparar dos listas de datos). Para resolver el problema, los estudiantes han de resumir los datos, formando la distribución de frecuencias de las correspondientes variables estadísticas para proceder, primeramente al análisis de cada uno de los pares de variables estadísticas (por ejemplo número de caras en las secuencias simulada y real) y luego a la comparación de las principales diferencias en sus distribuciones. De ello esperamos extrapole a las diferencias entre las correspondientes variables aleatorias y de ahí obtenga conclusiones respecto a las intuiciones de la clase en su conjunto sobre la aleatoriedad.

#### 4.3.3.1 ANÁLISIS DEL NÚMERO DE CARAS

Para analizar el número de caras, esperamos que los estudiantes identifiquen el valor máximo y mínimo en las secuencias real y simulada para dicha variable y preparen una tabla de frecuencias como la Tabla 4.3.2 para resumir la información, donde se recoja la frecuencia absoluta, porcentaje, y quizás también la frecuencia acumulada.

Tabla 4.3.2. Número de caras en la secuencia simulada

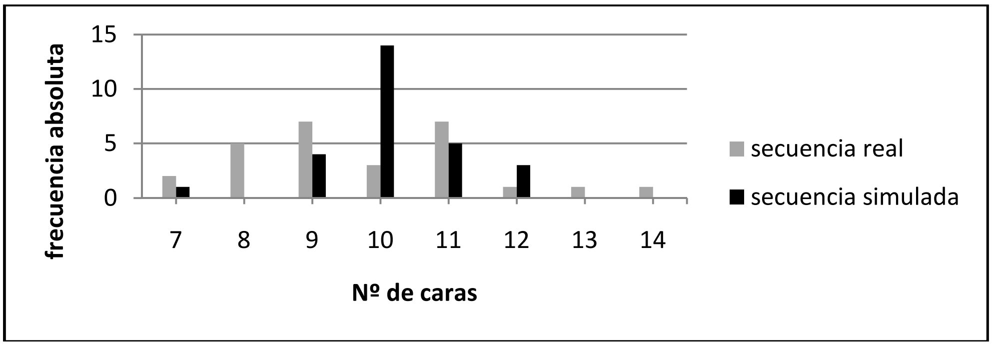
| Número de caras | Frecuencia | F. Acumulada | Porcentaje (%) |
|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 1 | 3,7 |
| 8 | 0 | 1 | 0 |
| 9 | 4 | 5 | 14,8 |
| 10 | 14 | 19 | 51,85 |
| 11 | 5 | 24 | 18,5 |
| 12 | 3 | 27 | 11,1 |
| Total | 27 | 27 | 100 |

Tabla 4.3.3. Medidas de posición central y de dispersión en las secuencias

| | Media | Mediana | Moda | Rango | Desviación típica |
|---|---|---|---|---|---|
| Secuencia simulada | 10,14 | 10 | 10 | 5 | 1,06 |
| Secuencia real | 9,74 | 10 | 9 y 11 (bimodal) | 7 | 1,74 |

Sería necesaria una tabla similar para resumir los datos de la secuencia real. Se espera también que los alumnos calculen resúmenes estadísticos tales como las medidas de posición central: media, mediana y moda y de dispersión (al menos el rango); estadísticos que se han estudiado el curso anterior y cuyos valores para el conjunto de datos de la Tabla 4.3.1 se muestran en la Tabla 4.3.3. Lo deseable sería que realizasen gráficos simultáneos para las dos distribuciones, ya que esto facilitaría la comparación de ambas y como consecuencia la mejor interpretación de la información estadística puesta en juego y la obtención de conclusiones en relación a las intuiciones del conjunto de la clase sobre el azar. En las siguientes figuras (4.3.4, 4.3.5, 4.3.6) se muestran ejemplos de algunos gráficos de este tipo que podrían utilizar los alumnos.

Figura 4.3.4. Gráficos de barras adosadas para el nº de caras para ambas secuencias




Aunque todos ellos representan la misma información, los objetos matemáticos puestos en juego varían. En el gráfico de puntos (ver figura 4.3.2), por ejemplo, no hay un eje que represente la frecuencia de los valores de la variable, sino que esta frecuencia se representa por el número de cruces en el gráfico asociado a cada valor de las variables. Dicha frecuencia está representada por la altura de la barra en el gráfico de barras y por la coordenada *Y* del punto en el polígono de frecuencias, que es donde verdaderamente aparece una representación en coordenadas cartesianas.

Siendo conscientes de que el tipo de gráficos en los que se representan dos variables en un mismo marco (figura 4.3.2 ,4.3.4 y 4.3.5), son de mayor complejidad para los alumnos, podemos admitir también que los estudiantes hagan gráficos separados para la distribución de cada secuencia, siempre que se utilice el mismo tipo de gráfico para ambas y la misma escala en los dos gráficos, para que así se facilite la comparación de las distribuciones en estudio. En la Figura 4.3.6 se muestra un gráfico de barras para cada una de las secuencias, en los cuales se ha utilizado la misma escala. Tanto en el gráfico de barras como en el de líneas se puede visualizar mejor la moda, la dispersión y la forma que tienen las distribuciones, que en otros gráficos como los de sectores, que aunque estén correctamente construidos, es más difícil extraer de ellos diferencias importantes entre las dos distribuciones que indiquen si nuestra intuición sobre el azar nos engaña.

Figura 4.3.5. Polígono de frecuencias del nº de caras para ambas secuencias

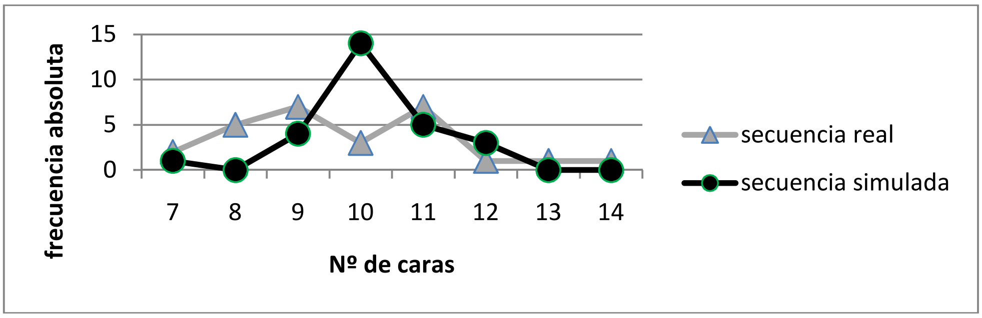
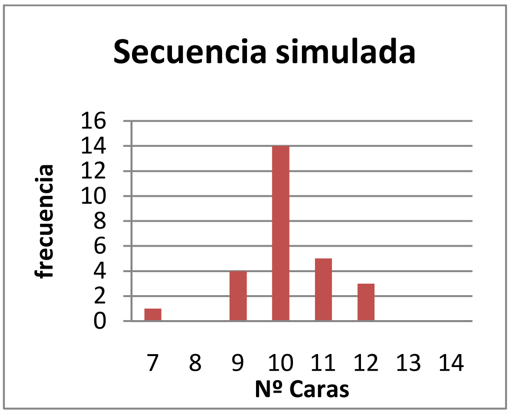
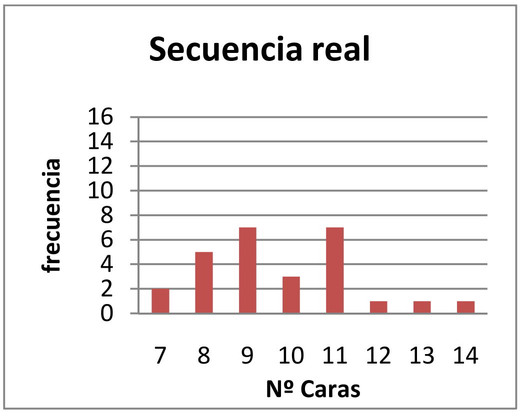



Figura 4.3.6. Gráficos de barras secuencia simulada y secuencia real



**Interpretación y conclusiones**

Una característica del número de caras en una secuencia real es que, en general, es más variable de lo que nuestra intuición nos sugiere, como se vio en la investigación de Serrano (1996) con alumnos de bachillerato y futuros profesores. Mientras que los valores medios del número de caras coinciden, aproximadamente, en las secuencias reales y simuladas de los participantes en dicho estudio, la dispersión fue mucho mayor en las secuencias reales. Serrano indica que somos muy exactos al reflejar la equiprobabilidad de resultados, incluso más exactos de lo debido, puesto que la secuencia simulada tiene menos dispersión que la real. Todos estos resultados se confirmaron en nuestra muestra, como se deduce del estudio detallado sobre la percepción de la aleatoriedad por parte de los participantes que es parte de la tesis de Ruiz (en preparación).

Al estudiar los diferentes gráficos (figuras 4.3.2, 4.3.4, 4.3.5 y 4.3.6) y lo resúmenes estadísticos presentados la Tabla 4.3.3, se observa que hemos obtenido una distribución *bimodal* lo cual sugiere la necesidad de usar la media o la mediana para llevar a cabo la comparación: $\overline{x}$=10,14 para las secuencias simuladas $\overline{x}$=9,74 para las reales en nuestro ejemplo, donde vemos que los valores son muy parecidos entre sí y casi iguales al valor teórico $np$=10 de la variable aleatoria número de caras en 20 lanzamientos de una moneda equilibrada, que es una variable aleatoria Binomial. Las medianas son respectivamente iguales a 10. Por tanto los estudiantes han reproducido intuitivamente los promedios de la variable “número de cara en 20 lanzamientos de una moneda”.

También surge en esta actividad la idea de dispersión de una forma sencilla. Bien a través del recorrido o del 50 % de casos centrales, se observa mayor dispersión en la secuencia real, donde el 50% de los casos centrales se presentan en el intervalo (9-11) y el recorrido es 7, mientras que en la secuencia simulada el 50% de casos centrales se reduce al valor 10 y el recorrido es 5. Esperamos que los estudiantes, bien calculando los estadísticos, bien a partir de los gráficos perciban la igualdad aproximada de las medidas de posición central y la mayor dispersión de las secuencia reales.

La conclusión respecto a las intuiciones es que los alumnos de los grupos donde se realizó el experimento tienen una buena percepción del valor esperado del número de caras en 20 lanzamientos, puesto que la mayoría produce exactamente 10 caras. Sin embargo, la variabilidad del número de caras no se percibe, suponiendo mayor regularidad que la existente en un proceso aleatorio.

### 4.3.3.2 ANÁLISIS DEL NÚMERO DE RACHAS

Respecto al número de rachas, esperamos que los estudiantes identifiquen el valor máximo y mínimo del número de rachas en las secuencias real y simulada y preparen una tabla de frecuencias como la Tabla 4.3.4 para resumir la información y otra tabla similar para resumir los datos de la secuencia real. Se espera también que los alumnos calculen resúmenes estadísticos tales como las medidas de posición central: media, mediana y moda y de dispersión (al menos el rango) que se han estudiado el curso anterior y cuyos valores se muestran en la Tabla 4.3.5.

Se espera que los alumnos construyan gráficos simultáneos para las dos distribuciones, ya que esto facilitaría la comparación de ambas y como consecuencia la mejor interpretación de la información estadística. En las siguientes figuras (4.3.7 y 4.3.8) se muestran ejemplos de algunos gráficos de este tipo que podrían utilizar los alumnos. También podrían realizar gráficos separados para la distribución de cada secuencia, siempre que se utilice el mismo tipo de gráfico para ambas y la misma escala en los dos gráficos, para que así se facilite la comparación de las distribuciones en estudio.

Tabla 4.3.4. Número de rachas en la secuencia simulada

| Número de rachas | Frecuencia | F. Acumulada | Porcentaje (%) |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 2 | 8 |
| 5 | 1 | 3 | 11 |
| 6 | | | |
| 7 | 1 | 4 | 15 |
| 8 | 1 | 5 | 18 |
| 9 | 4 | 9 | 33.3 |
| 10 | 7 | 16 | 59.3 |
| 11 | | | |
| 12 | 3 | 24 | 88,8 |
| 14 | 2 | 25 | 92,6 |
| 16 | 2 | 27 | 100 |
| Total | 27 | 27 | 100 |

Tabla 4.3.5. Medidas de posición central y de dispersión en las secuencias

| | Media | Mediana | Moda | Rango | Desviación típica |
|---|---|---|---|---|---|
| Secuencia simulada | 10,04 | 10 | 10 | 12 | 2,06 |
| Secuencia real | 11,49 | 12 | bimodal | 7 | 2,9 |

Figura 4.3.7. Gráficos de barras adosados para el nº de rachas para ambas secuencias

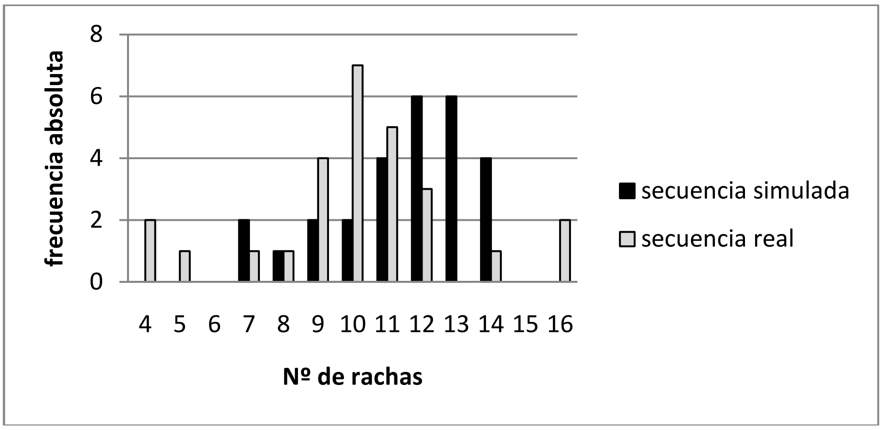
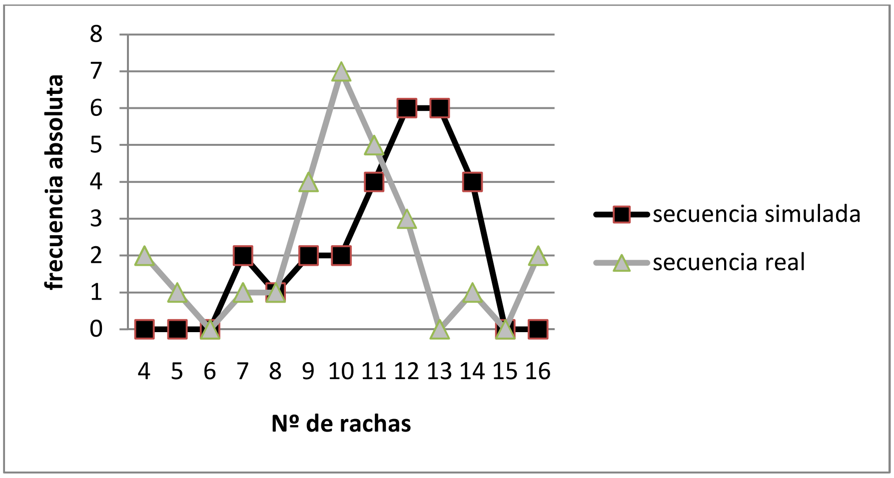



Figura 4.3.8. Polígono de frecuencias adosado del nº de caras para ambas secuencias




**Interpretación y conclusiones**

Una característica del número de rachas en una secuencia real es que, en general, es menor de lo que nuestra intuición nos sugiere como se vio en la investigación de Serrano (1996). Lo podemos ver en los valores medios más elevados, respecto al de las secuencias simuladas. También la dispersión es mayor en las secuencias simuladas que reales, lo que se puede ver del valor del rango y desviación típica. Serrano indica que tenemos tendencia a producir rachas muy cortas, lo que hace aumentar el número de éstas y ello es debido a una percepción incorrecta de la independencia de resultados en lanzamientos sucesivos de la moneda. Los alumnos pueden comprobar estas diferencias analizando los gráficos y las medidas de posición central y dispersión.

La conclusión respecto a las intuiciones es que los alumnos de los grupos donde se realizó el experimento tienen una pobre percepción, tanto del valor esperado del número de rachas en 20 lanzamientos, como de la dispersión de esta variable.

### 4.3.3.3 ANÁLISIS DE LA LONGITUD DE LA RACHA MÁS LARGA

Para analizar la longitud de la racha mayor, esperamos que los estudiantes identifiquen el valor máximo y mínimo de dicha variable en las secuencias real y simulada y preparen una tabla de frecuencias como la Tabla 4.3.6 para resumir la información y otra tabla similar para resumir los datos de la secuencia real. Se espera también que los alumnos calculen resúmenes estadísticos tales como las medidas de posición central: media, mediana y moda y de dispersión (al menos el rango) que se han estudiado el curso anterior y cuyos valores se muestran en la Tabla 4.3.7.

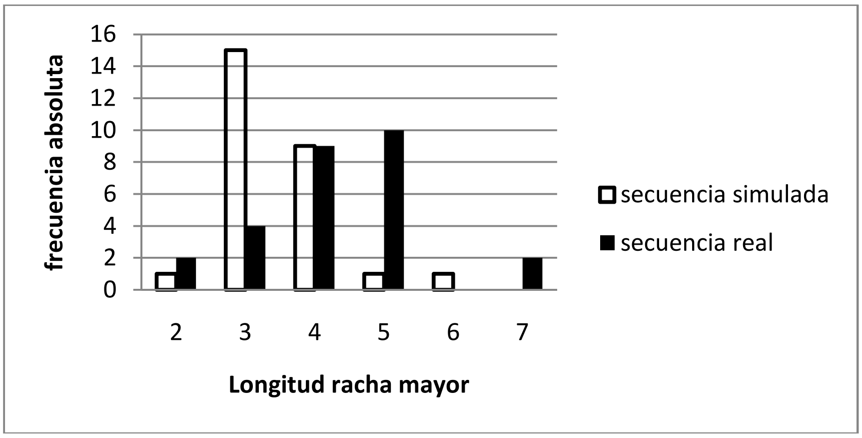
Tabla 4.3.6. Número de caras en la secuencia simulada

| Longitud | Frecuencia | F. Acumulada | Porcentaje (%) |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 3,7 |
| 3 | 15 | 16 | 59.3 |
| 4 | 9 | 25 | 92,6 |
| 5 | 1 | 26 | 96,3 |
| 6 | 1 | 27 | 100 |
| Total | 27 | 27 | 100 |

Tabla 4.3.7. Medidas de posición central y de dispersión en las secuencias

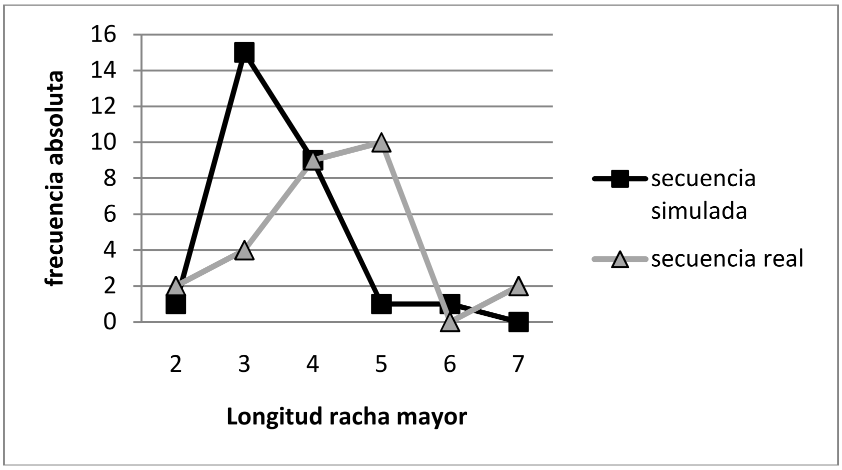
| | Media | Mediana | Moda | Rango | Desviación típica |
|---|---|---|---|---|---|
| Secuencia simulada | 3,4 | 3 | 3 | 4 | 0,8 |
| Secuencia real | 4,3 | 4 | 5 | 5 | 1,2 |

Figura 4.3.9. Gráficos de barras adosados para el nº de rachas para ambas secuencias




Sería deseable que los estudiantes de la muestra realizasen gráficos simultáneos para las dos distribuciones, ya que esto facilitaría la comparación de ambas y la obtención de conclusiones en relación a las intuiciones del conjunto de la clase sobre el azar. En las figuras (4.3.9, 4.3.10) se muestran ejemplos de algunos gráficos de este tipo que podrían utilizar los alumnos. Podemos admitir también que los estudiantes hagan gráficos separados para la distribución de cada secuencia, siempre que se utilice el mismo tipo de gráfico para ambas y la misma escala.

Figura 4.3.10. Polígono de frecuencias adosado del nº de caras para ambas secuencias




**Interpretación y conclusiones**

En general las rachas aleatorias son mayores de lo que nuestra intuición nos sugiere como se vio en la investigación de Serrano (1996). Al estudiar los diferentes gráficos y lo resúmenes estadísticos presentados se observan los valores medios mayores y la semejanza de los estadísticos de dispersión. La conclusión respecto a las intuiciones es que los alumnos de los grupos donde se realizó el experimento tienen una mala percepción del valor esperado de la racha más larga, pero, sin embargo, aprecian bien la variabilidad.

## 4.4. COMPLEJIDAD SEMIÓTICA DE LOS GRÁFICOS CONSTRUIDOS

Una vez recogido el informe de análisis de datos del proyecto que entregó cada estudiante, se clasificaron los gráficos incluidos como parte del análisis, desde varios puntos de vista. En la tabla 4.4.1 se muestra la frecuencia y el porcentaje de los estudiantes que realizaron o no gráficos en el desarrollo del proyecto para las distintas variables propuestas.

Observamos en dicha tabla que el porcentaje de alumnos que no realizan gráfico es menor en el estudio del número de caras y que dicho porcentaje aumenta considerablemente en el estudio del número de rachas y longitud de la racha mayor. Esto puede ser debido a varios motivos: El primero, que en el proyecto propuesto a los alumnos, estos están mucho más familiarizados con el número de caras; las otras dos variables aún siendo no muy complicadas de entender, son menos familiares para la mayoría de las personas. Añadido a esto, se tiene que la primera variable que se les propuso estudiar para realizar su trabajo fue la variable número de caras, por lo que algunos estudiantes se conformaron con realizar el análisis de esta. Al no analizar las otras dos variables, no realizaron ninguna representación gráfica en el estudio de éstas.

Tabla 4.4.1. Frecuencia (y porcentaje) de alumnos según gráficos realizados en las distintas variables

| Variables estadísticas | Realizan gráficos | No realizan gráficos |
|---|---|---|
| Número de caras | 181 (87,44) | 26 (12,56) |
| Número de rachas | 146 (70,53) | 61 (29,47) |
| Longitud de la racha mayor | 128 (61,84) | 79 (38,16) |

Puesto que nos interesamos por la capacidad de los futuros profesores a la hora de representar datos estadísticos por medio de distintos gráficos, dentro del estudio, tendremos sólo en cuenta aquellos que realizan gráficos.

En primer lugar se realizó un análisis de los gráficos, que nos permitió definir un "*nivel de complejidad semiótica*" de elaboración propia, teniendo en cuenta los objetos matemáticos cuyo conocimiento requiere el sujeto para construir el gráfico, así como el nivel de lectura (en la clasificación de Bertin, 1967) que posibilita el gráfico construido.

Siguiendo a Font, Godino y D'Amore (2007), en nuestro trabajo asumimos que en las prácticas matemáticas, que realizan los sujetos al resolver problemas, se presentan múltiples funciones semióticas (bien de lectura o de representación), debido a la necesidad de usar y operar con objetos matemáticos, que son inmateriales. Estos autores consideran una tipología de objetos matemáticos (lenguaje (expresiones verbales o simbólicas), propiedades, procedimientos, problemas, argumentos, conceptos), que intervienen en las prácticas matemáticas y cada una de los cuales puede jugar, el papel de antecedente o consecuente de una función semiótica.

La tarea propuesta a los futuros profesores en nuestra investigación (comparar tres pares de distribuciones dadas para decidir sobre las intuiciones del conjunto de alumnos) constituye para ellos un problema, pues la solución no les es inmediata. Las prácticas realizadas por los futuros profesores para resolverlo y, específicamente, los gráficos producidos, ponen en juego una serie de objetos matemáticos que varían en los diferentes gráficos. Por tanto, varían las funciones semióticas subyacentes en la construcción e interpretación de estos gráficos por parte de los estudiantes, así como en la puesta en relación de la pregunta planteada en el proyecto, con los gráficos construidos, por medio de una argumentación.

La actividad semiótica realizada por los futuros profesores en relación a estos gráficos comienza durante su construcción, puesto que deben representar en el gráfico, tanto objetos matemáticos (inmateriales), como los resultados del experimento realizado en la clase (que pertenecen al plano de la realidad). A partir de la lista dada de datos obtenida durante el desarrollo del experimento, el sujeto que construye el gráfico para alguna de las variables en estudio. Primero ha de considerar los datos individuales como distintos valores de una variable (establece una correspondencia entre cada dato de la lista con el objetos matemático "valor" y de cada columna de la tabla con el objeto matemático "variable"). A su vez cada dato de la tabla remite a un resultado de un experimento hecho en la clase (elemento fenomenológico).

Después de realizar estas correspondencias, el estudiante debe agrupar los valores iguales o similares para la variable y obtener la frecuencia asociada a ese determinado valor (o intervalo de valores) de la variable (número de veces que ese valor se repite en la lista de datos), obteniendo así la distribución de frecuencias de la variable estadística. Como observaremos en este apartado, este paso que acabamos de describir no será llevado a cabo por todos los alumnos a la hora de construir sus gráficos, habrá alumnos que realicen la representación gráfica sin llegar a la distribución de frecuencias previamente, basándose o en sus experimentos individuales o en la lista de datos que obtuvieron a raíz del experimento.

Una vez el alumno ha llegado al punto de considerar que dispone de todo lo necesario para realizar un gráfico, ha de decidir qué tipo de representación es más adecuada para el problema que quiere resolver, lo que le lleva a poner en correspondencia el cómo representar los datos en un gráfico para obtener información de utilidad con la pregunta planteada en el proyecto, es decir la situación-problema. Este paso no es sencillo, ya que requiere un proceso de abstracción y el conocimiento de los distintos convenios de construcción de los distintos gráficos y para qué tipo de uso estos son adecuados.

Por otro lado, un mismo tipo de gráfico (por ejemplo, un gráfico simple de barras) se puede usar para representar diferentes objetos matemáticos, tales como frecuencias absolutas, relativas, porcentajes y frecuencias acumuladas, medias u otros resúmenes estadísticos. La regla de correspondencia que explicita cuál es el objeto matemático representado en el gráfico deberá ser precisada en las etiquetas y escalas de los ejes. El título del gráfico proporcionará la clave para interpretar la realidad modelizada por los objetos matemáticos representados en el gráfico.

Dependiendo del gráfico construido se usarán diferentes objetos matemáticos, y la actividad semiótica implicada será más o menos compleja. Por ello los gráficos producidos no deben considerarse simplemente como representaciones equivalentes de un concepto subyacente (la distribución de datos obtenida) sino como configuraciones diferenciadas de objetos relacionados e interactuando con dicha distribución, en términos de Godino, Font y D'Amore (2007). Estas consideraciones nos sirvieron para definir niveles de complejidad semiótica en los gráficos producidos, que se describen a continuación.

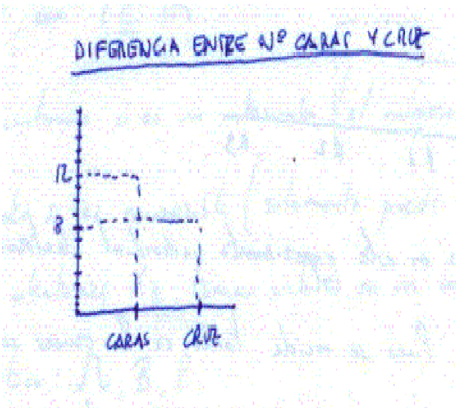
*No produce gráficos.* Algunos futuros profesores no produjeron gráficos y se limitaron a realizar cálculos estadísticos, en la mayoría de los casos reducidos a las medidas de posición central (media, mediana y/o moda). A veces trabajan también la dispersión (rango, desviación típica). Una parte de los que no producen gráficos se limita a presentar dichos resúmenes sin interpretarlos y el resto obtiene una conclusión sobre las intuiciones a partir de la comparación de las medidas de posición central y en algunos casos de las de dispersión en ambas secuencias. No tendremos en cuenta estos estudiantes en nuestro análisis, pues nuestro interés se centra en los gráficos estadísticos producidos por los estudiantes.

Algunos futuros profesores no analizaron las variables número de rachas y longitud de la racha mayor, por lo que el porcentaje de estudiantes que no realizan gráficos en el estudio de estas dos variables es considerablemente mayor que los que no realizan representaciones gráficas en el estudio del número de caras (ver tabla 4.4.1).

N1. *Representa sólo sus resultados individuales.* Algunos alumnos en nuestro estudio producen una gráfica para representar los datos obtenidos en su experimento particular, sin considerar los datos de sus compañeros. Estos estudiantes tratan de resolver la pregunta para su caso particular (si él mismo tiene una buena intuición), no habiendo comprendido el propósito del proyecto o no siendo capaces de realizar un análisis global de los datos. Generalmente manifiestan una intuición errónea sobre la aleatoriedad suponiendo que una buena intuición implicaría que su secuencia simulada fuese idéntica en alguna característica a su secuencia real.

Aunque la impredecibilidad es una diferencia esencial entre experimentos aleatorios y deterministas, estos estudiantes tratan de predecir el resultado o al menos predecir una parte de los resultados de la secuencia aleatoria. Este fenómeno, denominado *ilusión de control* fue observado originalmente de Langer (1975) en diferentes tipos de juegos de azar, por ejemplo la lotería, donde observó en los sujetos una creencia ilusoria sobre su capacidad para influir en el resultado.

Figura 4.4.1. Análisis semiótico de un gráfico correcto de la categoría N1

| *Representación de resultados en la secuencia del estudiante* | *Configuración cognitiva* |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Grafico: líneas, puntos, marcas<br>- Verbal: título, etiquetas<br>- Numérico: para representar las frecuencias de las caras y de las cruces en el experimento en el eje Y.<br>- No hay rótulos en los ejes.<br>- Rótulo confuso para el título del gráfico. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar una moneda.<br>- Sucesos o resultados del experimento, espacio muestral.<br>- Variable aleatoria que toma dos valores: “Cara” y “Cruz” (Bernoulli)<br>- Variable estadística: resultados de repetir 20 veces el experimento.<br>- Frecuencias absolutas de caras y cruces.<br>- Números naturales.<br>- Puntos y segmentos.<br>- Perpendicularidad y paralelismo.<br>- Proporcionalidad.<br>- Sistema cartesiano de representación, con eje X arbitrario.<br>Procedimientos<br>- Recuento de resultados en el experimento<br>- Representación del eje X: en el cual se representan los posibles sucesos. No está naturalmente ordenado.<br>- Representación en el eje Y: frecuencias absolutas.<br>- Representación de las barras con una altura proporcional a las frecuencias (convenio del gráfico) |

La actividad semiótica realizada es la más elemental posible, dentro del proyecto planteado, pues sólo representan un valor de la variable estadística que esté estudiando. Un ejemplo se presenta en la Figura 4.4.1 El estudiante representa en un diagrama de barras los valores obtenidos en el lanzamiento de la moneda en sus 20 ensayos en las secuencias real y simulada. Aunque emplea explícitamente la palabra “frecuencia”, no está representando una variable, sino los resultados (constantes) que obtuvo en sus secuencias. En el caso real, implícitamente aplica el concepto “frecuencia” a los resultados de 20 repeticiones de la variable Bernoulli “resultado del lanzamiento de una moneda equilibrada” que toma los valores: “Cara” o “cruz”. Pero no considera la variable “número de caras en las secuencias real y simulada de cada alumno de la clase" que tomaría valores numéricos. El alumno está representando en el eje *Y* los números naturales; establece, por tanto una función semiótica entre los puntos del eje y los numerales en él representados y también entre estos puntos y numerales con los números naturales (hasta 12).

El análisis semiótico realizado a este tipo de gráficos, muestra que los conceptos, proposiciones y procedimientos puestos en juego son de menor complejidad que en representaciones en las que se tengan en cuenta el conjunto de todos los datos de la clase. Por otro lado, este tipo de gráficas sólo permiten un nivel de lectura de *extracción de datos* (Bertín, 1967) o *leer los datos* en la categorización de Curcio (1989), ya que solamente se pueden extraer informaciones acerca del valor que toma la variable en un caso particular. Por ejemplo, la figura 4.4.1. permitiría preguntas sobre cuál es el valor de la variable número de caras (o número de cruces) en el caso particular del alumno que realiza el gráfico.

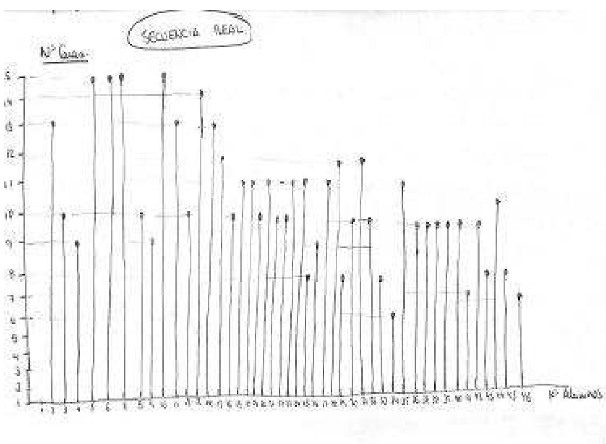
N2. *Representa los valores individuales de la variable.* Son los estudiantes que al analizar cualquiera de las variables, no llegan a agrupar los valores similares obtenidos en las secuencias reales o simuladas del total de alumnos en la clase. En lugar de ello, representan el valor (o valores) obtenido para cada alumno para una determinada variable, dentro del gráfico. Se trata de una representación de los datos en el orden en que han sido obtenidos, pero no se llega a la idea de frecuencia asociada a cada valor o de distribución de frecuencias de la variable. A pesar de ello, este tipo de gráficos supone una mayor complejidad que los de la anterior categoría, ya que los alumnos al menos han comprendido que para realizar el proyecto deben analizar el conjunto de los datos obtenidos por toda la clase.

Hacemos notar que en este tipo de gráficos, cuando los valores son representados en un eje *X*, estos tienen un orden artificial, pues sólo indica el orden arbitrario en que se recogieron los datos en la clase. Dentro de esta categoría hemos obtenido diagramas de barras horizontales y verticales; gráficos de líneas de una o las dos variables, que, aunque no permiten resolver el problema de comparación, al menos muestran la variabilidad de los datos en los diferentes estudiantes. Otros estudiantes producen gráficos claramente inapropiados, que ni siquiera permiten visualizar la variabilidad de los datos, entre ellos, diagramas de sectores, gráficos adosados o apilados de barras.

En las figura 4.4.2 se muestra un ejemplo de gráfico correspondiente a la categoría N2.

El estudiante realiza diagramas de barras separados para cada secuencia, permitiendo este tipo de gráficos mostrar la variabilidad de los datos obtenidos por los alumnos, aunque dificultando mucho la comparación de las secuencias real y simulada para la obtención de una conclusión final en el proyecto, pues no se observa con claridad la moda ni las frecuencias de los diferentes valores. Sin embargo, usa implícitamente las ideas de experimento aleatorio, variable aleatoria y sus valores, así como la variabilidad de la variable.

Figura 4.4.2 Análisis semiótico de un gráfico correcto del tipo N2

<table>
<tr><th>Gráfico de barras separados de cada secuencia</th><th>Configuración cognitiva</th></tr>
<tr><td>


<br>Procedimientos
<br>- Representa en el eje X: Número de orden de los alumnos en la clase, según su colocación, no corresponde a una propiedad del conjunto de alumnos.
<br>- Establece una correspondencia entre las divisiones en el eje que son los números naturales y cada uno de los alumnos. Dicha correspondencia es arbitraria.
<br>- Representación del eje Y: número de caras obtenido por cada alumno, es decir representa el valor de la variable. Hay divisiones, en el eje que representan los resultados individuales obtenidos por cada uno de los alumnos
</td><td>
Conceptos y proposiciones
<br>- Experimento aleatorio: lanzamiento de una moneda 20 veces.
<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 por un estudiante genérico.
<br>- Variables estadísticas: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 obtenidas por cada uno de los m estudiantes de la clase
<br>- Proporcionalidad (altura de la barra con valor de la variable)
<br>- Números naturales
<br>- Orden de los números naturales.
<br>- Segmento
<br>- Perpendicularidad y paralelismo.
<br>- Variabilidad de los datos.
<br><br>Lenguaje
<br>- Grafico: líneas, puntos, marcas
<br>- Verbal: título del gráfico y etiquetas de los ejes.
<br>- Numérico, en las escalas de los ejes.
<br>- Rótulo para el título del gráfico confuso al no hacer referencia a la variable “Nº de caras”.
<br>- Incluye rótulo en los dos ejes.
</td></tr>
</table>

El alumno usa la idea de proporcionalidad, pues la altura de cada barra corresponde al valor de la variable obtenido por cada alumno. El valor de la variable se ha representado en el eje *Y*, que usualmente corresponde a las frecuencias. En el eje *Y* se representan los números naturales ordenados en su orden natural. Por tanto establece una correspondencia entre las divisiones en el eje que son los números naturales y cada uno de los alumnos, aunque dicha correspondencia es arbitraria. También se visualiza la idea de variable estadística (diferentes valores de la variable aleatoria para cada estudiante), pues se representa cada unidad estadística (alumno) con su valor de la variable. En el eje *X* se representan los alumnos de la clase ordenados según su colocación en el aula; es por tanto un orden arbitrario que no corresponde al orden de los números naturales.

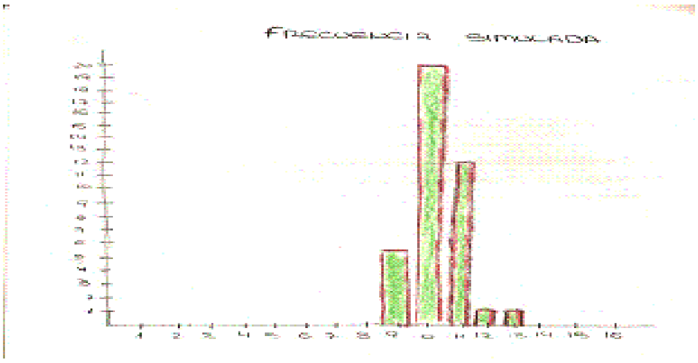
El nivel de lectura de los gráficos que hemos clasificado en el nivel 2 es superior al de los de nivel N1, pues permite visualizar todos los valores obtenidos de la variable, así como su variabilidad (se observa claramente el valor máximo y mínimo). Sin embargo no se llega a percibir claramente la estructura o tendencia de los datos. Por tanto la gráfica permitiría plantear preguntas de nivel de "extracción de datos" pero no permite todavía la "extracción de tendencias" (Bertin, 1967), pues no es posible percibir en el gráfico una relación entre dos o más subconjuntos de datos.

N3. *Produce gráficos separados para cada distribución.* Para concluir sobre las intuiciones de los estudiantes, estos tenían que comparar las secuencias real y simulada. En el estudio comparativo de cada par de variables (estudio de las distribuciones de una misma variable en las secuencias real y simulada), el alumno forma dos tablas de frecuencias, a partir de las cuales produce dos gráficos, uno para cada secuencia o bien, representa directamente un gráfico de cada uno de los valores diferentes de la variable con sus frecuencias, para cada una de las secuencias.

Esto supone que el alumno pasa del conjunto de datos a la variable aleatoria, para posteriormente pasar a su correspondiente variable estadística con su distribución de frecuencias en la muestra de *m* estudiantes. Es decir, para cada par de variables representa dos gráficos; el usar dos gráficos separados dificulta a veces la comparación de las variables, sobre todo en caso de no usar la misma escala de representación en los dos gráficos o usar distintos tipos de gráficos para cada una de las secuencias. Entre los gráficos dentro de esta categoría hemos obtenido gráficos de barras horizontales y verticales y polígonos de frecuencias.

En la figura 4.4.3, el estudiante asigna un número (frecuencia) para "representar" un subconjunto de datos (el conjunto de casos que tienen el mismo valor de la variable; y el cardinal de dicho conjunto). Se usa el eje *Y* para representar las frecuencias (aunque en el ejemplo no se explicita cuál es el objeto matemático representado en este eje). La representación gráfica del conjunto de valores de la variable así establecida con sus frecuencias, remite a un nuevo objeto matemático, la *distribución de frecuencias,* concepto complejo, que se refiere al agregado de todos los datos obtenidos por el conjunto de alumnos de la clase y no a alguno de los datos de un alumno en particular.

Figura 4.4.3. Análisis semiótico de un gráfico correcto del tipo C3

| *Gráficos de barras correctos* | Configuración cognitiva |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Grafico: rectángulos, líneas, marcas<br>- Verbal: título del gráfico<br>- Numérico: etiquetas de las escalas, que representan los números naturales ordenados.<br>- No hay rótulos en los ejes.<br>- El título del gráfico es confuso, pues lo que se representa es la distribución de frecuencias del número de caras en la secuencia simulada.<br>Procedimientos<br>- Recuento de datos, cálculo de frecuencias<br>- Representación de los ejes: en el eje X representación de los valores de la variable (número de caras) y en el eje Y representación de las frecuencias asociadas a cada valor de la variable.<br>- Representación de escalas en los ejes.<br>- Representación de frecuencias mediante barras. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 por un estudiante genérico.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño *m* de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 obtenidas por cada uno de los *m* estudiantes de la clase.<br>- Frecuencias de cada posible valor de la variable.<br>- Proporcionalidad (altura de la barra con frecuencia).<br>- Números naturales y orden de los naturales.<br>- Paralelismo y perpendicularidad.<br>- Distribución de la variable (conjunto de valores con su frecuencia).<br>- Moda (valor más frecuente).<br>- Mínimo, máximo y rango. |

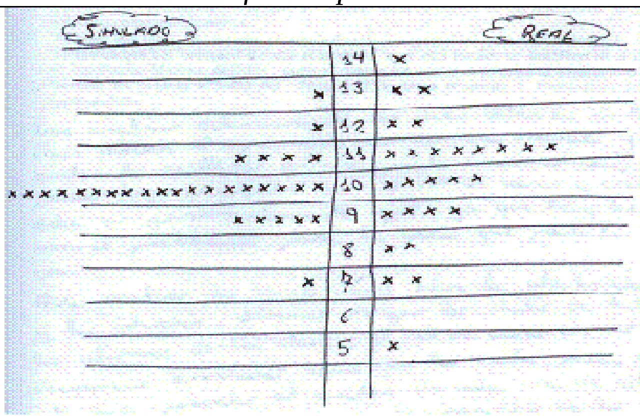
Los gráficos que hemos clasificado en el Nivel 3, permiten responder preguntas hasta el nivel de *extracción de tendencias* en la categorización de Bertín (1967), pues en este tipo de gráficos es posible percibir directamente una relación entre dos o más subconjuntos de datos. Comparando las frecuencias de las diferentes barras del ejemplo (figura 4.4.3), se puede determinar el de mayor frecuencia y percibir directamente la moda, además de ser también patente la variabilidad, que ahora se visualiza más claramente aún que en el gráfico de nivel 2, examinando directamente el rango de la variable en el eje *X*.

*N4. Produce un gráfico conjunto para cada par de distribuciones.* El alumno ha llegado a formar las distribuciones de cada par de variables y las representa conjuntamente en el mismo gráfico, lo cual facilitará su comparación. El gráfico tiene también mayor complejidad al representar conjuntamente dos variables estadísticas. Hemos encontrado las siguientes variaciones de gráficos correctos: diagramas de barras adosados; representación de algún estadístico comparable en las dos distribuciones (por ejemplo las medias), gráficos de barras contrapuestos de estadísticos comparables en las dos muestras (por ejemplo, media, mediana y moda), gráficos de líneas superpuestos y gráficos de puntos de las dos distribuciones. Entre los gráficos incorrectos, los alumnos representan algún estadístico (por ejemplo las medias) en variables no directamente comparables, o de varios estadísticos no comparables en las dos variables (por ejemplo, media y rango) o diagrama de sectores del total de caras en las dos distribuciones.

En los niveles 3 y 4 los alumnos representan una función que a cada valor de la variable asigna su frecuencia (nivel 3) o una frecuencia en cada variable (nivel 4). Esta función no llega a construirse en los niveles anteriores. En la figura 4.4.4 se muestra un ejemplo correcto de un gráfico de esta categoría realizado por un alumno: un gráfico de puntos en el que se muestra la distribución de las dos variables en estudio. En este gráfico al igual que ocurría con el mostrado en la figura 4.4.3 , el alumno es capaz de agrupar los datos iguales llegando así al concepto de variable estadística, frecuencias asociadas a los valores de dichas variables y sus distribuciones de frecuencias.

Este gráfico supone una mayor complejidad que el de nivel 3 pues maneja dos variables estadísticas en el mismo gráfico. También permite una más fácil interpretación de los contenidos estadísticos subyacentes, ya que posibilita visualizar la moda, los valores máximos y mínimos de las variables, los rangos e incluso permite, por un simple mecanismo de conteo de puntos, calcular cual es la mediana en ambas distribuciones. Este gráfico tiene la ventaja de facilitar mucho la comparación de ambas distribuciones. El alumno hace un pequeño error en el gráfico pues no ha colocado el mismo número de puntos en cada parte del gráfico, mientras que el número de datos de las dos variables estadísticas es el mismo. Pensamos que este es un error accidental por lo que consideramos el gráfico correcto.

Figura 4.12. Análisis semiótico de un gráfico correcto del tipo N4

| *Gráfico de puntos doble* | Configuración cognitiva |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Gráfico: cruces, líneas.<br>- Verbal: rótulos para cada una de las distribuciones, incompletos ya que sólo dan información de la secuencia de la que se trata y lo que representan son las distribuciones del número de caras.<br>- Numérico: etiquetas para la escala del eje Y que son los números naturales ordenados.<br>- En el eje Y debemos interpretar que representa los valores de las variables, ya que no tiene rótulo.<br>Procedimientos<br>- Clasificación de cada valor de la variable para colocar un punto en el lugar del gráfico que le corresponde (no hay recuento explícito ni cálculo explícito de frecuencias)<br>- Representación del eje Y y su escala.<br>- Representación de los valores de las variables mediante puntos. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzamiento de una moneda equilibrada 20 veces.<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 por un estudiante genérico.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño *m* de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 obtenidas por cada uno de los *m* estudiantes de la clase.<br>- Frecuencias de cada posible valor de la variable (implícito, dado por el número de puntos)<br>- Distribución de frecuencias.<br>- Sucesos, espacio muestral.<br>- Números naturales y orden de los números naturales.<br>- Moda (valor más frecuente).<br>- Valores máximo y mínimo de las variables y sus rangos.<br>- Mediana.<br>- *Conflicto:* cada punto representa el nº de caras obtenido por un determinado alumno, ya sea en la secuencia real o simulada, pero en la secuencia simulada aparecen más puntos cosa que no es posible. |

Los gráficos que hemos clasificado en el nivel 4 permiten el nivel superior de lectura en la categorización de Bertin (1967), es decir el *análisis de la estructura* pues permite comparar tanto tendencias como variabilidad en las dos variables en una única imagen. En resumen, aunque dentro de cada uno de los niveles que hemos definido en los gráficos producidos por los estudiantes observamos una variedad de gráficos, se evidencia un salto cualitativo entre cada uno de los niveles definidos. Por un lado, cada nivel en la construcción de gráficos implica la actividad semiótica usada en el nivel anterior y además la amplía, como también amplía la complejidad y el número de objetos matemáticos utilizados en la comprensión.

En términos de Font, Godino y D'Amore (2007), la complejidad de la configuración de objetos matemáticos subyacentes crece con el nivel del gráfico producido. Por otro lado, se puede establecer un paralelismo entre los niveles de lectura de gráficos descritos por Bertin (1967) y asumidos posteriormente por Curcio (1989) con otra terminología y nuestros niveles de construcción de los gráficos: El nivel 1 posibilita la extracción de datos; el nivel 3, la extracción de tendencias y el 4 el análisis de la estructura; mientras que el 2 permite un nivel intermedio superior a la simple extracción de datos pero sin llegar a la extracción de tendencias.

**Síntesis de resultados**

En la tabla 4.4.2 se muestra la distribución de los gráficos construidos por los estudiantes en cada variable, teniendo sólo en cuenta los alumnos que realizan gráficos. Respecto al *número de caras*, del total de los 207 alumnos que entregaron el informe final del proyecto, son 181 (87,44%) los que realizan algún gráfico. Es un porcentaje alto, sobre todo teniendo en cuenta que las instrucciones de la tarea dejaban total libertad a los alumnos para elegir el método de análisis de los datos que creyesen conveniente, es decir no se les pedía la construcción de gráficos en la realización del proyecto.

Tabla 4.4.2. Frecuencia (porcentaje) de gráficos construidos por los estudiantes en cada variable según nivel de complejidad semiótica.

| Nivel de complejidad semiótica | Número de caras | Número de rachas | Racha Mayor |
|---|---|---|---|
| N1. Representa sólo sus datos | 6 (3,31) | 6 (4,11) | 3 (2,34) |
| N2. Representa resultados individuales | 40 (22,10) | 23 (15,75) | 21 (16,41) |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 91 (50,27) | 77 (52,74) | 67 (52,34) |
| N4. Gráficos conjuntos | 44 (24,31) | 40 (27,39) | 37 (28,90) |
| Total | 181 | 146 | 128 |

La mayoría de los estudiantes construyen gráficos dentro del nivel 3 de complejidad semiótica (50,27%), y si sumamos a estos los alumnos que realizan gráficos pertenecientes al nivel 4 (24,31%), tenemos que el 74,58% de los gráficos realizados por los alumnos tienen un nivel de complejidad adecuado para resolver el problema que se les planteó, ya que son capaces de llegar a la distribuciones de las variables estadísticas y representarlas en un gráfico.

El porcentaje de alumnos que construyen gráficos de nivel 1 (3,31%) es bajo, lo que indica que la mayoría de los alumnos entendió el propósito del proyecto representando solamente sus propios datos. Sin embargo, el porcentaje de gráficos pertenecientes al nivel 2 de complejidad (22,10%) es considerable, pues estos gráficos no permiten extraer suficiente información que ayude a los alumnos a concluir sobre las intuiciones de la aleatoriedad, pues no se pueden observar las tendencias, aunque sí sobre la variabilidad.

Para el estudio del *número de rachas*, 146 estudiantes (70,53%) realizaron algún tipo de gráfico. El porcentaje es considerablemente más bajo que en el caso de la variable número de caras, por las razones ya explicadas. De estos estudiantes, el 52,74% construyen gráficos de nivel 3 y 27,33% alcanzan el nivel superior, lo que supone que un 80,07% de los estudiantes realizan representaciones pertenecientes a los dos niveles superiores. Esto muestra que también para el estudio de esta variable, en el caso de realizar gráfico, la mayoría de los estudiantes realizan representaciones de una complejidad semiótica adecuada para el problema que se les propuso. El resto (19,86%) de los alumnos que realizan gráfico no llegan a construirlo con un nivel semiótico suficiente como para obtener informaciones relevantes a partir de estos a la hora de obtener sus conclusiones finales (niveles 1 y 2).

Respecto *a la longitud de la racha mayor,* vuelve a descender el porcentaje de alumnos que realizan gráficos, suponemos que influye lo dicho anteriormente, es decir que el concepto de racha es menos intuitivo para los estudiantes, además de unirse al hecho de que esta fue la tercera y última variable que se les propuso que estudiasen. Del total de los 207 alumnos que entregaron el proyecto resuelto, un 38,16% (79 estudiantes) no realiza ninguna representación gráfica.

Como en los dos casos anteriores, el nivel más frecuente entre los gráficos construidos es el nivel 3 (52,34%), que unido al nivel 4, alcanzado por 37 estudiantes (28,90%), suponen un total del 81,24% de los gráficos construidos. En el estudio de esta variable, aunque son menos los estudiantes que realizan algún tipo de gráfico, el porcentaje de gráficos pertenecientes a los dos niveles superiores es mayor que en los dos casos anteriores, por lo que la mayoría de las veces el gráfico tiene un nivel de complejidad semiótico adecuado pare el problema en cuestión.

Para analizar si hay influencia de la variable analizada sobre el nivel de complejidad semiótica del gráfico producido se realizó el contraste Chi-cuadrado, obteniéndose un valor Chi=3,58, con 6 grados de libertad, que no fue estadísticamente significativo (p= 0,7339). En consecuencia el nivel de complejidad del gráfico no depende de la variable analizada, y por tanto es más bien un indicador de la competencia gráfica del futuro profesor.

## 4.5. ERRORES Y DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS GRÁFICOS

Otro punto analizado ha sido la corrección de los gráficos; más concretamente, se han clasificado los errores detectados en la construcción de los gráficos por parte de los futuros profesores. Con ello ampliamos unos estudios previo realizado sobre este mismo tema (Arteaga, Ortiz y Batanero, 2008), donde se encontraron errores, principalmente en la construcción de las escala y, en menor medida, en la elección del tipo de gráfico. A continuación presentamos los tipos de errores encontrados en la investigación actual, mostrando un ejemplo de cada uno y llevando a cabo su análisis semiótico. Seguidamente se estudia el efecto del uso del ordenador sobre los errores en los gráficos producidos y, finalmente, la relación entre la complejidad semiótica del gráfico y los errores en su construcción.

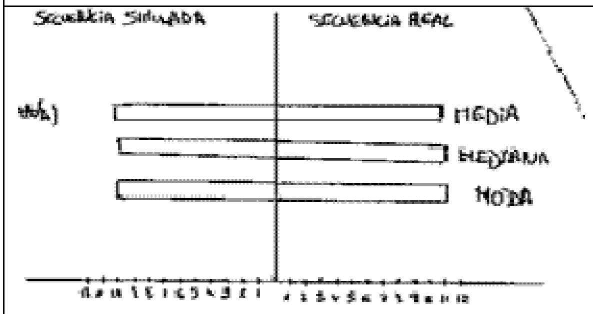
### 4.5.1. CLASIFICACIÓN DE ERRORES EN LA CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS.

*1. Gráficos básicamente correctos.* Aunque la finalidad de esta sección es analizar los errores en la construcción de los gráficos, describimos también los que son correctos o básicamente correctos, para tenerlos en cuenta en el análisis de la frecuencia de los diferentes tipos de errores. Una primera categoría es, en consecuencia, la formada por gráficos básicamente correctos, en los cuáles hemos destacado las siguientes variantes:

*1.1. Gráfico correcto.* Cuando el estudiante realiza un gráfico que es correcto, tanto en el título, ejes, escalas y etiquetas, como en el tipo de gráfico y las variables representadas. No comentamos este caso, ya analizado anteriormente.

*1.2. Gráfico que es básicamente correcto, pero no estándar.* Debido a que en la realización del proyecto los alumnos tuvieron libertad para elegir los resúmenes estadísticos o gráficos que creyesen apropiados para el problema que se les planteó, hay alumnos que realizan gráficos no comunes. Debido a una falta de conocimiento de los convenios de construcción de los distintos gráficos, pueden realizar representaciones no estándar. En algunos de los casos, estos gráficos serán correctos y en otras incorrectos.

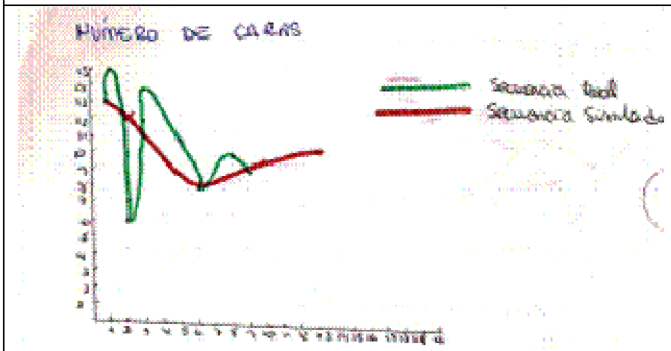
Tabla 4.5.1, Ejemplo de gráfico en la categoría 1.1

| Gráfico correcto pero no estándar | Configuración epistémica |
|---|---|
|  <br>Procedimientos<br>- Recuento de datos, cálculo de frecuencias.<br>- Cálculo de los distintos promedios: media, mediana y moda.<br>- Representación de los ejes: en el eje X representa los valores de la variable estadística, a la izquierda del origen representa los valores de esta en la secuencia simulada y a la derecha los valores de la variable en la secuencia real.<br>- Representa un eje Y común para ambas secuencias, y por medio de barras cuyo origen está situado en dicho eje representa los valores de los distintos promedios.<br>- Representación de valores de los distintos promedios por medio de la longitud de las distintas barras.<br>- Representación de estadísticos de dos distribuciones en un mismo gráfico (Nivel 4). | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 por un estudiante genérico.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 obtenidas por cada uno de los m estudiantes de la clase.<br>- Distribución de frecuencias, como paso previo al cálculo de los distintos promedios.<br>- Números naturales y orden de los naturales.<br>- Moda (valor más frecuente), media y mediana.<br><br>Lenguaje<br>- Gráfico: puntos, líneas, marcas, rectángulos.<br>- Verbal: etiquetas para las distintas secuencias y etiquetas en cada barra indicando a qué promedio corresponde cada una de estas.<br>- Numérico: etiquetas en las escalas que representan los números naturales ordenados. |

En la tabla 4.5.1 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico. Sólo tres estudiantes realizan gráficos dentro de esta categoría, y los construyen para las tres variables. Aunque estas representaciones no coincidan con ningún gráfico estadístico ya estudiado por los alumnos, suponen maneras originales de representar los datos que, además, permiten realizar algunas interpretaciones correctas y por lo tanto extraer informaciones útiles para obtener una conclusión del problema planteado. En este sentido, Watson (2006) propone que es importante que los alumnos no tengan demasiadas restricciones a la hora de construir gráficos, pues en muchos casos idearán gráficos originales e intuitivos, aunque no sean perfectos desde el punto de vista estadístico. Posteriores debates acerca de los gráficos construidos ayudarán a los alumnos a progresar y fomentará el desarrollo de habilidades críticas a la hora de construir e interpretar distintos gráficos estadísticos.

*1.3. Gráficos con líneas innecesarias o bien con líneas curvas, que dificultan su lectura.* En general el gráfico no contiene errores graves, pero se añaden elementos innecesarios o bien en los polígonos de frecuencias los alumnos en lugar de unir los puntos con líneas rectas utilizan líneas curvas. En la tabla 4.5.2 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico.

Tabla 4.5.2. Ejemplo de gráfico en la categoría 1.2

| Gráfico con líneas innecesarias | Configuración epistémica |
| --- | --- |
|  <br>Lenguaje<br>- Gráfico: puntos, líneas curvas y rectas, marcas.<br>- Verbal: título del gráfico, nombres de las secuencias representadas. No hay rótulos en los ejes.<br>- Numérico: etiquetas en las escalas que representan los números naturales ordenados.<br>- El título del gráfico no es claro porque no especifica que se están representando las distribuciones del número de caras en las secuencias real y simulada.<br>- Usa dos colores, rojo y verde, para diferenciar las dos distribuciones.<br>Procedimientos<br>- Recuento de datos, cálculo de frecuencias.<br>- En el eje X representación de los valores de la variable (número de caras) y en el eje Y las frecuencias asociadas a cada valor de la variable en las secuencias real y simulada.<br>- Representación de escalas en los ejes.<br>- Representación de frecuencias mediante puntos.<br>- Representación de dos distribuciones en un mismo gráfico.<br>- *Conflicto*: unión de puntos mediante líneas curvas. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Frecuencias de cada posible valor de la variable número de caras en las secuencias real y simulada.<br>- Números naturales y orden de los naturales.<br>- Distribución de la variable (conjunto de valores con su frecuencia).<br>- Moda (valor más frecuente).<br>- Mínimo, máximo y rango.<br>- Proporcionalidad, escala. |

La frecuencia de alumnos que cometen este tipo errores también es baja. En el caso de comparación del número de caras y del número de rachas hay 4 alumnos y, para la variable longitud de la racha más larga, solamente 3 estudiantes realizaron gráficos pertenecientes a esta categoría. Estos estudiantes parecen no conocer las reglas para la construcción de los gráficos estadístico y tratan de aplicar convenios aprendidos en otras partes de las matemáticas. Más concretamente, puede ser debido a la confusión de un polígono de frecuencias con la representación de una función algebraica continua.

Al representar funciones polinómicas sencillas, los alumnos dan valores a la variable independiente para luego obtener los valores correspondientes de la variable dependiente, y, una vez representados varios puntos en un sistema de referencias cartesiano, unen estos por medio de líneas curvas. Puesto que al construir los polígonos de frecuencias, inicialmente se representan las frecuencias para los distintos valores de la variable por medio de puntos en un sistema de coordenadas, este gráfico puede parecer similar al caso de representaciones de funciones polinómicas.

El problema de añadir líneas innecesarias aparece si estas dificultan la lectura del gráfico, pero en nuestro trabajo dichas líneas no añaden dificultad a la lectura del gráfico, por lo tanto es considerado como un error leve.

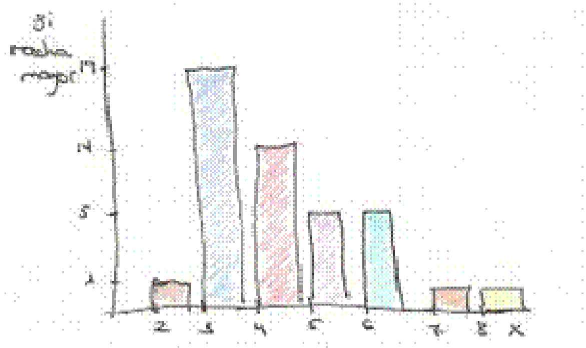
*2. Gráfico correcto con errores en escala (Parcialmente correcto)*

Friel, Curcio y Bright (2001) indican que una de las partes que conforman un gráfico es el *marco* del mismo, en el que están incluidos las escalas, los ejes, el sistema de coordenadas elegido y las etiquetas de las escalas y ejes. Estos elementos proporcionan herramientas necesarias para entender los datos y tipos de medidas que están siendo tratados. Por lo tanto es importante que los futuros profesores presten especial atención a las escalas y su representación, ya que son fundamentales para una correcta interpretación de los distintos gráficos. En el proyecto presentado este paso no fue difícil para los estudiantes, debido a que todas las variables que tenían que representar eran discretas, con valores enteros.

En esta categoría el gráfico en sí sería correcto, pero tiene algún error en la escala, sus etiquetas, o bien no contiene escala. Debido a que estos elementos son parte estructurante de los distintos gráficos y proporcionan información fundamental a la hora de leer e interpretar críticamente los gráficos, representaciones con este tipo de error son consideradas como parcialmente correctas. Hemos encontrado las siguientes variantes:

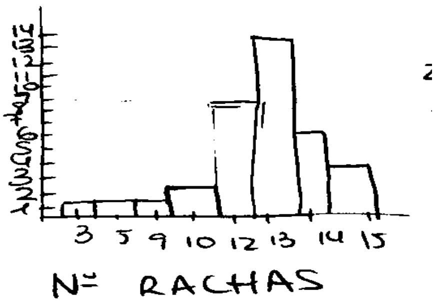
*2.1. Escalas no proporcionales.* El punto en que los estudiantes encontraron más dificultades fue a la hora de representar las escalas con sus etiquetas en los distintos gráficos. En este sentido, hemos encontrado escalas no proporcionales, en las cuales distancias que deberían ser iguales entre pares distintos de puntos, no lo son. Este problema ha sido encontrado en dos estudiantes al analizar el número de rachas y en tres estudiantes cuando analizan la longitud de la racha mayor. En la tabla 4.5.3 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico.

Tabla 4.5.3, Ejemplo de gráfico en la categoría 2.1

| Gráfico con escalas no proporcionales | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Gráfico: puntos, líneas, marcas, rectángulos.<br>- Verbal: etiqueta “x” para el eje X, sin aclarar que se trata de la variable longitud de la racha mayor. En el eje Y la etiqueta “ fi racha mayor” da información de lo que se está representando en el gráfico. Falta título.<br>- Numérico: etiquetas en las escalas que representan los números naturales ordenados. (eje X y eje Y).<br>- Utiliza distintos colores para diferenciar las distintas barras del gráfico.<br><br>Procedimientos<br>- Recuento de datos, cálculo de frecuencias.<br>- Representación de los ejes, es decir representación de números naturales en la recta real: en el eje X representación de los valores de la variable (longitud de la racha mayor) y en el eje Y representación de las frecuencias asociadas a cada valor de la variable en una de las dos secuencias; real o simulada.<br>- Representación de escalas en los ejes.<br>- Representación de frecuencias mediante la longitud de distintas barras.<br>- Dar diferentes colores a las distintas barras.<br>- *Conflicto*: representación de los números naturales en la recta real. Escala no proporcional, distancia entre el 6 y el 7 es mayor que por ejemplo la distancia entre el 7 y el 8.<br>- *Conflicto*: en este caso el estudiante no centra las barras en los valores enteros. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>- Variables aleatorias: longitud de la racha mayor al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y longitud de la racha mayor en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño *m* de los resultados de la longitud de la racha mayor al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y longitud de la racha mayor en la secuencia inventada.<br>- Distribución de frecuencias.<br>- Números naturales y orden de los naturales.<br>- Figuras geométricas: rectángulos.<br>- Escala, proporcionalidad.<br>- Correspondencia entre cada valor de la variable y un rectángulo o barra, y entre la altura de cada una de las barras y la frecuencia del valor al que representa la barra.<br>- Moda (valor más frecuente).<br>- Valor máximo y mínimo de la variable, rango.<br>- Forma de la distribución. |

*2.2. Representación errónea de números naturales en la recta real*. También hemos encontrado representaciones erróneas de los números naturales en la recta real, error ya descrito en futuros profesores por Bruno y Espinel (2005). Entre ellas destacamos alumnos que omiten determinados valores de la variable, debido a que tienen frecuencia nula. En la tabla 4.5.4 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico.

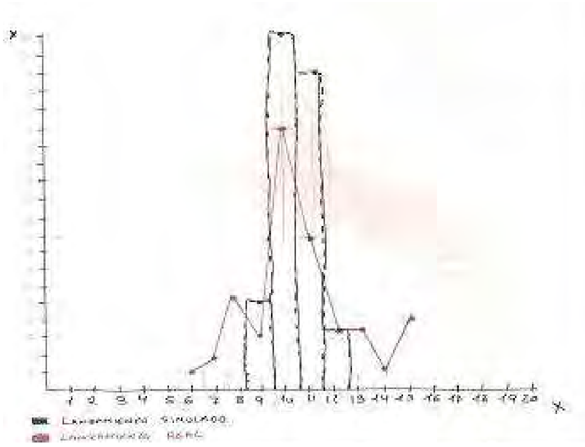
Tabla 4.5.4, Ejemplo de gráfico en la categoría 2.2

| Gráfico con valores faltantes en el eje | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Gráfico: puntos, líneas, marcas, rectángulos adosados.<br>- Verbal: título del gráfico incompleto y faltan etiquetas en los ejes.<br>- Numérico: etiquetas en las escalas que representan los números naturales ordenados. (eje X y eje Y).<br><br>Procedimientos<br>- Recuento de datos, cálculo de frecuencias.<br>- Representación de los ejes, es decir representación de números naturales en la recta real: en el eje X representación de los valores de la variable (número de rachas) y en el eje Y representación de las frecuencias asociadas a cada valor de la variable en una de las dos secuencias; real o simulada.<br>- Representación de escalas en los ejes.<br>- Representación de frecuencias mediante el área de los distintos rectángulos, ya que en un histograma el área de las barras ha de ser proporcional a la frecuencia.<br>- *Conflicto*: representación de los números naturales en la recta real. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>- Variables aleatorias: número de rachas al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de rachas en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de rachas al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de rachas en la secuencia inventada.<br>- Distribución de frecuencias.<br>- Figuras geométricas: rectángulos.<br>- Correspondencia entre cada valor de la variable y un rectángulo o barra, y entre el área de cada una de las barras y la frecuencia del valor al que representa la barra.<br>- Moda (valor más frecuente).<br>- Valor máximo y mínimo de la variable, rango.<br>- Forma de la distribución. |

Este tipo de errores tienen estrecha relación con el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes, ya que estos alumnos muestran dificultades al representar los números naturales en la recta real y fallos de razonamiento proporcional. En nuestro trabajo, son cuatro alumnos los que cometen este error al analizar el número de caras

(2,2%), 10 al comparar el número de rachas (6,85%) y cinco en el estudio de la variable longitud de la racha mayor (3,88%).

