La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas

Carmen Batanero Bernabeu, Luis Serrano Romero

UNO, 5, 15-28, 1995

Resumen

En este trabajo presentamos un análisis de los diferentes significados asociados al término aleatoriedad a lo largo de su evolución histórica y un resumen de las investigaciones sobre la percepción de la aleatoriedad por parte de niños y adolescentes. Finalizamos con algunas sugerencias sobre la enseñanza de la probabilidad que posibiliten a los alumnos y alumnas a adquirir gradualmente un conocimiento adecuado de las características de los fenómenos aleatorios.

Summary

ln this article we present an analysis of the diffetent meanings that have been associated with the term randomness throughout its historical evolution, together with a brief account of research into the way children and teenagers understand this concept. We finish with some suggestions fot the teaching of ptobability which may help students to learn gradually the characteristics of random phenomena.

INTRODUCCIÓN

Las cuestiones epistemológicas ocupan un lugar fundamental en la reflexión de las personas interesadas por el aprendizaje de las matemáticas. Ello es debido a que los obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos se reproducen, con cierta frecuencia, en los alumnos. Otras veces, los estudios de tipo epistemológico pueden ayudar a comprender las dificultades de los alumnos en el uso de los conceptos para la resolución de problemas.

El cálculo de probabilidades ocupa una situación muy particular a este respecto, ya que, a pesar de contar con una axiomática satisfactoria, prosiguen las controversias sobre la interpretación de conceptos básicos, como los de probabilidad o independencia. Estas controversias no son de tipo técnico, ya que el cálculo de probabilidades, como tal no plantea contradicciones ni paradojas, como ocurriera en el caso de la teoría de conjuntos, ni se han propuesto otras axiomáticas que compitan con éxito con la de Kolmogorov. Los problemas que la axiomatización no ha resuelto se refieren a la naturaleza de los objetos que se representan por medio de la probabilidad. Como indica Matalón (1 979), *de modo más o menos explícito, todos los teóricos admiten que el cálculo de probabilidades formaliza algo que, en cierto sentido »existe» en todas partes; las divergencias se, refieren a la naturaleza de ese »algo», el cual estaría representado a través de la probabilidad matemático* (pág. 121).

En este trabajo vamos a presentar un reflexión epistemológica -desde una perspectiva didáctica- sobre la noción de aleatoriedad, la cual, junto con la idea de probabilidad es punto de partida del cálculo de probabilidades. El interés y necesidad de este estudio parece claro, ya que la mayor parte de los nuevos currículos de matemáticas de los niveles de enseñanza obligatoria proponen intensificar el estudio de los fenómenos aleatorios. Las expresiones "experimento aleatorio", "suceso aleatorio", incluso los sustantivos el "azar", "aleatorio", aparecen con frecuencia, tanto en el lenguaje cotidiano, como en los manuales escolares. Pero su significado, al referirse a una entidad abstracta, no queda unívoca y nítidamente determinado, lo cual creará dificultades de comprensión en los estudiantes.

Como afirmamos en Godino y Batanero (1994), el significado de los objetos matemáticos no puede reducirse a su mera definición matemática cuando nos interesamos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos. Las diversas situaciones problemáticas y las prácticas que hacen las personas para resolverlas en distintas instituciones y momentos históricos aportan rasgos característicos de las nociones que en ellas intervienen, los cuales deben ser tenidos en cuenta en la enseñanza.

En lo que respecta a la noción de aleatoriedad, veremos en este trabajo que en distintos momentos históricos se ha interpretado de forma diferente y que, incluso en la actualidad, se resiste a una definición sencilla que permita determinar con nitidez si un suceso o una secuencia de sucesos es o no aleatoria. Por este motivo presentaremos una discusión de estas cuestiones, a partir de las reflexiones realizadas por estadísticos, filósofos, psicólogos e investigadores en Didáctica de la Matemática preocupados por este problema.

ALEATORIEDAD Y CAUSALIDAD

Una primera acepción de lo aleatorio la podemos encontrar en el diccionario del uso del español de M. Moliner (1 983), donde encontramos las siguiente definición: *Incierto. Se dice de aquello que depende de la suerte o del azar, siendo el azar la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención humana o divina.*

En esta acepción lo aleatorio seria contrapuesto a aquello de lo que se conoce sus causas y el "azar" estaría personificado como una supuesta causa de los fenómenos aleatorios. Esta acepción correspondería a una primera fase histórica exploratoria en el desarrollo de la idea de aleatoriedad que se extendería, según Bennet (1993) desde la antigüedad hasta el comienzo de la Edad Media. En esta etapa los dispositivos aleatorios como dados o huesos de astrálago, se usaron para adivinar el futuro, tomar decisiones y en los juegos, cuando se quería impedir dar ventaja a alguna de las partes interesadas, puesto que se suponía que lo aleatorio no podía ser controlado humanamente.

