RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN ESTUDIANTES CON PREPARACIÓN MATEMÁTICA AVANZADA

Rafael Roa

Tesis Doctoral

Directores: Dra. Carmen Batanero Bernabeu

Dr. Juan Díaz Godino

GRANADA, 2000

Depósito Legal: GR-1367/2000

ISBN: 84 - 920554 – 7 – 2
Imprime y edita: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada
Impreso en España

RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN ESTUDIANTES CON PREPARACIÓN MATEMÁTICA AVANZADA

Tesis Doctoral

MEMORIA realizada bajo la dirección de la Dra Carmen Batanero Bernabeu y del Dr. Juan Díaz Godino que presenta el licenciado en Ciencias Matemáticas D. **Rafael Roa Guzmán** para optar al grado de Doctor

Fdo: Rafael Roa Guzmán

Vº Bº, los directores:

Dra Carmen Batanero Bernabeu   Dr. Juan Díaz Godino

AGRADECIMIENTOS:

Expreso mi sincero agradecimiento a los directores de esta Tesis, Dra Carmen Batanero Bernabeu y Dr. Juan Díaz Godino, por su permanente apoyo y estrecha colaboración, así como su valiosa contribución científica a este trabajo.

Asimismo, agradezco la colaboración de los estudiantes que han cumplimentado los cuestionarios escritos y participaron en las entrevistas, que constituyen el núcleo experimental de esta investigación.

RECONOCIMIENTO:

Esta Tesis Doctoral ha sido realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en el marco del Proyecto de Investigación PB96-1411, subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia DGES e Investigación Científica, y dentro del Grupo de Investigación FQM-0126 "Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática", reconocido y subvencionado por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

DEDICATORIA:

A mis padres
A Mari Cruz
A Maria José y Fernando

RESUMEN:

En esta investigación se analizan las estrategias de resolución de una muestra de problemas combinatorios elementales, así como las dificultades y errores por parte de estudiantes de últimos cursos de la licenciatura de Matemáticas. El estudio se realiza mediante cuestionarios escritos aplicados en tres fases a un total de 147 estudiantes y entrevistas individuales a una muestra reducida. La caracterización de los conocimientos puestos en juego por los estudiantes se ha realizado mediante el análisis de las respuestas a los cuestionarios y entrevistas usando metodos cuantitativos y cualitativos.

La investigación muestra que, a pesar del carácter elemental de los problemas combinatorios seleccionados, los estudiantes tienen dificultades importantes para resolverlos debido a la estructura compleja de los procesos de resolución requeridos, puesta de manifiesto mediante un análisis de tipo semiótico, y a deficiencias en la enseñanza de la combinatoria que enfatiza el estudio de las fórmulas de las operaciones combinatorias en detrimento de componentes más primarios del razonamiento combinatorio.

INDICE

INTRODUCCIÓN GENERAL

Esta tesis doctoral forma parte de un proyecto de investigación que se viene desarrollando en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada desde 1990 sobre distintos aspectos de la didáctica de la combinatoria elemental. La idea general impulsora de este proyecto es tratar de caracterizar y explicar las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas elementales de combinatoria para elaborar propuestas curriculares fundamentadas sobre el tema. Las dificultades de la combinatoria son bien conocidas por los profesores que tratan de enseñar el tema en el nivel de secundaria y su investigación ha recibido escasa atención por parte de la comunidad de investigadores en educación matemática.

Entre los resultados de dicho proyecto, que nos sirven de punto de partida para nuestra investigación, están el texto *Razonamiento combinatorio* de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) y la tesis doctoral de Navarro-Pelayo (1994). El objetivo principal de la investigación realizada por Navarro-Pelayo se centró en caracterizar las estrategias de solución, errores y dificultades, ante una muestra de problemas elementales de combinatoria, de dos muestras de estudiantes de secundaria: una muestra de 352 alumnos con instrucción previa en el tema de combinatoria y otra de 368 sin instrucción previa. Como variables explicativas de los elevados índices de dificultad se tuvieron en cuenta, además de otras variables descritas en investigaciones previas, como el tipo de operación combinatoria, el contexto del enunciado de los problemas y el tamaño de los parámetros, una variable que designó como "modelo combinatorio implícito" (MCI).

Esta variable, descrita a nivel teórico por Dubois (1984), permite una clasificación de los problemas de recuento simples combinatorios en tres tipos básicos, y se basa en la identificación de esquemas de representación implícitos en los enunciados de los problemas. Los tipos identificados por Dubois son los siguientes:

a) Selección de una muestra a partir de un conjunto de objetos.
b) Colocación de objetos en casillas (cajas, celdas o urnas).
c) Partición en subconjuntos de un conjunto de objetos.

La distinción entre estos modelos es relevante desde el punto de vista matemático, ya que el tipo de objetos y representaciones que intervienen en cada modelo es distinto (muestreo, correspondencias, particiones de conjuntos). Una de las hipótesis fundamentales investigada por Navarro-Pelayo se centró precisamente en estudiar la "relevancia didáctica" de esta variable, esto es, caracterizar el efecto del modelo combinatorio implícito en el enunciado sobre las estrategias de solución, errores y dificultades de los estudiantes de secundaria. Con una metodología rigurosa se mostró el efecto significativo del MCI sobre las variables dependientes consideradas concluyendo que, dado que en los textos usados habitualmente en secundaria, el modelo combinatorio no se considera de manera explícita, ésta puede ser una causa importante del elevado fracaso de los estudiantes en esta clase de problemas.

El problema sobre el que hemos centrado nuestra investigación es una prolongación del abordado por Navarro-Pelayo. Dado que los problemas combinatorios usados por dicha autora para preparar su prueba de evaluación resultaron difíciles para los estudiantes de secundaria (el porcentaje medio de éxito fue del 40% en alumnos con instrucción y del 21% sin instrucción, siendo en algunos items menor del 10%), parece natural plantearse las siguientes preguntas, como continuación de su investigación:

- ¿podemos deducir que el tema de combinatoria no se debe abordar en el nivel de secundaria?,
- ¿habría que esperar a que los alumnos tuvieran un mayor desarrollo cognitivo, y una mayor preparación matemática para conseguir incrementar los porcentajes de éxito?,

- ¿bastaría revisar los procedimientos instruccionales de modo que se tuviera en cuenta los modelos combinatorios?.

Otros aspectos, sobre los que consideramos necesario hacer nuevas investigaciones, se refieren a comprobar el papel desempeñado por la variable MCI en sujetos de mayor edad y preparación matemática, así como indagar otros factores explicativos de los índices de dificultad, estrategias y tipos errores en la resolución de los problemas combinatorios, en definitiva, de los razonamientos combinatorios de los sujetos seleccionados.

Para responder a estas cuestiones hemos fijado nuestra atención en la población de estudiantes de penúltimo y último curso de la licenciatura de matemáticas. El motivo de hacer esta elección está en que, en algunas pruebas piloto, el cuestionario usado por Navarro-Pelayo se aplicó a muestras de estos estudiantes, principalmente para evaluar la legibilidad de los enunciados, y se obtuvieron resultados sorprendentes: algunos problemas combinatorios simples, que son habituales en los textos de primer curso de bachillerato (alumnos de 14-15 años), no eran resueltos por estudiantes de 5º curso de la licenciatura de matemáticas. Nuestra investigación continúa también la línea iniciada por Vallecillos (p. e., Vallecillos, 1994, 1996, 1999), quien fija su atención en los errores y dificultades de los estudiantes universitarios, incluyendo también estudiantes con preparación matemática avanzada, en relación con el contraste estadístico de hipótesis.

Por otro lado, algunos sujetos, tanto entre los alumnos universitarios como entre los chicos de 14-15 años que no habían estudiado combinatoria, en la investigación de Navarro-Pelayo, mostraron una gran facilidad para resolver los problemas propuestos, llegando en algunos casos a hallar la solución correcta de 12 ó 13 entre los 13 problemas propuestos, sin el recurso de las fórmulas combinatorias. En la investigación citada no se estudiaron con detalle los distintos tipos de razonamientos empleados por los alumnos, ni la posible diferencia de razonamiento entre los estudiantes con gran facilidad y gran dificultad en la resolución de los problemas. Este conocimiento podría ser útil para la planificación de la enseñanza de la combinatoria.

Estos hechos, como hemos dicho, para nosotros altamente sorprendentes, necesitaban ser investigados con profundidad, ya que podrían arrojar luz al problema general en el que estamos interesados. En consecuencia, los objetivos de nuestra investigación los centramos en los siguientes:

O1: Caracterizar las dificultades y errores en la resolución de una muestra de problemas combinatorios elementales (simples y compuestos) en estudiantes con una intensa preparación matemática previa (estudiantes de 4º y 5º curso de la licenciatura de matemáticas)

O2: Estudiar el efecto sobre los índices de dificultad de los problemas de diversas variables de tarea (esquema combinatorio, tipo de operación combinatoria, tamaño de la solución).

O3: Analizar la comprensión que los alumnos muestran del enunciado del problema, los métodos generales y estrategias específicas de solución y relacionarlos con los índices de dificultad de los problemas y las características de los mismos.

O4: Indagar la influencia de nuevos factores explicativos (principalmente de tipo semiótico) sobre las estrategias errores y dificultades en la resolución de problemas combinatorios.

La metodología de investigación empleada ha consistido básicamente en la aplicación de cuestionarios escritos, en la realización de entrevistas clínicas y el análisis de contenido de las respuestas de los estudiantes. La investigación ha comprendido varias fases. Una primera, que tiene la consideración de fase piloto y con un carácter exploratorio, ha consistido en la aplicación del cuestionario usado por Navarro-Pelayo (Cuestionario A, Anexo 1) a una muestra de 27 estudiantes de 5º curso de la licenciatura de matemáticas (aplicada en Marzo de 1994). Tras el análisis de las respuestas a este cuestionario se procedió a su revisión, sustituyendo dos problemas simples que tuvieron un índice de dificultad muy bajo por otros dos compuestos. Esta segunda versión (Cuestionario B, Anexo 2) se aplicó, en la segunda fase, a una muestra de 29 estudiantes de la misma población (Marzo 1995).

La tercera fase consistió en la realización de un análisis a priori de dos tipos generales de razonamiento que pueden ser aplicados para resolver los problemas del cuestionario definitivo, lo que permitirá formular hipótesis específicas para la 4ª y 5ª fase y servirá de pauta para el análisis de los razonamientos efectivamente producidos por los estudiantes seleccionados para el estudio de casos.

La 4ª fase, que tiene un carácter más confirmatorio, comprende la aplicación del cuestionario definitivo a una muestra de 91 estudiantes (29 de 4º curso y 62 de 5º), realizándose estimaciones del efecto de las diferentes variables de tarea sobre la dificultad de los problemas, así como la caracterización de los tipos de interpretación de los enunciados y las estrategias de solución.

Finalmente, se han seleccionado cuatro estudiantes para realizar un estudio de casos centrado en el análisis de los razonamientos dados por estos estudiantes en la solución de los problemas, y de las respuestas dadas a un guión de entrevista semiestructurada sobre sus conocimientos previos y los razonamiento manifestados.

La Memoria ha sido organizada de la siguiente manera. En el capítulo 1 describimos con más amplitud los antecedentes, el problema de investigación, el marco conceptual y la metodología de la investigación. El capítulo 2 contiene la descripción de las dos versiones del cuestionario utilizado, las muestras de estudiantes, los resultados de las muestras pilotos empleadas y el análisis a priori de la solución de los problemas, lo que permite caracterizar los significados institucionales locales de la combinatoria elemental efectivamente implementados en el diseño del cuestionario definitivo. El capítulo 3 describe los resultados de la 4ª fase de la investigación: aplicación del cuestionario a la muestra definitiva, tabulación e interpretación de los resultados cuantitativos. En el capítulo 4 realizamos el estudio pormenorizado de casos, analizando en profundidad los procesos de solución de los problemas incluidos en el cuestionario por cuatro estudiantes, junto con el análisis de las respuestas dadas en entrevistas individuales. Finalizamos la tesis con una última sección de conclusiones generales e implicaciones, la bibliografía y los anexos correspondientes.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

La combinatoria constituye uno de los núcleos centrales de la matemática discreta, o conjunto de conceptos y métodos matemáticos que estudia los problemas en los que intervienen conjuntos discretos y funciones definidas sobre los mismos. En Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) se clasifican los diversos tipos de problemas combinatorios como de existencia, recuento, enumeración y optimización, justificándose el papel relevante que la combinatoria desempeña dentro de la matemática discreta. Podemos decir que en la actualidad la combinatoria es un amplio campo de las matemáticas con investigación activa y numerosas aplicaciones teóricas y prácticas en campos como la geología, química, gestión empresarial, informática e ingeniería (Grimaldi, 1989). Los problemas combinatorios y las técnicas para su resolución tienen y han tenido también profundas implicaciones en el desarrollo de otras ramas de las matemáticas como la probabilidad, teoría de números, teoría de autómatas e inteligencia artificial, investigación operativa, geometría y topología combinatorias. Además, Heitele (1975) la incluye entre las ideas estocásticas fundamentales.

Razonamiento combinatorio y pensamiento formal

Pero, aparte de este interés matemático de los problemas combinatorios, que puede justificar su consideración como tópico curricular, debemos tener en cuenta las reflexiones e investigaciones realizadas desde el campo de la psicología sobre la influencia del razonamiento combinatorio en el desarrollo del pensamiento formal.

Los esquemas cognitivos combinatorios son considerados por Piaget como un componente esencial del pensamiento formal, con una importancia comparable a los esquemas de la proporcionalidad y de la correlación, los cuales emergen simultáneamente en los sujetos a las edades de 12 a 13 años. Según Inhelder y Piaget (1955) el razonamiento hipotético deductivo opera por medio de las operaciones combinatorias que se aplican sobre un conjunto de posibilidades que deben examinarse y enumerarse hasta llegar a una conclusión. Alcanzado el periodo de las operaciones formales los adolescentes descubren espontáneamente procedimientos sistemáticos de enumeración y recuento combinatorios, por lo que serían capaces de resolver problemas combinatorios sencillos sin ayuda de la instrucción.

Por su parte, Fischbein, en el prólogo del libro de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994) afirma que, “El Análisis Combinatorio, con sus conceptos y métodos no representa, por tanto, solamente un dominio definido de la matemática. Expresa, como he dicho, un esquema operacional, (en la terminología Piagetiana), ¡un prerrequesito estructural importante para la dinámica y potencia creativa del razonamiento lógico en general!”.

Este tipo de juicios sobre la combinatoria y otras razones, como el carácter elemental de los prerrequisitos matemáticos necesarios para resolver los problemas combinatorios elementales, han llevado a su inclusión dentro de los curriculos de matemáticas de los niveles de secundaria, basándose también en propuestas curriculares como las realizadas por Glayman y Varga (1975), Engel (1973), Engel, Varga y Walser (1976), que han apoyado la enseñanza de la combinatoria y diseñado actividades, juegos y materiales para llevar a cabo esta enseñanza.

Nuestra opinión, sin embargo, es menos optimista con relación al desarrollo de las capacidades combinatorias de los sujetos en forma espontánea. Sin dudar de la relevancia de los esquemas combinatorios en el razonamiento lógico en general, estamos de acuerdo con Fischbein en tomar como tema de indagación la determinación de las edades y circunstancias en las cuales los sujetos adquieren los esquemas combinatorios, así como las posibilidades y estrategias de intervención didáctica pertinentes.

El mismo Fischbein (1975) mostró que la capacidad de resolver problemas combinatorios no siempre se alcanza en el nivel de las operaciones formales cuando los sujetos no reciben enseñanza sobre tales procesos. Asimismo, otros autores han sugerido que la edad media de acceso al estadio de pensamiento formal es sustancialmente diferente al indicado por Piaget e Inhelder (1951), y que incluso un número importante de sujetos no alcanzan nunca dicho estadio. Incluso Piaget cambió su primera concepción sobre el desarrollo del pensamiento formal y amplió hasta la edad de 15-20 años para dicho logro, sugiriendo además la influencia crucial del entorno y de las capacidades y especialización profesional del sujeto en la construcción de la estructura de las operaciones formales. El hecho es que numerosas investigaciones muestran que con frecuencia los sujetos adultos presentan sesgos en su razonamiento probabilístico, que son consecuencia de un razonamiento combinatorio deficiente.

Todas estas consideraciones nos han llevado a elegir la investigación sobre el razonamiento combinatorio de alumnos universitarios como tema de nuestro trabajo. En este Capítulo presentamos los fundamentos del estudio que incluyen los antecedentes de la investigación, el marco teórico y la descripción de la metodología que hemos utilizado. En las siguientes secciones se describen cada uno de estos aspectos.

1.2. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En esta sección haremos un resumen de los trabajos realizados sobre el tema del razonamiento combinatorio, que no han sido tan numerosos como los que encontramos con relación a otras ramas de la matemática. Entre los estudios en este campo tenemos que destacar los de Piaget, que analiza el desarrollo cognitivo de la capacidad combinatoria, siguiendo su esquema de etapas, así como el papel de los esquemas combinatorios en el desarrollo formal. Fischbein por su parte analiza el efecto de la instrucción sobre las intuiciones combinatorias de los niños y adolescentes, organizando para ello experimentos de enseñanza. Las diferencias en los enfoques teóricos de estos dos autores y en su planteamiento experimental se describe en Godino, Batanero y Cañizares (1987) y Cañizares (1997).

También queremos destacar algunas aportaciones en lo que se refiere al estudio de dificultades y errores en la resolución de problemas combinatorios y de las estrategias más utilizadas a la hora de abordar este tipo de problemas llevados a cabo por Navarro-Pelayo (1991, 1994) en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

1.2.1. Investigaciones de Piaget sobre desarrollo cognitivo

Piaget e Inhelder (1951) estudian la influencia que tienen los esquemas combinatorios en la formación de los conceptos de azar y probabilidad. Establecen una relación entre razonamiento combinatorio y probabilístico y lo justifican en el hecho de que una escasa capacidad de razonamiento combinatorio reduce notablemente la aplicación del concepto de probabilidad, en el sentido clásico de Laplace, a casos muy sencillos o de fácil enumeración.

Relacionan el concepto de permutaciones que se estudia en combinatoria con el concepto de mezcla aleatoria que fundamenta la idea de azar en el niño y, de la misma manera, relacionan la predicción de resultados al realizar múltiples veces un experimento aleatorio con la construcción de las combinaciones. Para valorar sus investigaciones hay que tener en cuenta que, para Piaget el azar se produce cuando una serie de causas independientes operan simultáneamente dándose un solo resultado que es imprevisible. Para poder comprender el azar es preciso enumerar todas las posibilidades que podrían haber ocurrido, y al comparar este conjunto de posibilidades teóricas con el conjunto más acotado de posibilidades de interés, es cuando surge la idea de probabilidad como cociente de estas dos cantidades. Por tanto, en la comprensión de la probabilidad se precisan la idea de causa y efecto, el razonamiento proporcional y el combinatorio, según Piaget.

Inhelder y Piaget (1955) consideran la capacidad combinatoria como un componente básico del razonamiento formal en cuanto constituye un recurso para la elaboración de la lógica proposicional en los adolescentes.

Piaget e Inhelder(1951) describen el desarrollo psicogenético de las operaciones combinatorias en los distintos estadios de desarrollo a partir de sus observaciones y entrevistas a niños, proponiéndoles tareas combinatorias con materiales concretos. Sus experimentos han probado que el niño de preescolar sólo puede hacer algunas combinaciones, permutaciones y variaciones de una manera empírica, y no intentan encontrar un método de realizar un inventario exhaustivo. Por ejemplo, puede formar parejas de objetos o permutar objetos entre sí, pero nunca de una forma completa y siempre con pocos elementos.

Durante el período de las operaciones concretas, los niños buscan modos de realizar inventarios de todas las permutaciones, variaciones y combinaciones posibles en un conjunto dado con un número pequeño de elementos, y llegan a procedimientos rudimentarios de cálculo mediante ensayo y error. Por ejemplo, son capaces de encontrar todas las permutaciones de 3 objetos o todas las parejas posibles a partir de un número pequeño de objetos, mediante ensayo y error, sin seguir un método sistemático.

Piaget e Inhelder afirman que, durante la etapa de las operaciones formales, el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos para realizar inventarios de todas las permutaciones posibles, variaciones y combinaciones de un conjunto dado de elementos. A continuación describimos con más detalles estas etapas para cada una de las operaciones combinatorias.

Combinaciones

En el estadio I, hasta los 7 años de edad aproximadamente, el niño construye las combinaciones por tanteo, de una manera empírica, y no es capaz de establecer un procedimiento sistemático que le lleve a determinar todos los casos posibles.

Incluso en tareas sencillas como la consistente en formar parejas de fichas de diferente color, tomadas de entre tres montones de diferente color, los niños de estas edades seleccionan parejas al azar y no buscan un procedimiento que les permita obtener todas las parejas posibles.

Este hecho se pone aún más de manifiesto en el caso de combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos, formación de parejas de distinto color cuando se dispone de fichas de cuatro colores diferentes, en que no se aprecia ningún procedimiento sistemático como pudiera ser, por ejemplo, dejar fija alguna ficha y mover las restantes.

En el estadio II (8 a 11 años aproximadamente) lo que predomina es la búsqueda de un procedimiento sistemático de formación de parejas y se va desechando lo que era la obtención aislada de parejas. Esa búsqueda pocas veces conduce a resultados satisfactorios y, con demasiada frecuencia, el niño recurre de nuevo a la búsqueda empírica.

En el estadio III (11 a 12 años aproximadamente) los niños comienzan a descubrir con relativo éxito procedimientos sistemáticos de búsqueda. El integrar dos operaciones, seriación y correspondencia, en una sola operación como algo necesario para obtener todas las combinaciones posibles de n elementos tomados de dos en dos es característico del pensamiento formal que es el que corresponde a los niños de estas edades.

Permutaciones

Una característica que es importante tener en cuenta es el gran número de permutaciones que se pueden obtener a partir de un número de elementos relativamente pequeño. Es por ello que Piaget no pretende que el niño sea capaz de obtener todas las permutaciones posibles de un determinado número de objetos y mucho menos pretende que lleguen a la expresión matemática.

Lo que le pide a los niños es que obtengan un procedimiento que les permita obtener todas las permutaciones posibles de un número pequeño de objetos. En este sentido, se les pide a los niños que hagan las permutaciones de 2, 3 y 4 objetos sucesivamente, los objetos con los que manipulan siguen siendo fichas de colores.

En el estadio I los niños no descubren ningún procedimiento para obtener todas las permutaciones, en el estadio II descubren métodos parciales y es en el estadio III cuando hay un descubrimiento progresivo de la ley de formación de las permutaciones pero la comprensión, mas o menos generalizada, no tiene lugar antes de los 15 años.

Esta tardanza, en el tiempo, en lo que se refiere a la comprensión del mecanismo de las permutaciones con respecto a las combinaciones es la aparición de un sistema de referencia móvil y reversible en las permutaciones. La comprensión de las permutaciones es propia de la etapa de las operaciones formales, en cuanto constituye una multiplicidad de cambio de orden.

Variaciones

Piaget considera a las variaciones como la síntesis de las combinaciones y permutaciones. En las variaciones de n elementos tomados de m en m hay un primer paso de obtención de grupos de tamaño m y, a continuación, las posibles reordenaciones dentro de cada uno de ellos.

Los experimentos que realizó Piaget indican que en el estadio I no aparece en los niños procedimiento sistemático alguno, en el estadio II se aprecia un comienzo de sistematización y es en el estadio III cuando se llega a un procedimiento sistemático y a una comprensión de esta operación combinatoria.

Así pues, según Piaget e Inhelder (1951), es en el periodo de las operaciones formales cuando el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos sistemáticos que le permitan la obtención de combinaciones, permutaciones y variaciones de un determinado número de elementos y podríamos, por tanto, decir que es también en este momento en el que tiene lugar la comprensión por parte del niño de las citadas operaciones combinatorias.

1.2.2. Investigaciones de Fischbein sobre el efecto de la instrucción en el razonamiento combinatorio

Fischbein (1975) destaca igualmente la importancia de los contenidos combinatorios y los compara, a nivel de esquema mental, con la proporcionalidad y la correlación y sitúa su aprendizaje a partir de los 12 años aproximadamente.

Analiza los resultados obtenidos por Piaget e Inhelder en el estadio de las operaciones formales y llega a varias conclusiones:

1. El desarrollo de la capacidad combinatoria se realiza de una forma gradual desde los 12 años (combinaciones), pasando por los 13 años (variaciones) para llegar, por último, a los 14 años (permutaciones) pero no se desarrolla completamente en esta etapa.
2. Discrepa con Piaget en lo que se refiere al periodo de tiempo que transcurre entre el aprendizaje de combinaciones y permutaciones por parte del niño.

Fischbein se centró fundamentalmente en el efecto que podría tener la instrucción sobre el desarrollo de la capacidad combinatoria en niños con edades comprendidas entre los 10 y los 15 años, organizando para ello experimentos de enseñanza con ayuda del diagrama en árbol y de materiales manipulativos.

Comparte con Bruner la hipótesis de que una estructura puede manifestarse de una manera enactiva, icónica y simbólica sin cambiar, por ello, las características esenciales de dicha estructura y que el uso de métodos adecuados de representación facilita y acelera el tránsito hacia el estadio siguiente. Entre las representaciones gráficas destaca el diagrama en árbol al que Fischbein considera un modelo generativo en cuanto sugiere y facilita una generalización iterativa (problemas sucesivos con un mayor número de elementos cada vez) y una generalización constructiva (problemas derivados del inicial), siendo estas las dos características esenciales del razonamiento recursivo.

Fischbein (1975) concede, una gran importancia a la intuición como componente de la inteligencia. Las intuiciones son, según Fischbein, procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, en virtud de sus características de inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad y auto-evidencia. La inmediatez significa que este tipo de cognición no precisa una reflexión, surge con frecuencia en forma espontánea. El carácter global se opone al analítico o descomposición en partes. Las intuiciones van más allá de un caso particular, en cierto modo tienen un carácter teórico y por eso sirven para extrapolar o hacer predicciones. Parecen autoevidentes para el sujeto, quien no necesita demostración. Diversas intuiciones de relacionan entre sí, formando estructuras de razonamiento.

Establece varias clasificaciones de las intuiciones, distinguiendo, en primer lugar, entre intuiciones primarias y secundarias.

Las *intuiciones primarias* son adquisiciones cognitivas que se derivan directamente de la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Por el contrario, las *intuiciones secundarias* consisten en adquisiciones que tienen todas las características de las intuiciones, pero que son formadas por la educación científica, principalmente en la escuela. Una intuición secundaria no se reduce a una simple fórmula aceptada o utilizada automáticamente; se transforma en convicción, en creencia, en un sentimiento de evidencia. Pero para convertir una información en una intuición no es suficiente una simple explicación teórica, sino que el alumno ha de utilizarla en sus propias acciones y predicciones a lo largo de gran parte de su desarrollo intelectual.

Fischbein y colaboradores han desarrollado diversas experiencias destinadas a estudiar el papel de la instrucción, basada fundamentalmente en el uso del diagrama en árbol, en la adquisición de esquemas mentales característicos del razonamiento combinatorio. En este sentido, realiza dos afirmaciones que son de indudable interés didáctico:

1. En lo que se refiere a la instrucción, afirma que ésta es necesaria pues las técnicas combinatorias no las adquiere el niño espontáneamente ni siquiera en el periodo de las operaciones formales.
2. Ya en el periodo de las operaciones concretas se puede fomentar la adquisición de técnicas combinatorias que, a la vez, van a ayudar a la aparición de intuiciones secundarias en el niño.

Para nuestro trabajo, nos parecen particularmente interesantes las investigaciones de Fischbein y colaboradores que resumimos a continuación.

Investigación de Fischbein, Pampu y Minzat (1970)

Los autores estudian el aprendizaje de niños entre 10 y 15 años de conceptos combinatorios. Primeramente pedían a los niños que estimasen el número de permutaciones de un grupo de elementos, observando que se tiende a estimar un número menor que el correcto, aunque las estimaciones mejoran con la edad. Aparentemente los niños daban las respuestas a ciegas sin seguir ningún método para estimar el número de permutaciones de n elementos.

En su experimento de enseñanza se partía de las variaciones con repetición de dos letras en grupos de tres y cuatro elementos, con ayuda del diagrama en árbol. Los alumnos aprendieron la construcción del diagrama, aunque fueron pocos los que descubrieron pos sí solos las fórmulas de las variaciones de 3 y 4 elementos. Resultados similares se obtuvieron al tratar de enseñar la construcción de las permutaciones.

Aunque se observó una mejoría con la edad, los resultados no fueron tan prometedores como los esperados. Los autores concluyen que no se conocen suficientemente los mecanismos del razonamiento combinatorio. Muchos sujetos no son capaces de resolver problemas combinatorios aunque conocen las operaciones aritméticas requeridas. En opinión de Fischbein y sus colaboradores, la resolución de problemas combinatorios requiere un tipo de razonamiento para el que no hemos sido suficientemente preparados.

Investigación de Fischbein y Gazit (1988)

En este trabajo, los autores estudian el papel de la instrucción en el desarrollo de las capacidades combinatorias en niños de 11 a 14 años. Variables a tener en cuenta fueron el tipo de operación combinatoria, la edad de los niños y la naturaleza, abstracta o concreta, de los elementos que se consideran en el problema.

Consideran que el primer concepto combinatorio que se debe estudiar, cuando se emplea el diagrama en árbol, es el de variaciones con repetición y a continuación el de permutaciones, variaciones y combinaciones. La tarea propuesta a los niños consistía en: dibujar el diagrama, contar grupos de elementos y obtener la fórmula. La justificación de su enseñanza la centraban en el hecho de que sus anteriores investigaciones no confirmaban en ningún momento que las permutaciones fueran la operación combinatoria más fácil de comprender de manera intuitiva, y en que el diagrama de árbol de las permutaciones tiene una serie de restricciones de las que carece el de las variaciones con repetición. La obtención de la fórmula y la generalización es mucho más sencilla en un diagrama de árbol en el que todas las ramas tienen el mismo número de subramas.

Piensan estos autores que es importante el manejo de diagramas de árbol porque le dan a los conceptos un significado intuitivo que, por una parte, ayuda a su comprensión algebraica y, por otra, le va a dar un sentido a la fórmula resolutoria. Sin embargo, pudieron comprobar que, en el pretest, la estrategia más utilizada fue la enumeración y, en el post-test, lo fue la fórmula para las permutaciones y variaciones y la enumeración para las combinaciones. El diagrama en árbol fue, en general, poco utilizado.

Los errores más significativos que se observaron al resolver los problemas propuestos en esta investigación fueron los siguientes:

1) Asignar indistintamente la fórmula de las variaciones y de las combinaciones a uno u otro concepto. Denominan a este error, error de orden, porque los sujetos no son capaces de identificar si el orden es o no relevante para la resolución del problema;

2) Desarrollo incorrecto de la formula.

En cuanto a la dificultad de las operaciones combinatorias se pudo comprobar que, antes de la instrucción, la mayor dificultad correspondía a las permutaciones y variaciones con repetición, seguidas de variaciones sin repetición y combinaciones.

Manifiestan, por último, que la edad y la instrucción tienen un efecto positivo en la adquisición de los conceptos combinatorios y que a los niños les resulta más fácil trabajar con dígitos que con objetos (banderas) y personas(comités).

Otras investigaciones de Fischbein

Posteriormente Fischbein ha seguido interesado en el razonamiento combinatorio. En Fischbein y cols. (1991) estudia los factores que afectan a los juicios probabilísticos en niños de 9 a 14 años, así como la evolución con la edad de los sesgos en el razonamiento probabilístico. El objetivo principal de esta investigación era la preparación de materiales curriculares para la enseñanza de la probabilidad.

Algunos de los ítems utilizados, tomados de Lecoutre (1985, 1992) y Lecoutre y Durand (1988) estudian el sesgo de equiprobabilidad, por el cual los niños piensan que todos los sucesos aleatorios asociados a un mismo experimento tienen la misma probabilidad, incluso cuando el número de casos favorables a cada suceso sea diferente. Este sesgo está directamente relacionado con la falta de capacidad de enumeración sistemática de los sujetos, así como con el error de orden anteriormente descrito.

Los resultados muestran la dificultad que tienen los niños para considerar el orden cuando se lanzan dos dados o dos monedas y para enumerar el espacio muestral asociado a un experimento, aunque se obtienen mejores resultados en problemas cuyo enunciado se da de forma generalizada (... una puntuación igual en ambos dados...) que en aquellos con enunciado específico (... un cuatro en cada dado...).

En su trabajo con Grossman (Fischbein y Grossman, 1997a y 1997b) Fischbein se interesa por el mecanismo que produce las intuiciones combinatorias y su relación con los procedimientos matemáticos correctos. Propone a los sujetos de su estudio (niños y adultos) problemas de permutaciones, variaciones con y sin repetición y combinaciones, observando una tendencia a subestimar el número de permutaciones y a sobreestimar el número de combinaciones y variaciones.