Tabla 4.5.5, Ejemplo de gráfico en la categoría 2.3

| Gráfico en el que falta el rótulo | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Gráfico: puntos, líneas, marcas, rectángulos.<br>- Verbal: etiqueta "x" para el eje X e "y" para el eje Y. Las etiquetas son insuficientes, ya que no tiene tampoco título. Etiquetas para diferenciar las secuencias real y simulada.<br>- Numérico: etiquetas en las escalas que representan los números naturales ordenados. (eje X y eje Y).<br>- Utiliza distintos tipos de gráficos para diferenciar la distribución de la variable en las distintas secuencias. Dibuja el polígono de frecuencias utilizando un bolígrafo rojo y el histograma utilizando un bolígrafo negro.<br><br>Procedimientos<br>- Recuento de datos, cálculo de frecuencias.<br>- Representación de números naturales en la recta real: en el eje X representación de los valores de la variable y en el eje Y representación de las frecuencias asociadas a cada valor de la variable en las dos secuencias.<br>- Representación de escalas en los ejes.<br>- Representación de frecuencias mediante la longitud de distintas barras y posición de distintos puntos en el plano cartesiano.<br>- Representación de dos distribuciones en un mismo marco. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>- Variables aleatorias: número de rachas al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de rachas en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de rachas al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de rachas en la secuencia inventada.<br>- Distribución de frecuencias.<br>- Figuras geométricas: rectángulos, segmentos, puntos.<br>- Sistemas de coordenadas cartesianas.<br>- Correspondencia entre cada valor de la variable y un rectángulo o barra, y entre el área de cada una de las barras y la frecuencia del valor al que representa la barra.<br>- Correspondencia entre cada valor de la variable y un punto en el plano de coordenadas cartesianas y a su vez entre estos puntos y su coordenada en el eje de ordenadas que representa la frecuencia de cada valor de la variable.<br>- Moda (valor más frecuente).<br>- Valor máximo y mínimo de una de las variables en las secuencias real y simulada.<br>- Forma de la distribución. |

*2.3. Rótulos confusos, valores en las escalas erróneos o falta escala.* Los rótulos y etiquetas son parte importante de los gráficos, pues, según Curcio (1987), un gráfico queda determinado entre otras cosas por las *palabras* que aparecen en el mismo, esto es, el título del gráfico, los rótulos de los ejes y las etiquetas de las escalas. Todo ello proporciona las claves necesarias para entender las variables representadas, las relaciones existentes entre los distintos elementos del gráfico y el contexto del mismo.

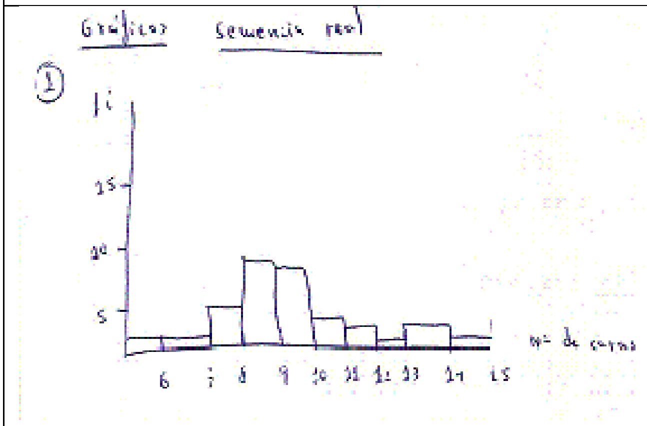
A pesar de esta importancia, Bruno y Espinel (2005) muestran en su investigación que muchos futuros profesores tienen dificultades en incluir un rótulo correcto y significativo. En nuestro trabajo son muchos los alumnos que incluyen títulos o etiquetas imprecisos, aunque pocos realizan gráficos con títulos o etiquetas totalmente incorrectos o ausentes. En concreto, en el número de caras en las secuencias real y simulada sólo 6 alumnos (3,31%) cometen este error; para el par número de rachas sólo 4 alumnos (2,74%) y para la longitud de la racha más larga también 4 alumnos (3,1%). En la tabla 4.5.5 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico.

*2.4. Barras no centradas.* Como se ha indicado, las variables estadísticas que tuvieron que estudiar los alum nos para realizar el proyecto fueron discretas con valores enteros. A pesar de ello, muchos alumnos realizaron histogramas que suelen ser más comunes a la hora de representar variables continuas y cuando se hace necesario agrupar los valores de la variable en intervalos. Muchos de estos histogramas son realmente gráficos de barras en los que estas están unidas unas a otras como si se tratase de una variable continua.

Tanto en los histogramas como en los gráficos de barras algunos alumnos no centran las barras o rectángulos en las marcas de clase, aunque las variables en estudio toman solamente valores enteros, y la barra debería estar centrada en dicho valor (marca de clase). Este tipo de error ya fue detectado en futuros profesores en las investigaciones de Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007).

No ha sido muy frecuente este error en los gráficos construidos por los alumnos; para el estudio del número de caras lo comete un 4,4% (8 estudiantes) de los que realizaron gráfico, 4,1% (6 estudiantes) del total de los alumnos que construyeron un gráfico para el número de rachas y para la longitud de la racha mayor, el porcentaje fue de un 5,4% (7 estudiantes). En la tabla 4.5.6 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico.

Tabla 4.5.6. Ejemplo de gráfico en la categoría 2.4

<table>
<tr><th>Gráfico con barras no centradas</th><th>Configuración epistémica</th></tr>
<tr><td>

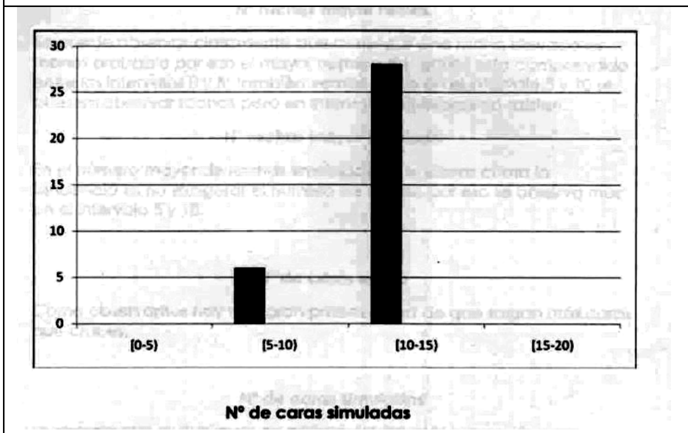
Lenguaje<br>- Gráfico: rectángulos, líneas rectas, marcas.<br>- Verbal: título del gráfico y rótulos en los ejes.<br>- Numérico: etiquetas en las escalas que representan los números naturales ordenados.<br>- El título del gráfico es incompleto.<br>Procedimientos<br>- Recuento de datos, cálculo de frecuencias.<br>- Representación de los ejes: en el eje X representación de los valores de la variable agrupados en intervalos (número de caras) y en el eje Y representación de las frecuencias asociadas a cada valor de la variable en las secuencias real.<br>- Representación de escalas en los ejes.<br>- Representación de frecuencias mediante rectángulos de diferentes alturas.<br>- Al no usar instrumentos de medida los intervalos que deberían medir lo mismo, muestran diferencias significativas visualmente con respecto a su longitud, lo que puede llevar a error de interpretación.<br>- *Conflicto*: no centra los intervalos en el histograma.<br>- *Conflicto*: insuficientes divisiones en la escala del eje vertical, lo que dificulta la lectura de las frecuencias de cada uno de los valores de la variable, además la escala en dicho eje es demasiado amplia.</td>
<td>Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Frecuencias de cada valor de la variable número de caras en la secuencia real.<br>- Correspondencia entre cada valor de la variable y un rectángulo, y entre el área de cada barra y la frecuencia del valor al que representa la barra.<br>- Números naturales y orden de los naturales.<br>- Figuras geométricas: rectángulos.<br>- Distribución de la variable (conjunto de valores con su frecuencia).<br>- Moda (valor más frecuente).<br>- Mínimo, máximo y rango.<br>- *Conflicto*: significado de la agrupación de datos y del histograma, más apropiado para representar variables continuas.</td></tr>
</table>

2.5. *Representación incorrecta de intervalos de valores de la variable en el eje X*. Como se ha indicado, aunque los datos proporcionados sólo tomaban valores enteros, algunos estudiantes representan las frecuencias en un histograma. De estos alumnos, algunos encuentran dificultades al representar los intervalos, tratando intervalos con extremo común como si fuesen intervalos disjuntos.

Este error, descrito por Bruno y Espinel (2005), lo cometen tres estudiantes en el análisis de los tres pares de variables y otro alumno solamente para el estudio del número de caras. Los tres primeros alumnos han utilizado la hoja Excel para realizar sus gráficos.

En la tabla 4.5.7 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico. Subyace en los estudiantes que producen este error una confusión entre histograma y diagrama de barras, pues no comprenden sus diferencias, ni los tipos de datos en que pueden aplicarse uno y otro. Hay también *falta de comprensión del significado de un intervalo de valores en la recta numérica* y del *propósito del área en un histograma* que es representar las frecuencias en el intervalo base del mismo, de manera que cada barra del histograma es proporcional a la frecuencia de los valores representados. Además hay confusión entre el significado de los valores extremos de un intervalo en la recta numérica y de la marca de clase del intervalo

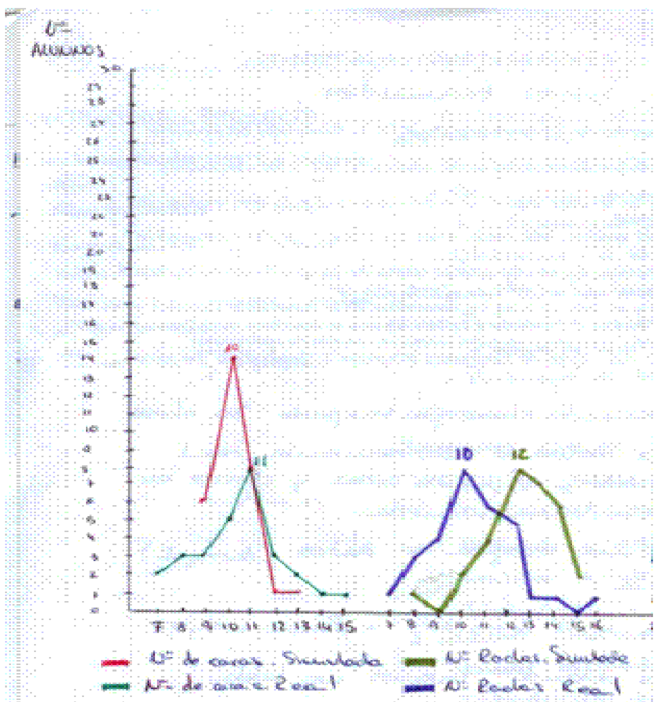
Tabla 4.5.7, Ejemplo de gráfico en la categoría 2.5

| Errores en la representación de intervalos | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Gráfico: rectángulos, líneas, marcas.<br>- Verbal: título del gráfico, aunque incompleto, no pone etiquetas a los ejes.<br>- Numérico: etiquetas en ambos ejes, en el eje Y representa los números naturales ordenados y en el eje X representa los intervalos no disjuntos como si lo fueran.<br>Procedimientos<br>- Recuento de datos para obtener las distribución de frecuencias.<br>- Introducción de estos en la hoja Excel.<br>- Agrupamiento de los valores de la variable en intervalos.<br>- Representación de los datos en un gráfico de barras.<br>- *Conflicto:* el estudiante no es capaz de criticar su representación creada con la hoja Excel y explorar otras opciones del software para representar mejor los datos.<br>- *Conflicto*: Representación de números en la recta; repite valores, situándolos en diferentes puntos del eje. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Distribución de la variable.<br>- Frecuencias asociadas a diferentes intervalos de valores de la variable.<br>- Correspondencia entre cada intervalo en los que ha agrupado los valores de la variable y un rectángulo o barra, y entre el área de cada una de las barras y la frecuencia del valor al que representa la longitud de la barra.<br>- Números naturales e intervalos numéricos.<br>- Figuras geométricas: rectángulos.<br>- Moda (valor más frecuente).<br>- *Conflicto*: Significado del intervalo. |

2.6. *Escala no apropiada,* cuando los alumnos realizan escalas con insuficientes divisiones en los ejes o utilizan escalas demasiado amplias. Este error fue descrito por Li y Shen (1992), quienes encontraron que sus estudiantes cometían diversos errores referentes a las escalas, en particular la elección de una escala inadecuada para el objetivo que se pretendía, por ejemplo una escala que no cubriese el campo de variación de la variable representada.

Autores como Watson (2006) llaman la atención de que hay que ser cuidadosos en este punto, porque muchas veces los gráficos pueden ser manipulados eligiendo una escala apropiada, por ejemplo resalta el caso de realizar cortes en la escala vertical para resaltar diferencias que no son tan importantes. También Wainer (1997) muestra ejemplos tomados de la prensa en los que la elección de la escala puede llegar a esconder relaciones importantes entre los datos o por el contrario resaltar determinadas relaciones entre las variables representadas.

Tabla 4.5.8. Ejemplo de gráfico en la categoría 2.6

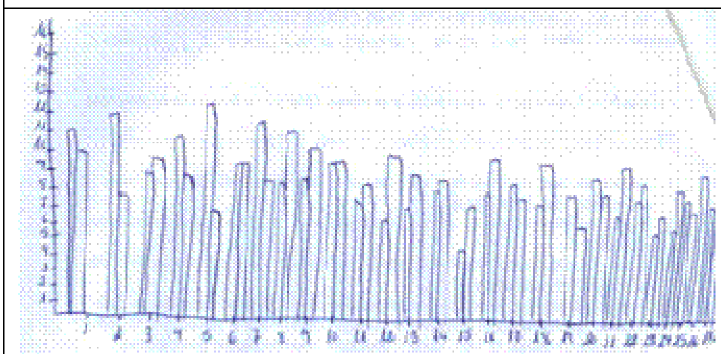
| Gráfico con escalas muy amplias | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Gráfico: líneas, marcas; colores.<br>- Verbal: etiquetas para diferenciar las variables.<br>- Numérico: etiquetas en ambos ejes, representan los números naturales ordenados. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada por un estudiante genérico.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Distribución de la variable.<br>- Frecuencias asociadas a diferentes intervalos de valores de la variable.<br>- Números naturales.<br>- Figuras geométricas: segmentos.<br>- Moda (valor más frecuente).<br><br>Procedimientos<br>- Recuento de datos para obtener las distribución de frecuencias.<br>- Representación de los datos en un gráfico<br>- Conflicto: La escala es demasiado amplia |

A pesar la importancia en la elección y representación de la escala, este error es cometido por 13 estudiantes al comparar el número de caras (7,2% del total de estudiantes que realizan gráficos en esta variable), por 8 estudiantes al comparar el número de rachas (5,48%) y por 8 estudiantes al comparar la longitud de la racha mayor (6,2%). En la tabla 4.5.8 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico.

3. *Gráfico incorrecto.* Incluimos en este punto los gráficos que, o bien son inadecuados al tipo de variable representadas, o representan variables no relacionadas dentro del mismo gráfico o contienen otros errores importantes. Se han encontrado las siguientes categorías:

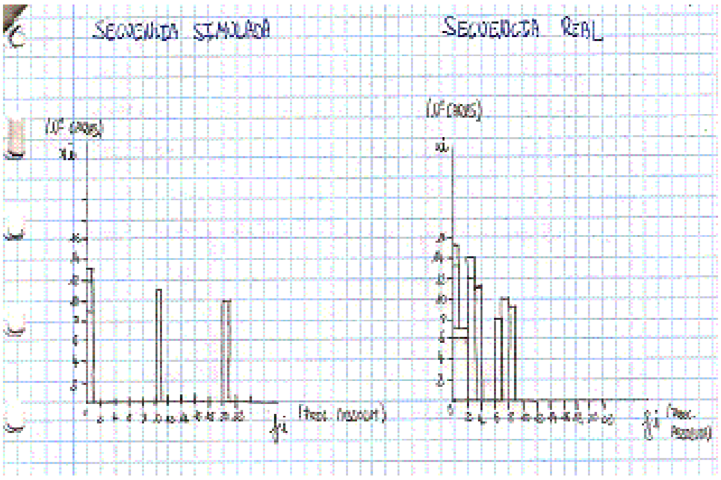
*3.1. Altura de la barra, o del punto, o ángulo no proporcional a la frecuencia*. Son pocos los alumnos que al realizar sus gráficos cometen este tipo de fallos, normalmente debidos a una falta de conocimiento de los convenios de construcción de los distintos gráficos. En otras ocasiones debido a la mala calidad de sus representaciones, en las que a veces los alumnos no utilizan ningún instrumento de medida, o ni si quiera hojas cuadriculadas, lo que hace que en ocasiones el gráfico construido pueda mostrar este tipo de errores. En la tabla 4.5.9 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico.

Tabla 4.5.9, Ejemplo de gráfico en la categoría 3.1

| Elementos del gráfico no proporcionales | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Gráfico: rectángulos, marcas<br>- Verbal: no pone etiquetas a los ejes.<br>- Numérico: etiquetas en ambos ejes<br>Procedimientos<br>- Representación de los datos en un gráfico de barras.<br>- *Conflicto:* Aunque la mayoría de los valores de los datos es 10, el alumno no tiene en cuenta el valor al representarlos; la altura de las barras oscila de 4 a 12. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Números naturales.<br>- Figuras geométricas: rectángulos. |

*3.2. Intercambia frecuencia y valor de la variable*, no comprendiendo la diferencia entre los mismos, ni el papel que juegan en la distribución de frecuencias. Este conflicto ya fue detectado por Ruiz (2006) en un estudio de comprensión de la variable aleatoria y lleva consigo una mayor dificultad en la lectura e interpretación del gráfico.

Tabla 4.5.10. Análisis semiótico de un gráfico incorrecto en la categoría 3.2.

<table>
<tr><th>Gráfico de barras con ejes cambiados</th><th>Configuración cognitiva</th></tr>
<tr><td>


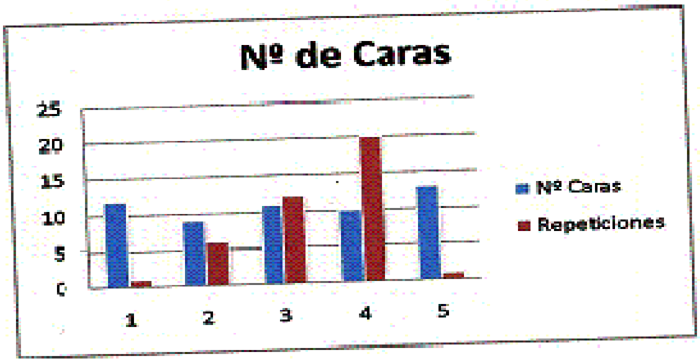
<br>Lenguaje<br>
- Grafico: rectángulos, líneas, marcas.<br>
- Verbal: rótulos de los ejes y títulos de ambos gráficos.<br>
- Numérico: Escalas en los ejes que representan los números naturales ordenados; incluye etiquetas de los valores.<br>
- Simbólico: utiliza el símbolo $x_i$ para referirse a los posibles valores de la variable estadística y $f_i$ para referirse a las frecuencias absolutas de los valores que toma la variable.<br>
- El título del eje es incompleto, pues lo que se representa es la distribución del número de caras en ambas secuencias.<br>
<br>Procedimientos<br>
- Recuento de datos y cálculo de frecuencias<br>
- Representación de los ejes: en el eje *Y* representa el número de caras (valores de la variable estadística) y en el eje *X* la frecuencia asociada a cada valor de la variable.<br>
- Representación de escalas en los ejes.<br>
- Representación de valores de la variable mediante barras<br>
- Utiliza la misma escala en ambos gráficos lo cual facilita la comparación.
</td><td>
Conceptos y proposiciones<br>
- Experimento aleatorio: lanzar 20 monedas.<br>
- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>
- Variables estadísticas: muestra de tamaño *m* de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>
- Frecuencias de cada posible valor de la variable.<br>
- Distribución de frecuencias.<br>
- Paralelismo y perpendicularidad.<br>
- Proporcionalidad (altura de la barra con valor de la variable).<br>
- Números naturales y orden de los naturales.<br>
- *Conflicto* al confundir frecuencia y valor de la variable.<br>
- *Conflicto* al confundir la variable dependiente e independiente en la distribución de frecuencias.
</td></tr>
</table>

En la tabla 4.5.10 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico. El estudiante ha sido capaz de agrupar los datos obtenidos en el experimento realizado por la clase para el número de caras, llegando así al concepto de variable estadística, frecuencia asociada a cada uno de los posibles valores de ésta y distribución. El estudiante ha usado un gráfico de barras, en el que cada barra representa la frecuencia asociada a cada valor de la variable estadística y en cuya representación el alumno utiliza la idea de proporcionalidad. El problema es que se trata de un gráfico de barras inusual e incorrecto ya que han sido intercambiadas las variables independiente (número de caras) y dependiente (frecuencias absolutas asociadas al número de caras) de la distribución de frecuencias en los ejes.

En el ejemplo mostrado no se perciben todos los valores diferentes de la variable, pues si hay dos valores con la misma frecuencia, se representan sobre la misma barra. Además, la moda en este caso es más complicada de detectar visualmente. Esto conlleva una mayor dificultad en la comparación de los gráficos y extracción de conclusiones para dar respuesta a la pregunta planteada en el proyecto.

*3.3. Representa valor de la variable junto con su frecuencia en dos barras adosadas,* obteniendo un gráfico sin sentido al comparar dos objetos matemáticos no comparables. Este tipo de representaciones hace que sea muy difícil la interpretación del gráfico y que por lo tanto se pueda extraer información significativa de este.

Tabla 4.5.11, Ejemplo de gráfico en la categoría

| Gráfico de barras con valores y frecuencias | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br><br>Lenguaje<br>- Gráfico: rectángulos, líneas rectas, marcas<br>- Verbal: título del gráfico y etiquetas para las distintas series representadas.<br>- Distintos colores para diferenciar las series.<br>- Numérico: etiquetas en las escalas que representan los números naturales ordenados.<br>- El título del gráfico es incompleto.<br>Procedimientos<br>- Recuento de datos, cálculo de frecuencias.<br>- Introducción de los datos en la hoja Excel<br>- Realización de un gráfico con los datos introducidos.<br>- Representación de frecuencias mediante rectángulos de diferentes alturas.<br>- Uso acrítico de la hoja Excel. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Frecuencias de cada posible valor de la variable número de caras en una de las dos secuencias (real o simulada).<br>- Números naturales y orden de los naturales.<br>- Distribución de la variable (conjunto de valores con su frecuencia).<br>- Moda (valor más frecuente). |

Son tres alumnos los que realizan este tipo de gráficos. Este error denota que el futuro profesor no discrimina los objetos valor de la variable y frecuencia y no comprende el significado de una distribución de frecuencias. En la tabla 4.5.11 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico.

El problema puede ser debido a una falta de manejo de la hoja Excel debido a que estos tres alumnos (uno de los cuales sólo realiza gráficos para el número de caras) utilizan dicho software para realizar sus gráficos. Al trabajar en Excel, se trabaja con una tabla en la que la primera columna es el valor de la variable y la segunda columna la frecuencia para los distintos valores de la variable (en la tabla 4.5.11 el alumno lo llama repeticiones). Si se comete un error al seleccionar los datos, por defecto se obtiene una representación como la mostrada en la tabla 4.5.11. Estos alumnos, en la clasificación propuesta por Ben-Zvi y Friedlander (1997) realizan un *Uso Acrítico* del software, ya que construyen el gráfico aceptando las opciones por defecto de la hoja Excel sin valorar si la representación es adecuada o no.

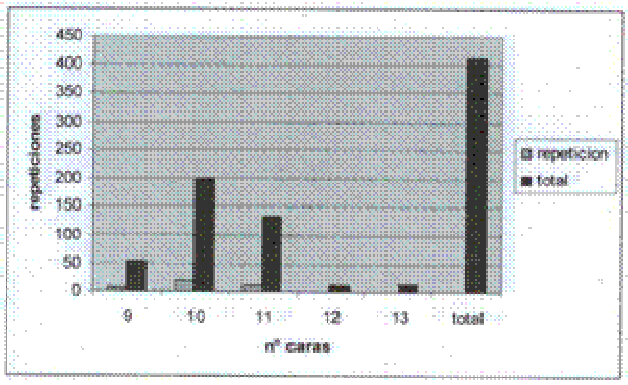
*3.4. Representan el valor de la variable multiplicado por su frecuencia.* Sólo dos alumnos realizan este tipo de gráficos, y los construyen para el estudio de los tres pares de variables propuestos en el proyecto.

Los estudiantes construyen una tabla de frecuencias para todas las variables, en las que muestran los valores de las variables y sus correspondientes frecuencias, pero en lugar de representar los gráficos con estos datos, los construyen una columna extra en la que representan el valor de la variable multiplicado por su frecuencia asociada. Observamos de nuevo la falta de comprensión de la distribución de frecuencias y de la diferencia entre frecuencia y valor de la variable. En la tabla 4.5.12 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico.

En este ejemplo particular el estudiante muestra un *uso acrítico* del software en la clasificación propuesta Ben-Zvi y Friedlander (1997), en este caso el alumno no es capaz de ser crítico con la representación que está realizando, representando incluso una columna etiquetada “total”, en la que representa el sumatorio de todos los valores de la variable multiplicados por su frecuencia.

Tabla 4.5.12, Ejemplo de gráfico en la categoría 3.4

<table>
<tr><th>Representa el producto de variable por frecuencia</th><th>Configuración epistémica</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>nº caras</th><th>repetición</th><th>total</th></tr>
<tr><td>9</td><td>6</td><td>54</td></tr>
<tr><td>10</td><td>20</td><td>200</td></tr>
<tr><td>11</td><td>12</td><td>132</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1</td><td>12</td></tr>
<tr><td>13</td><td>1</td><td>13</td></tr>
<tr><td>total</td><td></td><td>411</td></tr>
</table>

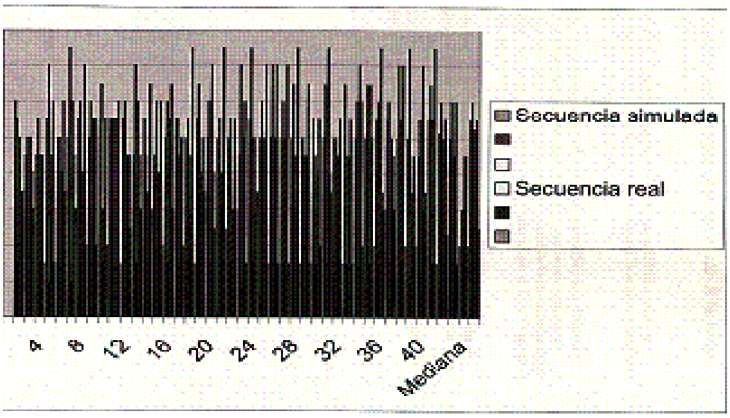



Procedimientos<br>
- Recuento de datos para obtener las distribución de frecuencias.<br>
- Introducción de estos en la hoja Excel.<br>
- Representación de los datos en un gráfico de barras.<br>
- Cálculo del producto de valor por frecuencia.<br>
- *Conflicto:* el estudiante no es capaz de criticar su representación creada con la hoja Excel y explorar otras opciones del software para representar mejor los datos.
</td><td>
Conceptos y proposiciones<br>
- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.<br>
- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y en la secuencia inventada.<br>
- Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y en la secuencia inventada.<br>
- Distribución de la variable.<br>
- Frecuencias asociadas a diferentes intervalos de valores de la variable.<br>
- *Conflicto*: No diferencia entre frecuencia y producto de frecuencia por variable<br>
Lenguaje<br>
- Gráfico: rectángulos, líneas, marcas<br>
- Verbal: título del gráfico, aunque incompleto, no pone etiquetas a los ejes.<br>
- Numérico: etiquetas en ambos ejes
</td></tr>
</table>

*3.5. Gráfico no apropiado al tipo de variable representada*, bien debido a que la naturaleza de la variable es inadecuada para el tipo de gráfico (por ejemplo, representar datos cualitativos en un histograma) o a que el número de valores del gráfico no permite una visualización correcta de la variable.

En la tabla 4.5.13 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico. El estudiante representa un gráfico de barras adosado para ambas secuencias de la variable estadística número de caras, sin haber agrupado previamente los datos. El gran número de barras en el gráfico dificulta la lectura y comprensión del gráfico e incluso impide la visualización de la variabilidad de los datos por lo cual consideramos que el gráfico es incorrecto. Puesto que el gráfico está hecho con la hoja Excel, no es claro que el estudiante haya usado explícitamente la idea de proporcionalidad.

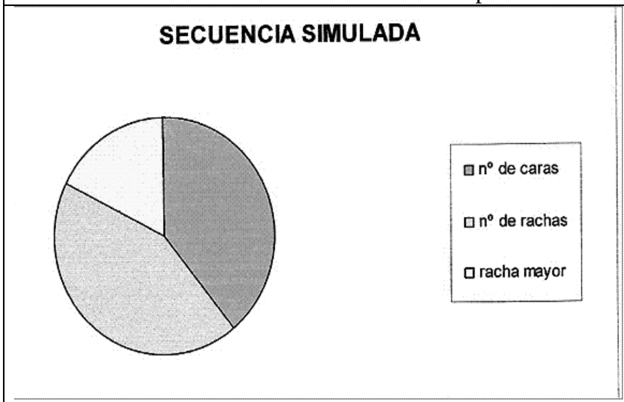
Tabla 4.5.13. Análisis semiótico de un gráfico en la categoría 3.5

| Gráfico de barras adosado de las dos secuencias | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Grafico: líneas, marcas, cuadrados (para representar las series).<br>- Verbal: rótulo de uno de los ejes, rótulos para las series.<br>- Numérico: en la escala del eje Y.<br>- No incluye el título del gráfico<br>- No hay rótulos en el eje Y.<br>- El rótulo del eje X no corresponde a lo representado (número de alumno)<br><br>Procedimientos<br>- Representa en el Eje X: Número de orden de los alumnos en la clase, según su colocación. El orden es artificial, no corresponde a una propiedad del conjunto de alumnos<br>- Representa en el eje Y: el valor de la variable.<br>- Ha tenido que introducir los datos en la Hoja Excel, procedimiento de grabación de datos<br>- Representa varias series en el Excel, dos de ellas para diferenciar los valores de la secuencia real y la simulada, representadas a la derecha del gráfico con cuadraditos de distintos colores. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar una moneda 20 veces.<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Valores de la variable para cada alumno.<br>- Hay un *conflicto semiótico* sobre la idea de mediana pues confunde mediana con número del estudiante.<br>- Proporcionalidad de la altura de la barra con valor de la variable. Aunque al ser un gráfico realizado con el Excel no se puede saber si el alumno utiliza este concepto explícitamente.<br>- Números naturales y orden de los números naturales. |

Las etiquetas de los ejes son claramente deficientes, pues el eje *Y* no presenta los números naturales ordenados y los que aparecen en el eje *X* no corresponden a lo representado (estudiantes de la clase). Hay un conflicto semiótico pues el estudiante confunde al menos a nivel verbal la *mediana* con unidad estadística (número del estudiante). En este ejemplo se muestra como el uso del ordenador ha dificultado la construcción del gráfico por parte del estudiante ya que el alumno quiere representar los valores individuales de las variables en un mismo gráfico, pero acepta las opciones que vienen por defecto en la hoja Excel. Así, según la categorización dada por Ben-Zvi y Friedlander (1997), este gráfico correspondería a un *Uso acrítico,* por parte del estudiante, del software para la realización del gráfico.

*3.6. Variables no relacionadas en el mismo gráfico*, cuando la comparación de las variables incluidas en el gráfico no tiene sentido en el contexto del problema. En la tabla 4.5.14 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico.

Tabla 4.5.14. Análisis semiótico de un gráfico en la categoría 3.6

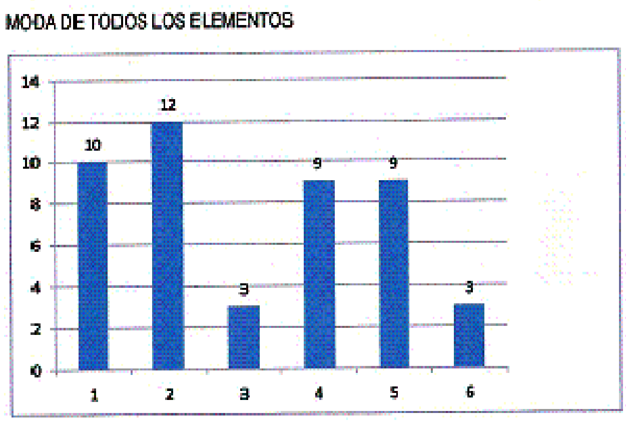
| Gráfico con variables no comparables | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Gráfico: círculo, segmentos, ángulos, sectores circulares.<br>- Verbal: título del gráfico y rótulos para nombrar las distintas variables representadas.<br>- Uso de diferentes colores para diferenciar los sectores del círculo.<br>- Título del gráfico incompleto.<br>- No queda claro el estadístico representado para cada variable; parece deducirse que es el valor numérico de la variable en el experimento particular<br>.<br>Procedimientos<br>- Recuento de los resultados del experimento.<br>- Introducción de los datos del experimento en Excel para realizar el gráfico.<br>- Selección del gráfico de sectores en Excel.<br>- Introducción de datos dentro de la función Excel que proporciona el gráfico de sectores, incluyendo el título y etiquetas.<br>- Diferenciación de las frecuencias de las distintas variables por medio de la utilización de distintos colores. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzar una moneda<br>- Sucesos o resultados del experimento, espacio muestral.<br>- Variables aleatorias:<br>  - A: Variable con dos valores: "Cara" y "Cruz" (Bernoulli).<br>  - B: Número de rachas en 20 lanzamientos (valores 0-20).<br>  - C. Longitud de la racha mayor en 20 lanzamientos (valores 0-20).<br>- Variable estadística: resultados de repetir 20 veces el experimento y contar el número de caras.<br>- No considera las variables estadísticas correspondientes a las variables aleatorias B y C puesto que sólo considera su experimento.<br>- Frecuencias absolutas de caras y cruces.<br>- Valores numéricos de las tres variables en estudio en su experimento particular.<br>- *Conflicto respecto a la idea de distribución, no asocia la distribución a una variable, pues representa los valores obtenidos en su experimento en variables diferentes en el mismo gráfico.*<br>- Círculo, sector circular, amplitud.<br>- Proporcionalidad. |

Como ya hemos dicho, en el proyecto los alumnos analizaron tres pares de variables (número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en las secuencias real y simulada). En este ejemplo el alumno construye un gráfico para representar en él el valor que obtuvo para las tres variables referentes a la secuencia simulada. El gráfico elaborado es incorrecto, porque en el gráfico de sectores lo que se debe representar son las frecuencias de diferentes valores de una misma variable, es decir, una distribución de datos y no valores diferentes de tres variables.

Por tanto, asumimos que el alumno tiene un conflicto con la idea de distribución, que no asocia a una única variable.

Además, estas variables no son comparables entre sí, y de este gráfico el alumno no puede sacar ninguna información que le permita resolver el problema planteado. El alumno utiliza la hoja Excel para realizar su gráfico, por lo que podría desconocer los convenios de construcción del gráfico de sectores. Por ejemplo no está claro que sepa que la amplitud de cada uno de los sectores debe ser proporcional a la frecuencia. Sin embargo, al menos implícitamente está usando las ideas de círculo y sector circular.

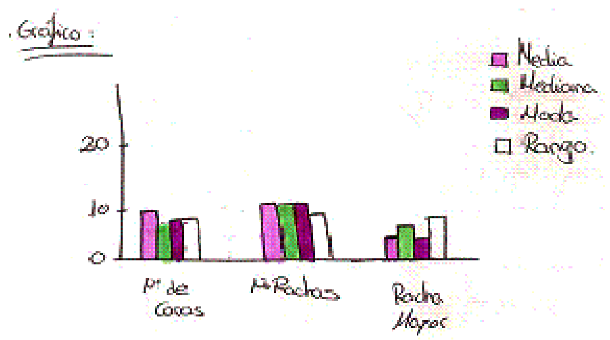
Tabla 4.5.15 Análisis semiótico de un gráfico en la categoría 3.6

| Gráfico de barras con las modas de tres pares de variables | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br>Lenguaje<br>- Gráfico: rectángulos, líneas, marcas.<br>- Verbal: título del gráfico, aunque confuso, ya que se representa. la moda de los tres pares de variables estudiadas en el proyecto.<br>- Numérico: etiquetas en ambos ejes que son los números. naturales ordenados.; valores de las modas encima de cada barra.<br>- Las etiquetas del eje X son confusas pues no indica que cada número natural se corresponde con cada una de las variables estadísticas.<br>Procedimientos<br>- Representación de los ejes: En el eje Y se representa el valor de la moda de cada una de las variables, en el eje X cada número representa una de las 6 variables del proyecto.<br>- Representación de la moda de los tres pares de variable mediante barras y mediante un valor numérico asociado a cada barra. | Conceptos y proposiciones<br>- Experimento aleatorio: lanzamiento de una moneda equilibrada 20 veces.<br>- Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño *m* de los resultados del número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y en la secuencia inventada por cada uno de los *m* estudiantes.<br>- Moda.<br>- Números naturales y orden de los números naturales.<br>- Al haber realizado el gráfico con Excel, no está claro que el estudiante haya usado explícitamente los conceptos de paralelismo, perpendicularidad y proporcionalidad. |

En la tabla 4.5.15 se muestra otro ejemplo dentro de esta categoría de error, pero de mayor complejidad semiótica que el mostrado en la figura 4.5.14. Dicho gráfico es incorrecto, ya que en él el alumno representó la moda de los tres pares de variables puestas en juego en el proyecto que elaboraron (número de caras, número de rachas y longitud de la racha más larga en ambas secuencias, real y simulada) y estas no son todas comparables entre sí. Pero, a pesar de ser incorrecto, el alumno en dicho ejemplo ha tenido que pasar también de los datos brutos a las variables estadísticas del estudio y su distribución, y a calcular resúmenes estadísticos, en este caso la moda. Otro error que se puede observar es que no pone rótulos a ninguno de los ejes. Debido al título del gráfico, se puede deducir que el eje *Y* representa la moda de determinadas variables estadísticas; sin embargo en el eje *X*, se ha de suponer que cada uno de los números representa una de las variables estadísticas anteriormente citadas. Además el orden en este eje es artificial.

*3.7. Representación de distintos promedios y estadísticos de dispersión en un mismo gráfico*, no diferenciando el propósito de unos y otros estadísticos, que no son comparables.

Tabla 4.5.16 Análisis semiótico de un gráfico en la categoría 3.7

| Media, mediana, moda y rango en las tres variables | Configuración epistémica |
|---|---|
| <br>Lenguaje:<br>- Gráfico: rectángulos, líneas, marcas.<br>- Distintos colores para diferenciar los distintos estadísticos.<br>- Verbal: etiquetas en el eje X que se refieren a las distintas variables en estudio, etiquetas para representar a los distintos estadísticos. No hay título para el gráfico.<br>- Numérico: etiquetas eje Y, insuficientes divisiones en dicho eje.<br><br>Procedimientos<br>- Representación de los ejes: En el eje X representa las distintas variables del proyecto, en el eje Y los números naturales hasta el 20 representados de 10 en 10.<br>- utilización de distintos colores para las distintas barras, para diferenciar los distintos estadísticos representados. | Conceptos y proposiciones:<br>- Experimento aleatorio: lanzamiento de una moneda equilibrada 20 veces.<br>- Variables aleatorias: número de caras, número de rachas y longitud de la racha mayor al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada.<br>- Variables estadísticas: muestra de tamaño *m* de los resultados del número de caras, número de rachas y longitud de la racha mayor al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y en la secuencia inventada.<br>- Promedios: moda, mediana y media.<br>- Rango.<br>- *Conflicto:* representación en un mismo gráfico de variables y estadísticos no comparables.<br>- *Conflicto:* insuficientes divisiones en la escala del eje Y que impiden la lectura de los valores de los distintos estadísticos. |

En la tabla 4.5.16 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico. Observamos en el ejemplo, no sólo que el alumno compara variables no comparables, sino que para cada una de ellas incluye las medidas de posición central y el rango, obteniendo un gráfico sin sentido. Por otro lado, las escalas tienen errores, pues claramente el número de rachas y la racha más larga no pueden tomar valores cercanos a 10.

*3.8. Varios errores*, cuando en un gráfico incorrecto se acumulan varios de los errores anteriormente citados. Esta categoría abarca diversos tipos de gráficos y distintos tipos de errores, ya que aquí hemos reunido a todos los alumnos que realizan gráficos con varios de los errores anteriormente citados.

Del total de los estudiantes que realizan gráficos en el análisis de la variable número de caras, un 15,47% (28 alumnos) cometen diversos errores; para el caso de la variable número de rachas, del total de los estudiantes que realizan gráficos, un 14,38% (21 alumnos) estarían dentro de esta categoría y por último, para el caso en que los estudiantes realizan gráficos para el estudio de la variable longitud de la racha mayor, el porcentaje de esta categoría es del 13,95% (18 alumnos). Ninguno de los gráficos considerados pertenecientes a este apartado proporciona información que sea de ayuda para la resolución del proyecto.

Tabla 4.5.17. Frecuencias (y porcentaje) de estudiantes, según corrección de los gráficos

| | Número de caras | Número de rachas | Racha más larga |
|---|---|---|---|
| 1.1. Correctos | 78 (43,1) | 57 (39,04) | 53 (41,08) |
| 1.2. Correctos, no estándar | 3(1,66) | 3(2,05) | 3(2,33) |
| 1.3. Correctos, líneas innecesarias | 4(2,21) | 4(2,74) | 3(2,33) |
| 2.1. Escalas no proporcionales | 0(0) | 2(1,37) | 3(2,33) |
| 2.2. Representación errónea de números en la recta | 4(2,21) | 10(6,85) | 5(3,87) |
| 2.3. Rótulos o valores de escala confusos | 6(3,31) | 4(2,74) | 4(3,1) |
| 2.4. Barras no centradas | 8(4,42) | 6(4,11) | 7(5,43) |
| 2.5. Representación errónea de intervalos | 4(2,21) | 3(2,05) | 3(2,33) |
| 2.6. Escala inapropiada | 13(7,18) | 8(5,48) | 8(6,2) |
| 3.1. Elemento no proporcional a la frecuencia | 3(1,66) | 4(2,74) | 1(0,78) |
| 3.2. Intercambia valores y frecuencias | 2(1,1) | 1(0,69) | 1(0,78) |
| 3.3. Representa valores y frecuencias | 3(1,66) | 2(1,37) | 2(1,55) |
| 3.4. Representa producto de valor por frecuencia | 2(1,1) | 2(1,37) | 2(1,55) |
| 3.5. Gráfico no adecuado | 7(3,87) | 3(2,05) | 1(0,78) |
| 3.6. Variables no relacionadas en el mismo gráfico | 14(7,73) | 14(9,59) | 13(10,07) |
| 3.7. Estadísticos no comparables en el mismo gráfico | 2(1,1) | 2(1,37) | 2(1,55) |
| 3.8. Varios errores | 28(15,47) | 21(14,38) | 18(13,95) |

En la tabla 4.5.17 presentamos los resultados de la clasificación de errores en los gráficos construidos por los futuros profesores para las tres variables consideradas en el proyecto. Aunque la mayoría de gráficos son correctos, la proporción sólo alcanza alrededor del 40%, un poco mayor, sin llegar al 50% si se omiten errores de poca importancia, como añadir líneas innecesarias o no incluir rótulos.

Hay alrededor de un 20% de errores en escala (escala no proporcional, representación errónea de números en la recta, etc.), ya encontrados en las investigaciones de Bruno y Espinel (2005), lo que indica que los errores no son un problema local, sino están extendidos entre los futuros profesores de educación primaria. Otros errores son más graves, como el intercambio de frecuencias y valores, que indica que no se comprende el concepto de distribución, o la inclusión de variables no relacionadas en los gráficos, que muestra un desconocimiento del propósito de los gráficos. Es preocupante la proporción de futuros profesores que tienen errores en gráficos tendrán que enseñar a sus estudiantes.

Tabla 4.5.18. Frecuencias (y porcentaje) de estudiantes, según corrección de los gráficos

| | Número de caras | Número de rachas | Racha más larga |
|---|---|---|---|
| Básicamente correctos | 85(46,96) | 64(43,84) | 59(45.74) |
| Parcialmente correctos | 35(19,34) | 33(22,6) | 30(23.26) |
| Incorrectos | 61(33,7) | 49(33,56) | 40(31) |

Un resumen se presenta en la tabla 4.5.18. Algo menos de la mitad de los estudiantes construyen gráficos correctos en la comparación de las distintas variables puestas en juego en el proyecto: 43,1% (78 estudiantes) los construyen correctamente, pare el número de caras, 39,04% (57 estudiantes) para el número de rachas y 41,08% (53 estudiantes) para la racha mayor. El porcentaje de gráficos incorrectos es alrededor del 30 % y parcialmente incorrectos alrededor del 20% por lo que más de la mitad de los futuros profesores realizan gráficos incorrectos o parcialmente correctos.

Las diferencias entre las variables no fueron estadísticamente significativas en el test Chi- cuadrado (Chi=1,03, 6 grados de libertad, p=0.9). Ello implica que los errores producidos en los gráficos no dependen de la variable representada en el proyecto; sino serán debidos a falta de la competencia matemática necesaria en la construcción de gráficos por parte de los futuros profesores.

El análisis semiótico de un ejemplo, en cada categoría de error ha permitido observar la existencia de conflictos semióticos, donde el estudiante y el profesor no asignan el mismo significado a una correspondencia entre objetos matemáticos. Podemos realizar una clasificación de estos conflictos en la forma siguiente:

1. *Relacionados con las convenciones de construcción de los gráficos.* Se trata de estudiantes que hacen una interpretación incorrecta de los procedimientos de construcción de gráficos, o de los convenios para aplicarlos. En esta categoría hemos encontrado los siguientes conflictos:

- *Unión de puntos del gráfico de líneas con líneas curvas,* en lugar de recta por desconocimientos de los convenios de construcción del gráfico y confusión de las situaciones de representación de datos estadísticos con situaciones de ajuste de funciones en álgebra. No hemos encontrado este error descrito en la literatura previa.
- *No centrar las barras del histograma en la marca de clase.* Este error ya fue descrito por Bruno y Espinel (2005) en futuros profesores y se debe a una confusión entre variable continua y discreta, así como falta de comprensión del concepto de intervalo.
- *Omitir valores de frecuencia nula en los gráficos de barras, polígonos de frecuencia e histogramas*. Este error ya fue descrito por Bruno y Espinel (2005) en futuros profesores y se debe a un insuficiente sentido numérico, que lleva a una representación incorrecta de números enteros en la recta numérica, así como la falta de comprensión de la idea de distribución.
- *Elección de escalas demasiado amplias* o que no cubren el recorrido de la variable, descrito por Wu (2004) y que se debe a la falta de comprensión del papel de las escalas en el gráfico.
- *Subdivisión incorrecta de la escala*, que no permite la lectura del gráfico, encontrado también por Li y Shen (1992), que se debe a falta de comprensión del papel de las escalas en el gráfico.

2. *Conflictos relacionados con la elección de un gráfico adecuado.* Aunque, generalmente un gráfico estadístico puede usarse para diversos fines, también existen unos convenios por los que algunos gráficos son inadecuados en ciertas situaciones. En general, la adecuación del gráfico dependerá del tipo de variable representada y el número de valores que toma. En el caso de representar múltiples variables en un gráfico, la adecuación dependerá de la naturaleza de las variables representada. Algunos conflictos que aparecen en esta categoría son:

- *Elección de un histograma para representar variables discretas con pocos valores*. Subyace una confusión entre variable discreta y continua, entre el significado de histograma y diagrama de barras. Asimismo, hay confusión sobre los convenios de agrupación de variables estadísticas, que no tiene sentido si la variable tiene un número limitado de valores.
- *Representar variables no comparables en el mismo gráfico.* En este caso no se comprende la diferencia entre las distintas variables ni el propósito de comparar dos distribuciones así como la utilidad de representar dos variables en el mismo gráfico.
- *Representar estadísticos no comparables en el mismo gráfico*. Subyace en este caso una confusión entre los diferentes tipos de estadísticos, por ejemplo, entre tendencia central y dispersión, así como su propósito y el objetivo de comparar varios estadísticos entre sí.

3. *Relacionados con la representación de números en la recta real.* Estos conflictos están relacionados con el sentido numérico y reproducen los ya descritos en el capítulo 1 a propósito de este tema. Algunos ejemplos son los siguientes:

- *Escalas no proporcionales*, representando diferencias numéricas iguales mediante distancias diferentes. Hay falta de comprensión de la idea de proporcionalidad y no se pone en correspondencia una proporcionalidad numérica con la proporcionalidad geométrica.
- *Omitir valores numéricos,* al representar los números naturales en la recta real. No se sabe traducir la secuencia numérica que el estudiante conoce a su representación sobre la recta real.
- *Representar como disjuntos intervalos que no lo son*. Subyace una confusión sobre el significado de un intervalo y la falta de discriminación de conjuntos disjuntos y no disjuntos.

4. *Relacionados con la comprensión de conceptos.* Cuando los estudiantes confunden conceptos entre sí o los asocian propiedades inexistentes.

- *Confusión del significado de un intervalo numérico.* El estudiante no sabe atribuir un valor al intervalo que lo contiene, no diferencia entre intervalos abiertos o cerrados o no diferencia entre intervalos y categoría (que es un valor unitario).
- *Confusión entre valor de la variable y frecuencia.* No se comprende el concepto de frecuencia, por lo que a veces se representa la frecuencia junto con la variable o se realizan operaciones con la frecuencia.
- *Confusión de la variable dependiente e independiente en la distribución de frecuencias.* Este conflicto ya fue detectado por Ruiz (2006) en un estudio de comprensión de la variable aleatoria, pero no había sido descrito para el caso de la variable estadística.
- *Asocia la idea de distribución a un conjunto de variables* y no a una sola variable. Algunos estudiantes mezclan valores o estadísticos de varias variables en un solo gráfico, no comprendiendo que cada distribución está asociada a una sola variable.
- *Asocia la idea de rango a un conjunto de distribuciones* y no a una sola distribución. Es una variante del anterior, pues se calcula un único rango para dos o más variables, tomando el mínimo y máximo valor de todas ellas.

5. *Relacionados con el uso de la tecnología*. La tecnología en ocasiones aumenta los conflictos pues los estudiantes tienen poco dominio de ella, como veremos en el siguiente punto. Ello es debido a que también la tecnología tiene sus convenios de interpretación (por ejemplo de los iconos o funciones) que el alumno desconoce o confunde. Hemos llamado uso acrítico del software, cuando el estudiante sin variar opciones por defecto usa unas que pueden ser inadecuadas (Ben-Zvi 2002). Por ello a veces llegan a representar valores y frecuencias de la variable en un mismo gráfico, variables no relacionadas o bien intervalos no disjuntos como disjuntos.

### 4.5.2. USO DE ORDENADORES E INFLUENCIA EN LOS ERRORES

El gran impulso de las nuevas tecnologías ha originado cambios profundos en la sociedad actual, y la educación no puede hacer caso omiso a este desarrollo, pues también se ha visto influenciada por el mismo. Autores como Bakker, Biehler y Konold (2004) estudian cómo el software estadístico puede proporcionar herramientas útiles al trabajar con representaciones de datos en la escuela. Por otro lado, son cada vez más numerosos los centros de educación primaria en que se dota a alumnos y profesores de ordenador personal, o que tienen instalaciones de ordenadores, pues hay un gran interés de la administración educativa por la incorporación de la tecnología a la enseñanza y aprendizaje. El campo de la estadística se presta muy bien al trabajo con tecnología, e incluso el uso de la hoja Excel, para la realización de tablas y gráficos en el último ciclo de educación primaria, es recomendado en los decretos curriculares.

En nuestro estudio, los futuros profesores tuvieron que realizar un proyecto de análisis de datos, metodología recomendada en la enseñanza y aprendizaje de la estadística (Batanero, 2001). Este tipo de metodología es especialmente adecuada para que los alumnos desarrollen sus informes finales utilizando paquetes informáticos, ya sea para la descripción de los análisis realizados así como para el análisis de los datos estadísticos.

En este sentido, los alumnos de nuestro estudio pudieron elegir entre realizar el trabajo a mano o usando los ordenadores. Al interesarnos en este trabajo por las representaciones gráficas, tendremos en cuenta en este apartado sólo los alumnos que utilizaron alguna aplicación informática a la hora de realizar sus gráficos. Una observación es que los alumnos que utilizasen procesadores de texto a la hora de redactar su informe final, pero que no realizasen gráficos o estos fuesen hechos a mano, serán considerados como alumnos que no utilizaron los recursos informáticos.

El problema que ofrecen las nuevas tecnologías a la hora de realizar análisis estadísticos es que, aparte del conocimiento de los contenidos de estadística necesarios para realizar una determinada tarea, es necesario conocer y aprender a manejar las opciones del software utilizado. Esto ofrece una dificultad añadida a la tarea propuesta a los estudiantes. Por otro lado, muchos alumnos se limitan a aceptar la salida que proporciona el software sin usar las posibilidades de cambiar escala, tipo de gráfico, etc., es decir, hacen un uso acrítico del software (Ben-Zvi 2002). Esto ha ocurrido en nuestro estudio, donde, aunque son minoría los estudiantes que usaron ordenador (generalmente la hoja Excel), en general, estos estudiantes tuvieron mayor número de errores que los que realizaron gráficos de papel y lápiz. En la tabla 4.5.19 presentamos la frecuencia de gráficos correctos e incorrectos en cada variable, según se usa o no el ordenador.

El único software usado por los estudiantes para realizar sus representaciones gráficas es la hoja Excel. En total son 50 los estudiantes que realizan sus gráficos con ayuda del ordenador, es decir sólo una cuarta parte de la muestra y menos de la tercera parte de los que realizan gráficos. Deducimos que el manejo de la hoja Excel es todavía poco familiar a estos futuros profesores, a pesar de haber realizado, en la asignatura de Matemáticas y su Didáctica en primer año algunas prácticas de uso de la hoja Excel, precisamente en el tema de estadística. Todos ellos realizan el gráfico para el estudio del número de caras, y en caso de realizar algún tipo de gráfico para las otras dos variables, lo hacen utilizando también el ordenador.

Tabla 4.5.19. Frecuencias (porcentaje) de estudiantes, según corrección de los gráficos y el uso o no de ordenador

| | Número de caras | | Número de rachas | | Racha más larga | | Total | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ordenador | No | Ordenador | No | Ordenador | No | Ordenador | No |
| Correctos | 18(36) | 67(51,15) | 16(40) | 48(45,28) | 17(42,5) | 42(47,19) | 51 (39.23) | 157 (48.15) |
| P. correctos | 7(14) | 28(21,37) | 4(10) | 29(27,36) | 6(15) | 24(26,97) | 17 (13,1) | 81 (24,74) |
| Incorrectos | 25(50) | 36(27,48) | 20(50) | 29(27,36) | 17(42,5) | 23(25,84) | 62 (47,69) | 88 (26,99) |
| Total | 50 | 131 | 40 | 106 | 40 | 89 | 130 | 326 |

Respecto al n*úmero de caras en las secuencias real y simulada,* de los 207 proyectos disponibles en nuestra investigación, en 181 de ellos los alumnos realizaron algún tipo de representación gráfica. Del total de los 50 alumnos (27,52%) que utilizan el ordenador para realizar los gráficos. En relación con el n*úmero de rachas en las secuencias real y simulada*, 146 estudiantes realizan algún tipo de representación gráfica y de ellos 40 utilizan el ordenador (27,38%). Finalmente para la l*ongitud de la racha mayor en las secuencias real y simulada*, 129 estudiantes construyen algún gráfico y de ellos 40 utilizan el ordenador (31%). En consecuencia no hay una variación muy grande en el porcentaje de estudiantes que usa el ordenador para las tres variables.

Del total de los 50 estudiantes que realizan al menos un gráfico con la hoja Excel, 20 construyen correctamente al menos un gráfico. Si el estudiante realiza un gráfico correcto con el ordenador para el número de caras, de construir también gráficos para alguna de las otras variables, y, como el proceso a seguir es el mismo, suelen ser correctos también. Sólo dos estudiantes cometen algún tipo de error cuando inicialmente ya habían construido correctamente un gráfico con la hoja Excel para el estudio del número de caras.

Del total de los alumnos que en nuestro estudio se sirven de recursos informáticos para la construcción de los gráficos, un 40% utiliza correctamente las opciones del software para construir al menos uno de sus gráficos; el resto comete algún tipo de error. Nueve de estos estudiantes realizan gráficos para los tres pares de variables y cometen en todos el error denominado v*ariables no relacionadas en el mismo gráfico.*

Al realizar el contraste Chi cuadrado, la diferencia entre los estudiantes que realizan gráficos con o sin ordenador fue estadísticamente significativa (Chi=19,72; p= 0,0001 con 2 grados de libertad). Mientras que el 48,15 % de gráficos realizado a mano fueron correctos este porcentaje cae al 39,23% en el caso de usar ordenador, subiendo el porcentaje de gráficos incorrectos del 26,99% al 47,69%. Este resultado es un motivo de preocupación, puesto que las autoridades educativas tratan de favorecer el uso de ordenadores en la enseñanza, dotándose a centros e incluso a estudiantes de ordenadores personales. Más aún en los Decretos de Enseñanzas Mínimas, se sugiere que los alumnos de tercer ciclo utilicen la hoja Excel para la realización de gráficos y cálculos estadísticos. Será por tanto necesario una formación específica de los futuros profesores en esta materia.

### 4.5.3. ERRORES Y COMPLEJIDAD SEMIÓTICA.

El último punto a analizar en relación con los errores, es el estudio de la posible relación entre la corrección de los gráficos realizados por los alumnos y los niveles de complejidad semiótica previamente definidos, cuyos resultados se han publicado en Arteaga y Batanero (2010). Para abordar este tema, estudiamos, para cada uno de los pares de variables que analizaron los estudiantes la relación existente entre dichos niveles de complejidad y los tres grandes niveles de corrección en los que hemos clasificado los gráficos de los alumnos.

**Número de caras en las secuencias real y simulada**

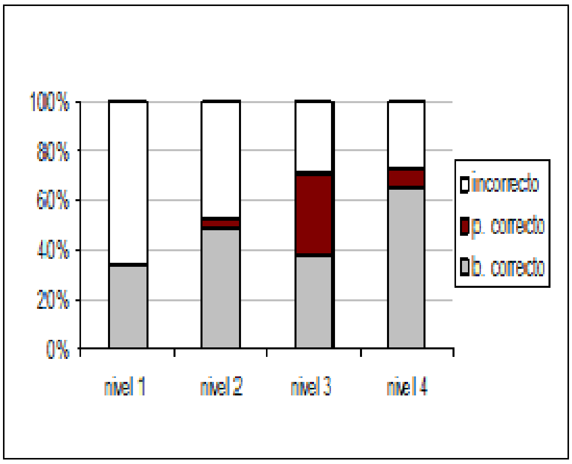
En la tabla 4.5.20 se muestra la distribución de los 181 estudiantes que realizaron gráficos para estas variables, según la corrección de los gráficos realizados y los niveles de complejidad semiótica; además en la figura 4.5.1 representamos esta distribución.

Se puede observar que 135 (74,58%) de los 181 alumnos que realizan algún tipo de representación gráfica lo hacen dentro del nivel 3 o 4de complejidad semiótica, adecuado para la tarea que se les presentaba. Con respecto a la corrección de los distintos gráficos, el mayor porcentaje de gráficos básicamente correctos se da en el nivel 4, siendo este porcentaje del 65,91%, seguido por el nivel de complejidad semiótica 2 (50%.), aunque en este nivel el porcentaje de gráficos incorrectos es muy parecido (47,50). En el nivel de complejidad 3, el porcentaje de gráficos correctos es del 37,36% y se obtiene el mayor porcentaje de gráficos parcialmente correctos que es del 34,07%. Son pocos los alumnos que realizan gráficos de nivel 1, pero dos terceras partes de ellos construyen gráficos incorrectos.

Tabla 4.5.20. Distribución de los estudiantes según la corrección del gráfico y complejidad semiótica (número de caras)

| Nivel de complejidad semiótica | Corrección del gráfico | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|
| | Correcto | P. Correcto | Incorrecto | |
| N1. Representa sólo sus datos | 2 (33,34) | 0 (0) | 4 (66,66) | 6 |
| N2. Representa resultados individuales | 20 (50) | 1 (2,5) | 19 (34,07) | 40 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 34(37,36) | 31 (34,07) | 26 (28,57) | 91 |
| N4. Gráficos conjuntos | 29 (65,91) | 3 (6,82) | 12 (27,27) | 44 |
| Total | 85 | 35 | 61 | 181 |

Figura 4.5.1. Distribución de estudiantes según corrección de los gráficos y complejidad semiótica (número de caras)




Si tenemos en cuenta el porcentaje de gráficos básicamente correctos y parcialmente correctos dentro de cada nivel, el mayor porcentaje se sigue dando en el nivel 4 (72,73% de los gráficos al menos parcialmente correctos), seguido del nivel de complejidad 3 (71,43%). En consecuencia la proporción de gráficos básicamente correctos o parcialmente correctos, en los que el estudiante, puede extraer algún tipo de información del gráfico realizado y que le sea de utilidad en la realización de la tarea propuesta crece con el nivel de complejidad semiótica.

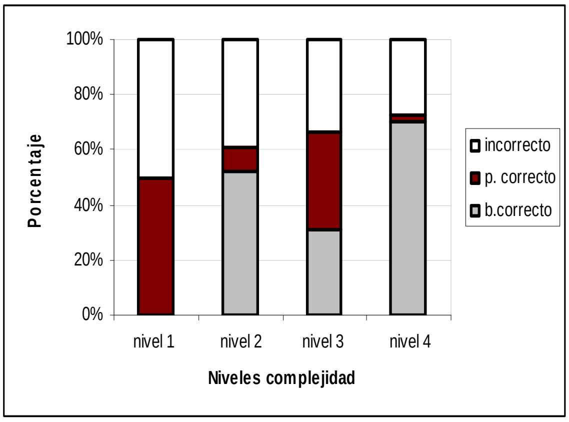
**Número de rachas en las secuencias real y simulada**

**E**n la tabla 4.5.21 y en la figura 4.5.2.se muestra la distribución de los estudiantes según la corrección de los gráficos realizados para el estudio del número de rachas y los niveles de complejidad semiótica. Se puede ver que 117 de los 146 alumnos que construyen algún gráfico para estas variables lo hacen dentro del nivel 3 o 4 de complejidad semiótica. El mayor porcentaje de gráficos básicamente correctos se vuelve a dar dentro del nivel de complejidad superior (70%) y el siguiente en el nivel 2 (52,17%), observándose también dentro de este nivel un alto porcentaje de gráficos incorrectos (39,13%). En el nivel 3 el 31,17% de los gráficos son correctos, pero hay un alto porcentaje de gráficos parcialmente correctos (35,06%). Para el nivel de complejidad 1 (sólo 6 alumnos) el 50% de los gráficos son parcialmente correctos.

Tabla 4.5.21. Distribución de los estudiantes según la corrección del gráfico y complejidad semiótica (número de rachas)

| Nivel de complejidad semiótica | Corrección del gráfico | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|
| | Correcto | P. Correcto | Incorrecto | |
| N1. Representa sólo sus datos | 0 (0) | 3 (50) | 3 (50) | 6 |
| N2. Representa resultados individuales | 12 (52,17) | 2 (8,7) | 9(35,06) | 23 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 24 (31,17) | 27 (35,06) | 26 (33,77) | 77 |
| N4. Gráficos conjuntos | 28 (70) | 1 (2,5) | 11 (27,5) | 40 |
| Total | 64 | 33 | 49 | 146 |

Figura 4.5.2. Distribución de los estudiantes según corrección de los gráficos y complejidad semiótica (número de rachas)




Si tenemos en cuenta el porcentaje de gráficos básicamente correctos y parcialmente correctos, el mayor porcentaje se sigue dando en el nivel 4 (72,50% de los gráficos al menos parcialmente correctos), seguido del nivel de complejidad 3 en el que un 66,23% de los gráficos son o correctos o parcialmente correctos y se observa en las gráficas un crecimiento, según niveles.

**Longitud de la racha mayor en las secuencias real y simulada**

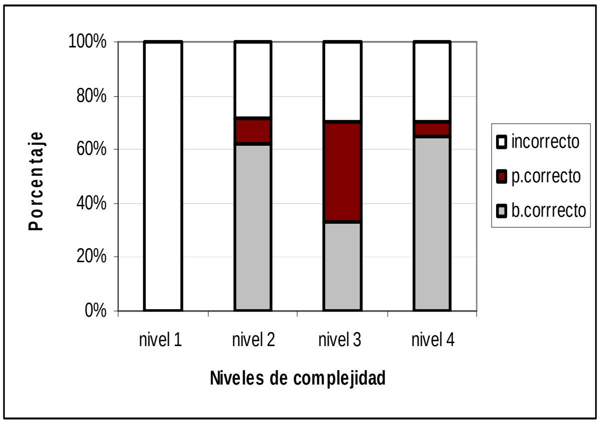
En la tabla 4.5.22 se muestra la distribución de los estudiantes según la corrección de los gráficos realizados para el estudio de la longitud de la racha mayor en las secuencias real y simulada y los niveles de complejidad semiótica. Además en la figura 4.5.3 representamos esta distribución.

Tabla 4.5.22. Distribución de los estudiantes según la corrección del gráfico y complejidad semiótica (racha mayor)

| Nivel de complejidad semiótica | Corrección del gráfico | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|
| | Correcto | P. Correcto | Incorrecto | |
| N1. Representa sólo sus datos | 0 (0) | 0 (0) | 3(100) | 3 |
| N2. Representa resultados individuales | 13 (61,9) | 2 (9,53) | 6 (37,31) | 21 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 22 (32,84) | 25 (37,31) | 20 (29,85) | 67 |
| N4. Gráficos conjuntos | 24 (64,86) | 2 (29,85) | 11 (29,73) | 37 |
| Total | 59 | 29 | 40 | 128 |

Como ya observamos anteriormente 67 de los 128 alumnos que realizan algún gráfico en esta variable lo hacen dentro del nivel 3 de complejidad semiótica y añadiendo los que lo construyen a nivel 4 obtenemos 104 (81,25%). Por tanto, una vez se representa un gráfico para comparar esta variable, una gran mayoría lo hace a un nivel adecuado.

Figura 4.5.3. Distribución de los estudiantes según la corrección del gráfico y complejidad semiótica (racha mayor)




Al igual que en las variables anteriores, el nivel 3 es el nivel con mayor frecuencia de gráficos y presenta el 32,84% de los gráficos correctos, con alto porcentaje de gráficos parcialmente correctos (37,31%). Para el caso del nivel de complejidad 1, sólo 3 alumnos realizan gráficos dentro de este nivel y que el 100% de estos son incorrectos.

**Síntesis**

Para analizar la tendencia global, presentamos en la tabla 4.5.23 del total de gráficos en las tres variables, el nivel de complejidad semiótica y corrección del gráfico. Se aplicó el contraste Chi- cuadrado, para estudiar la posible relación entre las dos variables, obteniéndose un valor muy significativo (Chi= 77,48, g.l.=6; p=0,0000). Por tanto se rechaza la hipótesis de independencia entre las variables y, consecuentemente, se deduce una relación entre las mismas, que es visible en las tendencias observadas en las gráficas analizadas anteriormente.

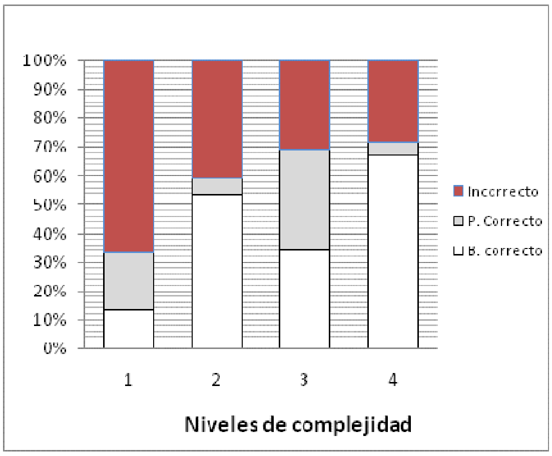
Se observa que el mayor porcentaje de gráficos básicamente correctos se vuelve a dar dentro del nivel de complejidad superior (64,86%), aunque destacar que a diferencia de las variables discutidas anteriormente, este porcentaje es bastante similar al porcentaje de gráficos correctos dentro del nivel de complejidad 2 (61,90%). También en estos dos niveles el porcentaje de gráficos incorrectos es bastante similar, 29,73% para el nivel 4 y un 28,57% para el nivel 2. La mayor proporción de gráficos parcialmente correcto se da en el nivel de complejidad semiótica 3 y la suma de correctos y parcialmente correctos sube con el nivel del gráfico.

Tabla 4.5.23. Distribución de los estudiantes según la corrección del gráfico y complejidad semiótica (variables combinadas)

| Nivel de complejidad semiótica | Corrección del gráfico | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|
| | Correcto | P. Correcto | Incorrecto | |
| N1. Representa sólo sus datos | 2 | 3 | 10 | 15 |
| N2. Representa resultados individuales | 45 | 5 | 34 | 84 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 80 | 83 | 72 | 235 |
| N4. Gráficos conjuntos | 81 | 6 | 34 | 121 |
| Total | 208 | 97 | 150 | 455 |

En resumen podemos decir que nuestros datos apoyan la hipótesis de que el mayor nivel de complejidad semiótica en la construcción de gráficos implica también la producción de un menor número de errores, y los relacionados con características importantes de los gráficos o elección del mismo parecen concentrarse en el nivel de complejidad 1. El mismo patrón se observa en las diferentes variables, por lo cual este resultado no depende de la variable analizada, sino de la competencia adquirida por el estudiante.

Figura 4.5.4. Distribución de los estudiantes según la corrección del gráfico y complejidad semiótica (variables combinadas)




Deducimos que el nivel de complejidad semiótica, que requiere mayor conocimientos del estudiante implica también mejor comprensión del propósito de los gráficos e impide errores importantes, tales como la elección de un gráfico inadecuado, confusión de frecuencias y valores y otros errores relacionados con la comprensión de la idea de distribución.

## 4.6. LECTURA DE LOS GRÁFICOS.

Una vez que los alumnos han construido los gráficos que ellos creen convenientes en la resolución del proyecto, han de leerlos para poder obtener información que les sea de utilidad en la obtención de sus conclusiones finales. En este sentido Friel, Curcio y Bright (2001) resaltan la importancia de que los alumnos desarrollen habilidades para entender y comprender los gráficos estadísticos, ya sean creados por ellos mismos o por otras personas. Pero la lectura e interpretación de gráficos no es tarea fácil. Monteiro y Ainley (2004) llaman la atención de que "la interpretación de gráficos no es un procedimiento técnico, pero si una actividad en la que se movilizan un amplio rango de conocimientos, experiencias y sentimientos" (p. 8).