Se atribuyese a fuerzas sobrenaturales o no, el azar suprimía la posibilidad de que la voluntad, inteligencia o conocimiento humano influenciara la decisión o el destino. Poincaré (1936) indicó que los clásicos diferenciaban los fenómenos que parecían obedecer a leyes armónicas, establecidas de una vez para siempre, y aquellos que atribuían al azar, que no podían preverse porque se rebelaban ante toda ley. Según este autor, la aleatoriedad tenia, además, un sentido preciso, objetivo. Lo que era aleatorio lo era para cualquier persona.

Una variante de esta acepción es suponer que todo fenómeno tiene una causa. *Nada sucede por azar sino que todo ocurre por una razón y por una necesidad* (Leucippus, siglo V a. C., citado por Bennett).Es debido a nuestra ignorancia por lo que existe "el azar" para nosotros. Incluso lo que es aleatorio para una persona puede no serlo para otra, por lo que, en esta acepción, tendría un carácter subjetivo: *El azar no es más que la medida de nuestra ignorancia. Los fenómenos fortuitos son, por definición aquellos* *cuyas leyes ignoramos.* (Poincaré, 1 936, pág. 69 de la reproducción en el libro de Newmann).

Poincaré encuentra que esta definición no es satisfactoria, ya que ciertos fenómenos cuyas leyes no conocemos son, sin embargo, considerados como deterministas. No sabemos con seguridad por qué llegado a un punto de envejecimiento morimos, pero la muerte es considerada un hecho seguro, lo mismo que lo será la puesta del sol para un niño o una persona primitiva que desconociera el fenómeno de rotación de la Tierra. Además, ciertas teorías físicas, como la teoría cinética de los gases, tienen causas conocidas que son explicadas precisamente mediante leyes probabilísticas. Las leyes que se utilizan para explicar estos fenómenos serían mucho más complicadas si, en lugar de emplear la hipótesis de que las partículas se mueven aleatoriamente, se supusiera que siguen una cierta ecuación de tipo determinista. Por ello, entre los fenómenos de los cuales ignoramos sus leyes, Poincaré diferencia los aleatorios o fortuitos, sobre los cuales el cálculo de probabilidades nos informará provisionalmente y los que no lo son, sobre los cuales no hay esta posibilidad de predicción hasta que hayamos encontrado las leyes que los rigen.

Para los primeros, incluso el día que encontremos sus reglas, el cálculo de probabilidades no perderá su validez. Así, el director de una compañía de seguros de vida ignora cuándo morirá un asegurado particular. Sin embargo, sus beneficios seguirán siendo los mismos, incluso cuando conociese el tiempo de vida que queda a cada uno de estos asegurados, porque la distribución estadística de esta población sería la misma, independientemente de este conocimiento; por tanto, estos beneficios no son fruto de su ignorancia. Como indica Ayer (1974) un fenómeno se considera aleatorio si se comporta de acuerdo al cálculo de probabilidades. Una causa muy pequeña determina, a veces, un efecto considerable y decimos que el resultado es aleatorio porque la predicción resulta imposible. Es el caso de la meteorología o del juego de la ruleta. En otros casos, como en la teoría cinética de los gases, al barajar las cartas o en la teoría de errores, es la complejidad o multitud de las causas lo que determina un resultado aleatorio.

ALEATORIEDAD Y PROBABILIDAD

Al surgir el cálculo de probabilidades se relaciona la aleatoriedad con la equiprobabilidad, que se basa en el principio de indiferencia. Esto es debido a la relación de los primeros desarrollos teóricos con los juegos de azar, en los que el número de posibilidades era finito y el principio de indiferencia podía considerarse razonable. Esta interpretación se encuentra, por ejemplo, en el *Liber de Ludo Aleae* de Cardano. Bennett (l993) indica que, hacia el final del siglo XVIII y principios del XIX, hay un desplazamiento de las situaciones consideradas aleatorias, desde el mundo de los juegos de azar al de los fenómenos naturales. Paralelamente, se produce un cambio en el concepto de aleatoriedad, que se hace progresivamente más formalizado. Se introduce el concepto de "independencia", que se considera un requisito imprescindible para asegurar la aleatoriedad de un suceso en sucesivos experimentos repetidos. Sin embargo, el resultado de un experimento aleatorio es para estos autores determinado pero desconocido, dependiente de la ignorancia del hombre.

También actualmente la noción de aleatoriedad se explica, a veces, en términos de probabilidades y esta explicación dependerá de la concepción subyacente respecto a la probabilidad. En un concepto clásico de probabilidad decimos que un objeto (o un suceso) es un miembro aleatorio de una cierta clase, si la probabilidad de este objeto es igual que la de cualquier otro miembro de su clase. Aunque esta definición, en principio, es suficiente para los juegos de azar basados en dados, monedas, cartas, extracción de bolas en urnas, etc., podemos aplicarle las mismas críticas que se atribuyen a la concepción laplaciana de la probabilidad. Es difícil, a partir de esta definición, discriminar un miembro aleatorio o no aleatorio en una clase dada. Por ejemplo, ¿cómo sabemos que una moneda dada o un dado, no están ligeramente sesgados?