Deduce que las estimaciones se basan en operaciones binarias relacionadas al procedimiento correcto, pero que comprimen la operación necesaria, que por lo general consta de más de dos factores. Finaliza recomendando confrontar a los sujetos con sus intuiciones, pidiéndoles antes de resolver un problema que realicen una estimación de la solución, que resuelvan el problema con ayuda del diagrama en árbol y comparen la solución con sus estimaciones previas.

1.2.3. Otras investigaciones sobre estrategias, dificultades y sesgos en el razonamiento combinatorio

Son escasas, si exceptuamos las ya citadas, las investigaciones existentes sobre razonamiento combinatorio; citaremos, no obstante, alguna de ellas referidas a estrategias de enumeración, dificultades y errores en la resolución de problemas combinatorios y sesgos en el razonamiento combinatorio.

Estrategias de enumeración

Aunque la capacidad de enumeración sistemática se supone adquirida al llegar el niño al periodo de las operaciones formales, hay estudios en los que se pone de manifiesto que esta capacidad no siempre se alcanza. Veamos como se han intentado caracterizar las distintas estrategias intuitivas de enumeración utilizadas por los niños a lo largo de su desarrollo.

Maury y Fayol (1986) estudian los procedimientos utilizados por niños de 9-10 años, clasificados como A, B y C según su rendimiento en Matemáticas, a la hora de resolver dos problemas de tipo combinatorio con idéntica estructura. Clasificó los procedimientos de enumeración de los alumnos en sistemáticos y no sistemáticos.

Desde el comienzo predomina, en el grupo A, la enumeración sistemática, y solo se observa esa preferencia en el grupo B, tras un periodo más o menos largo de pruebas; en ningún momento se aprecia este comportamiento en el grupo C.

English (1991) propone a niños de 4-9 años la tarea de combinar faldas y camisas para vestir un muñeco que se diferenciaban en el color o en el número de botones, con un nivel creciente de dificultad.

Observó que los niños de 7-9 años cambian con frecuencia su estrategia y mejoran sus procedimientos conforme aumenta la dificultad de la tarea. Esto le hizo pensar al autor la conveniencia y lo adecuado de potenciar el estudio de los contenidos combinatorios en la escuela primaria. Estos cambios de estrategia no se daban en los niños de 4-6 años que usaron procedimientos escasamente productivos.

English (1993) estudia en niños de 7-12 años si la familiarización con problemas manipulativos facilita la resolución de problemas manipulativos más complejos

Se observó que eran los alumnos más jóvenes los que variaban más fácilmente de estrategia mientras que en los mayores se apreciaba un intento, mayoritario, de aplicar a los problemas más complejos la estrategia utilizadas en los más sencillos y, por otra parte, que el entrenamiento para resolver problemas con un cierto grado de complejidad, manipulativamente, puede hacerse indistintamente con problemas manipulativos de menor o de igual complejidad.

Otras investigaciones similares son las de Maury (1986) con niños de 9-10 años; Mendelshon (1981) con alumnos de 9 a 12 años y Scardamalia (1977) con niños de 8 a 15 años y con sujetos de más de 15 años. Estas investigaciones han empleado materiales manipulativos en la presentación de las tareas, aunque en algunas se ha pedido la formación de variaciones, permutaciones o combinaciones a partir de un conjunto de letras o números. A continuación presentamos un resumen de las diversas estrategias intuitivas de enumeración caracterizadas en estas investigaciones.

1) Estrategia caracterizada por la selección al azar de los elementos dados; no se observa ningún intento de búsqueda de la solución. Así, por ejemplo, una vez elegido un elemento los niños vuelven a utilizarlo.
2) Se usa un procedimiento de tanteo, pero ahora los elementos que previamente han sido seleccionados no vuelven a utilizarse.
3) Estrategia de paso entre el tanteo y el procedimiento algorítmico. En ella se intenta buscar un procedimiento sistemático en la formación de todas las combinaciones. Como ejemplo citamos:

- los niños seleccionan o permutan los elementos de modo cíclico. Por ejemplo, consideremos que se pide permutar, de todas las formas posibles, las letras de la palabra ARCE. Una selección cíclica sería la siguiente: ARCE RCEA CEAR EARC

4) Uso de un "elemento constante" o "elemento pivote", elemento referencial básico a partir del cual se forman las demás configuraciones. Sin embargo, puede suceder que el procedimiento empleado sea incompleto en la formación de todas las posibilidades. Por ejemplo, al permutar las letras de la palabra ARCE, el alumno forma correctamente todas las permutaciones que comienzan por A, pero es incapaz de repetir sistemáticamente este procedimiento colocando ahora el resto de las letras en primer lugar, obteniendo las siguientes permutaciones:
ARCE, AREC, ACER, ACRE, AECR, AERC
5) Estrategia algorítmica completa, caracterizada por la aplicación del elemento pivote y de un modo cíclico sistemático y completo. Sería la estrategia que lleva constantemente a formar todos los casos posibles.

Los resultados de estas investigaciones ponen de manifiesto que los niños mejoran sus procedimientos conforme aumenta la edad; e incluso algunos niños muy jóvenes descubren un procedimiento sistemático para un número pequeño de elementos. Sin embargo, como hemos indicado, no todos los sujetos alcanzan una enumeración sistemática al llegar a los 12- 15 años. Consideramos, en consecuencia, que el planteamiento de actividades de enumeración puede ser una tarea conveniente, especialmente con los alumnos más jóvenes, como medio de desarrollar correctamente un razonamiento combinatorio.

Dificultades y errores en la resolución de problemas combinatorios

Hadar y Hadass (1981) encuentran que la principal dificultad de los problemas combinatorios es la de encontrar un método sistemático de enumeración; esto se logra, con frecuencia, reformulando el problema y estableciendo varios subgrupos y es ahí en donde, de nuevo, aparece el error al no cumplirse las condiciones de la partición: la intersección no es vacía o la unión no es el total.

Examinan también las dificultades típicas que se encuentra el alumno al resolver los problemas combinatorios citando las siguientes:

a) *Identificación del grupo de sucesos u objetos que se pide enumerar o contar*. A veces los estudiantes no reconocen el conjunto correcto de objetos que se debe enumerar. En general, una percepción incoherente de dicho grupo lleva a conclusiones erróneas. Hay que tener en cuenta, además, que en el enunciado de los problemas combinatorios hay a veces convenios implícitos que no quedan claros para el alumno. Consideremos, por ejemplo, el siguiente enunciado:
¿De cuántas formas diferentes podemos colocar las letras de la palabra ASAR formando una hilera?

Para el profesor, este es un ejemplo típico de enunciado de un problema de permutaciones con repetición, porque el resultado obtenido al permutar la posición de las dos A que aparecen en la palabra es indistinguible. Sin embargo, algunos alumnos, especialmente los muy jóvenes, consideran que se puede diferenciar entre sí estas dos letras, llegando a no distinguir el caso de las permutaciones ordinarias y las permutaciones con repetición.

b) *Elegir una notación apropiada*: los estudiantes a menudo se enfrentan con la dificultad de elegir la notación apropiada que represente de una forma compacta toda la información y condiciones dadas. Esta dificultad aumenta por el hecho de que diferentes textos presentan distintas notaciones para las operaciones combinatorias. Consideremos por ejemplo las combinaciones de m elementos tomados n a n. Si usamos la notación C para el concepto teórico y, posteriormente, la notación para expresar el número combinatorio correspondiente, el alumno puede recordar la fórmula de cálculo de este último, pero, al asociar la posición de los parámetros en una y otra fórmula puede confundir el cálculo final, aunque haya identificado correctamente la operación combinatoria necesaria para resolver el problema.

c) *Fijación de una o más variables*: Debido a su complejidad, en los problemas combinatorios compuestos, es necesario fijar una o más de las variables para obtener un método contable coherente y luego generalizar, a fin de obtener una solución válida para cualquier valor de la variable que se fijó previamente. Esto implica añadir una más a las restricciones impuestas por el problema y es un paso no convencional para los alumnos, que están acostumbrados a usar tan solo las hipótesis dadas en los enunciados. Consideremos el siguiente enunciado:
¿Cuántas permutaciones podemos formar de los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5 de modo que las cifras pares ocupen siempre lugares consecutivos?

La forma más fácil de resolver este problema es considerar que hemos asignado un lugar a las cifras 2 y 4; esto es, fijamos la posición de las mismas que es una variable del problema. De este modo, quedan tres lugares en los cuales permutar tres dígitos y esto es posible hacerlo de P maneras diferentes.

Una vez resuelto este primer problema, estudiamos cuantas posibilidades hay de colocar las cifras 2 y 4 en las cinco posiciones, lo cual es posible hacer de 8 formas distintas. Aplicando la regla del producto llegamos a la solución buscada.

d) *Generalizar la solución*: Muchas veces, aunque el alumno resuelve con éxito un problema combinatorio para varios casos particulares, fallan al encontrar una solución general, al no ser capaz de unir las soluciones de una forma recursiva.

Otros trabajos

Barrat (1975) estudia el efecto del entrenamiento en resolución de problemas combinatorios en niños de 12-15 años y concluye que las sesiones de entrenamiento llevan a un mayor porcentaje de éxitos, sobre todo en los alumnos de mayor edad.

Green (1981) estudia el nivel de intuición probabilística en muchachos de 11-16 años. Como un resultado parcial de la investigación, llega a conclusión de que la capacidad de resolución de problemas combinatorios aumenta con la edad y con el nivel de intuición probabilística que posee el alumno.

Lecoutre (1985) realiza un estudio acerca de los sesgos sobre juicios probabilísticos de naturaleza combinatoria y de naturaleza frecuencial en estudiantes universitarios de primer curso de Psicología. Obtuvo, en lo que se refiere a combinatoria, que solamente un tercio de los alumnos fueron capaces de enumerar todas las maneras posibles de extraer dos bolas de una bolsa que contenía dos bolas rojas y una blanca. Lecoutre y Durand (1988) realizan un estudio sobre los citados sesgos en jóvenes de 14-18 años en el que se pone de manifiesto la dificultad que tienen los alumnos a la hora de considerar si es necesario no considerar el orden, en problemas combinatorios, con objetos indistinguibles o distinguibles.

En la tesis de Gascón (1988) realizada con alumnos de 1º de B.U.P. encontramos, dentro de la resolución de problemas, un apartado sobre problemas combinatorios. Realiza una clasificación de los problemas combinatorios y obtiene que la instrucción, basada en la enseñanza de la estrategia análisis-síntesis, mejora el rendimiento medio de los alumnos; no hace, sin embargo, una clasificación de los errores.

Brown y Edward (1990) ponen de relieve el escaso porcentaje de respuestas correctas obtenidas en problemas combinatorios donde interviene, concretamente, la regla del producto, permutaciones de seis elementos y variaciones de cinco elementos tomados de dos en dos.

Sesgos en el razonamiento combinatorio

Kahneman, Slovic y Tversky (1982) consideran una serie de sesgos que están muy relacionados con la falta de capacidad de enumeración de todas las posibilidades en una operación combinatoria, dentro de lo que ellos denominan heurística de disponibilidad, y que tiene un efecto pernicioso a la hora de calcular la probabilidad de un suceso aleatorio.

Los principales sesgos, en este sentido, son debidos a la mayor o menor facilidad para hallar ejemplos, a la efectividad de patrones de búsqueda, mayor o menor facilidad para imaginar casos, etc. Un resumen de estos estudios se presenta en Pérez Echeverría (1990). El estudio de la estabilidad de las heurísticas y su evolución con la edad ha sido abordado, entre otros autores, por Fischbein y Schnarch (1997), Lecoutre y Fischbein (1998), Cañizares (1997) y Serrano y cols (1998). Los resultados muestran poco cambio e incluso mayor proporción de sesgos ocasionados por estas heurísticas una vez alcanzada la edad de las operaciones formales.

Otros autores ponen de manifiesto la aparición de sesgos, a nivel intuitivo, incluso en investigadores con experiencia y ese es un hecho que hace reflexionar acerca de lo efectivo de la enseñanza. En este sentido, autores con Engel, Varga y Walser (1976) proponen:

1. Usar una metodología basada en juegos.
2. Introducir como ideas básicas la reglas de la suma, producto y cociente.
3. Usar los diagramas de árbol, además de los juegos y la manipulación, como recursos didácticos esenciales.

1.2.4. Modelos implícitos en los problemas combinatorios

En sus investigaciones Navarro-Pelayo (1991), Batanero y Navarro (1991) destacan una variable fundamental de los problemas combinatorios, que describen como el "modelo combinatorio implícito en el enunciado". Esta variable, que había sido descrita a nivel teórico por Dubois (1984), nunca había sido evaluada en cuanto a su efecto sobre la dificultad de los problemas combinatorios y las estrategias usadas por los alumnos en su resolución.

En el caso de un problema combinatorio simple, esta variable implica que pueda ser representado mediante una de las tres categorías o modelos combinatorios siguientes:

- selección de muestras;
- colocación de objetos en urnas;
- partición de conjuntos en subconjunto;

Este modelo debe ser reconocido por el resolutor del problema. El siguiente paso es discriminar entre los casos posibles, según el modelo elegido. Así, en el modelo de muestreo, se requiere distinguir si:

- todos los objetos son diferentes, o algunos son iguales;

- se considera repetición o no de elementos;
- interviene la ordenación o no de los elementos.

En los modelos de colocación y partición se precisa distinguir si:
- los objetos son iguales o distintos;
- las celdas (o subconjuntos) son distinguibles o no;
- se considera el orden de colocación de los objetos dentro de las celdas o subconjuntos;
- se permite más de un objeto por celda/subconjunto;
- se permiten celdas/subconjuntos vacíos.

En Navarro-Pelayo (1991), Navarro-Pelayo y Batanero (1991) se lleva a cabo un extenso estudio de libros de texto de Bachillerato y se muestra que el modelo combinatorio implícito no había sido tenido en cuenta en la enseñanza a este nivel. Las definiciones de las operaciones combinatorias se presentan generalmente a nivel de modelo de selección. Los problemas combinatorios de partición son escasamente presentado en los libros de texto.

En Godino, Batanero y Navarro-Pelayo (1992), los conceptos de variaciones, permutaciones y combinaciones, con y sin repetición, se revelan como un potente instrumento para la resolución, sobre todo, de problemas de selección. En este sentido, se ha puesto de manifiesto la dificultad que tiene para los alumnos la traducción de un modelo de partición o colocación a un modelo de selección.

Con objeto de probar de modo sistemático el efecto de esta variable, Navarro-Pelayo (1994) diseña cuidadosamente un cuestionario en el que tiene en cuenta las siguientes variables de tarea: Modelo combinatorio implícito, operación combinatoria, tipo de elementos que se combinan y tamaño de los parámetros. Mediante un diseño experimental consigue controlar sistemáticamente las anteriores variables para tamaños pequeños de los parámetros.

Usando el análisis de varianza así como métodos estadísticos multivariantes (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1995; Navarro-Pelayo, Batanero y Godino, 1996) consiguen mostrar el efecto de esta variable sobre la dificultad de los problemas y sobre las estrategias de los alumnos, así como la interacción con la operación combinatoria y el efecto de la instrucción (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1997a y 1997b). Ésta fue en general efectiva en la mejora del razonamiento combinatorio, pero no en todos los tipos de problemas. Por ejemplo, no hubo mejora en los problemas combinatorios de partición (Navarro-Pelayo, Batanero y Godino, 1996).

Estas investigaciones dejan abiertos nuevos campos de estudio entre los que podemos citar *la evaluación del razonamiento combinatorio en alumnos de mayor edad* que tratamos de caracterizar en nuestra investigación.

1.3. MARCO TEÓRICO

En esta sección vamos a presentar las nociones teóricas que utilizaremos para describir el problema e interpretar los resultados de nuestra investigación. La mayor parte de las investigaciones realizadas sobre el área problemática que hemos descrito en la sección 1.2 se han planteado dentro de un marco que podemos calificar de psicológico, usando básicamente las nociones piagetianas de esquema y desarrollo cognitivo, o bien las intuiciones de Fischbein.

En nuestro trabajo vamos a realizar un cambio de perspectiva teórica, utilizando algunas nociones teóricas desarrolladas por Godino y colaboradores (Godino, 1998; Godino y Recio, 1998; Godino y Batanero, 1999) mediante las cuales se enfocan las cuestiones cognitivas desde una perspectiva semiótica. Pensamos que este enfoque nos va a permitir aportar explicaciones complementarias de los procesos de resolución de los problemas combinatorios y, por tanto, de las dificultades y logros de los estudiantes ante esta clase de problemas matemáticos.

La tipología de entidades matemáticas primarias y las correspondencias entre expresión y contenido (funciones semióticas) que proponen Godino y colaboradores para describir la actividad matemática y las estructuras conceptuales resultantes de dicha actividad nos parecen instrumentos útiles para describir los procesos de resolución de los problemas combinatorios en los que estamos interesados en nuestra investigación. De manera más específica usaremos este modelo teórico para formular en términos semióticos el razonamiento combinatorio y la variable MCI (modelo combinatorio implícito en el enunciado de los problemas combinatorios) estudiada por Navarro-Pelayo (1994).

1.3.1. Un enfoque semiótico de la cognición matemática

La teoría de las funciones semióticas trata de articular los componentes ontológico y lingüístico de las matemáticas, produciendo como resultado una formulación semiótica del conocimiento matemático. Desde un punto de vista formal y funcional postula la existencia de los siguientes tipos primarios de objetos o entidades emergentes de subsistemas de prácticas y que se ponen en juego en la actividad matemática:

- *Ostensivas:* representaciones materiales usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos; en general incluimos en esta categoría las expresiones lingüísticas y notaciones.
- *Extensivas:* las entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (situaciones-problemas, aplicaciones).
- *Actuativas*, modos de actuar ante situaciones o tareas (técnicas, estrategias, algoritmos, operaciones).
- *Intensivas*: ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, propiedades).
- *Validativas:* tipos de argumentaciones para validar proposiciones (demostraciones, comprobaciones, justificaciones).

Además de estas entidades primarias debemos considerar también *entidades secundarias* que articulan varias entidades primarias, como pueden ser una teoría matemática, en la cual se ponen en juego, notaciones, campos de problemas, definiciones, enunciados, operaciones, algoritmos, demostraciones.

La noción de *función semiótica* permite tener en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de la actividad matemática y de los procesos de difusión del conocimiento matemático. Permite, además, formular en términos semióticos, y de una manera general y flexible el *conocimiento matemático*.

Según Hjelmslev (1943) se llama función a una dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se dice que hay función entre una clase y sus componentes y entre los componentes entre sí. A los terminales de una función (expresión y contenido) los llama funtivos, esto es, cualquier objeto que tiene función con otros.

La correspondencia entre expresión y contenido se establece sobre la base de códigos explícitos o implícitos. Estos codigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los funtivos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas. Los cinco tipos de entidades primarias descritas anteriormente pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido de funciones semióticas (Godino y Batanero, 1999).

En la tabla 1.3.1 se resumen los tipos de funciones semióticas consideradas, atendiendo a distintos criterios (Godino, 1998; Godino y Batanero, 1999).El modelo teórico esbozado permite hacer una interpretación del *conocimiento* y la *comprensión* de un objeto O (sea ostensivo, no ostensivo, simple o compuesto) por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales se pone en juego O como funtivo. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar de significado, esto es, de función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas identificadas en la tabla 1.3.1.

Este modelo teórico postula una relatividad de los objetos matemáticos, intrínseca a los diferentes grupos de personas e instituciones implicadas en el campo de problemas correspondiente, y también dependiendo de las diferentes formas expresivas disponibles (Godino, 1996; Godino y Batanero, 1994). La evaluación del conocimiento de un sujeto y el diseño de situaciones didácticas para su desarrollo requiere tener en cuenta las diversas facetas o dimensiones identificadas (ostensiva, extensiva, actuativa, intensiva, validativa) y los diversos factores contextuales condicionantes de los procesos semióticos implicados.

Tabla 1.3.1: Tipos de funciones semióticas

Criterio		Tipos	Descripción
Naturaleza del contenido		- *Ostensivas* - *Extensivas* - *Actuativas* - *Intensivas* - *Validativas*	El contenido de la función es una entidad ostensiva, extensiva, actuativa, validativa, intensiva, procesual o afectiva (respectivamente)
Agente que interpreta la expresión		- *Personal* - *Institucional*	Según que la correspondencia expresión-contenido se hace por un sujeto individual o es compartida en el seno de una institución
Papel desempeñado		- *Representacional* - *Instrumental*	Según que la expresión se pone en lugar del contenido, o el contenido usa como recurso la expresión
Grado de complejidad		- *Elemental* - *Sistémico*	Según el carácter uniforme o multiforme de las funciones semióticas
Factores Contextuales	Temporales	- *Ocasional* - *Atemporal*	Diversas circunstancias que condicionan los procesos de comunicación e interpretación
	Fenomenológicos	- *Interno (matemático)* - *Externo*	

Los razonamientos como entidades secundarias

Dentro del marco teórico adoptado, consideramos útil y consistente considerar un razonamiento matemático como cualquier secuencia de funciones semióticas (y por tanto de conocimientos) que se ponen en juego en el proceso de resolución de un problema por parte de un sujeto. De manera equivalente, se puede describir un razonamiento como la secuencia de prácticas actuativas y discursivas que constituyen la resolución de un problema para un sujeto dado. Esta noción nos va a permitir describir el objetivo general de nuestra investigación como la caracterización de los razonamientos de los estudiantes con preparación matemática avanzada ante una muestra de problemas combinatorios elementales.

Significados institucionales y personales

Para el estudio de los procesos cognitivos y didácticos, Godino y Batanero introducen en diversos trabajos (Godino y Batanero, 1994; 1998) las nociones de *prácticas significativas* y *significado de un objeto* matemático, para las cuales postulan dos dimensiones interdependientes: personal e institucional. Una práctica es significativa para una persona (resp. una institución) si cumple una función para resolver el problema, o para comunicar, validar o generalizar su solución. Las prácticas significativas son, por tanto, formas expresivas situadas orientadas a un objetivo, e implican una situación-problema, un contexto institucional, una persona y las herramientas semióticas que mediatizan la acción. El sistema de prácticas prototípicas significativas, esto es, el sistema de prácticas eficientes para alcanzar el fin pretendido, es considerado como el significado (sistémico) del objeto personal (resp. institucional).

Esta noción de significado sistémico propuesta por Godino y colaboradores guarda una estrecha relación con la noción de *praxeología* introducida por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) en la teoría antropológica de la didáctica de las matemáticas. En ambos casos se propone asociar a un contenido matemático (objeto u obra matemática, por ejemplo, la combinatoria elemental) una entidad compuesta que tiene en cuenta el doble carácter de la matemática, como actividad y como producto cultural. Como componentes básicos de las praxeologías matemáticas, Chevallard, Bosch y Gascón incluyen los pares (tareas, técnicas) y (tecnología, teoría).

El primer par, que podemos describir como el componente pragmático del conocimiento matemático, incluye los elementos extensivos y actuativos introducidos en los trabajos de Godino y colaboradores, mientras que el segundo par (tecnología, teoría), que podría ser equivalente a los elementos validativos e intensivos, constituye el componente teórico-tecnologico del conocimiento.

Esta clasificación de los componentes o dimensiones del conocimiento matemático (praxeologías, significados sistémicos) nos parece útil para formular un supuesto básico de nuestra investigación: la explicación de las dificultades de los estudiantes en el proceso de estudio de la combinatoria, por el énfasis que se atribuye en la instrucción matemática habitual a los componentes teóricos, en detrimento del componente pragmático.

Análisis semiótico de razonamientos

En nuestra investigación vamos a aplicar el modelo teórico de las funciones semióticas para analizar los textos producidos por los estudiantes en la resolución de una muestra de problemas combinatorios, para aportar explicaciones complementarias de las estrategias de solución, sus dificultades y logros, esto es, de sus razonamientos.

Con dicho fin el protocolo de resolución será dividido en unidades de análisis de forma que sean útiles para identificar los diversos tipos de entidades que hemos descrito y que son puestas en juego a lo largo del proceso de resolución. En cada unidad de análisis se identificarán los objetos ostensivos específicos de la combinatoria utilizados por el alumno, así como las entidades extensivas, actuativas, intensivas y validativas puestas en juego. La síntesis final del análisis semiótico de los protocolos permitirá caracterizar el significado de la combinatoria elemental puesto en juego por el sujeto en la resolución de los problemas, sus estrategias o técnicas de solución (entidades actuativas), conceptos, esquemas interpretativos y validativos puestos en juego.

1.3.2. Modelización de los problemas combinatorios de recuento

Nuestra investigación está centrada en la caracterización de las estrategias y dificultades de los estudiantes con preparación matemática avanzada de los problemas combinatorios simples. Los problemas combinatorios simples son definidos tanto por Gascón (1988) como por Navarro-Pelayo (1994) como los problemas combinatorios que pueden ser resueltos mediante la aplicación de una sola operación combinatoria (variaciones, permutaciones, combinaciones, con o sin repetición).

En nuestro caso hemos incluido también en el segundo cuestionario dos problemas combinatorios compuestos (que requieren para su solución dos operaciones combinatorias y su composición por la regla de la suma o el producto). Por ello nos referimos a la clase de problemas en la que estamos interesados como problemas combinatorios elementales, al incluir problemas compuestos de recuento y enumeración cuyo enunciado continúa siendo sencillo y ponen en juego la composición de sólo dos operaciones combinatorias. Excluimos, por tanto, de nuestra investigación los problemas de existencia, optimización o extremales, y clasificación (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994; sección 1.1.4).

La solución de un problema combinatorio se puede afrontar siguiendo dos tipos de razonamiento básicos según que el sujeto conozca o no la Teoría Combinatoria, la cual proporcionará el *modelo matemático* adecuado. Si el sujeto conoce (y recuerda) los conceptos, operaciones y técnicas combinatorias tratará de *ajustar* un modelo comparando los datos de la situación con los requisitos del modelo. Llamaremos "modelización combinatoria" a este proceso de identificación de las operaciones combinatorias y aplicación a una situación-problema que requiera el recuento del número de configuraciones combinatorias. Si el sujeto no conoce o no recuerda la teoría combinatoria deberá *generar* un modelo matemático, generalmente usando como paso intermedio la enumeración.

En ambos casos, generación o ajuste de un modelo matemático combinatorio, juega un papel relevante la clasificación de los problemas combinatorios propuesta por Dubois (1984). Este autor considera que los enunciados de los problemas combinatorios simples se pueden clasificar en tres tipos de esquemas básicos:

a) *Selección* de una muestra a partir de un conjunto de objetos. Cuando se piden enumerar o contar las diferentes muestras de tamaño dado que pueden formarse a partir de un conjunto inicial;
b) *Colocación* de objetos en casillas (cajas, celdas o urnas). Cuando se pide enumerar o contar las diferentes aplicaciones entre dos conjuntos de objetos;

c) *Partición* en subconjuntos de un conjunto de objetos. Cuando se pide clasificar los elementos de un conjunto inicial en un número dado de subconjuntos incompatibles, de modo que la clasificación sea exhaustiva.

Navarro-Pelayo describe estas categorías de problemas como “modelos combinatorios implícitos” (MCI), considerando los tres esquemas descritos por Dubois como valores de una variable de tarea de los problemas combinatorios cuya relevancia didáctica investiga. En nuestro trabajo denominaremos a esta variable "esquema combinatorio", y los consideramos como esquemas interpretativos de los enunciados de los problemas combinatorios.

Un mismo enunciado generalmente se puede interpretar más facilmente según uno de estos esquemas, y en algunos casos (no siempre) se puede traducir a más de un esquema diferente. En el caso de que el alumno conozca la combinatoria avanzada, la identificación del esquema y sus características específicas proporcionaría automáticamente la solución del problema. Sin embargo, puesto que los alumnos de nuestra muestra no han estudiado más que la combinatoria elemental, el hecho de interpretar un enunciado según el esquema de partición o de colocación no proporciona la solución, a menos que se identifiquen las operaciones combinatorias correspondientes.

Por tanto, para nuestros alumnos, los esquemas definidos por Dubois no constituyen una clasificación de problemas combinatorios. Esto no significa que no reconozcamos la relevancia cognitiva y didáctica de los esquemas combinatorios descritos por Dubois, tanto si se trata de ajustar como de generar un modelo combinatorio. Precisamente el cambio o traducción entre los esquemas es con frecuencia un paso que puede afectar radicalmente al proceso de modelización matemática y por tanto a la resolución de las tareas.

Describimos a continuación estos tres “esquemas combinatorios” (EC) básicos que corresponden a tres tipos de situaciones prácticas, o en los cuales se pueden interpretar los enunciados de los problemas de recuento simples, y los sub-esquemas identificables en los mismos, según diferentes condiciones:

Esquema de selección

Cuando se requiere (o se interpreta el enunciado de esta manera) seleccionar muestras de un tamaño r a partir de un conjunto de n objetos. Cada configuración combinatoria será una muestra de elementos tomados de dicho conjunto inicial.

Tabla 1.3.2: Esquema combinatorio de selección

Sub- esquema	Modelo combinatorio:
Selección ordenada sin reemplazamiento	Variaciones ordinarias: $V_{n,r} = n.(n-1)(n-2)... (n-n+r)$
Selección ordenada con reemplazamiento	Variaciones con repetición: $V_{n,r} = n^r$
Selección no ordenada sin reemplazamiento	Combinaciones ordinarias $C_{n,r} = V_{n,r} /P_r$
Selección no ordenada con reemplazamiento	Combinaciones con repetición $CR_{n,r} = C_{n+r-1,\ r}$

Es necesario tener en cuenta si en la formación de las configuraciones influye o no el orden de selección de los objetos y si se pueden o no repetir los objetos, esto es, si el muestreo se hace o no con reemplazamiento y si la muestra es o no ordenada.

Al cruzar entre sí cada una de estas posibilidades (orden y repetición) se obtienen cuatro tipos disjuntos de sub-esquemas los cuales dan lugar a cuatro modelos combinatorios (Tabla 1.3.2). A estas cuatro operaciones básicas hay que añadir el caso de las permutaciones de n elementos, que en realidad no es una nueva operación, ya que es un caso particular de variaciones $V_{n,n}$. Por tanto, el esquema de selección sirve para definir las operaciones combinatorias básicas, y es el que suele usarse al definir las operaciones combinatorias en la enseñanza.

Esquema de colocación

Cuando se requiere (o se interpreta de esta forma el enunciado del problema) colocar r objetos dentro de n cajas (celdas o urnas), o bien establecer una aplicación de un conjuntos de r objetos en otro conjunto de n objetos. La configuración combinatoria cuyo recuento interesa son las diversas disposiciones de tales objetos en las cajas o las diversas aplicaciones que se establecen entre los dos conjuntos.

Según se considere que el orden de los objetos dentro de las cajas debe o no tenerse en cuenta y que las cajas y los objetos sean iguales o diferentes se obtienen seis tipos básicos de sub-esquemas de colocación, ya que no tiene sentido ordenar los objetos cuando son iguales. A partir de cada uno de los seis tipos básicos se obtienen nuevos subtipos al tener en cuenta las siguientes cuatro condiciones:

1. Colocaciones inyectivas: con a lo sumo un objeto por caja ($r \leq n$).
2. Colocaciones sobreyectivas: con al menos un objeto por caja ($r \geq n$).
3. Colocaciones biyectivas: con un solo objeto por caja ($n=r$).
4. Colocaciones cualesquiera: Se puede colocar el número que se desee de objetos en cada caja o dejar alguna vacía.

Resultan, por tanto, 24 subesquemas de colocaciones simples como se resume en la tabla 1.3.3.

Tabla 1.3.3. Esquema combinatorio de colocación

Colocaciones	Objetos	Celdas	Tipo de aplicac.	Modelo combin.
	Distintos	Distintas	Inyectiva	$V_{n,r}$
			Sobreyectiva	$r!C_{n-1,r-1}$
Ordenada			Biyectiva	P_n
			Cualquiera	$r!CR_{n,r}$
		Iguales	Inyectiva	1
			Sobreyectiva	$L_{n,r}$
			Biyectiva	1
			Cualquiera	$A_{n,r}$
	Distintos	Distintas	Inyectiva	$V_{n,r}$
			Sobreyectiva	$n!S_{n,r}$
			Biyectiva	P_n
			Cualquiera	$VR_{n,r}$
		Iguales	Inyectiva	1
			Sobreyectiva	$S_{n,r}$
No ordenada			Biyectiva	1
			Cualquiera	$\Sigma_{n,r}$
	Iguales	Distintas	Inyectiva	$C_{n,r}$
			Sobreyectiva	$C_{n-1,r-1}$
			Biyectiva	1
			Cualquiera	$CR_{n,r}$
		Iguales	Inyectiva	1
			Sobreyectiva	$PE_{n,r}$
			Biyectiva	1
			Cualquiera	$\Pi_{n,r}$

Observamos que el esquema de colocación es mucho más amplio que el de selección y no sólo da origen a las operaciones combinatorias básicas, sino a otras como los números de Lah, números de Stirling $S_{n,r}$, $L_{n,r}$ etc. En Ribnikov (1988) y Marshall (1986) se describen estos tipos de problemas y el modo de obtención de las fórmulas de cálculo. También hacemos notar que la misma operación combinatoria se puede obtener desde dos sub-esquemas diferentes de colocación y que no todos los problemas planteables en el esquema de colocación pueden traducirse a un problema de selección, porque el número de subesquemas que hemos obtenido en la colocación es mucho mayor que el de selección.