A continuación analizamos el nivel de lectura alcanzado, para, seguidamente relacionarlos con los niveles de complejidad semiótica del gráfico.

### 4.6.1. NIVELES DE LECTURA DE LOS GRÁFICOS

**Lecturas incorrectas**

Elaborados los gráficos, algunos futuros profesores leen incorrectamente la información representada, debido a que no alcanzan un nivel de lectura suficiente. Por ejemplo, confunden elementos del gráfico, muestran errores conceptuales que les llevan a un error de lectura o cometen este tipo de error debido a que construyeron un gráfico incorrecto. Por ejemplo, un alumno hace la siguiente observación, provocada por un error conceptual, que le llevó a elaborar un gráfico incorrecto:

> *"En la secuencia real las frecuencias son más consecutivas, ya que no se repite la misma cara tantas veces y se repiten menos veces y distintos números. Por ello las barras están más juntas"* (Alumno CB).

La confusión entre valores de la variable y frecuencia, hace que el estudiante compare las frecuencias entre sí (que ha representado en el eje X), en lugar de comparar la frecuencia con que aparecen los diferentes valores. Puesto que en las secuencias reales hay más valores diferentes de la variable que en la simulada, las frecuencias de cada valor son menores y también hay más frecuencias diferentes.

Al representar los valores que aparecen en secuencia real (como el 13) pero no en la simulada y también al haber obtenido una frecuencia de 20 alumnos con 10 caras, hay más valores diferentes de las frecuencias en este gráfico que en la secuencia real. Es lo que quiere expresar al decir que en un gráfico "las frecuencias son más consecutivas". La interpretación tiene varios errores, además de los señalados, pues confunde "consecutivo" con "distante" o "separado". Por otro lado, para que las variables fueran diferentes debieran ser diferentes sus valores, o al menos las frecuencias para el mismo valor, no las frecuencias aisladas. Otro ejemplo de lectura errónea es el siguiente, también debido a errores conceptuales. Las medias en ambas distribuciones (y en el gráfico concreto que produce el estudiante) son cercanas al valor 10 y no cercanas a cero como argumenta el estudiante, por lo que el alumno no alcanza un nivel de lectura de extracción de tendencias (Curcio, 1989) en los datos. Vemos que también el estudiante está atribuyendo la idea de representatividad a la desviación típica, cuando esta es una propiedad de las medidas de posición central y no de las de dispersión.

> *"Analizando la variable "número de caras" el rango de la secuencia simulada permite apreciar más la uniformidad de la media que en la secuencia real donde el rango es 9; a pesar de esto en ambas desviaciones típica se ve una gran representatividad ya que ambos valores de las medias están muy*

*próximos a cero"* (Alumno ER).

En este otro ejemplo, el alumno hace una lectura incorrecta del mínimo (que es 9) en la gráfica producida; el alumno no alcanza el nivel de "lectura de los datos" (Curcio, 1989):

*"En la experiencia de la secuencia simulada, el número de caras que cada uno de la clase pensábamos estaban a partir de 8 caras"* (Alumno TF)

Otros ejemplos de lectura incorrecta se dan en alumnos que realizan gráficos claramente incorrectos que no permiten una visualización clara de la información. En el siguiente ejemplo, el alumno construye un gráfico incorrecto porque representa conjuntamente los valores que él ha obtenido para las distintas variables del proyecto, es decir, número de caras, número de rachas y longitud de la racha mayor. Esto es, el alumno representa variables que no están relacionadas entre sí en un mismo gráfico, lo que le lleva a una lectura incorrecta del gráfico.

*"En el primer gráfico aparece más compensado que el segundo. En la simulación aparece que la mitad de lanzamientos saldrá cara, y que el número de rachas, así como el tamaño de la racha mayor será proporcional"* (Alumno JA)

**Lecturas correctas**

Como hemos visto en el capítulo 3, son varios los autores que definen distintos niveles de lectura de los gráficos estadísticos. En nuestro estudio vamos a utilizar la jerarquía definida por Bertin (1967), en la que los niveles de comprensión y lectura son jerárquicos, y al pasar de un nivel al inmediatamente superior la persona que interpreta el gráfico pone en juego mayor número de conocimientos, destrezas y habilidades. En nuestro estudio hemos observado distintas estrategias a la hora de leer los gráficos y cada una de estas supone uno de los niveles de lectura definidos por Bertin. Dichas estrategias, aunque todas correctas son más eficaces cuanto mayor nivel de lectura y comprensión permitan.

**Nivel 1: Extracción de datos**

Bertín definió este nivel como el que alcanza una persona que se limita a leer elementos individuales de este. Por ejemplo, en un diagrama de barras, el lector simplemente pondría en correspondencia cada valor de la variable estadística representada con la frecuencia correspondiente. Por lo tanto el lector no tiene una visión global del gráfico y no pone en juego conceptos estadísticos como pueden ser los promedios o estadísticos de dispersión, variación, etc. En la clasificación realiza por Curcio (1989), denomina a este nivel *leer entre los datos*, que equivaldría a una lectura literal del gráfico. Mostramos a continuación las distintas estrategias seguidas por los futuros profesores participantes en nuestro estudio a la hora de leer sus construcciones gráficas y que permiten el nivel de *extracción de datos*:

- *Forma del gráfico.* Esta estrategia consiste en fijarse únicamente la forma del gráfico y las variaciones visuales que se observan en este. No se trata de interpretaciones incorrectas, pero si imprecisas, ya que las lecturas realizadas son básicas, sin relacionar dicha forma del gráfico con otros estadísticos o el problema que se les planteó. En el siguiente ejemplo mostramos un ejemplo perteneciente a esta categoría:

  > *"Como podemos observar en las gráficas, las intuiciones de la secuencia simulada, vemos menos variedad de números y además concentrados más, en un número del que se destaca fácilmente, mientras que en la secuencia real se da más variedad de casos y concentraciones"* (Alumna MCG).

En el ejemplo, la estudiante realiza un gráfico de barras adosadas para estudiar la longitud de la racha mayor en las secuencias real y simulada. El gráfico por lo tanto pertenece al mayor nivel de complejidad semiótica de los que hemos definido anteriormente (nivel 4). La alumna no estudia promedios o dispersión y por lo tanto no realiza la comparación entre las dos secuencias, aunque el gráfico realizado por esta es correcto. Implícitamente hace referencia a la dispersión de las variables representadas e incluso de la moda, pero no hay evidencias de que integre estos conceptos con el gráfico. Su lectura se centra más en los aspectos visuales del gráfico.

- *Leen valores aislados.* Hay futuros profesores que, una vez construido el gráfico, realizan una lectura literal de este. En algunos casos, los gráficos al ser de niveles de complejidad semiótica 1 y 2, no permiten niveles superiores de lectura. Pero encontramos también gráficos de complejidad semiótica adecuada que permitirían niveles de lectura superiores al de *extracción de datos*, mostrando que aunque la construcción del gráfico sea adecuada, la interpretación y lectura de estos requiere una serie de habilidades que no tienen porque alcanzarse una vez que se conozcan los convenios de construcción de los distintos gráficos. En el siguiente ejemplo, la alumna construye un gráfico de sectores correcto de nivel de complejidad semiótica 3, que permite una mayor interpretación de la realizada por la alumna, quien se limita a realizar una lectura literal del gráfico, leyendo la frecuencia asociada a cada valor de la variable estadística número de caras.

*"El gráfico nos sirve para ver el porcentaje de los alumnos que piensan que salen x caras y comparándolo con el gráfico siguiente podemos ver que porcentaje sale en la tirada real, y si se equivocan mucho o no, los porcentajes son los siguientes: el 45% piensan que salen 10 caras, el 21,21% piensan que sale 12 caras, el 15,15% piensan que sale 11 caras, el 9,09% piensan que sale 9 caras, el 3,03% piensan que sale 7 caras, el 3,03% piensan que sale 8 caras"* ( Alumna MLA).

La anterior alumna realiza un estudio totalmente análogo para el caso del número de rachas y de la longitud de la racha mayor. Como ya vimos, Bertin (1967) llamaba la atención que un gráfico será más útil que otro, si al representar en ambos la misma información, el tiempo de inspección del gráfico es menor para realizar las interpretaciones y lecturas. En este caso, sería preferible que la alumna hubiese realizado un gráfico de barras o de líneas del mismo nivel de complejidad semiótica (tercer nivel), ya que estos permiten visualizar el rango y variabilidad de la variable representada con una simple inspección del gráfico, proceso que implicaría una menor abstracción que al intentar averiguar el rango o sacar conclusiones sobre la variabilidad a partir de un gráfico de sectores.

- *Valores máximo y mínimo de las variables*. Otros futuros profesores proporcionan los valores máximos y mínimos de las distintas variables, comparando estos valores entre cada par de variables de las que analizan en el proyecto, o simplemente extrayendo esta información a la vista del gráfico. No llegan a la idea de rango de la variable estadística, por lo tanto estos estudiantes realizan una lectura dentro del primer nivel de lectura de Bertin, sin llegar a la extracción de tendencias:

  *"El número de caras de la secuencia simulada está en torno, de 7 a 14 caras, por lo tanto los 33 alumnos que hemos participado en estos lanzamientos hemos tenido la imaginación de anotar un mínimo de 7 caras y un máximo de 14 caras"*(Alumna MCB).

En este ejemplo, la estudiante realizó un gráfico de nivel de complejidad semiótica 2, es decir no llegó a representar la distribución de frecuencias del número de caras en la secuencia simulada. En la lectura del gráfico, observa cuales son el valor máximo y mínimo de la variable que representa, observando el eje Y, donde representa los resultados individuales obtenidos por cada una de las personas que participaron en el experimento en su clase. Este gráfico permitiría sacar conclusiones sobre el rango y comparar este con el de la secuencia real, pero la alumna se limita a extraer información sobre los valores máximo y mínimo de la variable sin realizar ningún tipo de interpretación.

La siguiente estudiante realiza un gráfico de complejidad semiótica 4 correcto, adecuado para que obtuviese información de utilidad en la realización de su tarea. Esta estudiante por lo tanto muestra conocimiento de los convenios de construcción de los gráficos de barras, pero sin embargo no es capaz de dar utilidad al trabajo que ha realizado en la síntesis de los datos y organización de la información disponible para construir el gráfico, limitándose a la siguiente lectura:

> *"Mayor número de caras → 14 en la secuencia real"* (Alumna ME).

**Nivel 2: Extracción de tendencias**

Se trata del segundo nivel de lectura entre los definidos por Bertin (1967), inmediatamente superior al nivel de *extracción de datos.* Supone una visión más global del gráfico y que el lector sea capaz de encontrar relaciones entre distintos subconjuntos de datos dentro del gráfico. Por ejemplo, en un diagrama de sectores reconocer el sector de mayor peso para encontrar la moda de la distribución, por lo tanto poner en relación el sector de mayor amplitud con la moda. Sería análogo a encontrar la barra de mayor frecuencia en un diagrama de barras o en un histograma, o analizar el rango por medio de los valores de la variable representados en uno de los ejes (generalmente eje de abscisas).

Como en el caso anterior, este nivel tiene un equivalente en la categorización realizada por Curcio (1989), que se denomina *leer dentro de los datos*. Como el de extracción de tendencias, supone la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere por lo tanto realizar una interpretación de los datos que el lector extrae al trabajar en el primer nivel de lectura. Para este nivel hemos encontrado los siguientes ejemplos:

- *Promedios.* Se trata de estudiantes que estiman los promedios  a partir del gráfico. Por ejemplo, visualizan la moda en un gráfico de barras. También pueden tratarse de alumnos que calculen algún promedio e interpreten o integren estos en relación con lo que observan en el gráfico. Otros alumnos directamente representaron distintos promedios en los gráficos para realizar comparaciones de estos en las distintas secuencias y para las distintas variables.

En esta categoría, los alumnos pasan al nivel inmediatamente superior de lectura al poner en relación promedios y los gráficos. Esto supone un nivel mayor de dificultad, porque no basta con poner en relación un elemento de un eje con el del otro, extraer conclusiones basadas en la forma de los distintos gráficos o leer valores máximos y mínimos de las variables en los ejes, si no integrar conocimientos estadísticos con los gráficos. El alumno AG, aunque usa un lenguaje impreciso, interpreta correctamente la forma del gráfico (en el diagrama de líneas al ascender la línea aumenta la frecuencia) y detecta la moda:

> *"El sistema de representación de datos utilizado es el diagrama de líneas ya que se pueden ver las diferencias entre la secuencia simulada y la real; si la línea asciende, la frecuencia aumenta,.. El punto más alto del diagrama corresponde al valor de la variable que tiene mayor frecuencia, como ocurre en (pone un ejemplo)"* (Alumno AG).

- *Dispersión*. En esta categoría incluimos lecturas realizadas por los futuros profesores de nuestra muestra en los que sólo tienen en cuenta la información que pueden extraer de los distintos gráficos con respecto a las medidas de dispersión. Aunque algunos alumnos calculan estadísticos de dispersión como la varianza y la desviación típica, rara vez relacionan estos estadísticos con los gráficos construidos, por lo que en este apartado se trata de alumnos que interpretan el rango dentro de los distintos gráficos.

Esto supone un nivel superior al nivel de extracción de datos cuando los estudiantes se limitaban a leer los valores máximo y mínimo de las distintas variables, ya que en este caso, obtienen previamente dichos valores para concluir sobre el rango de la variable estadística, lo que supone el extraer información sobre una medida de dispersión a partir del gráfico construido. En el siguiente ejemplo una futura profesora que había realizado un gráfico de nivel de complejidad semiótica 2 extrae información únicamente sobre la dispersión. Se trata de un gráfico de líneas que permite ver la mayor variabilidad en una de las dos series, porque en este caso las oscilaciones del gráfico son más amplias.

> *"En cuanto al número de caras reales que ha obtenido el grupo es mucho más variable son más homogéneos que en la simulación. Para poder realizar esta afirmación he usado el rango"* (Alumna JI).

- *Forma del gráfico y promedios*. Cuando en la lectura de los distintos gráficos tienen en cuenta la forma de estos y también algún promedio. Estas interpretaciones al no integrar algún elemento de dispersión no permiten llegar al nivel superior de lectura, pero como sí integra algún promedio con el gráfico ya supone un nivel superior del de *extracción de datos*.

En el siguiente ejemplo, la alumna EA construye un gráfico de líneas adosadas de complejidad semiótica 2 En la primera parte de su interpretación, la alumna compara la forma que tiene la gráfica en las dos secuencias. La interpretación de la moda es más imprecisa porque al ser un gráfico de complejidad de construcción 2, resulta más difícil evaluarla:

> *"En la gráfica donde se encuentra el número de caras podemos ver que no encontramos mucha diferencia entre el lanzamiento simulado y el lanzamiento real, algunos incluso coinciden, pero en general hay muy poca diferencia entre una secuencia y otra. La moda del número de caras de una secuencia y de otra son muy parecidas por no decir que son iguales"* (Alumna EA).

En el siguiente ejemplo, la alumna realiza dos gráficos de barras de complejidad semiótica 3, para el estudio del número de caras en las secuencias real y simulada. Este gráfico facilita la lectura y comparación de la moda. El lenguaje de la alumna ER es impreciso y en la primera parte de su explicación no utiliza lenguaje estadístico, aunque usa el término frecuencia en la segunda parte de su razonamiento. La alumna utiliza dichos conceptos estadísticos y realiza una comparación entre la moda de las distribuciones. En la segunda parte, se centra en aspectos más visuales del gráfico de la secuencia real, observando la situación de las barras en el gráfico, pero sin llegar a trabajar con elementos de dispersión como podría ser el rango.

> *"El número de caras en la secuencia simulada destaca porque el número de caras que más se repite es 9 caras, que llega a repetirse catorce veces. Mientras que en la secuencia real el número de caras que más se repite está repartido, es decir, que hay una serie de caras que se repiten las mismas veces, como son el caso de, nueve, diez, y once caras que se repiten las mismas veces, concretamente nueve. Además como podemos ver en las gráficas, en la secuencia real las frecuencias más altas se encuentran concretamente en el centro de la gráfica"* (Alumna ER).

- *Forma del gráfico y dispersión.* Por último, encontramos futuros profesores que relacionan al menos un estadístico de dispersión y la forma del gráfico. Análogamente al caso en el que los estudiantes leen los gráficos atendiendo a su forma y a algún promedio, este tipo de lectura permite una lectura dentro del nivel de *extracción de tendencias* pero no superior. Ilustramos esta categoría con el siguiente ejemplo:

> *"En los diagramas se puede observar la simetría de la que hablamos anteriormente, porque los*

*resultados están en un intervalo entre 7 y 11. En cambio en la secuencia real el número de caras está en un intervalo comprendido entre 7 y 14 veces. El segundo análisis puede llevar a pensar que valores pequeños o muy grandes pueden ser improbables"* (Alumno MS).

En dicho ejemplo, la estudiante en principio hace mención a la simetría de las gráficas realizadas, sin ser muy explícita, ya que había hablando anteriormente de la misma. Al igual que muchos de sus compañeros, la alumna utiliza un lenguaje impreciso al referirse que "los resultados están en un intervalo entre 7 y 11" cuando lo que trabaja es con el rango de la variable en estudio.

**Nivel 3: Análisis de la estructura de los datos**

Un nivel superior de lectura o análisis de la estructura, equivaldría a comparar las tendencias y variabilidad en cada par de variables, que luego han de utilizar para realizar predicciones o formular hipótesis sobre la pregunta de investigación que se les planteó en el proyecto. Si observamos la clasificación de los niveles de lectura según Curcio (1989), el nivel de lectura *leer más allá de los datos* se correspondería con el de *análisis de la estructura*. En nuestro estudio, consideramos que los alumnos que realizan lecturas dentro de este nivel son los que siguen la estrategia mencionada.

*Promedios y dispersión.* Estos futuros profesores realizan una interpretación más completa que las anteriores, porque relacionan tanto promedios como estadísticos de dispersión con los gráficos estadísticos. En el siguiente ejemplo se muestra como una estudiante extrae información sobre la moda y el rango a partir de los gráficos que construyó para el estudio del número de rachas en las secuencias real y simulada. Esto le permite tener información comparada sobre diferencias entre las distribuciones en las secuencias real y simulada, aunque la interpretación que realiza es escueta. Aún así le será de utilidad para obtener información de utilidad para obtener conclusiones sobre las intuiciones del conjunto de la clase y obtiene dicha información realizando la lectura de sus gráficos y tablas.

*"Puedo afirmar, basándome en la tabla y gráfico realizados que: en la secuencia simulada la moda es 12 y 13 (a simple vista creía que era 11 y 12). En la secuencia real es 11. El rango en la primera es 6 y en la real 8"* (Alumno RC).

**Síntesis de resultados**

Una vez clasificadas las estrategias de los futuros profesores de nuestra muestra para leer los distintos gráficos, presentamos en la tabla 4.6.1 para cada par de las variables estadísticas que trabajaron en la realización del proyecto, la frecuencia (y porcentaje dentro de cada variable) de alumnos dentro de cada una de las categorías definidas anteriormente.

Tabla 4.6.1. Frecuencia (porcentaje) de estrategias en la lectura de los gráficos, para las variables en estudio.

| | Número de caras | Número de rachas | Racha más larga |
|---|---|---|---|
| No leen | 51 (28,18) | 45(30,82) | 42(32,81) |
| Leen incorrectamente | 21(11,60) | 17(11,64) | 18(14,06) |
| Forma del gráfico | 5(2,76) | 7(4,79) | 7(5,47) |
| Leen valores aislados | 26(14,36) | 19(13,01) | 18(14,06) |
| Valores máximos y mínimos de la variable | 10(5,52) | 8(5,48) | 7(5,47) |
| Promedios | 27(14,92) | 21(14,38) | 16(12,50) |
| Dispersión | 7(3,87) | 2(1,37) | 1(0,78) |
| Forma del gráfico y promedios | 8(4,42) | 8(5,48) | 4(3,13) |
| Forma del gráfico y dispersión | 2(1,10) | 1(0,68) | 0(0) |
| Promedios y dispersión | 24(13,26) | 18(12,33) | 15(11,72) |
| Total de alumnos que hacen gráficos | 181 | 146 | 128 |

Podemos observar el alto porcentaje de alumnos que después de construir gráficos no tratan de interpretarlos (28,18% para el número de caras; 30,82% para el número de rachas y 32,81% en la longitud de la racha mayor). Estos alumnos, aunque realizan gráficos en la resolución de la tarea que se les pidió, no saben cómo obtener información de estos. En otros casos, los gráficos son de niveles de complejidad bajos o gráficos incorrectos y dificultan su lectura. El porcentaje de lecturas incorrectas es la mitad del anterior (11,60 a 14,06%) pero todavía importante, en futuros profesores que han de enseñar este tema.

Las tres estrategias más seguidas por los estudiantes a la hora de leer los gráficos son las de *interpretar los promedios* (14,92% para el número de caras, 14,38% para el número de rachas y 12,50% para la longitud de la racha mayor), la de *leer valores aislados* (14,36%, 13,01% y 14,06%) y la de *interpretar promedios y dispersión conjuntamente* (13,26%, 12,33% y 11,72% respectivamente). En consecuencia, podemos observar que bastantes alumnos integran el valor de algún promedio y los relacionan con el gráfico.

En la tabla 4.6.2 agrupamos las estrategias los alumnos en relación con los niveles de lectura de Bertin (1967). En las tres variables, el mayor porcentaje es el de los alumnos que no leen el gráfico, lo que indica que para los futuros profesores interpretar los gráficos estadísticos no es una tarea fácil, aunque hayan sido construidos por ellos mismos.

Tabla 4.6.2. Frecuencia (porcentaje) de interpretaciones dentro de cada uno de los niveles de lectura para cada par de variables del proyecto

| Nivel de lectura (Bertin) | Número de caras | Número de rachas | Racha más larga |
|---|---|---|---|
| No leen | 51 (28,18) | 45(30,82) | 42(32,81) |
| Lectura incorrecta | 21(11,60) | 17(11,64) | 18(14,06) |
| Extracción de datos | 41(22,65) | 34(23,29) | 32(25) |
| Extracción de tendencias | 44(24,31) | 32(21,92) | 21(16,40) |
| Análisis de la estructura | 24(13,26) | 18(12,33) | 15(11,72) |
| Total alumnos que hacen gráficos | 181 | 146 | 128 |

Otra conclusión es que no es suficiente conocer los convenios de construcción de los distintos gráficos para leer correctamente la información representada. Se requieren una serie de habilidades como resaltaron Friel, Curcio y Bright (2001): Se han de reconocer los distintos elementos que forman el gráfico (ejes, escalas, títulos, etiquetas, contenidos matemáticos, etc.) para posteriormente ser capaz de percibir la importancia de cada uno de dichos elementos en el gráfico que se está leyendo y como variaría la información al cambiar las características de alguno de los elementos. Puesto que en algunos casos estos elementos han sido incorrectos, ello ha dificultado la lectura.

También es necesario poner en relación las relaciones encontradas en el gráfico y los datos que en él se están representando y viceversa, para por último ser capaz de criticar el gráfico que se está leyendo con el fin de ver su utilidad para el problema particular que se esté trabajando. Respecto a este punto, sería necesario reforzar la enseñanza actual.

Para el estudio del número de caras, el nivel de lectura que mayor porcentaje de interpretaciones tiene es el de *extracción de tendencias* (24,31%), seguido de cerca del nivel de *extracción de datos* (22,65%). El porcentaje de estudiantes que realizan una lectura dentro del nivel superior o *análisis de la estructura*, baja al 13,26%. Es obvio que los alumnos tienen dificultad para llegar a este nivel de lectura, pero para la variable número de caras, este porcentaje es ligeramente mayor que el de interpretaciones incorrectas (11,60%).

En el caso del número de rachas el nivel de *extracción de datos* tiene porcentaje ligeramente superior (23,29%) que el de *extracción de tendencias* (21,92%), y el porcentaje del nivel de *análisis de la estructura* baja al 12,33%, ligeramente superior al de interpretaciones incorrectas (11,64%).

Para la longitud de la racha mayor, el mayor porcentaje (25%) es también de *extracción de datos*, seguido por *extracción de tendencias* (16,40%). En este caso, sigue el nivel de interpretaciones incorrectas con un 14,06%, siendo el nivel con menor porcentaje el *análisis de la estructura* con un 11,72% del total.

Aunque en el estudio del número de caras, los resultados son un poco mejores, seguidos del número de rachas, las diferencias en el test Chi cuadrado no fueron estadísticamente significativa (Chi= 3,56; g.l.= 8; p= 0,8948) lo que indica que la habilidad de lectura de los estudiantes no depende de la variable analizada y es, consecuentemente, un indicador de su competencia gráfica.

### 4.6.2. NIVELES DE LECTURA Y COMPLEJIDAD SEMIÓTICA

En este apartado estudiamos la posible relación entre los niveles de lectura de los gráficos realizados por los futuros profesores de nuestra muestra y los niveles de complejidad semiótica que hemos definido en la construcción de dichos gráficos estadísticos. Realizamos un análisis separado para cada una de las variables estadísticas que los futuros profesores tuvieron que analizar en el proyecto que se les propuso. Los resultados de este análisis se publicarán en Arteaga y Batanero (2011).

**Número de caras**

Respecto al número de caras, del total de alumnos que construyendo gráficos no los interpreta es el 66, 67% en los gráficos de nivel 1, el 50,0% en los gráficos de nivel 2, el 20,9% en los de nivel 3 y el 18,2% en los de nivel 4. El porcentaje de alumnos que trata de leer el gráfico construido crece con el nivel y por tanto la mayor competencia en construcción de gráficos va paralela con la capacidad de lectura. En total, de los 181 alumnos que realizan un gráfico para esta variable, 51 (28,2%) no lo interpretan. Para el resto, presentamos en la tabla 4.6.3 y la figura 4.6.1 la clasificación según los niveles de complejidad semiótica y los niveles de lectura definidos por Bertin (1967).

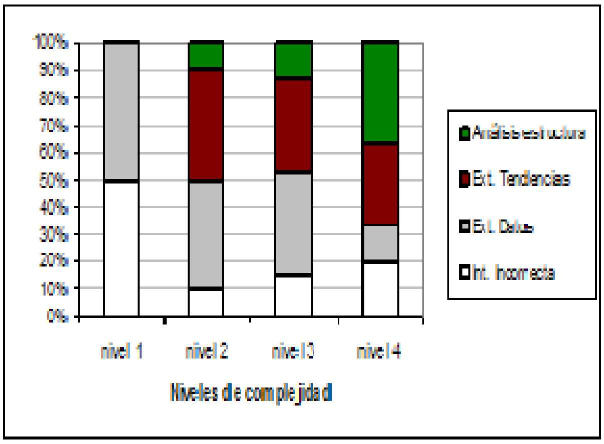
De los dos alumnos que, construyendo un gráfico del nivel de complejidad 1, tratan de interpretarlo, uno de ellos (50%) realiza una lectura incorrecta y el otro una lectura de nivel de extracción de datos. Como era de esperar, dentro de este nivel no haya lecturas de mayor nivel pues por las características de este tipo de gráficos no permiten dichos niveles.

Tabla 4.6.3. Clasificación de los estudiantes según el nivel de lectura y el nivel de complejidad semiótica para el número de caras.

| Nivel de complejidad semiótica | Niveles de lectura | | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|---|
| | Lectura incorrecta | Ext. de datos | Ext. tendencias | Análisis estructura | |
| N1. Representa sólo sus datos | 1 (50) | 1 (50) | 0 (0) | 0 (0) | 2 |
| N2. Representa resultados individuales | 2 (10) | 8 (40) | 8 (40) | 2 (10) | 20 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 11 (15,28) | 27 (37,5) | 25 (34,72) | 9 (12,5) | 72 |
| N4. Gráficos conjuntos en un mismo marco | 7 (19,45) | 5 (13,89) | 11(30,56) | 13 (36,11) | 36 |
| Total | 21 | 41 | 44 | 24 | 130 |

De los 20 alumnos que, construyendo gráficos del nivel 2 de complejidad semiótica, tratan de leerlos, 40% llegan al nivel de extracción de datos, otro 40% al nivel de extracción de tendencias y sólo dos (10%) llegan al nivel superior de lectura de Bertin. En este nivel se da el mayor porcentaje de lecturas dentro de los niveles de extracción de tendencias y de extracción de datos.

Figura 4.6.1. Distribución de estudiantes por niveles de lectura y complejidad semiótica para el número de caras




El porcentaje de interpretaciones incorrectas dentro del nivel 3 (15,28%) es mayor que en el nivel 2 (10%). También destacamos que el mayor porcentaje en el nivel 3 se da dentro del nivel de lectura de extracción de datos (37,72%), seguido del de extracción de tendencias (34,72%) y el menor porcentaje se da en el nivel de análisis de la estructura (12,50%). Es decir, aunque el gráfico de nivel 3 permite el análisis de la estructura con facilidad, los estudiantes no llegan a este nivel de lectura en su mayoría, lo que puede ser debido a dificultades con el concepto de distribución, subyacente en el análisis de la estructura de los datos (Canada, 2008). Aún así este porcentaje ya supera al porcentaje análogo en los gráficos de nivel 2.

Por último en el nivel de complejidad 4, además de integrar en el gráfico los elementos de valor de la variable, frecuencias y distribución de frecuencias, tienen la dificultad añadida de representar dos distribuciones en un mismo marco. Por ello es de explicar que el mayor porcentaje de lecturas incorrectas se dé dentro de este nivel (19,45%), debido al mayor número de objetos matemáticos que el alumno ha de usar en dicha interpretación. Aún así, el porcentaje de interpretaciones en el nivel de análisis de la estructura es notablemente mayor que en el resto de los niveles (36,11%). A este alto porcentaje sigue que un 30,56% dentro del nivel de lectura o extracción de tendencias.

Esta tendencia se observan a partir del análisis combinado de la tabla y gráfico, donde se observa un crecimiento con el nivel de complejidad semiótica del nivel superior de lectura y una mayor proporción de los dos niveles superiores de lectura en los niveles de complejidad 2 y 3 (igualados) y aún mayor en el nivel de complejidad semiótica 4.

**Número de rachas**

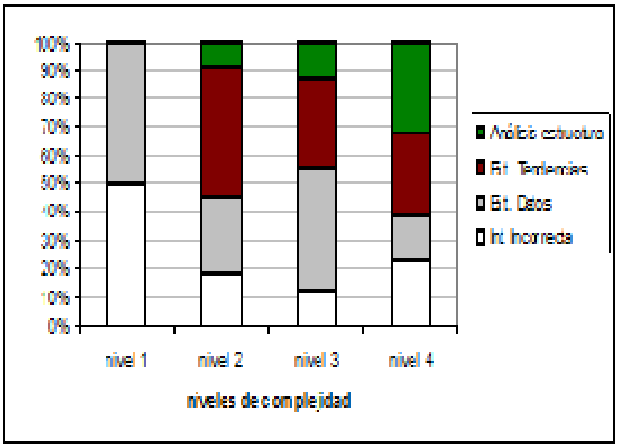
Respecto al número de rachas, del total de alumnos que construyendo gráficos no los interpreta es el 66, 67% en los gráficos de nivel 1, el 52,17% en los gráficos de nivel 2, el 25,97% en los de nivel 3 y el 22,50% en los de nivel 4. Como en el caso anterior, el porcentaje de alumnos que trata de leer el gráfico construido crece con el nivel y por tanto la mayor competencia en construcción de gráficos va paralela con la capacidad de lectura.

Tabla 4.6.4. Clasificación de estudiantes según nivel de lectura y nivel de complejidad semiótica para el número de rachas.

| Nivel de complejidad semiótica | Niveles de lectura | | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|---|
| | Incorrecta | Ext. datos | Ext. tendencias | Análisis estructura | |
| N1. Representa sólo sus datos | 1 (50) | 1(50) | 0 (0) | 0 (0) | 2 |
| N2. Representa resultados individuales | 2 (18,18) | 3 (27,27) | 5 (43,86) | 1 (16,13) | 11 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 7 (12,28) | 25 (43,86) | 18 (31,58) | 7 (12,28) | 57 |
| N4. Gráficos conjuntos en un mismo marco | 7 (22,58(¡) | 5 (16,13) | 9 (29,03) | 10 (32,26) | 31 |
| Total | 17 | 34 | 32 | 18 | 101 |

En la tabla 4.6.4, se muestra la frecuencia de las interpretaciones de los gráficos realizados por los estudiantes que pertenecen a los distintos niveles de lectura, según los distintos niveles de complejidad semiótica. Los porcentajes de los distintos niveles de lectura de los gráficos para cada uno de los niveles de complejidad semiótica para la variable número de rachas se presentan en la figura 4.6.2.

Figura 4.6.2. Distribución de estudiantes por niveles de lectura y complejidad semiótica para el número de rachas




Al igual que para el número de caras, de los dos alumnos que construyen un gráfico de nivel de complejidad 1 y tratan de leerlo, el 50% de interpretaciones incorrectas y el 50% de interpretaciones dentro del nivel de extracción de datos. Dentro del nivel 2 de complejidad semiótica, el porcentaje de lecturas al nivel de extracción de tendencias es el mayor dentro del nivel y en todos los niveles, pues como ya dijimos, al no representar distribuciones de frecuencias, dificultan la lectura de promedios, pero permiten sacar conclusiones sobre los rangos de las variables, lo que supone un nivel de extracción de tendencias. El porcentaje de lecturas en el nivel superior de lectura es el más bajo de todos.

En el nivel de complejidad 3 predomina la extracción de datos con un 43,86% y aumenta ligeramente el porcentaje del nivel superior de lectura (12,28%), análisis de la estructura, con respecto a dicho porcentaje en el nivel 2.

Por último, en el nivel de complejidad 4, supone el mayor porcentaje de interpretaciones dentro del nivel de lectura superior (32,26%). Como hemos visto cuando los alumnos consiguen llegar a construir gráficos de este nivel se facilita la comparación entre las dos distribuciones representadas en el gráfico. Pero al suponer una mayor complejidad semiótica con respecto a los tres niveles inferiores, que en que el porcentaje de interpretaciones incorrectas (22,58%), es muy alto.

**Longitud de la racha mayor**

En esta variable, de los alumnos que realizan gráficos de nivel 1, el 66,67% no los leen;

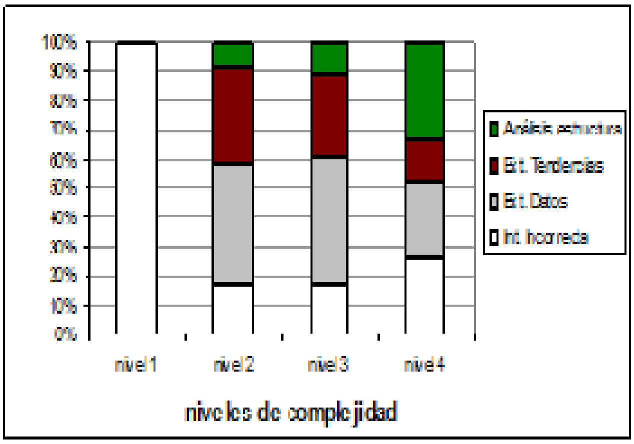
del total de los alumnos que realizan gráfico de nivel 2, un 42,86% no los interpretan; en el nivel 3 el 31,34% no los interpreta y por último, para el nivel de complejidad semiótica 4 el 27,02% de los que lo construyen no realiza ningún análisis de los gráficos realizados.

Tabla 4.6.5. Clasificación de los estudiantes según el nivel de lectura y el nivel de complejidad semiótica para la longitud de la racha mayor.

| Nivel de complejidad semiótica | Niveles de lectura | | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|---|
| | Int. incorrecta | Ext. de datos | Ext. tendencias | Análisis estructura | |
| N1. Representa sólo sus datos | 1 (100) | 0 (0) | 0 (0) | 0 (0) | 1 |
| N2. Representa resultados individuales | 2 (16,67) | 5 (41,67) | 4 (43,48) | 1 (8,33) | 12 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 8 (17,39) | 20 (43,48) | 13 (28,26) | 5 (10,87) | 46 |
| N4. Gráficos conjuntos en un mismo marco | 7 (25,93) | 7(25,93) | 414,81) | 9 (33,33) | 27 |
| Total | 18 | 32 | 21 | 15 | 86 |

En la tabla 4.6.5, se muestra la frecuencia de los distintos niveles de lectura, según los distintos niveles de complejidad semiótica para el estudio de la longitud de la racha mayor. En la figura 4.6.3. analizamos los porcentajes correspondientes. En este caso, dentro del nivel de complejidad 1 sólo hay un gráfico interpretado y dicha interpretación es incorrecta.

Figura 4.6.3. Distribución de estudiantes por niveles de lectura y complejidad semiótica para la racha mayor




Dentro del nivel 2 de complejidad semiótica, el mayor porcentaje se da al nivel de lectura de extracción de datos (41,67%). El porcentaje de lecturas dentro del nivel superior es del 8,33%, que representa el porcentaje más bajo de todos los niveles (sin tener en cuenta el nivel 1). En el nivel de complejidad 3 predomina la extracción de datos con un 43,48% y aumenta ligeramente el porcentaje de análisis de la estructura (10,87%) con respecto al nivel 2.

Por último, en el nivel de complejidad 4, encontramos el mayor porcentaje del nivel de lectura superior (33,33%). Además, al igual que en las variables analizadas anteriormente, el mayor porcentaje de interpretaciones incorrectas también se da dentro del nivel de complejidad semiótica 4, debido como en los otros casos a la mayor cantidad de habilidades necesarias para leer un gráfico de esta complejidad.

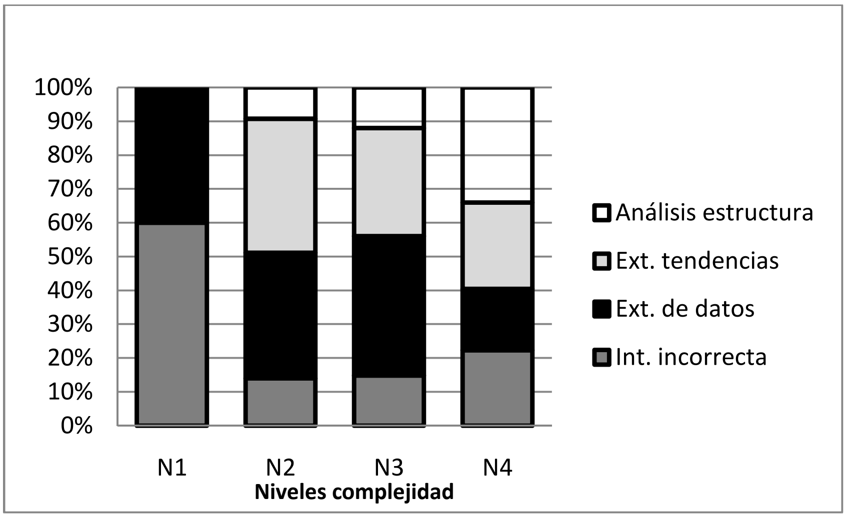
**Síntesis**

Por otro lado, al resumir los datos de las tres variables respecto al nivel de complejidad semiótica y nivel de lectura (tabla 4.6.5) se observa mejor la tendencia ya descrita y al calcular el contraste Chi cuadrado, las diferencias son muy significativas (Chi=32,56; d.g.= 6; p= 0,0000) con lo que podemos concluir que los gráficos de complejidad 4 llevan a un porcentaje mayor de lectura del gráfico en el nivel superior, aunque también a un mayor número de errores (salvo los de nivel 1) y los gráficos realizados de nivel 3 de complejidad semiótica proporcionan un mayor porcentaje de lecturas dentro de la extracción de tendencias.

Tabla 4.6.5. Clasificación de los estudiantes según el nivel de lectura y el nivel de complejidad semiótica para las tres variables combinadas.

| Nivel de complejidad semiótica | Niveles de lectura | | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|---|
| | Int. incorrecta | Ext. de datos | Ext. tendencias | Análisis estructura | |
| N1. Representa sólo sus datos | 3 | 2 | 0 | 0 | 5 |
| N2. Representa resultados individuales | 6 | 16 | 17 | 4 | 43 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 26 | 72 | 56 | 21 | 175 |
| N4. Gráficos conjuntos en un mismo marco | 21 | 17 | 24 | 32 | 94 |
| Total | 56 | 107 | 97 | 57 | 317 |

Figura 4.6.4. Distribución de estudiantes por niveles de lectura y complejidad semiótica para las variables combinadas




## 4.7. CONCLUSIONES DE LOS ESTUDIANTES

Uno de los objetivos del proyecto de análisis de datos propuesto a los futuros profesores, era que éstos se viesen envueltos en el proceso de investigación sobre las intuiciones que tienen las personas sobre el azar, a partir de la discusión iniciada por el profesor. Para llevar a cabo esta investigación, como se ha indicado, los estudiantes realizaron un experimento aleatorio, recogieron y analizaron los datos, para finalmente obtener una respuesta a la pregunta que se les planteó.

Desafortunadamente, una parte de los estudiantes, a la hora de realizar el informe del proyecto, se limita a presentar algún tipo de análisis estadístico de los datos disponibles, sin dar respuesta a la pregunta propuesta, es decir no poniendo en relación el trabajo matemático realizado con la pregunta a resolver. Como hemos visto en el apartado anterior, muchos estudiantes no leen los gráficos producidos, cometen errores en la lectura o los leen a niveles de lectura insuficiente. Más aún, incluso los que alcanzan el nivel de extracción de tendencias o análisis de la estructura, en ocasiones se limitan a dar los promedios o medidas de dispersión de las variables sin indicar qué indican estos valores en relación a las intuiciones sobre la aleatoriedad del grupo de estudiantes.

Como hemos analizado en algunos trabajos previos (Arteaga, Batanero y Ruiz, 2010; Batanero, Arteaga, Ruiz y Roa, 2010) y estudia con más detalle Ruiz (en elaboración), los estudiantes participantes en este estudio tienen una pobre percepción de la aleatoriedad. Aunque muestran una correcta intuición sobre el número esperado de caras en el lanzamiento de las 20 monedas (distribución binomial), su percepción de la variabilidad de dicha distribución, así como de los valores medios y dispersión del número de rachas y racha más larga es incorrecto. Con bastante frecuencia muestran también sesgos tales como la representatividad local o creencia en que ha de alcanzarse el equilibrio entre caras y cruces en una racha corta de ensayos (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982).

Debido a estas pobres intuiciones, muchos estudiantes llegan a unas conclusiones erróneas, bien por no haber entendido el propósito del proyecto o bien porque su concepción errónea de los experimentos aleatorios interviene en su conclusión. En general, la obtención de conclusiones es la parte del proyecto de análisis de datos que más difícil ha resultado a los futuros profesores.

### 4.7.1. CLASIFICACIÓN DE LAS CONCLUSIONES

Para presentar nuestros resultados respecto a este punto, clasificamos, en primer lugar, las conclusiones realizadas por los estudiantes en correctas, parcialmente correctas e incorrectas, y dentro de estos grupos analizamos las distintas argumentaciones realizadas por los estudiantes.

**Conclusiones correctas**

Se considera que la conclusión es correcta cuando el estudiante compara las distribuciones de los tres pares de variables analizadas obteniendo similitudes y diferencias entre estadísticos de dispersión y promedios en las secuencias reales y simuladas y extrayendo de ello una conclusión apropiada sobre la intuición del grupo respecto a la variable. Esta comparación pueden realizarla con ayuda de la construcción e interpretación de algún gráfico, lo que facilitará la obtención de conclusiones, pero pueden hacerla también directamente a partir de los distintos estadísticos de cada par de distribuciones, si los han calculado.

En el siguiente ejemplo, la estudiante compara los estadísticos de dispersión y promedios para el número de caras en la secuencia real y simulada. Con un lenguaje un poco impreciso hace notar que las intuiciones de los alumnos son buenas con respecto a los promedios, y pobres respecto a la dispersión, pues resalta la diferencia de las dos distribuciones con respecto a la desviación típica:

> *"En cuanto al número de caras las intuiciones del aula fueron aproximadas a la realidad, pero no del todo, ya que la desviación típica nos indica que los datos se distancian". Anteriormente la alumna dice: "La media entre la simulada y la real se asemeja,.... la mediana y la moda dan los mismos datos"* (Alumna CG).

Hemos considerado correctas algunas conclusiones donde, como el caso anterior, los estudiantes utilizan un lenguaje impreciso. Es decir encuentran dificultad para expresar las conclusiones que obtienen, mostrando poca familiaridad con términos estadísticos como el de variable estadística, valor de la variable o dato estadístico. Mostramos a continuación otro ejemplo, en el que el alumno realiza comparación entre la media y el rango del número de caras en las secuencias real y simulada, concluyendo que el conjunto de la clase tiene buena intuición sobre el valor medio del número de caras. Para referirse al rango, el alumno utiliza un lenguaje impreciso. Al ser el rango menor en la secuencia simulada, estos valores son más cercanos entre sí, a lo que el alumno se refiere cuando dice que los datos tienen una diferencia pequeña entre sí.

> *"En el cálculo de la media en el número de caras, la diferencia entre la secuencia real y simulada es de 0,3. Es una diferencia muy pequeña, por lo que se puede llegar a la conclusión de que los alumnos tienen buena intuición. En cuanto al cálculo del rango en el número de caras (…) podríamos decir que nos centramos en unos datos que tienen una diferencia pequeña entre ellos. La intuición del los alumnos no es tan buena como en el caso del cálculo de la media"* (Alumno JM).

De una manera también imprecisa, el siguiente alumno realiza primeramente una comparación de la mediana de la longitud de la racha mayor en las secuencias real y simulada notando su diferencia. Compara también los rangos y observa al analizar sus datos, que la percepción de la independencia es pobre en los estudiantes ya que en promedio en la secuencia simulada se produjeron rachas de longitud más corta de lo esperado en un proceso aleatorio:

> *"Las personas no pensamos que pueda salir una secuencia tan dispar como esta: [C,C,C,C,C,+,+,+,+,+], sino que nuestra intuición hace que vayamos alternando caras y cruces y obtengamos secuencias alternas como por ejemplo [C,C,+,C,+,+,C,+,C,+]"* (Alumno RE).

**Conclusiones parcialmente correctas**

Cuando los alumnos son capaces de deducir la corrección /incorrección de las intuiciones respecto a una característica de las distribuciones (por ejemplo, promedios) pero obtienen inclusiones incorrectas respecto a otra característica. Dentro de esta categoría encontramos distintos modos que los estudiantes tienen para llegar a esta conclusión parcial, analizamos por separado cada uno de ellos:

- *Comparan promedios:* Se trata de estudiantes que llegan a una conclusión parcial sobre el tipo de intuiciones que tienen los estudiantes, mediante la comparación de los promedios en cada uno de los pares de variables estadísticas en estudio.

En el siguiente ejemplo el alumno JC basándose en el estudio de los promedios, concluye que la intuición es mejor para el caso del número de caras, ya que para ese caso los promedios en las secuencias real y simulada se asemejan más que para el caso del número de rachas:

> *"Podemos concluir diciendo que las intuiciones de los estudiantes de la clase sobre el experimento aleatorio son muy acertadas y aproximadas a la realidad, aunque en las secuencias el número de caras es más exacto que el tamaño de las rachas"* (Alumno JC).

El alumno TG, aunque interpreta y extrae información sobre el rango de las representaciones gráficas que realizó, no utiliza dicha información para obtener sus conclusiones. Tiene en cuenta solamente el estudio de los promedios, no asociando la diferencia de dispersión en las distribuciones real y simulada para el número de caras, con una pobre intuición sobre la variabilidad aleatoria en los estudiantes.

> *"En general si hay una buena intuición ya que las medias son valores muy próximos, es decir han salido casi los mismos valores y a golpe de vista se puede comprobar"* (Alumno TG).

- *Comparan medidas de dispersión*: Los estudiantes obtienen una conclusión parcial atendiendo únicamente a comparaciones que realizan sobre algún estadístico de dispersión, que suele ser el rango. Dichas comparaciones se llevan a cabo entre cada par de distribuciones que los alumnos trabajan en el proyecto, obteniendo características y diferencias sobre la dispersión de cada una de las distribuciones a comparar. Mostramos a continuación algunos ejemplos:

En el primer ejemplo, la alumna MCG, al estudiar la longitud de la racha mayor, tiene en cuenta diferencias sobre la dispersión. Extrae esta información a través de los gráficos realizados, donde muestra que la dispersión de la variable longitud de la racha mayor en la secuencia simulada es menor que en la secuencia real. Es lo que quiere indicar cuando dice que "en la secuencia real hay más variedad en las frecuencias, es decir, más repartidas". Es decir, como en la secuencia real el abanico de valores de la variable es mayor que en el caso simulado, por tanto es mayor el rango en el caso real. Esta alumna resalta que en la secuencia simulada se tienden a hacer rachas de longitud más corta de lo que sería previsible en una secuencia real.

> *"En la racha mayor de la secuencia simulada encontramos que un 75% de la clase intuye una racha de 3, mientras que en la secuencia real hay más variedad en las frecuencias, es decir, están más repartidas y además en la secuencia simulada se hacen rachas más cortas"* (Alumna MCG).

En el siguiente ejemplo mostramos un caso atípico dentro de nuestro grupo de futuros profesores. La estudiante calcula las desviaciones típicas para las variables número de rachas y longitud de la racha mayor, y realiza una comparación de los resultados entre las secuencias real y simulada. Como podemos ver, la alumna AEC, tiene en cuenta la comparación realizada entre las desviaciones típicas de las distintas distribuciones comparables y relaciona los resultados de dichas comparaciones con el estudio del rango a través de la lectura del gráfico que construye. Además realiza la observación de que en la secuencia real ocurren sucesos que en la secuencia simulada nadie se imaginó que pudiesen suceder.

> "*Si comparamos las desviaciones típicas del número de rachas y de las rachas mayores en ambas secuencias ocurre lo mismo, la homogeneidad es mayor en la secuencia simulada que en la real, demostrando de nuevo que los alumnos hemos pensado unos resultados más cercanos entre sí (rango) que lo que ha ocurrido en la realidad. De este estudio deduzco que la probabilidad es muy poco previsible y que no por el hecho de que me salga cara después ha de salir cruz y esto se demuestra que en la secuencia real ha habido rachas de hasta 7 caras seguidas, algo que nadie había previsto"* (Alumna AEC).

Por último, mostramos un ejemplo típico dentro de esta categoría en la que los alumnos obtienen sus conclusiones a través del estudio del rango, que es el único estadístico de dispersión calculado por la mayoría. Este alumno, por medio del estudio del rango, concluye la mayor dispersión del número de caras en la secuencia real. Además, al argumentar sobre las intuiciones de los fenómenos aleatorios del conjunto de su clase, pone de manifiesto sus creencias, que se ven reforzadas por los resultados obtenidos y el análisis de sus datos, ya que en ocasiones las personas no tenemos la sensación de que los lanzamientos de la moneda son independientes.

*"En el lanzamiento simulado, el rango era muy pequeño lo cual intuimos, que inconscientemente lo cuadramos para que nos salga el mismo número de caras que de cruces, lo cual creemos que es justo y razonable. Por eso la moda ha sido 10. En el lanzamiento real hemos visto mucha más aleatoriedad, por eso el rango era mayor y las rachas son más largas que en el simulado. Ya que en el caso simulado las rachas muy largas no las consideramos creíbles, creemos que después del lanzamiento hay más posibilidades de que salga el signo contrario al que ha salido en el anterior"* (Alumno JA).

- *Comparan las formas de las gráficas*: Unos pocos alumnos obtienen sus conclusiones atendiendo exclusivamente a la forma del gráfico.

Mostramos a continuación un ejemplo, en el cual el alumno AB, compara la forma de los gráficos de barras que realiza para el estudio del número de rachas en las secuencias real y simulada. Al comparar la forma de los gráficos, observa que en la secuencia simulada se tiene tendencia a realizar rachas más cortas y por tanto mayor número de rachas que al realizar el lanzamiento real. Este alumno realiza esta argumentación poniendo atención exclusivamente en los gráficos, sin usar de manera explícita el rango, aunque hace referencia a los valores mínimo y máximo de la variable (3 y 8 rachas).

*"Otro apartado es el número de rachas en cada serie. Cuando la serie es simulada tenemos la tendencia a que haya muchas rachas y de un número de datos cortos. Pero cuando la serie es real, no se puede controlar y hay una tendencia a que haya entre 3 y 8 rachas, con unas rachas grandes"* (Alumno AB).

En el siguiente ejemplo, la alumna basa sus conclusiones en la forma de los gráficos de barras que realiza para cada una de las variables del proyecto. La alumna SC concluye sobre la tendencia que tienen las personas a pensar que deben salir un número elevado de rachas, debido a la no apreciación de la independencia de los lanzamientos reales de la moneda.

*"En primer lugar, podemos decir que los alumnos creen que la racha mayor de caras es baja en torno a tres, descartando valores que se dan en la realidad (rachas de 4, 5 y 6), lo que hace pensar que la concepción de la aleatoriedad obliga a rachas pequeñas. En cuanto al número de rachas se observa una tendencia en la secuencia simulada a valores elevados mientras que en la realidad ese número de rachas presenta una distribución menos uniforme. Esto hace pensar que los alumnos entienden la aleatoriedad como cambio más o menos constantes en los sucesos de salir cara o salir cruz"* (Alumna SC).

**Conclusiones incorrectas**

Son muchos los estudiantes que fallan en la obtención de conclusiones en el proyecto, incluso cuando hayan realizado gráficos o cálculo de estadísticos. A continuación vamos a analizar y clasificar estos casos:

- *Comparan datos reales y simulados, esperando que sean iguales*. Se trata de alumnos que no perciben la impredecibilidad de los experimentos aleatorios, identificando “buena intuición” con capacidad de obtener exactamente los mismos resultados en el experimento real y simulado, es decir mostrando la ilusión de control descrita por Langer (1975). Esta es la categoría de mayor porcentaje dentro de los alumnos que realizan conclusiones (ver tabla 4.7.1), por lo que encontramos muchos y diversos ejemplos. Todos estos alumnos tienen la concepción común de que una buena intuición correspondería a que la secuencia simulada sea lo más parecida posible a la real, sin tener en cuenta ningún análisis estadístico o comparar características de las distintas distribuciones.

El siguiente ejemplo se trata de un alumno que realiza un gráfico estadístico para cada uno de los pares de variables del proyecto, de nivel de complejidad semiótica 4. El alumno considera que una buena intuición consistiría en que los resultados de las variables fuesen parecidos o iguales en las secuencias real y simulada, y por lo tanto los gráficos fuesen parecidos. El alumno no usa el potencial de los gráficos construidos; pues si hubiese sido capaz de extraer información de estos, al ser correctos y del nivel superior de complejidad, le hubiesen permitido extraer conclusiones sobre los valores esperados, la dispersión y la independencia.

> *“Mi valoración es que lo real y lo simulado están muy alejados de ser iguales. Parece que en el apartado número de caras se ve una aproximación en los resultados, siendo la clase en general más intuitivos en los resultados del número de caras concretamente en el de 11 veces cara. En los otros apartados no presentan intuición” (*Alumno DC).

Otro ejemplo claro dentro de esta categoría es el siguiente, en el cual la alumna HG, directamente de la tabla de datos que dio el profesor después de la realización del experimento en la clase, compara los resultados individuales obtenidos por cada uno de los estudiantes para las distintas variables y observa si estos coinciden o no en las distintas secuencias. Considera que una persona completamente intuitiva es aquella que consigue que en su resultado individual los valores de las tres variables del proyecto, coincidan con los valores que toman al lanzar realmente la moneda:

> *“14 personas de la clase no son nada intuitivas, 13 personas son el 80% o 90% intuitivas y 9 personas*

*son muy intuitivas (100%). Así pues, si unimos las 13 personas intuitivas con las 9 personas muy intuitivas, tenemos un total de 22 personas de clase bastante intuitivas de las 36 personas que hay. Por consiguiente más de un 50% de la clase tiene buena intuición"* (Alumna HG).

- *Evalúan incorrectamente promedios o estadísticos de dispersión o ambos.* Como se comentó al analizar los niveles de lectura, algunos estudiantes estiman incorrectamente la moda o media, o bien no son capaces de utilizar el rango para sacar sus conclusiones. Por ello fallan en la conclusión sobre la pregunta planteada. Sólo incluimos un ejemplo, ya que anteriormente aparecieron otros donde los estudiantes estiman incorrectamente los estadísticos de posición central o dispersión.

Por ejemplo, el alumno JAB, realiza una comparación muy imprecisa de las distribuciones real y simulada de la variable número de caras. Este alumno en particular realiza gráficos correctos de nivel de complejidad semiótica 3, pero no utiliza la información que puede extraer de dichos gráfico en la obtención de sus conclusiones. Aunque sus representaciones gráficas muestran claramente que las dos secuencias son similares con respecto a los valores medios pero muestran diferencias importantes con respecto a la dispersión, el alumno falla en la interpretación de estos valores:

*"En general los alumnos tienen buena intuición, ya que se han acercado bastante a la secuencia real. En el análisis del número de caras observamos que los datos de las dos secuencias son muy parecidos"* (Alumno JAB).

- *No tienen en cuenta los datos y sólo consideran sus ideas previas.* Algunos futuros profesores, a pesar de realizar el proyecto utilizando los resúmenes o gráficos estadísticos que creyeron adecuados, no son capaces de poner en relación el trabajo estadístico realizado con la pregunta a resolver. Es decir, no utilizan los resultados obtenidos en sus análisis estadísticos para obtener una conclusión sobre las intuiciones que tienen los estudiantes sino que basan dichas conclusiones en ideas previas. Mostramos a continuación unos ejemplos:

La alumna BC realiza una reflexión sobre el azar, mostrando concepciones erróneas al expresar su creencia en cómo se podrían predecir los resultados en un fenómeno aleatorio. Después de dicha reflexión llega a la conclusión de que la intuición de los alumnos es buena, pero sin basar su respuesta en ninguno de los resultados que obtuvo en el análisis de los datos:

> *"Si el término aleatorio depende del azar, y el azar es casualidad, que implica algo imprevisible, ¿Cómo se pueden predecir los resultados?, ¿es pura casualidad?, ¿Hay más probabilidad que salgan números comprendidos entre el 7 y el 14?, en mi opinión habría que repetir la experiencia un número suficiente de veces para evaluar la aleatoriedad del experimento. En conclusión podemos afirmar que la intuición de los alumnos es buena"* (Alumna BC).

El alumno SG pone de manifiesto sus conocimientos sobre la aleatoriedad. Al tratarse de una tarea que tuvieron que realizar en casa, los estudiantes pudieron recolectar información en la que basar este tipo de explicaciones. Este estudiante para cerrar su informe escrito sobre el proyecto de datos no tiene en cuenta los resultados que fue obteniendo a lo largo del desarrollo del proyecto ni los relaciona con la pregunta que tiene que responder.

> *"La aleatoriedad es un campo de definición que, en matemáticas, se asocia a todo proceso cuyo resultado no es previsible más que en razón de la intervención del azar. El resultado de todo suceso aleatorio no puede determinarse en ningún caso antes de que este se produzca"* (Alumno SG).

- *Conclusiones anecdóticas.* Son alumnos que observan una característica de alguna de las variables en las secuencias real y simulada, por ejemplo, si en el número de caras hay mayor número de caras o cruces o en el número de rachas, si hay mayor número de rachas de caras que de cruces o viceversa. Atendiendo a estas características los alumnos obtienen conclusiones, no relacionadas con la pregunta:

> *"Pienso que los alumnos en la secuencia simulada la proporcionalidad de cara es mayor que la de cruz porque piensan que favorece más que la cruz. Esto creo que se debe a la influencia de la cultura, de la religión, del entorno en que se desenvuelve y a las diversas circunstancias de cada uno"* (Alumna LS).

- *Conclusiones expresadas de manera muy imprecisa.* Muchos futuros profesores de nuestra muestra explican las conclusiones a las que llegan de manera muy imprecisa. Por ello es difícil saber a qué hacen referencia y en qué basan sus conclusiones.

El alumno FMG compara las variables número de caras y número de rachas en las secuencias real y simulada, obteniendo una conclusión de resulta difícil de interpretar, ya que no hace referencia en qué se basa para llegar a esta conclusión. No queda claro qué es lo que considera margen de error ni en qué parámetro considera superior a la distribución. En esta ocasión el alumno muestra falta de habilidades para expresar su conclusión.

*"Las conclusiones que podemos extraer tras el análisis de datos es que en la secuencia simulada es un poco superior a la secuencia real aunque dentro de un margen de error de +-1, al igual ocurre con el número de rachas"* (Alumno FMG).

El alumno DB obtiene una conclusión imprecisa. Puede parecer que basa su conclusión en sus análisis, pues al decir que "la intuición del grupo gira en torno a 9 podemos suponer que hace referencia a alguno de los promedios para el número de caras. Aún así debería acompañar dicha argumentación con una mayor precisión para que resultase comprensible para otras personas que pudiesen leer su informe realizado sobre el proyecto.

*"La intuición general del grupo gira en torno a 9, son 40 y un 60% con respecto a los resultados obtenidos aproximadamente"* (Alumno DB).

En las tablas 4.7.1 y 4.7.2 resumimos los datos. El porcentaje de estudiantes que no concluyen es alto para las tres variables (20,29% para el número de caras, 32,85% para el número de rachas  y 41,54% para la longitud de la racha mayor). El tipo de conclusión más frecuente en todas las variables, es incorrecta y consiste en *Comparan datos reales y simulados esperando sean iguales* (23,19% para el número de caras, del 22,22% para el número de rachas y del 18,84% para la racha más larga). Como hemos visto anteriormente estos alumnos muestran una concepción errónea sobre la aleatoriedad, ya que asocian una buena intuición a la igualdad de las secuencias simuladas y reales con respecto al menos a alguna de sus características.

Tabla 4.7.1. Distribución de estudiantes según conclusión para las distintas variables

| | | Número de caras | Número de rachas | Racha más larga |
|---|---|---|---|---|
| Correctas | Conclusiones correctas | 8(3,86) | 3(1,45) | 3(1,45) |
| | Conclusiones correctas mal expresadas | 18(8,69) | 7(3,38) | 8(3,86) |
| Parcialmente Correctas | Comparan promedios | 15(7,25) | 3(1,45) | 6(2,90) |
| | Comparan medidas de dispersión | 9(4,35) | 7(3,38) | 5(2,42) |
| | Comparan gráficas | 2(0,97) | 4(1,93) | 2(0,97) |
| Incorrectas | Comparan datos reales y simulados esperando sean iguales. | 48(23,19) | 46(22,22) | 39(18,84) |
| | Evalúan mal promedios o dispersión | 2(0,97) | 3(1,45) | 2(0,97) |
| | Ideas previas sin tener en cuenta sus datos | 36(17,40) | 32(15,46) | 30(14,50) |
| | Conclusiones anecdóticas. | 6(2,90) | 7(3,38) | 6(2,90) |
| | Conclusiones muy imprecisas. | 21(10,14) | 27(13,04) | 20(9,67) |
| | No concluyen | 42(20,29) | 68(32,85) | 86(41,55) |

El segundo tipo de conclusión más frecuente con respecto a las tres variables es también incorrecta y consiste en considerar sus *ideas previas sin tener en cuenta sus datos* (17,40% para la variable número de caras, del 15,46% para el número de rachas y del 14,50% para la longitud de la racha mayor). Este alto porcentaje muestra la dificultad que tienen muchos alumnos de poner en relación el trabajo estadístico que realizan a lo largo del trabajo con el proyecto con la pregunta que motiva dicho proyecto y a la cual tienen que dar una respuesta. Estos alumnos sienten que sin dar una respuesta el informe de su trabajo quedaría incompleto, pero no encuentran relación entre los estadísticos calculados o los gráficos realizados y la pregunta que se les hizo sobre las intuiciones de los alumnos de su clase.

En la tabla 4.7.1 se puede observar que el porcentaje de alumnos que obtienen *conclusiones muy imprecisas* también es alto dentro de las tres variables. Unidos estos porcentajes a otras conclusiones, incluso correctas, también expresadas de manera imprecisa, indican la falta de habilidades de comunicación escrita de los futuros profesores.

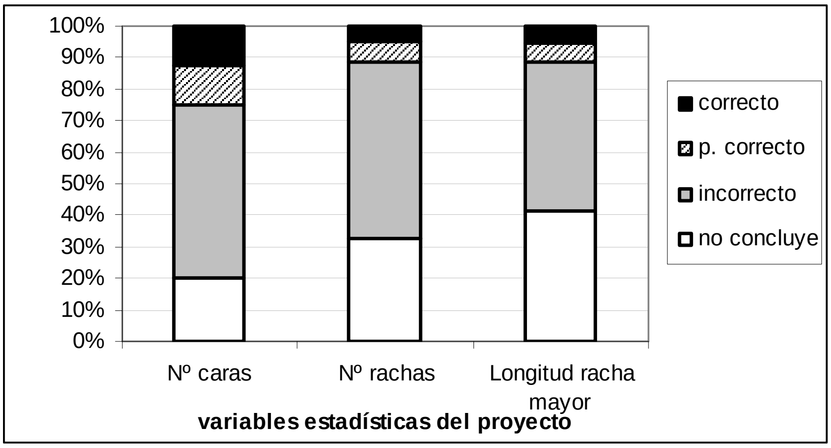
Tabla 4.7.2. Resumen de conclusiones en las tres variables

| Corrección de conclusiones | Número de caras | Número de rachas | Racha más larga |
|---|---|---|---|
| No concluyen. | 42(20,29) | 68(32,85) | 86(41.54) |
| Conclusiones incorrectas. | 113(54,59) | 115(55,56) | 97(46.86) |
| Conclusiones parcialmente correctas. | 26(12,56) | 14(6,76) | 13(6,28) |
| Conclusiones correctas | 26(12,56) | 10(4,83) | 11(5,31) |

Los datos se resumen en la tabla 4.7.2 y figura 4.7.1 e indican una pobre capacidad de conclusión en los estudiantes, que aumenta en las variables relacionadas con las rachas que son menos familiares con los estudiantes. Las diferencias son estadísticamente significativas en el test chi- cuadrado (Chi=33,05; gl=6; p= 0,0000), al contrario que al comparar las variables respecto al nivel de complejidad semiótica o los errores. Esto sugiere que las conclusiones sobre las rachas y racha más larga fueron más difíciles de obtener, debido, como hemos señalado a la poca familiaridad de los estudiantes con esta variable. También apoya a Moore (1999) quien destaca la importancia del conocimiento del contexto en la interpretación de los datos por parte de los estudiantes.

Como resumen de este apartado sugerimos que sería importante mejorar las competencias en el trabajo con proyectos de los futuros profesores, ya que el trabajo con proyectos estadísticos se recomienda en el currículo de educación primaria y estos futuros profesores evidentemente no están preparados para esta metodología de enseñanza.

Figura 4.7.1. Porcentaje de conclusiones de los estudiantes según su corrección en cada variable




## 4.7.2. RELACIÓN ENTRE GRÁFICAS CONSTRUIDAS Y CONCLUSIONES

A continuación se analiza para cada variable, la relación existente entre los gráficos producidos y las conclusiones finales a las que llegan los alumnos. En primer lugar, se estudia la influencia de construir o no gráfico sobre las conclusiones y seguidamente la influencia del nivel de complejidad del gráfico sobre las mismas. Los alumnos podrían obtener conclusiones correctas o parcialmente correctas sin necesidad de la realización de gráficos, pero se desea analizar hasta qué punto la realización de representaciones gráficas es una herramienta útil para obtener información relevante en la resolución de este tipo de actividades.

**Número de caras**

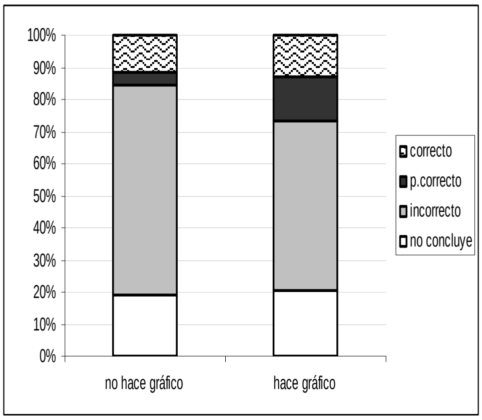
En la figura 4.7.2 se muestra la distribución de los estudiantes según si construye o no gráficos y la conclusión final obtenida. Se pueden observar que la cantidad de alumnos que realiza alguna representación gráfica en la resolución de su proyecto es mucho mayor que los que no realizan gráficos.

El porcentaje de conclusiones correctas es mayor dentro del grupo de alumnos que produjeron gráficos aunque la diferencia no es muy grande (12,71% del total de alumnos que construyen gráficos y 11,54% cuando no lo construyen), aunque sube cuando se suma el porcentaje de alumnos que al menos obtienen una conclusión parcial (26,52% frente a 15,93%, si no hacen gráfico). El porcentaje de alumnos que no concluye es bastante parecido dentro de los que realizan gráficos y los que no y el de conclusiones incorrectas es del 53,04% en los alumnos que realizan gráficos, aumentando al 65,38% en los que no los construyen. Como resumen, la utilización de gráficos estadísticos parece ayudar a los alumnos en la toma de conclusiones del proyecto con respecto al número de caras.