Kyburg (1975) sugiere que este método de definir la aleatoriedad impone restricciones severas y no naturales a la aplicación de esta idea. Sólo podríamos decir que un objeto es un miembro aleatorio de una clase, si la clase es finita. Si fuese infinita, entonces la probabilidad de cada miembro de la clase siempre sería nula (por tanto idéntica), aunque el método de selección fuese sesgado. ¿Qué ocurriría, además, en el caso de sucesos elementales no equiprobables? Sin embargo, la idea de equiprobabilidad es muy atrayente para definir la aleatoriedad, como se ve, por ejemplo, al definir las muestras aleatorias -todos los elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos- o la asignación aleatoria de sujetos a los experimentos -cada sujeto tiene la misma probabilidad de ser asignado al grupo experimental o al control-.

Cuando desplazamos la aplicación de la idea de probabilidad a situaciones del mundo físico o natural, como por ejemplo, el grupo sanguíneo de un recién nacido o cualquier o otra característica hereditaria, nos encontramos con que no podemos aplicar el principio de equiprobabilidad. Podríamos decir, en estos casos, que un objeto es un miembro aleatorio de una clase si pudiéramos elegirlo mediante un método que proporcionase a cada miembro de la clase una cierta frecuencia relativa "a priori" a la larga. Usaríamos, en estos casos, la concepción frecuencial, que es especialmente adecuada cuando disponemos de estadísticas registradas sobre un gran número de casos, como en los ejemplos citados. Tendríamos, sin embargo, el problema teórico de decidir el número necesario de experimentos para considerar que, a partir de este número, habríamos probado suficientemente el carácter aleatorio del objeto.

En estas dos acepciones la aleatoriedad es una propiedad "objetiva" que se asigna al suceso o elemento de una clase, como podría asignársele un color o un sexo, si se trata de una persona. Kyburg (1 974) crítica esta visión y propone una interpretación de la aleatoriedad compuesta de cuatro términos, que son los siguientes:

- el objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase;
- el conjunto del cual el objeto es un miembro aleatorio (población o colectivo);
- la propiedad con respecto a la cual el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada;
- el conocimiento de la persona que emite el juicio de aleatoriedad.

Si un objeto es o no considerado como miembro aleatorio de una clase, depende, en esta interpretación, de nuestro conocimiento sobre el mismo. Lo que puede ser aleatorio para una persona puede no serlo para otra. La aleatoriedad no es una propiedad física "objetiva", sino que tiene un carácter subjetivo. Reconocemos en esta definición el paralelismo con la concepción subjetiva de la probabilidad, por la que todas las probabilidades serían condicionales. Esta visión sería más adecuada en las situaciones en que poseemos cierta información que puede cambiar nuestro juicio sobre la aleatoriedad o la probabilidad de un suceso.

Para Kyburg hay cierta clase de situaciones que todo el mundo consideraría aleatorias y donde el uso de la idea de equiprobabilidad para definir un suceso aleatorio parece claro y no controvertido. Por ejemplo, en el caso de un dado equilibrado, cualquier lanzamiento es simplemente un ejemplo de cualquier otro posible lanzamiento. No hay nada nuevo que podamos conocer acerca del dado que nos permita predecir otra probabilidad diferente de l/6 para un resultado particular del dado.

En otros casos la situación no es tan clara. Consideremos, por ejemplo, la probabilidad de que un individuo particular viva más de 35 años. Es verdad que poseemos información estadística sobre sus posibilidades de supervivencia a esta edad, pero hay muchas consideraciones que podrían influenciar un cambio en esta probabilidad, si tuviésemos que estimarla. Por ejemplo, el hecho de que el sujeto sufriera cierta enfermedad, como cáncer o sida, o que fuese piloto de carreras.

En este ejemplo reconocemos la importancia de elegir la clase de referencia adecuada para juzgar la probabilidad de un cierto suceso. Asimismo podemos ver aquí la importancia del cuerpo de conocimiento, puesto que, si el sujeto en cuestión sufre una enfermedad muy grave y yo lo supiera, me llevaría a hacer una estimación diferente de sus esperanzas de vida.

PROCESOS Y SECUENCIAS ALEATORIAS

Para Zadell (1 992) la idea de aleatoriedad contiene dos aspectos distintos que, a o veces, pueden no coincidir, que son:

- el proceso de generación, que es lo que, matemáticamente se conoce como experimento aleatorio;
- el patrón de la secuencia aleatoria producida como consecuencia del experimento.

Hasta ahora hemos considerado que estos dos aspectos están ligados entre si, ya que esperamos que un proceso aleatorio proporcione un patrón de resultados aleatorios. Veremos que estos dos aspectos son separables.

