ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE BAYES CON APOYO TECNOLÓGICO[1]

Carmen Díaz e Inmaculada de la Fuente

Universidad de Granada, España

mcdiaz@ugr.es, edfuente@ugr.es,

RESUMEN

En esta comunicación presentamos los resultados de una experiencia de enseñanza del teorema de Bayes y sus aplicaciones a 78 alumnos de psicología, apoyada en material para el alumno y subrutinas de cálculo Excel. Los resultados indicaron la consecución de los objetivos didácticos en la mayoría de los alumnos participantes.

INTRODUCCIÓN

El razonamiento sobre probabilidad condicional inversa y su cálculo usando el teorema de Bayes tiene una gran importancia en diagnóstico, evaluación, toma de decisiones y aplicación de la inferencia estadística. Aún así, actualmente hay una tendencia a suprimir o reducir la enseñanza del teorema de Bayes en la educación secundaria y los cursos de análisis de datos a nivel universitario (ver Moore, 1997). Ello es debido a la influencia de las primeras investigaciones en psicología sobre el tema, que resumimos a continuación (ver revisión en Koehler, 1996).

INVESTIGACIONES PREVIAS

Los problemas bayesianos fueron investigados por Tversky y Kahneman (1982) como parte de su trabajo sobre la heurística de representatividad. Los autores denominan *falacia de la tasa base* al hecho de ignorar la probabilidad a priori del suceso en la población en la toma de decisiones en problemas que involucran la probabilidad inversa.

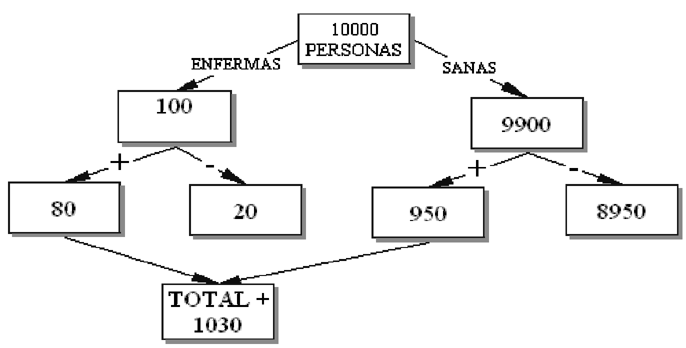
Totohasina (1992) analiza las estrategias intuitivas de los estudiantes de secundaria al enfrentarse a un problema bayesiano, la más frecuente de las cuáles fue cambiar el espacio muestral de referencia y a continuación aplicar la regla de Laplace. Sugiere que el uso de un árbol es el recurso más efectivo para resolver problemas de probabilidad

[1] En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales. ISBN: 84-688-0573-4 . CD ROM

condicional, sobre todo cuando se refiere a un problema diacrónico (dirigido en el tiempo). Sin embargo, los alumnos con frecuencia confunden el papel de condición y condicionado en una probabilidad condicional y por tanto confunden una probabilidad condicional con su inversa (falacia de la condicional transpuesta, descrita en Falk, 1986; Batanero y Sánchez, 2005). Sólo el 25% de los alumnos en su investigación llegó a la respuesta correcta.

Una nueva tendencia en la investigación sugiere que los cálculos con problemas bayesianos son más sencillos cuando la información se da en formato de frecuencias absolutas, en lugar de usar probabilidades, porcentajes o frecuencias relativas (Cosmides y Tooby, 1996; Gigerenzer, 1994; Gigerenzer y Hoffrage, 1995). Siguiendo las ideas anteriores, Martignon y Wassner (2002) sugieren el uso conjunto de diagramas en árbol y frecuencias naturales para enseñar la resolución de estos problemas. El proceso de resolución comenzaría identificando los sucesos a que se refiere la pregunta del problema y asignándoles una notación. A continuación se usaría un esquema similar al de la Figura 1 para representar los datos del problema y como ayuda en su resolución.

Figura 1. Representación mediante árbol y frecuencias de un problema de Bayes



Este diagrama podría representar, por ejemplo, una situación referida al mundo de la medicina, en donde hay una determinada probabilidad de que una persona padezca una cierta enfermedad y que, para diagnosticarla, se realiza una prueba que da positivo en un alto porcentaje de los casos si la persona padece la enfermedad y también en un pequeño porcentaje de los casos si la persona no la padece; se trata de ver, con la ayuda del diagrama, como debe interpretarse el hecho de que la prueba de positivo.

El interés del diagrama es debido a que materializa las particiones sucesivas y recomposiciones del espacio muestral que han de ser identificadas por el estudiante para alcanzar una correcta solución. Creemos, sin embargo, que también puede aplicarse con otro tipo de datos, sin más que sustituir los números enteros y sus operaciones por otras relativas a porcentajes o probabilidades. Por otro lado, nuestro estudio (Díaz y de la Fuente, en prensa) realizado después de una enseñanza tradicional del tema con estudiantes de psicología, no indicó grandes diferencias en la dificultad de los problemas presentados en formato de frecuencias, respecto a los presentados en formato de probabilidad. El análisis cualitativo de las respuestas también mostró que los errores en el proceso van más allá que el pasar por alto las tasas base o la incapacidad de manejar el formato probabilístico.