Esquema de partición

Cuando se pide (o se interpreta) efectuar una partición de un conjunto de r elementos en n subconjuntos. Este tercer esquema puede verse como una nueva interpretación del esquema de colocación de r objetos en n cajas. Si olvidamos las cajas y nos fijamos en los subconjuntos de objetos que contienen, obtenemos los subconjuntos en que se puede descomponer un conjunto, pudiendo haber subconjuntos vacíos (caso de que alguna caja no contuviese ningún elemento).

Cada colocación define, por tanto una y sólo una partición de objetos en subconjuntos y recíprocamente. Por tanto, a las 24 clases de colocaciones descritas en la tabla 1.3.3 corresponden 24 clases de particiones en subconjuntos. La equivalencia entre las colocaciones y las particiones en subconjuntos se muestra en la tabla 1.3.4. (Dubois, 1984; Batanero, Godino, Navarro-Pelayo, 1994; pag. 41).

El esquema de partición tampoco será siempre traducible al de selección, por las mismas razones que hemos expuesto al describir el de colocación. En resumen, dos de los tres esquemas combinatorios básicos (colocación y partición) son traducibles entre sí, y dan lugar no sólo a las operaciones combinatorias básicas sino a una gama más amplia de modelos combinatorios que no se estudian en la enseñanza elemental de la combinatoria.

El esquema de selección es siempre traducible a uno de los otros dos esquemas, aunque no de forma biunívoca. Las operaciones combinatorias básicas pueden definirse unívocamente a partir del esquema de selección.

Tabla 1.3.4. Equivalencia entre los esquemas de colocación y partición

Colocaciones de objetos:	Particiones en subconjuntos:
Ordenadas	Subconjuntos ordenados
No ordenadas	Subconjuntos no ordenados
De objetos distintos	De objetos distintos
De objetos indistinguibles	De objetos indistinguibles
En cajas distintas	Particiones ordenadas
En cajas indistinguibles	Particiones no ordenadas
Inyectivas	En subconjuntos vacíos o con una sola unidad elemental
Sobreyectivas	En subconjuntos no vacíos
Biyectivas	En subconjuntos con una sola unidad elemental
Cualquiera	Subconjuntos con más de una unidad y con subconjuntos vacíos.

1.4. METODOLOGÍA Y PLAN DE TRABAJO

En esta sección describiremos la metodología de nuestra investigación, en la que podemos distinguir cinco fases, que se han llevado a cabo con instrumentos, metodologías de análisis y enfoques diferentes. Comenzaremos describiendo resumidamente los objetivos planteados.

1.4.1. Objetivos específicos de la investigación

Como hemos indicado la finalidad inicial del trabajo era continuar y profundizar el trabajo previo de Navarro-Pelayo (1994) en un tipo de alumnos de mayor madurez y preparación matemática. Las investigaciones sobre razonamiento combinatorio se han centrado hasta la fecha en el razonamiento de los niños o de sujetos sin preparación matemática específica. No disponemos de ninguna información sobre el razonamiento combinatorio de alumnos con preparación matemática y este conocimiento es muy importante si se quiere evaluar la dificultad real del tema, así como la forma de abordar con éxito su enseñanza.

Este objetivo general es demasiado amplio, de modo que nos fijamos un objetivo más específico, que es indagar la forma en que los alumnos descritos resuelven los problemas propuestos en la investigación de Navarro-Pelayo, así como algunos problemas combinatorios compuestos. El análisis de los razonamientos manifestados por los estudiantes ante una muestra de problemas combinatorios nos va a permitir identificar los errores, - cuya importancia en la investigación didáctica es resaltada por Radatz (1980) y Rico (1995)- , así como las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la combinatoria elemental.

Se deduce de ello el siguiente objetivo específico:

O1: Caracterizar las dificultades y errores en la resolución de una muestra de problemas combinatorios elementales (simples y compuestos) en estudiantes con una intensa preparación matemática previa (estudiantes de 4º y 5º curso de la licenciatura de matemáticas).

Más específicamente, estábamos interesados en comprobar si se mantenían los resultados de la investigación citada en cuanto al efecto de diferentes variables de tarea de los problemas, tales como esquema combinatorio sugerido por el enunciado, operación combinatoria que da la solución del problema, tamaño de la solución y tipo de elementos que se combinan. Ello da lugar al segundo objetivo:

O2: Estudiar el efecto sobre los índices de dificultad de los problemas de diversas variables de tarea (esquema combinatorio, tipo de operación combinatoria, tamaño de la solución).

Por otro lado queremos profundizar en las causas que producen errores y dificultades en la resolución de los problemas combinatorios, tales como comprensión del enunciado del problema, métodos generales de solución y estrategias específicas usadas en el proceso de resolución. Pensamos que los problemas combinatorios constituyen un campo donde pueden ejercitarse algunas de las estrategias descritas por Polya (1982) en la resolución de problemas y quisiéramos comprobar si los estudiantes usan espontáneamente este tipo de técnicas. Este estudio puede proporcionar claves para la mejora de la enseñanza y por ello hemos formulado el tercer objetivo que incluimos a continuación:

O3: Analizar la comprensión que los alumnos muestran del enunciado del problema, los métodos generales y estrategias específicas de solución y relacionarlos con los índices de dificultad de los problemas y las características de los mismos.

Como complemento, pretendemos realizar un estudio en profundidad de una muestra reducida de alumnos y confrontar el análisis a priori de tipo semiótico de las soluciones a los problemas combinatorios con el análisis de los procesos efectivos implementados en estos estudiantes. Nuestra intención es mostrar la complejidad semiótica del campo de problemas combinatorios elemental y su carácter caótico, ya que pequeñas variaciones en los enunciados de los problemas introducen grandes cambios en los métodos de solución, así como en la dificultad de los problemas. Este objetivo lo enunciamos en la forma siguiente:

O4: Indagar la influencia de nuevos factores explicativos (principalmente de tipo semiótico) sobre las estrategias errores y dificultades en la resolución de problemas combinatorios.

1.4.2. Fases del estudio

En este trabajo podemos distinguir varias fases que se han enfocado desde diferentes puntos de vista, con fines complementarios y diversas metodologías, considerando elementos cuantitativos y cualitativos (Shulman, 1989). En esta sección las describimos de forma sintética.

Una *primera fase* de la investigación se llevó a cabo en el periodo 1993-94 y tuvo carácter exploratorio y enfoque cuantitativo. Partiendo de unos supuestos iniciales que describimos en la sección 1.4.3. se trataba de obtener una primera información sobre la dificultad que los problemas combinatorios simples podrían tener para los estudiantes con una alta preparación matemática. Se usó el mismo cuestionario empleado en la investigación de Navarro-Pelayo para recoger datos de una muestra de 27 alumnos. El análisis de datos se restringió al estudio de los índices de dificultad de cada uno de los problemas, comparación con los resultados de Navarro- Pelayo, y puede verse como un *análisis inicial* de datos (Cabría, 1994).

En una *segunda fase*, también exploratoria se revisó el cuestionario inicial, tomando datos de una nueva muestra de 29 alumnos en el curso 1994-95. El análisis de datos fue de nuevo cuantitativo y exploratorio y como consecuencia del mismo se decidió continuar con el segundo cuestionario para el resto del estudio, por haber obtenido unos índices de dificultad adecuados a los objetivos de nuestro trabajo.

Una primera consecuencia de estas dos primeras fases exploratorias, fue la confirmación de nuestras expectativas iniciales sobre la dificultad que los problemas combinatorios elementales tienen para los alumnos con alta preparación matemática. Llegados a esta conclusión nos propusimos profundizar en las causas de esta dificultad. Como consecuencia de un estudio teórico "a priori" de los posibles razonamientos requeridos para la resolución, en el supuesto de que el alumno recordara y no recordara los conceptos combinatorios, elaboramos unas tablas sintéticas donde se pone de manifiesto la complejidad semiótica de este tipo de problemas. Al mismo tiempo pusimos a punto una técnica de análisis que podría ser utilizable en la última fase del estudio. Un resultado de este estudio teórico, que podemos considerar como tercera *fase del trabajo,* fue la reformulación de nuestros supuestos iniciales y el establecimiento de hipótesis a estudiar en las fases cuarta y quinta del trabajo.

La cuarta fase ha sido un estudio cuantitativo de tipo cuasiexperimental confirmatorio y correlacional (Bisquerra, 1989) sobre una muestra de 91 alumnos. En ella se han hecho contrastes de hipótesis y estimaciones formales del efecto de las diferentes variables de tarea sobre la dificultad de los problemas del cuestionario. Como complemento se ha incluido un estudio exploratorio de nuevas variables no analizadas con anterioridad que se refieren a la interpretación del enunciado y estrategias de resolución de los problemas.

De esta muestra de alumnos y de la 2ª muestra se seleccionaron para un estudio cualitativo en profundidad (*quinta fase*) cuatro alumnos con las características que se describen en el capítulo 4. Por medio del análisis de entrevistas y del análisis semiótico de los razonamientos dados por los estudiantes para la resolución de los problemas se realiza un estudio de casos para explicar las diferencias encontradas en los índices de dificultad y los tipos de razonamientos de los alumnos de nuestra muestra. Esta fase ha sido realizada con un enfoque interpretativo (Denzin y Lincoln, 1994).

1.4.3. Supuestos iniciales

Distintos autores que han estudiado la solución de los problemas combinatorios (por ejemplo, Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994) muestran que esta solución requiere el empleo de recursos ostensivos específicos para expresar las configuraciones combinatorias y sus reglas de formación (notaciones, diagramas en árbol, etc.). Así mismo, las técnicas como la descomposición del problema en subproblemas, la enumeración sistemática y procedimientos recursivos se requieren cuando el tamaño de la solución crece, o en los problemas combinatorios compuestos.

Estos componentes pragmáticos son el origen genético de los modelos combinatorios (variaciones, permutaciones, combinaciones, regla de la suma, del producto y del cociente), los cuales constituyen el componente tecnológico y teórico de los conocimientos combinatorios.

Un sujeto que se enfrenta por primera vez a los problemas combinatorios tiene que desarrollar por sí mismo, o con ayuda del profesor, los componentes pragmáticos del conocimiento combinatorio, esto es, emplear recursos ostensivos específicos para identificar la configuración requerida, enumerar sistemáticamente, etc.

En una fase posterior del proceso de estudio del campo de problemas considerado será cuando sistematice las notaciones, técnicas y modos de argumentar y producirá los conocimientos tecnológicos y teóricos correspondientes. Estos elementos teóricos (las operaciones combinatorias) son los que la cultura matemática describe como la "combinatoria" elemental, relegando a un segundo plano, o incluso eliminando de la enseñanza los componentes pragmáticos de donde emergen tales conocimientos teóricos.

Raramente encontramos en la enseñanza actual las técnicas de construcción del diagrama en árbol, de enumeración sistemática, de interpretación de los enunciados de los problemas, de traducción de los mismos, etc. En consonancia con esta circunstancia y aunque la primera fase de nuestro estudio era exploratoria, nuestro conocimiento previo del tema, las investigaciones realizadas sobre el mismo en el Departamento y nuestro modelo teórico nos llevaron a establecer unos supuestos iniciales.

Los estudiantes a los cuales se prevé aplicar las pruebas estudiaron la combinatoria en sus estudios de secundaria y/o en primer curso de carrera. La combinatoria, además, apenas se aplica en las otras asignaturas cursadas, salvo en cálculo de probabilidades. Nuestro primer supuesto se relaciona con el olvido del tema por parte de los estudiantes:

S1: Los requisitos de aplicación de los modelos combinatorios (configuración, repetición, orden, fórmulas, significado de los parámetros) han sido olvidados en un alto porcentaje de casos.

Esperamos encontrar una proporción de alumnos que, en lugar de recurrir a las fórmulas combinatorias tratan de resolver los problemas por medio de enumeración o deduciendo la solución mediante una serie de operaciones aritméticas (generación de un modelo combinatorio).

Como hemos dicho los componentes pragmáticos de la combinatoria no son objeto explícito de enseñanza. Parece plausible esperar que estudiantes con una intensa preparación matemática, ante la falta de recuerdo de las condiciones de aplicación de los modelos combinatorios, sean capaces de generarlos. Pero esto no será así en un alto porcentaje de estudiantes, como se espera probar en la investigación. El desarrollo cognitivo de los sujetos, o incluso una intensa preparación matemática de tipo general, se revela como insuficiente para desarrollar los conocimientos pragmáticos específicos necesarios para resolver el campo de problemas combinatorios, incluso a pesar de su carácter elemental. Ello lleva al segundo de nuestros supuestos:

S2: Puesto que en la instrucción combinatoria se enfatizan los componentes teóricos de los conocimientos combinatorios y se relegan los pragmáticos, un alto porcentaje de estudiantes serán incapaces de generar un modelo combinatorio adecuado. En consecuencia esperamos encontrar dificultad alta o moderada en los problemas propuestos a nuestros alumnos.

1.4.4. Población y muestras

En la terminología de Azorín y Sánchez Crespo (1986) el universo de nuestro estudio o población de estudiantes sobre la que se centra nuestra investigación son los sujetos adultos con una intensa preparación matemática. La población objetivo, de la que se tomarán las muestras son los estudiantes de los últimos cursos de la licenciatura de matemáticas. Por razones de operatividad restringimos el ámbito geográfico a la Universidad de Granada.

De esta población hemos tomados tres muestras intencionales (Giglione y Matalon, 1989). La primera está formado por 27 estudiantes de 5º curso de la licenciatura de matemáticas, especialidad de metodología, a los cuales se les aplicó el cuestionario A (Anexo 1) mediante la cual "entramos en contacto" con la problemática didáctica descrita. La segunda muestra se compone de 29 estudiantes de similares característica a la muestra 1 a los cuales se les aplicó el cuestionario B (Anexo 2) con el propósito de constituir un estudio piloto previo y exploratorio. La tercera muestra se compone de 91 estudiantes, de los cuales 49 cursaban 5º curso, 29, 4º curso (en ambos casos de la especialidad de metodología) y 13 de 5º curso de la especialidad de estadística.

De las muestras 2ª y 3ª se seleccionó una submuestra reducida de 4 estudiantes a los cuales se les realizó una entrevista individual. Los criterios de selección de estos estudiantes se describen en el capítulo 4.

1.4.5. Instrumentos: Cuestionarios y entrevistas

Hemos utilizado como instrumentos de recogida de datos un cuestionario escrito (en dos versiones, A y B, que se incluyen en los anexos 1 y 2) y un guión semiestructurado de entrevista (Anexo 3). Las dos versiones del cuestionario, utilizadas para tomar datos de una muestra relativamente amplia (Sax, 1989), se describen y analizan en profundidad en la sección 2.2., mientras que el guión de entrevista semiestructurada (Fontana y Fey, 1994) lo hacemos en la sección 4.2.

El cuestionario original se tomó de la investigación de Navarro-Pelayo (1994) la cual lo había elaborado a partir de un largo y cuidadoso proceso, después de ensayarlo con varias muestras piloto y de un diseño experimental en el que se controlaron una serie de variables que describimos en el capítulo 2 y fue utilizado sobre una muestra de 720 alumnos. Respecto al segundo cuestionario, en el capítulo 3 incluimos un estudio de las características de los ítems, así como de la fiabilidad (Kirk y Miller, 1986) y generalizabilidad del cuestionario (Brennan, 1983).

1.4.6. Análisis de datos

El análisis de datos se ha adaptado a las características de cada una de las fases de la investigación.

En la primera y segunda fase (estudio exploratorio cuantitativo) se han calculado los índices de dificultad de los problemas del cuestionario, comparándolos entre sí y con investigaciones previas.

El estudio cuantitativo confirmatorio que se describe en el capítulo 3 incluye, además del estudio de las características del cuestionario a que hemos hecho referencia, el análisis de varianza de medidas repetidas y la correlación como técnicas confirmatorias para estudiar el efecto de las variables de tarea sobre la dificultad de los problemas. Se complementa con el estudio descriptivo del resto de las variables consideradas.

Finalmente, realizamos un análisis semiótico de los procesos de resolución de los problemas y un análisis cualitativo de las entrevistas en la última fase de la investigación. Podemos considerar que estos son análisis de contenido (Weber, 1986; Bardin, 1986) y pueden englobarse en las técnicas de análisis cualitativo de datos (Miles y Huberman, 1984; Gil, 1994; Huberman y Miles, 1994).

CAPÍTULO 2

RESULTADOS DE LA FASE EXPLORATORIA Y ANÁLISIS A PRIORI DEL CUESTIONARIO

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los resultados de la fase exploratoria de nuestra investigación, que ha tenido como finalidad principal la generación de hipótesis específicas para estudiar en la segunda fase de la investigación. El estudio exploratorio se ha centrado en el análisis en profundidad del cuestionario usado en las investigaciones de Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (al que nos referimos como Cuestionario A), así como de un segundo cuestionario (Cuestionario B) obtenido a partir del anterior, desde una doble perspectiva, que se describe en este capítulo.

A nivel teórico, hemos analizado primeramente las variables de tarea de los problemas, la estructura de los cuestionarios, y errores previsibles en cada problema (secciones 2.2 y 2.3). Los dos cuestionarios han sido además contrastados empíricamente con dos muestras de 27 y 29 estudiantes con preparación matemática avanzada en Marzo de 1994 y Marzo de 1995, respectivamente. El objetivo era analizar las dificultades y estrategias de resolución de los alumnos con este tipo de problemas que no habían sido estudiadas por los autores citados.

Los resultados del primero de estos estudios pilotos nos sirvieron para revisar el cuestionario A (Anexo 1) y producir el cuestionario B (Anexo 2) en el que hemos sustituido 2 de los problemas originales de Navarro-Pelayo, que resultaron excesivamente fáciles para nuestros alumnos, por dos nuevos problemas combinatorios compuestos. Los resultados del segundo estudio empírico mostraron que los problemas combinatorios resultaron difíciles para nuestros estudiantes.

Para proporcionar una explicación de esta dificultad y elaborar una pauta de referencia en los análisis de los procesos de resolución de los problemas por los estudiantes en el estudio de casos (Capítulo 4) hemos realizado adicionalmente en la sección 2.5. un análisis a priori de los posibles modos de resolución de cada uno de los problemas del cuestionario B, utilizando el modelo epistemológico descrito en el capítulo 1 como marco teórico de referencia.

En este capítulo describimos todos estos estudios, así como las conclusiones e hipótesis generadas a partir de la fase exploratoria de nuestro trabajo. Sus resultados han sido publicados en Roa y cols (1996a y 1996b).

2.2. DESCRIPCIÓN DE LOS CUESTIONARIOS

2.2.1. Cuestionario A

Este cuestionario se presenta en el Anexo 1 y se compone de 13 problemas para ser resueltos por escrito por los alumnos, que debían razonar sus soluciones y estrategias en el espacio que se les proporcionó dentro del mismo cuestionario. Por tanto, se espera una respuesta abierta ya que no se especifica al estudiante el procedimiento para obtener la solución, dejándole completa libertad en sus razonamientos.

El cuestionario se compone de problemas combinatorios simples, es decir, cuya solución se puede encontrar mediante la aplicación de una única operación combinatoria. Como justificaremos, los problemas constituyen una muestra representativa del este campo de problemas, debido al control de las variables de tarea fundamentales y a su variación sistemática, obtenida por medio del diseño experimental. Además el cuestionario había sido ya probado en la investigación de Navarro-Pelayo sobre una muestra de 728 alumnos de Bachillerato, lo que nos proporcionaba una pauta de comparación para nuestro trabajo.

De los problemas propuestos, 2 son de permutaciones, 3 de permutaciones con repetición, 2 de variaciones, 3 de variaciones con repetición y 3 de combinaciones. Abarcamos por tanto todas las operaciones combinatorias simples, excepto las combinaciones con repetición, que no suelen ser estudiadas durante la enseñanza secundaria. El tipo de operación combinatoria ha sido un factor determinante de la dificultad de los problemas y del tipo de error cometido en las investigaciones de Fischbein y Gazit (1988) y de Navarro-Pelayo (1994).

El diseño del cuestionario tiene también en cuenta las siguientes variables de tarea, que también han determinado la dificultad del problema o el tipo de error en alguna de las dos investigaciones anteriormente citadas:

- El esquema combinatorio implícito en el enunciado, ya que se incluyeron problemas del modelo de selección, colocación y partición. La importancia de esta variable es debida a que la definición de las operaciones combinatorias usualmente se hace usando el esquema de selección;
- El contexto o tipo de objetos que se combinan: considerándose personas, números o letras y objetos, ya que es más sencillo darse cuenta de la importancia del orden en contextos de números o letras que en el de personas u objetos.

Estas variables se variaron sistemáticamente y se cruzaron entre sí, mediante un diseño de tipo experimental, según el modelo de cuadrado greco-latino, ligeramente modificado, que permitiese evaluar el efecto de todos los niveles de los factores e interacción de primer orden entre ellos. Asimismo, se controló el tamaño de los parámetros, considerando tres niveles de magnitud, el tipo de redacción del enunciado, la ayuda suministrada y el orden de colocación de las preguntas a lo largo del cuestionario, que fue aleatorizado a lo largo del cuestinario.

A continuación analizamos los ítems que componen el cuestionario indicando los principales resultados obtenidos por Navarro-Pelayo en cada uno de ellos.

Problema 1: Colocar 4 chicos en fila

> Cuatro chicos son enviados al director del colegio por alborotar en clase. Para esperar su castigo, tienen que alinearse en fila ante la puerta del despacho. ¡Ninguno quiere ser el primero, desde luego!. Suponemos que los niños se llaman Andrés, Benito, Carlos y Daniel (los llamaremos A, B, C y D. ¿De cuántas formas posibles se pueden alinear?. Ejemplo: A B C D
> 1º 2º 3º 4º

Se trata de un problema de colocación de objetos distinguibles en casillas distinguibles, con enunciado típico de permutaciones de cuatro elementos. Podemos traducirlo fácilmente a un problema de selección ordenada sin repetición (elegir los cuatro niños en orden sucesivo).

Fue el problema n º1 en el trabajo de Navarro-Pelayo, quien obtuvo un 71% de respuestas correctas en los alumnos con instrucción y 23.9% en los alumnos sin instrucción, por lo que la enseñanza pareció ser especialmente significativa para mejorar la comprensión de la idea de permutación.

El tipo de error más frecuente en este problema fue la enumeración no sistemática, especialmente en los alumnos que no habían estudiado combinatoria. También en algunos alumnos aparece la respuesta ciega que consiste en dar una estimación sin justificar el método de solución.

Problema 2: Seleccionar 4 fichas de colores

> En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

El esquema combinatorio implícito en el enunciado de este ítem ha sido el de selección ordenada, el tipo de elementos que se combina son objetos distinguibles e indistinguibles y la operación combinatoria que da la solución al problema es las permutaciones con repetición, PR.

Es un enunciado típico de selección de objetos, en este caso fichas de colores. Puesto que algunas fichas son del mismo color, contiene una mezcla de elementos distinguibles e indistinguibles. Puesto que la selección es exhaustiva, se llega finalmente a las permutaciones con repetición. Fue el nº 2 en el cuestionario de Navarro-Pelayo, quien obtuvo una proporción del 27.6% de respuestas correctas en los alumnos con instrucción en el tema, lo que muestra la notable dificultad que tuvo este problema, incluso aunque la operación combinatoria nos parezca a priori fácil de identificar.

Respecto a las respuestas incorrectas, los principales tipos de error detectados en la investigación de Navarro-Pelayo en este ítem fueron los siguientes:

a) *Error de repetición:* Este error fue importante en los alumnos con instrucción, llegando al 54.4% de estos alumnos, quienes resolvieron el problema como si se tratase de un problema de variaciones ordinarias. En consecuencia, los alumnos no diferenciaron conceptualmente los dos tipos de permutaciones. Por el contrario, este error apareció solo en un 2.1% de los alumnos sin instrucción. Creemos, en consecuencia, que se trata de un error de tipo conceptual al no discriminar los dos tipos de operaciones combinatorias.

b) *Error en tipo de objeto:* Este error apareció principalmente en los alumnos sin instrucción (12.4%) y no en los alumnos con instrucción (2%). Se trata de considerar diferentes las dos bolas del mismo color, lo que puede detectarse en las producciones de los alumnos porque asignaron códigos diferentes (por ejemplo A1 y A2 para las dos bolas azules. Este error no es de tipo conceptual, sino un error de interpretación del enunciado del problema, ya que los alumnos asumen que las dos bolas azules son distinguibles, por lo que han cambiado los datos y resuelven bien el problema para los nuevos datos que ellos han interpretado.

c) *Error de enumeración,* principalmente en los alumnos sin instrucción (65%), quienes, comprendiendo adecuadamente el enunciado han mostrado una falta de capacidad de enumeración sistemática. La mayor parte de las veces ello fue debido a no emplear un razonamiento de tipo recursivo, para pasar de unas permutaciones dadas a otras de orden superior. Los alumnos con instrucción apenas mostraron este error (sólo el 8.8%) porque fueron muy pocos los que intentaron resolver el problema por enumeración.

Problema 3: Colocar 3 cartas en 4 sobres

> Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: Amarillo, Blanco, Crema y Dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: Podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

Se trata de la colocación de tres objetos no distinguibles en cuatro casillas distinguibles. Se obtiene la solución mediante las combinaciones $C_{4,3}$. Este problema es fácil de traducir a un esquema de selección, ya que colocar tres cartas en los sobres es equivalente a elegir tres de los cuatro sobres para poner dentro las cartas. Puesto que las cartas son iguales, el orden no interviene y se trata de una selección no ordenada.

Fue resuelto correctamente por un 26.7% de alumnos con instrucción y 26.9% de alumnos sin instrucción, por lo que en este problema no se observó mejora con la enseñanza. El principal error fue el error de orden (51.2%) y el error de parámetros (12.3%) en los alumnos con instrucción, y en los alumnos sin instrucción la confusión en el tipo de objetos (32.6%) y enumeración no sistemática (35.6%). El error de parámetros consiste en intercambiar los valores de los parámetros m y n en las fórmulas combinatorias y denota una falta de comprensión del significado de estos parámetros.

Problema 4: Repartir 4 coches entre 3 hermanos

> Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Es un problema de partición de un conjunto de objetos diferentes (los coches) en tres subconjuntos distinguibles (los hermanos). No hay restricciones respecto al número de objetos en cada subconjunto. La solución viene dada por las variaciones con repetición $VR_{4,3}$.

Se convierte en un problema de selección si pensamos que para cada coche elegimos uno de los tres niños (al que le damos el coche). Se puede repetir el niño e influye el orden; es por tanto una muestra ordenada con reemplazamiento.

Fue uno de los problemas más difíciles en la investigación de Navarro-Pelayo, ya que sólo fue resuelto correctamente por un 6 % de los alumnos con instrucción y un 0.3 % de los alumnos sin instrucción, de modo que no se observó ningún efecto de la instrucción sobre la dificultad de este problema.

Los principales errores observados en los alumnos con instrucción fueron el de parámetros (43.2 %) y repetición (22.9 %) mientras que en los alumnos sin instrucción lo fueron el de tipo de casillas (19.9 %) y no considerar todas las particiones posibles (19.9 %).

El error de *tipo de casillas* consiste en considerar las casillas distinguibles como indistinguibles o viceversa y en este problema particular consiste en no diferenciar a cuál de los hermanos se da cada coche. El error de *no considerar todas las particiones posibles* consiste en que el alumno considera sólo algunos tipos de particiones, por ejemplo, repartir sólo un coche a cada niño o repartir todos los coches al mismo niño.

Pensamos que un factor que ha incrementado la dificultad en este problema particular ha sido el hecho de intervenir dos conjuntos (coches y hermanos) y tener que considerar, en cada uno de ellos, si los objetos son distinguibles o no.

Problema 5: Extraer 3 bolas de una urna

> En una urna hay tres bolas numeradas con los dígitos 2, 4 y 7. Extraemos una bola de la urna y anotamos su número. Sin devolver a la urna la bola extraída, se saca una segunda bola y se anota su número; sin devolverla a la urna, se saca una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números diferentes de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: el número 724.

Es un problema de permutaciones ordinarias y el esquema implícito es el de selección ordenada sin reemplazamiento hasta agotar todos los elementos. Se puede convertir en un problema de colocación si se considera que colocamos los tres dígitos dados (tres objetos distinguibles) en tres posiciones preestablecidas (tres casillas distinguibles).

Este problema es el que presentó un mayor porcentaje de aciertos tanto en alumnos con instrucción (80.7 %) como en alumnos sin instrucción (77.2 %), no observándose diferencia acusada en los dos grupos de alumnos.

El error más frecuente, tanto en los alumnos con instrucción (27.3 %) como en los alumnos sin instrucción (38.8 %) es la repetición, es decir considerar la posibilidad de repetir números, aunque el enunciado del problema no lo permitía.

Problema 6: Colocar un grupo de 4 amigos en dos habitaciones

> Cuatro niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana) van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar a los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

Se trata de un problema de colocación de cuatro objetos diferentes (los niños) en dos celdas distinguibles (las habitaciones). Puesto que en cada celda puede ir más de un objeto llegamos a las variaciones con repetición $VR_{2,4}$. Se puede considerar el problema como un enunciado de selección si consideramos que es equivalente a elegir cuatro veces consecutivas una habitación de las dos disponibles (elegir la habitación en que dormirá cada uno de los cuatro niños).

El porcentaje de respuestas correctas fue solo del 7.4 % en alumnos con instrucción y del 13.1 % en alumnos sin instrucción; este problema es bastante similar, en cuanto a dificultad, al problema número 4 y tampoco observamos una diferencia significativa entre los alumnos con y sin instrucción.

El error más extendido fue el de parámetros en el 29.5 % de los alumnos con instrucción y la enumeración no sistemática en el 28.9 % de los alumnos sin instrucción.

Problema 7: Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2

> Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

Es un problema de partición de un conjunto de elementos diferentes (los amigos) en dos subconjuntos distintos (los trabajos a realizar). La solución de este tipo de problemas viene dada por las permutaciones con repetición $PR_{4, 2,2}$, o, lo que es equivalente, por las combinaciones de cuatro elementos tomados dos a dos. Esta segunda interpretación es más intuitiva cuando consideramos el problema bajo un esquema de selección: elegir dos de los cuatro amigos para realizar uno de los trabajos (el orden no influye).

Este problema es resuelto correctamente por el 39.2 % de los alumnos con instrucción y el 32.3 % de los alumnos sin instrucción, donde de nuevo observamos índices de dificultad similares en ambos grupos.

Entre los alumnos con instrucción el error más frecuente (35.6 %) es el orden que consiste en tener en cuenta el orden de selección de los elementos cuando no es necesario o viceversa. En este caso consiste en tener en cuenta el orden de selección de los niños para realizar el trabajo.

Entre los alumnos sin instrucción el error más frecuente fue no considerar una propiedad combinatoria (32.8 %), concretamente, no darse cuenta que cuando se elige uno de los grupos el otro está determinado.

Problema 8: Elegir 3 estudiantes de entre 5 voluntarios

> Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

Se trata de un enunciado de selección de tres personas entre las cuatro disponibles y el orden no interviene (selección no ordenada sin reemplazamiento). Por tanto, la solución del problema viene dado por las combinaciones ordinarias de cinco elementos tomados tres a tres $C_{5,3.}$

Las respuestas correctas son del 46 % en los alumnos con instrucción y del 22.6 % en los alumnos sin instrucción, de modo que en este problema se observó una mejora en el grupo de alumnos con instrucción.

La mayor dificultad la encuentran los alumnos con instrucción es el orden (61.1 %), es decir, los alumnos consideraron que el orden de elección era importante y en los alumnos sin instrucción fue la enumeración no sistemática (60.4 %).

Problema 9: Aparcar 3 coches en 5 cocheras

> El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:
>
> | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
> |---|---|---|---|---|
>
> ¿De cuantas formas pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera? Ejemplo: Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4.

Es un problema de colocación de 3 objetos diferentes (los coches) en 5 casillas distinguibles (las cocheras) con la condición de que sólo puede colocarse un objeto en cada casilla. La solución viene dada por las variaciones $V_{5,3}$. Se puede interpretar como un problema de selección ordenada sin reemplazamiento (cada persona selecciona una de las cocheras disponibles).