En primer lugar, puede haber secuencias que, aparentemente, parezcan aleatorias, siendo producidas por un proceso completamente determinista. Consideremos, por ejemplo la secuencia 32823066470938446095. Por su aspecto, parece ser una secuencia aleatoria de números. Pero, en realidad, es la expresión de los dígitos decimales 111 al 130 del número ***Pi.*** Aunque el patrón que sigue esta secuencia parezca aleatorio, el proceso que la genera no lo es, porque siempre obtendremos la misma secuencia de cifras como resultado del "experimento".

Por otro lado, incluso una secuencia aparentemente regular y determinista, como 100100 100, puede obtenerse como resultado de un experimento aleatorio. Esta secuencia particular es tan probable como cualquier otra secuencia de ceros y unos obtenida en 9 ensayos en que los valores 1 y O sean equiprobables. Su probabilidad será 2^{-9}. Si repetimos el experimento un número mayor que 2^9 veces, cabe esperar que se obtenga alguna vez la sucesión dada por azar.

No fue hasta finales del siglo XIX cuando el empleo de la estadística en la investigación aplicada empezó a basarse en la elección de muestras aleatorias de datos, a partir de los trabajos de Edgeworth, Galton, Pearson, Fisher y sus colaboradores. Anteriormente, los estudios estadísticos estaban basados en la recogida de datos empíricos masivos, esto es, tenían un carácter descriptivo de poblaciones completas, más que un carácter inferencial. En los casos en que se utilizaban muestras, éstas no se elegían al azar, porque no se era consciente de la importancia de elegir muestras aleatorias para poder realizar inferencias válidas y precisas sobre la población. Cuando los desarrollos teóricos empiezan a mostrar la importancia de este punto, empieza el interés por encontrar modelos de procesos que aseguren la consecución de largas secuencias de dígitos aleatorios. Éstos serían utilizados para elegir muestras aleatorias en las aplicaciones estadísticas.

PROCESOS QUE GENERAN SUCESIONES ALEATORIAS

Hay tres modelos básicos de procesos que se emplean para generar secuencias aleatorias: dispositivos físicos; las tablas de números aleatorios y los generadores de números pseudoaleatorios.

Ciertos procesos físicos pueden generar resultados aleatorios, como, por ejemplo, elegir a ciegas una bola de una urna llena de bolas de distinto color. Este tipo de dispositivos -dados; ruletas; bombos con fichas,...- es el sistema más antiguo, familiar y natural de obtener tales resultados aleatorios. Es el método que también empleamos en clase con nuestros alumnos, aprovechando el interés que muestran por los juegos de azar. Sin embargo, es muy difícil conseguir construir dispositivos que aseguren la aleatoriedad física perfecta, por ejemplo, asegurar que un dado asigne exactamente una probabilidad 1/6 a cada una de sus caras. Además, es un procedimiento lento si queremos obtener una serie larga de resultados aleatorios.

Debido a la dificultad de disponer con suficiente rapidez de secuencias aleatorias largas con dispositivos físicos, se crean las tablas de números aleatorios. Lord Kelvin y Típpet se encuentran entre los pioneros en la construcción de las mismas. Otras tablas notables son las de Fisher y Yates publicadas en 1 938, o las de Kendall y Babbington- Smith, en 1 939, culminando en la publicación de la corporación RAND "Un millón de dígitos aleatorios" en 1955. Este tipo de tablas puede también ser usado en clase con los alumnos de educación secundaria.

El tercer método importante para generar números aleatorios consiste en el uso de una fórmula, es decir, mediante los llamados "números pseudoaleatorios". Con ayuda de un algoritmo de ordenador, se produce una secuencia numérica que puede ser empleada como aleatoria para los propósitos prácticos. La mayor parte de los ordenadores traen incorporadas este tipo de órdenes, con lo que podemos cómodamente obtener sucesiones aleatorias dentro de una magnitud numérica y longitud deseada. Asimismo, podemos obtener sucesiones aleatorias extraídas de distintos tipos de distribución teórica, como la distribución normal con una cierta media y varianza.

FORMALIZACIÓN DE LA IDEA DE ALEATORIEDAD

Con las tablas de números aleatorios surgió la preocupación de asegurar la "calidad" de los mismos. La obtención de números pseudoaleatorios con ayuda de algoritmos deterministas sugirió también que debía examinarse la sucesión producida, independientemente del proceso por el cual había sido generada. En el siglo XX se llevan a cabo estas discusiones, que llevarían a la formalización del concepto.