Figura 4.7.2. Distribución de estudiantes, según conclusiones y realización de gráficos.

| Realiza Gráfico | Conclusiones al proyecto | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** |
| No | 3(11.54) | 1(3.85) | 17(65.38) | 5(19.23) |
| Si | 23(12.71) | 25(13.81) | 96(53.04) | 37(20.44) |

1=correcto; 2= parcialmente correcto; 3= incorrecto; 4= no concluye



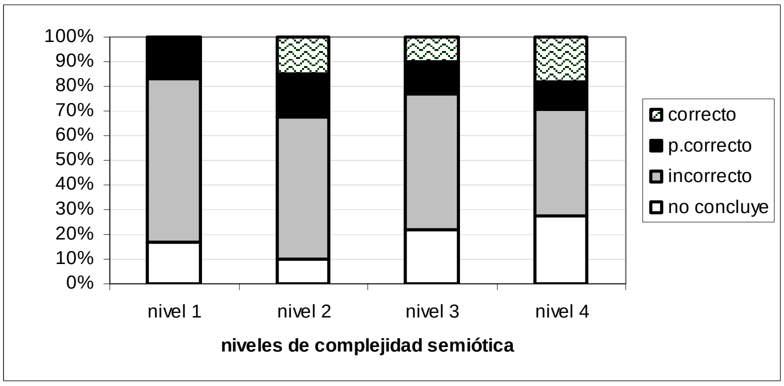

En la tabla 4.7.3 y figura 4.7.3. mostramos la distribución de estudiantes que presentaron gráficos para el estudio del número de caras, según el nivel de complejidad semiótica y la conclusión final obtenida. El mayor porcentaje de conclusiones incorrectas se da dentro del nivel 1 de complejidad semiótica, aunque sólo 6 alumnos construyen gráficos de este nivel. Ninguno de ellos obtiene una conclusión correcta. En el resto de niveles no podemos observar una tendencia clara. Observamos que según aumenta el nivel de complejidad, aumenta el porcentaje de alumnos que no concluyen (de 10% en el nivel 2 hasta 27,27% en el nivel 4), posiblemente al incrementarse la dificultad de interpretación. El mayor porcentaje de conclusiones parcialmente correctas se da en el nivel 2 (17,5%).

Tabla 4.7.3. Distribución de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica y conclusión final obtenida para el número de caras.

| Categorías de gráfico construido | Conclusión | | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** | |
| N1. Representa sólo sus datos | 0 (0) | 1(16,67) | 4(66,67) | 1(16,67) | 6 |
| N2. Representa resultados individuales | 6 (15,0) | 7 (17,5) | 23(57,5) | 4(10,0) | 40 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 9(9,89) | 12(13,19) | 50(54,95) | 20(21,98) | 91 |
| N4. Gráficos conjuntos | 8(18,18) | 5(11,36) | 19(43,18) | 12(27,27) | 44 |
| Total | 23 | 25 | 96 | 37 | 181 |

1= correcto; 2= parcialmente correcto; 3= incorrecto; 4= no concluye

Figura 4.7.3. Clasificación de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica y conclusión para el número de caras.




En cambio el mayor porcentaje de respuestas correctas se da entre los alumnos que producen gráficos de nivel 4 (18,18%), seguido por los alumnos que construyen gráficos de nivel 2 (15%) y por último dentro del nivel 3 (9,89%).

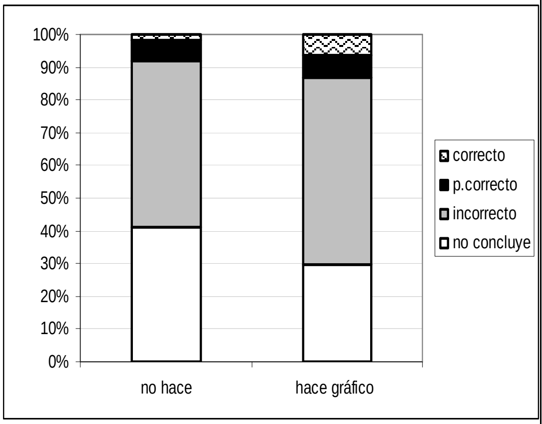
**Número de rachas**

Hubo muchos alumnos que no obtuvieron conclusiones para esta variable, limitándose a hacer cálculos estadísticos, posiblemente debido a la menor familiaridad con las rachas.

Figura 4.7.4. Distribución de estudiantes, según conclusiones y realización de gráficos.

| Realiza Gráfico | Conclusiones al proyecto | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** |
| No | 1(1,64) | 4(6,56) | 31(50,82) | 25(40,98) |
| Si | 9(6,16) | 10(6,85) | 84(57,53) | 43(29,45) |

1=correcto; 2= parcialmente correcto; 3= incorrecto; 4= no concluye




En la figura 4.7.4 se muestra la distribución de los estudiantes según si realizan o no gráficos y la conclusión final obtenida para la variable número de rachas. El porcentaje de alumnos que no concluye es considerablemente mayor para los que no construyen gráficos (40,98%) y sólo del 29,45% para el caso de alumnos que presentan gráfico. En estos alumnos hay mayor porcentaje de conclusiones incorrectas (57,53% frente a 50,82% si no lo hacen) ; la proporción de conclusiones parcialmente correcta es parecida y encontramos una proporción ligeramente superior de conclusiones correctas.

En la tabla 4.7.4 y figura 4.7.5. mostramos la distribución de estudiantes que realizaron gráficos para el número de rachas, según el nivel de complejidad semiótica y la conclusión final obtenida. Observamos que 3 de los 6 alumnos que realizan gráfico de nivel 1 concluyen incorrectamente y los 3 restantes no concluyen, por lo que reafirmamos que este tipo de gráfico no ayuda a los alumnos en la obtención de conclusiones.

Tabla 4.7.4. Distribución de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica y conclusión final obtenida para el número de rachas.

| Categorías de gráfico construido | Conclusión | | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| N1. Representa sólo sus datos | 0 (0) | 0 (0) | 3 (50) | 3 (50) | 6 |
| N2. Representa resultados individuales | 0(0) | 3(13,04) | 17(73,91) | 3(13,04) | 23 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 4(5,19) | 4(5,19) | 45(58,44) | 24(31,17) | 77 |
| N4. Gráficos conjuntos | 5(12,5) | 3(7,5) | 19(47,5) | 13(32,5) | 40 |
| Total | 9 | 10 | 84 | 43 | 146 |

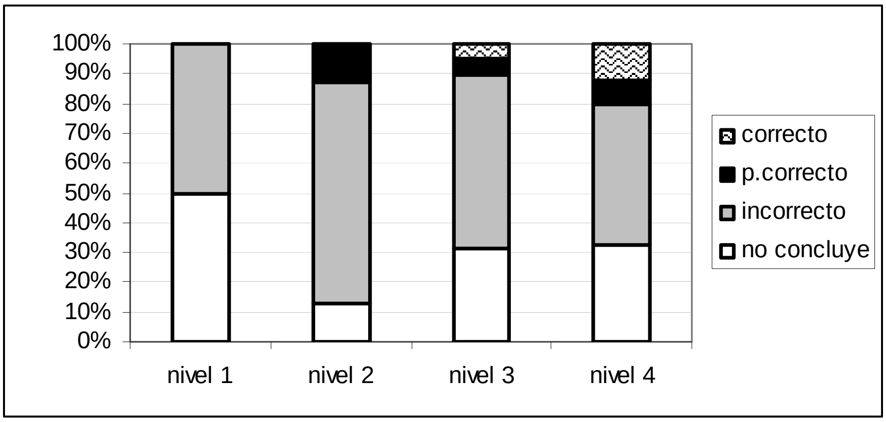
1= correcto; 2= parcialmente correcto; 3= incorrecto; 4= no concluye

En el resto de niveles, el porcentaje de alumnos que no concluyen aumenta con el nivel de complejidad de los gráficos (del 13,04% de alumnos que hacen gráficos de nivel 2 al 32,5% de alumnos que realizan gráficos de nivel 4). Por lo que se observa, que para el caso del número de rachas, conforme aumenta el nivel de complejidad en la construcción de los gráficos, más difícil les resulta a los alumnos obtener una conclusión.

Como en el caso anterior, el grupo de alumnos que hacen gráficos de nivel 2, tienen el mayor porcentaje de conclusiones parcialmente correctas (13,04%) e incorrectas (73,91%). La cosa cambia si las conclusiones son correctas, ya que se muestra que los únicos alumnos que obtienen una conclusión correcta al proyecto son alumnos que realizan gráficos dentro de los niveles 3 y 4.

En resumen, los alumnos que realizan gráficos de niveles 3 y 4 de complejidad semiótica cometen menos errores que los que realizan gráficos de nivel 2, y además el porcentaje de conclusiones correctas es mayor. Sin embargo dentro de los dos niveles superiores de construcción de gráficos estadísticos, existe un alto porcentaje de alumnos que no concluyen, bastante superior al porcentaje de alumnos que no concluyen y construyen gráficos de nivel 2. Esto puede deberse a que un mayor nivel de complejidad en la construcción de los gráficos requiere mayores habilidades para obtener información relevante en la obtención de las conclusiones.

Figura 4.7.5. Clasificación de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica y conclusión final obtenida para el número de rachas.



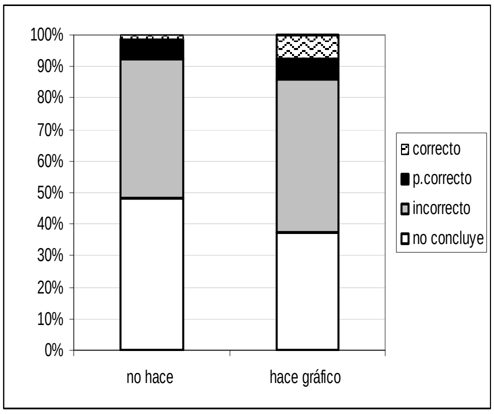

**Longitud de la racha mayor**

En la figura 4.7.6 mostramos la distribución de estudiantes según realizan o no gráficos y la corrección de la conclusión final obtenida. Para la longitud de la racha mayor sólo 79 de los 207 alumnos de la muestra, no utilizan gráficos para el estudio de dicha variable y casi la mitad de ellos no llegan a obtener una conclusión (48,10%), siendo el porcentaje menor cuando realizan algún gráfico estadístico (37,50%).

Figura 4.7.6. Distribución de estudiantes, según conclusiones y realización de gráficos.

| Realiza Gráfico | Conclusiones al proyecto | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** |
| No | 1(1,26) | 5(6,33) | 35(44,30) | 38(48,10) |
| Si | 10(7,81) | 8(6,25) | 62(48,44) | 48(37,50) |

1=correcto; 2= parcialmente correcto; 3= incorrecto; 4= no concluye




Como para el número de rachas, el porcentaje de conclusiones incorrectas es mayor para los alumnos que realizan gráficos (48,44% y 44,30% para alumnos que no realizan gráficos). Sin duda esta parte del proyecto fue las que más trabajo les costó, pero el que lleguen a dar una conclusión, aunque sea incorrecta, muestra que los estudiantes tratan de relacionar trabajo estadístico realizado con el contexto el proyecto dando una respuesta sobre las intuiciones del azar.

Como en los casos anteriores, el porcentaje de respuestas correctas es mayor dentro del conjunto de alumnos que realizan algún gráfico (7,81%) que en el caso de no realizar gráficos (1,26%). Si tenemos en cuenta el porcentaje de alumnos que una conclusión al menos parcialmente correcta, el porcentaje es del 14,06% frente al 7,59% en los que no hacen gráficos. Por lo tanto, también para el estudio de la longitud de la racha mayor, la realización de gráficos parece ayudar a la obtención de conclusiones.

En la tabla 4.7.5 y figura 4.7.7 mostramos la distribución de estudiantes que realizaron gráficos para el estudio de la longitud de la racha mayor, según el nivel de complejidad semiótica y la conclusión final obtenida. Sólo tres estudiantes construyen un gráfico estadístico a nivel de complejidad 1, y 2 de ellos obtienen una conclusión incorrecta; otros no da una respuesta final a la pregunta del proyecto.

Para el resto de niveles, el porcentaje de alumnos que no concluye es prácticamente el mismo (aproximadamente del 38% en cada nivel). Las conclusiones incorrectas disminuyen según aumenta el nivel de complejidad semiótica del gráfico (52,38% de las conclusiones de los alumnos que realizan gráficos de nivel 2, disminuyendo hasta el 43,24% de conclusiones incorrectas dentro de los alumnos que realizan gráfico de nivel 4).

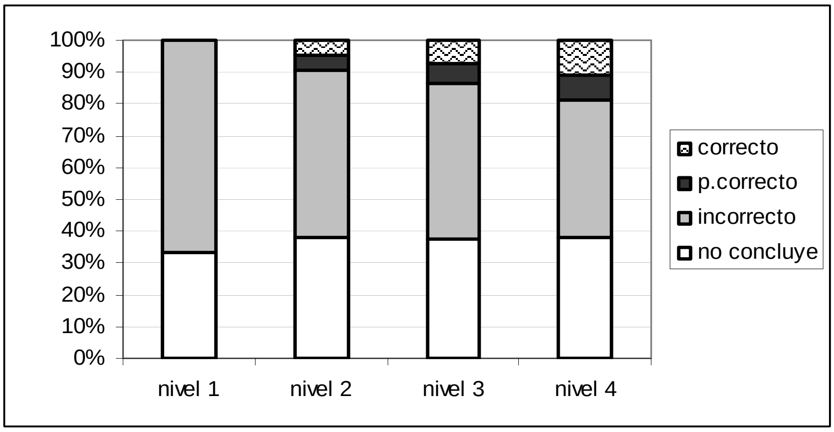
Tabla 4.7.5. Distribución de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica y conclusión final obtenida para la longitud de la racha mayor.

| Categorías de gráfico construido | Conclusión | | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** | |
| N1. Representa sólo sus datos | 0(0) | 0(0) | 2(66,67) | 1(33,33) | 3 |
| N2. Representa resultados individuales | 1(4,76) | 1(4,76) | 11(52,38) | 8(38,1) | 21 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 5(7,46) | 4(5,97) | 33(49,25) | 25(37,31) | 67 |
| N4. Gráficos conjuntos | 4(10,8) | 3(8,11) | 16(43,24) | 14(37,84) | 37 |
| Total | 10 | 8 | 62 | 48 | 128 |

1= correcto; 2= parcialmente correcto; 3= incorrecto; 4= no concluye

El porcentaje de conclusiones parcialmente correctas mejora con el nivel de complejidad de los gráficos construidos (4,76% dentro del nivel 2, el 5,97% en el nivel 3 y el 8,11% en el nivel 4). Ocurre algo similar para las conclusiones correctas, donde el mayor porcentaje de conclusiones correctas se da dentro del conjunto de alumnos que construyen los gráficos pertenecientes al nivel superior de complejidad semiótica (10,81%), seguido de un 7,46% de respuestas correctas dentro de alumnos que trabajan con representaciones gráficas de nivel 3 y un 4,76% de conclusiones correctas para dentro del conjunto de alumnos que hacen gráficos de nivel 2.

Figura 4.7.7. Clasificación de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica y conclusión final obtenida para la longitud de la racha mayor




Por tanto para el estudio de la longitud de la racha mayor se observa una tendencia clara de que cuanto mayor es el nivel de complejidad de los gráficos que construyen los alumnos, mejor son las conclusiones que obtienen.

**Síntesis de resultados**

En la tabla 4.7.6 presentamos los datos sobre nivel de complejidad semiótica del gráfico y nivel de lectura alcanzado para el global de las tres variables, donde se observan mejora las tendencias comentadas para cada variable.

Tabla 4.7.6. Distribución de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica y conclusión final obtenida para las variables combinadas

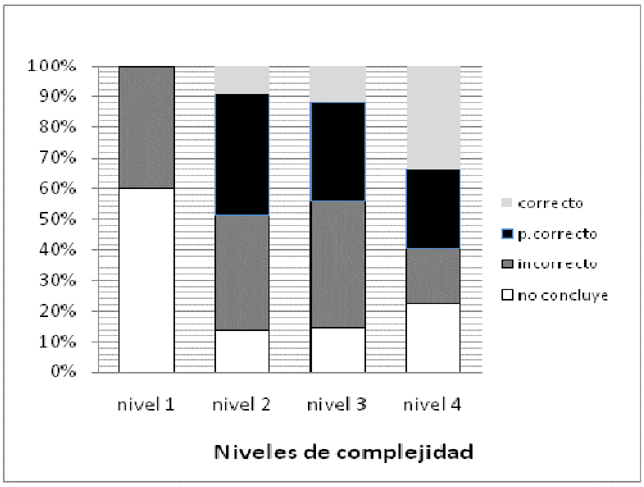
| Categorías de gráfico construido | Conclusión | | | | Total en el nivel |
|---|---|---|---|---|---|
| | **1** | **2** | **3** | **4** | |
| N1. Representa sólo sus datos | 0(0) | 0(0) | 2(40,0) | 3(60,0) | 5 |
| N2. Representa resultados individuales | 4(9,3) | 17(39,53) | 16(37,21) | 6(13,95) | 43 |
| N3. Gráficos separados para cada muestra | 21(12) | 56(32,0) | 72(41,14) | 26(14,86) | 175 |
| N4. Gráficos conjuntos | 32(34,04) | 24(25,53) | 17(18,09) | 21(22,34) | 94 |
| Total | 57 | 97 | 107 | 56 | 317 |

1= correcto; 2= parcialmente correcto; 3= incorrecto; 4= no concluye

Así vemos que en los gráficos de nivel 4 se llega al 34% de conclusiones correctas y que el porcentaje de conclusiones correcta aumenta con el nivel del gráfico. Si se suman respuestas correctas y parcialmente correctas, nos acercamos al 60% de los alumnos que realizan gráficos a nivel 4 y también hay un salto claro de los gráficos de nivel 1 (sólo el 9,3%) a los niveles 2 y 3 (que aparecen igualados).

La proporción de conclusiones incorrectas es parecida en los gráficos de nivel 1, 2 y 3 y se reduce casi a la mitad en los gráficos de nivel 4. Por último la proporción de no conclusiones es mucho mayor en los gráficos de nivel 1 (aunque al ser pocos datos no son concluyentes), pero aumentan ligeramente en los gráficos de nivel 4, respecto a los de nivel 2 y 3, por las dificultades ya mencionadas de interpretación de los gráficos.

Figura 4.7.6. Clasificación de estudiantes, según nivel de complejidad semiótica y conclusión final obtenida para las tres variables combinadas




Al estudiar las posible significación de estas diferencias mediante el test chi- cuadrado, el resultado fue estadísticamente muy significativo: Chi=40,45; d.g.= 9; p= 0,0000), por lo que debe rechazarse la hipótesis de independencia entre las variables.

En consecuencia, los resultados indican una influencia de la complejidad del gráfico sobre la conclusión obtenida, con un aumento del número de conclusiones correctas de un nivel a otro y un aumento de las conclusiones parcialmente correctas o correctas del nivel 1 al nivel 2 y 3 y de éste al nivel 4. En consecuencia, el nivel de complejidad semiótica del gráfico es también un indicador de su utilidad en la obtención de conclusiones a partir del mismo, así como un indicador de la competencia gráfica de los estudiantes.

## 4.8. CONCLUSIONES SOBRE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS SOBRE LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

En este capítulo se ha realizado un análisis detallado de los gráficos producidos en un proyecto de análisis de datos por los futuros profesores de la muestra. En las primeras secciones se describió la muestra y se realizó un análisis a priori de la actividad, así como de la solución esperada del proyecto. Posteriormente se definió un nivel de complejidad semiótica del gráfico, analizando los errores en los gráficos construidos, los niveles de lectura alcanzados y finalmente las conclusiones obtenidas en el proyecto. Hemos tratado de relacionar estas variables entre sí, así como con el uso del ordenador, a lo largo del capítulo. A continuación resumimos nuestras conclusiones respecto a cada uno de estos puntos, que han sido desarrollados en las anteriores secciones.

**Nivel de complejidad semiótica en los gráficos**

Destacamos, en primer lugar, el interés de llevar a cabo un estudio semiótico de los gráficos construidos por los estudiantes, puesto que ello nos permite mostrar que diferentes representaciones gráficas del mismo conjunto de datos no son equivalentes, en cuanto a la configuración de objetos matemáticos (Godino, 2002) que el alumno pone en juego en su construcción.

La jerarquía definida de niveles de complejidad semiótica parece pertinente, pues aunque el número de estudiantes participantes es moderado y tan sólo analizamos un proyecto de análisis de datos, los resultados parecen indicar que un nivel superior en la jerarquía incide en el nivel de lectura y comprensión del gráfico producido, así como en la obtención de conclusiones correctas al menos parcialmente. Esta jerarquía es un producto original de esta investigación, que sirve para complementar los niveles de comprensión de los gráficos definidos por diferentes autores y ha sido bien aceptada, como se muestra en algunas de nuestras publicaciones (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2009; 2010).

Por otro lado, se puede establecer un paralelismo entre los niveles de lectura de gráficos descritos por Bertin (1967) y asumidos posteriormente por Curcio (1989) con otra terminología y nuestros niveles de complejidad semiótica en la construcción de los gráficos. Esta relación, planteada en principio teóricamente, se ha confirmado posteriormente empíricamente, como resaltaremos más adelante. Observamos también que el nivel de complejidad del gráfico no depende de la variable analizada, y es por tanto una indicación de la competencia gráfica alcanzada por el futuro profesor.

**Errores en la construcción de gráficos**

En la sección 4.5. se han analizado los errores encontrados en los gráficos producidos por los estudiantes, con la finalidad de identificar algunas de las variables relacionadas con los mismos y proporcionar una información útil al formador de profesores. Los gráficos se clasificaron en tres tipos:

1. Gráficos básicamente correctos, que suponen el 47% de los producidos para el número de caras, el 44 % de los producidos para la longitud de la racha mayor y el 46 % para el número de rachas. Aunque algunos de estos gráficos no es estándar o contiene elementos innecesarios, permiten resolver el problema planteado.
2. Gráficos con errores en las escalas, que suponen el 20% de los producidos para el número de caras, el 23 % de los producidos para la longitud de la racha mayor y el 23% para el número de rachas. En nuestros alumnos se confirman algunos errores frecuentes en la construcción de gráficos citados por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) en futuros profesores, pues algunos estudiantes omiten un rótulo correcto y significativo en el gráfico y algunos no centran los intervalos de frecuencias en los histogramas. Hemos encontrado errores no descritos por Bruno y Espinel como utilizar escalas demasiado amplias para el rango de variación de la variable, y valor de la variable, cambiar las líneas rectas por curvas en un gráfico o introducir líneas innecesarias que dificultan su lectura. En este sentido nuestra investigación ha contribuido a caracterizar nuevos errores en los gráficos, no descritos en los antecedentes del trabajo.
3. Gráficos básicamente incorrectos que suponen el resto. Además de los errores ya descritos por Bruno y Espinel en futuros profesores hemos encontrado el consistente en cambiar la variable dependiente e independiente, representando las frecuencias en el eje de las X, error ya señalado en el trabajo de Ruiz (2006). Otros errores no descritos en los antecedentes son: representar el producto de los valores de la variable por su frecuencia; representar en el mismo gráfico frecuencia y variable. En este sentido nuestra investigación ha contribuido a caracterizar nuevos errores en la construcción de gráficos estadísticos.

En resumen se confirma que la construcción e interpretación de gráficos (incluso elementales) es una habilidad altamente compleja, ya resaltada por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) en futuros profesores, a pesar de que han de transmitir el lenguaje gráfico a sus alumnos y utilizarlo como herramienta en su vida profesional. Menos de la mitad de los alumnos que construyen gráficos lo hacen correctamente (o casi correctamente). Tampoco hemos encontrado diferencias en la frecuencia de errores en las diferentes variables analizadas, por lo que también este punto es un indicador de la competencia gráfica alcanzada por los futuros profesores.

Son sólo 50 los estudiantes que realizan sus gráficos con ayuda del ordenador, es decir sólo una cuarta parte de la muestra y menos de la tercera parte de los que realizan gráficos. Deducimos que el manejo de la hoja Excel es todavía poco familiar a estos futuros profesores, a pesar de haber realizado, en la asignatura de Matemáticas y su Didáctica en primer año algunas prácticas con este recurso, precisamente en el tema de estadística. De ellos, sólo el 40% usa correctamente las opciones para construir sus gráficos, de lo que deducimos la necesidad de formación al respecto, si queremos que los futuros profesores sigan las recomendaciones curriculares sobre introducción de Excel en la clase de estadística. Los errores en los gráficos se agravan con el uso del software, Mientras que el 48,15 % de gráficos realizado a mano fueron correctos este porcentaje cae al 39,23% en el caso de usar ordenador, subiendo el porcentaje de gráficos incorrectos del 26,99% al 47,69%.

Observamos también que la proporción de gráficos correctos, parcialmente correctos e incorrectos depende del nivel de complejidad semiótica, aumentando la corrección del nivel con el mayor nivel de complejidad. Nuestros datos apoyan la hipótesis de que el mayor nivel de complejidad semiótica en la construcción de gráficos implica también la producción de un menor número de errores, sobre todos los relacionados con características importantes de los gráficos o elección del mismo. El mismo patrón se observa en las diferentes variables, por lo cual este resultado no depende de la variable analizada, sino de la competencia adquirida por el estudiante.

## Capacidad de lectura de gráficos

Al analizar la lectura de los gráficos hecha por los estudiantes, observamos que aproximadamente el 30% estudiantes que realizan gráficos no los leen y, en caso de obtener conclusiones al proyecto que se les planteó, lo hacen sin ayudarse de la información que les puedan proporcionar los gráficos. Ello puede ser un efecto de bajos niveles de lectura o del contrato didáctico, pues en las clases habituales de estadística que han tenido en primaria y secundaria, el objetivo de los problemas era simplemente construir el gráfico, no siendo común el que se les pida una interpretación. Incluimos en este porcentaje algunos pocos alumnos que realizan gráficos erróneos los cuales son difíciles de leer o interpretar incluso por ellos mismos.

Elaborados los gráficos, entre el 11 y el 14 % según la variable, realizan interpretaciones claramente incorrectas, debido a que no alcanzan un nivel de lectura suficiente o bien confunden elementos del gráfico. El resto de los estudiantes lee el gráfico, aunque a diferente nivel de lectura, según la clasificación de Bertin (1967):

- *El nivel de lectura de extracción de datos*, se produce en 22 a 25% de estudiantes según la variable. Estos estudiantes analizan sólo cualitativamente la forma del gráfico, valores aislados de la variable; el máximo o mínimo.
- *El nivel de extracción de tendencias* (24 a 16 % según la variable) lo encontramos en estudiantes que leen los promedios o la dispersión (pero no las dos cosas a la vez); a veces combinado con un análisis cualitativo de la forma de la gráfica.
- *El nivel de análisis de estructura* (13 a 11 % según la variable) se da en los estudiantes que simultáneamente son capaces de leer los promedios y rango y muestran de este modo un análisis de la distribución de las variables.

Estos datos indican una pobre capacidad de lectura de los gráficos en los futuros maestros. Sin embargo cambian un poco si se considera los niveles de lectura, dentro del nivel de complejidad semiótica del gráfico. En este caso, y para cada una de las variables analizadas se obtiene que, según aumenta el nivel de complejidad semiótica en los gráficos que construyen los futuros profesores, aumenta el porcentaje de alumnos que los leen y aumentan asimismo las lecturas en los dos niveles superiores: análisis de la estructura y extracción de tendencias. Aunque, por otro lado, es mayor el número de lecturas incorrectas debido al mayor número de conceptos que el estudiante ha de manejar al leer estos gráficos.

**Obtención de conclusiones en el proyecto**

Independiente del interés de relacionar la complejidad del gráfico con su interpretación y conclusión, es un hecho preocupante que un número tan pequeño de estudiantes llegue a una conclusión completa en el proyecto planteado. En dicho proyecto se pretende que los futuros profesores recorran todos los pasos del método estadístico, desde el planteamiento del problema, la definición de las preguntas, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones.

También se pone en práctica el proceso de modelización, pues, según Henry (1997) "*un modelo es una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real, de un sistema de relaciones o de un proceso evolutivo que surge de una descripción de la realidad"* (pg. 78). Como indicamos en y Ruiz, Arteaga y Batanero (2009) y Ruiz, Batanero y Arteaga (en prensa), en nuestro proyecto la realidad se ha simplificado y abstraído pasando de la idea general de intuición al experimento concreto y la definición de variables aleatorias (número de caras en las secuencias real y simuladas). Además de trabajar con las variable estadísticas correspondientes, los estudiantes han de interpretar los resultados del trabajo matemático realizado con el modelo (distribuciones de datos obtenidas) en el contexto del problema (traducir estos resultados a lo que indican respecto de las intuiciones de los estudiantes).

Es precisamente este último paso (puesta en relación del resultado con la pregunta planteada) el que ha causado más dificultad, por la falta de familiaridad de los futuros profesores con proyectos estadísticos y actividades de modelización, a pesar del interés que hoy día se da en matemáticas a estas actividades (Biehler y Leiss, 2010, Ruiz, en preparación). Puesto que estas actividades se recomiendan hoy en la enseñanza de la estadística en educación primaria, nos parece necesario que los futuros profesores comprendan y puedan llevar a cabo todos los pasos de dicho proceso en actividades similares a la analizada.

Además, el trabajo con proyectos abiertos puede ser especialmente adecuado en el trabajo individual y en grupos recomendados en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior, y por ello pensamos que debieran emplearse en la formación de profesores (Batanero, 2001).

Destacamos también que, en general, la construcción de un gráfico ayuda a la obtención de conclusiones, sobre todo en las variables relacionadas con las rachas. Por otro lado, en el conjunto de alumnos que realizan gráfico de nivel 4 de complejidad semiótica es donde se da el mayor porcentaje de alumnos que no concluyen, aunque es el mayor porcentaje de respuestas correctas. Este tipo de gráficos puede ayudar utilizar la información representada en ellos para obtener una conclusión correcta al proyecto, pero también destacar que su mayor complejidad semiótica dificulta en ocasiones la extracción de información. Esto parece mostrar que la realización de gráficos de nivel 4 en la comparación de dos distribuciones puede ser de gran utilidad, pero que requiere de una instrucción previa sobre cómo leer e interpretar este tipo de representaciones, ya que su mayor nivel de complejidad aumenta el número de habilidades necesarias para su interpretación.

# CAPÍTULO 5.

# EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE LOS PROFESORES A PARTIR DE LA EVALUACION DEL PROYECTO DESARROLLADO


5.1. Introducción
5.2. Descripción de la muestra
5.3. Análisis a priori de la actividad
5.4. Metodología de análisis
5.5. Análisis de la idoneidad epistémica
5.5.1. Situaciones problema
5.5.2. Lenguaje
5.5.3. Definiciones, propiedades y procedimientos
5.5.4. Argumentos
5.5.5. Relaciones
5.6. Análisis de la idoneidad cognitiva
5.6.1. Conocimientos previos
5.6.2. Adaptaciones curriculares
5.6.3. Aprendizaje
5.7. Análisis de la idoneidad afectiva
5.7.1. Intereses y necesidades
5.7.2. Actitudes
5.7.3. Emociones
5.8. Análisis de la idoneidad mediacional
5.8.1. Recursos materiales
5.8.2. Número de alumnos
5.8.3. Tiempo
5.9. Análisis de la idoneidad interaccional
5.9.1. Interacción docente-discente
5.9.2. Interacción entre alumnos
5.9.3. Autonomía y evaluación formativa
5.10. Análisis de la idoneidad ecológica
5.10.1. Adaptación al currículo y apertura a la innovación didáctica
5.10.2. Adaptación socio profesional. Conexiones intra e interdisciplinares
5.11. Síntesis de conocimientos didácticos
5.12. Conclusiones sobre los conocimientos didácticos

## 5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos la segunda parte del estudio empírico, en la que nos acercamos a la evaluación del conocimiento didáctico del contenido de los estudiantes sobre la estadística.

El modelo de ciclo formativo propuesto para futuros profesores por Godino y Batanero (2008) contempla una etapa de estudio matemático en la que se implementa un modelo didáctico específico, que los profesores en formación pueden adaptar de manera crítica a su futura enseñanza, y otra fase de estudio didáctico en la que tienen oportunidad de aplicar las "guías de análisis y reflexión didáctica" a la experiencia de estudio matemático experimentada. En nuestro estudio el modelo didáctico ofrecido en la primera etapa fue la enseñanza de estadística a través de proyectos y en la segunda etapa se suministró a los estudiantes la Guía de Análisis de la Idoneidad Didáctica propuesta por Godino y Batanero (2008), que contenía diferentes apartados de valoración y descriptores de los mismos.

Por tanto, en la primera sesión de la práctica analizada en el capítulo 4, los futuros profesores para dar solución a la pregunta de si el conjunto de la clase tenía o no buenas intuiciones sobre el azar, recogieron datos de un experimento aleatorio, que posteriormente analizaron . Los informes realizados por los futuros profesores fueron los utilizados para el estudio realizado sobre los gráficos estadísticos en el capítulo 4.

En la segunda sesión de la práctica, la actividad se centró en la reflexión didáctica de todo el proceso vivido en el aula. Por ello, y, una vez analizadas las soluciones al proyecto proporcionadas por los estudiantes, se propuso a los alumnos elaborar un análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. Es decir se trataba de que los estudiantes pusiesen en juego sus conocimientos didácticos, para la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio (Godino, 2009).

En lo que sigue se analizan los informes producidos sobre dicho análisis didáctico por una submuestra de 108 futuros profesores. Una vez descrita la muestra, se analiza la actividad que tuvieron que realizar los futuros profesores, se presenta el método y los resultados, finalizando con las conclusiones obtenidas sobre el conocimiento didáctico de los sujetos de la muestra con respecto a la estadística.

## 5.2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

La actividad la llevó a cabo con una parte de la muestra descrita en el capítulo 4, donde hemos analizado con detalle el contexto educativo, la composición de la muestra global y el conocimiento matemático que sobre los gráficos estadísticos mostraron los participantes en el estudio. Los datos para esta segunda parte del estudio también se tomaron la asignatura “Currículo de matemáticas en educación primaria” y fueron parte de una actividad práctica que se realizó la semana siguiente a la dedicada al trabajo con el Proyecto “Comprueba tus intuiciones sobre el azar”.

Aunque todos los estudiantes realizaron la actividad, para el análisis de los datos presentados en este capítulo se seleccionó una submuestra de 108 alumnos, que estaban divididos en tres grupos, impartido cada uno por diferente profesor, aunque la actividad, el material usado y el análisis es el mismo para todos los grupos. Es decir, se analizaron aproximadamente la mitad de los datos disponibles, para hacer el volumen de datos más manejable en el análisis cualitativo y puesto que en una primera revisión no se observaron grandes diferencias en la evaluación de la idoneidad en el resto de los grupos.

Los alumnos habían estudiado previamente el tema y realizado algunos ejercicios en los cuales valoraron la idoneidad didáctica en otros temas. Por otro lado, en la unidad didáctica que tendrían que entregar al final del curso y que sería evaluada en la calificación global de la asignatura, deberían evaluar la idoneidad didáctica de dicha unidad. En lo que sigue describimos el material y las instrucciones recibidas y los resultados obtenidos.

## 5.3. ANÁLISIS A PRIORI DE LA ACTIVIDAD

### 5.3.1. LA ACTIVIDAD

La actividad con la que se tomaron los datos para este capítulo fue la segunda parte de la práctica sobre el proyecto “Comprueba tus intuiciones sobre el azar”, que hemos analizado en el capítulo 4. Como indicamos en dicho capítulo, se dedicó al total de la práctica dos sesiones de clase de dos horas de duración cada una, dentro de la asignatura citada (Currículo de Matemáticas en Educación Primaria). La práctica se relaciona con el cuarto bloque del currículo de matemáticas en la Educación Primaria: *Tratamiento de la información, azar y probabilidad.*

La segunda parte de la práctica se realiza en la segunda de estas sesiones de clase y comienza una vez se han corregido las soluciones al Proyecto analizado en el Capítulo 4. Dicha solución se hizo oralmente por los profesores de los grupos, utilizando un cañón de proyección. Primeramente se explica la solución correcta esperada en el proyecto y sus posibles variantes; por ejemplo, diversos tipos de gráficos correctos que podrían utilizar los estudiantes o diversos estadísticos que podrían haber calculado para realizar las comparaciones.

A continuación, utiliza algunos extractos escaneados de respuestas de los estudiantes al proyecto, para discutir con ellos los errores más frecuentes en los gráficos que habían entregado como parte del proyecto (tales como falta de proporcionalidad en las escalas o valores faltantes en los ejes). También se hace una discusión sobre la parte correcta e incorrecta de las intuiciones de la clase en relación a la aleatoriedad. Aunque lo ideal sería haber corregido dentro del grupo cada proyecto, la falta de tiempo hace necesario que sólo se pueda hacer un resumen de las soluciones. Adicionalmente, el profesor corrige por escrito cada proyecto, para que cada estudiante pueda consultar su solución y ver los errores cometidos durante el módulo de supervisión docente y el horario de tutorías.

Una vez finalizada la corrección de los proyectos con el método anteriormente descrito, se dedica el resto de la sesión de clase al análisis de la idoneidad didáctica. Se comienza la sesión resumiendo y recordando el concepto de idoneidad didáctica y sus tipos, que había sido estudiado en la clase, como parte de la teoría de la asignatura. El profesor se apoya en unas diapositivas resumen y entrega a cada alumno una copia impresa de la *Pauta de análisis de la idoneidad didáctica de Procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática* (Godino y Batanero, 2008; ver Figura 5.3.1). Se motiva a los estudiantes sobre la importancia que, para el profesor tiene, tanto la planificación de la enseñanza, como la posterior reflexión sobre el proceso de estudio vivido en el aula. Todo ello para detectar posibles puntos en los que mejorar la enseñanza.

A continuación se les propone aplicar la pauta de idoneidad didáctica dada para valorar la experiencia de enseñanza de la estadística que ellos mismos vivieron durante el desarrollo del proyecto. Se les recuerda también que las nuevas directrices de Educación Primaria (MEC, 2006 a) sugieren el interés de utilizar proyectos en la enseñanza de la estadística. Se les propone que se vean a sí mismos en el papel de alumnos y al formador de profesores en el de maestro de Educación Primaria y apliquen los diferentes descriptores para analizar la idoneidad didáctica y cada uno de sus componentes.

Figura 5.3.1. Pauta de análisis de la idoneidad didáctica de Procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática

**1. Idoneidad epistémica o matemática**: *Grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) en el proceso de estudio representan bien a los contenidos de referencia.*

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| *Situaciones-problemas* | - Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.<br>- Se proponen situaciones de generación de problemas. |
| *Lenguaje* | - Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas.<br>- Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige.<br>- Se proponen actividades de expresión matemática e interpretación. |
| *Reglas (Definiciones, propiedades, procedimientos)* | - Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.<br>- Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.<br>- Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones propiedades o procedimientos. |
| *Argumentos* | - Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.<br>- Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar. |
| *Relaciones* | - Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, propiedades, etc.) se relacionan y conectan entre sí. |

**2.2. Idoneidad cognitiva:** *Grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.*

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| *Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que en la idoneidad epistémica)* | - Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio).<br>- Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes. |
| *Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales* | - Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. |
| *Aprendizaje* | - Los resultados de la evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidos. |

**2.3. Idoneidad mediacional:** *Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje*.

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| *Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)* | - Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.<br>- Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones. |
| *Número de alumnos, horario y condiciones del aula* | - El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida.<br>- El horario del curso es apropiado.<br>- El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido. |
| *Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)* | - El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida<br>- Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema.<br>- Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión. |

**2.4. Idoneidad afectiva:** *Grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes*

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| *Intereses y necesidades* | - Las tareas tienen interés para los alumnos.<br>- Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional. |
| *Actitudes* | - Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.<br>- Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice. |
| *Emociones* | - Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.<br>- Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas. |

**2.5. Idoneidad interaccional:** *Grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje***.**

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| *Interacción docente-discente* | - El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.).<br>- Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.).<br>- Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento<br>- Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.<br>- Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase. |
| *Interacción entre alumnos* | - Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes.<br>- Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión. |
| *Autonomía* | - Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio. |
| *Evaluación formativa* | - Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos. |

**2.6. Idoneidad ecológica:** *Grado de adaptación curricular, socio-profesional, apertura a la innovación y conexiones intra e interdisciplinares*

| COMPONENTES: | DESCRIPTORES: |
|---|---|
| *Adaptación al currículo* | - Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares. |
| *Apertura hacia la innovación didáctica* | - Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.<br>- Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo. |
| *Adaptación socio-profesional y cultural* | - Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes. |
| *Conexiones intra e interdisciplinares* | - Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares. |

En la Figura 5.3.2 se presentan los objetivos, contenidos y lecturas recomendadas a los estudiantes para esta segunda parte de la práctica. Hacemos notar que en la primera sesión los alumnos habían también estudiado los contenidos matemáticos del tema “tratamiento de la información, azar y probabilidad” y, además, la didáctica específica del tema. Se proporcionó a los estudiantes lecturas por medio de la plataforma docente de la Universidad de Granada.

Figura 5.3.2. Instrucciones a los estudiantes en la segunda parte de la práctica

*Objetivos:*

1. Adquirir competencias para consultar bibliografía sobre didáctica de contenidos específicos de matemáticas.
2. Adquirir competencias para analizar la "idoneidad didáctica" de experiencias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, programadas o implementadas.

*Contenidos:*

Teóricos:

- Didáctica de la estadística en la educación primaria.
- Idoneidad de una propuesta didáctica.

Matemáticos:

- Tratamiento de la información, aleatoriedad, experimentos y sucesos aleatorios, frecuencias, tablas, gráficos, medidas de posición central y dispersión.

*Reactivos y consignas:*

1. Estudiar la "Pauta de análisis de la idoneidad unidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática" entregada en clase.
2. Analizar la programación de una didáctica sobre tratamiento de la información propuesta en el anexo para valorar su idoneidad didáctica, conforme a los siguientes apartados:
   - Idoneidad epistémica- matemática (el contenido estadístico estudiado es adecuado).
   - Idoneidad cognitiva (adecuación a los conocimientos previos y edad. Los objetivos de aprendizaje se pueden alcanzar).
   - Idoneidad de medios técnicos y del tiempo empleado.
   - Idoneidad motivacional y afectiva.
   - Idoneidad interaccional (la interacción entre profesores y estudiantes favorece la superación de dificultades y conflictos).
   - Idoneidad ecológica (grado en que el proceso de estudio se adapta a las orientaciones curriculares y a las condiciones del entorno).
3. Indicar cambios en la experiencia para mejorar su idoneidad didáctica global.

***Bibliografía recomendada (***Disponible desde el directorio de la asignatura).

- Godino, J. D., (Director) (2003). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Tema 6: Estocástica (Capítulo 1. Estadística, páginas 411-423). Disponible en Fotocopias y Directorio de la asignatura.
- Decretos de enseñanzas mínimas en Educación Primaria. Área de Matemáticas. MEC, 2006 y Junta de Andalucía.

Los alumnos tuvieron una semana para preparar su informe escrito para esta segunda parte de la práctica. Los estudiantes realizaron la actividad individualmente fuera del horario lectivo. Este requisito es parte de la metodología de enseñanza universitaria implantada en la Facultad de Ciencias de la Educación para adecuar los planes de estudio al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), que implica una metodología de enseñanza donde disminuye la parte dedicada a lecciones magistrales y aumentando el trabajo individual y en grupos de los estudiantes.

Godino, Font y Wilhelmi (2008) incluyen el análisis de la idoneidad didáctica como uno de los tipos de análisis didácticos en su propuesta, indicando que la Didáctica de la Matemática debe aspirar a la mejora de la enseñanza, aportando una racionalidad que permita el análisis y crítica de medios, fines y cambios en los procesos educativos y por ello introducen sus criterios de “idoneidad”. Los autores indican que la idoneidad didáctica es una herramienta de análisis que puede ser útil para la formación de profesores, ayudándoles a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar.

La idoneidad didáctica y las herramientas para su análisis y valoración establecen, según Godino. Font y Wilhelmi (2008) un puente entre una didáctica descriptiva – explicativa y su aplicación para el diseño, implementación y evaluación de intervenciones educativas específicas. Con esta finalidad se aplicó en nuestro trabajo y, en lo que sigue, valoramos la aplicación de la misma por los estudiantes.

En sus informes los alumnos tuvieron que valorar la idoneidad didáctica del proceso de estudio vivido en el aula (incluyendo en el mismo el trabajo extra-escolar realizado en casa, pues este trabajo es similar al que un maestro o maestra podría asignar a uno de sus estudiantes). Resaltamos el hecho de que se pidió a los alumnos la valoración en relación a la utilidad del proceso, bien en la formación de maestros (como era su caso) o para estudiantes de últimos cursos de primaria o de secundaria.

## 5.4. METOLOGÍA DE ANÁLISIS

Recogidos los informes, se procedió al análisis de su contenido, utilizando técnicas cualitativas y definiendo algunas variables que luego se utilizarán en el análisis estadístico de los datos, para dar una valoración de los conocimientos del contenido didáctico que manifiestan estos estudiantes en la actividad.

El análisis de contenido es un tipo de análisis cualitativo, fundamentado en la idea de que las unidades del texto pueden clasificarse en un número reducido de categorías (Weber, 1985). Sirve para efectuar inferencias mediante la identificación sistemática y objetiva de las características específicas de un texto (Ghiglione y Matalón, 1989). Su objetivo final es la búsqueda del significado implícito en el texto, a partir de un estudio sistemático del mismo.

Entre las posibles formas del análisis de contenido, en nuestro trabajo hemos considerado el *análisis de contenido temático*, donde se recurre al conocimiento previo sobre el tema adquirido por el investigador, para resumir el contenido del texto y definir las categorías de análisis (Ghiglione y Matalón, 1989). En nuestro caso, para realizar el análisis, hemos recurrido a nuestro conocimiento previo sobre el proyecto adquirido a través de la enseñanza en cursos anteriores y del análisis a priori del mismo. También nos hemos apoyado en la revisión bibliográfica presentada en el capítulo 3.

A partir de ello, hemos resumido el contenido del texto y definido categorías, estudiando su presencia o ausencia en los protocolos escritos de los estudiantes. Es un análisis directo (en la terminología de Visauta, 1989), puesto que seguimos estrictamente el contenido de la unidad de análisis sin ir más allá de lo que esta contiene.

La primera operación fue la lectura atenta de los informes, buscando las componentes relacionadas con cada uno de los tipos de idoneidad, que usualmente fueron destacadas por los estudiantes. Ello permitió seleccionar las *unidades primarias* de análisis. Para cada uno de los descriptores contenidos en la pauta de evaluación de la idoneidad didáctica, se evaluó su aplicación por el estudiante en una escala 0-3 que posteriormente se describe, mostrando ejemplos de cada una de sus categorías. Cada uno de los descriptores fueron las *unidades secundarias* de análisis. En estas unidades secundarias se analizó el texto, mediante los siguientes pasos:

1. Lectura a fondo de los textos, recogiendo todos los párrafos relacionados con el descriptor que se pretendía analizar. Dichos párrafos se examinaron para determinar el nivel de aplicación del descriptor, en la escala anteriormente mencionada, codificando numéricamente este nivel.
2. Elaboración de tablas que recogen la frecuencia de cada categoría en cada descriptor.
3. Elaboración del informe de análisis incluyendo ejemplos de las diferentes categorías elaboradas. Asimismo se presentan gráficos resumen de valores medios de cada descriptor de cada tipo de idoneidad didáctica.
4. Finalmente se realiza una síntesis cuantitativa, realizando una comparación de la dificultad de aplicación de los diferentes tipos de idoneidad, el máximo nivel alcanzado en la aplicación de cada uno de ellos; la puntuación global del estudiante. También se lleva a cabo un estudio de agrupación de estudiantes y un análisis discriminante (Afifi y Clark, 1996).

## 5.5. ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD EPISTÉMICA

El análisis de la idoneidad epistémica requiere que el futuro profesor conozca los objetos matemáticos propuestos para la enseñanza de un cierto tema, y sea capaz de reconocer su presencia o ausencia en el proceso de estudio propuesto, así como su uso adecuado. Godino (2009) indica que el análisis de la idoneidad epistémica por parte de los propios profesores les permite profundizar, tanto en el conocimiento matemático en sí mismo, como en el conocimiento del contenido matemático para la enseñanza (conocimiento especializado, en la terminología de Ball, Lubienski y Mewborn, 2001).

Con este análisis se pretende que los estudiantes reconozcan, además de los conceptos y procedimientos, los distintos lenguajes usados, los tipos de justificaciones de propiedades y procedimientos, los procesos de argumentación y generalización. El objetivo es que el profesor sea consciente de la trama de objetos y significados que se ponen en juego en los procesos de estudio matemático que deberán diseñar, implementar y evaluar (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

Se espera que los estudiantes perciban que el proyecto planteado permite contextualizar los contenidos estadísticos elementales incluidos en los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria. Con la realización del proyecto, el futuro profesor ejercitaría, por tanto estos contenidos, adquiriendo un conocimiento matemático común del mismo. Asimismo se puede ejercitar un conocimiento más avanzado (en el horizonte matemático, en la terminología de Ball y cols.), puesto que se analizan objetos matemáticos no incluidos en dichos decretos. El análisis de dicho contenido y su contextualización en un proyecto se relaciona con el conocimiento especializado del contenido (Godino, 2009).

El proyecto requiere, en primer lugar la realización de un experimento aleatorio, lo que contextualiza la idea de aleatoriedad, experimento y suceso. Permite reflexionar sobre la probabilidad de obtener cara o cruz en el experimento y equiprobabilidad de resultados, así como de las condiciones de aplicación de la Regla de Laplace. También se requiere comprender la impredecibilidad de cada resultado particular, al tiempo que observar la convergencia en una serie larga de ensayos. Otros contenidos “avanzados” que se pueden observar serían las ideas de variable aleatoria y estadística y sus distribuciones. En particular, el lanzamiento 20 veces de una moneda se puede modelizar mediante la distribución binomial $B\ (20,\ 0{,}5)$. Es poco probable que los futuros profesores hayan estudiado esta distribución, pero si deben conocer la idea de esperanza matemática, y comprender que el valor esperado en este caso es 10.

El proyecto requiere también la recogida de datos, recuento, realización de tablas y gráficos y cálculos de resúmenes estadísticos, así como la interpretación de resultados. Por tanto permite el trabajo con la idea de dato y frecuencia, variable y valor, distribución de frecuencias, gráficos de barras, líneas, sectores, puntos. Además el proyecto permite ejercitar y aplicar dichos contenidos.

Además, otros gráficos avanzados que podrían realizarse en el desarrollo del informe (que debieran haber estudiado los futuros profesores en el primer curso) serían el histograma, gráficos de tallo y hojas y gráficos de caja. El análisis de los errores en los gráficos producidos permite ampliar tanto el conocimiento matemático como el conocimiento del contenido y los estudiantes, que también se ampliaría mediante el estudio de las propias intuiciones incorrectas en relación a la aleatoriedad.

En el análisis que sigue se ha utilizado una valoración similar para todos los descriptores en la forma siguiente:

0. Cuando el estudiante no hace referencia al descriptor. Algunos alumnos dejan sus respuestas en blanco en este apartado, no habiendo comprendido la pregunta o no siendo capaz de aplicarla en este contexto.
1. El estudiante hace referencia, pero se limita a copiar literalmente o casi literalmente el descriptor, sin aplicarlo a la situación.
2. El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en el contenido matemático, o en la situación de enseñanza sino en aspectos anecdóticos o no estrictamente matemáticos.
3. El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a contenidos matemáticos y a la situación de enseñanza. El grado de aplicación es variable, desde una aplicación incompleta a otras más amplias y que muestran un mayor conocimiento de la estadística por parte de los estudiantes.

A continuación analizamos la extensión por la cual los futuros profesores han reconocido algunos de estos elementos en el proyecto. Con objeto de no repetir excesivamente, mostraremos sólo ejemplos en que los alumnos aplican los descriptores a nivel 2 y 3, pues el nivel 0 corresponde a futuros profesores que no aplican un determinado descriptor y el nivel 1 a aquellos que se limitan a copiar la descripción del descriptor literalmente.

### 5.5.1. SITUACIONES-PROBLEMAS

Sobre este componente de la idoneidad epistémica se entregó a los alumnos dos descriptores, pidiéndoles que los valoraran en la situación analizada. Estos descriptores se analizan a continuación.

*P1. Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.* Se espera que los estudiantes perciban que el proyecto planteado permite generar una muestra representativa de problemas de índole estadística. El proyecto requiere, en primer lugar la realización de un experimento aleatorio, lo que contextualiza la idea de aleatoriedad, experimento y suceso.

Como todo proyecto estadístico, se requiere también la recogida de datos, recuento y realización de tablas, gráficos y cálculos de resúmenes estadísticos, así como la interpretación de resultados (Connor, Davies y Payne, 2002). Implícitamente aparecen problemas elementales de cálculo de probabilidades simples y compuestas, así como de estimación del valor medio de una variable. Además el proyecto permite ejercitar y aplicar dichos contenidos, todo ello debidamente secuenciado.

*P2. Se proponen situaciones de generación de problemas.* Aunque el proyecto en si mismo constituye un problema extra matemático, al tratar de resolverlo los alumnos se plantean nuevos problemas, como por ejemplo, ¿Cuál sería un gráfico adecuado para representar los datos dados? ¿Cómo elegir las escalas de dicho gráfico? ¿Qué estadísticos de posición central o dispersión serían los mejores para comparar las dos distribuciones?. Como en todo proyecto se debe pasar del problema inicial (que es difuso y no completamente cerrado) a preguntas concretas que puedan resolverse con la estadística, el alumno pasa de la realidad a la matemática y comienza a modelizar (Starkings, 1997).

Esperamos que los estudiantes hagan referencia al hecho de que, del problema inicial extra matemático surgen varios problemas matemáticos en el proyecto. Algunos de estos problemas ya no son puramente estadísticos; por ejemplo, la elección de las escalas y su correcta representación se relaciona con las ideas de proporcionalidad numérica y geométrica.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en el contenido matemático, sino en aspectos anecdóticos o no estrictamente matemáticos. En el siguiente ejemplo la alumna aplica el descriptor P1, pues hace referencia a problemas presentes en la situación. Sin embargo, aunque implícitamente el problema descrito (predecir resultados en juegos de azar) es un problema del cuál surge la idea fenómenos aleatorios, probabilidad y otros contenidos del tema, no hace mención explícita de conocimientos matemáticos que se pongan en juego en estos problema. Por otro lado, los problemas señalados no son problemas estrictamente matemáticos y más aún, no tienen una solución matemática, pues no es posible predecir un juego de azar.

> *"La profesora presenta situaciones de la vida cotidiana que realizamos como jugar a la lotería, la quiniela, juegos de azar, pero todas estas situaciones llevan con ella el problema el que no acertamos o no nos vaya como queramos"* (Alumna EA, descriptor P1).

*Nivel 3*. El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a contenidos matemáticos, aunque el grado de aplicación es variable. La siguiente alumna aplica el descriptor P1 analizando la manera en la cual la profesora contextualizó la práctica que tuvieron que realizar los alumnos, haciendo mención por ejemplo a la realización del experimento aleatorio. Pone de manifiesto que el proyecto es una buena manera de trabajar y contextualiazar temas como la estadística, azar, probabilidad, etc.

> *"Previamente a la realización del experimento (lanzar la moneda al aire), la profesora introdujo a su alumnado en el tema de la estadística y el azar. De esta manera dotó de sentido y contextualizó el motivo de la práctica; introduciendo así la importancia de la estadística, la intuición y la probabilidad en la vida cotidiana y el desarrollo de la persona en la sociedad"* (Alumna BA, descriptor P1).

En la tabla 5.5.1 presentamos los resultados en este apartado. Observamos que son pocos los estudiantes (menos del 30%) que llegan a hacer una valoración, incluso incompleta de la idoneidad epistémica del proyecto, en relación a los problemas propuestos y generación de nuevos problemas.

Tabla 5.5.1. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores de las situaciones-problemas

| | P1 | P2 |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 24 (22,2) | 48 (44.4) |
| Nivel 1 | 28 (25,9) | 20 (18,5) |
| Nivel 2 | 27 (25) | 17 (15,7) |
| Nivel 3 | 29 (26,8) | 23 (21,3) |

Una parte importante no aplica el descriptor o se limita a copiar su descripción sin intentar reformularlo. Otro 25% lo aplica anecdóticamente, sin hacer referencia al contenido matemático. Comparativamente ha sido más sencillo el primero de los dos descriptores (problemas propuestos) respecto al segundo (problemas generados por el estudiante), posiblemente por la concepción subyacente de que es el profesor quien plantea los problemas.

### 5.5.2. LENGUAJE

Un segundo punto a valorar es la variedad de lenguaje involucrada en el desarrollo del proyecto. Sobre este componente de la idoneidad epistémica se entregó a los alumnos tres descriptores:

*L1. Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas.* En el proyecto planteado los estudiantes han utilizado multitud de términos estadísticos, tales como dato, variable, resultado, experimento aleatorio, suceso, distribución, frecuencia, etc. Para resumir sus datos pueden emplear diversos tipos de gráficos, como diagramas de barras o líneas, histogramas y gráficos de puntos, así como las tablas de frecuencia (disposición tabular), pues, como se ha indicado, el lenguaje gráfico tiene un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, al ser un instrumento de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999). Con frecuencia se emplean símbolos para referirse a la media, moda, mediana y rango. Asimismo se emplea el lenguaje numérico para expresar los datos y los cálculos de estadísticos. Aquellos estudiantes que han usado la hoja Excel han manejado también el lenguaje icónico de dicho programa para acceder a sus opciones.

*L2. Nivel del lenguaje adecuado a los alumnos a que se dirige.* Se trata de valorar si los documentos entregados, donde se describe el proyecto, que es una unidad didáctica dirigida a la formación de profesores o a la educación secundaria y últimos cursos de primaria, tiene un lenguaje comprensible y adecuado para los alumnos a los que va dirigido o si por el contrario hay aspectos confusos. Se esperaría también que en caso de encontrar aspectos no comprensibles, se señalasen.

*L3. Se proponen actividades de expresión matemática e interpretación.* Nolan y Speed (1999) resaltan la importancia que el trabajo con proyectos tiene para desarrollar la capacidad discursiva de los estudiantes. En este descriptor se debe valorar las situaciones de comunicación que permite el desarrollo del proyecto, que pueden ser de varis tipos: (a) Comunicación escrita de los estudiantes para resumir en un informe los resultados de su análisis de datos; (b) comunicación escrita como medio de obtener las conclusiones, pues los estudiantes no pueden extraer las conclusiones hasta que producen sus gráficos y cálculos estadísticos; (c) durante la fase de presentación del proyecto y recogida de datos se plantearon también situaciones de comunicación oral entre el profesor y los alumnos y entre los grupos de alumnos.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en el contenido matemático. Puede mostrar ejemplos de términos o tipos de lenguaje utilizados de forma anecdótica, no centrándose en su carácter de "lenguaje matemático" o en su utilidad para representar y trabajar con ideas matemáticas, como en el siguiente ejemplo. Este estudiante alude a algunas expresiones verbales utilizadas en el proyecto, de modo que identifica la categoría "lenguaje matemático" y la aplica a la situación. Sin embargo, en vez de aludir a la necesidad de enseñar a niño el uso de este lenguaje matemático, simplemente hace referencia a que se debe usar un lenguaje adecuado con los niños. Esto muestra un conocimiento pedagógico general por parte de esta alumna, más que un conocimiento especializado del contenido matemático.

> *"Hay que utilizar palabras como azar, cara o cruz, etc. Siempre utilizando términos que sean adecuados a los niños"* (Alumno AB, descriptor L1).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a contenidos matemáticos. La respuesta del siguiente alumno es mucho más completa, pues hace referencia a diversos tipos de lenguaje matemática e incluso diferencia dentro de los gráficos diferentes tipos de ellos. Por otro lado, hace referencia a la utilidad de estos gráficos para representar y resumir la información y posterior obtención de una conclusión. El estudiante muestra su conocimiento común y especializado del contenido matemático y su capacidad de análisis.

> *"Otro de los aspectos es la gran variedad de modos de expresión matemáticos en los que podemos presentar una determinada información, así como su respectivo análisis estadístico (histograma, poligonal, diagrama de sectores y pictogramas; tablas estadísticas y cálculo de estadísticos que muestran la información resumida en unos valores; análisis de dichos estadísticos y posterior conclusión.)"* (Alumno SC, descriptor L1).

En la tabla 5.5.2 se presenta los resultados en este apartado; donde vemos que dichos resultados han sido muy variables, resultando mucho más sencillo de aplicar el primero de los descriptores (variedad de lenguaje matemático), seguido del segundo (nivel adecuado). El tercer descriptor (situaciones de representación en interpretación) ha resultado demasiado difícil para los alumnos.

Tabla 5.5.2. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores del lenguaje matemático

| | L1 | L2 | L3 |
|---|---|---|---|
| Nivel 0 | 30(27,78) | 40(37,04) | 71(65,74) |
| Nivel 1 | 19(17,59) | 28(25,93) | 16(14,81) |
| Nivel 2 | 21(19,44) | 21(19,44) | 7(6,48) |
| Nivel 3 | 38(35,19) | 19(17,59) | 14(12,96) |

### 5.5.3. DEFINICIONES, PROPIEDADES Y PROCEDIMIENTOS

Los problemas matemáticos propuestos están encaminados al aprendizaje de diferentes conceptos (como dato, variable, media,), propiedades y procedimientos. Es importante, por tanto que los futuros profesores sepan reconocerlos en la situación. Sobre este componente de la idoneidad epistémica se entregó a los alumnos tres descriptores:

*D1.Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.* De hecho durante el desarrollo del proyecto no se dieron definiciones ni se propusieron procedimientos, puesto que se trataba de una actividad abierta, en que se dio a los estudiantes libertad para usar sus conocimientos previos, como es habitual en el trabajo con proyectos (Batanero y Díaz, 2004). Es de esperar que los estudiantes hagan referencia a que debieran haberse recordado algunas definiciones y procedimientos, quizás en una sesión previa a la resolución del proyecto. También podrían hacer referencia a las definiciones y procedimientos presentadas durante la fase de resolución del proyecto.

*D2. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.* Respecto a este descriptor podemos hacer el mismo comentario que para el anterior, pues al trabajar el alumno de forma autónoma, se le dio libertad de uso de diferentes enunciados y procedimientos.

*D3. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones propiedades o procedimientos.* Por el contrario, la situación planteada puede plantear este tipo de situaciones. Por ejemplo, los estudiantes deben decidir qué gráfico o qué medida de posición central es preferible para representar los datos. Ello llevaría a que deban comparar, y en cierto sentido negociar, las definiciones y propiedades o procedimientos empleados en la solución.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a contenidos matemáticos pero la aplicación es incompleta o anecdótica, pues no indica ejemplos concretos de las definiciones o procedimientos que debieran haberse presentado en el desarrollo del proyecto. En el siguiente ejemplo, el estudiante SC está indicando que en el proyecto no se ofrecieron a los estudiantes las definiciones de los conceptos necesarios o los procedimientos para la realización de los gráficos. Sin embargo no hace referencia a que todos los contenidos necesarios para la elaboración del proyecto se han estudiado en la educación primaria y secundaria, así como en el curso anterior, por lo que el futuro profesor no necesitaría que el educador se los volviera a repetir. No ha valorado la utilidad del trabajo con proyectos estadísticos para motivar al estudiante a buscar él mismo en sus libros de texto de otros cursos o incluso preguntando al profesor, por la información que no recuerda para trabajar con la estadística.

> *"Sin embargo consideramos que no se puede delegar la generación de definiciones y procedimientos a los alumnos. Sí es cierto que en la medida de lo posible debemos procurar el aprendizaje significativo de nuestros alumnos, pero en esta ocasión tenemos que ofrecerles las técnicas de estudio y los conceptos"* (Alumno SC, descriptor D2).

*Nivel 3.* Se hace una aplicación del descriptor a la situación, aunque el grado de precisión puede ser variable. En el siguiente ejemplo, la alumna HG aplica el descriptor D1 al proyecto, destacando que algunos de los conceptos no se introdujeron explícitamente, ya que se conocían por parte de los alumnos, aunque sí que se les definió conceptos como el de racha.

> *"El concepto de racha si tuvo que definirse puesto que no se conocía entre los compañeros de la clase. Sin embargo conceptos como media y rango, al hacer preguntas en clase los alumnos contestaron a cerca de estos adecuadamente"* (Alumna HG, descriptor D1).

Tabla 5.5.3. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de descriptores sobre definiciones, propiedades y procedimientos

| | D1 | D2 | D3 |
|---|---|---|---|
| Nivel 0 | 24(22,22) | 68(62,96) | 61(56,48) |
| Nivel 1 | 28(25,93) | 14(12,96) | 12(11,11) |
| Nivel 2 | 27(25,00) | 15(13,89) | 20(18,52) |
| Nivel 3 | 29(26,85) | 11(10,19) | 15(13,89) |

Los resultados de la valoración de las definiciones, propiedades y procedimientos se presentan en la tabla 5.5.3. Observamos que, salvo el primero, estos descriptores han sido escasamente aplicados. Por lo que parecen no haber sido comprendidos adecuadamente por los estudiantes. Estos resultados coinciden con los obtenidos en la investigación de Chick y Pierce (2008), donde los profesores participantes fallaron en sacar a la luz los conceptos latentes en un proyecto estadístico, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada.

### 5.5.4. ARGUMENTOS

La situación planteada es muy rica en argumentación, pues los estudiantes deben proponer una conclusión sobre las intuiciones de los alumnos de la clase, argumentando en base al análisis estadístico de los datos. Por otro lado, puesto que los resultados son para ellos contra intuitivos (debido a sus mismas intuiciones incorrectas) toda la situación de clase es una confrontación con estas intuiciones incorrectas para ayudar a superarlas. Por ello, será necesario el debate y argumentación del profesor y los estudiantes. Sobre este componente de la idoneidad epistémica se entregó a los alumnos dos descriptores.

*A1. Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.* Los estudiantes han de valorar la claridad de las explicaciones que se dieron en las sesiones, así como en la sesión posterior en que se corrigieron las posibles soluciones al proyecto. Debido al gran número de estudiantes, no fue posible, como hubiera sido deseable que cada estudiante o grupo expusiera y debatiera las soluciones, creándose una situación de validación en el aula. Sí hubo, sin embargo, una situación de institucionalización pues se hizo una corrección global por parte del profesor, del proyecto. Asimismo se escanearon y discutieron con los estudiantes algunas soluciones incorrectas dadas o algunos gráficos que contenían errores, indicando la causa del error. Finalmente, los estudiantes que así lo desearon tuvieron posibilidad de examinar con el profesor su propia solución en las horas de tutoría.

*A2. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.* Se espera que los estudiantes valoren las posibilidades de argumentación que ofrece el proyecto, pues en el informe escrito, los estudiantes han de sacar una conclusión sobre las intuiciones y esta conclusión ha de ser apoyada por los resultados de su análisis de datos. Durante la fase de recogida de datos y solución global de la actividad también aparecen ocasiones de argumentación, aunque, como hemos comentado, lo ideal hubiera sido crear una situación de validación por parte de los alumnos.

Siguiendo a Murray y Gal (2002) hemos tratado de desarrollar en los estudiantes la comprensión e interpretación de la información estadística, que no sólo requiere conocimiento estadístico o matemático, sino también habilidades lingüísticas, conocimiento del contexto, capacidad para plantear preguntas y una postura crítica ante la información. También Nolan y Speed (1999) resaltan la importancia de desarrollar la capacidad discursiva de los estudiantes, como medio de ampliar sus habilidades de pensamiento crítico.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en los argumentos que dan los alumnos o en las explicaciones del profesor. En el siguiente ejemplo la alumna, aplica el descriptor pero sin especificar los motivos que le llevan a dar esa respuesta. Podríamos clasificar esta respuesta como de un nivel superior si la alumna hubiese justificado de alguna manera su afirmación. Además, como ya hemos visto en el capítulo 4, este proyecto precisa de argumentaciones por parte de los alumnos, justificado las conclusiones a las que llegan después de analizar los datos que obtuvieron en el experimento aleatorio que llevaron a cabo:

*"En cuanto a las argumentaciones, éstas creo que son escasas"* (Alumna JR, descriptor A2).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor, indicando algunas de las situaciones de argumentación propuestas en el aula o en el trabajo realizado en la casa, aunque la aplicación varía en grado de completitud. La alumna CC hace referencia a la necesidad de argumentar en la solución del proyecto, donde se deben comparar las diferencias en las variables analizados entre la secuencia real y la simulada y dicha comparación constituye una argumentación, pues ha de estar apoyada en el análisis estadístico realizado. Sin embargo, como vemos, podría haber sido más explícita en a qué se refiere.

*"En cuanto a los argumentos, al realizar el ejercicio es necesario razonar lo que se ha hecho y comentar los resultados obtenidos"* (Alumna CC, descriptor A2).

Tabla 5.5.4. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre argumentación

| | A1 | A2 |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 67(62.04) | 45(41,67) |
| Nivel 1 | 25(23,15) | 24(22,22) |
| Nivel 2 | 9(8,33) | 18(16,67) |
| Nivel 3 | 7(6,48) | 21(19,44) |

En la tabla 5.5.4 se presentan los resultados sobre estos descriptores que fueron bastante difíciles para los estudiantes, quienes no parecen reconocer las situaciones de argumentación creadas en el proyecto. Es posible que ello sea debido a que su concepción de argumentación se restrinja a las demostraciones formales de tipo deductivo y no incluyan las argumentaciones apoyadas en razonamiento estadístico, como la utilizada en este proyecto.

### 5.5.5. RELACIONES

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), los diversos objetos matemáticos aparecen ligados entre sí en las prácticas de resolución de problemas. Las situaciones-problemas son el origen de la actividad matemática; el lenguaje sirve para representar los problemas, procedimientos, conceptos y proposiciones; los argumentos justifican los procedimientos y las soluciones de los problemas, y las proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Por otro lado, la estadística se conecta con otros bloques temáticos y los objetos matemáticos de los mismos, como se resalta en las orientaciones curriculares (MEC, 2006a; Consejería de Educación, 2007a).