Las respuestas correctas ascienden al 41.8 % en los alumnos con instrucción y al 3.8 % en los alumnos sin instrucción, de modo que hay una mejora muy significativa en los alumnos con instrucción.

Los errores más frecuentes son de orden (37.8 %) en los alumnos con instrucción y de enumeración no sistemática (66.6 %) en los alumnos sin instrucción.

Problema 10: Repartir 4 cromos entre 2 niñas

> María y Carmen tienen cuatro cromos numerados del 1 al 4. Deciden repartírselos entre las dos a partes iguales. ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2 y Carmen con los cromos 3 y 4.

El esquema combinatorio del enunciado es el de partición. Se trata de formar dos subconjuntos distinguibles de dos elementos a partir de un conjunto de cuatro elementos distinguibles. Puesto que una vez formados los subconjuntos, el orden de los elementos no es importante, la solución viene dada por las combinaciones $C_{4,2.}$ Se puede también interpretar como la selección, por parte de una de las niñas de dos de los cromos disponibles (selección no ordenada sin reemplazamiento).

Las respuestas correctas fueron del 37.2 % en los alumnos con instrucción y del 31 % en los alumnos sin instrucción.

El error más frecuente en los alumnos con instrucción es el de repetición (54.4%) ya que tomaron variaciones en lugar de combinaciones). En los alumnos sin instrucción los errores más frecuentes fueron el de enumeración no sistemática (65%) y error en tipo de objeto (12.4%).

Problema 11: Seleccionar números de 3 cifras

> En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2 , 4 , 7 y 9. Elegimos una bola del bombo, anotamos su número y la devolvemos al bombo. Se elige una segunda bola, se anota su número y la devolvemos al bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 2 2 2.

El esquema es de selección ordenada con reemplazamiento y el contexto de números. La solución es $VR_{4,3.}$ Se puede transformar en un problema de colocación si suponemos que colocamos uno de los cuatro dígitos posibles (elementos distinguibles) en cada una de las posiciones distinguibles (unidades, decenas y centenas).

Las respuestas fueron correctas en el 59.1 % de los alumnos con instrucción y en el 12.5 % de los alumnos sin instrucción, habiendo, por tanto, una clara mejoría con la instrucción

El error más frecuente de los alumnos con instrucción estuvo mayoritariamente en la repetición (27.4 %), parámetros (12.9%), y enumeración no sistemática (12.9% y en los alumnos sin instrucción en la enumeración no sistemática (76.3 %).

Problema 12: Colocar 5 cartas

> Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A , B , C , C , C . ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de otra formando una hilera? Ejemplo: Pueden estar colocadas de la siguiente forma A C B C C .

Se trata de un problema de colocación de objetos (algunos son iguales) en posiciones fijas distinguibles, que pueden interpretarse como casillas. Su solución es las permutaciones con repetición $PR_{5,3,1,1.}$ También puede interpretarse como la selección progresiva sin reemplazamiento de las cinco cartas en el orden dado de colocación, por lo que el orden sería relevante y se trataría de una selección ordenada.

El éxito acompañó al 29.5 % de los alumnos con instrucción y al 10.6 % de los alumnos sin instrucción, habiendo una ligera mejoría en los primeros.

El error más frecuente fue la repetición (53.6 %) en los alumnos con instrucción y la enumeración (78.4 %) en los alumnos sin instrucción.

Problema 13: Elegir un comité de 3 miembros

> Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: Presidente, Tesorero y Secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos? Ejemplo: Que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

Es un enunciado de selección ordenada sin reemplazamiento y la solución viene dada por las variaciones $V_{4,3}$. También puede interpretarse como un problema de colocación de objetos distinguibles en casillas distinguibles (colocar cada cargo en una de las personas disponibles).

Las respuestas correctas fueron del 59.7 % en los alumnos con instrucción y del 9.5 % en los alumnos sin instrucción habiendo una clara superioridad de los primeros. El error más frecuente fue el orden (41.3 %) en los alumnos con instrucción y la enumeración no sistemática (65.9 %) en los alumnos sin instrucción.

La estructura del diseño del cuestionario A en cuanto a las variables tenidas en cuenta se resume en la tabla 2.2.1. Observamos que cada esquema combinatorio se ha cruzado con una operación combinatoria, excepto el esquema de partición que no se cruza con las permutaciones y variaciones ordinarias, debido a que el tipo de problema que se obtiene en este caso es poco realista.

Una vez cruzadas estas dos variables entre sí, se combina con el tipo de contexto (objetos, personas y números/letras) aplicando un diseño similar al de cuadrado latino, excepto que hay casillas vacías. Se superponen tres niveles de tamaño de la solución, que aunque no es una variable independiente, se mantiene controlada.

El diseño del cuestionario y su racionalidad se describe con mayor detalle en Navarro-Pelayo (1994) y Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1997a). Una vez elegidas las combinaciones de variables y redactados ítems adecuados, se depuraron sucesivamente hasta llegar al enunciado actual, aleatorizándose la colocación en el cuestionario, hasta llegar a la tabla 2.2.1.

Tabla 2.2.1: Diseño final del cuestionario A

	COLOCACION	SELECCIÓN	PARTICION
COMBINACIONES ORDINARIAS	Objetos C_4^3 Item 3	Personas C_5^3 Item 8	Números C_4^2 Item 7
PERMUTACIONES CON REPETICIÓN	Letras $PR_5^{1,1,3}$ Item 12	Objetos $PR_4^{1,1,2}$ Item 2	Personas $PR_4^{2,2}$ Item 10
VARIACIONES CON REPETICION	Personas VR_2^4 Item 6	Números VR_4^3 Item 11	Objetos VR_3^4 Item 4
PERMUTACIONES ORDINARIAS	Personas P_4 Item 1	Números P_3 Item 5	
VARIACIONES ORDINARIAS	Objetos V_5^3 Item 9	Personas V_4^3 Item 13	

Tabla 2.2.2: Índices de dificultad de los problemas del cuestionario A en las muestras de Navarro-Pelayo

Problema	Alumnos con instrucción (n = 352)	Alumnos sin instrucción (n = 368)
	Índice de Dificultad	Índice de Dificultad
1	0.710	0.239
2	0.276	0.163
3	0.267	0.269
4	0.060	0.003
5	0.807	0.772
6	0.074	0.131
7	0.392	0.323
8	0.460	0.226
9	0.418	0.038
10	0.372	0.310
11	0.591	0.125
12	0.295	0.106
13	0.597	0.095

En la tabla 2.2.2 presentamos los índices de dificultad de los 13 problemas que componen el cuestionario A en la muestra de Navarro-Pelayo, donde observamos que, en general la instrucción ayudó a mejorar la capacidad de resolución de estos problemas, aunque la mejora no fue homogénea en todos los ítems. Observamos que en algunos casos (problemas 2, 3, 4, 6) los problemas siguen teniendo una gran dificultad, en otros, los resultados, aunque no tan deficientes son similares en ambos grupos (problemas 5, 7, 10, 12), Sólo en 5 problemas se observó una diferencia significativa en los dos grupos de alumnos. Esto nos llevó a continuar la investigación sobre el tema y pasar el cuestionario a una muestra de alumnos de mayor edad y preparación. Los resultados se describen en la sección 2.5.

2.2.2. Cuestionario B

Una vez analizada la primera muestra piloto con estudiantes de 5º curso de la licenciatura de matemáticas, cuyos resultados se describen en la sección 2.4, se revisó el cuestionario A eliminando de él los dos problemas de permutaciones sin repetición (problemas 1 y 5).

La razón de esta eliminación es doble: Por una parte, los citados problemas de permutaciones sin repetición habían sido resueltos correctamente por la gran mayoría de los alumnos a los que se les pasó la prueba. La resolución se realizó de una manera mecánica, mediante simple aplicación de la fórmula de las permutaciones, por lo que no nos aportaba ninguna información sobre las estrategias y razonamientos de los alumnos.

Por otra parte, su eliminación nos permitía introducir dos problemas combinatorios compuestos sin alargar excesivamente el cuestionario; la inclusión de problemas compuestos (elementales) con nuestra población de estudiantes nos parecía posible y deseable dado que esta clase de problemas no fueron considerados por Navarro-Pelayo.

El cuestionario B, que se incluye en el Anexo 2 se compone de nuevo de 13 problemas; de ellos, 3 son de permutaciones con repetición, 2 de variaciones, 3 de variaciones con repetición, 3 de combinaciones y 2 compuestos, es decir, se sustituyen los problemas de permutaciones ordinarias por problemas combinatorios compuestos. Respecto al resto de las variables del cuestionario, se mantienen el enunciado de los restantes problemas y, en consecuencia, los valores de sus variables.

Para establecer el orden en que debían aparecer los problemas en el cuestionario se ha tenido en cuenta, por una parte, una distribución uniforme de los distintos tipos de problemas y, por otra parte, el índice de dificultad de cada uno de ellos, dando por buenos al efecto los resultados obtenidos por Navarro-Pelayo en la aplicación del cuestionario previo, así como nuestros propios resultados.

Tabla 2.2.2: Comparación de los cuestionarios A y B

Cuestionario B	Cuestionario A
Problema 1: Seleccionar 4 fichas de colores	Problema 2
Problema 2 (compuesto): Alinear 4 cartas	No incluido
Problema 3: Colocar 3 cartas en 4 sobres	Problema 3
Problema 4: Repartir 4 coches entre 3 hermanos	Problema 4
Problema 5: Dividir un grupo de 4 amigos en 2 grupos de 2	Problema 7
Problema 6: Elegir 3 estudiantes entre 5 voluntarios	Problema 8
Problema 7 (compuesto):Formar números de 5 cifras	No incluido
Problema 8: Aparcar 3 coches en 5 cocheras	Problema 9
Problema 9:Colocar 4 niños en 2 habitaciones	Problema 6
Problema 10: Repartir 4 cromos entre 2 niñas	Problema 10
Problema 11: Formar números de 3 cifras	Problema 11
Problema 12: Colocar 5 cartas	Problema 12
Problema 13: Elegir un comité de 3 miembros	Problema 13

Además de los problemas 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, y 13, tomados del anterior cuestionario, con ligeros cambios en el orden de colocación en el cuestionario, se han introducido dos problemas combinatorios compuestos (problemas 2 y 7). Estos dos problemas han sido adoptados de la tesis de Gascón (1988), quien los utilizó para analizar el aprendizaje de los alumnos en técnicas de resolucion de problemas. Nuestro propósito era indagar con más profundidad en el razonamiento combinatorio de los alumnos y en las estrategias de resolución utilizadas, realizar una análisis más pormenorizado sobre la dificultad de estos problemas, su posible relación con el éxito en los restantes y descubrir por qué, dentro de un mismo tipo, hay problemas tan dispares en cuanto a su dificultad.

En la tabla 2.2.2 comparamos la composición del cuestionario B con la del A.

Describimos, a continuación los dos items compuestos incluidos en el cuestionario B.

Problema 2: Seleccionar 4 cartas diferentes y colocarlas en posiciones diferentes, teniendo en cuenta unas condiciones dadas

> Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras? Ejemplo: sota caballo rey 1.

Se trata de un problema combinatorio compuesto. El tipo de elementos que se combina son objetos (cartas) distinguibles. Sin embargo, este conjunto de objetos se ha dividido en dos subconjuntos. El primero de ellos contiene las figuras (sota, caballo y rey). En el enunciado del problema se encuentran lo siguientes esquemas implícitos:

- El esquema de colocación, porque se trata de colocar (alinear) cuatro cartas en todas las formas posibles. Se trata de colocar un conjunto de 4 cartas en 4 posibles posiciones (celdas), por lo que la correspondencia es biyectiva. Es decir, si no se diesen otras condiciones adicionales, se trataría de un problema de permutaciones ordinarias.

- El esquema de selección, porque hay que seleccionar cuatro de las doce cartas. Puesto que para efectos de selección, el orden no es relevante (aunque lo sea para el de colocación posterior de las cartas) se haya implícita la operación de combinaciones. Sin embargo, puesto que tres de las cartas están fijadas, sólo es preciso elegir una carta de las 9 restantes, lo que hace que sea especialmente sencilla la solución de este problema de selección.

Vemos que el problema puede descomponerse en dos problemas combinatorios simples: a) seleccionar las cuatro cartas y b) colocar de todas las maneras posibles las cartas una vez seleccionadas. Sin embargo, las soluciones a estos dos problemas parciales han de ser combinadas entre si mediante la regla del producto, por lo que aparece un tercer problema combinatorio simple de cálculo de todas las posibilidades en un producto cartesiano.

Problema 7: Seleccionar 5 dígitos con reemplazamiento y colocarlos posteriormente para formar un número de 5 cifras

> ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1 , 2 , 4 , 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos? Ejemplo: 8 8 1 2 4.

Se trata de un enunciado típico de un problema combinatorio de formación de números a partir de una serie dada de dígitos con ciertas condiciones. El tipo de elementos que se combina son números. Aparecen los siguientes esquemas combinatorios en el enunciado del problema:

- Determinación del número de posiciones diferentes en que las dos cifras 8 pueden colocarse en el número de 5 cifras. Este problema podría interpretarse en el esquema de colocación, ya que podemos suponer que tenemos un conjunto de dos elementos iguales (los dos ochos) para colocar en cinco celdas diferentes (las posiciones), con la condición de que en cada celda sólo vaya un elemento. Otra manera de ver el problema es como selección de 2 de las 5 celdas para colocar los dos 8. En ambos casos aparece la operación combinatoria de combinaciones.
- Una vez que se han fijado las posiciones para los dos 8, determinar cuántos números diferentes podrían formarse en las tres posiciones restantes. Se trataría de un problema de selección con reemplazamiento y ordenada de 3 elementos entre los 4 disponibles, esto es, de un problema de variaciones con repetición. Es importante también darse cuenta de que la solución de este problema parcial no depende de la posición escogida para los dos ochos.

- Determinación de todas las formas posibles en que pueden combinarse las dos soluciones anteriores, mediante la regla del producto. Es decir, calcular el número de elementos de un producto cartesiano.

2.3. ESTRUCTURA DEL CUESTIONARIO B. VARIABLES DE LOS PROBLEMAS

Las variables independientes y sus respectivos valores tenidas en cuenta en el conjunto de los 13 problemas que componen el cuestionario B son las siguientes:

V1: Número de operaciones combinatorias

Consideramos dos tipos de problemas:

- *Problemas de recuentos simples:* Se resuelven mediante la aplicación de una sola operación combinatoria (Problemas 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13).
- *Problemas de recuento compuestos:* Requieren dos operaciones combinatorias y su combinación por medio de la regla del producto (Problemas 2 y 7).

V2: Tipo de operación combinatoria

Consideramos cuatro operaciones combinatorias y dos problemas compuestos: *Permutaciones con repetición:* Problemas 1, 5 y 12; *Combinaciones:* Problemas 3, 6, y 10; *Variaciones:* 8 y 13; *Variaciones con repetición:* 4, 9, 11; *Compuestos*: 2 (permutaciones y combinaciones) y 7 (combinaciones y variaciones con repetición).

V3: Esquema combinatorio

Los problemas que aparecen en el cuestionario, independientemente de la operación combinatoria con que se resuelvan y de la naturaleza de los elementos, corresponden a alguno de los tres esquemas combinatorios siguientes:

Esquema de selección: Cuando implícitamente se hace referencia a la idea de muestreo ordenado o no ordenado, con o sin reemplazamiento. Clasificamos en el mismo los siguientes problemas, teniendo en cuenta el verbo que aparece en el enunciado:

- Problema 1: ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer la selección....?
- Problema 6: ¿De cuántas formas puede elegir...?
- Problema 11: ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?
- Problema 13: ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir...?

Esquema de colocación: Cuando se trata de colocar los elementos (distinguibles o no) de un cierto conjunto en una serie de posiciones o casillas (distinguibles o no):

- Problema 3: ¿De cuántas formas podemos colocar...?
- Problema 8: ¿De cuántas formas posibles pueden aparcar...?
- Problema 9: ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar...?
- Problema 12: ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar...?

Esquema de partición: Cuando se trata de formar una partición de un conjunto de objetos iguales o diferentes en un número de dado de subconjuntos con ciertas condiciones dadas:

- Problema 4: ¿De cuántas formas diferentes puede repartir...?
- Problema 5: ¿De cuántas formas pueden dividirse...?
- Problema 10: ¿De cuántas formas se pueden repartir...?

Compuestos: Cuando en el enunciado intervienen elementos de varios modelos:

- Problema 2: ¿De cuántas formas se pueden alinear (colocación) las cuatro fichas con la condición que siempre estén seleccionadas (selección)...?
- Problema 7: ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse (colocación) si cada uno debe contener (colocación)...?

V4: Naturaleza de los elementos que forman la configuración

La naturaleza de los elementos que se combinan y que aparecen en los distintos problemas del cuestionario es como sigue:

Objetos. Según Fischbein y Gazit (1988) es más dificil diferenciar si es necesario o no tener en cuenta el orden cuando se trata de combinar objetos, como en los siguientes problemas:

Problema 1: Fichas de colores (azules, blancas y rojas)
Problema 2: Cartas (1,2,...,9, sota, caballo, rey)
Problema 3: Sobres (amarillo, blanco, crema y dorado).
Problema 4: Coches (azul, blanco, verde y rojo).
Problema 8: Coches (Angel, Beatriz y Carmen).

Personas: Al igual que con los objetos es dificil estar seguros si el orden es relevante, porque un conjunto de personas no está naturamente ordenado, de forma que la ordenación que establecemos es arbitraria, como en los siguientes casos:

Problema 5: Amigos (Andrés, Benito, Clara y Daniel)
Problema 6: Estudiantes (Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María).
Problema 9: Niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana)
Problema 13: Candidatos (Arturo, Basilio, Carlos y David).

Números o letras: En este caso los conjuntos están naturalmente ordenados y esto influye en la facilidad en discriminar si el orden es pertinente:

Problema 7: Dígitos (1, 2, 4, 6 y 8).
Problema 10: Cromos (1, 2, 3 y 4).
Problema 11: Bolas (2, 4, 7 y 9)
Problema 12: Cartas (A, B y C).

V5: Tamaño de la solución

Los problemas que aparecen en el cuestionario, independientemente de otras consideraciones, dan lugar a la solución que se expresa a continuación, donde *n* se refiere al número de configuraciones obtenidas:

Número pequeño de configuraciones: Cuando el número obtenido es pequeño la solución puede obtenerse fácilmente por ensayo y error o con una enumeración sistemática, aunque no se haga uso del razonamiento recursivo: Problema 1 (n=12), Problema 3 (n=4), Problema 5 (n=6), Problema 6 (n=10), Problema 9 (n=16), Problema 10 (n=6), Problema 12 (n=20) y Problema 13 (n=24).

Número grande de configuraciones: Cuando el tamaño de la solución es grande es difícil obtener la solución por ensayo y error. Será preciso o bien reconocer la operación combinatoria o establecer estrategias tales como dividir un problema en partes o fijar variables. Todo ello unido al uso de la recursión que es un razonamiento combinatorio por excelencia, aunque los alumnos no están muy acostumbrados, pues es típico de la matemática discreta en la que no han sido entrenados a lo largo de su carrera: Problema 2 (n=216), Problema 4 (n=81), Problema 7 (n=640), Problema 8 (n=60) y Problema 11 (n=64).

En ocho de los trece problemas el tamaño de la solución, que varia entre 4 y 24, puede considerarse como manejable tanto en lo que se refiere a la explicitación de cada uno de los casos como en lo referente a una posible previsión del número de ellos y en los cinco problemas restantes, en donde varia entre 64 y 640, puede considerarse poco manejable en el doble sentido antes mencionado.

2.4. ANÁLISIS DE RESULTADOS EXPERIMENTALES DE LA FASE EXPLORATORIA

2.4.1. Resultados de la aplicación del cuestionario A a una muestra piloto

Una vez analizados los dos cuestionarios y los posibles procesos de resolución del segundo de ello, pasamos a describir brevemente los resultados obtenidos con los cuestionarios en las muestras piloto (1994 y 1995). Como hemos indicado los alumnos de ambas muestras cursaban la especialidad de metodología en 5º curso de matemáticas y por ello creemos se encontraban suficientemente motivados para colaborar en una investigación didáctica.

Los cuestionarios se pasaron durante una de las clases de una de sus asignaturas, con una duración de dos horas, que fue suficiente, ya que todos los alumnos finalizaron la prueba dentro del tiempo asignado. Al comenzar, se les explicó la finalidad de la investigación, y la importancia del estudio de los errores y dificultades para la mejora de la enseñanza. Se les pidió que completasen los problemas, usando el método que ellos prefiriesen y que explicasen con detalle el procedimiento empleado.

Una vez recogidos y codificados los datos se realizó un estudio descriptivo, estudiando tan sólo el número de respuestas correctas en cada uno de los problemas, para analizar si la dificultad de los problemas se conservaba en estos alumnos con una alta preparación matemática y tomar una decisión respecto a si se usaba el mismo cuestionario en la fase final del trabajo en la que haríamos un estudio detallado que se recoge en el capítulo 3. A continuación analizamos nuestros resultados en las muestras piloto.

La tabla 2.4.1.1 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de aciertos en los distintos problemas del cuestionario A en la primera muestra piloto (1994, n=27). En un primer análisis, y a la vista de esta tabla, podemos observar la alta disparidad en cuanto al porcentaje de aciertos en los diferentes ítems, que van desde el 7% de aciertos en el problema 4 hasta el 100% de aciertos en el problema 1.

Tabla 2.4.1.1. Frecuencias y porcentajes de respuestas correctas en la aplicación del cuestionario A (n = 27)

Problema	Frecuencia absoluta	Porcentaje
1	27	100
2	18	67
3	25	93
4	2	7
5	26	96
6	10	37
7	19	70
8	19	70
9	15	56
10	9	35
11	20	77
12	14	54
13	16	62

Como hemos dicho en la sección 2.2. el problema 1 es un enunciado característico de permutaciones, operación que nuestros estudiantes reconocieron con gran facilidad. En cambio el problema 4 es un problema de variaciones con repetición planteado según el esquema de partición, que no es familiar a estos alumnos y cuyo número de configuraciones hace difícil encontrar la solución por un método de ensayo y error. Sería preciso que el alumno, o bien traduzca el problema a un esquema de selección, en el cual le resulta fácil identificar la operación combinatoria, o bien aplique la recursión, junto con una serie de estrategias, como la división en partes y fijación de variables.

Nos ha parecido también interesante comparar los resultados obtenidos en los alumnos de matemáticas, que se preparan para ser profesores de esta materia, en cuanto al porcentaje de respuestas correctas en cada uno de los problemas del cuestionario A, con los obtenidos por Navarro-Pelayo en alumnos con instrucción.

Al observar dichos resultados, contenidos en la tabla 2.4.1.2, podemos obtener las siguientes conclusiones:

- En los dos grupos de alumnos hay una gran variabilidad en cuanto al porcentaje de respuestas correctas en los diferentes problemas, a pesar de que todos ellos son problemas combinatorios simples con enunciado similar al que suele aparecer en los libros de texto de primer curso de Bachillerato.

Tabla 2.4.1.2. Porcentaje de soluciones correctas en cada problema del cuestionario A en dos grupos de alumnos

Problema	Porcentaje de soluciones correctas: Alumnos de Secundaria con instrucción	Porcentaje de soluciones correctas: Alumnos de la Licenciatura de Matemáticas
1	71	100
2	27.6	67
3	26.7	93
4	6	7
5	80.7	96
6	7.4	37
7	39.2	70
8	46	70
9	41.8	56
10	37.2	35
11	59.1	77
12	29.5	54
13	59.7	62

- En ambas muestras, los dos problemas con mayor porcentaje de éxito son el 1 y el 5 que son los problemas de permutaciones simples, de lo que deducimos que esta operación combinatoria se comprende con facilidad, se reconocen facilmente las situaciones en que puede aplicarse para resolver problemas y se recuerda mucho tiempo después de la enseñanza.
- En las dos muestras el problema más difícil resultó ser el 4, que es un problema en contexto de partición y cuyo tamaño de solución hace difícil el método de ensayo y error. Deducimos de ello que los alumnos no tienen facilidad para traducir el enunciado de un problema de partición a un problema de selección y que su capacidad de enumeración sistemática no es lo suficiente para permitirles resolver el problema por medio de la enumeración;
- El porcentaje de aciertos, en general, superior en los estudiantes de Matemáticas en casi todos los problemas. Se deduce que la mayor madurez y preparación contribuye, en general a aumentar la capacidad combinatoria de los sujetos.
- La mejora no es homogénea en todos los problemas. En los problemas 4, 10 y 13 los resultados fueron bastante similares en ambas muestras y los problemas 4 y 10 continúan siendo muy difíciles. Estos son precisamente problemas de partición y colocación que no han sido tratados sistemáticamente en la enseñanza. No parece pues defendible la idea de transferencia de la habilidad combinatoria adquirida en un tipo particular de problema a otros con ligeros cambios en el enunciado.

Siguiendo con los resultados obtenidos en estudiantes universitarios, y para analizar con más detalle cuáles son las variables de los problemas que determinan la diferencia de dificultad en los ítems, hemos agrupado los problemas según las variables que se describieron en la sección 2.2. La tabla 2.4.1.3 contiene las frecuencias absolutas y porcentaje de aciertos de los distintos problemas del cuestionario según la operación combinatoria que los resuelve y, en ella, podemos observar lo siguiente:

- Respecto a la operación combinatoria los problemas más fáciles son los de permutaciones, que son resueltos correctamente por al menos un 96% de los alumnos; seguidos, con una dificultad media, de los de permutaciones con repetición y variaciones y, también con una dificultad media pero con gran variación en cuanto al porcentaje de aciertos, los de combinaciones. Los problemas más difíciles son los de variaciones con repetición, que en alguno de los casos sólo son resueltos correctamente por un 7% de los alumnos.

Tabla 2.4.1.3. Porcentaje de aciertos según características del ítem

	COLOCACION	SELECCIÓN	PARTICION
COMBINACIONES ORDINARIAS	Objetos Item 3 93	Personas Item 8 70	Números Item 10 35
PERMUTACIONES CON REPETICIÓN	Letras Item 12 54	Objetos Item 2 67	Personas Item 7 70
VARIACIONES CON REPETICION	Personas Item 6 37	Números Item 11 77	Objetos Item 4 7
PERMUTACIONES ORDINARIAS	Personas Item 1 100	Números Item 5 96	
VARIACIONES ORDINARIAS	Objetos Item 9 56	Personas Item 13 62	

- Si nos fijamos en el esquema implícito en el enunciado, el esquema de selección ha resultado, en general más sencillo, seguido por el de colocación y partición, que ha sido el más difícil. Se observa una mayor homogeneidad dentro de los problemas de selección, por lo que parece haber una interacción entre el esquema combinatorio y la operación combinatoria.
- En lo que concierne al tipo de elemento que se combina, los resultados son variables en cada categoría, pero observamos una mayor dificultad en el contexto de objetos seguido por el de personas y finalmente números/letras.
- Estos resultados coinciden con los de Navarro- Pelayo, por lo que no observamos un cambio substancial con la madurez y preparación del alumno, salvo en la mayor proporción general de respuestas correctas.

Una vez llegados a las conclusiones anteriores, pensamos que sería necesario revisar el cuestionario para adaptarlo a las características de los sujetos en que estamos interesados. Dado el bajo índice de dificultad de los problemas de permutaciones optamos por suprimirlos, incorporando en su lugar dos problemas compuestos (aunque elementales). A continuación presentamos nuestros resultados en la segunda muestra piloto.

2.4.2. Resultados de la aplicación del cuestionario B a una muestra piloto

El cuestionario B, como ya se ha dicho, fue aplicado a una nueva muestra de 29 estudiantes de 5º curso de la licenciatura de matemáticas en el curso 1995-96, quienes también colaboraron con agrado en nuestra investigación. La forma en que se llevó a cabo la recogida de datos y las instrucciones dadas a los alumnos fueron similares a las ya descritas para la primera muestra piloto.

Una vez recogidos y codificados los datos procedimos a su análisis. La tabla 2.4.2.1 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de soluciones correctas en los distintos problemas del cuestionario B. En un primer análisis podemos observar de nuevo una gran variabilidad en cuanto al porcentaje de respuestas correctas en cada uno de los problemas, que oscila desde el 7% de aciertos en el problema 4 hasta el 76% de aciertos en los problemas 3 y 5, pasando por proporciones intermedias entre estos valores.

Esta gama de dificultad nos pareció más conveniente para nuestro estudio, porque nos proporcionaba problemas de dificultad alta, moderada y baja. Los problemas de alta dificultad serían buenos para poder detectar los buenos resolutores de problemas combinatorios y seleccionar algunos de ellos en la fase de entrevistas. Los problemas de dificultad baja y moderada nos permitirían estudiar diversas estrategias de resolución, al ser previsible que un número importante de alumnos los resolviera con éxito y que entre ellos encontraríamos una gama amplia de métodos de solución.

Tabla 2.4.2.1. Frecuencias y porcentajes de soluciones correctas en la aplicación del cuestionario B (n = 29)

Problema	Frecuencia absoluta	Porcentaje
1	20	69
2	11	38
3	22	76
4	2	7
5	22	76
6	17	59
7	4	14
8	15	52
9	13	45
10	20	69
11	14	48
12	13	45
13	21	72

En particular, y respecto a los dos nuevos problemas compuestos incluídos (2 y 7), uno de ellos es de dificultad alta y otro moderada, por lo que hemos considerado conveniente mantenerlos en la fase final del estudio.

Como es lógico, los resultados han sido algo peores que en la primera muestra piloto debido a que hemos sustituido los problemas de permutaciones, que eran los más sencillos en el cuestionario A, por problemas compuestos. Todo esto no hace más que confirmar nuestras previsiones del análisis de la primera muestra piloto.

Si agrupamos los problemas según las distintas variables de tarea de los problemas (Tabla 2.4.2.2.), podemos obtener las siguientes conclusiones:

- Respecto a la operación combinatoria, los problemas más fáciles son los de combinaciones, que son resueltos correctamente por al menos un 59% de los alumnos, seguidos de los de permutaciones con repetición y variaciones, que tienen una dificultad parecida y los de variaciones con repetición. En estos últimos, el porcentaje de aciertos varía entre el 7% y el 48% de los alumnos.

Tabla 2.4.2.2. Porcentaje de respuestas correctas, según características del ítem

	COLOCACION	SELECCIÓN	PARTICION
COMBINACIONES ORDINARIAS	Objetos Item 3 76	Personas Item 6 59	Números Item 10 69
PERMUTACIONES CON REPETICIÓN	Letras Item 12 45	Objetos Item 1 69	Personas Item 5 76
VARIACIONES CON REPETICION	Personas Item 9 45	Números Item 11 48	Objetos Item 4 7
VARIACIONES ORDINARIAS	Objetos Item 8 52	Personas Item 13 72	
PROBLEMAS COMPUESTOS	Item 2 38	Item 7 14	

- Los problemas mas difíciles son los compuestos, que en el mejor de los casos son resueltos correctamente por un 38% de los alumnos. Esto era de esperar, porque para resolver el problema el alumno precisa resolver correctamente dos problemas combinatorios simples y combinar sus soluciones.
- No observamos un efecto claro del esquema combinatorio, aunque el problema más difícil fue uno de partición; observamos, por el contrario un efecto conjunto multiplicado del esquema de partición y la operación de variaciones con repetición.
- No encontramos un efecto claro del tipo de objetos que se combina; esta variable no parece tener efecto sobre la dificultad de los problemas para nuestros alumnos.
- Los problemas más difíciles corresponden a aquellos que tienen un tamaño grande de solución: problema 2, n=216, problema 4, n=81, problema 7, n=240. Los problemas con tamaño de solución menor (1,3 y 5) han tenido un porcentaje alto de soluciones correctas. Deducimos que el tamaño de la solución afecta también a la facilidad del problema, posiblemente porque si el alumno no es capaz de identificar la operación combinatoria, pueda determinar las configuraciones pedidas mediante enumeración, incluso aunque esta sea no sistemática.
- La dificultad de los problemas se mantiene para cualquiera de los tipos. Aunque hemos dicho que los problemas de combinaciones y variaciones eran los más fáciles, en ambos casos hay un problema que solo es resuelto por menos del 60% de los alumnos.

2.5 ANÁLISIS A PRIORI DE PROCESOS DE RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Los resultados de los estudios con las muestras piloto fueron sorprendentes, en el sentido de mostrar claramente la dificultad de los problemas, aparentemente simples, para alumnos con una alta preparación matemática. A primera vista, no se precisan conocimientos matemáticos sofisticados para resolverlos, pero el hecho es que los resultados muestran claramente su dificultad.