Fine (1973) discute algunas de las aproximaciones que se han usado para definir lo que sería una sucesión aleatoria. La reflexión sobre este tema partió de la idea intuitiva de que una sucesión debería ser considerada como aleatoria si nos llevara al convencimiento de que es imposible inventar un método que nos permita ganar en un juego de azar cuyos resultados fuesen los de la sucesión dada; o bien de la visión de la sucesión aleatoria como altamente irregular o compleja. A continuación presentamos estos dos enfoques:

Enfoque de los algoritmos de selección

Von Mises introdujo la idea de colectivo, como fenómeno de masas, suceso repetitivo o larga serie de observaciones, para las cuales hay razones suficientes para creer en la hipótesis de que la frecuencia relativa de un suceso tiende a un límite fijo. A partir de esta idea, definió la aleatoriedad en una secuencia de observaciones proponiendo una propiedad para todas sus posibles subsucesiones. Esta propiedad consiste en exigir que la frecuencia relativa de cada posible suceso en la sucesión aleatoria sea invariante en todas sus posibles subsucesiones. Dicho de otra forma, en una secuencia aleatoria no puedo encontrar un algoritmo por el cual seleccionar una subsecuencia en la cual la frecuencia relativa de uno de los resultados se vea afectada. Supongamos, por ejemplo, que al elegir todos los elementos pares, o cada diez elementos, o todos los elementos primos en una sucesión de caras y cruces obtenidas al lanzar una moneda obtuviese una secuencia en la que la probabilidad de cara fuese 2/3. Consideraría, entonces, que la secuencia dada no era realmente aleatoria, ya que podría obtener ventaja en un juego de azar apostando a favor de la cara cada dos, diez jugadas o en las jugadas número primo.

Esta definición de aleatoriedad es la base de los contrastes por los cuales se prueban las tablas de números aleatorios, antes de ponerlas en uso en la comunidad científica. Los algoritmos que se usan tratan de detectar las posibles regularidades de la sucesión; (propiedades que pudiesen emplearse para obtener ventajas por parte de un jugador en un juego de azar). Sin embargo, puesto que todo contraste de hipótesis siempre lleva asociado una posible probabilidad de error, nunca podríamos tener total seguridad de que una sucesión dada, a pesar de haber pasado todas las pruebas, tuviese algún tipo de patrón que nos hubiera pasado desapercibido y, por tanto, no fuese totalmente aleatoria.

Enfoque de la complejidad absoluta

Otro intento, debido a Kolmogorov, de definir la aleatoriedad de una sucesión se basa en su complejidad computacional, que puede definirse a partir de la teoría de autómatas y conmutabilidad. La complejidad de una sucesión es la dificultad de describirla (o almacenarla en un ordenador) mediante un código que nos permita reconstruirla más tarde. El mínimo número de signos necesarios para codificar esta sucesión proporciona una escala para medir la dificultad de almacenarla, o, lo que es lo mismo, su complejidad. En general, puede haber más de un programa para la misma sucesión. La complejidad debe ser juzgada a partir de la forma más simple de almacenar la sucesión. Por ejemplo, si comparamos las secuencias:

CC++C+CC++

C+C+C+C+C+

vemos que puedo codificar más abreviadamente la primera como CC+2+CC++, mientras que la segunda la podríamos codificar como 4C+. Por lo tanto la primera sucesión es más compleja que la segunda, ya que precisa más signos para codificarse. Bajo este enfoque, una secuencia sería aleatoria si no se puede codificar en forma más abreviada, por lo que la ausencia de patrones periódicos sería su característica esencial. Es decir, una secuencia sería aleatoria si sólo podemos describirla listando uno tras otros todos sus componentes, Chaitin sugirió que esta definición establece una jerarquía en los grados de aleatoriedad de diferentes sucesiones y que la aleatoriedad perfecta sería vista como un concepto teórico o límite.

Como resumen, y siguiendo a Steinbring (1991), podríamos señalar que el concepto de aleatoriedad se refiere a dos dominio diferentes; formal e informal. Desde el punto de vista informal, hablamos del azar, como patrón que explica aquellos efectos para los que no conocemos la causa o que no son predecibles. Se ha usado para tratar relaciones causa efecto que parecen demasiado complejas para ser analizadas o en las que no hay una relación determinista entre causa y efecto. Esta interpretación refleja muchos aspectos filosóficos epistemológicos sociales y personales, y es una importante fuente de confrontación entre las probabilidades subjetivas y objetivas.

Desde el punto de vista formal (Harten y Steinbring, 1983) el concepto se ha especializado, siendo la idea central de esta especialización la de sucesión aleatoria o sucesión de resultados de un mismo experimento realizado repetida e independientemente, cuya matematización hemos descrito.

LA ALEATORIEDAD DESDE EL PUNTO DE VISTA PSICOLÓGICO: PERCEPCIÓN SUBJETIVA DE LA ALEATORIEDAD

Al introducir un nuevo tema como objeto de enseñanza, una cuestión fundamental es conocer la posibilidad de comprensión por parte de los estudiantes. ¿Son capaces los niños de diferenciar los fenómenos aleatorios de los deterministas? ¿Qué características atribuyen a las secuencias aleatorias? ¿Existen ideas previas que dificulten el aprendizaje? Este tema ha sido objeto de atención por parte de numerosos investigadores, como puede verse en las revisiones bibliográficas de Scholz (1991) y Shaughnessy (1992).