Como parte del análisis de la idoneidad epistémica, se pidió también valorar las relaciones establecidas en el proyecto entre diversos tipos de objetos matemáticos. Sobre este componente de la idoneidad epistémica se entregó a los alumnos un descriptor:

*RL1. Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, propiedades, etc.) se relacionan y conectan entre sí.* En este proyecto se conecta el problema planteado con los procedimientos de análisis de datos y éstos con las definiciones y propiedades de resúmenes estadísticos y gráficos. Además todos ellos se conectan con propiedades numéricas, y geométricas, como representación de números en la recta o proporcionalidad, como de analizó en el Capítulo 1 y en Arteaga, Contreras y Ruiz (2008). De hecho, como indica Gattuso (2006), en el trabajo con la estadística aparecen implícitos los principales contenidos que se requieren en la educación actual en matemáticas: análisis de situaciones de la vida real, resolución de problemas, toma de decisiones, razonamiento matemático y conexiones matemáticas.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en el contenido matemático, sino a información anecdótica o ejemplos de la vida cotidiana. En el siguiente ejemplo la alumna aplica el descriptor, y aunque implícitamente hace referencia a los fenómenos aleatorios, no hace mención explícita de conocimientos matemáticos que se pongan en juego en este proyecto.

> *"Debe de existir una relación entre la definición (lanzamiento simulado y real), cuántas veces sale cara o cruz (proporciones), etc."* (Alumno AB, descriptor RL1).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a contenidos matemáticos. El siguiente estudiante hace referencia a la interrelación de los objetos matemáticos (que él denomina objetivos) poniendo ejemplos concretos de algunos que aparecen en el proyecto como azar, probabilidad, tablas, estadísticos y gráficos. También hace referencia a la secuenciación lógica y teniendo en cuenta el nivel de dificultad del contenido, por lo que consideramos la aplicación ha sido bastante completa.

> *" A partir de la secuencia de actividades comprobamos que los objetivos matemáticos que parten están interrelacionados y conectados, siguen una secuencia lógica de enseñanza- aprendizaje, secuenciada de conceptos más simples, por ejemplo en la probabilidad y el azar a otros más complejos, como tablas de frecuencias, estadísticos y gráficos"* (Alumno ML, descriptor RL1).

Tabla 5.5.5. Distribución de futuros profesores según aplicación del descriptor RL1

| Aplicación del descriptor | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 41 | 37,96 |
| Nivel 1 | 31 | 28,70 |
| Nivel 2 | 20 | 18,52 |
| Nivel 3 | 16 | 14,81 |

En la tabla 5.5.5 presentamos los resultados de este descriptor, que resultó de nuevo difícil a los futuros profesores pues fueron minoría los que llegaron a último nivel y sólo un 32% alcanza un nivel 2 o 3. Alrededor del 40% dejaron el descriptor en blanco, lo que indica que los estudiantes no fueron capaces de identificar posibles relaciones entre objetos estadísticos o de ellos con otros objetos matemáticos dentro de la actividad.

**Síntesis de la idoneidad epistémica**

En la tabla 5.5.6 y figura 5.5.1 se presentan los valores medios obtenidos por el conjunto de alumnos al aplicar los descriptores de la idoneidad epistémica, que nos permiten valorar, según Godino (2009) su conocimiento especializado del contenido matemático en este proyecto.

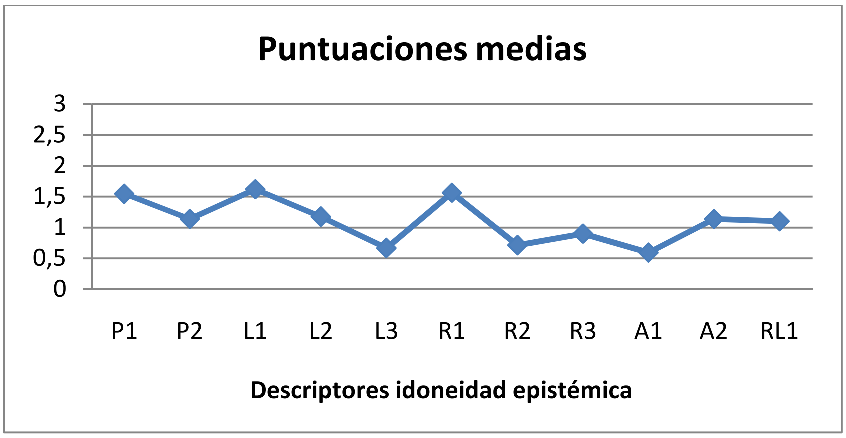
Dicho conocimiento debiera incluir la capacidad para identificar los objetos matemáticos implícitos o que se han hecho explícitos en una cierta situación de enseñanza, para poder valorar qué han aprendido sus estudiantes. Hill, Ball, y Schilling (2008) lo incluyen dentro de "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno." (p. 374). Los resultados muestran que este conocimiento es muy escaso, pues en promedio no llegan a alcanzar el nivel 2 (aplicación anecdótica), aunque, como hemos visto en el análisis detallado, una proporción de estudiantes que varía entre el 10% y 35% según los descriptores llegan al nivel más alto de aplicación.

Estos resultados no sorprenden, debido a la relación entre el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento común del contenido señalado por Ball, Lubienski y Mewborn (2001) y al hecho de que el conocimiento matemático sobre estadística también resultó pobre en una proporción importante de alumnos, como se dedujo en el capítulo 4. Por otro lado, las pobres capacidades de análisis del contenido matemático de la tarea coinciden con las mostradas por los profesores participantes en la investigación de Chick y Pierce (2008). También en dicho caso los profesores participantes no hicieron un uso adecuado de los datos y proyectos al planificar sus lecciones, pues fallaron en sacar a la luz los conceptos latentes, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada.

Tabla 5.5.6. Medias y desviaciones típicas en los descriptores de la idoneidad epistémica

| Descriptor | Media | D. Típica |
|---|---|---|
| P1 | 1,55 | 1,22 |
| P2 | 1,14 | 1,2 |
| L1 | 1,62 | 1,23 |
| L2 | 1,17 | 1,12 |
| L3 | 0,67 | 1,07 |
| R1 | 1,56 | 1,12 |
| R2 | 0,71 | 1,05 |
| R3 | 0,89 | 1,14 |
| A1 | 0,59 | 0,89 |
| A2 | 1,14 | 1,16 |
| RL1 | 1,11 | 1,08 |
| Total | 1,11 | 1,17 |

Figura 5.5.1. Puntuación media en los descriptores de la idoneidad epistémica




En resumen, para mejorar el conocimiento especializado del contenido y su capacidad de análisis de tareas, sería necesario mejorar la preparación estadística de los futuros profesores de educación primaria, a la que en este momento se dedica un tiempo claramente insuficiente, si se quiere abordar con éxito la enseñanza del tema en la educación primaria.

## 5.6. ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD COGNITIVA

En este apartado se analizan la parte de los informes donde los alumnos valoran la idoneidad cognitiva, es decir el grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, y, por tanto, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005). El análisis de dicha idoneidad tiene en cuenta los significados personales que van construyendo los alumnos a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje llevado a cabo y comparando esto con los significados institucionales implementados o pretendidos. La herramienta de análisis de idoneidad didáctica que ofrece el EOS (Godino, 2009) puede ser de gran utilidad en el diseño de actividades formativas y en la posterior implementación de las mismas.

Para realizar el análisis de la idoneidad cognitiva, lo ideal hubiese sido poder llevar a los futuros profesores a un aula en el que se desarrollase la unidad didáctica en la que se describe el proyecto de análisis de datos. En lugar de ello, se hace el análisis sobre su propia experiencia formativa. Como hemos indicado, el proyecto de análisis de datos "comprueba tus intuiciones sobre el azar" (Batanero, 2001) forma parte de una unidad didáctica para trabajar temas de análisis de datos en Educación Secundaria, formación de profesores y en los últimos cursos de Educación Primaria.

En este sentido los futuros profesores al analizar la idoneidad cognitiva del proyecto han de tener en cuenta las características del alumnado en el que se quiere implementar dicha unidad didáctica. Puesto que los futuros profesores anteriormente a este análisis realizaron el proyecto, muchos de ellos llevaron a cabo el análisis de la idoneidad cognitiva considerando que la unidad didáctica estaba desarrollada para la formación de profesores, y analizando los conocimientos previos que debería poseer un futuro profesor de Educación Primaria en la realización del proyecto, así como posibles dificultades puestas de manifiesto en las correcciones llevadas a cabo por los profesores en el aula de clase.

Otros alumnos, aunque una minoría, al considerarse futuros profesores de Educación Primaria consideraron que esta unidad didáctica estaba diseñada para la Educación Primaria, lo cual les hizo obtener resultados diferentes de la idoneidad cognitiva ya que el proyecto podría tener una dificultad considerable para niños de Primaria. Nuestro objetivo era que los alumnos adquieran competencia para evaluar la idoneidad del proceso teniendo en cuenta el proceso de aprendizaje y enseñanza en cualquiera de los dos supuestos.

El análisis de la idoneidad cognitiva del proyecto por parte de los alumnos tiene relación, en la terminología de Ball, Lubienski y Mewborn (2001), con el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, teniendo en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, las adaptaciones curriculares y los aprendizajes y significados personales construidos por los estudiantes durante un proceso de estudio (Godino, 2009).

### 5.6.1. CONOCIMIENTOS PREVIOS

Un primer componente a estudiar para evaluar la idoneidad cognitiva de una tarea matemática son los conocimientos previos que poseen los alumnos antes de realizar esta tarea, que deben tenerse en cuenta en el proceso de instrucción. Sobre este componente se entregó a los alumnos dos descriptores, pidiéndoles que los valoraran en la situación analizada. Estos descriptores se analizan a continuación.

*CP1. Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio).* Se espera que el estudiante vea que, para trabajar en este proyecto, sólo se requiere conocer los gráficos estadísticos elementales o bien las tablas o incluso simplemente calcular la moda, media y rango. Todos estos conocimientos los poseen los alumnos desde la escuela primaria, por lo cual, en los últimos años de primaria, secundaria o formación de maestros se podría trabajar con este proyecto, realizando las adaptaciones oportunas dependiendo del nivel al que estuviese dirigido.

*CP2. Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.* Por la razón anterior, se espera que el estudiante diga que es posible alcanzar los contenidos pretendidos, ya que el proyecto es adecuado para niños de últimos cursos de Educación Primaria, Educación Secundaria o formación de maestros y los contenidos necesarios en la realización del proyecto los alumnos deberían poseerlos desde últimos cursos de Primaria. En la unidad didáctica entregada se especificaron los siguientes contenidos: Tratamiento de la información, aleatoriedad, experimentos y sucesos aleatorios, frecuencias, tablas, gráficos, medidas de posición central y dispersión.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en los conocimientos previos, sino en aspectos anecdóticos o no estrictamente matemáticos, o aplica el descriptor de una manera muy incompleta. La alumna EA, por ejemplo, hace referencia al descriptor CP2. En este caso lo aplica, haciendo referencia a que los contenidos que se van a trabajar a lo largo del proyecto pueden ser complejos. Este razonamiento está incompleto al no hacer referencia esta alumna a qué contenidos se refiere y a qué nivel educativo está haciendo referencia, puesto que dicho razonamiento puede ser cierto en alumnos de Educación Primaria pero no debería ser un problema para futuros profesores.

> *"Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar pero no en su totalidad ya que algunos de ellos son muy complejos para poder ser alcanzados por niños de esa edad*" (Alumna EA, descriptor CP2).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor centrándose en si los estudiantes poseen o no los conocimientos previos necesarios y en si a lo largo del proceso de aprendizaje podrían alcanzar los contenidos propuestos. El grado de aplicación es variable, y algunos alumnos, aunque lo aplican lo sitúan en un tipo diferente de idoneidad. Por ejemplo, la alumna CC aplica bien el descriptor CP1, pero aún así, más que si el alumno tiene o no los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de la tarea, está diciendo que el profesor los tiene en cuenta y trata de valorarlos, por lo que relaciona la idoneidad cognitiva con la idoneidad interaccional.

> *"Tienen que tener en cuenta los conocimientos de conteo, operaciones elementales aprendidas. Esto dependerá de cada alumno. De todas formas, el tema de aleatoriedad será de las primeras veces que lo tratan y hará falta tratarlo con delicadeza y explicando todos los conceptos nuevos. En la primera actividad la profesora se da cuenta de qué conocimientos tienen ya que formula preguntas sobre el tema que a continuación se van a abordar"* (Alumna CC, descriptor CP1).

El alumno EA aplica bien los descriptores relacionados con los conocimientos previos y se centra en la idoneidad cognitiva, estudiando conjuntamente los descriptores CP1 y CP2. Consideramos su explicación como bastante completa, ya que hace referencia a los alumnos con los que se podría trabajar dicho proyecto de análisis de datos. Hace referencia explícita a conocimientos previos que deberían poseer los estudiantes para la correcta realización del proyecto y destaca que dichos conocimientos previos los deberían poseer alumnos de tercer ciclo de Educación Primaria. Además observa, basándose en la información proveniente de los decretos de enseñanzas mínimas para la Educación Primaria, que los contenidos pretendidos que se explicitan en la unidad didáctica pueden ser alcanzados en últimos cursos de Educación Primaria, teniendo estos, según el alumno, una "dificultad manejable".

> *"Creo que para realizar la práctica, el alumno, debe tener unos conocimientos previos, ya que, se deben utilizar fórmulas y definiciones muy concretas que debe saber. Un ejemplo claro es la elaboración de gráficos estadísticos y el concepto de la posición central y la dispersión. El cálculo de la media, mediana, moda y rango. Los conocimientos necesarios para la realización de la práctica son de matemáticas de tercer ciclo de educación primaria. Los contenidos pretendidos deben de ser fácilmente*

*accesibles para alumnos de tercer ciclo, como bien nos explica el decreto de enseñanzas mínimas en Educación Primaria. Se puede decir que tiene una dificultad manejable"* (Alumno EA, descriptores CP1 y CP2).

Una vez se ha explicado cómo se valoraron y clasificaron las respuestas de los estudiantes, presentamos la distribución de los estudiantes según los distintos niveles de aplicación de los descriptores correspondientes a los conocimientos previos. En la tabla 5.6.1 se muestran dichos resultados.

Tabla 5.6.1. Distribución de participantes según nivel de aplicación de los descriptores sobre conocimientos previos

| Aplicación del descriptor | CP1 | CP2 |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 6(5,56) | 54(50,00) |
| Nivel 1 | 14(12,96) | 11(10,19) |
| Nivel 2 | 44(40,74) | 19(17,59) |
| Nivel 3 | 44(40,74) | 24(22,22) |

Lo primero que podemos observar la gran diferencia en los niveles de aplicación correspondientes a los descriptores CP1 y CP2, ya que el porcentaje de alumnos que no utilizan el descriptor CP1 es del 5,56% siendo el 50% de los alumnos de nuestra muestra los que no aplican el descriptor CP2. Observamos también que el 81,56% de los alumnos de nuestra muestra aplica el descriptor CP1 dentro de los niveles superiores 2 y 3, lo que muestra que los estudiantes tuvieron más facilidad para entender y aplicar dicho descriptor que el CP2, donde fue el 39,81% de la muestra los que aplicaron dicho descriptor dentro de los dos niveles superiores, es decir los niveles 2 y 3.

Observamos por tanto, que resultó complicado a los estudiantes el analizar si los conocimientos pretendidos con la realización del proyecto serían alcanzables por estudiantes de último curso de Educación Primaria, de Educación Secundaria o para futuros profesores de Primaria, cuyos conocimientos previos debería coincidir aproximadamente con los contenidos a tratar durante la realización de la actividad.

### 5.6.2. ADAPTACIONES CURRICULARES

El siguiente componente a analizar dentro de la idoneidad cognitiva del proceso descrito en la unidad didáctica que se les presentó a los estudiantes, es la toma en cuenta de adaptaciones curriculares para estudiantes más dotados o con necesidades especiales, es decir, la toma en cuenta de la diversidad del aula. Para ello se dio la instrucción a los alumnos de que aplicaran el siguiente descriptor:

*AC1. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.* Se espera que el alumno identifique que la unidad didáctica entregada tenía un apartado con actividades de ampliación. En este sentido hay alumnos que expresan su opinión concluyendo que las actividades son insuficientes o incluso que no se consideran actividades de refuerzo, otros consideran que la actividad propuesta es suficiente e idónea, mostrando esto la diversidad de opiniones que pueden aparecer ante una misma actividad de aprendizaje y enseñanza de la estadística. Las explicaciones de los alumnos serán consideradas correctas siempre que justifiquen su respuesta y dicha justificación sea coherente con su respuesta.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero centrándose en actividades que no son de ampliación o refuerzo, o en aspectos anecdóticos. Por ejemplo, el alumno JMG, aplica el descriptor, pero considera que, una vez realizado el experimento, cuando los alumnos disponen de las secuencias reales y simuladas y deben realizar comparaciones entre las distribuciones de distintas variables estadísticas, las actividades de ampliación sería en este caso la realización de distintos gráficos, siendo este tipo de actividades las necesarias para la realización del proyecto pero no las de ampliación o refuerzo.

> *"Las actividades de ampliación han sido la realización de gráficos con los valores de las secuencias"* (Alumno JMG, descriptor AC1).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor analizando las actividades de ampliación y refuerzo presentadas en la unidad didáctica que tuvieron que analizar. En este ejemplo la alumna MAH, aplica el descriptor, estudiando la unidad didáctica que se le presentó, observando que en dicha unidad aparece solamente una actividad de ampliación. La alumna realiza una reflexión crítica a cerca de dicha actividad, lo que es uno de los objetivos de que los alumnos estudien la idoneidad didáctica de un proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

> *"Sí se incluyen actividades de ampliación y refuerzo pero simplemente es una que no puede abarcar los dos ámbitos, pues si es de refuerzo para alumnos con unas necesidades concretas no puede ser a la vez una actividad de ampliación para niños que van más aventajados"* (Alumna MAH, descriptor AC1).

La alumna MEV, aplica el descriptor en un sentido más estricto, simplemente observando la existencia de actividades de ampliación y refuerzo a lo largo de la unidad didáctica, aunque hubiésemos esperado una actitud más crítica o explicación de la tarea de ampliación o refuerzo.

*"En esta unidad didáctica si se incluyen actividades de ampliación y refuerzo; para ello se ha dejado un apartado en la página 6, exclusivamente dedicado a actividades de ampliación y refuerzo. También tiene un apartado dedicado a las dificultades y errores previsibles, los que creo que son necesarios para complementar la información que tenemos de los alumnos sobre la comprensión del tema de la unidad"* (Alumna MEV, descriptor AC1).

Mostramos en la tabla 5.6.2 la distribución de los futuros profesores según el nivel en el que aplican el descriptor AC1. En dicha tabla se puede observar que un 27,78% del total de alumnos de nuestra muestra no aplican dicho descriptor, aunque también hay que destacar que el mayor porcentaje de alumnos en relación con el descriptor AC1 se da en el nivel superior, es decir, el nivel 3 (32,41%). El aproximadamente 40% restante de alumnos aplica el descriptor dentro de los niveles 1 y 2 en aproximadamente un 20% en cada uno.

Tabla 5.6.2. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación del descriptor sobre adaptaciones curriculares

| Aplicación del descriptor | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 30 | 27,78 |
| Nivel 1 | 22 | 20,37 |
| Nivel 2 | 21 | 19,44 |
| Nivel 3 | 35 | 32,41 |

### 5.6.3. APRENDIZAJE

Por último, para valorar la idoneidad cognitiva de la unidad didáctica, es necesario tener en cuenta el aprendizaje logrado por los estudiantes. Con respecto al aprendizaje se propuso a los estudiantes que analizasen el siguiente descriptor:

*AP1.Los resultados de la evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidos.* Se espera es que el estudiante valore que la evaluación hecha de la enseñanza en la clase da como resultado algún aprendizaje (o no) por parte de los alumnos. Como se indicó en el capítulo 2, Godino (1996) recuerda que no podemos observar directamente la comprensión personal, mientras que sí podemos observar las prácticas personales (significado). Consecuentemente, en el Enfoque Onto

Semiótico la evaluación de la comprensión sería el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales y las prácticas observables son los indicadores empíricos que nos permiten realizar esta evaluación.

En el curso, se dedicó una media hora a realizar una evaluación de las soluciones de los estudiantes, utilizando una presentación de powerpoint. Los profesores utilizaron los datos del curso anterior para prepararla. Se tuvieron en cuenta en esta sesión los siguientes puntos:

- Se recuerda todo el proceso de trabajo en la clase, haciendo un resumen del proyecto presentado, de la forma en que el profesor planteó el problema, cómo se recogieron los datos y la consigna dada para la preparación de los informes individuales.
- Se muestra las soluciones esperadas (es decir, un resumen como el que se presentan en el apartado 4.4.3), tanto a nivel de gráficos y cálculos estadísticos correctos que podrían haber realizado para resolver el problema, como a nivel de cuáles conclusiones debieran haber obtenido sobre las intuiciones.
- Se dan ejemplos de conclusiones incorrectas mostradas en los informes realizados por los futuros profesores, por ejemplo, de la falacia del jugador. Se pregunta a los estudiantes el por qué dichos razonamientos son considerados erróneos.
- Se dan ejemplos de gráficos incorrectos, por ejemplo, con errores en escalas o por inapropiado el tipo de gráfico, preguntando a los estudiantes qué tipo de error se comete en dichas representaciones.

Aunque los estudiantes no conocen en ese momento, los resultados de la evaluación (que sería una síntesis del capítulo 4), cada uno puede darse cuenta de su propio aprendizaje y el de sus compañeros. Esperamos que hagan referencia a que, por ejemplo, han aprendido sobre trabajar con proyectos o qué tipos de gráficos usar.

Como hemos dicho anteriormente, algunos alumnos interpretaron mal el objetivo de la práctica, sin tener en cuenta los aprendizajes que observaron en ellos mismos, pensando que la programación de la unidad estaba enfocada para ser implementada en una clase de Educación Primaria, por lo que no disponían de datos para aplicar este descriptor. Pero en determinados casos estos estudiantes evalúan los instrumentos de evaluación propuestos al final de la unidad didáctica, lo que podemos considerar como una buena actividad de reflexión que puede también ayudar al futuro diseño de actividades formativas y a tomar una actitud crítica con respecto a distintos métodos de evaluación.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en los aprendizajes o elementos de evaluación por medio de los cuales se pueden obtener indicadores de la apropiación de conocimientos por parte de los alumnos. En el ejemplo siguiente, el alumno JA no relaciona el descriptor AP1 con el hecho de la realización del experimento, la obtención de datos por parte de los alumnos y la recogida de estos por parte de la profesora o profesor, por lo que el alumno aplica el descriptor pero relacionándolo con aspectos de otras idoneidades como puede ser la interaccional.

> *"No se hace una evaluación como tal, la maestra va anotando datos de los alumnos durante la secuencia de actividades que le dará unas calificaciones de cada uno según su actitud y resolución ante la propuesta"* (Alumno JA, descriptor AP1).

*Nivel 3.* El estudiante aplica el descriptor, destacando las correcciones llevadas a cabo por los profesores durante el desarrollo de la práctica o comentando los métodos de evaluación propuestos en la unidad didáctica que se les entregó, complementando o criticando dichos métodos con el fin de fomentar un mejor aprendizaje por parte de los alumnos. Por ejemplo, la alumna MEF, comenta los instrumentos de evaluación propuestos en la unidad didáctica, proponiendo una mayor observación individualizada de los alumnos. Esta alumna, a través de la aplicación del descriptor AP1, pone de manifiesto sus creencias y siendo crítica con los métodos de evaluación que se les sugieren, actitud que se ha de fomentar en los futuros profesores.

> *"En la página 7, aparecen los instrumentos de evaluación. Creo que los ejercicios que vienen están bien pero yo lo ampliaría con varios ejercicios más, o si la unidad didáctica hubiera durado más, hubiera observado a cada uno de los alumnos, independientemente de poner o no ejercicios de evaluación, los que creo que son necesarios para completar la información que tenemos de los alumnos sobre la comprensión del tema de la unidad"* (Alumna MEF, descriptor AP1).

En la tabla 5.6.3 presentamos la distribución de los futuros profesores de nuestra muestra según el nivel de aplicación del descriptor señalado. Se puede observar que ha sido un descriptor difícil de aplicar, ya que un 40,74% del total de los alumnos no hace referencia a dicho descriptor (Nivel 0). Esto puede ser debido a la ambigüedad antes señalada, ya que muchos alumnos no entendieron que se trataba de analizar los aprendizajes conseguidos por el conjunto de la clase cuando realizaron el experimento y el posterior desarrollo del proyecto de análisis de datos. Es decir, los alumnos poseían la programación de una unidad didáctica de la que ellos mismos fueron participes como alumnos. A pesar de eso, el 50% de los alumnos aplicaron el descriptor dentro de los niveles 2 y 3, es decir los niveles superiores (25% por cada nivel).

Tabla 5.6.3. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación del descriptor sobre aprendizaje

| Aplicación del descriptor | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 44 | 40,74 |
| Nivel 1 | 10 | 9,26 |
| Nivel 2 | 27 | 25,00 |
| Nivel 3 | 27 | 25,00 |

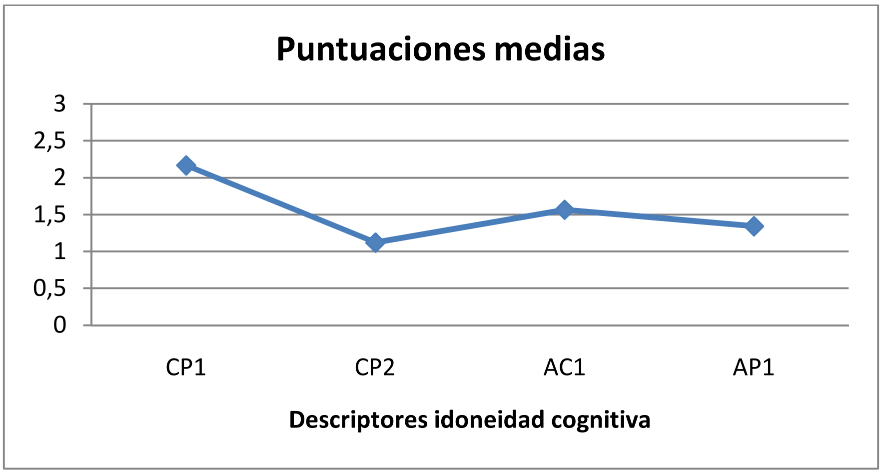
**Síntesis de la Idoneidad Cognitiva**

A continuación, en la tabla 5.6.4 y en la figura 5.6.1 se muestra la puntuación media de cada uno de los descriptores relacionados con la idoneidad cognitiva, con respecto a los distintos niveles de aplicación de los mismos.

Tabla 5.6.4. Medias y desviaciones típicas en los descriptores de la idoneidad cognitiva

| Descriptor | Media | D. Típica |
|---|---|---|
| CP1 | 2,17 | 0,86 |
| CP2 | 1,12 | 1,25 |
| AC1 | 1,56 | 1,21 |
| AP1 | 1,34 | 1,25 |
| Total | 1,55 | 1,21 |

Figura 5.6.1. Puntuaciones medias en los descriptores de la idoneidad cognitiva



Observamos que la idoneidad cognitiva resultó más sencilla que la epistémica, debido a que los estudiantes apreciaron que la unidad tiene en cuenta los conocimientos previos, así como el aprendizaje logrado por ellos mismos, siendo más confuso el tema de la evaluación, debido a que la tarea era excesivamente abierta. Los niveles medios se sitúan entre el 1,5 y 2, a pesar del alto número de respuestas en blanco.

## 5.7. ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD AFECTIVA

Otro de los componentes de la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la idoneidad afectiva (Godino, Contreras y Font, 2006), que consiste en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes con respecto a dicho proceso de aprendizaje y enseñanza. Según Godino (2009) la idoneidad afectiva "*está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como factores que dependen básicamente del alumnado y su historia escolar previa*" (p. 24). En nuestro caso los estudiantes valoraran la idoneidad afectiva del proyecto "Comprueba tus intuiciones sobre el azar", tomándose en ocasiones a ellos mismos como alumnos y por tanto midiendo la implicación e interés del conjunto de la clase en la que se realizó el experimento. Otros estudiantes evaluarán la idoneidad afectiva que podría tener el proyecto en miras a implementarse en los últimos cursos de Educación Primaria.

Al igual que el análisis de la idoneidad cognitiva, el análisis de la idoneidad afectiva del proyecto por parte de los alumnos tiene relación, en la terminología de Ball, Lubienski y Mewborn (2001), con el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes.

### 5.7.1. INTERESES Y NECESIDADES

Un primer punto a tener en cuenta a la hora de analizar la idoneidad afectiva de un proceso de enseñanza y aprendizaje matemático son los intereses y necesidades que puede suscitar dicho proceso en los alumnos que participen de él. Para ello se deben analizar por separado los siguientes descriptores:

*I1. Las tareas tienen interés para los alumnos.* Se espera que los alumnos se vean envueltos en la dinámica de la realización de un proyecto y se sientan interesados en esta forma de trabajar la estadística. Los proyectos aumentan la motivación de los estudiantes (Holmes, 1997), puesto que los datos surgen de un problema relevante para el alumno, tienen para él un significado y tienen que ser interpretados. Por otro lado, el tema del proyecto, y la constatación de sus intuiciones incorrectas, podría resultar de interés. Se espera que estos puntos sean analizados por los futuros profesores.

*I2. Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.* En relación con este descriptor los alumnos de nuestra muestra podrían valorar la utilidad de la estadística a la hora de resolver un proyecto que puede ser considerado como una pequeña investigación (McGilliwray y Pereira-Mendoza, en preparación). Además se espera constaten que el análisis de datos y el trabajo con representaciones gráficas puede ser de gran utilidad para formar ciudadanos cultos estadísticamente (Ridgway, Nicholson y McCusker, 2008).

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero se centra en aspectos anecdóticos o no estrictamente centrados en los intereses del alumnado, o simplemente aplica el descriptor de una manera muy incompleta. La siguiente respuesta de la alumna PC podría no ser considerada como errónea, ya que relaciona la estadística con los intereses de los alumnos y la vida cotidiana. Pero lo hace en general y no en particular para el proyecto que realizaron. Por ello esta respuesta no puede ser considerada dentro del nivel siguiente, ya que es imprecisa.

> *"Dado que la estadística está relacionada con hechos de la vida cotidiana provoca un mayor grado de interés por parte del alumno"* (Alumna PC, descriptor I2).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor observando el interés de la actividad y en qué modos dicho proyecto promueve valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana. Destacamos el gran número de alumnos que hacen referencia a las representaciones gráficas, tanto en el sentido de promover el interés en la realización del proyecto como en la importancia de éstas en la vida profesional y personal. La alumna DB resalta que en determinados trabajos puede ser de gran utilidad los conocimientos trabajados con el proyecto, en particular destaca el trabajo con gráficos estadísticos, considerando el trabajo con representaciones gráficas como útil para la vida real.

> *"Podemos valorar la utilidad que tiene las matemáticas, en cuanto a este tema, para la vida cotidiana y profesional ya que en un futuro para diversos trabajos se pedirán lo que hemos elaborado en la tabla. Los niños en el colegio, al realizar esa actividad se darán cuenta de la importancia que tiene en la vida*

*real porque es útil saber manejar datos, gráficos" (*Alumna DB, descriptor I2).

En la tabla 5.7.1 se muestra la distribución de los estudiantes según los distintos niveles de aplicación de los descriptores, que acabamos de detallar, correspondientes a los intereses y necesidades. Lo primero de todo, se observa que el porcentaje de alumnos que no aplica el descriptor I2 es del 37,04% que es bastante mayor que el porcentaje de alumnos que no aplica el descriptor I1 (10,19%), esto puede ser debido a que los alumnos, en su mayoría se sintieron interesados en averiguar cuáles eran sus intuiciones; pero les resultó más difícil apreciar la utilidad de la actividad. Destacar también que el porcentaje de estudiantes que aplica el descriptor I1 dentro del nivel superior (nivel 3), es del 45,37%, bajando este porcentaje al 25% en el caso de alumnos que aplican el descriptor I2 a nivel 3.

Tabla 5.7.1. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre intereses y necesidades

| Aplicación del descriptor | I1 | I2 |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 11(10,19) | 40(37,04) |
| Nivel 1 | 27(25,00) | 22(20,37) |
| Nivel 2 | 21(19,44) | 19(17,59) |
| Nivel 3 | 49(45,37) | 27(25,00) |

### 5.7.2. ACTITUDES

Otro componente de la idoneidad afectiva son las actitudes del alumnado con respecto a los procesos de instrucción matemática en los que participan. El aspecto afectivo es muy importante en la formación de profesores, ya que creencias incorrectas o actitudes negativas podrían condicionar la enseñanza y repercutir en las futuras actitudes de sus alumnos (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004a). Es por ello importante también que sepan valorarlas en sus estudiantes. Para evaluar dicha componente se utilizaron los siguientes descriptores:

*ACT1.Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.* Se trata de evaluar si el proyecto propuesto en la unidad didáctica facilita la participación en diversas actividades de su realización. Se espera que los alumnos comenten distintas fases del proyecto como por ejemplo la realización del experimento, el cual realizaron todos los alumnos de la clase, fomentando por lo tanto la participación. Además, después de la recogida de datos, cada estudiante tuvo que realizar un informe individual para responder a una pregunta, por lo que los alumnos tuvieron que ser responsables en la realización de la tarea pues se les dio una semana para que entregasen sus resultados.

*ACT2.Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.* En la implementación del proyecto se hicieron varios debates, en los cuales todos pudieron dar su opinión, respetándose las opiniones y argumentos que se pusieron en juego. Por tanto la actividad tiene fases en las que claramente los alumnos pueden argumentar sus ideas delante de todos sus compañeros.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2*. El estudiante aplica el descriptor pero se centra en aspectos anecdóticos, no estrictamente centrados en las actitudes del alumnado, o lo aplica de manera incompleta. En este ejemplo, la alumna EA, aplica el descriptor ACT1 pero lo hace de una manera muy imprecisa, ya que es verdad que los alumnos participaron en el lanzamiento real de la moneda, pero no hace referencia en ningún momento a si el proyecto fomenta o no la participación de los alumnos.

> *"Los alumnos participan en el lanzamiento real de la moneda al aire"* (Alumna EA, descriptor ACT1)

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor, teniendo en cuenta momentos en los cuales se fomenta la participación y de qué modo se fomenta la argumentación en situaciones de igualdad. Por ejemplo, el alumno JM aplica el descriptor ACP1 de una manera muy completa, ya que pone ejemplos de secuencias de la actividad en las que se promueve una actitud participativa. Además justifica elementos del descriptor como son la perseverancia y la responsabilidad.

> *"Aquí las actitudes se ven claramente ya que se promueve la participación en las actividades de todos los compañeros al hacer preguntas del tipo: ¿cuántas veces hay que lanzarla? ¿Es normal que me salgan 4 caras seguidas? … se anima a los alumnos a estar atentos de los compañeros. Vemos esta actitud participativa en la página 5 en el ejercicio 4, al hablar de comparar resultados con los de tus compañeros, analizar los datos, ayudar al profesor a recoger datos. Se favorece, como no, la responsabilidad al hacer que el alumno esté pendiente de su moneda, de que haga los lanzamientos pedidos, los anote correctamente y también al hacerlo reflexionar sobre las soluciones obtenidas se hace que el alumno se haga preguntas sobre ellas, se responsabilice de lo que le ha salido y lo comprenda para poder explicarlo"* (Alumno JM, descriptor ACP1).

En la tabla 5.7.2 se muestra la distribución de los estudiantes según los distintos niveles de aplicación de los descriptores ACT1 y ACT2, correspondientes al componente de actitudes de la idoneidad afectiva. En dicha tabla se muestra que el porcentaje de estudiantes que no aplica el descriptor ACT1 es del 25% y que dicho porcentaje crece al 58,33% de alumnos que no aplican el descriptor ACT2. Destacar que en la aplicación del descriptor ACT1 el mayor porcentaje de alumnos lo hace a nivel 3 (35,19%), para el caso del descriptor ACT2, el mayor porcentaje de alumnos se da dentro del nivel 0, es decir, alumnos que no aplican dicho descriptor, seguido dicho porcentaje por el 20,37% de alumnos que lo aplican a nivel 3.

Tabla 5.7.2. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre actitudes

| Aplicación del descriptor | ACT1 | ACT2 |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 27(25,00) | 63(58,33) |
| Nivel 1 | 31(28,70) | 14(12,96) |
| Nivel 2 | 12(11,11) | 9(8,33) |
| Nivel 3 | 38(35,19) | 22(20,37) |

### 5.7.3. EMOCIONES

Por último, analizamos la componente de la idoneidad afectiva correspondiente a las emociones. Cuando se estudia una materia, se desarrollan una serie de sentimientos, tales como gusto o disgusto; miedo o interés; aburrimiento o entretenimiento; valoración o falta de valoración hacia la misma. La diferencia entre creencias y actitudes es que las primeras están más relacionadas con la cognición y las segundas con los afectos. (Estrada, 2002). Para valorar dicha componente se tienen en cuenta los dos siguientes descriptores:

*E1.Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.* Los estudiantes han de valorar si en la elaboración del proyecto se anima a que todos ellos trabajen y no tengan miedo a equivocarse. A este respecto se espera que el trabajo con proyectos estadísticos y la realización de experimentos aleatorios en el aula sea un vehículo para que los alumnos superen su posible miedo a enfrentarse a problemas de estadística (Starkings, 1997).

*E2. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.* Durante la realización de la actividad, los alumnos realizaron un informe escrito, en el que, como vimos en el capítulo anterior, realizaron gráficos para resolver el problema planteado. La mayoría de los estudiantes se esforzaron en la claridad y presentación estética de dichos gráficos, utilizando colores y otros elementos visuales para diferenciar las variables y resaltar sus características. Esperamos que los estudiantes valoren que, por medio de esta actividad, no sólo se resaltan las cualidades estéticas de los gráficos, sino en general de las matemáticas. Respecto al tema de la precisión, de hecho, la probabilidad es la parte de la matemática que modeliza la incertidumbre; esperamos que también los estudiantes lo reconozcan, así como que las cualidades de precisión y aproximación se complementan en las matemáticas.

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas en que los alumnos aplican estos descriptores a nivel 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero se centra en aspectos más anecdóticos referentes a las emociones, o aplica el descriptor de una manera muy incompleta, en muchas ocasiones justificando sus argumentos con sus ideas previas. En el siguiente ejemplo, la alumna TA aplica el descriptor E2, llegando a la conclusión que la actividad no resalta ni la estética ni la precisión de las matemáticas. Aunque hace referencia a que la probabilidad, en cierto modo se contrapone a la precisión, no hace referencia a la parte estética de los gráficos.

> *"No se resaltan cualidades de estética y precisión ya que la probabilidad no es precisa ni exacta y existen distintas combinaciones"* (Alumna TA, descriptor E2).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor correctamente, haciendo referencia a las emociones provocadas en los estudiantes durante el proceso de estudio. La alumna AG, destaca que el hecho de que los alumnos realicen un proyecto para responder a una pregunta de investigación y para ello recojan sus propios datos, resulta de interés para los alumnos, despertando su autoestima y evitando el rechazo a trabajar temas de estadística, viendo la utilidad de esta; este tipo de posibilidades que ofrece el trabajo con proyectos estadísticos, junto con otras que no destaca la alumna, ya han sido mostradas en trabajos previos (Díaz y Arteaga, 2008 y Díaz, Arteaga y Batanero, 2007).

> *"Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas, ya que las actividades se hacen a través de la práctica del lanzamiento de la moneda, y de este modo los alumnos ven lo que ocurre, es algo real, no abstracto y les llama la atención"* (Alumna AG, descriptor E1).

Una vez se ha explicado cómo se valoraron y clasificaron las respuestas de los estudiantes, presentamos la distribución de los estudiantes según los distintos niveles de aplicación de los descriptores correspondientes a las emociones. En la tabla 5.7.3 se muestran dicha distribución.

Tabla 5.7.3. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre las emociones

| Aplicación del descriptor | E1 | E2 |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 46(42,59) | 75(69,44) |
| Nivel 1 | 17(15,74) | 13(12,04) |
| Nivel 2 | 19(17,59) | 14(12,96) |
| Nivel 3 | 26(24,07) | 6(5,56) |

Como se observa en la anterior tabla, en la aplicación de los descriptores relacionados con las emociones, observamos un alto porcentaje de alumnos que no aplican dichos descriptores, siendo del 42,59% para el caso del descriptor E1 y subiendo este porcentaje hasta el 69,44% en el caso del descriptor E2. Destacar que para la aplicación del descriptor E1, el mayor porcentaje de aplicación del descriptor, sin contar el nivel 0, se da en el nivel superior (nivel 3). Siendo un 24,07% de los alumnos los que llegan al nivel superior, llegando a concluir los aspectos por los cuales el proyecto puede ser o no útil para fomentar la autoestima de los estudiantes y evitar miedos o fobias frente al trabajo con temas de estadística.

La tabla 5.7.3 muestra resultados más pobres en el caso de la aplicación del descriptor E2, por lo que podemos concluir que fue difícil de aplicar, ya que a parte de un alto porcentaje de alumnos que no lo aplica (69,44%), sólo un 5,56% llegan al nivel 3 de aplicación del descriptor y un 12,96% al nivel 2. Fue más sencillo para los alumnos valorar el interés personal del proyecto (al hallarse ellos mismos interesados), que la promoción de actitudes positivas hacia la matemática o las emociones.

**Síntesis de la idoneidad afectiva**

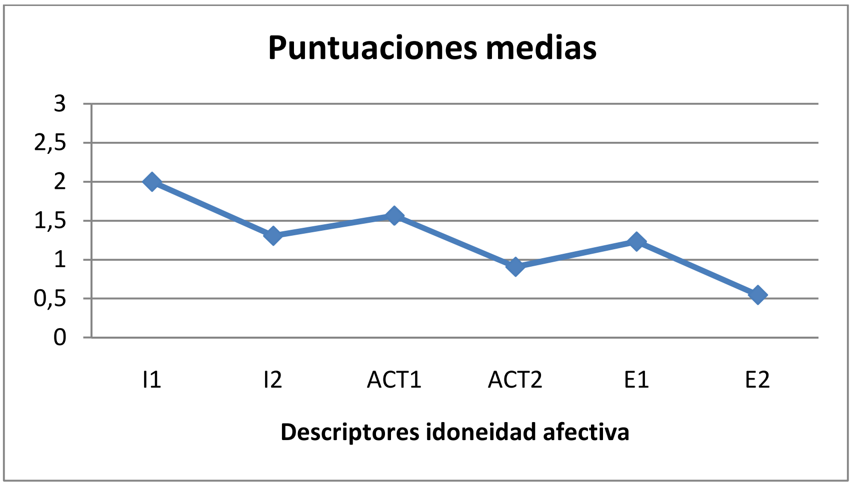
A continuación en la tabla 5.7.4 y la figura 5.7.1 se muestra la puntuación media con respecto al nivel de aplicación de cada uno de los distintos descriptores relacionados con la idoneidad afectiva.

Observamos una variedad en los distintos niveles de aplicación de los distintos descriptores, yendo desde una puntuación media mínima de 0,5 a una máxima de 2, siendo el descriptor que resultó más fácil el I1. El descriptor que resultó más difícil a los futuros profesores de nuestra muestra es el que trata de las emociones, en particular de las cualidades estéticas y de precisión de las matemáticas, en este caso la puntuación media no llega ni al nivel de aplicación 1.Los descriptores relacionados con las actitudes, están entre una puntuación aproximada de 1,5 en el caso del descriptor ACT1, que consiste en decidir si el proyecto promueve la participación de los estudiantes en la actividad, a prácticamente una puntuación media de valor 1 en el caso del descriptor ACT2, referente a las argumentaciones en situaciones de igualdad.

Tabla 5.7.4. Medias y desviaciones típicas en los componentes de la idoneidad afectiva

| Descriptor | Media | D. Típica |
|---|---|---|
| I1 | 2 | 1,05901 |
| I2 | 1,30556 | 1,211 |
| ACT1 | 1,56481 | 1,20957 |
| ACT2 | 0,907407 | 1,21929 |
| E1 | 1,23148 | 1,23505 |
| E2 | 0,546296 | 0,921034 |
| Total | 1,26 | 1,23 |

Figura 5.7.1. Puntuaciones medias en los descriptores de la idoneidad afectiva



## 5.8. ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD MEDIACIONAL

La idoneidad mediacional, es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje (Godino, Contreras y Font, 2006). Su análisis requiere que el futuro profesor reconozca los medios materiales utilizados para la enseñanza de un cierto tema, y sea capaz de reconocer su presencia o ausencia en el proceso de estudio propuesto, así como su uso adecuado. Además ha de tener en cuenta el número de alumnos, el horario y las condiciones del aula, y el tiempo didáctico, ya sea tiempo presencial, como no presencial.

El análisis de la práctica profesional del profesor de matemáticas implica centrarnos no solo en el uso de los instrumentos por parte del profesor, sino también en cómo el profesor comprende el cómo usarlos y para qué propósito (Llinares, 2000). Godino (2009) indica que el análisis de la idoneidad mediacional por parte de los propios profesores les permite profundizar en el conocimiento del contenido matemático y la enseñanza en la terminología de Ball, Lubienski y Mewborn (2001). A continuación analizamos las distintas componentes a tener en cuenta en la idoneidad mediacional.

### 5.8.1. RECURSOS MATERIALES

Sobre este componente de la idoneidad mediacional se entregó a los alumnos los dos descriptores que se analizan a continuación.

*RM1. El uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.* Se espera que los estudiantes identifiquen los recursos materiales empleados (moneda, pizarra, lápiz o papel y calculadora; también ordenadores en el caso de que los utilizaran). Este proyecto en concreto es bastante versátil y no requiere muchos recursos materiales, de modo que algún estudiante puede hacer referencia a que se puede adaptar el proyecto según el tipo de material disponible. Se espera que los estudiantes indiquen que estos recursos y el proyecto en si mismo permitió presentar una buena situación de la que surgió el lenguaje, procedimientos y argumentos. Además, como se describió en el capítulo 4 y se ha mostrado en trabajos previos (Arteaga 2008, Arteaga y Batanero, 2010), determinados alumnos trabajaron con la hoja Excel lo que les permitió explorar distintos lenguajes y representaciones gráficas.

*RM2. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.* En concreto en la experiencia no hubo tiempo para presentar nuevas definiciones o incluso recordar algunos conceptos estadísticos, aunque sí se mostró algún ejemplo en la pizarra de algún gráfico estadístico. Otros conceptos como el de racha y racha mayor fueron ilustrados mediante la experimentación al obtener las secuencias real y simulada del lanzamiento de la moneda. Esperamos que los estudiantes hagan énfasis en alguno de estos aspectos.

A continuación analizamos algunos ejemplos de los niveles 2 y 3 en estos descriptores.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en los recursos específicamente usados en el proyecto, sino en aspectos parciales o anecdóticos. Por ejemplo, el alumno JG aplica el descriptor RM1 a la situación concreta, pero de una manera imprecisa, observando como único recurso material las hojas que repartió el profesor. Su explicación debería haber sido más concreta, haciendo referencia al uso de la moneda en la realización del experimento, o de otros recursos tradicionales. Además el profesor en la segunda sesión utilizó recursos informáticos para resolver la tarea que tuvieron que hacer y presentar a los alumnos errores previsibles.

> *"Sólo hemos utilizado recursos tradicionales. El profesor ofreció unos papeles y sobre ellos estuvimos trabajando"* (Alumno JG, descriptor RM1).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a recursos utilizados en el proyecto o que podrían utilizarse. Por ejemplo, la alumna SC aplica el descriptor RM1 correctamente y de manera muy completa. Hace referencia a que el proyecto ofrece grandes posibilidades para utilizar recursos informáticos, destacando que también puede realizarse con pocos recursos tradicionales, como realmente se realizó en el aula de clase. Este tipo de razonamiento muestra un análisis de la situación concreta, además de una reflexión crítica para destacar los posibles recursos manipulativos con los que se podría trabajar.

> *"Resulta evidente que el experimento estadístico estudiado permite el uso de nuevas tecnologías que ayudan a comprender y visualizar de un modo más efectivo los diferentes conceptos matemáticos, así como su interpretación. El estudio se puede realizar con escaso material, pero el nivel de profundización es mejor cuanto mayor sea el número de ordenadores o calculadoras, y menor sea el ratio profesor-alumno (un menor ratio implica una enseñanza mucho más individualizada)"* (Alumna SC, descriptor RM1).

En la aplicación de estos descriptores, sobre todo del descriptor RM1, muchos estudiantes sugieren que en la realización del proyecto individual se podría haber usado algún software informático, en consonancia con lo sugerido en los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2006 a y b). Resaltan las posibilidades que ofrecen la hoja Excel a la hora de realizar representaciones gráficas e investigar sobre los diferentes gráficos disponibles; en este sentido, estos instrumentos ayudan a mejorar la cultura estadística, como indican Ridgway, Nicholson y McCusker (2008). También analizan cuál o cuáles de ellos se adaptaría mejor a la situación particular de la unidad didáctica, por ejemplo, muchos alumnos también redactaron su informe utilizando el Word. A continuación mostramos un ejemplo:

> *"Como materiales se usaron monedas que los propios alumnos lanzaron. Ordenadores. Hojas cuadriculadas para anotar cada uno sus resultados de la secuencia simulada y real. De recursos informáticos se utilizaron el Microsoft Word y Excel, con los que se pudieron hacer gráficas y calcular la moda, media, mediana y rango de forma diferente a la habitual"* (Alumna MAH, descriptor RM1 y RM2).

En la tabla 5.8.1 se muestran la frecuencia (y porcentaje) de alumnos dentro de los distintos niveles a la hora de aplicar los descriptores RM1 y RM2. Llama la atención que, el porcentaje de alumnos que no aplica el descriptor RM2 (68,52%, nivel 0) es mucho mayor que el porcentaje de alumnos que no aplica el descriptor RM1. Se observa también que el porcentaje de alumnos que aplican los descriptores RM1 y RM2 a nivel 1 es del 12,04%.

Destacamos que en la aplicación del descriptor RM1 el mayor porcentaje de estudiantes lo hace a nivel 3 (62,96%), lo que indica que una mayoría de estudiantes supo relacionar dicho descriptor con la unidad didáctica que se les planteó. Es decir, los estudiantes valoraron las posibilidades del proyecto para utilizar una variedad de recursos, y las posibilidades de las herramientas tecnológicas para ayudar a los estudiantes a visualizar y explorar datos estadísticos y en el aprendizaje de la estadística (Garfield y Ben-Zvi, 2007).En cambio, a la hora de aplicar el descriptor RM2, referido a la contextualización de definiciones y propiedades, sólo el 12,96% lo hace dentro del nivel 3. Ello a pesar de que Garfield y Ben-Zvi (2007) indican que los estudiantes aprenden mediante la práctica y construcción de conocimiento y cuando se ven activamente envueltos en actividades de aprendizaje y que Graham (1987) sugiera que en un proyecto se integran los contenidos de la estadística dentro del proceso general de una investigación.

Debido a que, durante la puesta en práctica de la unidad didáctica por medio de la realización del proyecto, no se introdujeron nuevas definiciones o propiedades, influye en que los estudiantes no supieran cómo relacionar este descriptor con la situación de enseñanza y aprendizaje en la que se vieron envueltos. Fueron pocos los que indicaron que en la presentación y realización del proyecto, el descriptor RM2 no está apenas presente o dieron ideas para que su presencia dentro de la componente de recursos materiales fuese más alta.

Tabla 5.8.1. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre recursos materiales

| Aplicación del descriptor | RM1 | RM2 |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 6(5,56) | 74(68,52) |
| Nivel 1 | 13(12,04) | 13(12,04) |
| Nivel 2 | 21(19,44) | 7(6,48) |
| Nivel 3 | 68(62,96) | 14(12,96) |

### 5.8.2. NÚMERO DE ALUMNOS, HORARIO Y CONDICIONES DEL AULA

El número de alumnos, el horario y las condiciones del aula son también características importantes a tener en cuenta a la hora de valorar la idoneidad mediacional de un proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y en la organización del trabajo del aula. Se trata de valorar si el número de alumnos permite un trabajo apropiado en el aula, así como ver si las condiciones físicas (agrupación de mesas, disposición de proyector y otros elementos) y el horario son los adecuados. Sobre este componente se dieron los siguientes descriptores:

*RA1. El número y la distribución de los alumnos permiten llevar a cabo la enseñanza pretendida.* En la Facultad de Educación, los cursos en que se llevó a cabo la experiencia estaban sobre cargados de estudiantes, pues son grupos muy numerosos. Ello impide que el profesor tenga una atención personalizada a cada estudiante. La corrección de la tarea, como se ha indicado, hubo que hacerla en forma grupal. Esto es un punto en que los alumnos podrían indicar que se podría mejorar la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

*RA2. El horario del curso es apropiado.* Debido a que los alumnos de nuestra muestra pertenecen a distintos grupos de la misma asignatura, algunos de ellos tenían horario de mañana más adecuado, pero otros tenían un horario de tarde muy inadecuado (7:30 a 9:30

de la tarde), en el cual estaban cansados después de todo el día. Esperamos que los alumnos valoren estos puntos y los indiquen en el informe, así como que aporten sugerencias a cerca de cómo mejorar la presencia de este descriptor en la unidad didáctica particular.

*RA3. El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.* El aula tenía bancas móviles, lo cual era adecuado para poder moverlas de unos sitios a otros para que los alumnos trabajasen en grupos. Se disponía, además de la pizarra, de proyector, ordenador y conexión a Internet, lo cual ayuda a mejorar la presentación del tema. Por otro lado, los alumnos estaban organizados en grupos de cuatro alumnos desde el comienzo de la asignatura y trabajaban usualmente con su grupo en la realización de las prácticas. Dentro del aula, el grupo trabajó en la forma habitual, aunque para esta práctica particular se pidió a los estudiantes realizar un informe individual, para obtener mayor volumen de datos y para recoger datos particulares de cada uno de los estudiantes. Se espera que los alumnos indiquen los aspectos positivos y negativos del aula y distribución en grupos en que trabajaron en la experiencia.

Respecto a estos descriptores mostramos a continuación ejemplos de los niveles 2 y 3.

*Nivel 2*. El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en aspectos relacionados con el número de alumnos y la distribución de estos, el horario o condiciones en el aula. En el siguiente ejemplo, se muestra el razonamiento llevado a cabo por la alumna RC, se propone que se utilicen los datos de todos los alumnos de la clase para desarrollar la actividad. Pero en la realización del proyecto, los alumnos tenían que analizar los datos de todos los compañeros para concluir sobre las intuiciones del conjunto de la clase. Además propone que se divida la clase en tres grupos para mejorar el desarrollo de la práctica, pero no da ninguna explicación o justificación a dicha sugerencia:

> *"La distribución de los alumnos estaría bien si se hiciera la actividad utilizando todos los datos de los compañeros de la clase, pero si se hiciera como yo he propuesto, en 3 grupos, situaría a los alumnos de modo que formaran 3 grupos"* (Alumna RC, descriptor RA1).

*Nivel 3*. El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a la situación analizada. En el ejemplo siguiente podemos observar como la alumna hace referencia a los descriptores RA1 y RA2 en relación al desarrollo de la unidad didáctica en su clase, hacen mención a la distribución de los alumnos en la clase y durante la realización de la práctica en grupos de cinco y destacando que esto fue beneficioso para el desarrollo de la actividad.

*"Para la realización de las prácticas, la clase se divide en dos, A1 y A2 y cada uno de esos grupos además tiene grupos de cinco personas. En esta práctica hemos analizado los resultados individualmente, para que así el profesor pueda tener una idea de los conocimientos adquiridos por cada uno de nosotros. Además el horario es adecuado ya que es la primera hora de la mañana, cuando todos estamos con ganas de realizar tareas, ya que todavía no estamos cansados"* (Alumna SCJ, descriptores RA1 y RA2).

Una vez se han definido los niveles de aplicación de los descriptores correspondientes al componente del número de alumnos, horario y condiciones del aula, en la tabla 5.8.2. se muestran los resultados. El porcentaje de alumnos que no aplica el descriptor (nivel 0) crece del 32,41% para RA1, a 50,93% para RA2 y hasta un 54,63% para RA3. Para los descriptores RA2 y RA3 el porcentaje mayor de alumnos se da dentro del nivel 0, seguido de un 25,93% de alumnos que aplican el descriptor RA2 dentro del nivel superior y un 20,37% de los alumnos que aplican o evalúan el descriptor RA3 a nivel 3. En cuanto a la aplicación del descriptor RA1, el porcentaje de alumnos que no aplican dicho descriptor es el más bajo dentro de los descriptores pertenecientes a la componente en cuestión, y además un 35,19% de los alumnos aplican dicho descriptor dentro del nivel superior.

Tabla 5.8.2. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre nº de alumnos, horario y condiciones del aula

| Aplicación del descriptor | RA1 | RA2 | RA3 |
|---|---|---|---|
| Nivel 0 | 35(32,41) | 55(50,93) | 59(54,63) |
| Nivel 1 | 22(20,37) | 18(16,67) | 18(16,67) |
| Nivel 2 | 13(12,04) | 7(6,48) | 9(8,33) |
| Nivel 3 | 38(35,19) | 28(25,93) | 22(20,37) |

El porcentaje de alumnos que aplican los descriptores a nivel 1, es decir copian literalmente o casi literalmente la descripción del descriptor que se les proporcionó, es del 20,37% para el descriptor RA1 y del 16,67% para los descriptores RA2 y RA3. El porcentaje de alumnos que aplican los descriptores a nivel 2 es el más bajo dentro de cada uno de los descriptores.

En resumen, la aplicación los descriptores de la idoneidad mediacional es buena en un porcentaje pequeño de estudiantes, y no se aplica o se aplica con poco nivel en la mayoría.

### 5.8.3. TIEMPO

Otro recurso importante es el tiempo (tiempo de enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje), que ha de ser suficiente para finalizar la tarea con comodidad, pero no tan amplio como para que se den espacios muertos. Hay que tener en cuenta que en el tiempo hay que incluir, el tiempo de trabajo en la casa y tiempo dado para completar el trabajo, así como las dos sesiones de aula. Sobre este componente de la idoneidad mediacional se entregó a los alumnos tres descriptores, pidiéndoles que los valoraran en la situación analizada. Estos descriptores se analizan a continuación.

*RT1. El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida.* Teniendo en cuenta el experimento aleatorio fue realizado en la clase y no hubo problemas para terminarlo en ninguno de los grupos, y que se dio a los alumnos toda una semana para completar el proyecto en casa, se espera que los estudiantes indiquen que el tiempo fue suficiente.

*RT2. Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema.* No se hizo un tratamiento específico de los contenidos estadísticos, pero se dedicó una parte del tiempo de corrección al análisis de los errores cometidos en los gráficos producidos por los estudiantes. En este sentido el alumno podría indicar que se ha dedicado suficiente tiempo al tratamiento de los gráficos y sus errores.

*RT3. Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.* La valoración de este apartado es similar a la anterior, ya que en la corrección del proyecto en la segunda sesión de clase de la práctica, se analizaron los errores que los alumnos cometieron en año anteriores al realizar los gráficos estadísticos que utilizaron en el desarrollo del proyecto. Puede ser que determinados alumnos piensen que otro tipo de contenidos que podrían ser utilizados en el desarrollo del proyecto, como la desviación típica o la varianza, hubiesen merecido una mayor atención.

Presentamos seguidamente algunos ejemplos de  alumnos que aplican los descriptores en los niveles 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en la experiencia vivida sino en aspectos anecdóticos. En el siguiente ejemplo, la alumna SA, aplica el descriptor RT1 a la experiencia de enseñanza vivida, por lo cual ya supone un nivel de aplicación mayor del nivel 1. Pero dicha alumna se limita a explicitar el tiempo en el que se llevó a cabo la práctica de enseñanza, sin valorar si dicho tiempo fue suficiente o si el tiempo que tuvieron para realizar el proyecto fue el adecuado.

*"El tiempo empleado es de tres sesiones"* (Alumna SA, descriptor RT1).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a la situación vivida. A continuación mostramos un ejemplo que hacen referencia explícita al tiempo dedicado al trabajo con los gráficos estadísticos y las dificultades que puede presentar el trabajo con este tipo de representaciones. Queremos destacar que la alumna ponen de manifiesto la dificultad que supone la elaboración de gráficos estadísticos correctamente y afirma que uno de los motivos por los que cree que sería necesario más tiempo en la realización de la práctica es porque sería necesario para el trabajo con las diversas gráficas y el razonamiento con estas.

*"Desde mi punto de vista para poder realizar la actividad completa de modo adecuado, si se necesitaría más de dos horas,, puesto que el realizar diversas gráficas y razonar adecuadamente cada una de las actividades lleva su tiempo. Además dos horas es tiempo escaso para que un niño asimile adecuadamente todos los conceptos que aparecen en dichas actividades"* (Alumna MLA, descriptor RT1 y RT2).

A continuación vamos a estudiar la distribución de los futuros profesores de nuestra muestra según el nivel de aplicación de los descriptores (tabla 5.8.3). El 20,37% de los alumnos de la muestra no aplica el descriptor RT1 (nivel 0), pero dicho porcentaje aumenta drásticamente en los siguientes descriptores, (74,07%  no aplican el descriptor RT2 y 79,63% no aplican el descriptor RT3). Además, un 3,70% de los alumnos aplica los descriptores RT2 y RT3 a nivel 2, y el resto de porcentaje se divide entre los niveles 1 y 3 de manera similar, siendo también estos porcentajes no muy altos debido al gran número de alumnos que no aplica estos dos descriptores.

Tabla 5.8.3. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre recursos temporales

| Aplicación del descriptor | RT1 | RT2 | RT3 |
|---|---|---|---|
| Nivel 0 | 22(20,37) | 80(74,07) | 86(79,63) |
| Nivel 1 | 17(15,74) | 11(10,19) | 10(9,26) |
| Nivel 2 | 25(23,15) | 4(3,70) | 4(3,70) |
| Nivel 3 | 44(40,74) | 13(12,04) | 8(7,41) |

Destacamos que  un 40,74% del total de los alumnos  aplica el descriptor RT1 a nivel 3 y un 23,15% a nivel 2; conjuntamente un 63,89% del total de los alumnos aplica el descriptor RT1 dentro de los dos niveles superiores de aplicación, es decir, que al menos relaciona el descriptor en cuestión con la situación particular que están analizando. El factor tiempo, en consecuencia, resultó confuso de evaluar para los estudiantes.

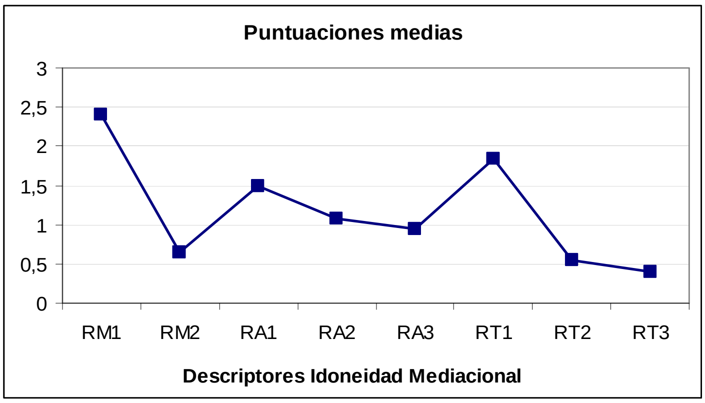
**Síntesis de idoneidad mediacional**

Una vez que se han descrito y analizado las distintas componentes y descriptores de la idoneidad mediacional de un proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, vamos a estudiar las puntuaciones medias y desviaciones típicas obtenidas en la aplicación de cada uno de dichos descriptores (tabla 5.8.4).

Tabla 5.8.4. Puntuaciones medias y desviaciones típicas en descriptores de la idoneidad mediacional

| Descriptor | Media | D. Típica |
|---|---|---|
| RM1 | 2,40 | 0,91 |
| RM2 | 0,64 | 1,07 |
| RA1 | 1,5 | 1,27 |
| RA2 | 1,07 | 1,27 |
| RA3 | 0,94 | 1,21 |
| RT1 | 1,84 | 1,17 |
| RT2 | 0,54 | 1,03 |
| RT3 | 0,39 | 0,87 |
| Total | 1,17 | 1,28 |

Figura 5.8.1. Puntuaciones medias y desviaciones típicas en descriptores de la idoneidad mediacional




En la tabla 5.8.4 y figura 5.8.1 podemos observar que dentro de cada una de las distintas componentes, las puntuaciones medias decrecen, siendo este decrecimiento muy drástico en la componente de los recursos materiales, donde la puntuación media del descriptor RM1 es prácticamente 2,5, es decir, una puntuación media muy alta considerando que el valor máximo fue 3, y sin embargo la puntuación media para el descriptor RM2 es del 0,64. En general no se alcanza en promedio el nivel 2, salvo en el RM1 (uso de materiales manipulativos e informáticos) y RT1 (tiempo destinado a la tarea). Como hemos indicado, el uso del material informático y su adecuación para el trabajo con proyectos, resaltado por diversos autores, fue bien percibido y valorado por los estudiantes, mientras que no supieron valorar los aspectos relativos al tiempo, horario o distribución del aula.

## 5.9. ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD INTERACCIONAL

Analizamos en este apartado la idoneidad interaccional o grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. De acuerdo a Godino (2009), un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. El autor indica que la reflexión sistemática sobre las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, y la identificación de las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje los modos de gestión de la clase, permiten incrementar el conocimiento del contenido y la enseñanza.

La idoneidad interaccional se valora por la medida en que las configuraciones didácticas posibilitan que el profesor y los alumnos identifiquen conflictos semióticos potenciales (a priori) y efectivos (durante el proceso de instrucción) y permita resolver dichos conflictos mediante la negociación de significados (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009). En este sentido, se espera que los estudiantes perciban que la forma en que se ha trabajado el proyecto planteado permite diversas formas de discurso en el aula: Al comienzo del mismo se organiza un discurso dirigido por el profesor, en el que los alumnos libremente expresan sus ideas previas sobre el azar y sobre sus propias intuiciones al respecto. Ya en esta sesión aflorarán algunos conflictos e ideas erróneas de los estudiantes. En lugar de rebatirlas directamente, el profesor espera a que los estudiantes confronten ellos mismos estas ideas con los resultados empíricos del experimento y el análisis de datos. La intención es crear en los estudiantes un conflicto cognitivo que ellos mismos traten de resolver.

El trabajo en pequeño grupo dentro del aula favorece la interacción entre estudiantes y asimismo el contraste de diferentes puntos de vista, tanto sobre las propias intuiciones, como sobre la mejor forma de analizar los datos recogidos. La preparación de un informe escrito favorece la capacidad de argumentación del estudiante; al poner por escrito no sólo los resultados del análisis, sino también sus reflexiones al respecto, el estudiante profundiza en la actividad y se consigue un aprendizaje de mayor calidad. Por último la corrección del proyecto en clase, aunque, como hemos indicado no pudo ser individual, sino colectiva, sirve para resolver los posibles errores e institucionalizar el conocimiento adquirido.

### 5.9.1. INTERACCIÓN DOCENTE-DISCENTE

El discurso del profesor es un componente importante de su práctica profesional, pues dicho discurso tiene como objetivo generar en el estudiante un tipo de práctica operativa y una reflexión discursiva sobre ella (práctica discursiva) que promueva su aprendizaje matemático (Font, Planas y Godino, 2010). Según los autores, el profesor puede utilizar este discurso para desempeñar, entre otras, las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación y evaluación de los conocimientos. Sobre este punto se presentaron los siguientes descriptores:

*DD1. El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)*. Se espera que los alumnos valoren si la presentación hecha por el profesor del proyecto, el establecimiento de las consignas de trabajo y la posterior corrección de las soluciones fue clara y adecuada a los conocimientos que ellos tenían sobre el tema.

*DD2. El profesor reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.).* Dada la gran diversidad de interacciones didácticas ocurridas en el proceso de instrucción, conviene hacer reflexionar al futuro profesor sobre las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico. De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007) entendemos por conflicto semiótico cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, en este caso, profesor y estudiante. En el proceso de trabajo con el proyecto surgieron múltiples conflictos, en relación con la idea de aleatoriedad, así como con el trabajo con gráficos estadísticos, que se describieron con detalle en el capítulo 4. Se espera que se reconozca que la situación permitió hacer aflorar conflictos de los participantes sobre la idea de aleatoriedad, así como otros en la construcción de los gráficos.

*DD3. Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento.* Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) sugieren que los formatos de interacción basados en el trabajo cooperativo tienen potencialmente mayor idoneidad interaccional que las de tipo magistral y de trabajo individual, puesto que los estudiantes muestran su relación con los objetos matemáticos y, por lo tanto, el profesor tiene indicadores explícitos de dicha relación. Estos indicadores servirán al profesor para mejor evaluar y ayudar a superar los conflictos semióticos y dificultades de los estudiantes. En el trabajo con el proyecto el profesor no trató de imponer su opinión, sino de hacer debatir a los estudiantes las diferentes soluciones. Sólo en el caso de que algún error o conflicto importante se mantuviese, el profesor trató de reconducir a la clase hacia la expresión de ideas matemáticamente correctas.

*DD4. Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.* Con estos recursos, el profesor debe intentar gestionar un aprendizaje de tipo constructivista, partiendo de la situación didáctica, en este caso del proyecto. En la clase se utilizaron diversos modos de validación y argumentación. Se plantearon preguntas (por parte del profesor) para que los alumnos expresasen sus ideas sobre la aleatoriedad. El mismo análisis de datos y sus resultados se usaron como argumentos para apoyar las conclusiones sobre las intuiciones de la clase. El debate entre alumnos y alumno- profesor sirvió para resolver los conflictos planteados.

*DD5. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.* Esta inclusión se facilita, tanto por el trabajo en pequeño grupo, como por las frecuentes preguntas del profesor a la que los alumnos libremente podían dar respuesta, e incluso en la realización del experimento aleatorio de manera individual dentro del aula de clase para recoger los datos necesarios para la realización del proyecto.

Respecto a estos descriptores mostramos a continuación ejemplos de los niveles 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no centrándose en aspectos de las relaciones docente-discente, sino en aspectos muy generales sin ser aplicados a la situación particular de la realización del proyecto de análisis de datos. En este ejemplo la alumna JI aplica los descriptores DD1 y DD2, partiendo de una reflexión muy general de que el profesor y los alumnos deben interaccionar. No los aplica a la situación particular de aprendizaje y enseñanza que se está analizando, haciendo referencia a procesos de enseñanza y aprendizaje en general.