Una posible explicación es que la resolución de estos problemas precise el conocimiento de una serie de elementos, no solo conceptuales, sino de técnicas y destrezas, empleo adecuado de notación (ostensivos), capacidad de argumentación y su puesta en relación con los problemas dados y otros derivados de ellos. Como consecuencia, creimos necesario realizar un análisis profundo, a nivel teórico de los procesos potenciales de resolución de estos problemas, para mostrar la presencia de los tipos de elementos señalados y generar, en base a ello, hipótesis de investigación para la segunda fase del estudio. Dichas hipótesis estarían encaminadas a explicar la dificultad de los problemas combinatorios para los estudiantes con alta preparación matemática.

En esta sección vamos a realizar un análisis de los conocimientos puestos en juego en dos modos estándares de resolver los problemas incluidos en el cuestionario B. El primero suponiendo que el sujeto resolutor recuerda las fórmulas de las operaciones combinatorias y las condiciones de su empleo (se tratará, por tanto, del *ajuste de un modelo combinatorio* ya conocido). En el segundo método suponemos que el sujeto no recuerda las fórmulas pero es capaz de *generar un modelo combinatorio* nuevo que proporciona la solución. En ambos casos suponemos que el sujeto usa el esquema operatorio productor de las configuraciones combinatorias implícito en el enunciado del problema.

El análisis consistirá en la presentación de unas soluciones que podemos calificar de "estándares" o expertas, seguido de la identificación de los conocimientos e interpretaciones (funciones semióticas) puestas en juego en cada una de ellas (Sección 1.3). Esto nos permitirá caracterizar las exigencias cognitivas de cada método, lo que nos servirá de pauta para analizar los procesos de resolución implementados por los estudiantes y explicar los errores y dificultades encontrados.

El tipo de análisis que hacemos de los razonamientos puestos de manifiesto en la solución de los problemas, está siendo desarrollado en diversos trabajos publicados por Godino (1998), Godino y Batanero (1999), Godino y Recio (1998) y Recio (1999). En nuestra investigación vamos a aplicarlo de manera sistemática para caracterizar los significados institucionales locales (relativos a los dos sujetos epistémicos mencionados) y las significados personales de la combinatoria elemental para los alumnos seleccionados en el estudio de casos (Capítulo 4).

La metodología consiste en descomponer los textos en unidades de análisis e identificar en ellos las entidades funcionales descritas en el modelo epistemológico que hemos adoptado como marco teórico de referencia (sección 1.3). En cada acto comunicativo las diversas expresiones denotan una o varias de tales entidades, cuya identificación permite caracterizar los conocimientos puestos en juego.

Debemos aclarar dos puntos en el análisis que realizamos:

- Todas las palabras y expresiones lingüísticas tienen la consideración de entidades ostensivas - esto es, son algo que se muestra por sí mismo- Pero en el análisis sólo resaltaremos aquellos ostensivos que son específicos del campo de la combinatoria.
- Con frecuencia las relaciones entre expresión y contenido es multivalente, o sea, es posible asociar como contenido más de una entidad. Dada la laboriosidad de identificar de manera exhaustiva los diversos contenidos denotados nos limitaremos a indicar una muestra suficiente para mostrar la riqueza y complejidad de los significados involucrados.

Nuestro análisis no es exhaustivo, además, porque es posible descomponer los textos en unidades menores, y también identificar interdependencias entre unidades mayores, pero lo consideramos suficiente para el objetivo pretendido de caracterizar dos tipos de razonamientos combinatorios que sirvan de referencia en el estudio de las respuestas de los estudiantes.

2.5.1. Problema 1: Selección ordenada de objetos distinguibles e indistinguibles [$PR_{4;2,1,1}$]

Enunciado:

> En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - La selección sucesiva de las 4 fichas produce como configuración una de las ordenaciones posibles de las fichas.
U2 - Al cambiar el orden de extracción de una ficha se obtiene una configuración diferente, excepto cuando cambian de lugar entre si las dos azules.
U3 - Este modo de generar las configuraciones corresponde al modelo de las permutaciones de 4 objetos entre los cuales 1 se repite 2 veces.
U4 - Por tanto, el número de configuraciones es $PR_4{}^2 = 4!/2!$
U5 - $PR_4{}^2 = (4.3)/2 = 12$.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Identificación de las configuraciones que se deben contar (extensivo, intensivo) como los resultados del esquema operatorio de seleccionar sucesivamente las 4 fichas (actuativo).
- Se reconoce que la selección es exhaustiva (4 fichas de 4) (intensivo).

U2:
- Reconocimiento de una propiedad (intensivo) del esquema operatorio: que el orden influye en la formación de las configuraciones.
- La acción (imaginada) de cambiar entre si el orden de las dos fichas azules no dar lugar a una nueva configuración; propiedad de equivalencia entre las dos azules (intensivo).

U3:
- Los conocimientos mencionados en U1+U2+U3 se ponen en relación con el concepto (intensivo) de "permutaciones de 4 objetos con repetición de 1 de ellos 2 veces".

U4:
- La expresión "permutaciones de 4 objetos con repetición de 1 de ellos 2 veces" se interpreta como, $PR_4{}^2 = 4!/2!$ (ostensivo) y se recuerda la fórmula;

U5:
- Interpretación de las expresiones factoriales como productos (intensivo).
- Identificación en el enunciado de los valores de los parámetros (intensivo).
- Realización de los cálculos de las operaciones indicadas (actuativo).

Tipos de conocimientos:

Extensivos
- Identificación de las configuraciones combinatorias como ordenaciones de 4 objetos, 2 de ellos indistinguibles.
- Reconocimiento del problema dado como perteneciente al tipo de los problemas resolubles mediante el modelo de las permutaciones con repetición.

Ostensivos:
- Permutación de 4 objetos con 1 de ellos repetido 2 veces.
- $PR_4^{\,2} = 4!/2! = (4.3)/2 = 12$.
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.

Actuativos:
- Extracción (imaginada) ordenada y exhaustiva de 4 fichas.
- Cálculo de (4.3)/2.

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Muestreo, orden, reemplazamiento; condiciones de realización de la selección (exhaustiva y sin reemplazamiento).
- Concepto de permutación con repetición; definición y condiciones de aplicación.

Validativos:
- Verificación de las condiciones de aplicación de las permutaciones con repetición.

Resolución 2: *Generación de un modelo combinatorio.*

U1 - Se trata de seleccionar todas las fichas sin repetir ninguna hasta agotarlas. El orden es importante.
U2 - Si todas las fichas fueran distintas, la primera ficha se puede seleccionar entre un conjunto de 4; hay, por tanto, 4 posibilidades.
U3 - Para la segunda ficha extraida hay 3 posibilidades, para la tercera, 2 y para la cuarta 1.
U4 - Cada extracción en un paso se puede combinar con todas las de los siguientes. Por tanto, el número de configuraciones sería de 4.3.2.1. = 24.
U4 - Pero como 2 fichas son iguales el cambio de orden entre ellas no produce una nueva configuración.
U5 - Cada 2 configuraciones de las 24 contadas se reducen a 1.
U6 - Por tanto, el número total de configuraciones será de 24/2 = 12.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Identificación de las configuraciones que se deben contar: Idea de muestreo (intensivo). Se reconoce que la selección es exhaustiva (4 fichas de 4) (intensivo). El orden es importante y no se puede repetir fichas (intensivos).

U2:
- Resolución de un problema diferente: si todas las fichas fueran distintas (extensivo).
- Planteamiento recursivo de un problema más sencillo: extraer una ficha entre 4 posibles (extensivo) e intensivo (puedo resolver el problema a partir de la solución de otro más sencillo).
- Se resuelve (de modo implícito) mediante enumeración sistemática (actuativo) o bien usando el número de fichas disponibles (intensivo).

U3:
- Se enuncian y resuelven otros tres problemas relacionados: extraer 3 fichas supuesto que se ha extraído una antes; etc. (extensivo; actuativo), controlando las condiciones anteriores (el

número de elementos que queda) (intensivo).

U4:

- Planteamiento (de modo implícito) del problema compuesto de los cuatro problemas resueltos previamente. ¿De cuántas formas distintas se pueden componer las soluciones de los problemas enunciados en U2 y U3?
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla del producto y aplicación de la misma: Se razona diciendo (de manera interiorizada) que cada una de los cuatro modos de extraer la 1ª ficha se compone con cada una de las 3 formas de extraer la 2º; por tanto, habrá 12 formas (regla del producto). Cada una de estas 12 formas se compone con cada una de las 2 formas de obtener las 3 fichas. Por tanto, el número de configuraciones es 24 (regla del producto, intensivo).
- La solución 24 se valida mediante una comprobación (implícita) del cumplimiento de las condiciones de aplicación de la regla del producto.

U5:

- Reconocimiento de una propiedad de las configuraciones: El cambio de orden en la extracción de las dos fichas azules no produce una configuración distinta (intensivo). Establecimiento de equivalencias entre ordenaciones (intensivo).
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla del cociente (intensivo).

U6:

- Expresión del cociente mediante la notación 24/2 (ostensivo) y realización del cálculo correspondiente (actuativo).

Tipos de conocimientos:

Extensivos:

- Planteamiento de subproblemas relacionados con el dado.
- Identificación de los ejemplares de configuración combinatoria en los subproblemas

Ostensivos:

- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Expresiones del producto y del cociente (4.3.2.1; 24/2).

Actuativos:

- Esquema operativo de selección ordenada y exhaustiva de objetos.
- Descomposición (y composición) recursiva del problema en subproblemas.
- Enumeración sistemática.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:

- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones en los subproblemas y el problema dado.
- Propiedades del proceso de extracción (orden, exhaustivo y no reemplazamiento).
- Reglas del producto y del cociente; equivalencia, condiciones de aplicación.
- Recursión

Validativos:

- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las reglas del producto y del cociente.

2.5.2. Problema 2: Colocación ordenada de objetos distinguibles con condiciones dadas [P_4 x V_9]

Enunciado:

> Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras? Ejemplo: sota caballo rey 1.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - Si se fija un número cada configuración está formada por la selección ordenada, sin repetición, de 4 objetos de un conjunto de 4 (sota, caballo, rey, número)

U2 - Esto corresponde a las permutaciones ordinarias de 4 objetos distintos.
U3 - Pero el número que interviene en cada configuración anterior se puede seleccionar, sin repetición, entre 9 posibles.
U4 - Esto corresponde a las variaciones ordinarias de 9 objetos tomados de 1 en 1.
U5 - Por tanto, el número total de configuraciones es $P_4 . V_9 = 24 . 9 = 216$.

Conocimientos puestos en juego:
U1:
- Descomposición en subproblemas (extensivos) del problema dado (fijando un número se obtiene un problema más sencillo relacionado con el dado)
- Identificación de las configuraciones combinatorias de cada subproblema como resultado del proceso de selección (actuativo) ordenada, sin repetición (intensivos) de 4 objetos de un conjunto de 4 objetos distinguibles.

U2:
- Reconocimiento en U1 de las condiciones de aplicación del modelo de las permutaciones ordinarias (intensivo) de 4 objetos distintos

U3:
- Enunciado de otro subproblema (extensivo): formas posibles de elegir un número, sin repetición, entre 9 números posibles.

U4:
- Solución del problema U3 identificando las condiciones de aplicación del modelo de las variaciones ordinarias de 9 objetos tomados de 1 en 1 (intensivo).

U5:
- Composición de los problemas enunciados en U1 y U3 (extensivo) y solución mediante la regla del producto (intensivo).
- Se reconoce que cada forma de seleccionar los 4 objetos (sota, caballo, rey, número) se compone con cada una de las 9 formas de elegir el número.
- Expresión de la permutaciones y variaciones, P_4=4.3.2.1; V_9= 9.
- Realización de los cálculos aritméticos.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de subproblemas relacionados con el dado; composición de los subproblemas.
- Reconocimiento de los subproblemas como pertenecientes a los tipos permutaciones y variaciones respectivamente.

Ostensivos:
- Expresiones de las permutaciones, variaciones y producto.
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.

Actuativos:
- Esquema operatorio de colocación ordenada, sin repetición de objetos distintos.
- Descomposición (y composición) del problema en subproblemas.
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones de realización de la acción de colocación (influencia del orden; no repetición). Desarrollo de la fórmula factorial.
- Variaciones y permutaciones ordinarias; regla del producto.

Validativos:
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las permutaciones, variaciones y regla del producto.

Resolución 2: *Generación de un modelo combinatorio*

U1 - Cada configuración está formada por los objetos, sota, caballo, rey, número, colocados en cualquier orden.

U2 - Para elegir el número que interviene en cada configuración hay 9 posibilidades.

U3 - Una vez elegido un número, para colocar el 1^{er} objeto hay 4 posibilidades, para el 2º 3, para el 3º 2, para el 4º 1. Luego en total resultan 4x3x2x1= 24 formas de alinear las 4 cartas.

U4 - Cada una de estas 24 posibilidades se puede componer con cada una de las 9 posibilidades de seleccionar el número.

U5 - Por tanto, el número total de configuraciones será 24 x 9=216

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Reconocimiento de las configuraciones combinatorias que se deben contar como resultado de la acción de alinear los 4 objetos.
- Se supone conocido que hay una sola sota, caballo y rey; pero hay 9 dígitos distintos (0, 1, ..., 9) (intensivo; convenio sobre la baraja). Importancia del orden, no posibilidad de repetición (intensivos).

U2:
- Descomposición del problema en subproblemas: formas de elegir el número que interviene en las configuraciones.
- Solución de este subproblema por simple enumeración (actuativo) o bien a partir del número de posibilidades (intensivo).

U3:
- Enunciado de un problema relacionado: formas de ordenar 4 objetos distintos.
- Solución de dicho problema mediante su descomposición recursiva en subproblemas: Colocación del primer objeto (4 posiciones); colocación del segundo objeto (4 posiciones), etc. Reconocimiento de que cada forma de colocar el primer objeto se puede componer con cada una de las de colocar el segundo, etc. (regla del producto) y controlando las posibilidades anuladas en cada paso.

U4:
- Composición de los problemas U2 y U3; solución mediante la regla del producto.

U5:
- Realización del producto.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de subproblemas relacionados y su composición.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Notación del producto de números naturales.

Actuativos:
- Esquema operatorio de colocar (alinear) ordenadamente objetos distintos sin repetición.
- Descomposición (y composición) del problema en subproblemas.
- Resolución recursiva de una serie de problemas relacionados
- Enumeración sistemática.
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Regla del producto; condiciones de aplicación.
- Convenio de composición de la baraja.

Validativos:
- Verificación de las condiciones de las configuraciones pedidas.
- Verificación de las condiciones de empleo de la regla del producto.

2.5.3. Problema 3: Colocación de objetos iguales en celdas distintas [$C_{4,3}$]

Enunciado:

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: Amarillo, Blanco, Crema y Dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: Podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - Una configuración está formada por un modo de seleccionar 3 sobres entre 4 posibles (selección no exhaustiva)

U2 - En cada sobre se pone una sola carta; luego los sobres no se pueden repetir.

U3 - Como las cartas son iguales el orden de selección de los sobres no produce nuevas configuraciones; el orden de colocación no influye en la formación de las configuraciones.

U4 - Estas son las condiciones de formación de las combinaciones de 4 objetos tomados de 3 en 3.

U5 - Por tanto, el número de maneras distintas de colocar las 3 cartas en los 4 sobres es: $C_{4,3} = 4!/ 3! = (4.3.2)/(1.2.3) = 4$.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Traducción del problema a otro equivalente (extensivo). Identificación de las configuraciones a contar como modos distintos de seleccionar 3 sobres entre 4 (actuativo).
- Se considera que el esquema operatorio de selección de los sobres es equivalente (intensivo) al de colocación de las cartas; se asume que ambos dan lugar a las mismas configuraciones.
- Reconocimiento de que la selección no es exhaustiva (intensivo).

U2:
- Se indica que la selección es sin reemplazamiento (intensivo); en cada configuración los sobres no se pueden repetir (condición de no repetición en la realización de la acción) (intensivo).

U3:
- Reconocimiento de otra circunstancia o condición de realización de la acción de seleccionar los sobres: Si se cambia el orden de extracción de dos sobres (por ejemplo, B,A en lugar de A, B) no se produce una forma distinta de colocación de las cartas. (La condición de que el orden no influye) (intensivo).

U4:
- Los textos U1+U2+U3 son las condiciones de aplicación de la regla que se designa como 'combinaciones ordinarias de 4 objetos tomados de 3 en 3' (intensivo).

U5:
- Expresión de la fórmula que permite calcular las combinaciones ordinarias $C_{4,3} = 4!/ 3! = (4.3.2)/(1.2.3)$ (ostensivo).
- Relización de los cálculos aritméticos (actuativo).

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Traducción del problema a otro equivalente.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión de las fórmulas de cálculo, $C_{4,3} = 4!/ 3! = (4.3.2)/(1.2.3)$.

Actuativos:
- Esquema operatorio de selección de objetos distintos sin reemplamiento.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Propiedades del proceso de selección (no repetición; no influencia del orden).
- Se reconoce el ejemplar de problema dado como perteneciente al tipo de los problemas resolubles mediante el modelo de las combinaciones ordinarias.

- Combinariones ordinarias; regla de cálculo y condiciones de aplicación.

Validativos:

- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las combinaciones ordinarias

Resolución 2: *Generación de un modelo combinatorio*

U1 - Si las 3 cartas a colocar fueran distinguibles la 1ª tendría 4 posibilidades, la 2ª 3, la 3ª y última carta 2.

U2 - Por tanto habría 4x3x2= 24 formas diferentes.

U3 - Seleccionados 3 sobres, las configuraciones que se forman al cambiar de sobre las cartas no se distinguen por ser iguales. ¿Cuántas de tales configuraciones son iguales?

U4 - Una vez seleccionados 3 sobres se pueden formar 6 ordenaciones indistinguibles.

U5 - Por tanto el número total de configuraciones será 24/6 = 4.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Se enuncia y resuelve un problema relacionado (extensivo) con el dado más sencillo: Colocación de 3 objetos indistinguibles en 4 posiciones distintas (actuativo).
- La acción compuesta de colocar los 3 objetos se descompone en 3 subacciones, en forma recursiva : (1) colocar una 1ª carta, para lo cual se reconocen 4 posibilidades por simple enumeración; (2) colocar la 2ª carta, para la que quedan 3 posiciones; (3) colocar la 3ª carta, para la que quedan 2 posiciones. Hay que controlar los datos en cada paso.

U2:

- Se reconoce en U1 que cada modo de colocar la 1ª carta se puede componer con cada modo de colocar la 2ª, luego (por la regla del producto) se obtienen 4x3 formas de colocarlas. Estas 12 formas se pueden componer con las 2 formas de colocar la 3ª; luego, por la regla del producto, el total de formas de colocar las cartas serían 24.

U3:

- Toma en consideración de las condiciones iniciales del problema: que los objetos a colocar son indistingibles (intensivo).
- Reconocimiento de la igualdad de las configuraciones formadas en U2 cuando provienen de un cambio de orden de los 3 sobres. Establecimiento de una relación de equivalencia.
- Planteamiento de un subproblema: ¿cuántas de tales configuraciones son iguales? (extensivo).

U4:

- Se reconoce que por cada configuración de las formadas en U2 hay otras 5 que son iguales, las cuales corresponden a las ordenaciones posibles de 3 objetos distintos. Resuelve el problema de hallar las permutaciones de 3 elementos (actuativo y extensivo).

U5:

- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla del cociente (intensivo).
- Expresión del cociente 24/6 y realización del cálculo aritmético (ostensivo; actuativo).

Tipos de conocimientos:

Extensivos:

- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de dos subproblemas relacionados más sencillos que el dado: número de variaciones ordinarias de 4 objetos tomados de 3 en 3 y número de permutaciones de 3 objetos distintos. Planteamiento recursivo de una serie de problemas intermedios.
- Plantemiento del problema compuesto (combinaciones).

Ostensivos:

- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Expresión del producto y del cociente: 4x3x2=24; 24/6=4.

Actuativos:

- Esquema operatorio de colocación de objetos indistinguigles en celdas distintas.
- Descomposición del problema en subproblemas.

- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones, orden, repetición, equivalencia, permutación.
- Recursión.
- Propiedades del esquema operatorio (composición cartesiana).
- Reglas del producto y del cociente; condiciones de aplicación.

Validativos:
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las reglas del producto y del cociente.

2.5.4. Problema 4: Partición de un conjunto de objetos distintos en partes distintas [$VR_{3,4}$]

Enunciado:

> Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - Asignar los cuatro coches a tres personas equivale a elegir las 3 personas a quien se dará cada uno de los 4 coches, pudiendo repetirse cada persona en la selección.

U2 - Por tanto, la configuración combinatoria pedida será la formación de grupos de 4 personas, entre un conjunto de 3 elementos (personas), con repetición, en las que el orden de los elementos en los grupos influye, ya que supone la recepción de coches diferentes.

U3 - Estas son las condiciones de aplicación del modelo de las variaciones con repetición de 3 elementos tomados de cuatro en cuatro:

U4 - $VR_{3,4} = 3^4 = 3x3x3x3 = 81$

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Traducción del problema de un esquema operatorio de partición a otro de selección (actuativo).
- Identificación de las configuraciones a contar como modos distintos de seleccionar las personas (actuativo).
- Reconocimiento (implícito) de que ambos esquemas producen las mismas configuraciones (intensivo).
- Reconocimiento de que la selección de las personas es con reemplazamiento (intensivo; condición de realización de la acción), ya que una misma persona puede recibir más de un coche.

U2:
- Reconocimiento de que el orden de selección influye en la formación de las configuraciones (intensivo).
- Justificación de que el orden influye (ya que supone la recepción de coches diferentes.

U3:
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación del concepto de 'variaciones con repetición de 3 objetos tomados de 4 en 4' (intensivo).

U4:
- Expresión de las variaciones con repetición $VR_{3,4} = 3^4 = 3x3x3x3 = 81$ (ostensivo).
- Realización de las operaciones aritméticas (actuativo).

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Se reconoce el ejemplar de problema como perteneciente al tipo de los problemas resolubles con las variaciones con repetición.

Ostensivos:
- Uso de la notación $VR_{3,4}$ como equivalente de 'variaciones con repetición de 3 objetos tomados de 4 en 4.
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión del producto 3x3x3x3=81.

Actuativos:
- Esquemas operatorios de partición y selección.
- Traducción al esquema de selección de un esquema de partición.
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Partición, asignación, orden, reemplazamiento, selección.
- Propiedades del esquema de selección (orden y repetición).
- Variaciones con repetición; condiciones de aplicación.

Validativos:
- Justificación de las condiciones de realización de la acción.
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las variaciones con repetición.

Resolución 2: *Generación de un modelo combinatorio (esquema de partición)*

U1 - Se tiene un conjunto de cuatro objetos distinguibles (los coches, que podemos distinguir con las letras A, B, V, R).

U2 - Se debe dividir el conjunto en tres subconjuntos diferentes F, L y T (los hermanos).

U3 - El número de elementos de estos subconjuntos puede ser 0, 1, 2, 3, o 4 porque una persona puede recibir 0, 1, 2, 3, o 4 coches.

U4 - El orden de los elementos en cada subconjunto es irrelevante.
- Descomposiciones posibles del número 4 en sumandos:

U5 - a) 4 = 4 + 0 + 0 = 0 + 4 + 0 = 0 + 0 + 4;
b) 4 = 1 + 3 + 0 = 1 + 0 + 3 = 3 + 1 + 0 = 3 + 0 + 1 = 0 + 1 + 3 =
= 0 + 3 + 1;
c) 4 = 2 + 2 + 0 = 2 + 0 + 2 = 0 + 2 + 2;
d) 4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2.

U6 - En el caso a) cada descomposición del número 4 realizada sólo da lugar a una manera de repartir los coches (los 4 a cada uno de los tres hermanos).

U7 - En el caso b), cada descomposición de las seis producidas da lugar a cuatro configuraciones combinatorias posibles (modos de repartir los coches). En efecto, el coche que se da a uno de los hermanos puede ser el A, B, V, o R; una vez asignado este coche los otros tres se asignan a otro de los hermanos. Por tanto, en el caso b) se obtienen 6x4 = 24 configuraciones.

U8 - En el caso c), cada una de las tres descomposiciones producidas da lugar a seis configuraciones distintas. En efecto, los dos coches que se dan a una persona se pueden elegir entre cuatro; como en la formación de estas configuraciones no se pueden repetir los objetos, ni el orden influye en dicha formación, el número de maneras en que se pueden asignar los dos coches es $C_{4,2} = (4.3)/2 = 6$.

(Otro modo de resolver este problema parcial será mediante enumeración sistemática de las seis combinaciones posibles).

U9 - En el caso d), cada una de las 3 descomposiciones da lugar a 12 configuraciones. En efecto, una vez distribuidos los 2 coches a una persona (para lo cual hemos visto que hay 6 posibilidades) los otros dos se distribuyen entre los dos hermanos restantes; esto se puede hacer de dos modos distintos; por tanto, aplicando la regla del producto se tienen 12 posiblidades de hacer la distribución según esta descomposición del número 4.

U10 - Sumando el número total de configuraciones de los cuatro casos se tiene:

3x1 + 6x4 + 3x6 + 3x12 = 81.

Conocimientos puestos en juego
U1:
- Se introduce una notación (ostensivo) para representar los objetos, A, B, V, R. Esto facilitará la representación de las configuraciones combinatorias.
- Se interpreta la colección de cuatro coches como un conjunto (intensivo). Este objeto es usado para modelizar el problema como de partición (actuativo) de este conjunto en subconjuntos. Se supone que los elementos del conjunto son distinguibles (intensivo).

C = {A, B, V, R}

U2:
- Se introduce una notación (ostensivo) para designar a los tres subconjuntos en que se debe descomponer el conjunto C (F, L, T).
- Dividir (actuativo) quiere aquí decir que se deben hacer particiones (intensivo) del conjunto C en subconjuntos (intensivo). Cada una de estas particiones se interpretan como las configuraciones combinatorias. Por ejemplo,

F = {A, B }; L = { V }; T = { R}, es una partición de C. La configuración combinatoria correspondiente a esta partición, que se puede representar como

{{A, B }, {V}, {R}},

quiere decir que se dan los coches A y B a Fernando, el coche V a Luis y el coche R a Teresa y se diferencian los subconjuntos entre sí. Es un ejemplar del conjunto de configuraciones a contar.
U3:
- Se atribuye una propiedad (intensivo) al objeto designado como “número de elementos de un subconjunto” (intensivo) en el caso particular de los subconjuntos mencionados en U2.
U4:
- Se quiere decir que el “orden en que se dan” (actuativo) los coches a cada persona no da lugar a nuevas configuraciones combinatorias. Se conviene en considerar como la misma configuración, por ejemplo, las siguientes disposiciones de los objetos:

{{A, B }, {V}, {R}}, {{B, A }, {V}, {R}},

En conjunto, los textos U1 a U4, se usan para determinar la forma de las configuraciones combinatorias y las reglas de formación del conjunto de configuraciones.
U5:
- Se realiza la descomposición del número 4 en sumandos (actuativo), según un orden sistemático mediante la disposición tabular de las descomposiciones (ostensivo). La disposición tabular y sistemática prueba (validativo implícito) que la descomposición es exhaustiva.
U6:
- Se interpreta cada descomposición del número 4 como configuración combinatoria:
4 + 0 + 0, quiere decir, F = {A, B, V, R}, L = ∅, T = ∅
0 + 4 + 0, quiere decir, L = {A, B, V, R}, F = ∅, T = ∅
0 + 0 + 4, quiere decir, T = {A, B, V, R}, F = ∅, T = ∅
Cada expresión sumatoria (ostensivos) representa una configuración combinatoria particular (ostensivo, implícito).
U7:
- Se plantea el problema (extensivo) de saber cuántas configuraciones se pueden formar de modo que el número de elementos de cada subconjunto sea el indicado por los sumandos en que se descompone el número 4.
- Se da como solución de cada problema el número 4 y se demuestra (validativo).
- Usando la noción de multiplicación de números naturales (intensivo) se calcula (actuativo) el número total de configuraciones en el caso b), 6 x 4 =24.
- A cada una de las expresiones (ostensivos) de la forma,

1 + 3 + 0 ; 1 + 0 + 3 ; 3 + 1 + 0 ; 3 + 0 + 1 ; 0 + 1 + 3;0 + 3 + 1;

se les asigna el número de configuraciones (4), tales que los cardinales de los subconjuntos correspondientes son los indicados por los sumandos respectivos.
U8:

- Los procesos interpretativos puestos en juego en este caso son similares al texto U7, excepto que la validación del número de configuraciones para cada descomposición (6) se hace identificando en el subproblema planteado las condiciones de aplicación del modelo de las combinaciones (intensivo), y la realización efectiva del cálculo (actuativo),

$C_{4,2} = (4.3) /2 = 6.$

- Dado que el número de objetos a combinar es pequeño se podría también proceder a formar sistemáticamente todas las configuraciones posibles.

U9:

- De nuevo aquí se puede aplicar el análisis de U7, aunque también se debe adaptar el método de solución de los subproblemas. Se pueden resolver aplicando las combinaciones junto con la regla del producto (intensivo).

U10:

- Se aplica la regla de la suma (intensivo) y se realizan los cálculos correspondientes (actuativo).
- Se concluye interpretando que la solución del problema planteado, número de modos distintos en que se pueden repartir cuatro coches entre tres personas es 81.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de subproblemas relacionados más sencillos que el dado.
- Descomposición de un problema en partes.
- Planteamiento del problema compuesto.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Notaciones para representar los objetos a repartir (A, B, V, R), su conjunto C, y los subconjuntos a formar (F, L, T).
- Notación conjuntista de las configuraciones (modos de repartir los coches).
- Disposición tabular de las descomposiciones en sumandos del número 4.
- Expresión como sumas indicadas de las descomposiciones de 4 en sumandos.

Actuativos:
- Descomposición del problema en subproblemas.
- Descomposición del número 4 en sumandos.
- Esquema operatorio de partición de un conjunto en subconjunto.
- Enumeración sistemática.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Propiedades del esquema operatorio de partición, orden.
- Conjunto; subconjunto; partición de un conjunto; número de elementos de un conjunto.
- Las correspondencias entre las notaciones sumatorias y las conjuntistas se basan en el criterio (intensivo) convenido de expresión de las configuraciones.
- Reglas del producto, de la suma y sus condiciones de aplicación.

Validativos:
- Verificación de la descomposición del 4 en sumandos mediante la disposición tabular que prueba la enumeración sistemática.
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las reglas del producto, de la suma y del cociente.

2.5.5. Problema 5: Partición de un conjunto de objetos diferentes en dos subconjuntos distintos [$C_{4,2}$]

Enunciado:

> Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - Los 2 alumnos que harán el trabajo de matemáticas se pueden elegir entre los 4. Una vez elegidos estos dos alumnos los otros dos restantes se asignan al trabajo de lengua.
U2 - Los alumnos no se pueden repetir; el orden de elección de los 2 alumnos no influye en la configuración.
U3 - Por tanto, se trata de las combinaciones de 4 objetos tomados de 2 en 2,
U4 - $C_{4,2} = (4x3)/2 = 6$

Conocimientos puestos en juego:
U1:
- Traducción a un problema de selección.
- Identificación de las configuraciones a contar como modos distintos de seleccionar 2 personas entre 4 (esquema operatorio de selección) (actuativo).
- Se asume que el esquema de selección es equivalente, en términos de producir las mismas configuraciones, que el esquema de partición (intensivo).
- Planteamiento de un subproblema relacionado con el dado (elegir 2 personas entre 4) (extensivo).

U2:
- Reconocimiento de las condiciones de la selección: los objetos no se repiten; no influyen el orden de la selección en la formación de las configuraciones (intensivos).

U3:
- Reconocimiento de las condiciones de empleo del modelo combinatorio de las combinaciones de 4 objetos tomados de 2 en 2 (intensivo).

U4:
- Recuerdo de la expresión de las combinaciones (ostensivo) y realización de las operaciones aritméticas (producto y cociente) (actuativos).

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de un problema relacionado con el dado.
- Reconocimiento del ejemplar de problema como perteneciente al tipo de problemas resolubles mediante el modelo de ls combinaciones ordinarias.

Ostensivos:
- Uso de la notación $C_{4,2}$ como equivalente de 'combinaciones de 4 objetos tomados de 2 en 2'.
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión de las operaciones (4x3)/2 =6.

Actuativos:
- Esquema de selección sin reemplazamiento de objetos distintos.
- Traducción al modelo de selección de un modelo de partición.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Propiedades del proceso de selección: no repetición y no influencia del orden.
- Equivalencia de los esquemas de selección y de partición en las circunstancias dadas.
- Combinaciones ordinarias (regla y condiciones de aplicación).

Validativos:
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las combinaciones ordinarias.
- Justificación de que el problema relacionado resuelto da la solución del problema de partición propuesto (al seleccionar 2 personas de 4, las otras 2 quedan también seleccionadas y no proporcionan nuevas configuraciones).