Piaget e Inhelder (1951) vieron el desarrollo de la idea de azar en el niño como complementaria a la de la relación causa-efecto. Para ellos, sin esta comprensión de la causación, no hay un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios. En consecuencia, hasta la etapa de las operaciones concretas en la que hay cierta apreciación de los factores que caracterizan los fenómenos causados, el niño y la niña no pueden comprender la idea de azar.

Según este autor, el azar se concibe como debido a la interferencia de una serie de causas independientes y la «no presencia» de todas las combinaciones posibles, salvo en el caso en que hubiera un gran número de repeticiones del experimento. Cada caso aislado es indeterminado o imprevisible, pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Esta es la vía por la que aparece la idea de probabilidad, como razón entre las posibilidades de un caso y el conjunto de posibilidades. Por tanto, la idea de azar, para Piaget, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente comprendida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las operaciones formales (12-14 años).

Hoeman y Ross (1 982) señalan que, en las primeras etapas de los estadios descritos por Piaget, hay una falta de diferenciación entre sucesos causados y aleatorios; la natural inclinación de la persona a buscar el orden y estructura, incluso donde no existe, puede explicar la incapacidad de los niños pequeños para comprender apropiadamente la aleatoriedad.

Algunos autores han documentado la dificultad que tienen los niños y niñas para diferenciar los aspectos deterministas de los aleatorios. Por ello explican sus ganancias altas o bajas en un juego de azar como el resultado de la habilidad o concentración. Por ejemplo, Fischbein y Gazit (1984) estudiaron estas creencias y, en Fischbein y cols. (1991), muestran que algunos estudiantes suponen que es posible controlar un experimento aleatorio si lo repiten varias veces.

Piaget e lnhelder (1951) investigaron la comprensión de los niños y niñas patrones que aparecen en las secuencias de resultados aleatorios. Diseñaron un aparato que simulaba la caída de gotas de lluvia sobre las baldosas de un pavimento. El deseo de regularidad dominó las predicciones de los niños. Al preguntarles dónde siguiente gota de lluvia, los niños del estadio I (6 a 9 años) las distribuían aproximadamente en igual número sobre cada cuadro de la cuadrícula. Si la retícula tenia cuadros con alguna gota, excepto un cuadro vacío, los niños colocaban la gota en vacío de modo que se lograse un patrón uniforme. Al aumentar la edad, y aparece el razonamiento proporcional y se acepta la irregularidad de la distribución. Piaget e lnhelder indican que los niños comprenden la ley de los grandes números, que contempla a la vez la regularidad global y la variabilidad particular de cada experimento. Sin embargo, esto es discutido por Green (1983, 1 989, 1991), quien en sus investigaciones con 2.930 res observó que el porcentaje de los que reconocían la distribución aleatoria o semi aleatoria descendía al aumentar la edad.

Green (1991) describe un estudio longitudinal sobre conceptos de aleatoriedad con escolares de 7 a 11 años en el que pide a los niños escribir una sucesión aleatoria de caras y cruces que represente los resultados de lanzar 50 veces una moneda. Identifica tres aspectos básicos en las sucesiones generadas por los niños: la frecuencia relativa, la independencia y la consistencia.

En primer lugar, se preguntó si los alumnos, en promedio, producen aproximadamente el mismo número de caras que de cruces. El estudio probó que son muy exactos al reflejar la equiprobabilidad. Además producen sucesiones cuya primera y última mitad son altamente consistentes; quizás demasiado consistentes para reflejar la variabilidad aleatoria, sin embargo, los aspectos de independencia de ensayos no son captados por los niños, quienes producen series con rachas demasiado cortas de un mismo resultado, respecto a lo que cabe esperar en un proceso aleatorio.

En Green (1983) incluye, como parte de su test sobre intuición probabilística, una pregunta en la cual los niños deben discriminar una sucesión cuyo patrón es aleatorio de otra que no cumple esta condición. Las dos sucesiones propuestas simulan el resultado de lanzar 150 veces una moneda equilibrada. Como resultado descubre que la mayoría de los niños elige precisamente la secuencia no aleatoria y que no mejora la apreciación de la aleatoriedad con la edad. Entre las razones aducidas por los niños y niñas para su decisión encontró las siguientes:

a. Razones correctas:

1. El patrón de la sucesión es demasiado regular para ser aleatorio.
2. Demasiadas rachas o rachas demasiado cortas.

b, Razones incorrectas:

1. El patrón de la sucesión aleatoria es demasiado irregular; no se apreciaba suficientemente la irregularidad de una sucesión aleatoria.
2. Se espera que la frecuencia relativa sea exactamente el 50% de caras y cruces o un valor muy próximo; no se admiten fluctuaciones lógicas en esta proporción, es decir, se aplicaría la heurística de la representatividad (Kahneman y cols., 1 982).
3. Rachas demasiado largas; no se admite la posibilidad de este tipo de rachas en una sucesión aleatoria.