> *"El profesor y el alumno deben interactuar. El profesor explica el tema y los alumnos deben preguntar aquello que no entiendan, o decir, o argumentar y de esa manera participan y se implican los alumnos"* (Alumna JI, descriptor DD1 y DD2).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor relacionándolo con la unidad didáctica que tuvieron que analizar. En el ejemplo, la alumna SC aplica el descriptor DD5, resaltando que el trabajo con proyectos estadísticos favorece tanto la interacción del profesor con los alumnos como la integración de éstos en la dinámica de la clase. Además de poner de manifiesto que dicho trabajo crea un clima en el cual los alumnos y el profesor realizan preguntas y buscan soluciones conjuntamente (descriptor DD2). Argumenta que el trabajo con proyectos es una manera distinta de presentar la estadística y que resulta motivador para los alumnos, es decir, dicha alumna aplica también componentes de la idoneidad emocional.

> *"Al tratarse de una manera diferente en el estudio de las matemáticas, no sólo se favorece la motivación de los alumnos, también el grado de interacción con el profesor, volviéndose extremo en este caso. El trabajo de conceptualización y estudio de la estadística ayuda a la integración de los alumnos en la dinámica de la clase como resultado de un diálogo abierto entre el profesor y los alumnos basado en la realización de preguntas y posterior solución"* (Alumna SC, descriptor DD2 y DD5).

Una vez analizados los distintos descriptores de la componente relación docente-discente, en la tabla 5.8.1 se muestran los resultados. El porcentaje de alumnos que no aplican los distintos descriptores va aumentando desde el descriptor DD1 (14,81% ) , DD2 (48,15%), DD3 (65,74%), hasta el DD4 (74,07%) y baja en el DD5 (60,19%), que resultó más fácil de aplicar que los descriptores DD3 y DD4.

Tabla.5.9.1. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre las relaciones docente-discente

| Aplicación del descriptor | DD1 | DD2 | DD3 | DD4 | DD5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nivel 0 | 16(14,81) | 52(48,15) | 71(65,74) | 80(74,07) | 65(60,19) |
| Nivel 1 | 30(27,78) | 27(25,00) | 20(18,52) | 15(13,89) | 29(26,85) |
| Nivel 2 | 14(12,96) | 3(2,78) | 2(1,85) | 3(2,78) | 1(0,93) |
| Nivel 3 | 48(44,44) | 26(24,07) | 15(13,89) | 10(9,26) | 13(12,04) |

Como se puede observar los descriptores relacionados con la interacción docente-discente fueron difíciles de aplicar, posiblemente hubiese sido necesario realizar más actividades de análisis del discurso en el aula. El descriptor DD1 (presentación que hace el profesor del tema), fue el que proporcionó mejores resultados con 44,44% del total de los futuros profesores logrando el nivel 3, lo que indica que personalmente los estudiantes encontraron comprensible y adecuada la presentación del proyecto por parte del profesor. Sin embargo hay también un porcentaje muy alto de futuros profesores que lo aplican a nivel 1, es decir, copiando literalmente la descripción del descriptor.

El siguiente descriptor que resultó más fácil de aplicar y con mejores resultados fue el DD2, que trataba de la manera en que el profesor conoce y es capaz de resolver los conflictos de los alumnos, en este caso un 24,07% de los futuros profesores lo aplican a nivel 3, destacando también el porcentaje de los estudiantes que lo aplican a nivel 1 (25%). El resto de descriptores muestran un alto porcentaje de estudiantes que no los aplican y un bajo porcentaje de alumnos que aplican dichos descriptores dentro del nivel superior o nivel 3.

### 5.9.2. INTERACCIÓN ENTRE ALUMNOS

A continuación se muestran los descriptores pertenecientes a la componente Interacción entre alumnos. Como hemos indicado, estas interacciones son valoradas por Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), quienes sugieren que los formatos de interacción de basados en el trabajo cooperativo tienen potencialmente mayor idoneidad interaccional que las de tipo magistral y de trabajo individual. También Llinares (2000) resalta que las tareas del profesor están vinculadas a la gestión de la interacción entre los estudiantes y el conocimiento matemático que subyace a las tareas matemáticas propuestas para el trabajo de los alumnos.

*IA1. Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes.* Este diálogo, como se ha dicho se vio favorecido desde el comienzo del curso con el trabajo en pequeños grupos. Además en la práctica particular que se llevó a cabo en el aula de clase, el profesor en determinados puntos de realización del experimento aleatorio fomentó el debate entre alumnos, los cuales tuvieron que discutir y argumentar sobre sus intuiciones sobre el azar y en otras ocasiones sobre qué variables podrían utilizarse para comparar los datos que resultaron de la realización de los experimentos individuales.

*IA2. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.* Este es un aspecto que se debe valorar dentro de cada grupo, aunque el profesor estimuló a lo largo del curso la implicación de todos y cada uno de los estudiantes.

Respecto a estos descriptores mostramos a continuación ejemplos de los niveles 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en las relaciones entre alumnos, o en caso de centrarse lo hace de una manera muy general sin particularizar a la práctica que tuvieron que analizar. En el ejemplo, la alumna JI, aplica el descriptor IA2, pero no centrándose en la práctica llevada a cabo en la clase, sino que razona sobre lo que podría ser bueno en una situación de aprendizaje y enseñanza en general. Además debería haber clarificado a qué se refiere cuando dice que hay que crear un clima adecuado en la clase para comprender mejor cómo eso podría beneficiar a los alumnos para que se sintiesen integrados en todo momento.

> *"Para eso hay que crear un clima de clase adecuado, para favorecer el diálogo entre estudiantes y profesor y evitar así la exclusión"* (Alumna JI, descriptor IA2).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor a contenidos matemáticos. El grado de aplicación es variable, desde una aplicación incompleta a otras más amplias y que muestran un mayor conocimiento en los estudiantes. En este caso mostramos un ejemplo de aplicación de los descriptores IA1 y IA2, pero de manera incompleta. La alumna destaca que la realización del experimento aleatorio en el aula de clase permite que los alumnos interaccionen entre ellos, por lo tanto permite que se sientan participes de la práctica que están realizando, además de que permite que los alumnos comenten entre ellos los resultados de sus experimentos individuales. Hubiese sido preferible que la alumna pusiera más ejemplos de situaciones en las que se favorece el diálogo entre alumnos y se evita la exclusión de éstos, pero al menos la estudiante ha sido capaz de relacionar la aplicación de los descriptores con el desarrollo del proyecto estadístico que formaba parte de la práctica que realizaron los futuros profesores.

> *"Mientras se realiza el experimento de la moneda los alumnos interaccionan e incluso comentan sus resultados"* (Alumna CC, descriptor IA1 y IA2).

En la tabla 5.9.2 la distribución de los futuros profesores de nuestra muestra según el nivel de aplicación de los descriptores IA1 y IA2. En dicha tabla podemos observar que el porcentaje de futuros profesores que no aplica el descriptor IA1 es del 39,81%, aumentando dicho porcentaje al 61,11% para el caso de aplicación del descriptor IA2.

Tabla 5.9.2. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre interacción entre alumnos

| Aplicación del descriptor | IA1 | IA2 |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 43(39,81) | 66(61,11) |
| Nivel 1 | 14(12,96) | 16(14,81) |
| Nivel 2 | 8(7,41) | 3(2,78) |
| Nivel 3 | 43(39,81) | 23(21,30) |

El porcentaje de alumnos que aplican los descriptores a nivel 1, es decir copiando literalmente o casi literalmente los descriptores, es ligeramente mayor para el descriptor IA2. El porcentaje de futuros profesores que aplican los descriptores a nivel 2 es bajo en ambos casos y el porcentaje de futuros profesores que aplican el descriptor IA1 a nivel 3 es del 39,81% frente al 21,30% en el descriptor IA2 a nivel 3. Por lo tanto el análisis de estos resultados muestra que resultó de más fácil aplicación para los futuros profesores la aplicación del descriptor IA1 que el IA2.

### 5.9.3. AUTOMOMÍA Y EVALUACIÓN FORMATIVA

Una de las competencias transversales incluidas en los Decretos de Enseñanzas Mínimas (MEC 2006 a y b) y que se trata de fomentar con la enseñanza de las matemáticas es la *autonomía e iniciativa personal.* En este sentido los proyectos estadísticos son un instrumento idóneo para contribuir a esta competencia pues fomentan la capacidad de elegir con criterio propio los pasos en su realización, de ejercitar su imaginación y de llevar adelante las acciones necesarias para desarrollar las acciones y planes personales. Por otro lado, el trabajo y discurso en el aula, como se ha analizado permite recoger datos del aprendizaje de los estudiantes, que puede utilizarse para mejorar el proceso. Se incluyeron los siguientes descriptores, relacionados con el trabajo del alumno y el uso de la evaluación como modo de informar y mejorar la enseñanza:

*AE1. Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio.* Los proyectos aumentan la motivación y responsabilidad de los estudiantes (Holmes, 1997), puesto que los datos surgen de un problema relevante para el alumno, tienen para él un significado y tienen que ser interpretados, además de llevar a la toma de decisiones autónomas en su realización. Este proyecto particular se caracterizó por el grado de autonomía dado a los estudiantes, quienes tuvieron libertad para elegir los gráficos o cálculos estadísticos al trabajar con el proyecto.

*AE2. Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.* Los informes de los estudiantes fueron posteriormente analizados, pero esta corrección individual, como hemos dicho no estuvo disponible la segunda semana, cuando se analiza la idoneidad didáctica, aunque como ya hemos dicho, previo al análisis de la idoneidad didáctica del proyecto, el profesor realizó una presentación mostrando cómo realizar el proyecto, resaltando posibles conflictos y dificultades en la realización del mismo. Posteriormente los proyectos fueron revisados y se proporcionó un horario de consulta en tutoría para que aquellos que lo deseasen pasasen a ver la corrección del trabajo. De hecho fueron pocos los que pasaron por la tutoría, posiblemente les fuese suficiente la resolución conjunta hecha en clase.

Respecto a estos descriptores mostramos a continuación ejemplos de los niveles 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante aplica el descriptor pero no se centra en aspectos relacionados con la autonomía de los estudiantes ni con la evaluación formativa, y de centrarse lo hacen de manera muy general o superficial. En este ejemplo, el alumno JDG aplica el descriptor AE2 a la situación particular de la actividad realizada en clase, pero no completamente, ni se puede extraer de su explicación de qué manera el docente observa y tiene en cuenta el proceso cognitivo de los alumnos. Por lo tanto es una aplicación muy superficial, que aunque no copia literalmente el descriptor, no lo aplica de manera clara.

> *"El docente observa cómo los alumnos han realizado la actividad y el proceso que han seguido"* (Alumno JDG, descriptor AE2).

*Nivel 3.* El estudiante hace aplica el descriptor centrándose en la actividad a analizar y las características del descriptor, con grado de aplicación es variable. En el siguiente ejemplo, el alumno detalla algunos de los momentos en los que los futuros profesores tuvieron que adquirir la responsabilidad de la realización de su práctica. Dichos momentos incluyen realizar experimentos individuales para al final de la primera sesión realizar un informe escrito en casa, en el cual tuvieron que realizar los análisis estadísticos que creyesen convenientes. El alumno destaca el trabajo con gráficos estadísticos como partes de su trabajo en las que tuvieron que asumir la responsabilidad de su estudio, decidiendo, por ejemplo, que representación gráfica usar y una vez elegida cómo interpretar y extraer información de dichas representaciones y cómo comparar gráficos estadísticos de distintas distribuciones.

> *"Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio. Por ejemplo: al comparar gráficos, hallar el valor más frecuente de una secuencia de datos, los valores máximo y mínimo, al comparar la variabilidad de dos variables, elaborar gráficos, al tener que pensar de manera individual las cuestiones que posteriormente se debatirán en grupo"* (Alumna EE, descriptor AE1).

En la tabla 5.9.3 presentamos los resultados los distintos descriptores y niveles de aplicación de los mismos relacionados con el componente de Autonomía y Evaluación Formativa. Destacamos el alto porcentaje de estudiantes que no aplican los descriptores AE1 (30,56%), y AE2 (50%). Por tanto estos dos descriptores fueron difíciles de aplicar, por lo que deducimos que los estudiantes no supieron valorar las oportunidades que ofrece la situación, tanto para fomentar la autonomía de los estudiantes, como para contribuir a la evaluación formativa. La misma conclusión se obtiene al examinar el porcentaje de alumnos que aplica el descriptor a nivel 1 (22,22% para AE1 y 18,52% para AE2).

El porcentaje de alumnos que aplica el descriptor AE1 a nivel 2 es bajo (10,19%, y 13,89%). Con respecto al nivel 3 se obtienen mejor resultado en el AE1 (37,04%) (el proyecto favorece la autonomía personal) que el AE2 (17,59%) (Evaluación formativa), posiblemente porque como hemos indicado, no se corrigió individualmente en la clase colectiva los resultados de cada estudiante por falta de tiempo.

Tabla 5.9.3. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre la autonomía y evaluación formativa

| Aplicación del descriptor | AE1 | AE2 |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 33(30,56) | 54(50) |
| Nivel 1 | 24(22,22) | 20(18,52) |
| Nivel 2 | 11(10,19) | 15(13,89) |
| Nivel 3 | 40(37,04) | 19(17,59) |

**Síntesis de idoneidad interaccional**

Como en los componentes anteriores, a continuación vamos a estudiar las puntuaciones medias y desviaciones típicas obtenidas en la aplicación de cada uno de sus descriptores (tabla 5.9.4 y figura 5.9.1). Este componente de la idoneidad fue difícil, pues las puntuaciones medias no superan el valor 2, aunque casi se alcanza en el descriptor DD1, referente a la presentación que hace el profesor de la práctica de enseñanza, el que mayor puntuación media obtuvo.

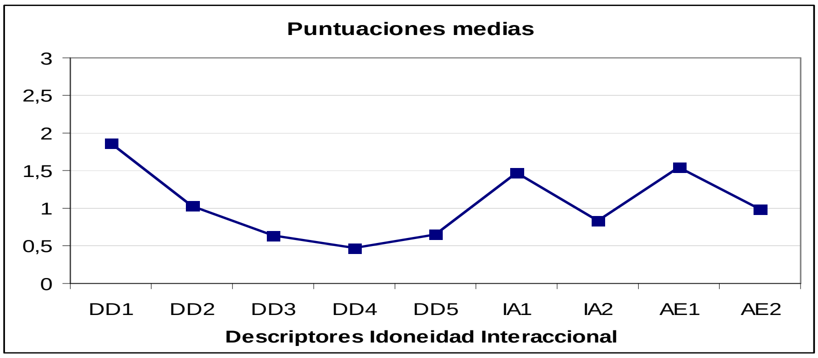
Seguidamente los descriptores que mayor puntuación media obtuvieron fueron el IA1 y el AE1, Interacción entre alumnos y Autonomía y Evaluación formativa, siendo en ambos casos la puntuación media cercana 1,5. El resto de puntuaciones medias de los demás descriptores no llega al valor 1 (salvo el descriptor DD2 cuyo valor medio fue el 1,03) lo que muestra que en general los distintos descriptores y componentes de la idoneidad interaccional fueron difíciles de aplicar y relacionar con la unidad didáctica y el proyecto estadístico que los futuros profesores tuvieron que resolver y posteriormente analizar su idoneidad.

Tabla 5.9.4. Medias y desviaciones típicas de la puntuación en la idoneidad interaccional

| Descriptor | Media | D. Típica |
|---|---|---|
| DD1 | 1,87 | 1,14 |
| DD2 | 1,03 | 1,22 |
| DD3 | 0,64 | 1,05 |
| DD4 | 0,47 | 0,93 |
| DD5 | 0,65 | 0,99 |
| IA1 | 1,47 | 1,36 |
| IA2 | 0,84 | 1,22 |
| AE1 | 1,54 | 1,27 |
| AE2 | 0,99 | 1,16 |
| Total | 1,06 | 1,24 |

Destacar también que el descriptor que obtuvo la menor puntuación media en su aplicación fue el DD4, con gran porcentaje de alumnos que ni siquiera aplicaron dicho descriptor, este descriptor consistía en evaluar los recursos retóricos y argumentativos usados por el profesor para captar la atención de los alumnos.

Figura 5.9.1. Puntuaciones medias en componentes de la idoneidad interaccional



## 5.10. ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD ECOLÓGICA

Por último se analiza parte de los informes en que los alumnos valoran la idoneidad ecológica. De acuerdo a Godino (2009) este tipo de idoneidad indica grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla (institución de referencia, al contexto social, a las directrices en política educativa, a las limitaciones económicas). Permitirá la reflexión sobre los aspectos que Shulman (2007) describe como conocimiento curricular, contextos educativos, fines, propósitos y valores de la educación.

También se tendrán en cuenta las conexiones que se establezcan con otros contenidos intradisciplinares (otros temas de matemáticas) e interdisciplinares (otras materias del programa de estudios. Puesto que la institución investigada tiene por objetivo la formación inicial de maestro,  se resaltarían los aspectos que ayuden a desarrollar su competencia para su futuro ejercicio de la enseñanza. Por este motivo, se considera que un primer criterio (de tipo ecológico) útil para la selección de objetivos y contenidos, tiene en cuenta tanto los intereses de estudiantes como de la sociedad en su conjunto, es la contextualización sociocultural de la práctica profesional. Un segundo criterio es que los objetos matemáticos estudiados por estos profesionales sean, a ser posible, los nucleares en la disciplina (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

El proyecto permite, en primer lugar trabajar todos los contenidos curriculares sobre el bloque de tratamiento de la información, azar y probabilidad, como ya se ha analizado. También permite trabajar gran número de contenidos de los otros bloques temáticos de las Matemáticas en Educación Primaria, por ejemplo, números enteros, fracciones y decimales, operaciones con ellos y ordenación; proporcionalidad, proporción y porcentaje, orientación espacial, sistemas de coordenadas, segmentos, perpendicularidad y paralelismo, escalas, uso de la calculadora y ordenadores.

Por otro lado, el tema se relaciona con el área de psicología social, que es una de las incluidas en la formación de los maestros; más concretamente con el tema de las intuiciones y percepción de la aleatoriedad, así como también podría conectarse con el tema de la adicción al juego. Finalmente, al realizar un experimento en clase para comprobar unas conjeturas se podría relacionar con la asignatura de métodos de investigación, pues en el proyecto se siguen los pasos típicos de una investigación completa aunque a pequeña escala.

El proyecto permite también una apertura a la innovación, tanto en cuanto a la gestión didáctica, permitiendo un aprendizaje a través de proyectos y la contextualización de los temas tratados, adaptando así la enseñanza de la estadística a las directrices curriculares para la Educación Primaria (MEC, 2006a) en el que se sugiere presentar la Estadística desde un distinto enfoque, mostrando su utilidad para resolver problemas de la vida real. Por otro, se adecua bien al uso de tecnología como calculadoras y ordenadores.

### 5.10.1. ADAPTACIÓN AL CURRICULO Y APERTURA A LA INNOVACIÓN DIDÁCTICA

En primer lugar se pide evaluar estos puntos sobre los cuales se proponen los siguientes descriptores:

*CID1. Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.* En este caso el proyecto permite trabajar todos los temas pertenecientes al bloque 4 del área de conocimiento de Matemáticas, *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*. En la presentación y realización de la práctica que nos ocupa no se implementaron contenidos nuevos para los futuros profesores, ya que dichos contenidos fueron tratados en una asignatura previa, en su primer año de carrera. Sin embargo, el profesor hizo especial hincapié en el trabajo con gráficos estadísticos y la presentación de estos como herramienta útil de análisis de datos, debido a que el trabajo con estos se presenta en los decretos de enseñanzas mínimas desde primer ciclo de educación primaria (MEC, 2006a). Por lo tanto a este respecto, esperamos que los alumnos hagan referencia al trabajo con gráficos en la realización del proyecto.

*CID2. Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.* En el capítulo 1 hemos justificado el trabajo con proyectos estadísticos en la clase de estadística, debido a que se consideran como pequeñas investigaciones en las que los alumnos toman conciencia de los datos reales y se ven envueltos en las distintas partes de una investigación estadística. El trabajo con proyectos para la enseñanza de la estadística supone una innovación metodológica ya que no se limita a presentar la materia como una serie de técnicas descontextualizadas (Díaz, Batanero y Arteaga, 2007). Esperamos que los estudiantes aprecien la relación del trabajo con proyectos de análisis de datos y este descriptor.

*CID3. Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.* Un factor crucial en toda la historia del desarrollo de los gráficos estadísticos fue la innovación tecnológica y la facilidad para producir gráficos en pocos instantes, permitiendo también los gráfico estadísticos dinámicos, que, a diferencia de los gráficos tradicionales, puede cambiar o transformarse para brindar diferentes visiones de la estructura de los datos (Cleveland, 1987). El proyecto que se realizó en el aula de clase no necesitó del uso de nuevas tecnologías, al estar basado en un experimento clásico de percepción de la aleatoriedad y requerir únicamente de recursos como un papel, lápiz y una moneda. Pero, como se ha indicado, los estudiantes tuvieron libertad para usar las nuevas tecnologías en la realización del informe escrito del proyecto. Por otra parte, en la segunda sesión el profesor usó un proyector y una presentación en PowerPoint para mostrar a los alumnos posibles errores y conflictos en la construcción de gráficos estadísticos y a su vez dar las pautas necesarias para una correcta realización del proyecto.

Respecto a estos descriptores mostramos a continuación ejemplos de los niveles 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no se centra en las adaptaciones curriculares o la innovación didáctica, o no lo aplican a la situación particular y lo hacen de manera muy general. La alumna MCG, aplica los descriptores CID1 y CID2, y los relaciona con la situación particular de enseñanza. El problema es que su explicación tiene poca precisión, siendo difícil entender a qué parte del currículo se refiere. En este caso la alumna debería haber sido más explícita en su razonamiento.

> *"En cuanto a la idoneidad ecológica, hay adaptación al currículo en contenidos y evaluación de estos, se lleva a cabo en las actividades de investigación y la práctica reflexiva mediante el lanzamiento simulado y real de la moneda (se analizan y comparan los dos lanzamientos)"* (Alumna MCG, descriptores CID1 y CID2).

*Nivel 3.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor en la situación planteada. La alumna EE, aplica conjuntamente los tres descriptores CID1, CID2 y CID3. Primeramente destaca cómo el trabajo con proyectos, en particular con el proyecto Comprueba tus intuiciones sobre el azar, permite una adaptación a los contenidos curriculares actuales para la educación primaria. Aparte, resalta el hecho de que en la unidad didáctica no se pedía a los alumnos el que usasen las nuevas tecnologías para realizar sus trabajos, pero, a pesar de ello, la alumna considera importante la utilización de las mismas a la hora de realizar gráficos estadísticos y comparar distribuciones a través de ellos.

> *"Por otra parte la innovación radica también en el modelo de enseñanza a partir del diseño de un proyecto global, que aporta un enfoque integrador en el que el alumno se implica y tiene ocasión de trabajar todos los contenidos del bloque con una visión de conjunto, con lo cual la estadística se convierte en una herramienta útil y con sentido pleno para el alumnado. Pese a todo lo anterior, en el dossier de la unidad didáctica, no se refleja de manera expresa la necesidad de utilizar las nuevas tecnologías para el desarrollo de las actividades (calculadoras, TIC, etc.), si bien, queda sobreentendida dicha necesidad en el tipo de problemas que se presenta al alumnado, cuya realización exige el uso de estos materiales (como por ejemplo, la elaboración de gráficas comparativas, que es mucho más compleja si se realiza manualmente)"* (Alumna EE, descriptores CID1, CID2 y CID3).

En varios ejemplos de aplicación del descriptor CID3, se observó que los futuros profesores son conscientes de la importancia de relacionar el trabajo con las nuevas tecnologías, que han contribuido según Friendly (2007) a la explosión del uso de los gráficos estadísticos. Los alumnos indican con frecuencia que los ordenadores y software como la hoja Excel son útiles para realizar el proyecto en cuestión. Por otro lado, que el trabajo con dichas representaciones fomenta el uso de las nuevas tecnologías, y por lo tanto que el trabajo con proyectos estadísticos promueve el uso de hojas de cálculo o paquetes estadísticos.

Tabla 5.10.1. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre adaptaciones curriculares e innovación didáctica

| Aplicación del descriptor | CID1 | CID2 | CID3 |
|---|---|---|---|
| Nivel 0 | 9(8,33) | 45(41,67) | 46(42,59) |
| Nivel 1 | 33(30,56) | 22(20,37) | 18(16,67) |
| Nivel 2 | 20(18,52) | 19(17,59) | 9(8,33) |
| Nivel 3 | 46(42,59) | 22(20,37) | 35(32,41) |

Presentamos en la tabla 5.10.1 los resultados del estudio de la idoneidad ecológica donde sólo un 8,33% de ellos no aplica el descriptor CID1, aunque crece el porcentaje de los que no los aplican en los descriptores CID2 y CID3 (41,67% y 42,59% respectivamente). La disminución de aplicación de los descriptores que siguen al primero a lo largo de nuestro estudio puede ser debido a que muchos estudiantes se limitan a aplicar un descriptor por cada componente de las distintas idoneidades, posiblemente como un efecto del contrato didáctico. Con respecto a alumnos que copian literalmente o casi literalmente los distintos descriptores, encontramos que el mayor porcentaje de alumnos en este nivel se encuentra en la aplicación del descriptor CID1 (30,56%) seguido por el CID2

(20,37%) y por último del CID3 (16,67%). El porcentaje de alumnos que aplican los descriptores CID1 y CID2 a nivel 2, es similar y en torno al 18% del total de los estudiantes. En cambio este porcentaje baja al 8,33% de alumnos que aplican el descriptor CID3 a nivel 2.

Por último, destacamos que el porcentaje mayor de estudiantes a nivel 3 se da en la aplicación del descriptor CID1 (42,59%), seguido del CID3 (32,41%) y por último CID2 (20,37%). Consecuentemente, los alumnos tienen mayor facilidad de relacionar si los contenidos y la implementación de los mismos trabajados en la unidad didáctica, están o no en concordancia con las directrices curriculares. Por otro lado, el alto porcentaje de los mismos que lo aplican a nivel 3 el descriptor CID3 indica de nuevo que los futuros profesores ven como una buena oportunidad la inclusión de las nuevas tecnologías a la hora de realizar el proyecto, aunque también muchos alumnos indican la dificultad que les supone de aprender a manejar el software que se esté utilizando para dicho propósito.

De este modo los futuros profesores incorporan en este proyecto su conocimiento de dos de los componentes de Lee y Hollebrands (2008) parara describir el conocimiento profesional para enseñar estadística con apoyo de la tecnología. (a) Concepciones de qué significa enseñar un tema particular integrando la tecnología en el proceso de aprendizaje; y (b) Conocimiento del currículo y materiales curriculares que integran la tecnología en el aprendizaje y ponen el énfasis en el razonamiento estadístico.

### 5.10.2. ADAPTACIÓN SOCIO PROFESIONAL. CONEXIONES INTRA E INTERDISCIPLINARES

Baker, Derry y Konold (2006) indican que el trabajo con proyectos, especialmente si se integra con el uso de la tecnología permite establecer relaciones entre diversos tipos de gráficos estadísticos y comprender la diferencia entre los mismos. La Consejería de Educación (2007a), por su parte, indica las importantes conexiones del bloque de Tratamiento de la información con los siguientes contenidos sobre matemáticas del Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre: Bloque 1, Números y operaciones y Bloque 2, La medida: estimación y cálculo de magnitudes Bloque 3, Geometría. También sugiere que sus contenidos sólo adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Con respecto a esta componente se pidió a los estudiantes evaluar los siguientes descriptores:

*SPC1. Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.* A este respecto, el trabajar con temas de Estadística a través de proyectos, permite que los estudiantes se vean envueltos en una pequeña investigación y que la Estadística adquiera sentido para ellos. En este estudio, se trabaja con futuros profesores de Educación Primaria, a los que se puede proporcionar ideas de gran utilidad para desarrollar proyectos adaptados al nivel de sus futuros estudiantes, en los que los niños tengan que recolectar sus propios datos, realizar gráficos sencillos en contextos que les sean familiares. Puesto que dichos futuros profesores tendrán que explicar en un futuro temas de tratamiento de información, azar y probabilidad, este tipo de actividad ayuda a su desarrollo profesional.

Además, según Watson (2006) en la actualidad para que un individuo sea estadísticamente culto debe ser capaz de leer e interpretar los distintos gráficos estadísticos que se encuentre tanto en los medios de comunicación, en Internet o en distintos ámbitos de su vida personal o laboral, por lo que la realización del proyecto contribuye también a formar ciudadanos más cultos y que sean capaces de adaptarse mejor a la sociedad actual. Así, esperamos que a la hora de aplicar este descriptor, los futuros profesores sean capaces de hacer referencia a alguno de los aspectos que acabamos de tratar.

*SPC2.Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.* Como hemos señalado, el trabajo en la clase de estadística, con el proyecto, permite poner en relación distintos conceptos y contenidos del bloque de conocimientos Tratamiento de la información, azar y probabilidad, y de otras materias de Educación Primaria. Dentro de la diplomatura de maestro de Educación Primaria, los alumnos tienen asignaturas relacionadas con métodos de investigación, relacionadas con los proyectos estadísticos, en el sentido de que estos son consideradas como pequeñas investigaciones (Graham, 1987). Además el tema particular del proyecto es percepción subjetiva de la aleatoriedad, relacionado con asignaturas del área de Psicología social que se imparten en dicha diplomatura.

Respecto a estos descriptores mostramos a continuación ejemplos de los niveles 2 y 3.

*Nivel 2.* El estudiante hace referencia y aplica el descriptor pero no relacionándolo con la formación socio-profesional de los estudiantes o con la relación de los contenidos trabajados con otros contenidos intra o interdisciplinares, o en caso de tenerlo en cuenta, lo aplica de manera muy general. La alumna CC, aplica el descriptor señalando la utilidad "del tema" en la sociedad actual, pero en este caso, aunque aplica el descriptor, la alumna no es clara en relación a qué se refiere al decir "el tema", en este caso, para poder ser una respuesta de nivel 3, la alumna debería haber concretado en qué sentido el trabajo con proyectos y los contenidos tratados en el mismo podrían ayudar a los futuros profesores en su desarrollo socio-profesional.

*"Los contenidos ayudan a la formación socio-profesional de los alumnos puesto que es un tema que fuera del aula es muy útil y usual"* (Alumna CC, descriptor SPC1).

*Nivel 3.* El estudiante aplica el descriptor a contenidos y situación relacionada con el proyecto. En las respuestas a este nivel, los estudiantes muestran la importancia que los futuros profesores dan al trabajo con gráficos, ya sea como vehículo para encontrar relaciones inter e intra disciplinares como para su desarrollo socio-profesional, ya que destacan la presencia de los gráficos estadísticos en la sociedad y la importancia de saber tanto interpretar como leer los mismos . La alumna CC, aplica el descriptor señalando la utilidad "del tema" en la sociedad actual, pero en este caso, aunque aplica el descriptor, la alumna no es clara en relación a qué se refiere al decir "el tema", en este caso, para poder ser una respuesta de nivel 3, la alumna debería haber concretado en qué sentido el trabajo con proyectos y los contenidos tratados en el mismo podrían ayudar a los futuros profesores en su desarrollo socio-profesional.

*"El hecho de que sea parte de una situación inicial contextualizada en la vida cotidiana de los alumnos y sus familias, nos aporta la adaptación socio-profesional de los estudiantes (en la vida cotidiana estamos rodeados de datos estadísticos y encuestas). Por último, se da una conexión básica en cuanto al tema tratado con otras ramas de las matemáticas, véase la geometría a la hora de realizar gráficas y representaciones de los datos de una tabla estadística, o en el álgebra al tener unas expresiones o fórmulas matemáticas con las que calcular los estadísticos; y con el resto de áreas de educación primaria (conocimiento del medio, ciencias sociales, etc.)"* (Alumna SC, descriptores SPC1 y SPC2).

Tabla 5.10.2. Distribución de futuros profesores según nivel de aplicación de los descriptores sobre adaptación socio-profesional y conexiones

| Aplicación del descriptor | SPC1 | SPC2 |
|---|---|---|
| Nivel 0 | 51(47,22) | 50(46,30) |
| Nivel 1 | 24(22,22) | 20(18,52) |
| Nivel 2 | 17(15,74) | 15(13,89) |
| Nivel 3 | 16(14,81) | 23(21,30) |

Una vez estudiados los distintos descriptores de la componente adaptación socio-profesional y las conexiones intra e interdisciplinares, vamos a estudiar la distribución de los futuros profesores según el nivel de aplicación de los descriptores (tabla 5.10.2). Dicha tabla muestra un alto porcentaje de futuros profesores que no aplican los SPC1 (47,22%) y SPC2 (46,30%), que fueron difíciles de aplicar. Esto también lo podemos observar con el porcentaje de alumnos que llegan al nivel superior: 14,81% en el SPC1 y 21,30% en el descriptor SPC2, que fue más intuitivo para los estudiantes.

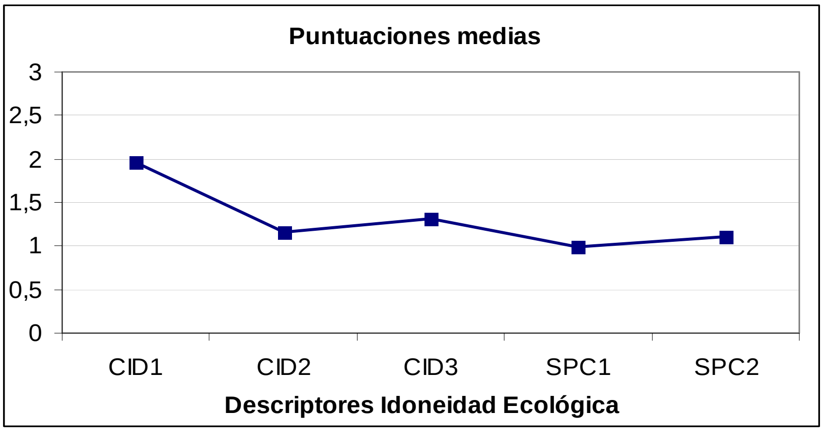
**Síntesis de idoneidad ecológica**

Como síntesis del estudio de la idoneidad ecológica, en la tabla 5.10.3 y figura 5.10.1 podemos observar que el nivel de aplicación fluctúa entre 1 y 2, lo que indica que una parte importante de los estudiantes no logra establecer las conexiones del proyecto con otras materias o con la vida extraescolar.

Tabla 5.10.3. Medias y desviaciones típicas de descriptores de la idoneidad ecológica

| Descriptor | Media | D. Típica |
|---|---|---|
| CID1 | 1,9537 | 1,03567 |
| CID2 | 1,16667 | 1,18005 |
| CID3 | 1,30556 | 1,31461 |
| SPC1 | 0,981481 | 1,11054 |
| SPC2 | 1,10185 | 1,20699 |
| Total | 1,30185 | 1,21814 |

Figura 5.10.1. Puntuaciones medias en descriptores de la idoneidad ecológica




El descriptor que mayor puntuación media obtuvo en su aplicación fue CID1, cerca la puntuación de 2, este descriptor consistía en si los contenidos y su implementación se correspondía con las directrices curriculares. El resto de los descriptores obtuvieron una puntuación media de menos de 1,5, rondando el valor 1 para los descriptores SPC1 y SPC2.

## 5.11. SINTESIS DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS

Para finalizar este capítulo se presenta a continuación un estudio de los conocimientos globales mostrados por los futuros profesores al analizar cada uno de los tipos de idoneidad en la situación propuesta. Se compara la dificultad relativa de aplicación de los componentes y se estudia la puntuación total en la aplicación del conjunto de descriptores. Seguidamente se realiza un análisis clúster de sujetos para tratar de identificar tipologías de estudiantes en cuanto a su conocimiento didáctico. Finalmente se aplica el análisis discriminante para comprobar que la división de los estudiantes en dos grupos es pertinente e igualmente establecer la validez discriminante de la pauta de idoneidad didáctica como instrumento de evaluación de los conocimientos didácticos de los futuros profesores.

**Dificultad comparada de los tipos de idoneidad**

En primer lugar, para cada uno de los tipos de idoneidad hemos calculado el valor medio del nivel obtenido por cada estudiante en el conjunto de descriptores que configuran dicha idoneidad. El objeto es compararlos entre sí, para ver cuál resultó más sencillo de aplicar a los futuros profesores, o equivalentemente, en qué componente del conocimiento didáctico muestran mayor conocimiento los futuros profesores.

En la figura 5.11.1 mostramos los valores medios e intervalos de confianza del 95% de dichos valores medios. Todas las medias se sitúan por encima del nivel 1, y teniendo en cuenta los porcentajes ya comentados de alumnos que dejan algunos descriptores en blanco, estos promedios indican que los estudiantes aplicaron una proporción importante componentes, al menos a nivel de reproducción de los descriptores, es decir, tratan de aplicarlos.

Observamos que el componente en el cuál los alumnos muestran mayores conocimientos es la idoneidad cognitiva, con una gran diferencia respecto al resto, indicando que los estudiantes fueron capaces de reconocer mejor los conocimientos previos necesarios en la aplicación de la unidad didáctica, las adaptaciones de la misma a diferentes estudiantes, así como valorar su aprendizaje. Posiblemente, el haber “vivido” ellos mismos la situación de enseñanza les permitió reconocer con mayor facilidad aspectos como aprendizaje experimentado o dificultades en la realización de las tareas.

Resultó más difícil globalmente la idoneidad interaccional y epistémica, aspectos sobre los que se debiera insistir en la formación de los profesores. La aplicación de los descriptores de la idoneidad epistémica requiere que los alumnos muestren un conocimiento común y especializado del contenido matemático. Pero como vimos en el capítulo 4, este conocimiento es escaso en nuestros estudiantes, lo que explica estos resultados.

Figura 5.11.1. Puntuación media e intervalo de confianza del 95% en componentes de la idoneidad didáctica

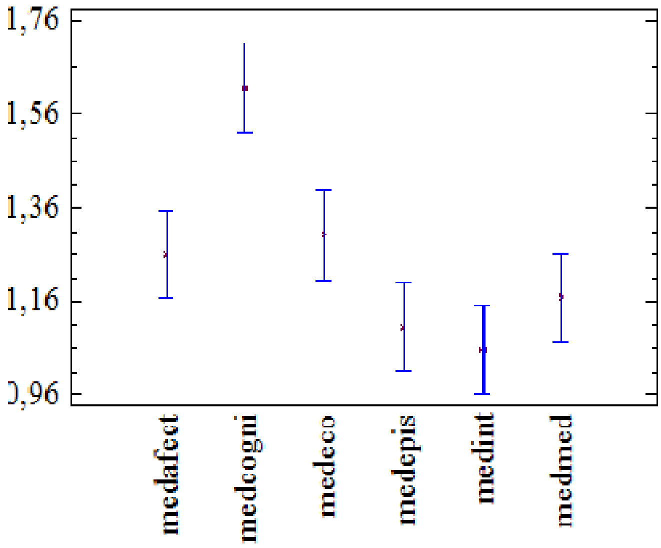
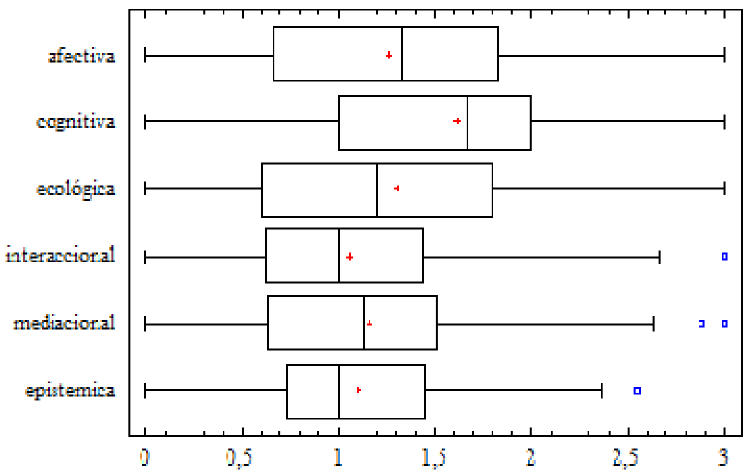



Figura 5.11.2. Gráficos de caja de nivel medio en componentes de la idoneidad didáctica

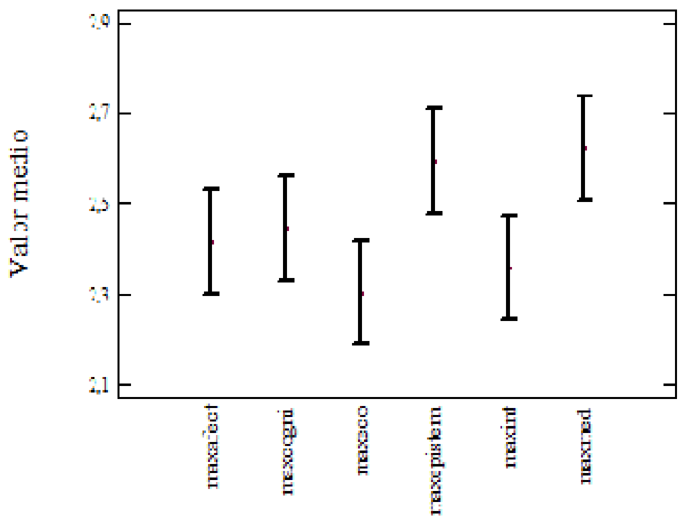


Estos resultados se observan mejor en los gráficos de caja (Figura 5.11.2) donde tan sólo la cuarta parte de la muestra está por debajo del nivel 1 (siempre en promedio) y una cuarta parte está por encima del nivel 2 en la idoneidad cognitiva, lo que no ocurre en ninguno de los otros componentes (ni siquiera la cuarta parte de los alumnos logra un nivel superior a dos en promedio). La mediana más baja, por su parte, se presenta precisamente en la idoneidad epistémica (1), y es también en este componente donde se observa menor variabilidad (un 50% de los estudiantes se sitúa entre 0.5 y 1,5 en promedio). Todo ello apunta al deficiente conocimiento especializado de los estudiantes sobre estadística.

**Nivel máximo en cada tipo de idoneidad**

En segundo lugar, para cada tipo de idoneidad se calculó el máximo nivel alcanzado por cada alumno en el conjunto de descriptores. Pensamos que este máximo nos indica la capacidad adquirida por los estudiantes, pues algunos estudiantes, una vez aplicado uno o dos descriptores de un tipo de idoneidad, optaron por dejar en blanco los restantes o limitarse a copiar su contenido, trabajando a nivel 1. Esto se ha visto a lo largo del análisis, por el hecho de que el primer descriptor de cada grupo suele tener mayor puntuación que el resto.

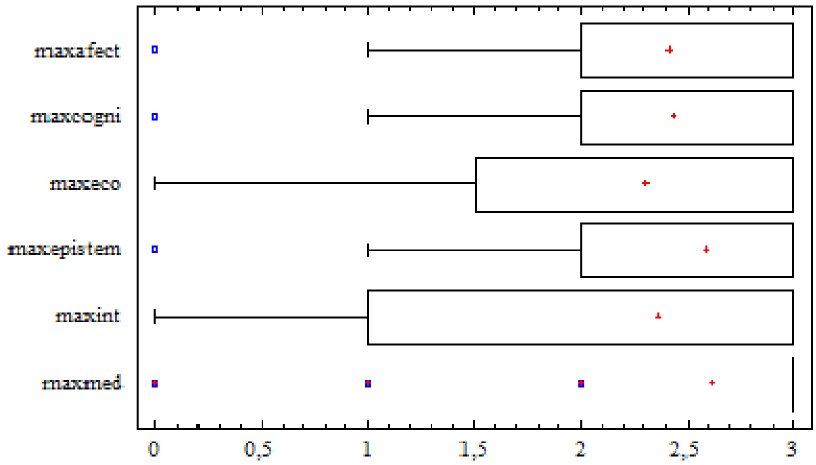
Figura 5.11.3. Puntuación máxima e intervalo de confianza del 95% en componentes de la idoneidad didáctica



Al estudiar los gráficos (figura 5.11.3 y 5.11.4) observamos un cambio en nuestras conclusiones anteriores. Se produce una subida muy notable, del nivel, pues en promedio, los estudiantes se sitúan entre el nivel 2 y 3 en al menos uno de los descriptores de cada componente de la idoneidad didáctica. Dicho en otras palabras, el alumno trata de aplicar (y lo logra) a la situación dada al menos un descriptor en cada componente, limitándose en otros componentes a copiarlo o no completarlo, lo que hace que los valores medios y porcentajes anteriormente comentados hayan sido muy bajos.

Al analizar los niveles máximos alcanzados, ya no hay una diferencia tan clara en los componentes, y sorprendentemente, la idoneidad epistémica sube notablemente. Ello es debido a que algunos objetos matemáticos fueron sencillos de identificar por los estudiantes. Por ejemplo casi el 50% de participantes alcanza nivel 2 o 3 en el primer descriptor del lenguaje (lenguaje adecuado) y asimismo en el primer descriptor de definiciones propiedades y argumentos (se emplean adecuadamente).

Figura 5.11.4. Gráficos de caja de nivel máximo en componentes de la idoneidad didáctica

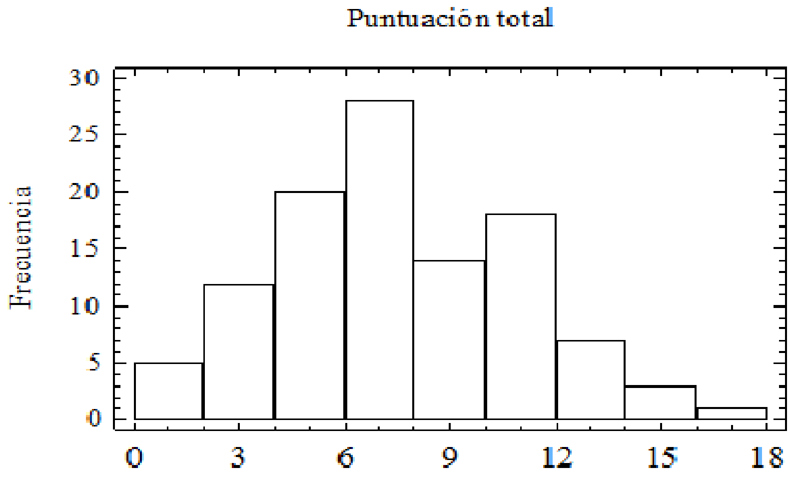



## Puntuación total

También hemos calculado una puntuación total para cada estudiante, sumando las puntuaciones medias obtenidas de su valoración en los seis tipos de idoneidad (figura 5.11.5). Esta puntuación teóricamente varía de 0 a 18 puntos, ya que un alumno tendría una puntuación cero si deja todos los descriptores en blanco y alcanzaría la puntuación 18 si fuese capaz de alcanzar un nivel medio 3 en todos los componentes de la idoneidad didáctica, lo que es equivalente a que fuese capaz de aplicar a nivel 3 todos los descriptores propuestos en la Guía de análisis de la idoneidad didáctica.

En el gráfico presentado en la figura 5.11.5 vemos que los valores medios de dicha puntuación total se sitúan algo por debajo de la media esperada (9) que se alcanzaría si el estudiante alcanza nivel máximo en la mitad de componentes o un nivel medio 2 en todos ellos. La distribución es ligeramente asimétrica, con mayor proporción de estudiantes bajo la media que sobre ella.

Figura 5.11.5. Puntuación total en la pauta de evaluación



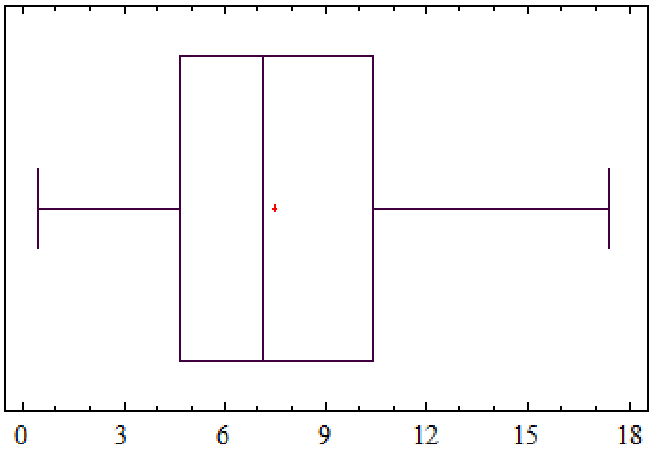

Observamos que, aunque pocos, algunos estudiantes se sitúan al nivel máximo (18 puntos), siendo capaces de alcanzar un nivel medio 3 en todos los componentes de la idoneidad didáctica y mostrando un alto conocimiento didáctico de la estadística en la educación primaria, pues han sido capaces de aplicar cada uno de los componentes y descriptores adecuadamente. Han mostrado por tanto competencias de análisis didácticos al aplicar estos conocimientos al análisis de la situación.

De hecho, una cuarta parte de alumnos se sitúa sobre el 12, que indica un nivel 2 o superior en todos los componentes de la idoneidad didáctica o bien si en alguno de ellos se alcanza menor nivel, se compensa con otro cercano al 3 en otro componente. Pensamos que ello es un indicador de que los alumnos pueden llegar a aplicar correctamente la guía proporcionada para evaluar procesos de aprendizaje de las matemáticas y por ello, la guía se muestra como un instrumento útil en la preparación de profesores.

En el gráfico de caja (Figura 5.11.6) se observa que la media y mediana se sitúan por debajo del nivel medio esperado (9), es decir, los alumnos han aplicado (en promedio) algo menos de la mitad de los descriptores a nivel máximo. El 50% central tiene una puntuación entre 4,5 y 10,5 que correspondería a una aplicación a máximo nivel entre el 15% y el

60% de los descriptores. La pauta de valoración de la idoneidad didáctica, permite, en consecuencia, graduar el conocimiento didáctico de los profesores para la situación propuesta y, en este sentido, sería un buen instrumento de evaluación de este conocimiento.

Figura 5.11.6. Puntuación total en la pauta de evaluación




**Tipos de estudiantes en cuanto a su conocimiento didáctico**

Aparentemente el nivel alcanzado por los estudiantes en esta parte del estudio de evaluación es bajo. Sin embargo, las gráficas anteriores muestran una gran variabilidad en la puntuación obtenida por los estudiantes en los diferentes componentes de la idoneidad y también hemos mostrado la existencia de algunos estudiantes con un alto conocimiento didáctico. Puesto que se trata de sintetizar información de un conjunto grande de variables, hemos aplicado algunas técnicas de análisis multivariante que nos ayuden a sintetizar la información y a diferenciar a los estudiantes.

Con frecuencia la clasificación es el primer paso para la comprensión de un fenómeno complejo, ya que el interés está en determinar, en el conjunto dado, clases diferenciadas (Cuadras, 1991). En primer lugar se llevó a cabo un análisis clúster de sujetos, comprobándose las hipótesis para aplicación del método: unidad experimental de las variables e independencia de las respuestas a los diferentes ítems. Dicha técnica de análisis de datos, ampliamente utilizada en distintas áreas de conocimiento (Biología, Psicología, Arqueología, Sociología, etc.) tiene el propósito de identificar entidades similares a partir de las características que poseen. Algunos de los problemas que resuelve este método son los siguientes:

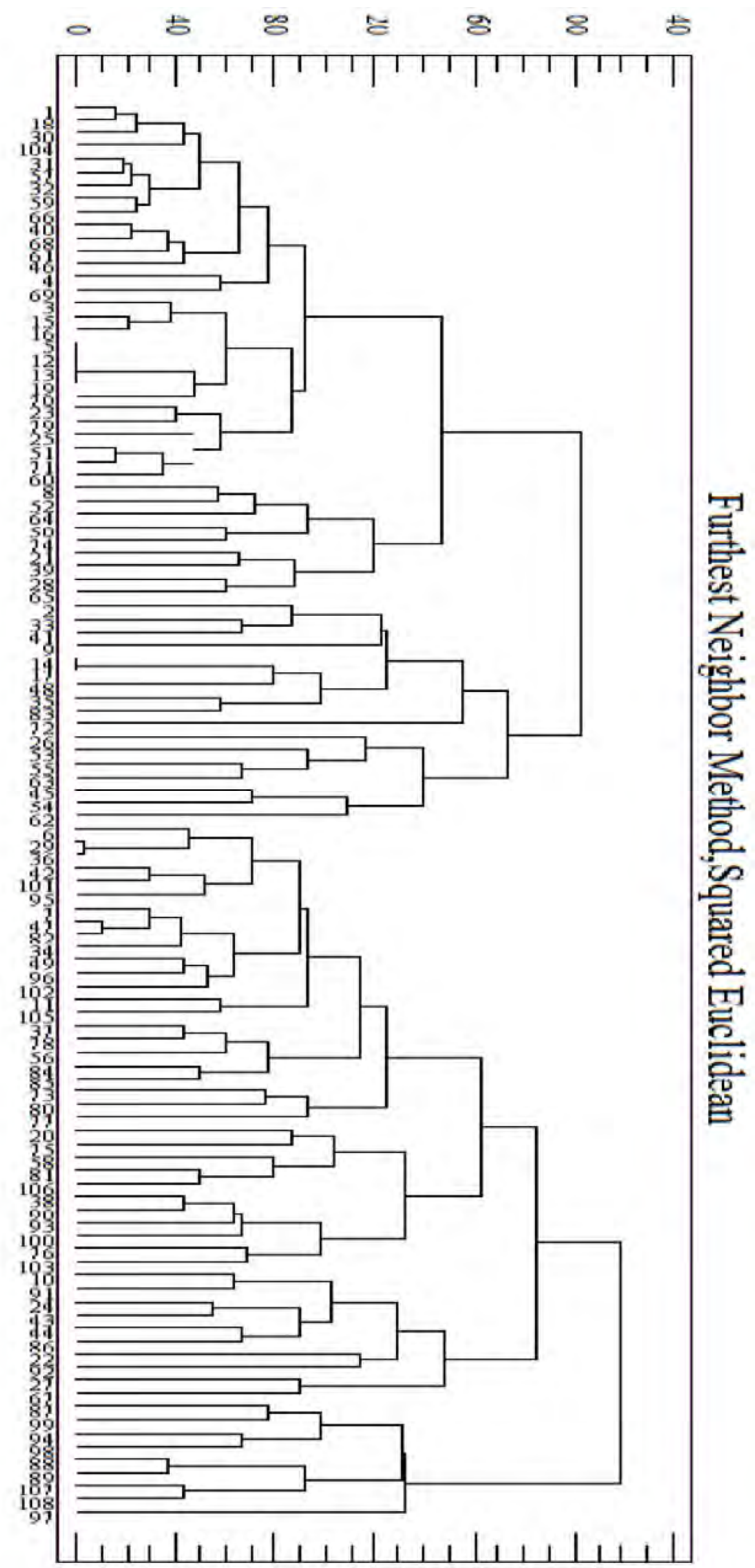
- Ayuda en el tratamiento de grandes cantidades de datos que, debido a su dimensionalidad, son difíciles de estudiar a menos que puedan clasificarse en grupos manejables con la mínima pérdida de información.
- Proporciona un método de agrupación útil y nítido, que introduce un grado de objetividad no obtenible por observación directa.
- Permite utilizar simultáneamente en la investigación varias características para evitar evaluaciones sencillas descriptivas basadas, en una única característica diferenciadora.

El objetivo del método es obtener grupos de objetos de forma que, por un lado, los objetos pertenecientes a un mismo grupo sean muy semejantes entre sí, es decir, que el grupo esté cohesionado internamente y, por el otro, los objetos pertenecientes a grupos diferentes tengan un comportamiento distinto con respecto a las variables analizadas, es decir, que cada grupo esté aislado externamente de los demás grupos (Pérez, 2005).

Para ello se debe elegir una medida de la distancia entre objetos, así como un algoritmo de clasificación. En nuestro caso hemos utilizado la distancia euclídea al cuadrado, de modo que dos sujetos estarán a distancia cero si todas las puntuaciones coinciden en las variables analizadas. La distancia máxima en cada variable sería 9 (si un sujeto puntúa 0 y el otro 3 en dicha variable) y la distancia máxima total será nueve veces el número total de variables consideradas. Asimismo se aceptó el supuesto de que las variables se ajustan al modelo binomial, es decir que cada alumno tiene la misma probabilidad de acierto en cada ítem y las respuestas de los alumnos son ensayos independientes (Lerman, 1981).

Por otro lado, una vez elegida la distancia se puede elegir el método de aglomeración; en nuestro caso, se probó con varios métodos, eligiendo finalmente el del vecino más lejano, donde los grupos se forman de modo que el punto más cercano entre uno y otro grupo esté lo más lejos posible (Afifi y Clarck, 1996). Este es un algoritmo clásico para ítems dicotómicos, que es más conservador y produce menos agrupamientos que otros métodos. Para decidir el número de grupos que se tomaría se probó con dos y tres grupos, pero se decidió formar solamente dos grupos, pues los nuevos que aparecían contenían tan sólo 2 o 3 estudiantes, habiéndose obtenido finalmente 66 estudiantes en el primero y 42 en el segundo.

Figura 5.11.7. Dendograma en el análisis clúster de sujetos



Por otro lado, como veremos, los grupos formados permiten una buena capacidad de predecir la pertenencia al mismo en función de las respuestas para futuros estudiantes. En la figura 5.11.7 se presenta el dendograma obtenido donde se puede ver los estudiantes que pertenece a cada grupo, que están claramente separados. Estos dos grupos serían los de los futuros profesores que han logrado o no han logrado una capacidad suficiente de análisis didáctico para analizar propuestas de enseñanza de la estadística similares a la usada en el estudio.

El programa presenta la opción de guardar como variable el grupo de pertenencia asignado por el análisis clúster. Se usó dicha opción, para luego utilizar dicha variable en el análisis discriminante para interpretar la clasificación producida.

**Análisis discriminante**

Para caracterizar mejor los componentes y descriptores de la idoneidad didáctica cuyo conocimiento contribuye a discriminar estos dos grupos obtenidos mediante el análisis clúster se realizó un análisis discriminante, utilizando como variable principal el grupo de pertenencia proporcionado por el análisis clúster.

El análisis discriminante es una técnica estadística multivariante cuya finalidad es analizar si existen diferencias significativas entre grupos de objetos respecto a un conjunto de variables medidas sobre los mismos para, en el caso de que existan, explicar en qué sentido se dan y proporcionar procedimientos de clasificación sistemática de nuevas observaciones de origen desconocido en uno de los grupos analizados (Afifi y Clark, 1996). Se puede considerar como un análisis de regresión donde la variable dependiente es categórica y tiene como categorías la etiqueta de cada uno de los grupos, y las variables independientes son numéricas y determinan a qué grupos pertenecen los objetos. Se pretende encontrar relaciones lineales entre las variables independientes que mejor discriminen en los grupos dados a los objetos.

Barbero (2003) indica que el análisis discriminante es el método más usado en el estudio de validez de criterio de un instrumento de evaluación, cuando el criterio es dicotómico. En nuestro caso, los resultados del análisis discriminante permitirán estudiar la validez de criterio de la pauta de evaluación de la idoneidad didáctica, cuando se utiliza como instrumento de evaluación del conocimiento didáctico del contenido de los futuros profesores.

Para realizar el análisis discriminante, se tomó como variable dependiente el grupo producido por el análisis clúster y como conjunto de variables independientes las puntuaciones en cada uno de los descriptores de la idoneidad didáctica, es decir las mismas variables utilizadas en el análisis clúster. Se dio igual probabilidad inicial a los dos grupos (esto es adecuado si sus tamaños son aproximadamente iguales, según Pérez, 2005). Se incluyeron simultáneamente todas las variables en la ecuación, pues la finalidad era la discriminación del total del instrumento (no de un subconjunto de ítems). Para este análisis discriminante se calcularon la probabilidad de clasificación correcta. También se realizan análisis univariados de las variables y cálculo de estadísticos en cada uno de los grupos.

En la tabla 5.11.1 se observa que las variables permiten predecir la pertenencia a los grupos dados por el análisis clúster con un 98% de clasificaciones correctas, lo que valida los grupos que se eligieron tras el análisis clúster. También valida la pauta de valoración de la idoneidad didáctica, como medio se separar en el futuro a los alumnos en dos grupos, en base a sus respuestas.

Tabla 5.11.1. Probabilidad de clasificación correcta en el análisis discriminante

| | | Grupo predicho | |
|---|---|---|---|
| Clúster número | N. sujetos | 1 | 2 |
| 1 | 66 | 64<br>(96,97%) | 2<br>(3,03%) |
| 2 | 42 | 0<br>(0,00%) | 42<br>(100,00%) |

Porcentaje de casos clasificados correctamente: 98,15%

Para interpretar mejor los grupos, en la tabla 5.11.2 presentamos para cada una de las variables los valores medios en cada grupo y en el total de estudiantes, así como el nivel *p* en el contraste de hipótesis de diferencias de medias entre los dos grupos. Observamos en casi todas las variables una diferencia que es muy significativa. Según Díaz (2007), quien usó este método para evaluar la validez discriminante de su cuestionario, el hecho de que los ítems discriminen a los estudiantes con puntuaciones altas o bajas en el total, es decir, los estudiantes con puntuación total alta tengan mayor facilidad para contestar cada uno de los ítems apoya dicho tipo de validez. En este sentido, los descriptores de la prueba, en general, tendrían una alta validez discriminante sobre los conocimientos didácticos de los futuros profesores respecto a la estadística.

Tabla 5.11.2. Puntuaciones medias y significación de diferencias entre los grupos

| | Grupo 1 (n=66) | Grupo 2 (n=42) | Total (n=108) | Significación |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 0,393939 | 0,904762 | 0,592593 | 0,0034 |
| A2 | 0,651515 | 1,90476 | 1,13889 | 0,0000 |
| AC1 | 1,09091 | 2,30952 | 1,56481 | 0,0000 |
| ACT1 | 1,10606 | 2,28571 | 1,56481 | 0,0000 |
| ACT2 | 0,363636 | 1,7619 | 0,907407 | 0,0000 |
| AE1 | 0,984848 | 2,40476 | 1,53704 | 0,0000 |
| AE2 | 0,515152 | 1,7381 | 0,990741 | 0,0000 |
| AP1 | 0,848485 | 2,11905 | 1,34259 | 0,0000 |
| CID1 | 1,62121 | 2,47619 | 1,9537 | 0,0000 |
| CID2 | 0,848485 | 1,66667 | 1,16667 | 0,0003 |
| CID3 | 1,06061 | 1,69048 | 1,30556 | 0,0145 |
| CP1 | 1,89394 | 2,59524 | 2,16667 | 0,0000 |
| CP2 | 0,757576 | 1,69048 | 1,12037 | 0,0001 |
| DD1 | 1,45455 | 2,52381 | 1,87037 | 0,0000 |
| DD2 | 0,757576 | 1,45238 | 1,02778 | 0,0034 |
| DD3 | 0,454545 | 0,928571 | 0,638889 | 0,0220 |
| DD4 | 0,181818 | 0,928571 | 0,472222 | 0,0000 |
| **DD5** | **0,621212** | **0,690476** | **0,648148** | **0,7244** |
| E1 | 0,651515 | 2,14286 | 1,23148 | 0,0000 |
| E2 | 0,287879 | 0,952381 | 0,546296 | 0,0001 |
| I1 | 1,80303 | 2,30952 | 2,0 | 0,0146 |
| I2 | 0,924242 | 1,90476 | 1,30556 | 0,0000 |
| IA1 | 0,893939 | 2,38095 | 1,47222 | 0,0000 |
| IA2 | 0,378788 | 1,57143 | 0,842593 | 0,0000 |
| L1 | 1,09091 | 2,45238 | 1,62037 | 0,0000 |
| L2 | 0,757576 | 1,83333 | 1,17593 | 0,0000 |
| L3 | 0,227273 | 1,35714 | 0,666667 | 0,0000 |
| P1 | 1,33333 | 1,88095 | 1,5463 | 0,0220 |
| **P2** | **1,09091** | **1,21429** | **1,13889** | **0,6057** |
| R1 | 1,33333 | 1,92857 | 1,56481 | 0,0061 |
| **R2** | **0,712121** | **0,714286** | **0,712963** | **0,9917** |
| R3 | 0,712121 | 1,19048 | 0,898148 | 0,0333 |
| RA1 | 0,878788 | 2,47619 | 1,5 | 0,0000 |
| RA2 | 0,484848 | 2,0 | 1,07407 | 0,0000 |
| RA3 | 0,469697 | 1,69048 | 0,944444 | 0,0000 |
| RL1 | 0,69697 | 1,7381 | 1,10185 | 0,0000 |
| RM1 | 2,19697 | 2,71429 | 2,39815 | 0,0033 |
| RM2 | 0,378788 | 1,04762 | 0,638889 | 0,0012 |
| RT1 | 1,5 | 2,38095 | 1,84259 | 0,0000 |
| RT2 | 0,242424 | 1,0 | 0,537037 | 0,0001 |
| RT3 | 0,181818 | 0,714286 | 0,388889 | 0,0017 |
| SPC1 | 0,515152 | 1,71429 | 0,981481 | 0,0000 |
| SPC2 | 0,818182 | 1,54762 | 1,10185 | 0,0018 |

Las excepciones encontradas son las siguientes:

- Variable DD5. Esta variable fue muy difícil para los dos grupos que no llegaron en promedio ni siquiera al nivel 1, consistente en copiar literalmente el descriptor. El enunciado del descriptor era *Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase.* Se suponía que los alumnos indicarían que esta inclusión se facilita, tanto por el trabajo en pequeño grupo, como por las frecuentes preguntas del profesor a la que los alumnos libremente podían dar respuesta, e incluso en la realización del experimento aleatorio de manera individual dentro del aula de clase para recoger los datos necesarios para la realización del proyecto. Pero sin embargo, no se llegó a comprender, por lo que sería necesario mejorar su enunciado.

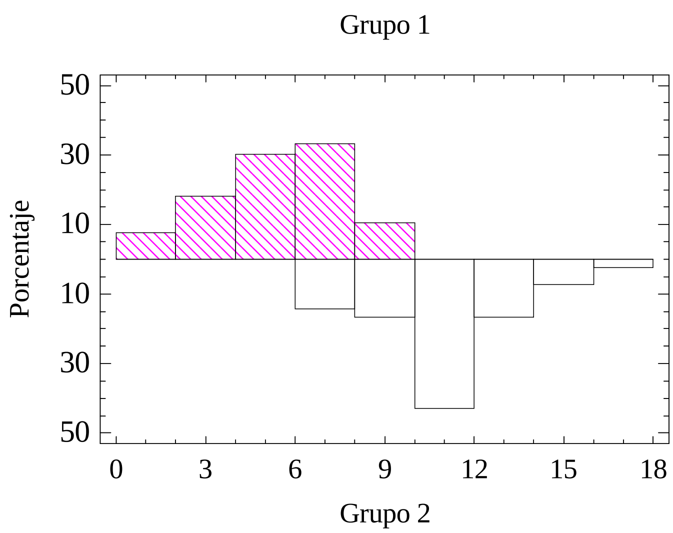
- Lo mismo ocurre con la variable R2. El enunciado del mismo era: *Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.* Su aplicación fue difícil pues, de hecho, durante la experiencia educativa no se introdujeron los enunciados y procedimientos, que se suponían adquiridos. Además, en el método de trabajo con proyectos, los enunciados y procedimientos no se introducen a priori, sino a medida que se necesitan. Los estudiantes no lograron comprenderlo, debido, posiblemente a su poca experiencia con proyectos estadísticos.
- Variable P2, donde ambos grupos se sitúan próximos a nivel 1, es decir, reproducción literal del descriptor. Este descriptor especificaba: *Se proponen situaciones de generación de problemas.* Aunque el proyecto en si mismo constituye un problema extra matemático, al tratar de resolverlo los alumnos se plantean nuevos problemas, como por ejemplo, decidir un gráfico adecuado o seleccionar la escala del mismo, pensar los resúmenes estadísticos que debían calcular, etc. Pensamos que la dificultad de aplicación en ambos grupos se debe a que dichos problemas solo se formulan implícitamente, por lo cual el estudiante no los reconoce.

Observamos en general que el grupo 2 tiene mucho mejores resultados que el 1, es decir, podríamos considerar que hay dos tipos de estudiantes: Un primer grupo con escaso conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del contenido y los estudiantes, que apenas llegan al nivel 1 en la mayoría de los descriptores. Desafortunadamente este es el grupo más numeroso de estudiantes.

Hay excepción en algunos descriptores, aunque no se llega o se llega sólo rozando el nivel 2: CID1 (*Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares;* 1,62), CP1 (*Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio),* 1,89), DD1 (*El profesor hace una presentación adecuada del* *tema,* 1,45), I1 (*Las tareas tienen interés para los alumnos.* 1,8), RM1 (*El uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido;* 2,19). Estos son los descriptores que resultaron más sencillos incluso para los estudiantes con pocos conocimientos y no discriminan los dos grupos. Por ello podrían tratar de revisarse o bien no considerarse como instrumento para la evaluación.

Un segundo grupo que supera el nivel 2 o se acerca a él en la mayoría de descriptores AP1, E1, ACT1, AC1, I1. IA1. RT1. AE1. LA, C1D1, RA1, DD1, CP1 Y RM1 (aumentando el nivel en este orden). También estos alumnos tienen dificultad en los descriptores DD5 y R2 ya comentados, así como en el RT3. A1, DD3, DD4 y E2, aunque algo menos que los del primer grupo. El resto de descriptores los aplican al menos a nivel 1 y en muchos casos acercándose el 2.