Resolución 2: *Generación de un modelo combinatorio*

U1 - Repartir 4 personas en 2 grupos de 2 equivale a seleccionar 2 personas entre 4 ya que al elegir 2 para un grupo quedan asignadas las otras dos para el otro grupo.

U2 - Para elegir el primer alumno de matemáticas tenemos 4 posibilidades, y para el segundo 3.

U3 - Si el orden de selección influyera en la formación de configuraciones, cada forma de elegir el primer alumno se compone con cada una de elegir el segundo; por tanto, habrá 4x3= 12 formas.

U4 - Pero como el orden de elección de los alumnos para matemáticas no influye en formar nuevas configuraciones, cada dos de las maneras contadas se reduce a una.

U5 - Por tanto, el número de formas posibles es (4x3)/2= 6.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Traducción a un problema de selección.
- Identificación de las configuraciones a contar como modos distintos de seleccionar 2 personas entre 4 (esquema operatorio de selección) (actuativo).
- Se asume que el esquema de selección es equivalente, en términos de producir las mismas configuraciones, que el esquema de partición (intensivo).
- Justificación de la equivalencia argumentando que al elegir 2 personas para un grupo quedan las otras dos asignadas al otro (validativo) y reconocimiento de esta propiedad (intensivo).
- Planteamiento de un subproblema relacionado con el dado (elegir 2 personas entre 4) (extensivo).

U2:

- Se plantea un subproblema relacionado (suponiendo que el orden influyera), y se resuelve recursivamente descomponiendo la acción de seleccionar 2 personas entre 4 en dos sub-acciones: (1) elegir la 1ª persona entre 4; (2) elegir la 2ª entre 3.

U3:

- Reconocimiento de las condiciones de empleo de la regla del producto: cada forma de elegir la 1ª persona se compone con cada una de las formas de elegir la 2ª (intensivo).
- Cálculo del número de formas en el subproblema relacionado (4x3=12) (actuativo).

U4:

- Toma en consideración de las condiciones iniciales del problema: es indiferente el orden de asignación de las personas al grupo de matemáticas.
- Reconocimiento de la igualdad de las configuraciones formadas en U3 cuando provienen de un cambio de orden de las dos personas.
- Planteamiento de un subproblema: ¿cuántas de tales configuraciones son iguales? Clases de equivalencia.
- Reconocimiento de las condiciones de empleo de la regla del cociente: cada dos configuraciones se reduce a una.

U5:

- Regla del cocinete. realización de los cálculos aritméticos (multiplicación y división).

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de un problema relacionados con el dado traduciendo el enunciado.
- Planteamiento recursivo de una serie de problemas.
- Planteamiento de un problema de quotición.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Expresión de operaciones aritméticas (4x3)/2 =6.

Actuativos:
- Esquema de selección sin reemplazamiento de objetos distintos.

- Traducción al modelo de selección de un modelo de partición.
- Realización de cálculos aritméticos (multiplicación y división).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Propiedades del proceso de selección: no repetición y no influencia del orden.
- Equivalencia de los esquemas de selección y de partición en las circunstancias dadas, clase de equivalencia.
- Reglas del producto y del cociente, recursión.

Validativos:
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las reglas del producto y del cociente.
- Justificación de que el problema relacionado resuelto da la solución del problema de partición propuesto (al seleccionar 2 personas de 4, las otras 2 quedan también seleccionadas y no proporcionan nuevas configuraciones).

2.5.6. Problema 6: Selección de muestras no ordenadas [$C_{5,3}$]

Enunciado:

Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - El enunciado pide seleccionar grupos de 3 elementos de un conjunto de 5 sin que se puedan repetir, y sin que influya el orden de selección en formar nuevas configuraciones.

U2 - Estas son las condiciones de aplicación del modelo de las combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3, o sea,

U3 - $C_{5,3}$ = (5x4x3)/(3x2) = 10

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Reconocimiento del esquema operatorio de selección (actuativo) como generador de las configuraciones que se deben contar.
- Identificación de las condiciones de realización de la acción combinatoria (intensivos): (1) selección no exhaustiva de objetos distintos; (2) no se pueden repetir; (3) el orden de selección no influye en la formación de las configuraciones.

U2:

- Recuerdo de las reglas de aplicación del modelo combinatorio de las combinaciones ordinarias y comparación con las condiciones descritas en U1; identificación de los valores de los parámetros.

U3:

- Expresión de la fórmula de cálculo de las combinaciones.
- Realización de las operaciones aritméticas.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Reconocimiento del ejemplar de problema como perteneciente al tipo de problemas resolubles mediante el modelo de las combinaciones ordinarias.

Ostensivos:
- Uso de la notación $C_{5,3}$ como equivalente de 'combinaciones de 5 objetos tomados de 3 en 3'.
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión de las operaciones aritméticas (5x4x3)/3x2 =10.

Actuativos:

- Esquema de selección sin reemplazamiento de objetos distintos.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Propiedades del proceso de selección: no repetición y no influencia del orden.
- Combinaciones ordinarias (regla y condiciones de aplicación).

Validativos:
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las combinaciones ordinarias.

Resolución 2:*Generación de un modelo combinatorio*

U1 - Si el orden de elección determinara configuraciones distintas, para elegir el primer estudiante tiene 5 posibilidades, para el 2º 4 y para el 3º 3 posibilidades; en total 5x4x3= 60 formas posibles de elegir 3 estudiantes.

U2 - Pero al cambiar de orden en la elección de los tres estudiantes no se producen nuevas configuraciones; por tanto, por cada configuración contada en U1 hay otras cinco que son la misma, correspondientes a los modos distintos de ordenar 3 objetos.

U3 - Por tanto, el número de formas distintas de elegir los 3 estudiantes será la sexta parte de las contadas en U1, esto es, 60/6= 10.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Planteamiento de un problema relacionado.
- Descomposición del problema en subproblemas en forma recursiva.
- Reconocimiento del esquema operatorio de selección como mecanismo productor de las configuraciones a contar.
- Reconocimieto de las condiciones de aplicación de la regla del producto.

U2:
- Reconocimiento de que el orden de seleccion no influye en la formación de configuraciones.
- Planteamiento de un subproblema: ¿cómo se reducen las configuraciones contadas en U1 al tener en cuenta que el orden no influye? Establecimiento de una equivalencia.
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla del cociente: cada 6 configuraciones se reducen a 1, ya que el número de ordenaciones distintas de 3 objetos son 6.

U3:
- Aplicación de la regla del cociente, 60/6=10.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de dos subproblemas relacionados más sencillos que el dado: número de variaciones ordinarias de 5 objetos tomados de 3 en 3 y número de permutaciones de 3 objetos distintos.
- Planteamiento del problema compuesto (combinaciones).
- Solución recursiva de una serie de problemas.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Expresión del producto y del cociente: 5x4x3x2=60; 60/6=10.

Actuativos:
- Descomposición del problema en subproblemas.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Reglas del producto y del cociente y sus condiciones de aplicación.
- Recursividad; orden.

Validativos:

- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las reglas del producto y del cociente.

2.5.7. Problema 7: Colocación ordenada, con repetición y condiciones [$VR_{4,3}$ x $C_{5,2}$]

Enunciado:

¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1 , 2 , 4 , 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos? Ejemplo: 8 8 1 2 4.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - El problema se puede descomponer en tres operaciones combinatorias:

U2 - Seleccionar los tres números distintos del 8 entre 4 posibles; el orden influye y se pueden repetir los números, luego se trata de las $VR_{4,3}$.

U3 - Colocar los 2 ochos en 5 posiciones posibles, o sea, seleccionar 2 posiciones para los 8 entre 5 posibles, de modo que no se puede repetir, ni influye el orden; en este caso se trata de $C_{5,2}$.

U4 - Cada modo de colocación de los ochos se pueden componer con cada forma de seleccionar los restantes números; luego se debe aplicar la regla del producto.
- Por tanto, el número total de números que se pueden formar será:

U5 $VR_{4,3}$ x $C_{5,2} = 4^3$ x (5x4)/2 = 64 x 10 = 640.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Se menciona la técnica de descomponer el problema en subproblemas.

U2:
- Planteamiento del problema de seleccionar los 3 números distintos del 8 entre 4 posibles (extensivo).
- Interpretación del esquema operatorio de selección como mecanismo generador de las configuraciones, considerándose equivalente al de colocación, mencionado en el enunciado (actuativos).
- Reconocimiento de las condiciones de la selección: influencia del orden y posibilidad de repetición para formar números (intensivos).
- Identificación de las condiciones de aplicación de las variaciones con repetición de 4 objetos tomados de 3 en 3 (intensivo), $VR_{4,3}$ (ostensivo).
- Asignación de valores a los parámetros.

U3:
- Planteamiento del problema de colocar 2 ochos en 5 posiciones posibles (extensivo).
- Traducción del esquema operatorio de colocación al de selección de 2 posiciones entre 5 posibles (actuativos).
- Reconocimiento de las condiciones de la selección: no se pueden repetir las posiciones, ni influye el orden de selección (intensivos).
- Identificación de las condiciones de aplicación de las combinaciones ordinarias de 5 objetos tomados de 2 en 2 (intensivo), $C_{5,2}$.
- Asignación de valores a los parámetros.

U4:
- Planteamiento del problema de composición de los problemas U2 y U3
- Identificación de las condiciones de aplicación de la regla del producto (intensivo).

U5:
- Expresión de las fórmulas de cálculo de las $VR_{4,3}$ x $C_{5,2}$ =
= 4^3 x (5x4)/2 (ostensivos).
- Realización de los cálculos 64 x 10 = 640 (actuativo).

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.

- Planteamiento de dos subproblemas relacionados más sencillos que el dado: variaciones con repetición; combinaciones.
- Planteamiento del problema de componer los dos problemas anteriores (regla del producto).

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión de las fórmulas de cálculo $VR_{4,3}$ x $C_{5,2} = 4^3$ x (5x4)/2.

Actuativos:
- Esquemas operatorios de selección, colocación y composición cartesiana.
- Descomposición del problema en subproblemas.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones de los esquemas operatorios (orden, repetición).
- Variaciones con repetición; combinaciones ordinarias; condiciones de aplicación.
- Reglas del producto y sus condiciones de aplicación.

Validativos:
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de la regla del producto, de las variaciones con repetición y de las combinaciones.
-

Resolución 2:

Generación de un modelo combinatorio

U1 - Los 3 números distintos del 8 se pueden elegir entre un conjunto de 4.

U2 - El primero se puede elegir entre los 4 disponibles; igual ocurre con el 2º y con el 3º, ya que se supone que la selección de los números es con reemplazamiento.

U3 - Como cada forma de elegir cada número se puede componer con las dos restantes, el número total de formas en que se pueden elegir los 3 números será 4^3 = 4x4x4 = 64.

U4 - Para colocar los 2 ochos tenemos 5 posiciones; la primera posición se puede elegir entre 5 y la segunda posición entre 4. Al cambiar de posición los dos ochos entre sí no se obtiene un número distinto.

U5 - Por tanto, el número de formas de colocar los 2 ochos en las 5 posiciones será la mitad: 5x4/2 = 10.

U6 -Cada forma de colocar los 8 se puede componer con cada forma de seleccionar los 3 números restantes. Estas son las condiciones de aplicación de la regla del producto.

U7 - Luego el número total de números que se pueden formar será, 64x10= 640.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Planteamiento de un subproblema relacionado: modos de elegir 3 números entre 4 posibles con reemplazamiento.
- Descomposicón del problema inicial en subproblemas (implícita): seleccionar los 3 números distintos del 8; colocar los dos 8 entre 5 posiciones.
- Se evoca el esquema operatorio de selección.

U2:
- Descomposición recursiva del primer subproblema en partes (elección del 1º, 2º y 3º número).
- Identificación de las condiciones de la selección de cada número (con reemplazamiento).
- Enumeración de los modos de seleccionar cada número.

U3:
- Planteamiento de la composición de los tres subproblemas precedentes.

- Identificación de las condiciones de la composición (cartesiana): cada forma de seleccionar un número se compone con cada forma de seleccionar los restantes.
- Reconocimiento de la regla del producto y su aplicación.
- Uso de la notación multiplicativa y de potencias, $4^3 = 4x4x4 = 64$.

U4:
- Planteamiento de otro subproblema: colocación de los dos 8.
- Identificación de la configuración combinatoria de este subproblema mediante el esquema operatorio de colocación.
- Reconocimiento de las condiciones de realización de la operación: sin reemplazamiento; no influencia del orden.

U5:
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de las reglas del producto y del cociente.
- Expresión de las operaciones y realización 5x4/2 = 10.

U6:
- Planteamiento del problema inicial: formación de números 5 cifras.
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla del producto.

U7:
- Expresión de las operaciones y realización de las mismas: 64x10 = 640.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de subproblemas relacionados más sencillos que el dado.
- Planteamiento del problema de componer los problemas anteriores (regla del producto).

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Expresión de operaciones aritméticas (multiplicación, potenciación, cociente).

Actuativos:
- Esquemas operatorios de selección, colocación y composición cartesiana.
- Descomposición del problema en subproblemas.
- Resolución recursiva de subproblemas.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones de los esquemas operatorios (orden, repetición).
- Reglas del producto y del cociente; condiciones de aplicación.
- Recursividad, equivalencia.

Validativos:
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las reglas del producto y del cociente.

2.5.8. Problema 8: Colocación de objetos distinguibles en casillas distintas [$V_{5,3}$]

Enunciado:

> El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:
>
> 1 2 3 4 5
>
> ¿De cuantas formas pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera? Ejemplo: Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - El enunciado requiere que se seleccionen 3 plazas entre 5 posibles;

U2 - No es posible repetir la plaza, y el orden influye en producir nuevas configuraciones, ya que los coches son distinguibles y también las plazas.

U3 - Estas son las condiciones de formación de las variaciones ordinarias de 5 elementos tomados de 3 en tres, o sea, $V_{5,3} = 5x4x3 = 60$.

Conocimientos puestos en juego:
U1:
- Identificación de las configuraciones a contar como los resultados del esquema operatorio de seleccionar 3 objetos distinguibles (las plazas) entre 5 posibles (actuativo) y asignarles un coche.
- Se considera que una colocación es distinta de otra cuando al menos difieren en la plaza ocupada por un coche (intensivo).
- El esquema de colocación de los coches implícito en el enunciado se traduce al de selección de las plazas, entendiendo que los resultados son equivalentes.

U2:
- Reconocimiento de las condiciones de realización de la acción: no repetición e influencia del orden en la formación de las configuraciones (intensivo).
- justificación de dichas propiedades porque se supone que en cada plaza sólo se aparca un coche, y éstos son distinguibles (validativo).

U3:
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación del modelo combinatorio de las variaciones ordinarias (intensivo): muestras ordenadas, no exhaustivas, sin reemplazamiento.
- Expresión de la fórmula de cálculo (ostensivo) y realización de las operaciones aritméticas (actuativo).

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Reconocimiento del ejemplar de problema como perteneciente al tipo de los problemas resolubles mediante el modelo de las variaciones ordinarias.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión de las fórmulas de cálculo $V_{5,3} = 5x4x3 = 60$.

Actuativos:
- Traducción del esquema operatorio de colocación por el de selección.
- Esquema operatorio de selección ordenada, sin repetición, productor de las configuraciones (colocación de los coches).
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones del esquema operatorio (orden, no repetición, selección no exhaustiva).
- Variaciones ordinarias; condiciones de aplicación.

Validativos:
- Justificación de las condiciones de la selección basada en la práctica habitual de aparcar.
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las variaciones ordinarias.

Resolución 2: *Generación de un modelo combinatorio*

U1 - La colocación del primer coche se puede hacer en cualquiera de las 5 plazas; el 2º en las 4 restantes y el 3º en las otras 3.

U2 - Cada forma de colocar el primer coche se compone con cada forma de colocar el 2º y estas a su vez con cada forma de colocar el 3º.

U3 - Por tanto, el número total de formas en que se pueden aparcar los coches sera, 5x4x3 = 60.

Conocimientos puestos en juego:
U1:

- Descomposición del problema en subproblemas: colocar un coche entre 5 posiciones posibles; colocar un 2º coche y un 3º.
- Resolución de los 3 subproblemas por enumeración (implícitamente).

U2:

- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla del producto.

U3:

- Expresión de la regla del producto y realización de los cálculos.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:

- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de subproblemas relacionados con el dado; composición de dichos subproblemas.

Ostensivos:

- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Expresión del producto 5x4x3 = 60.

Actuativos:

- Esquema operatorio de colocación ordenada, sin repetición.
- Enumeración sistemática.
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:

- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones del esquema operatorio (orden, no repetición).
- Regla del producto; condiciones de aplicación.

Validativos:

- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de la regla del producto.

2.5.9. Problema 9: Colocar objetos distintos en celdas distintas (más de un objeto por celda) [$VR_{2,4}$]

Enunciado:

> Cuatro niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana) van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar a los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

Resolución 1:

Ajuste de un modelo combinatorio

U1 - Cada configuración consiste en la realización de 4 selecciones de las habitaciones en que se pueden colocar los niños;

U2 - Las habitaciones se pueden repetir y el orden influye ya que determina el niño que se colocará.

U3 - Estas son las condiciones de formación de las variaciones con repetición de 2 objetos tomados de 4 en 4, o sea, $VR_{2,4} = 2^4 = 16$.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Reconocimiento de las configuraciones a contar como resultados del esquema operatorio de seleccionar habitaciones.
- Traducción del esquema de colocación, implícito en el enunciado, al esquema de selección.

U2:

- Reconocimiento de las condiciones de la acción de selección: se pueden repetir los objetos (habitaciones); el orden influye en formar configuraciones.

U3:

- Reconocimiento de las condiciones de aplicación del modelo combinatorio de las

variaciones con repetición de 2 objetos 4 veces.
- Expresión de la fórmula y realización de los cálculos.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Se reconoce el ejemplar de problemas como perteneciente al tipo de los problemas resolubles mediante el modelo de las variaciones con repetición.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión de las fórmulas de cálculo $VR_{2,4} = 2^4 = 16$.

Actuativos:
- Traducción del esquema operatorio de colocación por el de selección.
- Esquema operatorio de selección ordenada, con repetición.
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones del esquema operatorio (orden, repetición).
- Variaciones con repetición; condiciones de aplicación.

Validativos:
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las variaciones con repetición.

Resolución 2:

Generación de un modelo combinatorio

U1 - Para colocar el primer niño se puede seleccionar cualquiera de las 2 habitaciones; igual ocurre con el 2º, 3º, y 4º.

U2 - Cada forma de colocar el primer niño se puede componer con cada forma de colocar el 2º niño, estas a su vez con cada forma de colocar el 3º y todas las formas anteriores se pueden componer con cada forma de colocar el 4º niño.

U3 - Por tanto, el número de formas distintas en que se pueden colocar los niños será; 2x2x2x2 = 16.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Se descompone el problema en subproblemas: colocar primero un niño, después el 2º, 3º y el 4º.
- Se resuelven los 4 subproblemas por enumeración (implícitamente).

U2:
- Se identifican las condiciones de aplicación de la regla del producto.

U3:
- Se escribe y aplica la regla del producto.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de subproblemas relacionados con el dado; composición de dichos subproblemas.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Expresión del producto 2x2x2x2 = 16.

Actuativos:
- Esquema operatorio de colocación ordenada, con repetición.
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.

- Condiciones del esquema operatorio (orden, repetición).
- Regla del producto; condiciones de aplicación.

Validativos:

- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de la regla del producto.

2.5.10. Problema 10: Reparto de objetos distinguibles en celdas distinguibles [$C_{4,2}$]

Enunciado:

> María y Carmen tienen cuatro cromos numerados del 1 al 4. Deciden repartírselos entre las dos a partes iguales. ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2 y Carmen con los cromos 3 y 4.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - Una vez asignados 2 cromos a una persona quedan fijados los que corresponden a la otra.

U2 - Se trata de elegir 2 objetos entre un conjunto de 4; no hay repetición ni el orden influye (para que se tenga una distribución diferente tiene que haber un cambio de objeto).

U3 - Estas son las condiciones de aplicación del modelo de las combinaciones de 4 objetos tomados de 2 en 2, o sea, $C_{4,2} = (4x3)/2 = 6$.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Planteamiento de un problema relacionado: formas de elegir 2 objetos entre 4 para dar a una de las personas (extensivo).
- Se justifica la equivalencia de este problema con el dado (al dar 2 objetos a una persona los otros dos ya quedan asignados a la otra) (validativo).

U2:

- Identificacion de las configuraciones a contar como los resultados del esquema operatorio de selección de 2 objetos entre 4 (actuativo).
- Reconocimiento de las condiciones de la selección (no influye el orden; no se pueden repetir los objetos) (intensivo).

U3:

- Reconocimiento de las condiciones de aplicación del modelo de las combinaciones de 4 objetos tomados de 2 en 2 (intensivo).
- Expresión de la fórmula de las combinaciones (ostensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

Tipos de conocimientos:

Extensivos:

- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de un problema relacionado.
- Se reconoce el ejemplar de problemas como perteneciente al tipo de los problemas resolubles mediante el modelo de las combinaciones.

Ostensivos:

- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión de las fórmulas de cálculo, $C_{4,2} = (4x3)/2 = 6$.

Actuativos:

- Traducción del esquema operatorio de partición por el de selección.
- Esquema operatorio de selección no ordenada, sin repetición.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:

- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones del esquema operatorio (no influencia del orden, no repetición).
- Combinaciones ordinarias; condiciones de aplicación.

Validativos:

- Justificación de la equivalencia del problema inicial de reparto de objetos con el resuelto según el esquema de selección.
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las combinaciones.

Resolución 2: *Generación de un modelo combinatorio*

U1 - Una vez asignados 2 cromos a una persona, p. e. María, quedan fijados los que corresponden a la otra.

U2 - Para dar a María un primer cromo tenemos 4 posibilidades de selección, y para darle el 2º tenemos 3 posibilidades.

U3 - Si el orden de entrega del cromo hubiera que tenerse en cuenta el número de formas de dar a María los 2 cromos sería 4x3=12.

U4 - Pero como el orden es indiferente, cada 2 formas del reparto efectuado se reducen a 1.

U5 - Por tanto el número de formas de repartir los cromos será 12/2 = 6.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Planteamiento de un problema relacionado: formas de elegir 2 objetos entre 4 para dar a una de las personas (extensivo).
- Justificación de la equivalencia de este problema con el dado (al dar 2 objetos a una persona los otros dos ya quedan asignados a la otra) (validativo).

U2:
- Identificacion de las configuraciones a contar como los resultados del esquema operatorio de selección de 2 objetos entre 4 (actuativo).
- Planteamiento de dos subproblemas: formas de elegir el primer cromo y el segundo.
- Resolución de ambos subproblemas por enumeración.

U3:
- Planteamiento del subproblema de modos de dar a María dos cromos en el supuesto de que el orden de entrega se debiera tener en cuenta.
- Identificación de las condiciones de aplicación de la regla del producto y su aplicación.

U4:
- Planteamiento del problema inicial: el orden de entrega de los cromos no influye.
- Identificación de las condiciones de aplicación de la regla del cociente.

U5:
- Aplicación de la regla del cociente.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de subproblemas relacionados con el dado; composición de dichos subproblemas.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Expresión del producto y del cociente de números naturales.

Actuativos:
- Descomposición del problema en subproblemas.
- Enumeración de casos.
- Esquema operatorio de selección no ordenada, sin repetición.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones del esquema operatorio (no influencia del orden, no repetición).
- Reglas del producto y del cociente; condiciones de aplicación.

Validativos:
- Justificación de la equivalencia del problema inicial de reparto de objetos con el resuelto según el esquema de selección.

- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de la regla del producto y del cociente.

2.5.11. **Problema 11**: Selección ordenada con reemplazamiento y repetición [$VR_{4,3}$]

Enunciado:

> En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2 , 4 , 7 y 9. Elegimos una bola del bombo, anotamos su número y la devolvemos al bombo. Se elige una segunda bola, se anota su número y la devolvemos al bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 2 2 2.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - Se trata de formar números de 3 cifras mediante la selección de muestras de 3 objetos extraidas de un conjunto de 4 objetos.

U2 - Se pueden repetir los objetos y el orden influye en formar un número distinto porque la selección con reemplazamiento y el cambio de orden al extraer se traduce en la obtención de números diferentes.

U3 - Estas son las condiciones de formación de las variaciones con repetición de 4 elementos tomados de 3 en 3, o sea,

U4 - $VR_{4,3} = 4^3 = 64$.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Identificación de las configuraciones a contar como los resultados del esquema operatorio de selección de muestras de tamaño 3 de un conjunto de 4 bolas numeradas.

U2:
- Reconocimiento de las condiciones de realización de la selección (influye el orden y se pueden repetir los objetos).

U3:
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación del modelo de las variaciones con repetición de 4 objetos tomados de 3 en 3.

U4:
- Expresión de la fórmula de cálculo y realización de las operaciones aritméticas.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Se reconoce el ejemplar de problemas como perteneciente al tipo de los problemas resolubles mediante el modelo de las variaciones con repetición.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión de las fórmulas de cálculo $VR_{4,3} = 4^3 = 64$.

Actuativos:
- Esquema operatorio de selección ordenada, con repetición.
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones del esquema operatorio (influencia del orden, posibilidad de repetición).
- Variaciones con repetición; condiciones de aplicación.

Validativos:
- Justificación de las condiciones de la selección.
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las variaciones con repetición.

Resolución 2: *Generación de un modelo combinatorio*

U1 - Para elegir el primer número tenemos 4 posibilidades. Igual ocurre para el 2º y el 3º.

U2 - Como cada forma de elegir el primer número se puede componer con cada forma de obtener el 2º y el 3º.

U3 - Por la regla del producto, el número total de números de 3 cifras que se pueden formar será: 4x4x4= 64.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Identificación de la configuración pedida mediante el esquema operatorio de selección.
- Descomposición del problema en subproblemas: elegir el primer número, el 2º y el 3º.
- Resolución de los subproblemas por enumeración (implíticamente).

U2:

- Identificación de las condiciones de aplicación de la regla del producto.

U3:

- Expresión de la regla del producto.
- Realización de los cálculos aritméticos.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:

- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de subproblemas relacionados con el dado; composición de dichos subproblemas.

Ostensivos:

- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- expresión del producto 4x4x4= 64.

Actuativos:

- Esquema operatorio de selección ordenada, con repetición, no exhaustiva.
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:

- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones del esquema operatorio (orden, repetición).
- Regla del producto; condiciones de aplicación.

Validativos:

- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de la regla del producto.

2.5.12. Problema 12: Colocación ordenada exhaustiva con repetición de elementos [$PR_{5;3,1,1}$]

Enunciado:

> Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A , B , C , C , C . ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de otra formando una hilera? Ejemplo: Pueden estar colocadas de la siguiente forma A C B C C .

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - Se trata de formar ordenaciones de 5 letras, 1 de las cuales se repite 3 veces.

U2 - Estas son las condiciones de aplicación de las permutaciones con repetición de 5 elementos, en las que 1 se repite 3 veces, o sea,

U3 - $PR_{5,3,1,1}$= 5!/3! = 20.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Identificación de las configuraciones a contar como los resultados del esquema operatorio de colocar ordenadamente 5 objetos.
- Se supone que una colocación es distinta de otra si cambia al menos el orden de colocacion de dos cartas.

- Reconocimiento de las condiciones de realización del esquema (tres objetos son indistinguibles entre sí, por lo que los cambios de orden entre ellos no producen nuevos resultados a contar).

U2:

- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de las permutaciones de 5 objetos entre los cuales 1 se repite 3 veces.

U3:

- Expresión de la fórmula de cálculo y realización de las operaciones aritméticas.

Tipos de conocimientos:

Extensivo
- Identificación de las configuraciones combinatorias (cada ordenación de 5 cartas, 3 de ellas iguales).
- Reconocimiento del ejemplar de problema dado como perteneciente al tipo de los problemas resolubles mediante el modelo de las permutaciones con repetición.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión de la fórmula y de los cálculos $PR_{5,3,1,1}$= 5!/3! = (5.4.3.2)/(1.2.3.) = 20.

Actuativos:
- Esquema de colocación ordenada y exhaustiva de 5 fichas.
- Cálculo de 5!/3! = (5.4.3.2)/(1.2.3) = 20.

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones de realización de la colocación (exhaustiva y repetición).
- Concepto de *permutación con repetición*; condiciones de aplicación.
- Validativos:
- Verificación exhaustiva de las condiciones de aplicación de las permutaciones con repetición.

Resolución 2: *Generación de un modelo combinatorio*

U1 - Si todas las cartas fueran distintas para colocar la 1ª carta hay 5 posibilidades, la 2ª 4, la 3ª 2 y la última 1.

U2 - Luego en este caso el número de ordenaciones sería 5x4x3x2 = 120.

U3 - Pero por cada una de estas ordenaciones hay otras cinco que son iguales, ya que las 3 cartas que llevan grabadas la C no se distinguen y hay 6 modos posibles de ordenar 3 objetos.

U4 - Si cada 6 formas de ordenar las cartas se reducen a 1 entonces el número total de ordenaciones será: 120/6 = 20.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Planteamiento de un problema relacionado: si todas las fichas fueran distintas.
- Planteamiento y resolución de subproblemas mediante enumeración (colocar la 1ª carta, la 2ª, etc.).

U2:

- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla del producto y aplicación de la misma.

U3:

- Reconocimiento de una propiedad de las configuraciones: el cambio de orden de las cartas marcadas con C no produce nuevas configuraciones.
- Planteamiento y resolución del problema por enumeración de conocer el número de configuraciones iguales por la repetición de la letra C.

U4:

- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla del cociente. Aplicación de la regla del cociente.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Planteamiento de subproblemas relacionados con el dado.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Expresiones del producto y del cociente (5x4x3x2 = 120; 120/6 = 20).

Actuativos:
- Esquema operatorio de colocación ordenada y exhaustiva de objetos.
- Descomposición (y composición) del problema en subproblemas;
- enumeración sistemática.
- Realización de cálculos aritméticos (producto y cociente).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Propiedades del proceso de colocación (orden, exhaustivo y repetición)
- Reglas del producto y del cociente; condiciones de aplicación.

Validativos:
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las reglas del producto y del cociente.

2.5.13. Problema 13: Selección ordenada sin reemplazamiento ni repetición [$V_{4,3}$]

Enunciado:

> Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: Presidente, Tesorero y Secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos? Ejemplo: Que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

Resolución 1: *Ajuste de un modelo combinatorio*

U1 - Se trata de seleccionar 3 personas entre un conjunto de 4;
U2 - No hay repetición porque los cargos son desempeñados por personas diferentes y el orden influye ya que determina el cargo que se desempeñará.
U3 - Estas son las condiciones de aplicación del modelo combinatorio de las variaciones ordinarias de 4 objetos tomados de 3 en 3, o sea,
U4 - $V_{4,3}$ = 4x3x2 = 24.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Identificación de las configuraciones a contar como los resultados del esquema operatorio de seleccionar 3 personas entre un conjunto de 4.
- Se considera que una elección es distinta de otra si al menos un cargo es desempeñado por una persona diferente (intensivo).
- Reconocimiento de que la selección no es exhaustiva.

U2:
- Reconocimiento de las condiciones de realización de la selección (no repetición e influencia del orden).
- Validación de las condiciones de la selección basada en las reglas asumidas de formación de comités.

U3:
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación del modelo combinatorio de las variaciones ordinarias (muestas ordenadas, no exhaustivas, sin reemplazamiento).

U4:
- Expresión de la fórmula de cálculo y realización de las operaciones aritméticas.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:

- Identificación de las configuraciones combinatorias.
- Reconocimiento del ejemplar de problemas como perteneciente al tipo de los problemas resolubles mediante el modelo de las variaciones ordinarias.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias.
- Expresión de las fórmulas de cálculo $V_{4,3} = 4x3x2 = 24$.

Actuativos:
- Esquema operatorio de selección ordenada, sin repetición productor de las configuraciones (comités).
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones del esquema operatorio (orden, no repetición, selección no exhaustiva).
- Variaciones ordinarias; condiciones de aplicación.

Validativos:
- Justificación de las condiciones de la selección como consecuencia de las reglas asumidas para la formación de comités.
- Verificación sistemática de las condiciones de aplicación de las variaciones ordinarias.

Resolución 2: *Generación de un modelo combinatorio*

U1 - Para elegir el presidente hay 4 posibilidades; para elegir el tesorero, 3 y para el secretario 2.

U2 - Como cada forma de elegir el presidente se puede componer con cada forma de elegir el tesorero, y éstas formas con cada una de las formas de elegir el secretario, el número total de comités será: 4x3x2 = 24.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Identificación de las configuraciones a contar como los resultados del esquema operatorio de selección ordenada sin repetición.
- Se considera que una elección es distinta de otra si al menos un cargo es desempeñado por una persona diferente (intensivo).
- Descomposición del problema en subproblema (formas de elegir el presidente, tesorero y secretario); resolución mediante enumeración.