Resultados similares se han obtenido en las investigaciones con sujetos adultos en los que se observa, en general, que no se reconoce suficientemente la irregularidad propia de las sucesiones aleatorias. Respecto a los experimentos aleatorios Konold y cols. (1991) caracterizan las concepciones de los sujetos en la siguientes categorías:

- Sujetos para los que un experimento es aleatorio sólo si los posibles resultados son igualmente probables; si las probabilidades de los sucesos implicados son muy diferentes -como el caso de que llueva un día para el que se predice un 80% de posibilidades de lluvia- no sería considerado aleatorio.
- Aleatoriedad como contrapuesta a la causalidad, o como un tipo especial de causa.
- Aleatoriedad como incertidumbre; existencia de múltiples posibilidades en las mismas condiciones.
- Aleatoriedad como modelo para representar ciertos fenómenos, dependiente de nuestra información sobre el mismo.

IMPLICACIONES SOBRE LA PRÁCTICA EDUCATIVA

A pesar de las dificultades filosóficas y psicológicas descritas, las situaciones aleatorias revisten una gran importancia. El problema de asegurar que una sucesión sea aleatoria sigue teniendo una gran actualidad debido a sus aplicaciones. Los números aleatorios se necesitan hoy para organizar planes de muestreo en la industria y la experimentación médica, sociológica y demográfica. Gracias a los ordenadores, mediante los métodos de simulación se resuelven problemas probabilísticos muy complejos en física, ecología, o gestión, que están basados en la obtención de largas secuencias de resultados aleatorios. De todo ello se deduce la importancia de desarrollar en los alumnos una comprensión adecuada de los rasgos de los fenómenos y secuencias aleatorias.

En los nuevos diseños curriculares se sugiere realizar experimentos de simulación, basados en la obtención de secuencias aleatorias. Por ejemplo, en el diseño curricular del Ministerio de Educación y Ciencia para la enseñanza secundaria obligatoria, en el bloque 5, denominado "Tratamiento del azar" encontramos como concepto a presentar a los alumnos: "Fenómenos aleatorios y terminología para describirlos". Dentro de los procedimientos, se hace referencia a la "utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar" y a la "confección de tablas de frecuencias y gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios". Entre los algoritmos y destrezas a desarrollar se sugieren la "obtención de números aleatorios con diversas técnicas, tales como sorteos, tablas. calculadoras" y la "detección de los errores habituales en la interpretación del azar". Como estrategias generales previstas encontramos el "reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana y en el conocimiento científico", la "formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos" y la "planificación y realización de experiencias sencillas para estudiar el comportamiento de fenómenos de azar". Términos parecidos se emplean respecto a las actitudes que conviene fomentar en los estudiantes. El currículo del MEC no es una excepción, ya que encontramos parecidos términos o expresiones en los diseños curriculares de las comunidades autónomas y en otros países, como Inglaterra o Estados Unidos, que han propuesto reformas recientes sobre el currículo de Matemáticas.

A la vista de la importancia y dificultad del tema, ¿cómo hacer asequible a los alumnos y alumnas los rasgos característicos de estas situaciones? Desde nuestro punto de vista, esto pasa necesariamente por una aproximación gradual, como la que se sugiere en Godino y cols. (1987), en la que se guíe a los alumnos, a partir de sus experiencias con juegos y simulación hacia la formalización progresiva.

Comenzando con materiales manipulativos con propiedades de simetría como dados o monedas, puede pasarse progresivamente al estudio de materiales que no tengan estas propiedades -ruletas con áreas desiguales; chinchetas-; y, posteriomente, al de fenómenos demográficos o sociales. Al final de la enseñanza secundaria puede iniciarse el uso de tablas de números aleatorios para seleccionar muestras; incluso puede iniciarse el análisis de propiedades de los números aleatorios generados mediante una calculadora u ordenador.

La experimentación, registro y análisis de las secuencias producidas en todas estas actividades permitirá integrar el estudio de la probabilidad con el de la estadística. La introducción gradual de los conceptos y notación probabilística servirá para explicar matemáticamente las regularidades observadas en los datos recogidos. Actividades similares se sugieren en Shaughnessy y Arcidiacono (1993) o en el artículo de Shaughnessy incluido este mismo número de la revista. Esperamos que, a partir de estas experiencias, los alumnos adquieran las siguientes características esenciales de los fenómenos aleatorios:

1. En condiciones fijadas de antemano hay más de un resultado posible.
2. Con los conocimientos que posee el sujeto que emite el juicio, el resultado concreto que ocurrirá es impredecible.
3. Hay posibilidad- al menos imaginada- de repetir indefinidamente la observación o producción del fenómeno.
4. Las secuencias de resultados obtenidas en esta repetición carecen de un patrón que el sujeto pueda controlar o predecir.
5. En este aparente desorden, pueden descubrirse una multitud de regularidades globales, comenzando por la estabilización de las frecuencias relativas de cada uno de los resultados posibles. Esta regularidad global es el fundamento que nos permite estudio de estos fenómenos aleatorios mediante el cálculo de probabilidades.