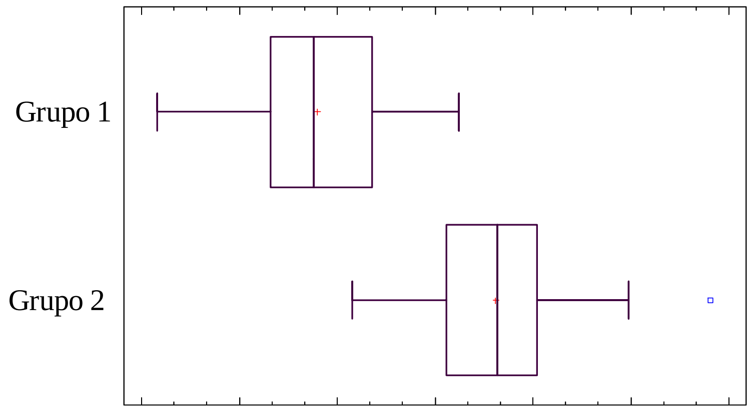
Figura 5.11.8. Histogramas de puntuación total en los dos grupos




Constituyen alrededor del 40 % de los estudiantes y han mostrado un conocimiento al menos incipiente – y en muchos descriptores bastante completos- del conocimiento didáctico sobre estadística elemental en sus diferentes apartados.

La diferencia entre los dos grupos también se refleja en la puntuación total representada gráficamente en las Figuras 5.11.8 y 5.11.9. Mientras que el primer grupo llega a un valor máximo de 10 y algunos estudiantes tienen una puntuación cero (no llegan a aplicar ninguno de los descriptores), el segundo grupo tiene una puntuación que oscila entre 6 y 18. Las medianas se sitúan respectivamente en 5 y 11 puntos, lo que indica una puntuación doble en el segundo grupo, donde una cuarta parte es capaz de aplicar los descriptores a menos a nivel 2 (12 puntos o más de promedio), siendo sólo un alumno (caso atípico) que los aplica todos al máximo nivel.

Figura 5.11.9. Gráficos de caja de la puntuación total en los dos grupos




## 5.12. CONCLUSIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

Una vez analizadas las soluciones al proyecto proporcionadas por los estudiantes que se describieron en el capítulo 4, en la segunda parte del estudio empírico, se propuso a los alumnos elaborar un análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. Siguiendo el modelo de ciclo formativo propuesto para futuros profesores por Godino y Batanero (2008), al finalizar la etapa de estudio matemático, se continuó la fase de estudio didáctico en la que tienen oportunidad de aplicar la Guía de Análisis de la Idoneidad Didáctica propuesta por Godino y Batanero, que contenía diferentes apartados de valoración y descriptores de los mismos.

Asimismo se tuvo en cuenta el trabajo de Godino (2009), quien en su modelo de niveles y facetas del conocimiento matemático didáctico propone una guía para la evaluación de dicho conocimiento. Uno de los niveles de análisis didáctico propuesto por el autor consiste en el análisis por parte de los profesores de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio.

En este capítulo se ha analizado los protocolos escritos entregados por 108 estudiantes de la muestra, en la que expusieron su valoración de la idoneidad didáctica del proyecto de análisis de datos experimentados en la primera fase del ciclo formativo. Para finalizar esta parte de la Memoria exponemos a continuación nuestras conclusiones sobre la evaluación del conocimiento didáctico que, sobre la estadística elemental, han mostrado los futuros profesores participantes en el estudio.

**Conocimiento especializado del contenido**

Hacemos notar que el análisis de la idoneidad epistémica requiere que el futuro profesor conozca los objetos matemáticos en la enseñanza de un cierto tema, y sea capaz de reconocer su presencia o ausencia en el proceso de estudio propuesto, así como su uso adecuado. Godino (2009) indica que el análisis de la idoneidad epistémica por parte de los propios profesores les permite profundizar, tanto en el conocimiento matemático en sí mismo, como en el conocimiento del contenido matemático para la enseñanza (conocimiento especializado, en la terminología de Ball, Lubienski y Mewborn, 2001).

Nuestros resultados muestran que este conocimiento es muy escaso, pues en promedio no llegan a alcanzar el nivel 2 (aplicación anecdótica), aunque, como hemos visto en el análisis detallado, una proporción de estudiantes que varía entre el 10% y 35% según los distractores llegan al nivel más alto de aplicación. En este sentido, aunque en un tema diferente, nuestra investigación confirma los resultados de Chick y Pierce (2008), pues los profesores participantes en su investigación, no hicieron un uso adecuado de los datos y proyectos utilizados al planificar sus lecciones, debido a carencias en identificar los conceptos y contenido estadístico latentes en dichos proyectos y datos.

Los participantes en nuestro estudio mostraron poca capacidad para identificar los objetos matemáticos implícitos o que se han hecho explícitos en la situación de enseñanza, y por tanto de poder valorar qué han aprendido sus estudiantes. En palabras de Hill, Ball, y Schilling (2008) les faltaría "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno." (p. 374). Nosotros explicamos este resultado por los escasos conocimientos comunes del contenido mostrados en el capítulo 4 y debido a la escasa preparación que reciben durante sus estudios de los temas de estadística y probabilidad.

**Conocimiento del contenido y los estudiantes**

El análisis de la idoneidad cognitiva del proyecto por parte de los alumnos tiene relación, en la terminología de Ball, Lubienski y Mewborn (2001), con el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes. Es decir, con los conocimientos del profesor sobre los conocimientos previos de los estudiantes, las adaptaciones curriculares necesarias para adaptar el contenido a un tipo de estudiante dado y la evaluación de los aprendizajes y significados personales construidos por los estudiantes durante un proceso de estudio (Godino, 2009).

Observamos que la idoneidad cognitiva resultó más sencilla que la epistémica, debido a que los estudiantes apreciaron que la unidad tiene en cuenta los conocimientos previos, así como el aprendizaje logrado por ellos mismos, siendo más confuso el tema de la evaluación, debido a que la tarea era excesivamente abierta.

El análisis de la idoneidad afectiva del proyecto por parte de los alumnos tiene relación, según Godino, con el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, en la terminología de Ball, Lubienski y Mewborn (2001). En este caso se tendrían en cuenta los intereses y necesidades, las actitudes y las emociones del alumnado frente al proceso de enseñanza y aprendizaje llevado a cabo mediante el proyecto. Como indica Estrada (2007) cuando se estudia una materia, se desarrollan una serie de sentimientos, tales como gusto o disgusto; miedo o interés; aburrimiento o entretenimiento; valoración o falta de valoración hacia la misma. Las creencias, actitudes y emociones inciden en la acción de las personas, y su capacidad de aprender y recíprocamente el proceso de aprendizaje provoca reacciones afectivas (Estrada, 2007).

Es por ello importante que el futuro profesor tome consciencia de la importancia de estos aspectos afectivos y sepa valorarlos en un proceso de estudio. Fue también más sencillo para los alumnos valorar el interés personal del proyecto (al hallarse ellos mismos interesados), que la promoción de actitudes positivas hacia la matemática o las emociones.

En resumen los alumnos han mostrado mejor conocimiento del contenido y los estudiantes, debido a haber vivido ellos mismos la situación didáctica a analizar y poder ponerse con facilidad en la situación del estudiante que aprende con este proyecto.

**Conocimiento del contenido y la enseñanza**

Godino (2009) indica que el análisis de la idoneidad mediacional por parte de los propios profesores les permite profundizar en el conocimiento del contenido matemático y la enseñanza en la terminología de Ball, Lubienski y Mewborn (2001).

Podemos observar que dentro de cada una de las distintas componentes de la idoneidad mediacional, las puntuaciones medias decrecen, siendo este decrecimiento muy drástico en la componente de los recursos materiales, donde la puntuación media del descriptor RM1 es prácticamente 2,5, es decir, una puntuación media muy alta considerando que el valor máximo fue 3, y sin embargo la puntuación media para el descriptor RM2 es del 0,64. En general no se alcanza el nivel 2, salvo en el RM1 (uso de materiales manipulativos e informáticos) y RT1 (tiempo destinado a la tarea).

Los estudiantes valoraron fácilmente que el proyecto presentado era bastante versátil y no requería de muchos recursos materiales, pero, por otro lado puede hacerse uso de la tecnología, como la hoja Excel, lo que proporciona un tema adecuado para desarrollar la competencia tecnológica recomendada en los decretos curriculares. Sin embargo aspectos como tiempo dedicado al estudio, horario o distribución de estudiantes fueron difíciles de valorar por los estudiantes.

Otro indicador del conocimiento del contenido y la enseñanza es el análisis de la idoneidad interaccional. De acuerdo a Godino (2009), un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción. El autor indica que la reflexión sistemática sobre las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, y la identificación de las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje los modos de gestión de la clase, permiten incrementar el conocimiento del contenido y la enseñanza.

Como se puede observar los descriptores relacionados con la interacción docente-discente fueron difíciles de aplicar, aunque también hay destacar que fue la componente con mayor número de descriptores a aplicar, lo que puede haber producido algo de cansancio en los alumnos y llevar a dejar algunos descriptores en blanco. En todo caso, el análisis de los diversos tipos de discurso en el aula y de la evaluación resultó difícil. El descriptor DD1 (presentación que hace el profesor del tema), fue el que proporcionó mejores resultados con 44,44% del total de los futuros profesores logrando el nivel 3; aparentemente esto indica que los estudiantes apreciaron la presentación que se hizo del proyecto. El resto de descriptores muestran un alto porcentaje de estudiantes que no los aplican y un bajo porcentaje de alumnos que aplican dichos descriptores dentro del nivel superior o nivel 3, debido a las razones señaladas.

En resumen de la valoración del último componente de la idoneidad, los estudiantes muestran un conocimiento flojo del contenido y la enseñanza, que aunque mejor que el conocimiento especializado del contenido, es menor que el conocimiento del contenido y los estudiantes.

### Conocimiento del currículo

Incluimos acá también la parte de los informes en que los alumnos valoran la idoneidad ecológica o grado de adaptación curricular, socio-profesional, apertura a la innovación y conexiones intra e interdisciplinares. De acuerdo a Godino (2009) este tipo de idoneidad indica grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. Permitirá la reflexión sobre los aspectos que Shulman (2007) describe como conocimiento curricular, contextos educativos, fines, propósitos y valores de la educación. En la terminología de Hill y colaboradores (2007), el análisis de la idoneidad ecológico permitiría reflexionar sobre el conocimiento del currículo.

Como síntesis del estudio de la idoneidad ecológica, podemos observar que el nivel de aplicación fluctúa entre 1 y 2. El descriptor que mayor puntuación media obtuvo en su aplicación fue CID1, cerca la puntuación de 2, este descriptor consistía en si los contenidos y su implementación se correspondía con las directrices curriculares. Los estudiantes no parecen percibir las relaciones entre los contenidos del proyecto y otros contenidos estadísticos o con los contenidos de otros bloques matemáticos. Tampoco las posibles conexiones que se pueden establecer con otras materias o con la vida personal o social del estudiante. Sería necesario insistir en estos aspectos, puesto que la estadística es precisamente uno de los contenidos matemáticos que permite establecer más relaciones intra y extra disciplinares en matemáticas.

El análisis de la idoneidad ecológica muestra un flojo conocimiento del currículo y las relaciones del proceso de enseñanza con las directrices curriculares actuales (MEC, 2006a).

### Otras conclusiones

Los estudios multivariantes y de las puntuaciones totales así como de las puntuaciones medias y máximas en los diferentes descriptores realizados al final del capítulo han permitido mostrar la variabilidad de conocimientos de los estudiantes y dividirlos en dos grupos diferenciados de alumnos que han alcanzado o no una capacidad razonable de análisis didáctico para aplicar la pauta de valoración de la idoneidad didáctica a la situación de enseñanza.

Mientras que esta competencia es claramente insuficiente en un primer grupo, un segundo grupo (alrededor del 40% de estudiantes) se ha mostrado suficientemente capacitado aplicando los descriptores a niveles comprendidos entre 2 y 3 en la mayoría de los casos. Consideramos que este resultado es razonable, para el escaso tiempo disponible en la formación de los futuros profesores en competencias de análisis didáctico y debido a los escasos conocimientos matemáticos mostrados en el tema, que como sabemos inciden en sus conocimientos didácticos. Pensamos, asimismo, que la aplicación de la pauta hubiera sido más sencilla, de haberse aplicado a una situación didáctica en temas que los estudiantes conocen mejor, como los números o geometría y en un ambiente más tradicional (en vez de una enseñanza basada en proyectos).

La puntuaciones obtenidas por este segundo grupo en el análisis de esta situación de enseñanza tan nueva para ellos (donde incluso algún alumno logró el máximo nivel en todos los descriptores) muestran que es útil y posible formar a los futuros profesores en el análisis de la idoneidad de procesos de estudio y que ello es un medio de incrementar su conocimiento pedagógico del contenido. Asimismo los resultados del análisis discriminante muestran la validez discriminante del instrumento (con excepción de unos pocos ítems) a efectos de evaluación de dichos conocimientos.

# CAPÍTULO 6.
# CONCLUSIONES

6.1. Introducción
6.2. Conclusiones respecto a los objetivos
6.3. Conclusiones sobre las hipótesis
6.4. Aportaciones y limitaciones del estudio
6.5. Líneas de investigación futura

## 6.1. INTRODUCCIÓN

En esta Memoria hemos presentado un estudio de evaluación de los conocimientos matemáticos sobre los gráficos estadísticos y de los conocimientos didácticos sobre estadística elemental en una muestra de futuros profesores de educación primaria. Para fundamentar nuestro trabajo, nos hemos apoyado en nociones teóricas del enfoque onto-semiótico de la didáctica de la matemática propuesto por Godino y sus colaboradores: teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998a y b); teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005; Font, Godino y D'Amore, 2007) y teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Font, Planas y Godino, 2010).

También nos hemos basado en un amplio estudio de las investigaciones previas sobre comprensión de gráficos estadísticos y sobre formación de profesores para enseñar estadística que se analizan con detalle en el capítulo 3. La memoria incluye asimismo un breve estudio curricular en el capítulo 2 que permite contextualizar mejor la investigación.

Para finalizar el trabajo presentaremos las principales conclusiones obtenidas organizadas en diferentes apartados. Comenzamos describiendo las conclusiones en relación a los objetivos e hipótesis de la investigación y presentando las principales aportaciones de la misma. Finalizamos describiendo algunas líneas de investigación que podrían servir para continuar este trabajo.

## 6.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS

La importancia de la formación en estadística y su didáctica de los futuros profesores de primaria se deduce claramente del papel asignado a la estadística en los Decretos de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria y de los errores detectados en conocimientos estadísticos elementales en futuros profesores que fueron descritos, por ejemplo, en Estepa (1993), Bruno y Espinel (2005) o Espinel (2007). Como ya hemos indicado en Batanero, Arteaga y Contreras (2009), estos problemas se producen en otros países, han sido denunciados por autores como Franklin y Mewborn (2006) y han llevado a la organización de un estudio internacional (Joint ICMI/IASE Study) cuyos resultados se recogen en Batanero, Burrill, Reading y Rossman (2008) y Batanero, Burrill y Reading (en prensa).

La evaluación del conocimiento del profesor sigue siendo un tema relevante en didáctica de la matemática, debido a la escasez de investigaciones y las demandas de que los estudiantes sean enseñados por profesores bien cualificados, la necesidad de evidenciar los resultados de los programas de formación de profesores y el debate establecido acerca de cuál es el contenido matemático para la enseñanza que debe poseer el profesor y la necesidad de definirlo (Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007). Consecuentemente nuestro trabajo se orientó a evaluar el conocimiento matemático de los futuros profesores de educación primaria sobre los gráficos estadísticos y su conocimiento didáctico sobre estadística.

Las nociones de conocimiento matemático y didáctico se han usado en el sentido propuesto por Godino (2009). Dentro del conocimiento matemático, se han considerado dos de las categorías de conocimiento propuestas por Hill, Ball, y Schilling (2008), en concreto: Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y dentro del conocimiento didáctico se tuvieron en cuenta los siguientes componentes: Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) y Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y el conocimiento del currículo.

Con respecto a los objetivos de nuestra investigación, dentro de nuestro objetivo general de evaluar conocimientos matemáticos y didácticos con respecto a la estadística de futuros profesores de Educación Primaria, se enumeraron varios objetivos específicos, que reproducimos a continuación, indicando las conclusiones obtenidas sobre cada uno de ellos.

*Objetivo 1. Evaluar los conocimientos matemáticos de los futuros profesores de educación primaria en relación a los gráficos estadísticos.*

Para responder a este objetivo, en el capítulo 4 se presenta un estudio de evaluación del conocimiento común del contenido en una muestra de 207 futuros profesores de educación primaria, tanto respecto a la construcción de gráficos, como respecto a su lectura e interpretación, y su uso para obtener conclusiones.

Para llevar a cabo esta evaluación se planteó a los participantes en el estudio un proyecto abierto de análisis de datos, como parte de una actividad práctica de la asignatura Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria, a la que se dedicó dos sesiones de dos horas de duración. Durante la primera sesión los estudiantes debieron recoger datos de un experimento aleatorio realizado en la clase y analizarlos individualmente, entregando por escrito un informe del análisis de datos y las conclusiones. Tuvieron una semana de plazo para completar la actividad.

Recogidos los informes elaborados por los participantes, en el capítulo 4 se analizaron los gráficos producidos, desde diferentes puntos de vista. Se define un nivel de complejidad semiótica del gráfico, para complementar los niveles de lectura de gráficos definidos por varios autores, en particular los de Bertin (1967) y Curcio (1987, 1989). Se estudian los errores producidos, el nivel de lectura de los gráficos y la capacidad de extraer conclusiones sobre el problema planteado. Asimismo se relacionan entre sí las anteriores variables. Las principales conclusiones sobre este punto fueron las siguientes:

- Menos de la mitad de los estudiantes de la muestra que elaboran gráficos para apoyar el análisis de datos en su proyecto los construyen correctamente; mientras que el resto los gráficos contienen algún tipo de error. Aproximadamente un 20% de los gráficos tienen errores que hemos considerado de menor importancia (y por tanto al gráfico como parcialmente correcto) y que se refieren en general a las escalas y reproducen los descritos en estudiantes de secundaria por Li y Shen (1991) y Wu (2004). En nuestros alumnos se confirman algunos errores frecuentes en la construcción de gráficos citados por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) en futuros profesores, ya que pocos estudiantes incluyen un rótulo correcto y significativo en el gráfico y algunos no centran los intervalos de frecuencias en los histogramas, error también descrito por Lee y Meletiou (2003). La mayoría de estos errores son debidos a un insuficiente sentido numérico de los estudiantes, por ejemplos, fallos al aplicar la proporcionalidad (Arteaga, Contreras, y Ruiz, 2008).

- Aproximadamente un 30% de estudiante realiza gráficos incorrectos con errores que invalidan su uso para el problema propuesto. Se confirman otros errores citados por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007) en futuros profesores, como la elección de un gráfico no apropiado al tipo de variable o la supresión de intervalos con frecuencia nula. También aparece la confusión entre variable dependiente e independiente encontrada por Ruiz (2006).
- Hemos encontrado también errores no descritos previamente en futuros profesores como utilizar escalas demasiado amplias para el rango de variación de la variable, y valor de la variable, cambiar las líneas rectas por curvas en un gráfico o introducir líneas innecesarias que dificultan su lectura. En este sentido nuestra investigación ha contribuido a caracterizar nuevos errores en los gráficos, no descritos en los antecedentes del trabajo.
- El análisis semiótico de un ejemplo, en cada categoría de error ha permitido explicar estos errores, en términos de conflictos semióticos, donde el estudiante y el profesor no asignan el mismo significado a una correspondencia entre objetos matemáticos. En el capítulo 4 se clasificaron estos conflictos en tres tipos: (a) *Relacionados con las convenciones de construcción de los gráficos.* Se trata de estudiantes que hacen una interpretación incorrecta de los procedimientos de construcción de gráficos, o de los convenios para aplicarlos; (b) *Conflictos relacionados con la elección de un gráfico adecuado.* Aunque, generalmente un gráfico estadístico puede usarse para diversos fines, también existen unos convenios por los que algunos gráficos son inadecuados en ciertas situaciones y los alumnos que presentan estos conflictos los desconocen: (c) *Relacionados con la representación de números en la recta real.* Estos conflictos están relacionados con el sentido numérico; (d) *Relacionados con la comprensión de conceptos.* Cuando los estudiantes confunden conceptos entre sí o los asocian con propiedades inexistentes; y (e) *Conflictos relacionados con el uso acrítico del software.*
- Son sólo 50 de los 207 estudiantes de nuestra muestra, los que realizan sus gráficos con ayuda del ordenador, por lo que deducimos que el manejo de la hoja Excel es

todavía poco familiar a estos futuros profesores. Más aún, la proporción de errores en los gráficos crece en los estudiantes que hacen uso del ordenador, lo que confirma la anterior conclusión.

- Al analizar la lectura de los gráficos, hecha por los estudiantes, observamos que aproximadamente el 30% estudiantes que realizan gráficos no los leen y, en caso de obtener conclusiones al proyecto que se les planteó, lo hacen sin ayudarse de la información que les pueda proporcionar los gráficos. Ello puede ser un efecto de del contrato didáctico, pues en las clases habituales de estadística que han tenido en primaria y secundaria, el objetivo de los problemas era simplemente construir el gráfico, no siendo común el que se les pida una interpretación. Pero también nos alerta de una posible falta de competencia en la lectura de los gráficos en una parte de los estudiantes.
- El resto de los estudiantes lee el gráfico, aunque a diferente nivel de lectura, según la clasificación de Bertin (1967): El nivel de lectura de extracción de datos, se produce en 22 a 25% de estudiantes según la variable, el nivel de extracción de tendencias (24 a 16 % según la variable y el nivel de análisis de estructura 13 a 11 % según la variable Estos datos indican una pobre capacidad de lectura de los gráficos en los futuros maestros, también en consonancia con los trabajos de Monteiro y Ainley (2004, 2006, 2007).
- La obtención de conclusiones fue el paso que ha causado más dificultad, por la falta de familiaridad de los futuros profesores con proyectos estadísticos y actividades de modelización. Puesto que estas actividades se recomiendan hoy en la enseñanza de la estadística en educación primaria nos parece necesario que los futuros profesores comprendan y puedan llevar a cabo todos los pasos de dicho proceso en actividades similares a la analizada. Además, el trabajo con proyectos abiertos puede ser especialmente adecuado en el trabajo individual y en grupos recomendados en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior, y por ello pensamos que debieran emplearse en la formación de profesores.

En resumen, los resultados del capítulo 4 indican escaso conocimiento matemático del contenido “gráficos estadísticos” en una proporción importante de futuros profesores, tanto por los errores que cometen en su construcción, como por no alcanzar suficiente nivel de lectura o no llegar a una conclusión a partir del gráfico. La enseñanza de la estadística a futuros profesores con frecuencia se reduce mucho o incluso se suprime, debido al escaso número de créditos disponibles para la formación matemática y didáctica de los mismos. Pero como señala Scheaffer (2006), en una clase de estadística se puede ejercitar gran número de contenidos de otras partes de las matemáticas, geometría, medida o sentido numérico. Es por ello necesario crear un espacio suficiente en la formación de profesores para complementar su formación estadística y matemática.

*Objetivo 2. Definir una jerarquía inicial de niveles de complejidad en la construcción gráficos estadístico, que complemente los niveles de lectura definidos por diversos autores y permita explicar el éxito de los sujetos en la lectura y obtención de conclusiones sobre los gráficos.*

En la sección 3.3.3 se analizó con detalle la actividad semiótica involucrada en la construcción y lectura de los gráficos, que ha sido estudiada por diversos autores, como Bertin (1967), quien desarrolló una taxonomía de los componentes de los gráficos y definió *imagen* como una forma visual significativa-perceptiva dentro de un instante mínimo de visión, considerando que un gráfico es más eficaz cuando cualquier tipo de pregunta, del nivel que sea, puede ser respondida a través de una sola imagen. Cleveland y McGill (1984), por su parte estudiaron la percepción gráfica e identificaron y ordenaron una serie de tareas que una persona debía poner en juego al leer un gráfico para obtener la información cuantitativa presente en éste. Por otro lado, aunque muchos autores han definidos niveles de comprensión de gráficos (Bertin, 1967; Curcio, 1987, 1989, Wainer, 1992; Gerber, Boulton-Lewis y Bruce, 1995; Friel, Curcio y Bright, 2001; Aoyama y Stephen, 2003, Aoyama, 2007) no habíamos encontrado una definición semejante de niveles en la construcción de gráficos.

Apoyados en los trabajos citados en el párrafo anterior, y en algunas ideas del marco teórico (más específicamente en la idea de función semiótica que Font, Godino y D'Amore, 2007 toman de Eco, 1979 además de la idea de *configuración cognitiva* descrita por los mismos autores), en el Capítulo 4 se define un *nivel de complejidad semiótica* del gráfico, que constituye una jerarquía, completando el análisis iniciado en Arteaga (2008). La idea subyacente en la definición es clasificar los gráficos en función de la mayor complejidad de la actividad semiótica involucrada, debido al uso de mayor número de objetos estadísticos u objetos estadísticos más complejos, así como de mayor número de variables representadas. Asimismo, se trató de que la jerarquía de niveles de complejidad semiótica fuesen en paralelo con la jerarquía de niveles de lectura de Bertin (1967) y Curcio (1987, 1989) en el sentido que gráficos de mayor nivel de complejidad permitan lecturas de mayor nivel.

Pensamos que la jerarquía construida puede ser útil tanto para la enseñanza como para la investigación. Este es un objetivo interés en el estudio, en cuanto no hemos encontrado investigaciones que describan niveles en la construcción de gráficos y de este modo aportamos un resultado original. También se ha relacionado la complejidad del gráfico con los errores cometidos, los niveles de lectura alcanzados y las conclusiones obtenidas. Se han obtenido las siguientes conclusiones:

- Destacamos, en primer lugar, el interés de llevar a cabo un estudio semiótico de los gráficos construidos por los estudiantes, puesto que ello nos permite mostrar que diferentes representaciones gráficas del mismo conjunto de datos no son equivalentes en cuanto a la configuración de objetos matemáticos que el alumno pone en juego en su construcción. Por otro lado, se puede establecer un paralelismo entre los niveles de lectura de gráficos descritos por Bertin (1967) y asumidos posteriormente por Curcio (1989) con otra terminología y nuestros niveles de construcción de los gráficos.
- Observamos también que el nivel de complejidad del gráfico no depende de la variable analizada y es por tanto una indicación de la competencia gráfica alcanzada por el futuro profesor. Por el contrario, la proporción de gráficos correctos, parcialmente correctos e incorrectos depende del nivel de complejidad semiótica, aumentando la corrección del nivel con el mayor nivel de complejidad, indicando de nuevo que la complejidad es una posible medida de la competencia gráfica del estudiante.
- Respecto al nivel de lectura, se obtiene que, para las tres variables analizadas, según aumenta el nivel de complejidad semiótica en los gráficos que construyen los futuros profesores, aumenta el porcentaje de alumnos que los leen y aumentan asimismo las lecturas en los dos niveles superiores: análisis de la estructura y extracción de tendencias.
- Destacamos también que, en general, la construcción de un gráfico ayuda a la obtención de conclusiones. Por otro lado en el conjunto de alumnos que realizan gráfico de nivel 4 de complejidad semiótica es donde se da el mayor porcentaje de de respuestas correctas. Esto parece mostrar que la realización de gráficos de nivel 4 en la comparación de dos distribuciones puede ser de gran utilidad, pero que requiere de una instrucción previa sobre cómo leer este tipo de representaciones

*Objetivo 3. Evaluar los conocimientos didácticos de los profesores respecto a la estadística, a partir del análisis que ellos realizan del proyecto desarrollado por ellos mismos y de toda la situación didáctica.*

En el capítulo 5 se analizan los protocolos producidos por una submuestra formada por 108 futuros profesores al analizar la idoneidad didáctica del proyecto anteriormente descrito, utilizando para ello una *Pauta de análisis de la idoneidad didáctica de Procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática* (Godino y Batanero, 2008), proporcionada por los profesores de la asignatura y con la cual los participantes habían trabajado previamente en otras actividades. Los futuros profesores tuvieron que entregar unos informes escritos en los que valoraron la idoneidad didáctica del proceso de estudio vivido en el aula (incluyendo en el mismo el trabajo extra-escolar realizado en casa, pues este trabajo es similar al que un maestro o maestra podría asignar a uno de sus estudiantes).

Godino, Font y Wilhelmi (2008) incluyen este tipo de análisis (de la idoneidad didáctica) como uno de los tipos de análisis didácticos en su propuesta, indicando que la Didáctica de la Matemática debe aspirar a la mejora de la enseñanza, aportando una racionalidad que permita el análisis y crítica de medios, fines y cambios en los procesos educativos. Resaltamos el hecho de que se pidió a los alumnos la valoración en relación a la utilidad del proceso, bien en la formación de maestros (como era su caso) o para estudiantes de últimos cursos de primaria o de secundaria.

Siguiendo el método sugerido por Godino (2009), por medio del estudio de la aplicación que hacen los estudiantes de los diversos componentes de la idoneidad didáctica, se analiza el conocimiento especializado del contenido (idoneidad epistémica), el conocimiento del contenido y los estudiantes (idoneidad cognitiva y afectiva), y el conocimiento del contenido y la enseñanza (idoneidad mediacional, interaccional) y por último el conocimiento del currículo (idoneidad ecológica). Así en el capítulo 5 de la tesis, ampliamos nuestro foco de atención, desde el conocimiento matemático de los futuros profesores con respecto a los gráficos estadísticos, para centrarnos en el conocimiento del contenido didáctico sobre la estadística de los futuros profesores. Para cada uno de los descriptores de la Pauta de análisis de la idoneidad didáctica de diferenciaron cuatro niveles de aplicación (0 a 3). Las conclusiones son las siguientes:

- *Conocimiento especializado del contenido.* Nuestros resultados muestran que este conocimiento es muy escaso, pues en promedio no llegan a alcanzar el nivel 2 (aplicación anecdótica), confirmando los resultados de Chick y Pierce (2008) en otra tarea y con otro instrumento. Los participantes en nuestro estudio mostraron poca capacidad para identificar los objetos matemáticos implícitos o que se han hecho explícitos en la situación de enseñanza, y por tanto de poder valorar qué han aprendido sus estudiantes. Nosotros explicamos este resultado por los escasos conocimientos comunes del contenido mostrados en el capítulo 4 y debido a la escasa preparación que reciben durante sus estudios de los temas de estadística y probabilidad.
- *Conocimiento del contenido y los estudiantes.* La idoneidad cognitiva resultó más sencilla que la epistémica, debido a que los estudiantes apreciaron que la unidad tiene en cuenta los conocimientos previos, así como el aprendizaje logrado por ellos mismos, siendo más confuso el tema de la evaluación, debido a que la tarea era excesivamente abierta. Fue también más sencillo para los alumnos valorar el interés personal del proyecto (al hallarse ellos mismos interesados), que la promoción de actitudes positivas hacia la matemática o las emociones. En resumen los alumnos han mostrado mejor conocimiento del contenido y los estudiantes, debido a haber vivido ellos mismos la situación didáctica a analizar y poder ponerse con facilidad en la situación del estudiante que aprende con este proyecto.
- *Conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo*. Respecto a la idoneidad mediacional Los estudiantes valoraron fácilmente que el proyecto presentado era bastante versátil y no requería de muchos recursos materiales, pero, por otro lado puede hacerse uso de la tecnología, como la hoja Excel, lo que proporciona un tema adecuado para desarrollar la competencia tecnológica recomendada en los decretos curriculares. Sin embargo aspectos como tiempo dedicado al estudio, horario o distribución de estudiantes fueron difíciles de valorar por los estudiantes. En relación con los descriptores de la idoneidad interaccional, el análisis de los diversos tipos de discurso en el aula y de la evaluación resultó difícil. Como síntesis del estudio de la idoneidad ecológica, relacionado con el conocimiento del currículo, podemos observar que los estudiantes no parecen percibir las relaciones entre los contenidos del proyecto y otros contenidos estadísticos o con los contenidos de otros bloques matemáticos. Tampoco las

posibles conexiones que se pueden establecer con otras materias o con la vida personal o social del estudiante. En resumen de la valoración de los dos últimos componentes de la idoneidad, los estudiantes muestran un conocimiento flojo del contenido y la enseñanza y del currículo, que aunque mejor que el conocimiento especializado del contenido es menor que el conocimiento del contenido y los estudiantes.

Los estudios multivariantes y de las puntuaciones totales así como de las puntuaciones medias y máximas en los diferentes descriptores realizados al final del capítulo han permitido mostrar la variabilidad de conocimientos de los estudiantes y dividirlos en dos grupos diferenciados de alumnos que han alcanzado o no una capacidad razonable de análisis didáctico para aplicar la pauta de valoración de la idoneidad didáctica a la situación de enseñanza. Asimismo los resultados del análisis discriminante muestran la validez discriminante del instrumento (con excepción de unos pocos ítems) a efectos de evaluación de dichos conocimientos.

## 6.3. CONCLUSIONES SOBRE LAS HIPÓTESIS

En el capítulo 1 se plantearon algunas hipótesis, sobre las cuáles en este apartado se discuten las conclusiones obtenidas. Estas hipótesis son las siguientes:

*Hipótesis 1. Los futuros profesores de nuestra muestra, al construir los gráficos estadísticos para llevar a cabo la tarea propuesta, cometen muchos de los errores ya detectados en investigaciones sobre dificultades y errores en la construcción de los gráficos estadísticos.*

En nuestra investigación los alumnos participantes en el estudio seleccionaron ellos mismos los gráficos que creían pertinentes para resolver el problema que se les planteó. De acuerdo a lo esperado, y según se ha descrito en el capítulo 4 y en las conclusiones respecto a los objetivos, una proporción importante de los gráficos construidos tenían errores, siendo alrededor del 20% los gráficos considerados parcialmente correctos y del 30 % gráficos con errores importantes que los hacían inútiles para la finalidad del trabajo. Los errores de los futuros profesores en los gráficos construidos se han clasificado, mostrando un ejemplo de cada categoría posible y, mediante el análisis semiótico, dando una explicación de muchos de estos errores en términos de conflictos semióticos descritos en el apartado anterior.

Por otro lado, en nuestro trabajo se encontraron prácticamente la mayoría de los errores citados en otros trabajos con profesores, como los de Espinel (2007) y Espinel Bruno y Plasencia, (2008). También aparecen errores descritos en investigaciones con alumnos universitarios de otras especialidades, por ejemplo, por Ruiz (2006) y Lee y Meletiou (2003) y en investigaciones con niños como las de Li y Shen (1992) o Wu (2004). Al mismo tiempo, en el capítulo 4 también se describieron nuevos errores no detectados en las investigaciones previas.

*Hipótesis 2. Los niveles superiores de complejidad semiótica definidos en nuestra investigación son alcanzados por la mayoría de los estudiantes de la muestra de nuestro estudio. Sin embargo, no todos los estudiantes alcanzan un nivel de lectura suficiente de los gráficos producidos.*

Efectivamente, dos tercios de los estudiantes producen gráficos de nivel complejidad semiótica 3 o 4, es decir gráficos en los que tienen que formar la distribución de las dos variables. Por ello, la mayoría de los futuros profesores muestra un conocimiento suficiente de la idea de distribución. Se observó, además, mediante el contraste Chi-cuadrado, que la proporción de estudiantes que realiza gráficos en cada nivel para las diferentes variables (dentro de los que realizan gráficos) es similar, por lo que se concluye que el nivel de complejidad no depende de la variable, sino es un indicador de la competencia gráfica del estudiante.

Sin embargo, como se indica en el apartado anterior, son pocos estudiantes los que muestran un nivel superior de lectura del gráfico en la clasificación de Bertin (1967) y Curcio (1989). Es posible que este resultado se deba a que el 30% de los profesores, una vez dibujado el gráfico no lo comentan por un efecto del contrato didáctico o por falta de capacidad de modelización y experiencia en el trabajo con proyectos. En todo caso, esta pobre capacidad de lectura y falta de lectura crítica coincide con lo informado con otros tipos de estudiantes en investigaciones previas (Friel, Curcio y Bright, 2001; Aoyama, 2007), de modo que podría ser un problema general, y no sólo de los futuros profesores de educación primaria. Como consecuencia sugerimos la necesidad de prestar atención a la lectura y extracción de conclusiones de las gráficas y no sólo a su construcción en la enseñanza de la estadística.

*Hipótesis 3. Los futuros profesores son capaces de aplicar adecuadamente elementos de cada uno de los componentes de la guía de análisis de la idoneidad didáctica proporcionada. Sin embargo, la aplicación no es homogénea en todos los descriptores y componentes.*

Esta hipótesis se confirma parcialmente en los resultados que hemos analizado con detalle en el capítulo 5, pues si nos fijamos en la puntuación media obtenida en el total de descriptores de cada componente de la idoneidad didáctica, la mayoría de los estudiantes apenas se alcanza el nivel 2 (aplicación anecdótica).

Pero, por otro lado, se ha observado también que algunos estudiantes se limitan a aplicar uno o dos descriptores en cada componente, dejando el resto en blanco o limitándose a copiarlo. Por ello la puntuación suele disminuir sistemáticamente desde el primer descriptor a los siguientes.

Si se tiene en cuenta, en cambio, el máximo nivel alcanzado en cada componente de la idoneidad, las puntuaciones suben descriptor a descriptor y por componentes a niveles comprendidos entre 2 o 3 en incluso próximo a 3. Por ello se deduce que el estudiante es capaz de aplicar la guía de análisis proporcionada, aunque por efecto del contrato didáctico, no llega a completar todos sus elementos.

Por otro lado, la aplicación no fue homogénea ni entre estudiantes ni entre componentes. Respecto a los componentes de la idoneidad didáctica, los relacionados con el conocimiento del contenido y los estudiantes (idoneidad afectiva y cognitiva) resultaron con puntuaciones más altas. Por el contrario el resto de los componentes, relacionados con el conocimiento especializado del contenido (idoneidad epistémica) y el conocimiento del contenido y la enseñanza (idoneidad interaccional, mediacional y ecológica) resultaron más difíciles.

El análisis multivariante y estudio de la puntuación total permitió asimismo observar la variabilidad de conocimientos didácticos de los estudiantes, pues en algún caso (que resultó atípico) el estudiante fue capaz de aplicar a nivel máximo todos los descriptores en todos los componentes. Además se observaron claramente dos tipos diferenciados de estudiantes con conocimientos didácticos nulos-bajos y razonables.

## 6.4. APORTACIONES Y LIMITACIONES DEL ESTUDIO

### Aportaciones

El trabajo aporta, como se ha dicho un resultado teórico, consistente en la definición del nivel de complejidad semiótica en la construcción de gráficos. Los resultados en cuanto a la definición de esta jerarquía y su relación con otras jerarquías de nivel de lectura se publicaron en diversos trabajos (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2009; 2010; Arteaga y Batanero, 2011) y pueden tener interés en el análisis de libros de texto o en el análisis del uso de gráficos en trabajos de investigación.

Otra información producida que es relevante para el formador de profesores es la descripción sistemática de las competencias gráficas de los profesores de primaria, sus errores en la construcción de gráficos y sus conocimientos del contenido pedagógico. Toda esta información puede ayudar al formador en la mejora de la preparación estadística de los futuros profesores. Asimismo hemos publicado estos resultados, así como la relación entre la complejidad de los gráficos o el uso de ordenador y los errores en diversos trabajos (Arteaga, Ortiz y Batanero, 2008; Ruiz, Arteaga y Batanero, 2009).

Finalmente, la revisión bibliográfica y el estado de la cuestión pueden ayudar a otros investigadores interesados por los gráficos estadísticos. Avances de esta revisión bibliográfica han sido publicados en Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras (2009) y Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras (en prensa).

### Limitaciones del trabajo

Como toda investigación, la nuestra también tiene sus limitaciones. Por un lado, la muestra de estudiantes, aunque de varios cursos y profesores, se ha tomado de una sola universidad, por lo que los resultados podrían no ser generalizables a otras universidades. Sería necesario replicar el estudio en otros contextos educativos para ver si se mantienen las tendencias observadas en el nuestro.

El estudio del conocimiento didáctico llevado a cabo en el capítulo 5 no ha sido específico de los gráficos estadísticos, sino que se ha referido a la enseñanza de la estadística en la educación primaria, en general. Sería importante realizar investigaciones complementarias que se centrasen específicamente en la didáctica de los gráficos, aunque, debido al escaso conocimiento matemático de los futuros profesores sobre dichos gráficos es previsible que los resultados en dicho estudio fuesen aún peores que los mostrados en este trabajo.

## 6.5. LINEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Este trabajo es uno de los pocos que estudia la competencia gráfica de futuros profesores, cuyo estudio fue iniciado por los autores descritos en el capítulo 3. Resaltamos en España el trabajo llevado a cabo por Bruno y Espinel (2005), Espinel, 2007; Espinel Bruno y Plasencia, 2008, Carrión y Espinel (2005a y b; 2006) y González y Pinto (2008). Pero, de todos modos, en comparación con otros temas matemáticos la investigación sobre formación de profesores en relación a los gráficos estadísticos es muy escasa, de modo que la investigación puede completarse con muchos otros puntos, por ejemplo:

- La evaluación de la competencia en la construcción de gráficos estadísticos en nuestro trabajo se realiza a través de un proyecto abierto de análisis de datos, donde las instrucciones son muy abiertas. Los resultados podrían variar considerablemente en otras tareas más cerradas. Podría ser interesante, en consecuencia, preparar un cuestionario más estructurado de evaluación de los conocimientos matemáticos y didácticos de los futuros profesores respecto a los gráficos estadísticos. Para ello sería necesario comenzar definiendo el contenido objeto de evaluación, para luego preparar ítems que cubriesen dicho contenido en lo que se podría utilizar algunos ejemplos de los gráficos o respuestas obtenidas de los estudiantes en nuestro trabajo. Sería también preciso validar y probar dicho cuestionario con nuevas muestras de futuros profesores.
- Puesto que los futuros profesores han mostrado un conocimiento tan escaso de los gráficos estadísticos y de la didáctica correspondiente, sería necesario diseñar actividades formativas dirigidas a futuros profesores que permita aumentar su conocimiento matemático y didáctico respecto a los gráficos estadísticos. Dichas actividades podrían ser experimentadas y evaluadas en cursos orientados a la preparación de futuros profesores.
- Se podrían adaptar las investigaciones anteriores al caso de profesores de secundaria o Bachillerato, en donde el tipo y variedad de gráficos, así como los conocimientos previos son muy diferentes que en el caso de profesores de primaria.

# CHAPTER 7

# ENGLISH SUMMARY

7.1. The problem
7.1.1. Aims and hypotheses. Relevance for statistics and mathematics education
7.1.2. Project work in statistics classrooms
7.2. Background
7.2.1. Educational setting
7.2.2. Statistical graphs in the primary school curriculum and in the training of teachers
7.3. Theoretical background
7.4. Previous research
7.4.1. Training teachers to teach statistics
7.4.2. Understanding statistical graphs
7.5. Mathematical knowledge of prospective teachers
7.5.1. Method
7.5.2. A priori analysis of the task
7.5.3. Semiotic complexity of graphs
7.5.4. Errors in the graphs produced
7.5.5. Reading and conclusions
7.6. Didactic knowledge of teachers
7.6.1. Method
7.6.2. Results
7.7. Synthesis of findings

## 7.1. THE PROBLEM

Graphical language is essential in organising and analysing data, since it is a tool for *transnumeration*, a basic component in statistical reasoning (Wild & Pfannkuch, 1999). Building and interpreting statistical graphs is also an important part of statistical literacy (Watson, 2006; Ridgway, Nicholson, & McCusker, 2996; 2007; 2008), which is the union of two related competences: (a) Interpreting and critically evaluating statistically based information from a wide range of sources, and (b) formulating and communicating a reasoned opinion about such information (Gal, 2002).

Prospective primary school teachers in many countries enter the Faculties of Education with a very limited statistical competence (Bruno & Espinel, 2005; Monteiro y Ainley, 2006; 2007; Espinel, 2007; Espinel, González, Bruno y Pinto, 2009), and the time available for educating them in statistics and the related pedagogical knowledge is very limited. The organization of didactical activities that serve to teach statistics to these teachers, while at the same time helping to bridge conceptualization and pedagogy (as suggested by Ball, 2000) should be, however, based on a previous assessment of teachers' statistical and didactical knowledge.

Because recent curricular guidelines in Spain (MEC, 2006a; Junta de Andalucía, 2006a) introduce statistics graph since the first year of primary school level, this research was oriented to assess prospective primary school teachers' common and specialized knowledge of statistical graphs (Ball, Thames, & Phelps, 2005) and some components of their didactical knowledge (Godino, 2009) in order to use this information in improving the training of these teachers. Data will be taken from written reports produced by the teachers as a part of statistical project and later evaluation of the didactic suitability of the project. These activities were part of a formative cycle that was suggested by Godino, Batanero, Roa and Wilhelmi (2008) to prepare teachers.

### 7.1.1. AIMS AND HYPOTHESES. RELEVANCE FOR STATISTICS AND MATHEMATICS EDUCATION

Ball *et al.*, (2005) developed the notion of "mathematical knowledge for teaching" (MKT) in which they distinguished four main categories of knowledge:

- *Common content knowledge* (CCK), or the mathematical knowledge shared by most educated adults, which includes basic skills and broad general knowledge of the subject.
- *Specialized content knowledge* (SCK), as a particular way in which teachers master the subject matter that supports their activity in planning and handling classes and in assessing students' knowledge, strategies, and difficulties.
- *Knowledge of content and students* (KCS), or the amalgamated knowledge that teachers posses about how students learn content. This includes knowledge about common student conceptions and misconceptions, about what mathematics students find interesting or challenging, and about what students are likely to do with specific

mathematics tasks.

- *Knowledge of content and teaching* (KCT), or mathematical knowledge of the design of instruction, including how to choose examples and representations, and how to guide student discussions toward accurate mathematical ideas. This includes knowledge about instructional sequencing of particular content, about useful examples for highlighting salient mathematical issues, and about advantages and disadvantages of representations used to teach a specific content idea.

This research has two main aims:

*Objective 1. Assessing the mathematical knowledge of primary school prospective teachers in relation to statistical graphs.*

We specifically focus on the common knowledge of the content "statistical graphs", including building graphs, as well as reading and interpreting graphs and getting conclusions from the same. In order to face this aim we propose an open statistical project to a sample of 208 prospective teachers. We collect and analyse the graphs produced, study the errors in the graphs and the influence of computers on the same, the teachers' reading level and their competence to get conclusions about the problem posed. All of these analyses are described in chapter 4.

*Objetive 2. Assessing the didactical statistical knowledge of teachers from their analyses of the project carried out by themselves and of the whole didactic situation.*

In chapter 5, we analyse the protocols produced by 108 prospective teachers when they analyse the didactic suitability of the aforementioned statistical project (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006). Participants are given a "Guide to analyse the didactic suitability of mathematical teaching learning processes" (GAEDS; Godino & Batanero, 2008), which was provided by the lecturer and with which the participants have worked in other activities. With base on this analysis we report on the prospective teachers' specialised statistical knowledge, knowledge of content and students and knowledge of content and teaching.

Our initial hypotheses are as follow:

*Hypothesis 1. Prospective primary school teachers in the sample will present different errors, which are similar to those that have been described in previous research with school students when building statistical graphs.*

*Hypothesis 2. We expect that most participants in the study reach the upper level in the semiotic complexity of graphs produced, although possibly the majority of participants do not reach an adequate reading level when interpreting the graphs produced.*

*Hypothesis 3. We expect that prospective teachers in the sample are able to adequately apply most descriptors in the different components of didactic suitability included in the GAEDS guide. However the application is possibly not homogeneous in all the descriptors and components.*

### 7.1.2. PROJECT WORK IN STATISTICS CLASSROOMS

Both statisticians and statistical educators recommend that students work with projects and investigations in order to develop statistical thinking. In Section 1.6 we summarise the recent recommendations related to the use of projects in the statistics classroom (e.g. by Biehler, 1997; Holmes, 1997; Connor, Davies, & Payne, 2002; Batanero & Díaz, 2004; MacGillivray & Pereira Mendoza, in press) that were described in some previous work (Díaz, Arteaga & Batanero, 2007; Díaz & Arteaga, 2008).

We analyse the steps in working with a statistical project (Graham, 1987; Pimenta, 1993), as well as some Internet resources useful for project work in statistics. We also justify that project work contribute to acquiring the mathematical competences described in the Spanish curricular guidelines for Primary Education (MEC, 2006a, Consejería de Educación, 2007b) and justify the use of a statistical project in our own research.

## 7.2. BACKGROUND

### 7.2.1. EDUCATIONAL SETTING

Participants in the research were prospective primary school teachers in their second year of University, at the Faculty of Education, University of Granada, Spain. The data were collected along a classroom practice (Godino, Batanero, Roa, & Wilhelm, 2008) that was carried out in a Mathematics Education course (second year of University) directed to prospective teachers.

This course is mainly practical; prospective teachers are briefly introduced to some didactic materials that summarize the pedagogical content knowledge in the different mathematical areas. Different practical activities serve to contextualise and apply this knowledge. Along with the themes presented previously in the course, the prospective teachers were introduced to didactical analysis, and were taught specific criteria to assess the suitability of a teaching process. These teachers had previously taken a 90 hour course in elementary mathematics covering the curricular content for primary school in Spain, which included 20 hours of descriptive statistics and probability, and therefore, we assumed they had mastered the basic statistical content.

In the practice where the data were collected (2 hours long) we proposed prospective teachers a data analysis project. At the end of the session, participants were given a printed sheet with the data obtained in the classroom and were asked to individually produce a data analysis written report to answer the question set in the project. Participants were free to use any statistical graph or summary and work with computers if they wished. They were given a week to complete the reports.

These reports were collected the following week, when a second 90 minute long session took place. After the different solutions to the project given by the prospective teachers were collectively discussed in the classroom, a didactical analysis, was carried out in small groups and again an individual report was produced. Finally these reports were used by the lecturer to discuss in the following days the pedagogical content knowledge involved in teaching statistics in primary school, the statistical and didactical features of this project, the teaching of statistics through project work and the extent to which the project was useful to teach statistics in the upper level of primary school.

### 7.2.2. STATISTICAL GRAPHS IN THE PRIMARY SCHOOL CURRICULUM AND IN THE TRAINING OF TEACHERS

The teaching of statistics in secondary and high school has a long tradition in countries like France, Spain or the United Kingdom; however, because statistics is becoming increasingly important in modern society, the relevance of developing statistical thinking in students across all levels of education has grown. In Spain, the new curricula (MEC, 2006a; 2006b; Consejería de Educación, 2007a; 2007b) include statistics since the first year of primary school level (6 years-old children). Changes in what is expected in the teaching of statistics do not just concern the amount but also the quality of the content.

The current recommendations even for primary school levels suggest a data-orientated teaching of statistics where students are expected to design investigations, formulate research questions, collect data using observations, surveys, and experiments, describe and compare data sets, propose and justify conclusions and predictions that are based on data (e.g., NCTM, 2000; Franklin et al., 2005). Learners are expected to deal with data in significant contexts and should take a critical stance on the analysis and interpretation of data, and especially the abuse, of data and statistics. The importance of developing statistical thinking and not just statistical knowledge in the students is being emphasized in many curricula that focus on developing statistical reasoning, which is essential to modern society and complement reasoning in other areas of mathematics (Gattuso, 2006; Scheaffer, 2006).

Although the specificity of statistics is widely accepted, statistics is not as an independent topic in the school curriculum, but is taught as a part of mathematics. Consequently we attend demands for a better preparation of primary, secondary and high school mathematics teachers, who are responsible to teach statistics at these levels.

All these issues are analysed in Section 2.4, where we study the curricular guidelines in Spain, the NCTM (2000) standards and the GAISE reports (Franklin et al,, 2005), and analyse the graphs included in a popular editorial in the school textbooks for grades 1-6. This series introduces activities of reading, building and interpreting bar graphs (grade 1), attached and stocked bar graphs (grades 2 and 3), simple and multiple line graphs (grades 3 and 4), pictographs and dot plots (grade 5), pie charts and population pyramids (grade 6) as well as translations between different graphs.

These graphs also appear in the main books used in the preparation of primary school teachers in Spain (Batanero & Godino, 2002; Vallecillos, 2001). In addition teachers are introduced to histograms, steam and leaf plots and box plots. As the time available for preparation of teachers is very scarce, there is no specific course of statistics education and only some activities related to statistics education are carried out in the mathematics education course. Consequently, few of these teachers have previous knowledge of main research results in statistics education concerning students' difficulties in statistical graphs or in other statistical topics.

## 7.3. THEORETICAL BACKGROUND

In Section 2.3 we summarise some theoretical ideas from the Onto- semiotic approach developed in different works (Godino & Batanero, 1994, 1998a , 1998b; Godino, 2002; Godino & Batanero, & Roa, 2005; Godino, Contreras, & Font, 2006) that will be used in our research. The onto-semiotic approach to mathematical cognition tackles the problem of meaning and representation of knowledge by elaborating an explicit mathematical ontology based on anthropological semiotic and socio-cultural theoretical frameworks. This ontology of mathematical objects takes into account the triple aspect of mathematics as a socially shared problem-solving activity, a symbolic language and a logically organized conceptual system.

### Mathematical practices, objects, processes and dualities

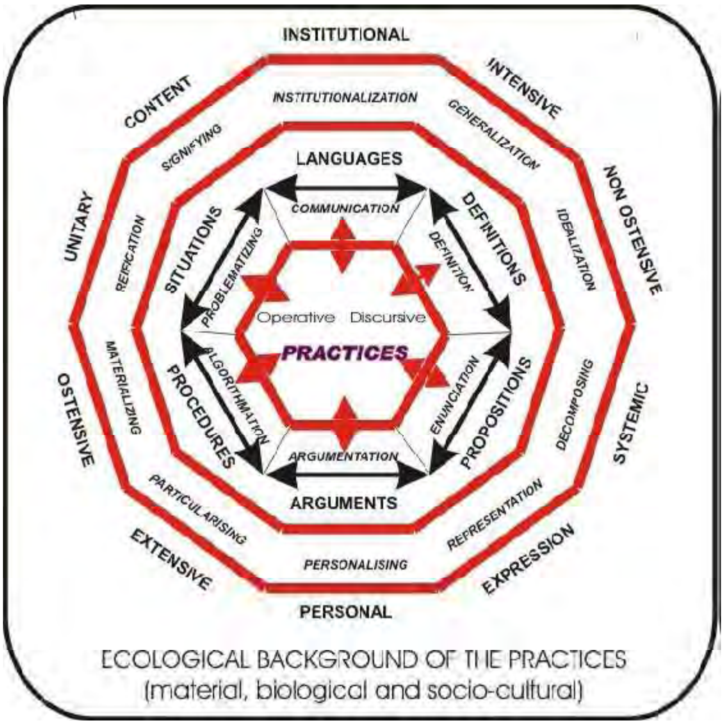
Taking the problem-situation as the primitive notion, the authors of this theoretical framework define the concepts of (personal and institutional) practice, object and meaning (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002). Godino, Batanero and Font (2007) distinguish the following types of primary mathematical objects, that are organised in either institutional (epistemic) or personal (cognitive) configurations:

- Language (terms, expressions, notations, graphics);
- Situations (problems, extra- or intra-mathematical applications, exercises);
- Concepts, given by their definitions or descriptions (e.g. number, point, straight line, mean, function);
- Propositions, properties or attributes, such as the Laplace's rule;
- Procedures (operations, algorithms, techniques);
- Arguments used to validate and explain the propositions and procedures, including deductive and inductive arguments.

The authors define different types of processes linked to the above objects. Moreover, the objects and processes that appear in mathematical practices and those emerging from these practices, might be considered from the five facets of dual dimensions (Figure 7.3.1): personal/institutional, unitary/systemic, expression/content, ostensive/non-ostensive and extensive/intensive (Godino & Font, 2007).

The above types of mathematical objects and processes will be used in the semiotic analysis of statistical graphs produced by the participants in chapter 4. This analysis will serve to define different levels in the semiotic complexity of these graphs that complement the levels defined by different authors in graph understanding.

Figure 7.3.1. Mathematical objects, processes and dualities




Another component in the model is the idea of semiotic function. Godino (2002) and Font, Godino and D'Amore (2007) generalize the notion of *representation*, by taking from Eco the idea of semiotic function "*there is a semiotic function when an expression and a content are put in correspondence*" (Eco, 1979, p.83). The authors interpret m*eaning as the content of any semiotic function*, that is to say, the content of the correspondences (relations of dependence or function) between an antecedent (expression, signifier) and a consequent (content, signified or meaning), established by a subject (person or institution) according to distinct criteria or a corresponding code. The content of the semiotic functions, could be a personal or institutional, unitary or systemic, ostensive or non-ostensive object; it could be a concept–definition, problem–situation, procedure, argument, or a linguistic element. In summary, the onto-semiotic approach also assumes that both the expression (antecedent of a semiotic function) and content (consequent) might be any type of entity.

To discriminate between institutional and personal meaning for a same mathematical expression, the onto-semiotic approach introduces the idea of semiotic conflict. This idea has been introduced in the onto-semiotic approach as an explanation of students' errors, difficulties and obstacles in the learning of specific mathematical content, and in general, of difficulties arising in classroom communication. A *semiotic conflict* is any disparity or difference of interpretation between the meanings ascribed to an expression by two subjects (persons or institutions). The semiotic analysis and the idea of semiotic conflict will be used in chapter 4 to categorize and classify the main errors in the graphs produced by the participants in the study.

**Didactic configurations**

In order to reinforce teachers' pedagogical knowledge in an active way Godino, Batanero and Font (2007); and Godino and Batanero (2008) developed a "Guide to Analyse and Evaluate the Didactical Suitability" (GAEDS) where they suggest the following six dimensions for didactic analysis:

1. *Epistemic suitability* (extent to which the statistical content in a teaching/learning process is representative of the curricular content for a specific teaching level and whether its inclusion in the teaching is justified).
2. *Cognitive suitability* (whether the content is adequate for the students' previous knowledge and the extent to which the instructional goals can be achieved).
3. *Resource suitability* (sound use of technical tools, resources and time).
4. *Emotional suitability* (whether the teaching/learning process takes into account the students' motivations, attitudes, affects and beliefs).
5. *Interactional suitability* (whether the interactions between the teacher and the students and among the students themselves favour overcoming learning difficulties).
6. *Ecological suitability* (degree to which the teaching/learning process is adapted to social environment; possibility of establishing interdisciplinary connections).

The idea of didactic suitability, their different dimensions and the GAEDS guide will be used in chapter 5 to evaluate different components in the pedagogical content knowledge of participants as regards elementary statistics.

## 7.4. PREVIOUS RESEARCH

A summary of previous research is presented in chapter 3 and is organised in two different parts: (a) research on training teachers to teach statistics; and (b) research on graphical understanding of students and teachers.

### 7.4.1. TRAINING TEACHERS TO TEACH STATISTICS

Teachers' mathematics knowledge plays a significant role in the quality of their teaching, since many activities of teachers involve mathematical reasoning and thinking (Ball *et al.*, 2001, p. 453). In addition to mathematical knowledge, teachers need other competences: general pedagogical knowledge, curriculum knowledge, pedagogical content knowledge (PCK), knowledge of learners and their characteristics, knowledge of education contexts, and knowledge of education ends, purposes, and values.

Shulman (1987) conceptualised PCK as a special mixture of content and pedagogy that is specific for a topic and that teachers develop as a consequence of professional practice. These ideas have been expanded and developed by different authors. For this research we are using Ball *et al.*, (2005) notion of "mathematical knowledge for teaching" (MKT) in which they distinguished four main categories of knowledge:

- *Common content knowledge* (CCK), or the mathematical knowledge shared by most educated adults, that includes basic skills and broad general knowledge of the subject.
- *Specialized content knowledge* (SCK), as a particular way in which teachers master the subject matter that supports their activity in planning and handling classes and in assessing students' knowledge, strategies, and difficulties.
- *Knowledge of content and students* (KCS) that includes knowledge about common student conceptions and misconceptions, about what mathematics students find interesting or challenging, and about what students are likely to do with specific mathematics tasks.
- *Knowledge of content and teaching* (KCT), or mathematical knowledge of the design of instruction, including how to choose examples and representations, and how to guide student discussions toward accurate mathematical ideas.

Although the above models were developed for mathematics education, other authors adapted them to statistics education (such as for example, Biehler, 1990; Steinbring, 1990; Watson, 2001; Batanero, Godino & Roa, 2004). Burgess (2006) started from the components in teachers' knowledge described by Ball *et al.*, (2005) and crossed these categories with the essential types of statistical reasoning defined by Wild and Pfannkuch (1999): (a) Recognition of the need for data; (b) transnumeration, a special type of reasoning that consists of changing data representation to come to a better understanding of the data; (c) being able to measure, model and control variation, that is omnipresent in statistics;( d) reasoning with statistical models; and (e) being able to integrate the statistical model and the context.

Godino et al. (2008) suggested that a statistics teacher needs a deep knowledge of statistics, which includes competence in understanding and applying the different types of objects and processes described in the onto-semiotic approach for the particular statistical content he or she is teaching. Consequently the teachers' knowledge should also include the following components:

1. *Epistemic facet:* The intended and implemented institutional meaning for a given mathematical or statistical content, that is, the set of problems, procedures, concepts, properties, language, and arguments included in the teaching and its distribution over the teaching time.
2. *Cognitive facet:* Students' levels of development and understanding of the topic, and students' strategies, difficulties, and errors as regards the intended content (personal meaning).
3. *Affective facet:* Students' attitudes, emotions, and motivations regarding the content and the study process.
4. *Media facet:* Didactic and technological resources available for teaching and the possible ways to use and distribute these resources over time.
5. *Interactional facet:* Possible organisations of the classroom discourse and the interactions between the teacher and the students that help solve the students' difficulties and conflicts.
6. *Ecological facet:* Relationships of the topic with the official curriculum, other mathematical or statistical themes, and with the social, political and economical settings that support and condition the activities of teaching and learning.

Comparing with Ball et al. model, the epistemic facet covers the specialised mathematical knowledge; the affective and cognitive facet is related to knowledge of content and students; and the remaining facets cover the knowledge of content and students. This model will be used in chapter 5, where the GAEDS guide will be used to assess the participants' knowledge in each of the above dimensions.

### 7.4.2. UNDERSTANDING STATISTICAL GRAPHS

There is a huge research in graphical understanding, the most relevant of which have been summarised in chapter 2, where we have limited the analysis to statistical graphs. This research deals with different aspects of graphical understanding, which is summarised below.

**Graph elements and semiotic activity involved in interpreting graphs**

Different authors (e.g., Kosslyn, 1985; Curcio, 1987; Friel, Curcio, & Bright, 2001) have defined the elements that constitute the graphs. Graphs are composed of a small set of primitives: title, axes and labels, specifiers (lines, points, areas), which simplifies the object recognition.

Other authors have focussed on the semiotic activity involved in reading and interpreting graphs. This research is based on the semiotic premise that graphs and their written or spoken subtexts are multimodal texts (Bertin, 1967; Clevelland & Mc Gill, 1984a; Lewandowsky & Spence, 1989b). Each text is constituted by matrix of sign elements; both individual sign elements and entire texts are subject to the semiotic activity of those who read the graphs. Using the ideas from these authors we analyse in chapter 2 the activity involved and the elementary tasks needed in interpreting graphs. We also suggest the possibility of considering a graph more efficient than another, when it is easier to get a more accurate conclusion in the first graph for the same reading activities.

**Graphical understanding, levels of understanding and critical understanding of graphs**

After defining the graphs elements and the elementary activity involved in reading the graphs, several authors (Bertin, 1967; Kosslynn, 1985; Pinker, 1990; Wainer, 1992) have investigated the levels in graph understanding. In this particular research we are using Curcio's categorisation (1989), that consists of the following levels: (a) *Reading the data*, is the level of a student who is only able to answer explicit questions for which the obvious answer is right there in the graph; (b) *Reading between the data* involves interpolating and finding relationships in the data presented in a graph. This includes making comparisons as well as applying operations to data; (c) *Reading beyond the data* involves extrapolating, predicting, or inferring from the representation, in order to answer questions related to tendencies in the data or extrapolation from the data. These levels were expanded with a new level *looking behind the data,* by Friel, Bright, and Curcio (2001).

More recently, these levels were extended to take into account the critical evaluation of information, once the student makes a complete reading of the graph (Aoyama & Stephen, 2003; Aoyama, 2007):

1 *Rational/literal level.* Students correctly read the graph, interpolate, detect the tendencies and predict. They use the graph features to answer the question posed, but they do neither criticise the information nor provide alternative explanations.

2 *Critical level:* Students read the graph, understand the context and evaluate the information reliability; but they are unable to think in alternative hypotheses that explain the disparity between a graph and a conclusion.

3 *Hypothetical level:* Students read the graphs, interpret and evaluate the information, and are able to create their own hypotheses and models.

**Errors in producing statistical graphs**

In spite of its relevance in the curriculum and everyday life, didactic research warn us that graphical competence is not reached in compulsory education, since students make errors in selecting the scales (Li & Shen, 1992) or in building specific graphs (Pereira Mendoza & Mellor, 1990; Lee & Meletiou, 2003; Bakker, Biehler & Konold, 2004).

**Graphical competence in prospective teachers**

Recent research by Espinel (2005; 2007), Bruno and Espinel (2005), Espinel, Bruno and Plasencia (2008) also highlight the scarce graphical competence in future primary school teachers, who make errors when building histograms or frequency polygons, or lack coherence between their building of a graph and their evaluation of tasks carried out by fictitious students. These authors suggest that, when comparing the statistical literacy and reasoning of Spanish prospective teachers and American university students, even when the tasks were hard for both groups, results were much poorer in the Spanish teachers, in particular when predicting the shape of a graph or reading histograms.

Monteiro and Ainley (2007) studied the competence of Brazilian prospective teachers and found that many of these teachers did not possess enough mathematical knowledge to read some graphs taken from daily press.

As regards pedagogical content knowledge Gonzalez and Pinto (2008) suggested that some pre-service secondary mathematics teachers felt that the construction and interpretation of graphs was a very simple task and knew very little thing about the process of teaching statistical graphs or the difficulties faced by pupils in relation to statistics and graphs.

In summary, previous research shows a variety of difficulties in building and understanding graphs. It also provides different hierarchical models of graphical understanding and critical understanding of graphs, but no similar model for hierarchical competence in building graphs. In this way an aim of this research is defining a hierarchical model of semiotic complexity of graphs and relating this model to previous models in graphical understanding.

Moreover, research on teachers' graphical understanding is very scarce and it is based in structured tasks (given in questionnaires). In this research we complement previous finding with an exploration of prospective teachers' graphical competence when building with an open statistical project.

## 7.5. MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF PRESERVICE TEACHERS

In chapter 4 we analyse the graphs produced by 207 prospective primary school teachers in an open statistical project where they had to compare two statistical variables. We classify the graphs produced by the teachers according its semiotic complexity and analyse the prospective teachers' errors in selecting and building the graphs, as well as their capacity for interpreting the graphs and getting a conclusion on the research question. Although about two thirds of participants produced a graph with enough semiotic complexity to get an adequate conclusion, half the graphs were either inadequate to the problem or incorrect. Only a small part of the participants were able to get a conclusion in relation to the research question.

### 7.5.1. METHOD

**The statistical project: "Check your intuitions about chance"**

This project was part of a didactical unit designed to introduce the "information handling, chance and probability" content included in the upper level of primary education. Some aims of this didactical unit were: (a) showing the usefulness of statistics to check conjectures and analyse experimental data; (b) checking intuitions about randomness and realising these intuitions are sometimes misleading. The sequence of activities in the project was as follows.

1. *Presenting the problem, initial instructions and collective discussion.* The lecturer started a discussion about intuitions and proposed that the future teachers carry out an experiment to decide whether they had good intuitions or not. The experiment consisted of trying to write down apparent random results of flipping a coin 20 times (without really throwing the coin, just inventing the results) in such a way that other people would think the coin was flipped at random.
2. *Individual experiments and collecting data.* The future teachers tried the experiment themselves and invented an apparently random sequence (simulated throwing). They recorded their sequences using H for head and T for tail. Afterwards the future teachers were asked to flip a fair coin 20 times and write the results on the same recording sheet (real throwing).
3. *Classroom discussion, new questions and activities.* After the experiments were performed the lecturer started a discussion of possible strategies to compare the simulated and real random sequences. A first suggestion was to compare the number of heads and tails in both sequences since the expected average number of heads in a random sequence of 20 tosses is 10. The lecturer posed questions like: If the sequence is random, should we get exactly 10 heads and 10 tails? What if we get 11 heads and 9 tails? Do you think in this case the sequence is not random? These questions introduced the idea of comparing the number of tails and heads in the real and simulated experiments for the whole class and then studying their similarities

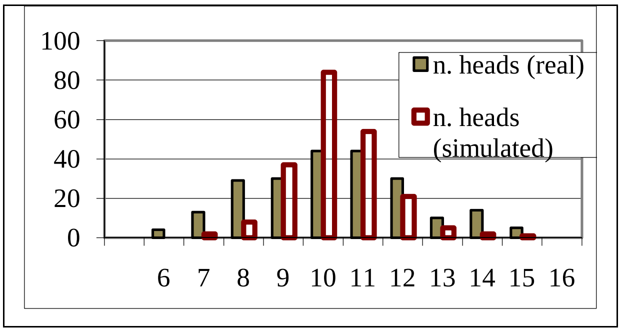
and differences.

4. At the end of the session, the future teachers were given a copy of the data set for the whole group of students. This data set contained six statistical variables: number of heads, number of runs and length of the longest run for each of real and simulated sequences and for each student (*n* cases with these 6 variables each). They were asked to complete the analysis at home and produce a report with a conclusion about the group intuitions concerning randomness. As prospective teachers were divided in 3 groups, *n* varied (30-40 cases in each group). Students were able to use any statistical method or graph and should include the statistical analysis in the report.