U2:
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla del producto. Expresión de la regla del producto y realización de los cálculos.

Tipos de conocimientos:

Extensivos:
- Planteamiento de subproblemas relacionados con el dado; composición de dichos subproblemas.

Ostensivos:
- Correspondencia entre los datos del enunciado y los factores.
- Expresión del producto 4x3x2 = 24.

Actuativos:
- Esquema operatorio de selección ordenada, sin repetición.
- Realización de cálculos aritméticos (producto).

Intensivos:
- Identificación de la ley de formación del conjunto de las configuraciones.
- Condiciones del esquema operatorio (orden, no repetición).
- Regla del producto; condiciones de aplicación.

Validativos:
- verificación sistemática de las condiciones de aplicación de la regla del producto.

2.5.14. Significados locales de la combinatoria elemental

En las secciones 2.5.1. a 2.5.13 hemos analizado los procesos potenciales de resolución de los problemas que componen el cuestionario B en los dos supuestos teóricos que hemos considerado:

(1) El sujeto que recuerda las definiciones y fórmulas de las operaciones combinatorias e intenta ajustar uno de los modelos combinatorios conocidos (operaciones combinatorias) al enunciado del problema. Para ello debe reconocer en los datos del problema los elementos y condiciones de aplicación del modelo combinatorio. Una vez reconocida la operación combinatoria, el desarrollo de la misma da la solución directa al problema. Se trataría de un sujeto que ha recibido instrucción sobre combinatoria elemental y recuerda los conceptos y métodos que proporcionan la solución.

(2) El sujeto que no recuerda o no es capaz de reconocer el modelo de las operaciones combinatorias. En dicho caso, debe usar otros tipos de recursos y generar por sí mismo un modelo combinatorio, partiendo de las reglas básicas de la suma, producto y cociente, junto con el uso de la enumeración, recursión y estrategias tales como la división del problema en partes. Se trataría de un sujeto que, aunque ha recibido instrucción sobre el tema, no recuerda los conceptos y métodos correspondientes, por lo que está en condiciones similares a un sujeto que no ha recibido instrucción.

Para ambos tipos de resolutores teóricos y para cada uno de los problemas hemos descrito y analizado uno de los procesos que potencialmente pueden tener lugar, ya que hemos supuesto que la solución es realizada por dos sujetos ideales (sujetos epistémicos o de referencia). Otros métodos de solución, aunque podrían variar en los detalles, contendrían en lo esencial el conjunto de elementos de significado que hemos descrito, aunque podría variar ligeramente el orden de aplicación.

El resultado de nuestro análisis para el conjunto de los 13 problemas propuestos, es una muestra representativa del sistema de prácticas operatorias y discursivas que cada sujeto pone de manifiesto ante los problemas combinatorios elementales. Puesto que nuestros problemas constituyen una muestra representativa de este campo de problemas, el resultado de nuestro análisis describe los significados locales que atribuyen a la combinatoria elemental los sujetos teóricos a los que nos hemos referido.

En la Tabla 2.5.14. presentamos un resumen de estos significados. Indicamos para cada sujeto epistémico los tipos de conocimientos puestos en juego, clasificados en las cinco categorías o dimensiones básicas propuestas por el modelo epistemológico que hemos adoptado, descrito en la sección 1.3.1 (extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos, validativos). Nuestro análisis pone de manifiesto, para ambos tipos de sujetos, la complejidad del significado de la combinatoria matemática, debido al gran número de elementos extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos implicados. Ello puede proporcionar una explicación de la dificultad de los problemas combinatorios, incluso después de la enseñanza, en la que se pone un énfasis excesivo en los aspectos intensivos, olvidando el resto de elementos de significado.

Observamos que los dos métodos de resolución contienen muchos elementos comunes, tales, como la identificación del conjunto de configuraciones a enumerar, el planteamiento de problemas relacionados pero diferentes al dado por el enunciado, traducción entre esquemas combinatorios, descomposición en partes, muestreo, partición, aplicación, orden, reemplazamiento, reglas de la suma, producto y cociente. Esto puede explicar por qué en algunos problemas no hay mucha diferencia en la dificultad de resolución para sujetos con y sin instrucción. Serían aquellos problemas en que este conjunto de herramientas (que no son objeto específico de enseñanza) son suficientes para hallar una solución satisfactoria.

El sujeto que ha recibido instrucción (sujeto epistémico 1) hace un uso mayor de elementos ostensivos, validativos e intensivos, en particular de las definiciones de las operaciones combinatorias y de la comprobación de los requisitos para su aplicación. Un factor explicativo de las dificultades es que ligeros cambios en el enunciado de los problemas conducen a operaciones combinatorias diferentes; si estos cambios no se perciben adecuadamente conducirán al fracaso.

Tabla 2.5.14. Significados de la combinatoria elemental para dos tipos de resolutores

Sujeto epistémico 1 (modelizador)	*Sujeto epistémico 2 (generador)*
Elementos extensivos: Identificación de las configuraciones combinatorias. Reconocimiento del problema dado como un ejemplo del tipo de problemas resolubles mediante el modelo combinatorio correspondiente. Planteamiento de problemas relacionados.	**Elementos extensivos:** Identificación de las configuraciones combinatorias. Planteamiento de problemas relacionados.
Elementos ostensivos: Simbolización de los elementos a combinar. Notaciones y términos para denotar las operaciones combinatorias. Expresión de la fórmulas combinatorias. Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias. Expresión de las reglas de la suma producto y cociente. Correspondencia entre los datos del problema y los factores. Expresión de las operaciones aritméticas.	**Elementos ostensivos:** Simbolización de los elementos a combinar. Expresión de las reglas de la suma producto y cociente. Correspondencia entre los datos del problema y los factores. Expresión de las operaciones aritméticas.
Elementos actuativos: Traducción entre esquemas operatorios. Identificación de la operación combinatoria y desarrollo de la misma. Descomposición del problema combinatorio compuesto en subproblemas y composición de los mismos. Realización de las operaciones aritméticas correspondientes.	**Elementos actuativos:** Traducción entre esquemas operatorios. Enumeración de las configuraciones combinatorias (selección, colocación, partición). Resolución recursiva del problema combinatorio simple. Descomposición del problema combinatorio compuesto en subproblemas y composición de los mismos. Realización de las operaciones aritméticas correspondientes.
Elementos intensivos: Identificación de las condiciones de realización del esquema operatorio (influencia del orden, repetición). Reconocimiento del conjunto de las configuraciones combinatorias. Muestreo, partición, aplicación. Conceptos combinatorios (variaciones, permutaciones, combinaciones, reglas del producto, del cociente y de la suma); definiciones y condiciones de aplicación. Reglas del producto, del cociente y de la suma; condiciones de aplicación.	**Elementos intensivos:** Identificación de las condiciones de realización del esquema operatorio (influencia del orden, repetición). Reconocimiento del conjunto de las configuraciones combinatorias. Muestreo, partición, aplicación. Reglas del producto, del cociente y de la suma; condiciones de aplicación.
Elementos validativos: Justificación de las condiciones de realización del esquema operatorio. Verificación de las condiciones de aplicación del modelo combinatorio correspondiente. Verificación de las condiciones de aplicación de las reglas del producto, cociente y suma.	**Elementos validativos:** Justificación de las condiciones de realización del esquema operatorio. Verificación de las condiciones de aplicación de las reglas del producto, cociente y suma.

El ajuste de un modelo combinatorio (operación combinatoria) conocido es una herramienta muy potente con la condición de que se discrimine con facilidad las situaciones en que son aplicables.

El sujeto epistémico 2, que no posee este recurso, hace por el contrario un mayor énfasis en los elementos actuativos, particularmente en las estrategias generales de resolución de problemas, la recursión y la enumeración sistemática. Son estas unas herramientas que no son objeto de enseñanza, ni dentro ni fuera del tema de combinatoria, y sin embargo son complejas y requieren un cierto entrenamiento. En consecuencia, el alumno que intenta esta vía de solución puede encontrar dificultades en el uso de cada una de estas herramientas.

El análisis realizado en estas secciones tiene un carácter teórico y su finalidad principal es elaborar una serie de hipótesis para ser estudiadas con más detalle en el resto de la tesis. Estas hipótesis son explicativas de la dificultad que los alumnos con una intensa preparación matemática encuentran en la resolución de problemas elementales de combinatoria. En la sección 2.6. precisaremos las hipótesis generadas en la fase exploratoria, que serán estudiadas en los capítulos 3 y 4.

2.6 CONCLUSIONES DE LA FASE EXPLORATORIA DEL ESTUDIO E HIPÓTESIS GENERADAS

En este capítulo hemos realizado un estudio exploratorio desde dos puntos de vista: empírico y teórico, con la finalidad de generar hipótesis que serán estudiadas con mayor profundidad en una nueva muestra en la segunda fase del estudio. A continuación exponemos las conclusiones obtenidas e hipótesis generadas.

2.6.1. Conclusiones e hipótesis generadas de los resultados de las muestras piloto

La conclusión más sobresaliente de los dos estudios piloto es que algunos de los problemas combinatorios, tanto simples como compuestos, han resultado ser difíciles incluso para estudiantes de último curso de la Licenciatura de Matemáticas. Puesto que las muestras empleadas han sido pequeñas, conviene comprobar si los resultados se mantienen en otros estudiantes. Obtenemos de aquí una primera hipótesis a analizar en la segunda fase del estudio, donde esperamos ver reproducidos nuestros resultados. Creemos que se repetirán los índices de dificultad de los problemas y que serán pocos los alumnos que lleguen a resolver la mayor parte del cuestionario:

> ***Hipótesis 1:*** *Los problemas combinatorios simples presentan un grado de dificultad apreciable para alumnos con preparación matemática avanzada.*

En nuestros estudios piloto hemos observado una variabilidad de la dificultad de los problemas en función de las variables de tarea de los ítems que coincide en parte y en otra se aparta de los resultados de Navarro- Pelayo (1994). En particular, hemos observado una influencia de la operación combinatoria, una falta de influencia del esquema combinatorio implícito y un efecto del tamaño de la solución, aspecto este último que no fue analizado en la investigación mencionada. Creemos que tiene interés realizar un estudio estadístico formal de estos efectos y para ello formulamos las siguientes hipótesis:

> ***Hipótesis 2****: El esquema combinatorio implícito en el enunciado de los problemas combinatorios simples no tiene un efecto significativo sobre la dificultad de los problemas para los alumnos universitarios con preparación matemática avanzada.*

> ***Hipótesis 3****: La operación combinatoria que proporciona la solución al problema tiene un efecto significativo sobre la dificultad de los problemas combinatorios simples para los alumnos universitarios con preparación matemática avanzada.*

> ***Hipótesis 4****: El tamaño de la solución tiene un efecto significativo sobre la dificultad de los problemas combinatorios simples para los alumnos universitarios con preparación matemática avanzada.*

2.6.2. Conclusiones e hipótesis generadas del análisis a priori de los cuestionarios

La dificultad observada en los problemas combinatorios sorprende si se tiene en cuenta que, para la resolución de estos problemas no se requieren conocimientos avanzados, tales como cálculo o álgebra lineal. Para proporcionar alguna explicación a esta dificultad en la sección 2.5 se ha realizado un análisis detallado de los procesos de resolución teóricos de cada uno de los problemas, finalizando con una descripción del significado de la combinatoria elemental para dos tipos de resolutores.

Nuestro análisis pone de manifiesto que, incluso cuando no se recuerden las definiciones y fórmulas de las operaciones combinatorias, solo se requiere aplicar estrategias básicas de resolución de problemas, tales como traducir el enunciado del problema a otro equivalente, fijar variables o dividir el problema en partes para resolver este tipo de problemas. Pensamos que los elevados índices de fallos se explican porque los alumnos no usan este tipo de estrategias en sus soluciones, pues no han sido objeto explícito de enseñanza durante el aprendizaje de la combinatoria. Este será un punto a analizar con detalle en la segunda fase del estudio, donde estudiaremos si el alumno aplica estrategias básicas y da origen a la siguiente hipótesis:

> ***Hipótesis 5:*** *Son pocos los alumnos que usan estrategias básicas de resolución de los problemas combinatorios, tales como traducir el problema a otro equivalente, dividir el problema en partes o fijar variables.*

En el análisis semiótico realizado, la enumeración se ha revelado como un recurso fundamental para resolver problemas combinatorios, especialmente, por parte del sujeto que no recuerda las fórmulas combinatorias. Otra causa posible del elevado índice de fallos es la falta de capacidad de enumeración sistemática en nuestros alumnos. La enumeración es una técnica combinatoria fundamental y, de acuerdo con las teorías piagetianas se adquiere espontáneamente al alcanzarse el periodo de las operaciones formales. Estas teorías pueden haber tenido influencia en el hecho de que la enseñanza actual de la combinatoria no contempla la instrucción en métodos sistemáticos de enumeración, que se suponen adquiridos. Nosotros, siguiendo a Fischbein (1975) pensamos que es necesaria la instrucción para adquirir esta habilidad y conjeturamos que es precisamente la falta de capacidad de numeración sistemática la que lleva al fracaso en los problemas combinatorios en una parte de nuestros alumnos. De ello se deriva la siguiente hipótesis:

> ***Hipótesis 6****: Una parte de los alumnos de la muestra no posee una capacidad de enumeración sistemática o bien no son capaces de generalizar correctamente una enumeración sistemática de tipo parcial.*

Para tratar de comprobar todas estas hipótesis y analizar otros aspectos, como comprensión del enunciado del problema, tipos de simbolizaciones empleadas, empleo de las reglas básicas de la suma, producto y cociente, y uso de la recursión hemos creido necesario indagar en profundidad el razonamiento combinatorio de los alumnos y en las estrategias de resolución utilizadas. Dedicamos los dos siguientes capítulos a este estudio, primeramente con un estudio cuantitativo más completo y exhaustivo en una nueva muestra de alumnos y seguidamente con un estudio cualitativo de los procesos de resolución y entrevistas a una muestra de cuatro alumnos.

CAPÍTULO 3

ESTRATEGIAS Y ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo describimos los resultados obtenidos en la segunda fase del estudio, comenzando con el análisis de la dificultad de los ítems del cuestionario utilizado y el efecto de las diversas variables de tareas sobre los mismos. Seguidamente hacemos un estudio más detallado de la interpretación que del enunciado de los problemas hacen los alumnos y del proceso de resolución seguido, con especial énfasis en el uso de herramientas heurísticas y los errores cometidos. Esperamos que todo ello nos proporcione algunas claves para comprender la dificultad que los problemas combinatorios parecen tener incluso para estudiantes con una fuerte preparación matemática.

Comenzamos el capítulo describiendo la muestra de alumnos y la codificación de las variables consideradas.

Descripcion de la muestra

La muestra estuvo compuesta por 91 alumnos de los últimos cursos de la Licenciatura de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada; 29 de ellos eran alumnos de 4º curso de la especialidad de Metodología, 49 lo eran de 5º curso de la misma especialidad y 13 eran alumnos de 5º curso de la especialidad de Estadística.

El cuestionario se pasó en el mes de marzo de 1996 durante una de las sesiones de clase y el tiempo del que dispusieron para contestar fue de dos horas. Se explicó a los alumnos los objetivos de nuestra investigación, pidiéndoles colaboración para que explicasen con claridad y detenimiento los procedimientos empleados. Los alumnos colaboraron desinteresada y voluntariamente con nuestro trabajo.

3.2. DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES

El estudio cuantitativo de las respuestas de los estudiantes a los 13 problemas incluidos en el cuestionario lo haremos teniendo en cuenta las variables y su codificación que describimos resumidamente en la tabla 3.2. En las secciones 3.3 a 3.6. describimos con detalle las categorías consideradas para dichas variables, incluyendo ejemplos de respuestas para precisar el significado atribuidos a sus valores.

Podemos ver que estas variables se dividen en tres grandes bloques que corresponden a la interpretación del enunciado, el proceso general de solución del problema y las estrategias específicas empleadas, que son tres puntos fundamentales para la consecución de una solución correcta al problema. Analizaremos los resultados respecto a cada uno de estos bloques con detalle en las secciones 3.3. a 3.6.

En el fichero de datos las variables V1, V2 y V3 correspondían, respectivamente, al número de alumno, grupo al que pertenece y el número del problema y sirven de control del análisis de datos.

Tabla 3.2. Resumen de variables y codificación de valores

Nº	Descripción	Valores
Interpretación del enunciado:		
V4	Identificación del modelo	0=No se sabe; 1=No cambia de modelo; 2=Modelo de selección; 3=Modelo de partición; 4=Modelo de colocación; 5=Modelo mixto
V5	Distinción de elementos	0=No se sabe; 1= Correcta; 2= Incorrecta
V6	Influencia del orden	0=No se sabe; 1=Sí, explícitamente; 2=Sí, implícitamente; 3=Error
V7	Posibilidad de repetición	0=No se sabe; 1=Si, explícitamente; 2=Sí, implícitamente; 3=Error
V8	Condiciones de la partición	0=No se sabe; 1=Correcto; 2= Incorrecto
Proceso general de solución:		
V9	Simbolización	0=No usa; 1= Algebraíca; 2= Gráfica; 3= Algebraíca y gráfica; 4=Numérica; 5= Algebraíca y numérica; 6= Gráfica y numérica
V10	Método de solución	0=Ninguno; 1=Enumeración; 2= Diagrama en árbol; 3=Fórmula; 4=Enumeración y fórmula; 5=Diagrama en árbol y fórmula; 6= Enumeración y diagrama en árbol; 7= Otros; 8=No se sabe
V11	Tipo de enumeración	0=No usa; 1=Sistemática, completa y correcta; 2=Sistemática, incompleta e incorrecta; 3=Sistemática, incompleta y generaliza bien; 4=Sistemática, incompleta y generaliza mal o no generaliza; 6= No sistemática, completa e incorrecta; 7= No sistemática, completa y correcta;8= No sistemática, incompleta y generaliza bien; 9=No sistemática, incompleta y generaliza mal.
V12	Uso del diagrama en árbol	0=No usa; 1=Completo y correcto; 2=Completo e incorrecto;3= Incompleto y generaliza bien; 4= Incompleto y generaliza mal; 5=Incompleto y no lo usa
V13	Fórmulas de las operaciones combinatorias	0=No usa; 1=Correcta; 2=Operación correcta con fórmula incorrecta; 3=Operac. correcta y error en parámetros; 4=Operac. Correcta y desarrollo erróneo; 5=Operac. Correcta y error aritmético; 6=Operac. incorrecta; 7=Operac. Correcta mal nombrada; 8=Fórmula correcta sin nombrar la operac. Combin.
Estrategias seguidas en la resolución de los problemas:		
V14	Traducir el problema a otro equivalente	0=No usa este recurso; 1= Uso correcto; 2=Uso incorrecto;
V15	Descomposición en subproblemas	0= No usa esta estrategia; 1= Uso correcto; 2= Uso incorrecto
V16	Fijación de variables	0=No usa; 1=Uso correcto; 2=Uso incorrecto
V17	Uso de la regla de la suma	0=No usa; 1=Uso correcto; 2=Uso incorrecto
V18	Uso de la regla del producto	0=No usa; 1=Uso correcto; 2=Uso incorrecto
V19	Uso de la regla del cociente	0=No usa; 1=Uso correcto; 2=Uso incorrecto
V20	Solución	0= No contesta; 1=Solución correcta; 2= Sol. Incorrecta

3.3. RESULTADOS GLOBALES

3.3.1. Dificultad de los problemas

Una vez codificados los datos procedimos al análisis de los resultados referidos a la dificultad de cada uno de los problemas, efecto de las variables de tarea sobre la misma y distribución del número de respuestas correctas en cada alumno. Para analizar la dificultad de los problemas, en primer lugar hemos obtenido el porcentaje de soluciones correctas, incorrectas y sin solución en cada uno de los 13 problemas. Se han considerado las siguientes categorías:

Solución correcta:
Cuando el alumno da la solución correcta al problema:

Solución = $C_5^3 = \binom{5}{3}$ = (5.4.3.2.1) / (3.2.1.2) = 10 formas distintas (Estudiante 2; problema 6)

Solución incorrecta:
Si se proporciona una solución incorrecta al problema:

Como la alineación o el orden influyen, y como además no tomamos las 12 cartas de un palo, ya que 3 están fijas, entonces tenemos la siguiente situación:

$V_{12}^{9} . P_4 =$ *12.11.10.9.8.7.6.5.4.4.3-2-1 =* $4 . P_{12}$

S C R –
S C – R
C S R –
S C – R (Estudiante 2; problema 2)

No resuelve:
El alumno no llega a dar solución a pesar de haber intentado resolver el problema a través de diferentes técnicas:

Tenemos 4 fichas, hay que tomarlas de 4 en 4 y podemos repetir lugar, será variaciones con repetición de 4 elementos.
Lo que yo plantearía en clase sería que cada niño trajera 4 fichas y que cada uno probara un número determinado de veces, por ejemplo 10 veces, después anotariamos en la pizarra todos los resultados distintos y comentariamos los resultados entre todos. (Estudiante 8; problema 1)

En otros casos explica de una forma teórica cómo se resolvería el problema, pero no es capaz de resolver el problema concreto propuesto, observándose, además, errores en el planteamiento teórico:

Calculamos todas las formas posibles de colocar dos ochos en 5 lugares.
Calculamos todas las formas posibles de colocar los cuatro números restantes 1,2,4,6 en 3 lugares.
$V_{5,2}$; $C_{4,3}$ *(Estudiante 5; problema 7)*

La tabla 3.3.1.1. contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría de esta variable en los distintos problemas del cuestionario.

Al analizar la tabla vemos una gran variabilidad en la dificultad de los ítems, ya que el porcentaje de respuestas correctas en los problemas varía de 6.6 % (problema 7) a 62.6 % (problema 10). Es notable la dificultad de los problemas. pues incluso en el problema 10 que puede resolverse por ensayo y error fácilmente, hay aún un 38% de alumnos que no ha sido capaz de hallar una solución al mismo. Al comparar con la investigación de Navarro-Pelayo observamos que en la mayor parte de los ítems nuestros alumnos obtienen mayor porcentaje de respuestas correctas, aunque se mantiene la gran dificultad en los problemas 4 y 9 y en otros casos los resultados no son mejores que en los de la investigación descrita (problemas 11 a 13).

Tabla 3.3.1.1. Frecuencias y porcentajes en cuanto a soluciones correctas, incorrectas e intentos fallidos en los problemas

Problema	No resuelve	Correcta	Incorrecta
1	14 (15.4)	40 (44.0)	37 (40.3)
2	18 (19.8)	47 (51.6)	26 (28.6)
3	10 (11.0)	63 (69.2)	18 (19.8)
4	38 (41.8)	9 (9.9)	44 (48.4)
5	11 (12.1)	50 (54.9)	30 (33.0)
6	19 (20.9)	56 (61.5)	16 (17.6)
7	41 (45.1)	6 (6.6)	44 (48.4)
8	29 (31.9)	40 (44.0)	22 (24.2)
9	28 (30.8)	27 (29.7)	36 (39.6)
10	20 (22.0)	57 (62.6)	14 (15.4)
11	43 (47.3)	36 (39.6)	12 (13.2)
12	36 (39.6)	29 (31.9)	26 (28.6)
13	32 (35.2)	44 (48.4)	15 (16.5)
Total	338 (28.6)	504 (42.6)	341 (28.8)

Si comparamos ahora estos resultados con los obtenidos en las muestra piloto 1 (cuestionario A) y 2 (cuestionario B) se puede confeccionar la tabla 3.3.1.2 en donde se muestran los porcentajes de aciertos, redondeados a las unidades, en cada uno de los problemas; la numeración corresponde a los problemas del cuestionario B.

Tabla 3.3.1.2. Porcentaje de soluciones correctas en las distintas muestras.

Problema	Cuestionario B Año 96 n=91	Cuestionario B Año 95 n=29	Cuestionario A Año 94 n=27
1	44	69	67
2	52	38	-
3	69	76	93
4	10	7	7
5	55	76	70
6	61	59	70
7	7	14	-
8	44	52	56
9	30	45	37
10	63	69	35
11	40	48	77
12	32	45	54
13	48	72	62

Respecto de las muestras anteriores se observa un descenso del porcentaje de respuestas correctas, en los problemas 1, 5, 7, 9 y 13 y un aumento moderado, en lo que se refiere al porcentaje de respuestas correctas, en el problema 2. La media del porcentaje de respuestas correctas baja del 51´5 % (año 95) al 42´6 % (año 96), pero esta variabilidad no es muy grande y se debe seguramente a la variabilidad muestral. Observamos que la dificultad relativa de los problemas coincide en las diversas muestras (véase, por ejemplo, los problemas 4 y 7).

3.3.2. Efecto de las variables de tarea

Para analizar la posible relación entre el tipo de ítem y el número de soluciones correctas incluimos la Tabla 3.3.2.1, en que recordamos las características de diseño de estos items y las Tablas 3.3.2.2 a 3.3.2.4 donde el porcentaje de soluciones correctas, incorrectas y en blanco se organizan de acuerdo con el mismo esquema.

Tabla 3.3.2.1. Diseño del cuestionario, según modelo y operación combinatoria

	Esquema combinatorio		
Operación combinatoria	Colocación	Selección	Partición
C	Item 3	Item 6	Item 10
PR	Item 12	Item 1	Item 5
VR	Item 9	Item 11	Item 4
V	Item 8	Item 13	
Compuestos	Item 2	Item 7	

Tabla 3.3.2.2. Porcentaje de respuestas correctas según características del item

	Esquema combinatorio		
Operación combinatoria	Colocación	Selección	Partición
C	69.2	61.5	62.6
PR	31.9	44	54.9
VR	29.7	39.6	9.9
V	44	48.4	
Compuestos	51.6	6.6	

Los problemas resueltos correctamente por un mayor número de estudiantes han sido el 3, el 6 y el 10, que lo fueron en un porcentaje superior al 60 %, cada uno de ellos pertenece a un esquema combinatorio diferente pero, en todos ellos, la operación combinatoria asociada es la de combinaciones. Los problemas resueltos correctamente por un menor número de estudiantes han sido el 4, el 7 y el 9, cada uno de ellos pertenece a un esquema combinatorio diferente, dos de ellos son de variaciones con repetición y en el otro, compuesto, también intervienen las variaciones con repetición.

Tabla 3.3.2.3. Porcentaje de respuestas incorrectas según características del item

	Esquema Combinatorio		
Operación	Colocación	Selección	Partición
C	19.8	17.6	15.4
PR	28.6	41.8	33
VR	39.6	13.2	48.4
V	24.2	16.5	
Compuestos	28.6	48.4	

El mayor porcentaje de respuestas incorrectas corresponde a los problemas 1,4 y 7, dos de ellos son de selección y uno de partición, uno de ellos es de variaciones con repetición, otro de permutaciones con repetición y en el otro, compuesto, están también presentes las variaciones con repetición. El menor porcentaje de respuestas incorrectas corresponde a los problemas 10, 6, 3 (combinaciones) y 13, variaciones. Dos de ellos de selección, uno de colocación y uno de partición, por lo que aquí se aprecia un efecto de la operación combinatoria, pero no del esquema combinatorio.

Por último, en la Tabla 3.3.2.4 incluímos el porcentaje de respuestas en blanco e intentos fallidos. En cuanto al porcentaje de respuestas en blanco, es especialmente alto en los problemas 4, 7 y 11, entre un 40 % y un 50 % , y especialmente bajo en los problemas 1, 3 y 5, no teniendo influencia el esquema combinatorio y apareciendo, de nuevo, las variaciones con repetición como elemento disuasorio.

Tabla 3.3.2.4. Porcentaje de respuestas en blanco según características del item

	Colocación	Selección	Partición
C	11	20.9	22
PR	39.6	14.3	12.1
VR	30.8	47.3	41.8
V	31.9	35.2	
Compuestos	19.8	45.1	

De aquí parece deducirse que los problemas más sencillos son los de combinaciones y los más difíciles los de variaciones con repetición. Observamos también que el orden de dificultad de las diferentes operaciones combinatorias coincide con lo obtenido en la investigación de Navarro-Pelayo (1994). Aparentemente, no se observa una influencia en la dificultad del esquema combinatorio, como se encontró en la investigación anterior. Hay que tener en cuenta, no obstante que hemos suprimido parte de los problemas (los problemas de permutaciones) y hemos añadido los dos problemas compuestos, por lo que nuestros resultados en este punto no son directamente comparables con los de la citada autora.

Para comprobar nuestra conjetura hemos realizado un análisis de varianza de medidas repetidas con el programa SPSS considerando dos factores intra-sujetos: el esquema combinatorio (con 3 niveles) y la operación combinatoria (con 5 niveles). En la Tabla 3.3.2.5 presentamos los resultados de este análisis en el que hemos obtenido una significación estadística para el efecto de la operación combinatoria sobre la dificultad del problema, pero no hemos obtenido valor significativo ni del esquema combinatorio ni de la interacción entre esquema y operación combinatoria.

Tabla 3.3.2.5. Resultados del análisis de varianza

Fuente	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.	Eta cuadrado
Esquema	1.648E-02	1	1.648E-02	.090	.765	.001
error(esquema)	16.484	90	.183			
Operación	19.810	1	19.810	110.118	.000	.550
error(operacion)	16.190	90	.180			
Esquema * operación	.396	1	.396	2.082	.153	.023
error(esquema*operación)	17.104	90	.190			

En la tabla 3.3.2.6 incluimos el porcentaje de aciertos, ordenados de manera decreciente, y el tamaño correspondiente de la solución para cada uno de los problemas del cuestionario. Podemos observar que en los tres problemas con mayor porcentaje de respuestas correctas el tamaño de la solución es pequeño (no superior a 10) y, en los dos problemas con menor porcentaje de respuestas correctas el tamaño de la solución es mediano o grande, respectivamente. En general se observa una disminución del número de respuestas correctas respecto al tamaño de la solución, con algunas excepciones.

Para analizar la existencia de una posible relación de esta variable con la dificultad del problema, hemos calculado el coeficiente de correlación lineal de Pearson, obteniendo un valor R= -0.5843 que indica la existencia de una correlación inversa de relativa importancia, es decir, sugiere que la dificultad del problema aumenta con el tamaño de la solución. Esta variable fue controlada en la investigación de Navarro-Pelayo, pero su efecto no fue evaluado, de modo que, en este punto nuestros resultados completan los de la citada autora.

Tabla 3.3.2.6. Porcentaje de respuestas correctas y tamaño de la solución

Problema	Respuestas correctas	Tamaño de la solución
3	69	4
10	63	6
6	61	10
5	55	6
2	52	216
13	48	24
1	44	12
8	44	60
11	40	64
12	32	20
9	30	16
4	10	81
7	7	640

3.3.3. Distribución del número de respuestas correctas

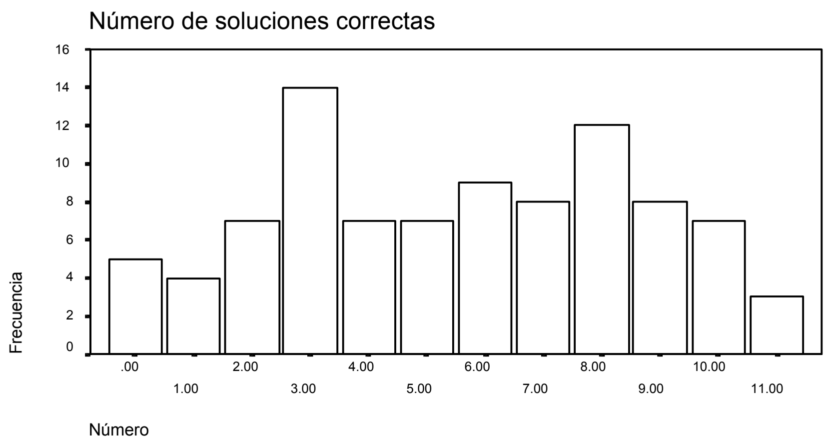
La tabla 3.3.3.1 nos muestra la frecuencia absoluta y porcentaje en cuanto al número de respuestas correctas en el total de la prueba para cada uno de los estudiantes. El número de problemas resueltos correctamente oscila entre 0 y 11, de modo que ningún estudiante completó correctamente todos los problemas.

Tabla 3.3.3.1. Frecuencia del número total de respuestas correctas en cada estudiante

Respuestas correctas	Frecuencia
11	3
10	7
9	8
8	12
7	8
6	9
5	7
4	7
3	14
2	7
1	4
0	5
Total	N=91

Sólo el 42% de los estudiantes resuelve correctamente más de la mitad de los problemas y el 5% de los estudiantes no resuelve correctamente ningún problema del cuestionario. La media de problemas resueltos correctamente es de 5´5, menos de la mitad del cuestionario, a pesar de la aparente sencillez y de la alta preparación de los alumnos. La existencia de dos modas (3 y 8 respuestas) también parece indicar que hay una separación entre buenos y malos resolutores de este tipo de problema, ya que la distribución es claramente no normal y se observa la existencia de dos poblaciones. Esta bimodalidad se aprecia mejor en la Figura 3.3.3.1. donde representamos gráficamente esta distribución.