Como argumentan Konold y cols. (1991), de hecho, es preferible ver el término *"alea*toriedad" como una etiqueta a la que van asociados muchos conceptos, como 1os de experimento, suceso, espacio muestral, probabilidad, etc. En este sentido, la palabra aleatoriedad nos remite a una colección de conceptos y procedimientos matemáticos que podemos aplicar en muchas situaciones. Por ello, deberíamos pensar en una orientación que tomamos hacia el fenómeno que calificamos de "aleatorio" más que en una cualidad del mismo. Aplicamos un modelo matemático a la situación, porque nos resulta útil para describirla y comprenderla pero no creemos que la situación sea idéntica al modelo. Decidir cuándo el cálculo de probabilidades es más conveniente o adecuado a la situación que otros modelos matemáticos es una parte del trabajo de modelización que debiera fomentar en nuestros alumnos y alumnas.

Nota: Este trabajo ha sido realizado en el marco del Proyecto PS93-0196 de la DGICYT (MEC, Madrid).

Referencias

AYER, A J. (1974). El Azar. En Kline, M. (Ed.), *Matemáticas en el mundo moderno.* Barcelona: Blume,172-181.

BATANERO, C., ESTEPA, A. y GODINO, J. D. (1992). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.

BENNETT, D. (1993). *The development of the mathematical concept of randomness; educational implications.* Tesis doctoral. New York University. (DAI n. 931 7657).

FALK, R. (1981). The perception of randomness. En *Proceedings of the V PME Conference.* Grenoble, 222-229.

FINE, T. L (1973). *Theories of Probabiliry: An examinarion of foundations.* New York: Academic Press.

FISCHBEIN, E. y GAZIT, A (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics,* 15 (1), 1 -24.

FISCHBEIN, E., SAINATI NELLO, M. y SCIOLIS MARINO, M. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. En *Educational Studies in Mathematics,* 22, 523-249.

GODINO, J.D., BATANERO, C. y CAÑIZARES, M. J. (1987). *Azar y probabilidad Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 14 (3), 325-355.

GREEN, D. R (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3.000 pupils aged 11 -16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the ICOTS* 1 University of Sheffield, 2, 766-783.

GREEN, D. R. (1989). Schools pupils’s understanding of randomness. En R Morris (Ed.), *Studies in Mathematics Education.* Unesco, 7, 27-39.

GREEN, D. R. (1991). *A longitudinal study of pupil’s probabilty concepts.* Universidad de Loughborough.

HARTEN, G. y STEINBRING, H. (1983). Randomness and stochastic independence. On the relationship between intuitive and mathematical definition. En R W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty.* Amsterdam, 363-373.

HOEMANN, H. y ROSS, B. M. (1982). Children's concepts of chance and probability. En Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition.* Springer.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A (1982). J*udgement under uncertainty: heuristics and biases.* Cambridge University Press.

KONOLD, C., LOHMEIER, J., POLLATSEK, A. y WELL, A. (1991). *Novices views on randomness.* Comunicación presentada en el XIII PME Conference.

MATALÓN, B. (1979). Epistemología de las Probabilidades. En J. Piaget (Ed.), *Epistemología de la Matemática.* Buenos Aires: Paidós, 121 -145.

KYBURG, H. (1974). *The logical foundations of statistical inference.* Boston: Reidel.

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1974). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant* Paris: Presses Universitaires de France.

POINCARE, H. (1936). El Azar. Artículo publicado originalmente en lengua inglesa en *Journal of the Atnerican Statistical Association*, 31, 10-30. Recogido en J. Newman (Ed.), *Sigma. El mundo de las Matemáticas,* 3, 68-82.

SCHOLZ, R. W. (1991). Psychological research in probabilistic understanding. En R. Kapadia y M. Borovníck (Eds.), *Chance Encounters: Probability in Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 213-249.

SHAUGHNESSY, J. M. (1992). Research ín Probabílity and Statistics: reflections and directions. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research en mathematics teaching and learning* New York: Mac Millan, 465-494.

SHAUGHNESSY, J.M. y ARCIDIACONO, M. (1 993). *Visual encounters with chance. Math and the Mind's Eye* Volume VIII. The Math Learning Center.

STEINBRING, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching. Aspects of *a* social epistemology of mathematical knowledge. En *Educational Studies in Mathematics* 22, 503-522.

ZABELL, S. L (1992). Randomness and statistical applications. En F. Gordon and S. Gordon (Eds,), *Statistics for the XX1 Century.* The Mathematical Association of America.