MÉTODO Y RESULTADOS

La experiencia que presentamos forma parte de un curso breve de introducción a la inferencia bayesiana apoyado en nuevas tecnologías. Los alumnos participantes (n = 78) se dividieron en cuatro pequeños grupos de entre 15 y 20 alumnos cada uno, repitiéndose la experiencia en cada uno de los grupos con la misma profesora. Se dedicaron un total de 3 horas a la enseñanza del Teorema de Bayes, de las cuales las dos primeras se llevaron a cabo en aula tradicional y la tercera en el laboratorio de informática donde los alumnos trabajaban en parejas resolviendo problemas con ayuda de subprogramas Excel preparados para la experiencia. Durante la sesión en el aula tradicional se comenzó con un ejemplo de pruebas médicas (sensibilidad y especificidad de una prueba de narcolepsia). A continuación se introdujeron los conceptos de probabilidad inicial, final y verosimilitud, presentando el teorema como recurso que permite transformar las probabilidades iniciales en finales vía las verosimilitudes y nos permite aprender de la experiencia. Se presentaron otros ejemplos relativos a alarmas de incendio, pruebas de alcoholemia, exámenes, defectos de fabricación y predicción del género en ecografía.

El teorema de Bayes fue presentado como una fórmula que permite aprender de la experiencia al transformar las probabilidades iniciales en finales por medio de la verosimilitud. Supuesto que A_i representa un conjunto de posibles sucesos y D los datos, el teorema se presentó con la formulación siguiente

(1) $P(A_i/D) = K \, x \, P(A_i) \, x \, P(D/A_i)$, donde

$$K = \frac{1}{P(A_1)\times P(D/A_1)+P(A_2)\times P(D/A_2)+\ldots+P(A_n)\times P(D/A_n)}$$

La expresión (1) lleva fácilmente a los estudiantes a comprender la organización de los cálculos en una tabla Bayes como la siguiente.

Tabla 1. Organización del cálculo de la probabilidad final

Sucesos	Probabilidad inicial	Verosimilitud	Producto	Probabilidad final
A_i	$P(A_i)$	$P(B/A_i)$	$P(A_i)xP(B/A_i)$	$P(A_i)xP(B/A_i)/S$
A_2	$P(A_2)$	$P(B/A_2)$	$P(A_2)xP(B/A_2)$	$P(A_2)xP(B/A_2)/S$
...				
A_n	$P(A_n)$	$P(B/A_n)$	$P(A_n)xP(B/A_n)$	$P(A_n)xP(B/A_n)/S$
Suma	1		S	1

En la primera sesión de laboratorio, se introduce el Programa *Bayes* que calcula las probabilidades finales $P(A_i/D)$ de un conjunto de sucesos A_i, dadas sus probabilidades iniciales $P(A_i)$ y las verosimilitudes $P(D/A_i)$ de unos ciertos datos D, dador los sucesos A_i para un máximo de 8 sucesos. Proporciona el producto de las probabilidades iniciales por las verosimilitudes y las probabilidades finales (Figura 2) mediante la fórmula de Bayes. Los estudiantes trabajaron en el laboratorio para resolver algunos problemas realizando los cálculos con ayuda del programa.

Figura 2. Programa Bayes

CALCULO DE PROBABILIDADES FINALESI MEDIANTE TEOREMA DE BAYES

	----DATOS----			
Sucesos	Probabilidad inicial	Verosimilitud	Producto	Probabilidad final
A1	0,1	0,5	0,05	0,1220
A2	0,9	0,4	0,36	0,8780
A3			0	0,0000
A4			0	0,0000
A5			0	0,0000
A6			0	0,0000
A7			0	0,0000
A8			0	0,0000
	1		0,41	1,0000

Figura 3. Cuestionario

1. ¿Cuál es la diferencia entre la probabilidad inicial y final de un suceso?

2. Si E es un suceso y D es un dato, ¿qué significa P(D/E)?

3. ¿Qué permite calcular el teorema de Bayes?

4. El valor de la probabilidad P(D/E) ¿ puede ser aproximadamente igual al de la probabilidad P(E/D)?

5. En una ciudad 1 de cada 100 personas estudia inglés. 90 de cada 100 personas que estudia inglés ha viajado al extranjero y también 10 de cada 100 personas que no estudian inglés. La probabilidad de que al tomar una persona al azar, de entre todas las que han viajado al extranjero, haya estudiado inglés seria:

6. ¿Cómo calculamos la probabilidad final mediante el teorema de Bayes?

7. Imagina que tienes una muestra de 100.000 personas elegidas al azar. Imagina que 5 de cada 1000 están deprimidas. Supón que una prueba de depresión da positivo en 99 de cada 100 personas enfermas y también en 3 de cada 100 personas sanas. Si D significa depresión y + significa prueba positiva, entonces:
P(D)=; P(D/+)=; P(S/+)=

8. Una de las siguientes fórmulas del Teorema de Bayes es falsa, ¿Cuál de ellas es falsa? (Se daban varias fórmulas)

La evaluación se llevó a cabo mediante dos instrumentos; un primer cuestionario (figura 3) formado por 8 ítems que evalua los conocimientos conceptuales relacionados con el teorema y un segundo cuestionario (figura 4) con dos problemas abiertos de aplicación que los alumnos resolvieron por escrito. El alumno podía aportar sus soluciones, comentarios y esquemas, tales como diagramas en árbol.