### 7.5.2. A PRIORI ANALYSIS OF THE TASK

The project "check your intuitions on randomness" was based on a classical experiment that had been used in previous research on perception of randomness in children and adults (e.g., Green, 1989, 1991; Batanero & Serrano's, 1999). According results of these experiments it was expected that future teachers showed a mixture of correct and incorrect intuitions. More specifically it was expected a good perception of the average value for the number of heads and poor intuitions as regards variability in the number of heads; as well as poor perception of both average and variability in the number of runs and length of the longest run.

Figure 7.5.1. Distribution and summary statistics for number of heads




These expectations were confirmed in the graphs presented in figures 7.5.1 to 7.5.3 (complete data collected by the six groups of teachers (n=207). The average values and spread of the distributions for the number of heads, number of runs and length of the longest run in the small subset data analysed in each group of students were very similar (although with smaller data sets) to those the complete sample.

Figure 7.5.2. Distribution and summary statistics for the longest run

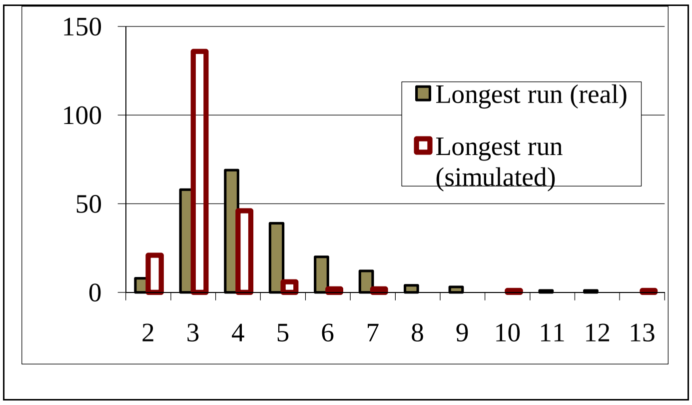
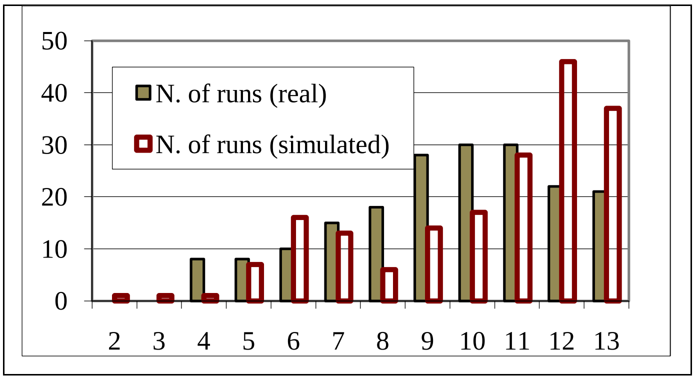



Figure 7.5.3. Distribution and summary statistics for Number of runs




Although each prospective teacher was given freedom to choose the statistical analysis method he or she preferred, we expected they were able to compare each pair of variables in the simulated and real sequences (using some tables, graphs or statistics summaries). We then expected the teachers could analyse the results and provide a conclusion about the correct and incorrect part of the classroom intuitions on randomness.

### 7.5.3. SEMIOTIC COMPLEXITY OF GRAPHS

Once the students' written reports were collected, we made a qualitative analysis of these reports. By means of an inductive procedure we classified into different categories the graphs produced as a part of the analysis, the interpretations of graphs, and the conclusions about the group intuitions. The classification of graphs took into account the type of graph, number of variables represented, and underlying mathematical objects in the graph, as well as some theoretical ideas that we summarise below.

In the project we proposed a *problem* (comparing two distributions to decide about the intuitions in the set of students) since we were interested in analysing the prospective teachers' practices when solving the problem. More specifically the graphs produced by the teachers involve a series of *actions, concepts-definitions* and *properties* that vary in different graphs. Consequently, the semiotic functions underlying the building and interpretation of graphs, including putting in relation the graphs with the initial question by an argument also vary. We therefore should not consider the different graphs as equivalent representations of a same mathematical concept (the data distribution) but as different configurations of interrelated objects that interact with that distribution. Some prospective teachers only computed a few statistical summaries (mean, median or range) and did not produce graphs; we are not taking into account these teachers in our report. Using the ideas described above we performed a semiotic analysis of the different graphs produced by the other prospective teachers and defined different levels of semiotic complexity as follow:

- *L1. Representing only his/her individual results.* Some students produced a graph to represent the data they obtained in his/her particular experiment, without considering their classmates' data. These graphs (e.g. a bar chart) represent the frequencies of heads and tails in the 20 throwing. Students in this level tried to answer the project question for only his /her own case (tried to assess whether his/her intuition was good); part of these students manifested a wrong conception of chance, in assuming a good intuition would imply that the simulated sequence would be identical to the real sequence in some characteristic, for example the number of heads. Since they represented the frequency of results in the individual experiment, in fact these students showed an intuitive idea of statistical variable and distribution; although they only considered the Bernoulli variable "result of throwing a coin" with two possible values: "1= head", 0= tail" and 20 repetitions of the experiment, instead of considering a Binomial distribution "number of heads in the 20 throwing" that have a wider range of values (1-20 with average equal to 10) and r repetitions of the experiments (r= number of students in the classroom).
- *L2. Representing the individual values for the number of heads.* These students did

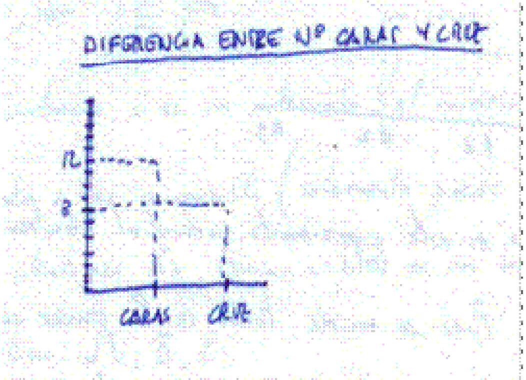
neither group the similar values of the number of heads in the real nor in the simulated sequences. Instead, they represented the value (or values) obtained by each student in the classroom in the order the data were collected, so they did neither compute the frequency of the different values nor explicitly used the idea of distribution. The order of data in the X-axis was artificial, since it only indicated the arbitrary order in which the students were located in the classroom. In this category we got horizontal and vertical bar graphs, line graphs of one or the two variables that, even when did not solve the problem of comparison, at least showed the data variability. Other students produced graphs such as pie chart, or stocked bar charts, which were clearly inappropriate, since they did not allow visualizing the data variability.

- *L3. Producing separate graphs for each distribution.* The student produced a frequency table for each of the two variables and from it constructed a graph or else directly represented the graph with each of the different values of the variable with its frequency. This mean that the students went from the data set to the statistical variable "number of heads in each sequence" and its distribution and used the ideas of frequencies and distribution. The order in the X-axis was the natural order in the real line. In case the students did not use the same scale in both graphs and used different graphs for the two distributions, the comparison was harder. Examples of correct graphs in this category were bar graphs and frequency polygons. Students also produced incorrect graphs in this category such as histograms with incorrect representation of intervals, bar graphs with axes exchanged (confusing the independent and dependent variable in the frequency distribution), representing the frequencies and variable values in an attached bar graph or representing variables that were not related.
- *L4. Producing a joint graph for the two distributions.* The students formed the distributions for the two variables and represented them in a joint graph, which facilitated the comparison; the graph was more complex, since it represented two different variables. We found the following variety of correct graphs: attached bar chart; representing some common statistics (e.g. the mean or the mode) for the two variables in the same graph; line graphs or dot plots in the same framework. Example of incorrect graphs in this category were graphs presenting statistics that were not comparable (e.g. mean and variance in the same graphs) or the same

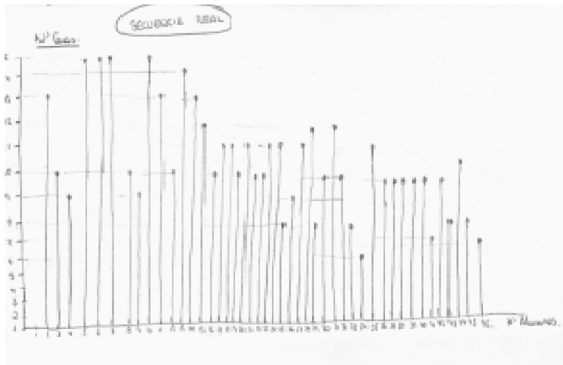
statistics for variables that cannot be compared.

In Figure 1 we present an example of graphs produced in each category. We observe a qualitative distance between each different level.

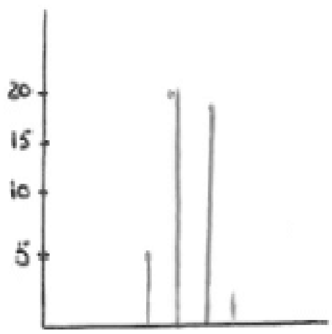
Figure 7.5.4. Examples of graphs in each different level of semiotic complexity



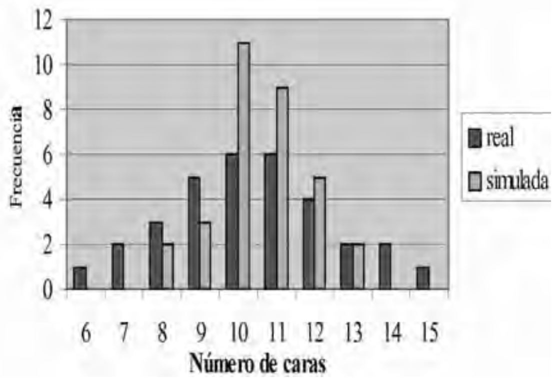

Level 1



Level 2




Level 3




Level 4

Table 7.4.1. Frequency (percent) of participants producing graphs in each semiotic level

| Semiotic complexity | N. of heads | N. of runs | Longest run |
|---|---|---|---|
| L1. Representing only individual data | 6 (3.3) | 6 (4.1) | 3 (2.3) |
| L2. Representing the data list | 40 (22.1) | 23 (15.7) | 21 (16.4) |
| L3. Producing separate graphs for each distribution | 91 (50.3) | 77 (52.7) | 67 (52.3) |
| L4. Producing a joint graph to compare both distributions | 44 (24.3) | 40 (27.4) | 37 (28.9) |
| Number of students producing graphs | 181 | 146 | 128 |

From a total of 207 students 181 (90,5%), 146 (73%) and 128 (64%) produced some graphs when analysing the number of heads, number of runs and longest run, even if the instructions given to the student did not explicitly required that they constructed a graph. These high percents suggest that prospective teachers felt the need of building a graph to reach, through a transnumeration process (Wild & Pfannkuch, 1999) some information that was not available in the raw data.

In Table 7.4.1 we classify the graph according to the graph semiotic levels. Few participant produced level L1 graphs, that is, only analysed their own data and less than 25% represented the data list in the same order given in the data sheet without making an attempt to summarise the data, and produce the variables distributions. Consequently the concept of distribution seemed natural for the majority of students who built a graph, since about 75% of them built a distribution to compare each pair of variables, although the instructions did not require this explicitly.

### 7.5.4. ERRORS IN THE GRAPHS PRODUCED

In section 4.5 we present a detailed classification of errors in the graphs produced by the students with examples of graphs in each category and a semiotic analysis of the same. About 40% of graphs produced were correct and in another 30% of graphs errors were considered minor, as they did not impede the correct interpretation of results. However, about 30% participants produced graphs with errors that have been previously described in research with children or preservice teachers. Computers does not always helped students in building the graphs, as many of those who use computers to produce the graph make an acritical use of software (Ben-Zvi, 2000) and used the standard options of software that were not always adequate to the problem.

### 7.5.5. READING AND CONCLUSIONS

In table 7.4.2 we classify the students according their graph comprehension, according to Curcio’s (1989) classification, in the following way:

- *Do not read the graph*: About 30% teachers in each pair of variable produced and presented the graph in their report; buy made no attempt to read the graph and did not comment on its content.
- *Incorrect reading:* After producing the graph, between 11% to 14% teachers in each pair of variables failed in reading the information. Some of these failures were produced by an incorrect choice of the type of graph that was inadequate for the

information represented in the graph (for example using a scatter plot to represent the two variables to be compared). Other failures in reading the graph were due to incorrect understanding of a concept; for example confusing frequencies and values of the variable or misinterpreting the meaning of the standard deviation.

- *Reading data:* Between 22- 25% participants made a correct literal reading of graphs labels, scales and specific information on the graph in each pair of variables. However they only considered superficial features of the graph. For example, they compared isolate values of the two variables, provided the frequency for a given value or made a general comment about the shape of the graph with no consideration to tendencies or variability in the data.

Table 7.4.2. Frequency (percent) of participants reading graphs at different comprehension level (according Curcio's classification)

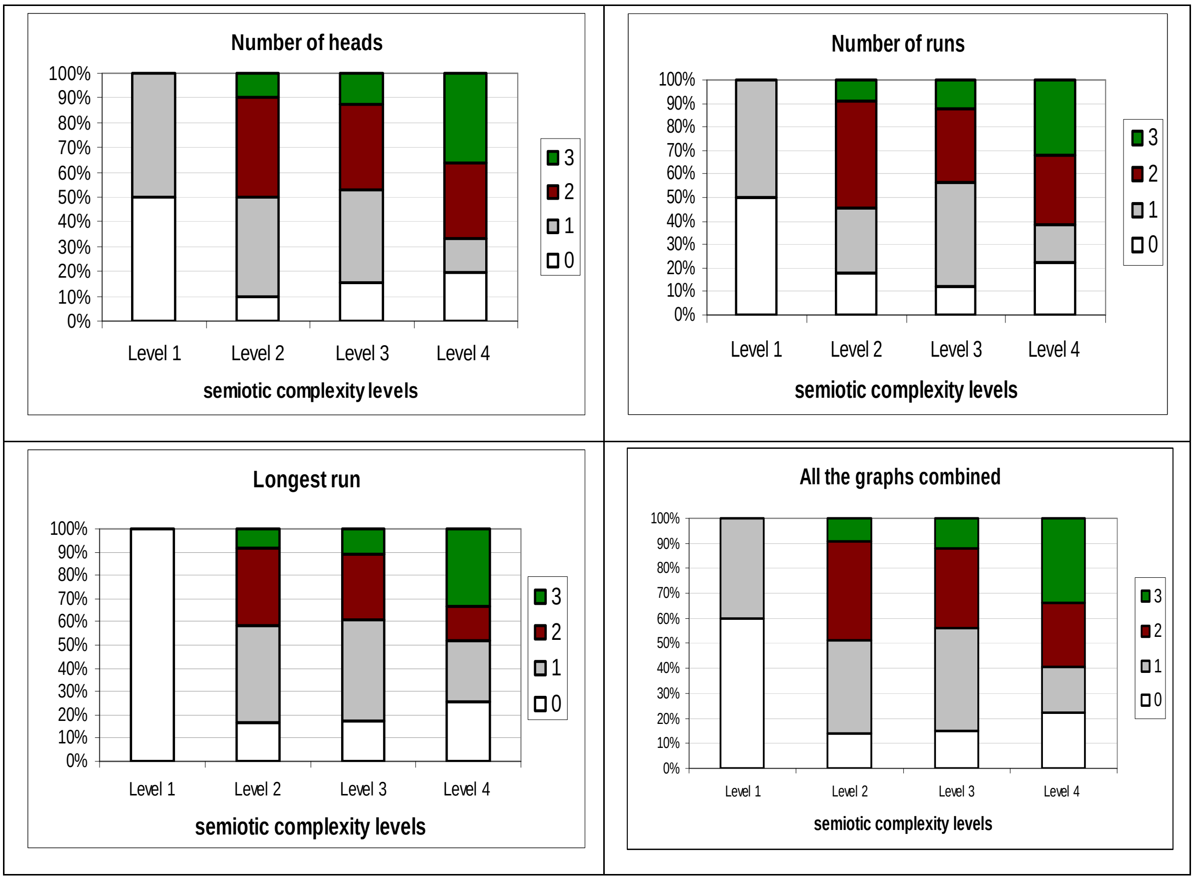
| Graph comprehension level (Bertin) | N. of heads | N. of runs | Longest run |
|---|---|---|---|
| Do not read the graph | 51 (28.2) | 45(30.9) | 42(32.81) |
| Incorrect reading | 21(11.6) | 17(11.64) | 18(14.06) |
| Reading data | 41(22.6) | 34(23.29) | 32(25) |
| Reading between data | 44(24.3) | 32(21.92) | 21(16.40) |
| Reading beyond data | 24(13.3) | 18(12.33) | 15(11.72) |
| Number of students producing graphs | 181 | 146 | 128 |

- *Reading between data*: Teachers classified in this level were able to make comparisons and look for relationships in the data. They either compared averages (means, medians or modes) alone in both distributions (with no consideration of variation in the data) or else compared spread (without comparing averages).
- *Reading beyond data:* Making inferences and drawing conclusions from the graph: Participants at this level were able to compare both spread and average in the distribution and conclude about the differences taking into account both feature in the data.

Less than 40% prospective teachers reached the Curcio's (1989) intermediate level (reading between the data) and only 13% reached the upper level. The difficulty of reading the data increased for variables related to runs that were less familiar to participants than the number of heads.

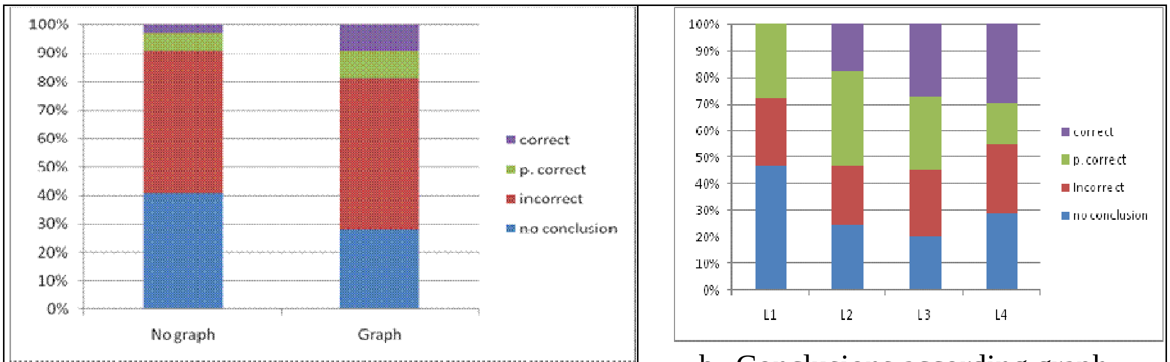
In Figure 7.5.5 we classify the prospective teachers that produced some graphs, according to the graph semiotic complexity level and their reading comprehension level for each pair of variables and for all the graphs combined. Prospective teachers producing semiotic level L1 graphs either made an incorrect reading or only reached the literal "reading data" level. The percent of incorrect reading dramatically decreased in Level L2, although this percent increased from levels L2 to L4, because more complex graphs were harder to be interpreted correctly by participant. The highest percent of "reading beyond data" level, when teachers are able to analyse both the tendency and spread in the data and get a conclusion as well the combined percent of "reading between data" and "reading beyond data" levels were reached in semiotic level L4 graphs. Therefore level 4 graphs provided more opportunity for students to get at least a partly correct reading.

Figure 7.5.5. Reading levels by semiotic complexity in the graph




As regards literal "reading the data" level, there was no clear tendency, although it seems more frequent in levels L1 to L3. Reading the data only is, however, no productive to get a conclusion about the total sample, so that teachers cannot get a conclusion on the problem posed. Therefore, it is important that the teacher's educator try to promote higher reading levels when possible. Finally the "reading between data" level is more frequent in level L2 graphs, because in these graphs the data variability is very easily perceived (as compared with graphs L1 or L3). When compared with L4 graphs, although there is lower percent of "reading between data", the percent of "reading beyond data" is higher. While in L2 graphs it is easy to perceive the variation, the perception of tendencies is hard. On the contrary in level L4 students can perceive more easily spread and tendencies. The Chi-square test to check independence of reading levels and semiotic complexity levels for all the graphs combined was statistically significant (Chi=40.4, dg=9, p<0.0001) and therefore we can accept that these two types of levels are related.

Figure 7.5.6. Conclusion according (a) production /no production of graph; (b) graph semiotic level




a. Conclusions according production of graph

b. Conclusions according graph semiotic level

In the project proposed the students should get a conclusion as regards the group intuition on randomness. Less than 10% prospective teachers got a complete conclusion and less than 20% a partly correct conclusion, although these percent increased in those teachers that produced graphs as part of their analyses (Figure 3.a), so that building a graph helped the teachers in their conclusions. The differences were significant in the Chi-square test (Chi=18,72, d.g.=3; p=0.007).

The percent of correct conclusions increased to about 30% in teachers producing level L4 graphs, because, on one hand, at these levels the teachers read the graph at a higher reading level and on the other hand, in these graphs the perception of both tendencies and spread is easier. The percent of partly correct conclusions was higher at level L2 graphs, because of easy perception of variability in these graphs. Teachers who got a complete conclusion on both variation and tendency in this level usually had also computed some summaries statistics to help them in their conclusion.

In general, these prospective teachers interpreted correctly or partially correctly the graphs in all the levels, reaching the Curcio's (1989) intermediate level (reading between the data) and the difficulty of interpretation of graphs increased with its semiotic complexity. However, an important part of students in our levels 3 and 4, even when they built correct graphs did not reached the "reading between the data" level, because either they either did not interpret the graph or made only a partial interpretation.

As regards the Aoyama's (2007) levels, the majority of prospective teachers only read the graphs produced at a rational/literal level, without being able of read the graphs at a critical or a hypothetical level. The prospective teachers performed a mathematical comparison of the graphs but did not get a conclusion about the intuitions in the classroom (e.g. they correctly compared averages but did not comment what were the implications in relation to the students' intuitions).

Only two participants in the sample reached the hypothetical level in reading the graphs, as they got the correct conclusion about the group's intuitions. These two prospective teachers realised that the group had correct intuitions about the average number of heads but poor intuitions about the spread. Participants were supposed to get this conclusion from comparing the averages and range in the three variables in the simulated and real sequences distributions. At higher level statistical tests could also be used to support these conclusions that have been observed in previous research about people perception of randomness.

22 participants got a partial conclusion that the intuition as regards averages was good, as they were able to perceive difference or similitude in the averages, but they did not considered the results obtained in comparing spread of the different variables in the two sequences. These students also worked at the Aoyama's (2007) hypothetical level, although they did not considered spread in comparing the two distributions. Those working at levels L1 and L2 got few partly correct conclusions and none correct conclusion, so that these levels of complexity in the graph were not adequate to get a

complete conclusion.

The Chi-square test to check independence of type of conclusions and the semiotic complexity levels for all the graphs combined was statistically significant (Chi=40,45; d.g.= 9; p= 0,0000) and therefore we can accept that these two variables are related and that complete conclusion is easier with higher level of the graph.

## 7.6. DIDACTIC KNOWLEDGE OF TEACHERS

In chapter 5 we analyse the reports produced by 108 students in their didactic analysis of the statistical project "Check your intuitions on randomness", using the GAEDS guideline (Figure 7.6.1). Below we describe the method and main results from the qualitative analysis of the written protocols produced by the students, who individually solved the tasks and were given a week to complete their analysis as a homework task.

### 7.6.1. METHOD

Once the written reports with the statistical analysis of the project were collected, in the second session of the practical activity related to this research, a collective discussion of correct and incorrect solutions to the project was organised and the main difficulties and conflicts related to elementary statistics and randomness were made explicit and solved.

Afterwards, the students were remembered of the components in the didactic suitability of teaching /learning process and were given a copy of the GAEDS guideline (Figure 7.6.1). These prospective service teachers had previously studied the concept of didactic suitability and made other exercises where they assessed the didactic suitability of teaching materials or didactic sequences.

Figure 7.6.1. GAEDS guideline for analysis of mathematics teaching /learning processes

1. *Epistemic suitability* (extent to which the statistical content in a teaching/learning process is representative of the curricular content for a specific teaching level and whether its inclusion in the teaching is justified).

| COMPONENTS: | DESCRIPTORS: |
|---|---|
| Problem-situations | P1. A representative sample of contexts, exercises and applications is presented<br>P2. Situations in which problems can be generated are presented |
| Language | L1. Use of different mathematical expression (verbal, graphical symbolical language), and translations between the same.<br>L2. The language is adequate for students<br>L3. There are activities where students use mathematical expression or interpret mathematical language |
| Rules (Definitions, properties, procedures) | R1. Definitions and procedures are clear and correct. They are adapted to the educational level.<br>R2. Basic concepts and procedures in the topic are introduced.<br>R3. There are situations where students have to generate or negotiate definitions, properties or procedures |
| Arguments | A1. Explanation, proofs and checking are adequate for the educational level<br>A2. Situations where students build their own arguments are organised |
| Relationships | RL1. The mathematical objects (concepts, arguments, properties, procedures..) are connected and related. |

2.2. *Cognitive suitability* (whether the content is adequate for the students' previous knowledge and the extent to which the instructional goals can be achieved).

| COMPONENTS: | DESCRIPTORS: |
|---|---|
| Previous knowledge | CP1. The previous knowledge needed by students to study the topic is available<br>CP2. The intended knowledge has a reasonable difficulty and can be attained by students |
| Adaptation to curriculum and students' differences | AC1.Reinforcing and extensional activities are included |
| Learning | AP1. Assessment results suggest that students acquire the intended knowledge and competences |

2.3. *Resource suitability* (sound use of technical tools, resources and time).

| COMPONENTS: | DESCRIPTORS: |
|---|---|
| Resources (Manipulative, calculators, computers) | RM1. The use of manipulative and technological resources helps introduce good situations, language, arguments and procedures in the intended content.<br>RM2. Definitions and properties are contextualised using manipulative materials and visualization |
| Number of students, schedule and classroom conditions | RA1. The number and distribution of students is adequate.<br>RA2. The course schedule is adequate.<br>RA3. The classroom is adequate to develop the intended instructional process. |
| Time (Collective teaching, tutoring, learning time) | RT1. The classroom and out of classroom time is enough to achieve the intended learning.<br>RT2.There was enough time devoted to present the most important contents.<br>RT3. There was enough time to explain the contents that were most difficult for the students. |

2.4. *Emotional suitability* (whether the teaching/learning process takes into account the students' motivations, attitudes, affects and beliefs).

| COMPONENTS: | DESCRIPTORS: |
|---|---|
| Interests and needs | I1. The tasks are interesting for the students<br>I2. The tasks serve to realise the usefulness of mathematics in the students' professional and personal lives |
| Attitudes | ACT1.Participation, perseverance and responsibility are promoted<br>ACT2.The value given to an argument does not the depend on the author, but everyone is given the same opportunities to participate |
| Emotions | E1.Self esteem is promoted, avoiding rejection or fear of mathematics<br>E2. Esthetical and precision qualities are highlighted |

2.5. *Interactional suitability* (whether the interactions between the teacher and the students and among the students themselves favour overcoming learning difficulties).

| COMPONENTS: | DESCRIPTORS: |
|---|---|
| Teacher-student interaction | DD1. The teacher makes an adequate (clear and well organised) presentation of the topic, and empathize the key aspects.<br>DD2. The teacher recognises and solves the students' conflicts with adequate questions and answers.<br>DD3. The best arguments are used to reach a consensus.<br>DD4. Different rhetorical and argumentative resources are used to motivate and get the students' attention.<br>DD5. The teacher facilitates participation from all the students in the classroom dynamic **.** |
| Students interaction | IA1. Dialogue and communication between students are favoured.<br>IA2. Inclusion in the group is promoted and exclusion of students is avoided. |
| Autonomy | AE1. Sometimes the students take responsibility for the study process. |
| Formative assessment | AE2. There is continuous observation of the students' learning progress. |

2.6. *Ecological suitability* (degree to which the teaching/learning process is adapted to social environment; possibility of establishing interdisciplinary connections).

| COMPONENTS: | DESCRIPTORS: |
|---|---|
| Adaptation to the curriculum | CID1. The contents, its implementation and assessment agree with the curricular guidelines. |
| Openness to didactic innovation | CID2.Innovation is based on research and reflective practice.<br>CID3.New technologies (computers, calculators..) are integrated in the educational project. |
| Socio cultural adaptation | SPD1. The contents contribute to the socio professional training of students. |
| Intra and inter disciplinary connections | SPD2. The contents are related to other intra and inter discipline contents. |

## Didactical analysis of the project: the expert's view

An a-priori analysis of a potential teaching/learning process based on the project "Check your intuitions on randomness" suggest a high epistemic suitability, since all the statistical content in the upper primary school level or in secondary school (collecting and recording data, experiments, statistical variables, frequency tables, graphs, averages, range, chance and probability) can be introduced and justified through a problem that is relevant for students. Moreover statistics is used to answer a meaningful question, and statistics and probability are related in the project.

Regarding cognitive suitability, students are able to carry out the data analysis tasks with the help of the teacher. Since the concept of median is hard for primary school students, comparison of averages could be restricted to mean and mode. Children may also need some help to use the same scale in producing the graphs to compare two distributions (e.g., number of heads in real and simulated sequences). *Emotional suitability* would seem to be high, since we expect students will be interested in checking their intuitions.

In relation to *resource suitability*, the project can be adapted to different media. It is possible to work with only paper and pencil, provided the class is divided in small groups, and each group takes responsibility for analysing one of the variables. Spreadsheets (recommended for the last year in primary school level in Spain), when available, can reduce the computation time and give more time for interpretative activities. Working in small groups and whole class discussions can contribute to identifying and overcoming students' difficulties (interactional suitability). Finally, the experiment serves to check the student's intuitions about chance (ecological suitability) and may help in realising some probabilistic biases. It might interest students in social problems e.g., compulsive gambling, so there is interaction with social and psychological areas. Finally, when we use this project with prospective teachers, we give them an example of working with statistical projects that introduces an exploratory and participating dynamic in the classroom, in agreement with recent recommendations for teaching statistics.

**Coding data**

The written reports of future teachers were analysed to produce an overall view of their didactical analyses and consequently their didactic knowledge. For each component of suitability, we scored with a level (0-3) each of the descriptors in the component, as follows:

0: There is not attempt to apply the descriptor.

1: The prospective teachers limit the report to reproduce literally or almost literally the descriptor.

2: There is some application, but the main statistical content is not described.

3: There is a correct and complete application of the descriptor.

A descriptive statistical analysis of the different descriptors served to value the different components in teachers' pedagogical content knowledge. Below we describe the main findings. Along chapter 5 an extensive analysis of student's responses with examples of responses in each of the above levels in each component of didactic suitability is included.

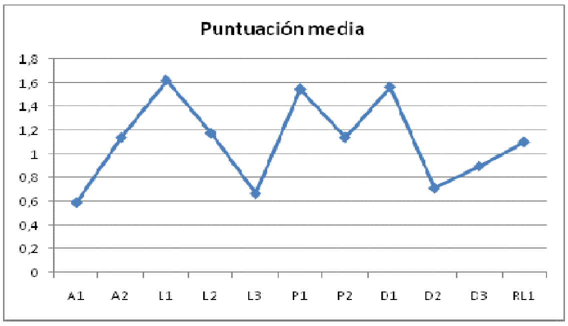
### 7.6.2. RESULTS

In figure 7.6.2 we present the average level in the whole sample in each descriptor. In general these graphs show a poor application of the GAEDS guideline (on average), specially as regards *epistemic suitability*, that according to Godino (2009) is related to the specialized knowledge of content.

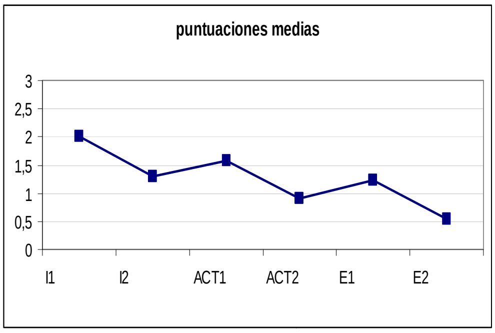
The average level does not reach level 2 (incidental application of the descriptor) and is close to 1 (literal reproduction of the descriptor) in many descriptors. This result is not surprising, since in chapter 4 we observed that common knowledge of content as regards to statistical graphs was also weak in these prospective teachers (and consequently, knowledge related other concepts implicit in the building and interpretation of graphs, such as distribution, averages, or spread was also poor).

Results improve a bit in the other components of suitability: (a) *cognitive and affective suitability* that, according Godino (2009) are related to knowledge of content and students; (b) *resource, interactional and ecological suitability*, that according Godino (2009) are related to knowledge of content and teaching. Since the teachers took part in the teaching and learning process themselves, they were able to more easily perceive these components.

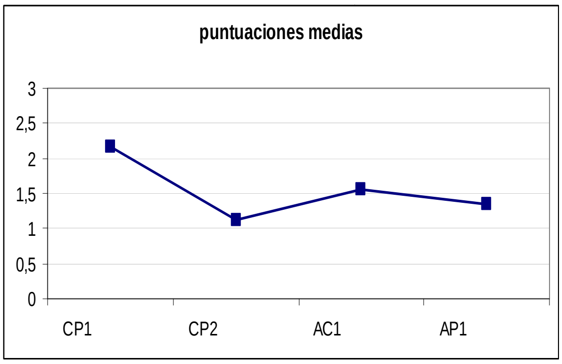
Figure 7.6.2. Average scores in the different descriptors for each component of didactic suitability



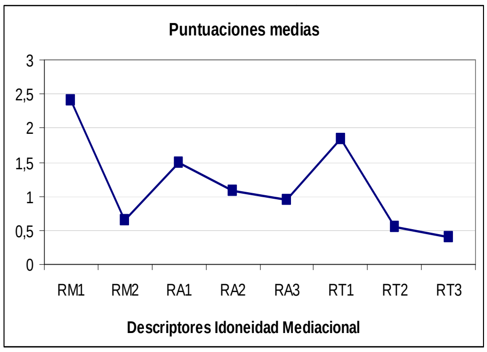

Epistemic suitability



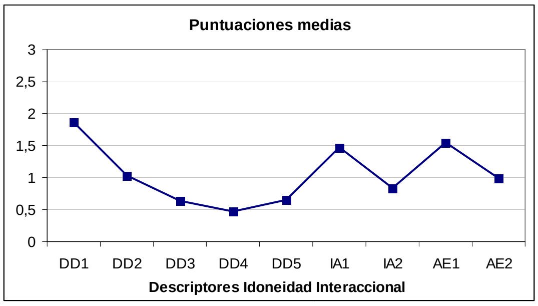

Affective suitability



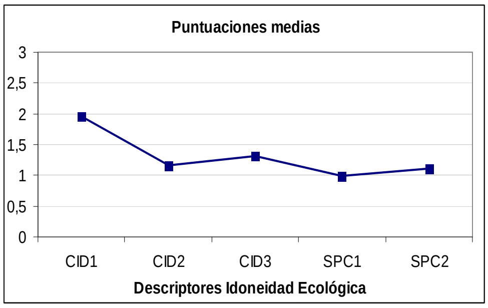

Cognitive suitability




Resource suitability



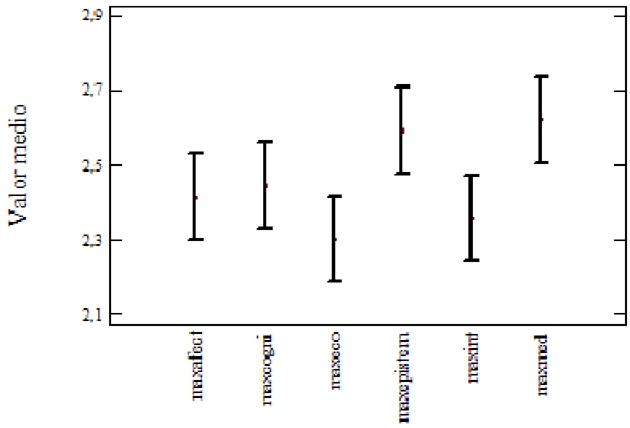

Interactional suitability




Ecological suitability

We remark the fact that the highest score is reached usually in the first descriptor in each component. Possibly the "didactic contract" effect contributed to students paying more attention to this component or thinking it was enough to complete the analysis of a descriptor in each component. This conclusion is reinforced when analysing the maximum level reach per students in each component (see figure 7.6.3). We observe that students get level 2 or higher in all the components in at least one descriptor and surprisingly there is no much difference in the maximum level in the epistemic component. The explanation is that many students were able to identify the mathematical language used in the project and apply descriptors of mathematical language at the upper level (3).

Figure 7.6.3. Maximum level and 95% confidence interval in each component of didactic suitability




**Discriminating validity of the GAEDS guideline**

We performed a cluster analysis of subjects (taking the level reached in the different descriptors for each subject as variables) and obtained two different groups of students: Students in group 1 (n=42) performed much better in the application of the GAEDS to the situation, that is, showed higher pedagogical statistical knowledge than students in group 2 (n=66) who performed poorly in the application.

A discriminant analysis (dependent variable was the current group; independent variables the set of scores in the different descriptors) confirmed the differences between both groups and the usefulness of the descriptors as a set of variables to discriminate between the students with good and poor pedagogical statistical knowledge (see table 7.6.1, where the percent of correct classification is 98,15%).

Table 7.6.1. Probability of correct classification in discriminant analysis

| | | Group predicted | |
|---|---|---|---|
| Actual group | Sample size | 1 | 2 |
| 1 | 66 | 64 (96,97%) | 2 (3,03%) |
| 2 | 42 | 0 (0,00%) | 42 (100,00%) |

Percent of correct classification: 98,15%

In table 7.6.2 we include for each descriptor in the GAEDS guideline the average value in the whole sample and in each group; as well as the *p*-value in the *t*- test of mean differences in both groups. To avoid the problem of multiple comparisons when interpreting these *p*-values, we firstly applied discriminat analysis, which gave a highly significant *p*-value in the multivariate comparison of the two vectors of scores.

Table 7.6.2. Average level in the different descriptors per group, in the whole simple and significance of differences in the t-test

| | Group 1 (n=66) | Group 2 (n=42) | Total (n=108) | Significance |
|---|---|---|---|---|
| A1 | 0,393939 | 0,904762 | 0,592593 | 0,0034 |
| A2 | 0,651515 | 1,90476 | 1,13889 | 0,0000 |
| AC1 | 1,09091 | 2,30952 | 1,56481 | 0,0000 |
| ACT1 | 1,10606 | 2,28571 | 1,56481 | 0,0000 |
| ACT2 | 0,363636 | 1,7619 | 0,907407 | 0,0000 |
| AE1 | 0,984848 | 2,40476 | 1,53704 | 0,0000 |
| AE2 | 0,515152 | 1,7381 | 0,990741 | 0,0000 |
| AP1 | 0,848485 | 2,11905 | 1,34259 | 0,0000 |
| CID1 | 1,62121 | 2,47619 | 1,9537 | 0,0000 |
| CID2 | 0,848485 | 1,66667 | 1,16667 | 0,0003 |
| CID3 | 1,06061 | 1,69048 | 1,30556 | 0,0145 |
| CP1 | 1,89394 | 2,59524 | 2,16667 | 0,0000 |
| CP2 | 0,757576 | 1,69048 | 1,12037 | 0,0001 |
| DD1 | 1,45455 | 2,52381 | 1,87037 | 0,0000 |
| DD2 | 0,757576 | 1,45238 | 1,02778 | 0,0034 |
| DD3 | 0,454545 | 0,928571 | 0,638889 | 0,0220 |
| DD4 | 0,181818 | 0,928571 | 0,472222 | 0,0000 |
| **DD5** | **0,621212** | **0,690476** | **0,648148** | **0,7244** |
| E1 | 0,651515 | 2,14286 | 1,23148 | 0,0000 |
| E2 | 0,287879 | 0,952381 | 0,546296 | 0,0001 |
| I1 | 1,80303 | 2,30952 | 2,0 | 0,0146 |
| I2 | 0,924242 | 1,90476 | 1,30556 | 0,0000 |
| IA1 | 0,893939 | 2,38095 | 1,47222 | 0,0000 |
| IA2 | 0,378788 | 1,57143 | 0,842593 | 0,0000 |
| L1 | 1,09091 | 2,45238 | 1,62037 | 0,0000 |
| L2 | 0,757576 | 1,83333 | 1,17593 | 0,0000 |
| L3 | 0,227273 | 1,35714 | 0,666667 | 0,0000 |
| P1 | 1,33333 | 1,88095 | 1,5463 | 0,0220 |
| **P2** | **1,09091** | **1,21429** | **1,13889** | **0,6057** |
| R1 | 1,33333 | 1,92857 | 1,56481 | 0,0061 |
| **R2** | **0,712121** | **0,714286** | **0,712963** | **0,9917** |
| R3 | 0,712121 | 1,19048 | 0,898148 | 0,0333 |
| RA1 | 0,878788 | 2,47619 | 1,5 | 0,0000 |
| RA2 | 0,484848 | 2,0 | 1,07407 | 0,0000 |
| RA3 | 0,469697 | 1,69048 | 0,944444 | 0,0000 |
| RL1 | 0,69697 | 1,7381 | 1,10185 | 0,0000 |
| RM1 | 2,19697 | 2,71429 | 2,39815 | 0,0033 |
| RM2 | 0,378788 | 1,04762 | 0,638889 | 0,0012 |
| RT1 | 1,5 | 2,38095 | 1,84259 | 0,0000 |
| RT2 | 0,242424 | 1,0 | 0,537037 | 0,0001 |
| RT3 | 0,181818 | 0,714286 | 0,388889 | 0,0017 |
| SPC1 | 0,515152 | 1,71429 | 0,981481 | 0,0000 |
| SPC2 | 0,818182 | 1,54762 | 1,10185 | 0,0018 |

We observe a highly significant difference in most descriptors. According to Olivo (2007) this results shows the discriminant validity of this set of descriptors to be used as a tool to assess the pedagogical content knowledge of teachers. Some exceptions to this rule are as follow:

- Variable DD5 (The teacher facilitates participation from all the students in the classroom dynamic) was very hard for both groups. Even when the teacher promoted this participation, encouraging students to work in small groups, providing the opportunity to carry out the individual experiments and collect the data in the classroom, this descriptor was not well understood by the students. The description possibly needs and improvement in future applications.
- Another difficult descriptor was R2 (Basic concepts and procedure in the topic and educational level are introduced). In fact the teacher did not introduce any concept or property along the work with the project as the participants had previously studied statistics and they knew all the statistical content. Since participants had little familiarity with statistical projects, they possibly found strange that the content was not introduced before working with the project. That is, they expected a classroom scheme “theory followed by practice” instead of “theory emerging from practice” which is the way they worked in statistical project. This caused confusion in the application of this descriptor.
- Variable P2 (Situations in which problems can be generated are presented). Both groups limited to literal reproduction of this descriptor. In the project (that is an extra- mathematical problem itself) students need to generate new mathematical problems (e.g. choosing an adequate graph, building a graphs, deciding which average is preferable, computing averages). However these are not considered “typical problems” by participants since they were only generated implicitly and this fact caused difficulty in applying this descriptor.

We observe (in general) the higher scores of group 2 (unfortunately the group with fewer students). This group reached level 2 or higher in many descriptors AP1, E1, ACT1, AC1, I1. IA1. RT1. AE1. LA, C1D1, RA1, DD1,CP1, RM. The differences in both groups is also shown in the total score, which is computed by adding the mean score in the different components (and thus can theoretical vary between 1 if the student provide no correct response in any of the components to 18 if the student reach level 3 in all the descriptors of the GAEDS guide). While the scores of group 1 varied between 0 and 10 with a median level 5 (students in average only reproduced literally the descriptors in the GAEDS guideline), in the second group the range was between 6 and 18 with a median level 11 (in average students could apply all the descriptors at level 2).

## 7.7. SYNTHESIS OF FINDING

In this research we used a formative cycle based on the project "Check your intuitions about chance" that served to contextualise the elementary statistical notions and procedures included at primary school, to use them to solve a research problem and provoke didactical reflection on the pedagogical content knowledge in a second stage. In chapter 4 we have analysed in details the graphs produced by the teachers in their written reports collected after the first session. In chapter 5 we analysed in detail the report produced in the participants' didactical analyses of the project, using the GAEDS guideline (Godino, Font, & Wilhelmi, 2008). The main findings and results in this research are summarised below:

- We defined a level of semiotic complexity of graphs that was useful to hierarchically classify the participants' competence in building graphs to solve the proposed project. This semiotic complexity level is a complement to other hierarchies of graphical understanding that have been define in the reading of graphs, for example, by Bertin (1967) and Curcio (1987, 1989).
- Although there is no clear relationships between the semiotic complexity level in building the graph and the reading levels, when we combine graphs of semiotic complexity 3 and 4 (upper levels) the percent of low level responses in reading the graphs decreases.
- In the project posed the prospective teachers went through the different steps in the statistics method as described by Wild and Pfannkunch (1999) in their PPCAI cycle: setting a problem, refining the research questions, collecting and analysing data and obtaining some conclusions. This last step (relating the result with the research question) was the most difficult for the students, who lacked familiarity with statistical projects and modelling activities. Less than 10% prospective teachers got a complete conclusion on the project and less than 20% a partly correct conclusion, although these percent increased in those teachers that produced graphs as part of

their analyses so that building a graph helped the teachers in their conclusions.

- The percent of correct conclusions increased to about 34% in teachers producing level L4 graphs, because, on one hand, at these levels the teachers read the graph at a higher reading level and on the other hand, in these graphs the perception of both tendencies and spread is easier
- About 40% of graphs produced were correct and in another 30% of graphs errors were considered minor, as they did not impede the correct interpretation of results. However, about 30% participants produced graphs with errors that have been previously described in research with children or preservice teachers.
- Computers does not always helped students in building the graphs, as many of those who use computers to produce the graph make an acritical use of software (Ben-Zvi, 2000) and used the standard options of software that were not always adequate to the problem.
- The GAEDS guideline was useful to provoke the didactical reflection of participants as well as to assess their pedagogical statistical knowledge and its different components: specialized knowledge of content, knowledge of content and students, knowledge of content and teaching. The guide also served to discriminate between students with poor and reasonable knowledge in each of these components (and the components described by Godino, 2009). However, in general, the specialised and didactic knowledge of statistics was scarce in both groups, in agreement with results from Chick y Pierce (2008).

In summary, our research suggest that building and interpreting graphs is a complex activity and confirm some of the difficulties described by Li and Shen (1991) and Wu (2004) in students and by Bruno and Espinel (2005); Espinel (2007); Espinel, Bruno and Plasencia (2008) in the future teachers, in spite that they should transmit graphical language to their students and use it as a tool in their professional life. Improving the teaching of statistics in schools should start from the education of teachers that should take into account statistical graphs.

Regarding the didactical analysis, many students had difficulties in applying the GAEDS guide and in judging the suitability of the didactical process. This result is reasonable, given the scarce time devoted to preparing these teachers and the complexity of pedagogical content knowledge. However, the GAEDS guide proved to be a useful tool to introduce systematic reflection on different facets affecting the teaching and learning of statistics. It also provided a multivariate approach to didactical analysis by including six different dimensions that interact with the teaching and learning processes of statistics.

To conclude, these analyses and results suggest the need to improve the statistical training of future primary school teachers that will only be possible if significant changes are introduced in the initial teachers' training syllabus assigning more time to statistics education.

# REFERENCIAS


Ainley, J., Nadi H. y Pratt, D. (2000).The construction of meaning for trend in active graphing. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 5, 85 - 114

Afifi, A. A. y Clark, V. (1996) *Computer-aided multivariate analysis.* New York: Chapman and Hall.

Arteaga, P. (2008). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos. Trabajo fin de Máster.* Departamento de Didáctica de la Matemática.

Arteaga, P. y Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). *XII Simposio de las Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (p. 211-221). Lleida: SEIEM.

Arteaga, P. y Batanero, C. (2011). Relating graph semiotic complexity to graph comprehension in statistical graphs produced by prospective teachers. Trabajo aceptado para presentación en el *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Rzeszów, Polonia, 2011.

Arteaga, P., Batanero, C. Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2009). La componente social y cultural de las tablas y los gráficos estadísticos. En C. Cañadas, J. M. Contreras (Eds). *Actas de las XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas: Dimensión Histórica, Social y Cultural de las Matemáticas*. Granada: Sociedad Thales de Educación Matemática. CD-ROM.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales, *Números 76,* 55-67.

Arteaga, P., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2011). Gráficos estadísticos en la educación primaria y la formación de profesores. *Indivisa 12,* 123-135

Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. M. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *Unión* 18, 93-104.

Arteaga, P., Batanero, C., Ortiz, J. y Contreras, J. M. (2011). Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Publicaciones, 41,* 33-49.

Arteaga, P., Batanero, C. y Ruiz, B., (2008). Complejidad semiótica de gráficos producidos por futuros profesores en la comparación de dos muestras. En L. Blanco y cols. (Eds.). *Actas del XII Simposio de las Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* CD- ROM. Badajoz: SEIEM.

Arteaga, P., Batanero, C. y Ruiz, B., (2009). Comparación de distribuciones por futuros profesores. En M. J. González, T. González y J. Murillo (Eds.), *XIII Simposio de las Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.129-138).

Arteaga, P., Batanero, C. y Ruiz, B. (2010). Pre-service primary school teachers' perception of randomness. En M. Pinto y T. Kawasaki (Eds). *Proceedings of the XXXIV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (V. 2, pp. 183-190). Belo Horizonte, Brasil: PME.

Arteaga, P., Ortiz, J. J. y Batanero, C. (2008). Uso de gráficos comparación de dos distribuciones por futuros profesores. Poster presentado en la *22 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME 22*, México, Julio, 2008.

Arteaga, P., Contreras, J. M. y Ruiz, B. (2008). Sentido numérico y elaboración de gráficos estadísticos. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Ed.), *Actas de las XIV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas: Sentido Numérico* (pp. 119-126). Granada: Sociedad Thales de Educación Matemática. [CD-ROM].

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education 2*(3). Online: www.iejme/.

Aoyama, K. y Stephens, M. (2003). Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective, *Mathematics Education Research Journal 15*(3), 3-22.

Auzmendi, E. (1991, Abril). Factors related to statistics: A study with a Spanish sample. Trabajo presentado en el *Annual Meeting of the American Educational Research Association.* Chicago, Il.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria.* Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz, Cádiz.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V.

Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2005). *Articulating domains of mathematical knowledge for teaching*. Online: www-personal.umich.edu/~dball/.

Bakker, A., Biehler, R. y Konold, C. (2004). Should young students learn about box plots? En. G. Burrill y M. Camden (Eds.). *Curricular Development in Statistics Education. Proceedings of the: International Association for Statistical Education (IASE) Roundtable* (pp. 163-173). Auckland: IASE. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Bakker. A., Derry. J. y Konold (2006). Using technology to support diagramatic reasoning about center and variation. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil:* International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: http://www. stat.auckland.ac.nz/~iase.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Didáctica de las Matemáticas.

Batanero, C. (2002). *Los retos de la cultura estadística.* Conferencia inaugural presentada en la Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires. Online: www.ugr.es/~batanero/.

Batanero, C., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2009). Estadística en la educación primaria. Retos para la formación de profesores. En M Guzmán (Coord.), *Arte, Humanidades y Educación. Libro Homenaje a Carmen Medialdea* (pp. 49-62). Universidad de Granada.

Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2011). El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO, 59*, 9-17. ISSN: 1133-9853.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2009). Statistical graphs produced by prospective teachers in comparing two distributions. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Ed.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 368-377). Lyon: ERME. Online: http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-

154.

Batanero, C., Arteaga, P., Ruiz, B. y Roa, R. (2010). Assessing pre-service teachers conceptions of randomness through project work. En C, Reading (Ed.), *Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM]. Lubjana: International Association for Statistical Education.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. EM-TEIA. Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana, 2(2). http://emteia.gente.eti.br/

Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (En prensa). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study*. New York: Springer.

Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (2008). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE.

Batanero, C. y Díaz, C. (2005). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de la TFS. En A Contreras (Ed.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 13-36). Grupo FQM126 Universidad de Granada.

Batanero, C. y Díaz, C. (2008). *Análisis de datos con Statgraphics*. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Batanero, C. y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Universidad de Granada.

Batanero, C., Godino, J. D., y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, *12*. Online: http://www.amstat.org/publications/jse/.

Batanero, C., Garfield, J. B., Ottaviani, M. G. & Truran, J. (2000). research in statistics education. Some priority questions. *Statistics Education Research Newsletter*, 2(2). Online:/www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1992). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31. ISSN: 1130-488x. Federación Española de profesores de Matemáticas.

Ben-Zvi, C. (2000). Towards understanding the role of technological tools in statistical learning. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1y 2), 127-155.

Ben-Zvi, D. (2002). Seventh grade students' sense making of data and data representations. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Ben-Zvi, D., y Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (pp. 54-64). Voorburgo: International Statistical Institute.

Berg, C.A. y Smith P. (1994). Assesing students" abilities to construct and interpret line graphs: disparities between multiple - choice and free – response instruments. *Science Education, 78*, (6), 527 - 554.

Bertin (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

Biehler, R. (1994, Julio). Towards requirements for more adequate software tools that support both learning and doing statistics. Trabajo presentado en el *Fourth International Conference on Teaching Statistics*, Marrakech, Marruecos.

Biehler, R. (1997). Software for learning and for doing statistics. *International Statistical Review, 65*(2), 167-190.

Biehler, R. y Leiss, D. (2010). Empirical research on mathematical modeling. *Journal für Mathematikdidaktik 31*, 5-8.

Brown, C. y Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York, NY: MacMillan.

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación* *en Educación Matemáticas VII*, 57-85.

Burgess, T. (2006). A framework for examining teacher knowledge as used in action while teaching statistics. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil: International Statistical Institute.

Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. En En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Burrill, G., y Biehler, R. (En prensa). Fundamental statistics ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer.

Cai, J., & Gorowara, C. C. (2002) Teachers' conceptions and constructions of pedagogical representations in teaching arithmetic average. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*, Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online:/www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Canada, D. L. (2008). Conceptions of distribution held by middle school students and preservice teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Cardeñoso, J. M. (1998). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de las concepciones sobre aleatoriedad y probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.

Cardeñoso, J. M., Azcárate, P. y Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. *Statistics*

*Education Research Journal* *4*(2), 59-81. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal,* 3 (1), 5-28. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/.

Carrión, J. C. y Espinel, M. C. (2005a). Aptitudes and difficulties of 10 to 12 years old students when translating information between different types of statistical representations. *Proceedings of the 55th Session of the International Statistical Institute*. Sydney. Australia. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Carrión, J.C. y Espinel, M. C. (2005b). Comprensión gráfica e implicaciones en la enseñanza. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 7, 183-196.

Carrión, J.C. y Espinel, M. C. (2006). Una investigación sobre la traducción e interpretación de gráficas y tablas estadística por estudiantes de educación primaria. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador, Brazil*:* International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www. stat.auckland.ac.nz/~iase.

Cazorla, I. (2002). *A relaçao entre a habilidades viso-pictóricas e o dominio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.

Chapman, O. (1999). Researching mathematics teacher thinking. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23$^{th}$ Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 385-392). Haifa: The Technicon – Israel Institute of Technology.

Chick, H. L. y Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Cleveland, W. S. (1987). Statistical graphs. *Journal of the American Statistical Association*, *82*(398), 419-423.

Cleveland, W. S. e McGill, R. (1984). Graphical perception: theory, experimentation and application to the development of graphical methods. *Journal of the American Statistical Association*, *79*(387), 531-554.

Connor, D., Davies, N. y Payne, B. (2002). Web-based project and key skill work. *Teaching Statistics*, *24*(2), 62-65.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007a). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria Obligatoria en Andalucía*.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007b). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria en Andalucía.*

Cooney, T. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 608-636.

Cuadras, C. M. (1991). *Análisis multivariante.* Barcelona: Eunibar.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education 18* (5), 382-393.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Delaney, S., Ball, D. L., Hill, H. C., Schilling, S. G. y Zopf, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching: Adapting U.S. measures for use in lreland. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11* (3), 171-197.

delMas, R., Garfield, J., & Ooms, A. (2005). Using assessment items to study students' difficulty reading and interpreting graphical representations of distributions. In K. Makar (Ed.), *Proceedings of the 4th International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy*. University of Auckland. Online: app.gen.umn.edu/artist/articles/SRTL4_ARTIST.pdf.

Diaz, C. y Arteaga, P. (2008, Septiembre). Developing general and data analysis competences through project work. Trabajo presentado en el *III European Congress of Methodology*, Oviedo, 2008.

Díaz, C., Arteaga, P. y Batanero, C. (2007). Contribución del trabajo con proyectos estadísticos a la adquisición de competencias básicas. En M. Molina, P. Pérez-Tyteca y M. A. Fresno (Eds.). *Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas.*

*Competencias matemáticas* [CD- ROM]. Granada. Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Eichler, A. (2008). German teachers' classroom practice and students' learning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Estrada, A. (2002). *Actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. En M. Camaño, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 121-140). Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Estrada, A. y Batanero, C. (2008). *Explaining teachers' attitudes towards statistics.* En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004a). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, *22* (2), 263-274.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004b). Un estudio de evaluación de conocimientos estadísticos en profesores en formación e implicaciones didácticas. *Educación Matemática*, 16, 89-112.

Estrada, A., Batanero, C., Fortuny, J. M., & Diaz, M. C. (2005). A structural study of future teachers' attitudes towards statistics. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME IV*. *European Research in Mathematics Education.* [CD-ROM].Sant Feliu de Guissols: ERME.

Estrada. A., Batanero, C. y Lancaster, S. (En prensa). Teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading, (Eds.) *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study.* New York: Springer.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática 11,* 99-119.

Espinel, C., Bruno, A. y Plasencia, I. (2008). Statistical graphs in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Espinel, C., González, T., Bruno, A. y Pinto, J. (2009). Las gráficas estadísticas. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estadística* (pp. 133-156). Melilla. Facultad de Humanidades y Educación.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(6), 521-544.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94-116.

Even. R. y Ball, D. (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer.

Font, J. D., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *27* (2), 3-9.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2), 89-105.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M, & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE)* *report: A Pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Online: www.amstat.org/Education/gaise/.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education 32*(2), 124-158.

Friendly, M. (2007). A brief history of data visualization En C. Chen, W. Hardle y A. Unwin (Eds.), *Handbook of computational statistics: Data visualization* (Vol III, pp. 1-34). New York: Springer.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review 70*(1), 1-25.

Gal, I., Ginsburg, L., & Garfield, J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). IOS, Press, Voorburg.

Garfield, J. B. (2003). Assessing statistical reasoning. *Statistics Education Research Journal, 2*(1), 22-38. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/.

Garfield, J. B. y Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review, 75*(3), 372-396.

Garfield, J. B. y Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Gattuso, L. (2006). Statistics and mathematics. Is it possible to create fruitful links? En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [CD-ROM]. Salvador (Bahia), Brasil: International Association for Statistical Education e International Statistical Institute.

Gerber, R., Boulton-Lewis, G y Bruce, C. (1995). Children's understanding of graphic representation of quantitative data. *Learning and Instruction 5*, 70-100.

Ghiglione, R. y Matalón, B. (1989). *Les enquêtes sociologiques. Théorie et practique.* París: Armand Colin.

Groth, R. E., & Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*, 37-63.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, 417-424). Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Online: www.ugr.es/local/jgodino/.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, 20*, 13-31.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics education a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.). *IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática* (pp. 25-45). Associaçao de Profesores de Matemática. Portugal.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2008, Enero). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Conferencia presentada en el VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Puerto Montt. Chile.

Godino, J. D., Batanero**, C.** y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores. En *Homenaje al profesor*

*Oscar Sáenz Barrio* (pp. 165-185). Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60* (1), 3-36.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI /IASE StudyTeaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education.* Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* 60 (1), 3-36.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27* (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59–76.

Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4*(2), 1-26.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. y Font, V. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones,. 38, 25-49.*

González, M. T. y Pinto, J. (2008). Conceptions of four pre-service teachers on graphical representation. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Graham, A. (1987). *Statistical investigations in the secondary school.* Cambridge: The Open University Centre for Mathematics Education.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélization en l'enseignement. En *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 77-84). Reims: Commission Inter-IREM.

Hernández, J., Noda, A, Palarea, M. y Socas, M. (2003). *Estudio sobre habilidades básicas en matemáticas de alumnos de magisterio*. Universidad de La Laguna. Departamento de Análisis Matemático.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Holmes, P. (1997). Assessing project work by external examiners. En I. Gal y J. B: Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 153-164). Voorburg: IOS Press.

Huedo, T., López, J.A., Martínez, R. y Nortes, A. (2003, Abril). Contenidos y actitudes en estadística: Un estudio en maestros en formación. *Actas de la 27 Conferencia Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Lleida: SEIO. CD ROM.

Jacobbe, T. (2008). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist inquiry*. London: Falmer.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases.* Cambridge: Cambridge University Press.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

Lancaster, S. (2008). A study of preservice teachers' attitudes toward their role as students of statistics and implications for future professional development in statistics. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Lee, H. S. y Hollebrands, K. (2008). Preparing to teach data analysis and probability with technology. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Lee, C. y Meletiou, M. (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. *Joint Statistical Meetings- Section on Statistical Education.* Online: http://www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf.

Lerman, I. C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*, Dunod.

Lewandowsky, S. y Spence, I. (1989). The perception of statistical graphs. *Sociological Methods and Research, 18*(2/3), 200-242.

Li, D. Y. y Shen, S. M. (1992). Students'weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics 14* (1), 2-8.

Langer, E.J. (1975). The illusion of control. *Journal of Personality and Social Psychology, 32*, 311-328.

Llinares, S. (1998). La investigación «sobre.» el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor. *Aula, 10,* 153-179.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educaçao matemática en Portugal, Espanha e italia. Acta da Ecola de Verao-1999* (pp. 109-132). Sociedade de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao.

LLinares S. y Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 429 – 459). Rotherdam / Taipei: Sense Publishers.

Llinares, S., Sánchez, V. y García, B. M. (1994). Conocimiento del contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación de las fracciones. *Revista de Educación, 304,* 199-225.

Kosslyn, S. M. (1985). Graphics and human information processing. *Journal of the American Statistical Association, 80*(391), 499-512.

Makar, K., & Confrey, J. (2005). "Variation-talk": Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal, 4*(1), 27-54. Online: www.stat.auckland.ac.nz/serj.

MacGillivray, H. y Pereira Mendoza, L. (En prensa). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading, (Eds.) *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study.* New York: Springer.

Mayén (2009). *Significados de las medidas de posición central para estudiantes mexicanos de Bachillerato.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Mc Leod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (Ed.), *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan y N.C.T.M.

MEC (2006a). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria.*

MEC (2006b). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

Mickelson, W., & Heaton, R. (2004). Primary teachers' statistical reasoning about data. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 327-352). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Monteiro, C. y Ainley, J. (2004, Julio). Interpretation of media grapas and critical sense: implications for teaching and teachers. Trabajo presentado en el *10th International Congress on Mathematics Education.* Copenhague. Online http://www.icme-organisers.dk/tsg11/Papers/.

Monteiro, C. y Ainley, J. (2006). *Student teachers interpreting media graphs*. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil:* International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase.

Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 2 (3), 188-207. Online: http://www.iejme/.

Moore, D. (1999). *Estadística aplicada básica*. Barcelona: Antoni Bosch.

Murray, S., y Gal, I. (2002). Preparing for diversity in statistics literacy: Institutional and educational implications. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics,* Cape Town, South Africa. Voorburg: International Statistical Institute. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Nasser, F. (1999). Prediction of college students achievement in introductory statistics course. Comunicación presentada en el *52nd ISI –International Statistical Institute-Session*. Helsinki.

Nasser, F. M. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. *Journal of Statistics Education*, 12 (1). Online: www.amstat.org/publications/jse/.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Nolan, D., y Speed, T.P. (1999). Teaching statistics theory through applications. *American Statistician*, *5*3, 370-375.

Nortes, A. (1993). *Estadística teórica y aplicada*. Barcelona: PPU.

Onwuegbuzie, A. J. (1998). Teachers` attitudes toward statistics. *Psychological Reports, 83*, 1008-1010.

Pereira-Mendoza, L. y Mellor, J. (1990). Student's concepts of bar graph: Some preliminary findings. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third*

*International Conference on Teaching Statistics.* Voorburg: International Statistical Institute. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase.

Pérez López, C. (2005). *Métodos estadísticos avanzados con SPSS.* Madrid: Thompson.

Pfannkuch, M. (2006). Comparing box plot distributions: A teacher's reasoning. *Statistics Education Research Journal, 5*(2), 27-45. Online: www.stat.auckland.ac.nz/serj/.

Pimenta, R. (2003). *O uso da estatística no projecto de investigação em fisioterapia.* Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Santiago de Compostela.

Pinker, S. (1990). A theory of graph comprehension. In R. Freedle (Ed.), *Artificial intelligence and the future testing* (pp. 73-126). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

Pinto, J. y González, M.T. (2008, Agosto). Pedagogical content knowledge of a novel teacher: a case from the teaching of graphical representation. Trabajo presentado en el *11th International Congress on Mathematics Education.* Monterrey. Online: http://tsg.icme11.org/ document/get/477.

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds.*), Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Postigo, Y. y Pozo, J. I. (2000). Cuando una gráfica vale más que 1000 datos: la interpretación de gráficas por alumnos adolescentes. *Infancia y Aprendizaje*, *90*, 89 - 110.

Ragencroft, M. (1992). Le rappresentazioni grafiche. Sviluppare una progresslone dl lavoro. *Induzioni*, *4*, 1-3.

Reading, C. y Canada, D. (En preparación). Teachers' knowledge of distribution. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE Study.* New York: Springer.

Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2006). Reasoning with evidence – new opportunities in assessment. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Ridgway, J., McCusker, S. y Nicholson, J. (2007, Agosto). Engaging citizens in reasoning with evidence. Trabajo presenado en la *56th Session of the Internacional Statistical Institute*, Lisboa, 2007.

Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2008). Mapping new statistical Literacies and Iliteracies. Trabajo presentado en el *11th International Congress on Mathematics Educ*ation, Monterrey, Mexico.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Maestría. CICATA. México.

Ruiz, B. (En preparación). *Un análisis epistemológico y cognitivo de la variable aleatoria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ruiz, B., Arteaga, P. y Batanero, C. (2009) Competencias de futuros profesores en la comparación de datos. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estadística* (pp. 57-74). Melilla. Facultad de Humanidades y Educación.

Ruiz, B., Arteaga, P. y Batanero, C. (2009). Uso de promedios y dispersión en la comparación de distribuciones por futuros profesores. *VI Congreso Iberoamericano de Educación matemática CIBEM 6. CD-ROM (pp. 1351-1356).* Puerto Montt: Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática. Comunicación referida.

Ruiz, B., Arteaga, P. y Batanero, C. (2009). Comparación de distribuciones, ¿Una actividad sencilla para los futuros profesores? En J. A. da Silva Fernández (Ed.), *Actas del II Encontro da Probabilidade e Estatística na Escola.* CD-ROM. Universidad de Minho, Braga, Portugal.

Ruiz, B., Batanero, C. y Arteaga, P. (2011). Vinculación de la variable aleatoria y estadística en la realización de inferencias informales por parte de futuros profesores. *Bolema 24*, 413-429.

Scheaffer. R. L. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Schield, M. (2006). Statistical literay survey analysis: reading graphs and tables of rates percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www. stat.auckland.ac.nz/~iase.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de conceptos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistic: Reflections and directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan Publishing Company.

Shulman (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of new reform. *Harvard Educational Review, 57* (1), 1-22.

Silva, C. y Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Sorto, M. A. (2004). *Prospective middle school teachers' knowledge about data analysis and its application to teaching*. Tesis doctoral. Universidad del Estado de Michigan.

Sorto, M. A. y White, A. (2004, Julio). Statistical knowledge for teaching. Trabajo presentado en *10th International Congress on Mathematical Education*, Copenhague, Dinamarca.

Starkings, S. (1997). Assessing students' projects. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 139-152). Voorburg: IOS Press.

Steinbring, H. (1990). The nature of stochastical knowledge and the traditional mathematics curriculum. Some experiences with in-service training and developing materials. En A. Hawkins (Ed.). *Training teachers to teach statistics* (pp. 2-19). Voorburg: International Statistical Institute.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). New York: Springer.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on Mathematics Teaching and Learning* (p. 127-146), Macmillan, New York.

Tufte, E. R. (1997). *The visual display of quantitative information*. Cheshire, CT: Graphics Press.

Tukey, J. W. (1977). Exploratory data analysis. Reading, MA: Addisson Wesley.

Vallecillos, A. (2001). Análisis exploratorio de datos. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 559-590). Madrid: Síntesis

Visauta, R. (1989). *Técnicas de investigación social I. Recogida de datos*. Barcelona: P.P.U.

Wainer, H. (1997*) Visual revelations: graphical tales of fate and deception from Napoleon Bonaparte to Ross Perot.* New York: Copernicus.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher* 21(1), 14-23.

Wainer, H. y Thissen, D. (1981). Graphical data analysis. *Annals Review Psychology*, 32, 191-241.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. *Journal of Mathematics Teacher*

*Education*, 4, 305-337.

Watson, J. M. (2005). Assessing teachers' knowledge for teaching quantitative literacy. *Proceedings of the ICMI Third East Asian Conference on Mathematics Education* [CD]. Shanghai, China.

Watson, J.M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Watson, F., Kromrey, J., Ferron, J., Lang, T. y Hogarty, K. (2003). An assessment blueprint for Encstat: A statistics anxiety intervention program. Comunicación presentada al *AERA Annual Meeting*, San Diego.

Weber, R. P. (1985). *Basic content analysis.* Londres: Sage.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Wisenbaker, J., Nasser, F., y Scott, J.S. (1999). A cross-cultural comparison of path models relating attitudes about and achievement in Introductory Statistics Courses. Comunicación presentada en el *52nd ISI –International Statistical Institute- Session*, Helsinki.

Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Wu, Y. (2004, Julio). Singapore secondary school students´understanding of statistical graphs. Trabajo presentado en el *10th International Congress on Mathematics Education*. Copenhagen, Dinamarca.