Figura 4. Problemas abiertos

1. Una fábrica de enlatados produce 5000 envases diarios. La máquina A produce 3000 de estos envases, de los que el 2% son defectuosos y la máquina B produce los 2000 restantes de los que se sabe que el 4% son defectuosos.

a. Organiza los cálculos utilizando una tabla Bayes
b. Si seleccionamos al azar un envase defectuoso, calcula la probabilidad de haber sido fabricado por A. Calcula la probabilidad de que haya sido fabricado por B.

2. Un edificio está equipado de un sistema de alarma contra incendios. De existir peligro la alarma se activa en el 99 por ciento de las veces. También puede producirse una falsa alarma con probabilidad 0,005 en el caso de no haber incendio. Si la probabilidad de incendio es 0,002, responde a las siguientes preguntas:

a. Organiza los cálculos utilizando una tabla Bayes
b. Si hay una alarma, ¿Cuál es la probabilidad de que sea infundada? ¿Y de que sea cierta?

Como se observa en la Tabla 2, la mayor parte de los objetivos de aprendizaje evaluados por el cuestionario se lograron en un porcentaje muy alto de alumnos aunque, como todo proceso didáctico, no estuvo libre de dificultades. Por ejemplo, los alumnos encontraron muy difícil emparejar la notación con los datos dados en el enunciado de un problema en una tarea, cuando los datos no estaban dados directamente en el enunciado, sino que se precisaba aplicar algún proceso lógico, por ejemplo, la complementación (ítem 7). Se observó también un porcentaje importante de dificultades al discriminar una probabilidad inicial y final (probabilidad condicional y su transpuesta) (ítem 4).

Tabla 2. Objetivos de los ítems y porcentaje de alumnos que los responden (n=78)

Ítem	Conocimiento evaluado	Porcentaje de aciertos
1	Diferencia entre probabilidad inicial y final	83.3
2	Notación para la verosimilitud	66.7
3	Utilidad del Teorema de Bayes	93,6
4	Discriminación entre P/A/B) y P(B/A)	35.9
5	Aplicar la notación correcta para los datos de un problema	82.1
6	Conocimiento del algoritmo del teorema de Bayes	85.9
7	Identificar los datos de un problema	23.1
8	Diferentes formulaciones del teorema de Bayes	93.4

Respecto a la resolución de los dos problemas, el porcentaje de éxito fue muy alto, bastante mayor que la que se informa en investigaciones previas, posiblemente por la ayuda de la herramienta informática y porque la disposición en forma de tabla ayudó a los estudiantes a identificar los datos en los problemas propuestos.

Tabla 3. Porcentaje de estudiantes según completitud de respuestas a los problemas

	Problema 1	Problema 2
Solución correcta completa	83,7	83,4
Identificación correcta de datos (probabilidad inicial y verosimilitud) y algoritmo correcto con fallo en interpretación	1,2	7,9
Error al identificar parte o todos los datos	11,5	4,3
Cálculo erróneo	3,6	4,4

CONCLUSIONES

Los resultados indican que la mayoría de estudiantes adquirió una comprensión intuitiva del teorema de Bayes con pocas horas de trabajo, fueron capaces de identificar los datos en los problemas abiertos, organizar los datos en una tabla, realizar los cálculos e interpretarlos en el contexto de los problemas. La tasa de éxito fue mayor que la informada en otras investigaciones, incluso las basadas en formatos de frecuencias. Más aún, la tabla es fácil de generalizar a mayor número de sucesos o a experimentos múltiples. Por otro lado, incluso cuando el formato de frecuencias pueda ayudar a los estudiantes a resolver algunos problemas, es difícil de generalizar a situaciones más complejas. Concluimos la necesidad de replicar la investigación y mejorar el diseño de la enseñanza, con objeto de facilitar a los estudiantes la adquisición de este importante teorema.

Nota: Este trabajo es parte del Proyecto SEJ2004-0789 y Beca FPU: AP2003-5130.

REFERENCIAS

Batanero, C., y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability? En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning,* (pp. 260-289), Dordrecht: Kluwer.

Díaz, C. y de la Fuente (En prensa). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes españoles de psicología. *Educación Matemática.*

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 – 297). University of Victoria.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). In G. Wright & P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129 – 161). Chichester: Wiley.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102,* 684 – 704.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15(1), 49-95.

Koehler, J. J. (1996). The base rate fallacy reconsidered: Descriptive, normative, and methodological challenges. *Behavior and Brain Sciences, 19*, 1-54.

Moore, D. S. (1997). Bayes for beginners? Some reason to hesitate. *The American Statistician*, 51(3), 254-261.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO,* 5, 37-55.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Tversky, A, y Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. En D. Kahneman P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* pp. 153-160). New York: Cambridge University Press.