Figura 3.3.3.1. Distribución del número de soluciones correctas



También hemos representado gráficamente el número de soluciones incorrectas y problemas sin resolver. Observamos que los alumnos han tratado de resolver los problemas, ya que la mayoría da algún tipo de solución (correcta o incorrecta) a los problemas.

La tabla 3.3.3.2 contiene de una forma detallada el número de respuestas correctas, incorrectas y de problemas en que el estudiante no llega a dar una solución, para cada uno de los estudiantes de la muestra y está realizada por orden decreciente de respuestas correctas. Como era de esperar, cuando disminuye el número de soluciones correctas los alumnos tienen un mayor número de problemas en que no llegan a dar ningún tipo de solución, a pesar de que a veces se han ensayado procedimientos de resolución que han sido infructuosos.

Figura 3.3.3.2. Distribución del número de problemas donde no se obtiene solución

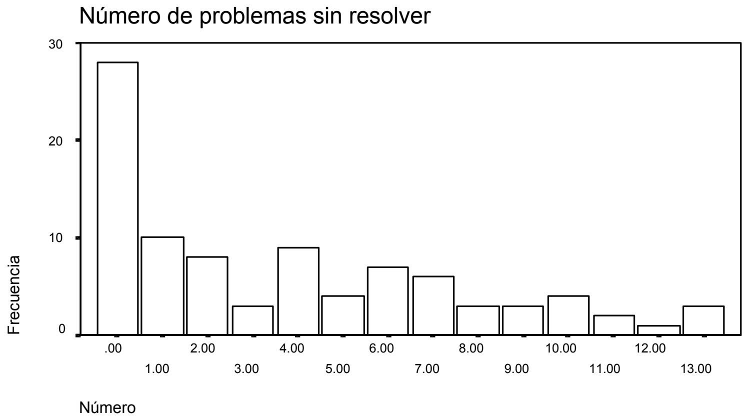
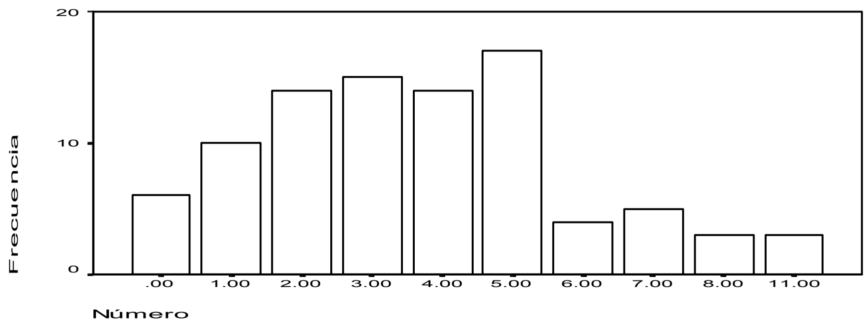


Figura 3.3.3.3. Distribución del número de soluciones incorrectas



Deducimos de ello que el alumno o bien no ha comprendido el enunciado o no posee suficientes herramientas para abordar el problema, y es incapaz de encontrar soluciones correctas o incorrectas. Estos dos puntos, interpretación del enunciado y herramientas heurísticas empleadas serán analizados con detalle en los siguientes apartados.

Tabla 3.3.3.2. Soluciones correctas, incorrectas y no logradas de cada uno de los estudiantes

Correctas	Incorrectas	No da solución	Estudiantes	Frecuencia
11	2	0	26,29,68	3
10	0	3	52	1
10	2	1	3	1
10	3	0	19,36,46,49,53	5
9	2	2	18,21	2
9	3	1	1,40	2
9	4	0	12,50,51,64	4
8	2	3	38,73	2
8	3	2	90	1
8	4	1	28,35,55	3
8	5	0	4,16,30,32,33,43	6
7	1	5	14	1
7	2	4	23	1
7	4	2	13,17	2
7	5	1	7,20	2
7	6	0	54,91	2
6	1	6	57	1
6	3	4	27	1

6	5	2	71	1
6	6	1	9	1
6	7	0	2,4,6,15,41	5
5	0	8	87	1
5	2	6	22,86	2
5	4	4	37,69	2
5	6	2	47	1
5	8	0	78	1
4	1	8	8	1
4	2	7	85	1
4	3	6	67	1
4	5	4	24,77,79	3
4	8	1	61	1
3	0	10	81	1
3	1	9	72,82	2
3	2	8	42	1
3	3	7	45,62,66,84	4
3	4	6	70,88	2
3	5	5	10,11,58	3
3	6	4	31	1
2	1	10	44,74,80	3
2	4	7	39	1
2	5	6	65	1
2	11	0	59,63	2
1	1	11	34	1
1	3	9	5	1
1	8	4	25	1
1	11	1	89	1
0	0	13	56,76,83	3
0	1	12	60	1
0	2	11	75	1

También observamos que el 31% de los estudiantes proporciona algún tipo de solución (correcta o incorrecta) a todos los problemas del cuestionario, y el 24 % solo proporciona algún tipo de solución a menos de la mitad de los problemas del cuestionario.

3.3.4. Análisis de validez y fiabilidad

La construcción de un cuestionario o cualquier otro instrumento de recogida de datos con el que se quiera evaluar conocimientos o cualquier otro constructo inobservable es un proceso complejo, ya que nuestras inferencias las realizamos a partir de las respuestas de los sujetos (indicadores empíricos del constructo a evaluar). Dane (1990) indica la necesidad de asegurar la calidad de los datos obtenidos, que no son más que una muestra del universo de posibles respuestas de los sujetos a las preguntas planteadas o a otras relacionadas con el constructo a evaluar. También Giménez y cols (1997) señalan que la evaluación tiene un aspecto de medición cuando se quiere que sea válida y reproductible.

Por ello, siguiendo a Thorndike (1989) debemos plantearnos dos preguntas al respecto: cuál es la exactitud con que la muestra de respuestas representa a la población de la que proviene (fiabilidad) y si existe algún tipo de sesgo respecto al atributo que se pretende evaluar (validez).

En nuestro caso hemos partido de un instrumento ya elaborado por Navarro-Pelayo quien hizo un amplio estudio de su fiabilidad y validez. Puesto que en esta última versión hemos variado dos de los ítems, hemos considerado conveniente repetir este estudio. Respecto a la validez, hemos descrito detalladamente el cuestionario utilizado en el capítulo 2, tanto respecto al tipo de problemas incluídos, las variables controladas y los potenciales procesos de resolución. Creemos, por tanto, suficientemente justificada la validez de contenido del instrumento, respecto a los tipos de problemas descritos y las variables incluidas, ya que no pretendemos extender nuestros resultados respecto a otros tipo de problemas o variables.

Para estudiar la fiabilidad del cuestionario final hemos empleado diversos métodos. En primer lugar, hemos realizado un estudio de la dificultad y discriminación de cada uno de los problemas que lo componen, que presentamos en la Tabla 3.3.4. El índice de dificultad viene dado por la proporción de respuestas correctas y en nuestro caso, como se ha indicado anteriormente es muy variable. Esto por un lado hace bajar la fiabilidad global de la prueba, pero contribuye a aumentar su validez al incluir una mayor gama de dificultad en los problemas.

Tabla 3.3.4. Dificultad y discriminación de los problemas del cuestionario.

Problema	Dificultad	Discriminación
1	0.44	.080
2	0.52	.254
3	0.69	.189
4	0.10	.368
5	0.55	.162
6	0.61	.160
7	0.07	.475
8	0.44	.303
9	0.30	.383
10	0.63	.398
11	0.40	.323
12	0.32	.386
13	0.48	.307

El índice de discriminación viene medido por la correlación biserial entre la puntuación total en el test y el acierto/fallo en el ítem y nos proporciona un indicador de cómo cada problema discrimina entre los buenos/malos resolutores. También en este caso hay una gran variabilidad, aunque la mayoría de los problemas tuvo una discriminación estadísticamente significativa. Los problemas 1, 3, 5 y 6 no llegan a discriminar entre los alumnos.

Calculamos el coeficiente de fiabilidad de consistencia interna, con ayuda del programa SPSS, obteniendo un valor Alpha = 0.8357, que consideramos suficientemente elevado, dado que nuestra muestra no es demasiado amplia ni en alumnos ni en problemas y también porque el rango de variables incluídas necesariamente hacen la prueba no homogénea. (Recordemos que el coeficiente Alpha mide la fiabilidad como consistencia interna de la prueba y es una cota superior de la fiabilidad calculada por el método de las dos mitades).

Adicionalmente hemos calculado dos coeficientes de generalizabilidad para el cuestionario. La teoría de la generalizabilidad extiende la teoría clásica de la medición, según Feldt y Brennan (1991) y permite, por medio del análisis de varianza, analizar diferentes fuentes de error en un proceso de medida. Para Santisteban (1990) el núcleo de esta teoría es el considerar diferentes fuentes de error en las puntuaciones observadas, que pueden ser los mismos sujetos, las preguntas o las condiciones que se aplican.

El coeficiente de generalizabilidad se define con el cociente (1), es decir como cociente entre la varianza verdadera en las puntuaciones de la prueba y la varianza observada que es

(1) $$G = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_e^2}$$

suma de la varianza verdadera más la varianza debida al error aleatorio. Según Thorndike, la varianza de error depende de como definimos el universo de puntuaciones verdaderas y en el análisis de generalizabilidad se consideran ciertas fuentes como parte de la varianza de error en unas condiciones y otras fuentes en otras.

En nuestro caso diferenciaremos dos fuentes para el error aleatorio y calcularemos, por tanto, dos coeficientes de generalizabilidad: la generalibilidad a otros alumnos de la misma prueba y la generalizabilidad de otros problemas combinatorios similares a los incluidos en la prueba a los mismos alumnos.

Para realizar este cálculo, hemos obtenido, en primer lugar a partir del análisis de escalas del programa SPSS y del modelo de estimación de Dunn y Clarck (1987) para el análisis de varianza de medida repetida, los siguientes componentes de la varianza:

Varianza dentro de los sujetos $\sigma^2_s = 2.4333$

Varianza dentro de los ítems $\sigma^2_i = 2.3543$

Varianza residual $\sigma^2_e = .3998$

Sustituyendo ahora estos componentes de varianza en la fórmula (1) y teniendo en cuenta los tamaños de muestra (13 y 91) de problemas y alumnos, según si consideramos como fuente de variación los problemas o los alumnos, obtenemos las siguientes estimaciones:

$$G_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma_e^2/91} = 0.8301$$

$$G_i = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_e^2/13} = 0.8355$$

para la estimación de la generalizabilidad de una prueba con otros ítems que incluyan las mismas variables a los mismos alumnos. Vemos que el valor obtenido es muy cercano al coeficiente Alpha puesto que la generalizabilidad en este caso coincide con el valor de este coeficiente. Para la generalizabilidad a otros alumnos de la misma prueba obtenemos un valor ligeramente inferior, lo cual es lógico, debido al tamaño reducido de la muestra de alumnos y a la variabilidad que hemos observado en la prueba.

3.4. INTERPRETACIÓN DEL ENUNCIADO

Una vez analizados los resultados globales en la prueba nos hemos centrado en estudiar las variables que se presentan en la Tabla 3.2.1, clasificadas en los bloques descritos en la sección 3.2.

En este apartado nos centramos en el estudio de la interpretación del enunciado del problema que hacen los alumnos y si dicha interpretación es o no correcta. Según Hadar y Hadass (1981) uno de las principales dificultades que encuentra el alumno al resolver problemas combinatorios es la identificación del tipo de configuración combinatoria que se le pide enumerar o contar.

La interpretación de esta configuración combinatoria, a partir del enunciado verbal del problema implica la identificación del esquema entre los incluidos en el cuestionario (selección, partición o colocación), del tipo de elementos a combinar (distinguibles o indistinguibles), de la importancia de tener o no en cuenta el orden y la repetición (tanto en los elementos iniciales, como en las particiones o colocaciones obtenidas) y, en caso de que se trate de un problema de partición, si se establece correctamente las condiciones de la partición, tales como ser exhaustiva, número de elementos en cada parte, etc.

No es de extrañar la posible dificultad que entraña esta tarea, puesto que en el campo de problemas combinatorios simples, pequeños cambios en el enunciado implican una configuración combinatoria muy diferente. Mientras que la solución del problema, una vez que el enunciado se interpreta correctamente, no tiene gran dificultad en muchos casos, ya que no requiere una matemática compleja, esta primera fase puede implicar un fallo en todo el proceso de resolución.

A continuación analizamos si el alumno ha identificado correctamente cada uno de los puntos descritos. Para realizar este análisis, así como los que siguen, hemos tenido en cuenta solo los alumnos que han aportado algún tipo de solución (correcta o incorrecta) a los problemas. Por tanto el tamaño de la muestra no siempre es el mismo en las tablas que presentamos a continuación y los porcentajes se refieren siempre al número de alumnos que dieron algún tipo de solución al problema.

3.4.1. Identificación del esquema combinatorio

Al describir la construcción del cuestionario, analizamos esta variable que fue una de las principales en la investigación de Navarro Pelayo. Aunque en nuestro caso no hemos encontrado que influya en la dificultad de los problemas, estamos también interesados en ver si el alumno al resolver el problema identifica correctamente el esquema del enunciado y hace referencia al mismo al resolver el problema. Queremos también observar si el alumno cambia el esquema del enunciado y utiliza uno diferente, por ejemplo, si un problema de colocación lo resuelve usando el esquema de selección o partición.

En esta variable hemos considerado las categorías cuya codificación y descripción indicamos a continuación:

Usa el esquema implícito en el enunciado

El alumno utiliza en su resolución la terminología específica del esquema al que pertenece ese problema concreto, como en el caso siguiente (elegir 3 estudiantes entre 5 voluntarios). En su resolución el alumno usa palabras específicas de la acción de extraer una muestra, como "escoger", "selecciono". Nótese que el alumno no identifica la operación combinatoria, sino que emplea la enumeración, obteniendo el número combinatorio $C_{5,3}$ como equivalente al $C_{5,2}$ (seleccionar tres niños es equivalente a descartar dos) que es una propiedad de los números combinatorios. Seguidamente obtiene $C_{5,2}$ como suma de los números combinatorios $C_{4,1}+C_{3,1}+C_{2,1}+C_{1,1}$:

Supongo que no interviene el orden, si es que no realizan la acción de forma simultanea.
Se trata, pues, de escoger 3 de 5, que equivale a descartar 2 de 5.
Si descarto a Elisa hay 4 posibilidades de selección, dependiendo del otro de los 4 chicos que no selecciono para la tarea.
Si descarto a Fernando, hay 3 posibilidades aún no consideradas, ya que dejar fuera a Fernando y Elisa ya lo habíamos contemplado.
Hay en total: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ formas de hacerlo. (Estudiante 18; problema 6)

Usa el esquema de selección:

Cuando el alumno usa este esquema en un problema cuyo enunciado no corresponde al mismo. El comentario que aparece en el problema contiene los elementos semánticos típicos del esquema de selección: se extraen, se eligen, etc. En el siguiente ejemplo, el estudiante, para resolver el problema 3 (colocar 3 cartas en cuatro sobres) utiliza la palabra "selección". En definitiva ha pasado del problema dado a otro equivalente, lo que le permite aplicar de forma inmediata la definición de combinaciones, que generalmente se le enseña a partir de la idea de muestra no ordenada:

A	*B*	*C*	*D*
-	-	-	
-		-	-
	-	-	-
-	-		-

En definitiva sería hacer una selección de 3 sobres de entre 4, sin que importe el orden, $C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$.
(Estudiante 21; problema 3)

El estudiante usa el esquema de partición:

Cuando el alumno usa este esquema en un problema cuyo enunciado no corresponde al mismo. El comentario que aparece en el problema contiene expresiones típicas del esquema de partición: se reparten, se separan, etc. En el ejemplo que reproducimos el estudiante usa la palabra "subgrupo" para resolver el problema 8 (aparcar 5 coches en 3 cocheras). En este caso, la traducción del problema (colocación) a uno de partición ha sido ineficaz, porque el alumno no tiene en cuenta el orden de aparcamiento de los coches y produce una solución errónea:

Tendremos que calcular el número de subgrupos diferentes de tres elementos que hay en un grupo de 5.
$C_5^3 = 10$
1 2 3
1 2 4
1 2 5
1 3 4
1 3 5

1 4 5
2 3 4
2 3 5
3 4 5
2 4 5

(Estudiante 22; problema 8)

El estudiante usa el esquema de colocación:

Cuando el alumno usa este esquema en un problema cuyo enunciado no corresponde al mismo. El comentario que aparece en el problema contiene expresiones típicas del esquema de colocación: se aparca en, sentar en una mesa, etc. En el caso que sigue (formar números de 3 cifras) el alumno usa la palabra "colocación". En este caso la traducción le permite tener en cuenta el orden, al resolver el problema:

Como importa el orden de colocación de las bolas y, además, se repiten es $VR_4^3 = 4^3 = 64$ *números.*

(Estudiante 26; problema 11)

Esquema mixto:

Los comentarios que realiza el alumno sobre el problema contienen una terminología que comparten más de un esquema, como en el siguiente ejemplo que usa elementos de los esquemas de colocación y selección (formar un número de 5 cifras a partir de unas dadas, con una condición):

El número tendrá dos ochos que podrán aparecen 5 lugares distintos:
$C_5^2 = 5! \ / \ 2!3! = 5.2 = 10.$
Ahora debo encontrar un número de 3 cifras elegidas de entre 1, 2, 4, 6 y tendré 54 formas de hacerlo; por tanto 54 x 10 = 540 formas de escribir un número de 5 cifras en estas condiciones.

(Estudiante 49; problema 7)

No se puede deducir de la respuesta:

En algunos casos el alumno no realiza comentario alguno sobre el ennciado del problema y se limita a resolverlo, como en el caso siguiente:

A B C C C
A C B C C
A C C B C
A C C C B
C A C C B
C C A C B
C C C A B
C A B C C
C C A B C
De 9 formas diferentes. *(Estudiante 9; problema 12)*

o bien, hace algún comentario en el que los vocablos que utiliza no pueden considerarse cercanos a ninguno de los esquemas considerados, como el siguiente alumno, que inventa una notación auxiliar para resolver un problema más sencillo deducido del 13 (elegir tesorero y secretario fijando un presidente) y, una vez resuelto, por generalización y recursión resuelve el problema dado:

A	*C*	*D*	*B*
P	*T*	*S*	
P	*T*		*S*
P	*S*	*T*	
P	*S*		*T*
P		*S*	*T*
P		*T*	*S*

Ahora voy pasando a primera posición lsas letras siguientes:

B A C D D B A C C D B A
Y multiplico las 6 formas diferentes de los cargos cuando dejo fija la primera letra y multiplico por 4, que es la variación que hago al ir pasando a la primera posición las demás letras y, por tanto, 6 . 4 = 24
(Estudiante 13; problema 13)

La tabla 3.4.1 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría en la variable descrita en los distintos problemas del cuestionario.

Tabla 3.4.1. Frecuencias y porcentajes en cuanto a la identificación del esquema combinatorio

		Esquema usado en la resolución del problema					Total
Problema	Esquema enunciado	Selección	Partición	Colocación	Mixto	No explica	
1	33 (42.3)	0 (0.0)	0 (0.0)	6 (7.7)	0 (0.0)	39 (50.0)	78 (100)
2	41 (56.2)	20 (27.4)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (1.4)	11 (15.1)	73 (100)
3	22 (27.2)	22 (27.2)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (1.2)	36 (44.4)	81 (100)
4	25 (47.2)	4 (7.5)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (1.9)	23 (43.4)	53 (100)
5	35 (43.7)	7 (8.8)	0 (0.0)	0 (0.0)	2 (2.5)	36 (45.0)	80 (100)
6	46 (63.9)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	26 (36.1)	72 (100)
7	35 (70.0)	7 (14.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	3 (6.0)	5 (10.0)	50 (100)
8	31 (50.0)	11 (17.7)	1 (1.6)	0 (0.0)	1 (1.6)	18 (29.0)	62 (100)
9	41 (65.1)	3 (4.8)	1 (1.6)	0 (0.0)	1 (1.6)	17 (27.0)	63 (100)
10	24 (33.8)	6 (8.5)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	41 (57.7)	71 (100)
11	18 (37.5)	0 (0.0)	0 (0.0)	3 (6.2)	1 (2.1)	26 (54.2)	48 (100)
12	19 (34.5)	3 (5.5)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	33 (60.0)	55 (100)
13	15 (25.4)	1 (1.7)	0 (0.0)	2 (3.4)	0 (0.0)	41 (69.5)	59 (100)
TOTAL	385 (45.6)	84 (9.9)	2 (0.2)	11 (1.3)	11 (1.3)	352 (41.7)	845 (100)

Observamos en esta tabla que, de todos los alumnos que proporcionan solución a un problema, la mayor proporción usa el mismo esquema implícito en el enunciado, en los problemas 2, 4, 6, 7, 8 y 9. Si tenemos en cuenta sólo los casos en que se explicita el modelo, también en los problemas 1, 5, 10, 11, 12 y 13 lo más frecuente es usar el esquema del enunciado. De ello deducimos que, por lo general, el alumno en su respuesta usa el esquema sugerido en el enunciado. Esta era una hipótesis que Navarro- Pelayo formuló para explicar la dificultad de los problemas combinatorios, aunque no llegó a estudiar. Por tanto pensamos que en este punto nuestros resultados completan la investigación de la citada autora.

El porcentaje más alto de cambio de modelo, alrededor del 30%, ha correspondido a los problemas 2 y 3 seguidos, con alrededor de un 20%, por el problema 8. El esquema subyacente en estos tres problemas era el de colocación y el cambio se produjo, en la práctica totalidad de los casos, hacia un esquema de selección. El porcentaje de cambios fue especialmente bajo en los problemas 6 y 13, 0% y 5% de cambios respectivamente, y en ambos casos está presente el esquema de selección.

El resto de problemas, de partición presenta un cambio de esquema que oscila entre el 5% y el 11%, siéndolo, en su inmensa mayoría, hacia el esquema de selección.

Parece ser que los estudiantes no consideran importante el traducir el problema a un esquema diferente o bién encuentran dificultad para hacerlo y de hecho dos de los problemas resueltos por un mayor número de estudiantes son el 3, con un porcentaje relativamente alto de cambio de esquema al esquema de selección y el 6, con un porcentaje cero en cuanto al cambio de modelo, pero cuyo enunciado corresponde al esquema de selección. No parece que el cambio de esquema en si produzca el éxito pero no olvidemos que los dos problemas que acabamos de citar uno era de selección y el otro se tradujo a un esquema de selección, lo que parece indicar ciertamente es que el esquema de selección facilita la resolución, posiblemente porque el esquema de selección se usa para definir las operaciones combinatorias y por tanto facilita al alumno la identificación de dicha operación.

Analizados los datos de una manera global vemos que en el 46 % de los problemas resueltos los estudiantes no realizan cambio de esquema, lo que sugiere una dificultad en la traducción del problema a otro equivalente.

3.4.2. Tipos de elementos

Al resolver un problema combinatorio es muy importante diferenciar si el tipo de elementos a combinar es distinguible o indistinguible. Respecto a si los elementos son o no distinguibles se han tenido en cuenta las siguientes categorias:

Identificación correcta:

El alumno hace una interpretación correcta acerca de los tipos de elementos que aparecen en el problema, unas veces de forma explícita:

2 – Azules
1 – Blanca
1 – Roja
$PR_4^{2,1,1} = 4! / (2!1!1!) = 12$

B	*A*	*R*	*A*
B	*A*	*A*	*R*
B	*R*	*A*	*A*
A	*A*	*B*	*R*
A	*B*	*R*	*A*
A	*A*	*R*	*B*

Porque tenemos cuatro fichas que, al extraer de la caja, estamos ordenando pero tenemos que tener en cuenta que las azules son indistinguibles. (Estudiante 49; problema 1)

y otras veces se deduce de los casos que escribe, como en el siguiente ejemplo, donde el alumno diferencia los sobres y no diferencia las cartas:

Amarillo-Blanco-Crema
Amarillo-Blanco-Dorado
Amarillo-Crema-Dorado
Blanco-Crema-Dorado *(Estudiante 53; problema 3)*

Identificación incorrecta:

El alumno interpreta de una manera incorrecta el tipo de elementos (distinguibles o no), como el siguiente estudiante que diferencia entre las dos fichas azules en el problema 1:

A_1 *ficha azul*
A_2 *ficha azul*
R ficha roja
B ficha blanca
...
6 casos diferentes cogiendo primero A_1
“ “ “ “ “ “ A_2
“ “ “ “ “ “ *B*
“ “ “ “ “ “ *R*
En total 24 casos diferentes. *(Estudiante 55; problema 1)*

No se sabe:

Se quiere indicar que el alumno no hace comentario al respecto, ignora el hecho, resolviéndolo de manera correcta en algunos casos y de manera incorrecta en otros, pero no tenemos suficientes criterios para deducir la interpretación que hace del tipo de elementos.

La tabla 3.4.2 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría en esta variable y en los distintos problemas del cuestionario.

En dicha tabla observamos que, generalmente, el tipo de elemento considerado es correcto, ya que el porcentaje de valoraciones correctas supera el 78% en todos los casos y es especialmente alto, superior al 95%, en nueve de los trece problemas.

Tabla 3.4.2. Frecuencias y porcentajes en cuanto a la identificación del tipo de elementos

	Identificación del tipo de elementos			
Problema	Correcta	Incorrecta	No se sabe	TOTAL
1	61 (78.2)	16 (20.5)	1 (1.3)	78 (100)
2	73 (100.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	73 (100)
3	79 (97.5)	1 (1.2)	1 (1.2)	81 (100)
4	48 (90.6)	4 (7.5)	1 (1.9)	53 (100)
5	80 (100.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	80 (100)
6	72 (100.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	72 (100)
7	48 (96.0)	0 (0.0)	2 (4.0)	50 (100)
8	62 (100.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	62 (100)
9	59 (93.7)	4 (6.3)	0 (0.0)	63 (100)
10	71 (100.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	71 (100)
11	48 (100.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	48 (100)
12	49 (89.1)	6 (10.9)	0 (0.0)	55 (100)
13	58 (98.3)	1 (1.7)	0 (0.0)	59 (100)
TOTAL	808 (95.6)	32 (3.8)	5 (0.6)	845 (100)

Las respuestas incorrectas aparecen sobre todo en los problemas 1 y 12 (permutaciones con repetición) y en menor medida en los problemas 4 y 9 (variaciones con repetición). Esto indica que el hecho de la repetición produce una cierta interferencia a la hora de reconocer a los elementos como distinguibles o no.

En la investigación de Navarro-Pelayo (1994) se han encontrado alumnos que consideraban diferentes los elementos de las permutaciones con repetición, incluso aunque en el enunciado del problema se indique que son iguales, debido a que físicamente son objetos diferentes y particularmente este problema fue frecuente en los alumnos sin instrucción. Nuestros alumnos parecen haber olvidado las definiciones de las operaciones combinatorias y en este punto sus respuestas se asemejan más a los alumnos sin instrucción de la investigación citada.

3.4.3. Identificación de la influencia o no influencia del orden

Un punto importante es identificar si es o no necesario tener en cuenta el orden en las configuraciones combinatorias que se pide formar. Los alumnos fallan con frecuencia en identificar si es necesario tener en cuenta el orden de extracción de elementos en una muestra, el orden de colocación de elementos dentro de los conjuntos que forman una partición o el orden del conjunto final al establecer una aplicación entre conjuntos (colocación).

Este error fue ya descrito en las investigaciones de Fischbein y Gazit (1988) y Navarro-Pelayo (1994). Hemos considerado, por tanto importante analizar este punto en nuestro trabajo, considerando las siguientes categorías de respuestas:

Identificación correcta y explícita:

El alumno realiza una identificación correcta de la necesidad o no necesidad de tener en cuenta el orden de los elementos y hace afirmaciones explícitas durante el proceso de resolución del problema, como el siguiente alumno al resolver el problema de colocar las cartas en sobres:

Son combinaciones, porque no importa el orden y no se pueden repetir los colores:
C_4^3 *= (4!) / ((3!)(4-3)!) = 4 y por tanto hay cuatro formas distintas de meter las cartas en los cuatro sobres. (Estudiante 50; problema 3)*

Identificación correcta e implícita:

El alumno realiza una identificación correcta de la necesidad o no necesidad de tener en cuenta el orden de los elementos, aunque no emite juicios al respecto. Sin embargo, podemos deducir que la identificación es correcta por la operación combinatoria que elige o por la enumeración de casos que realiza, como el siguiente caso, al resolver el problema de elegir 3 alumnos entre cinco disponibles para borrar la pizarra, donde hacemos notar que el alumno se equivoca al simplificar y finalmente obtiene una solución incorrecta:

Hay que escoger 2 elementos de entre los 5, fijar estos y entre los restantes, que son 3, escoger 1, por tanto se trata de:
$C_5^2 \, . \, C_3^1 = ((5!) / (3!)) \, . \, ((3!) / (2!)) = 5.4.3 = 60$ *formas. (Estudiante 62; problema 6)*

Error de orden:

El alumno realiza una identificación incorrecta sobre el orden de los elementos, que podemos deducir, porque hace una afirmación falsa al respecto, elige una operación combinatoria incorrecta o puede deducirse de la enumeración que realiza. En el siguiente ejemplo, para resolver el mismo problema anterior un alumno cree que el orden influye y ello le lleva incorrectamente a identificar la operación de variaciones. Si el orden hubiese influido la solución sería correcta. Vemos aquí la importancia de identificar correctamente el orden al resolver el problema:

Influye el orden en que se elijan los alumnos porque cada alumno puede borrar de forma distinta la pizarra y, por tanto, son variaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3:
$V_5^3 = (5!) / (5 - 3)! = 60$ *(Estudiante 59;problema 6)*

La tabla 3.4.3 contiene las frecuencias y porcentajes de cada categoría de esta variable en los distintos problemas del cuestionario. En todos los casos hemos podido deducir la idea que tienen los estudiantes respecto a la influencia o no que tiene el orden en los distintos problemas, unas veces lo exponen de forma explícita y otras veces de manera implícita.

Tabla 3.4.3. Frecuencias y porcentajes en cuanto a la influencia del orden

	Identificación del ordem			
Problema	Correcta, explícita.	Correcta, implícita.	Errónea	TOTAL
1	11 (14.1)	62 (79.5)	5 (6.4)	78 (100)
2	19 (26.0)	52 (71.2)	2 (2.7)	73 (100)
3	34 (42.0)	36 (44.4)	11 (13.6)	81 (100)
4	9 (17.0)	41 (77.4)	3 (5.7)	53 (100)
5	26 (32.5)	51 (63.7)	3 (3.7)	80 (100)
6	40 (55.6)	29 (40.3)	3 (4.2)	72 (100)
7	22 (44.0)	24 (48.0)	4 (8.0)	50 (100)
8	36 (58.1)	24 (38.7)	2 (3.2)	62 (100)
9	9 (14.3)	48 (76.2)	6 (9.5)	63 (100)
10	21 (29.6)	42 (59.2)	8 (11.3)	71 (100)
11	17 (35.4)	31 (64.6)	0 (0.0)	48 (100)
12	20 (36.4)	35 (63.6)	0 (0.0)	55 (100)
13	25 (42.4)	31 (52.5)	3 (5.1)	59 (100)
TOTAL	289 (34.2)	506 (59.9)	50 (5.9)	845 (100)

La mayoría de los alumnos hace una identificación correcta del orden en los problemas resueltos, como se deduce del bajo porcentaje de errores obtenidos. Este es un punto donde nuestra investigación difiere de las de otros autores, posiblemente porque la identificación del orden sea un punto en el que influye favorablemente la madurez y formación matemática del sujeto.

La mayor parte de los errores de orden se han cometido en los problemas 3 y 10, ambos de combinaciones con un tamaño pequeño en la solución. De esta forma, se perfila este error como posible causa de que estos problemas, que se encuentran entre los resueltos correctamente por un mayor número de estudiantes, no lo fueran aún en mayor grado. También en las investigaciones de Fischbein y Gazit (1988) y Navarro- Pelayo (1994) el error de orden estuvo preferiblemente ligado a los problemas de combinaciones, aunque apareció con una frecuencia apreciablemente mayor que en nuestro caso, particularmente en los alumnos sin instrucción.

Los problemas en los que aparece explícitamente y de forma correcta alguna afirmación respecto al orden en un mayor porcentaje, 56%, 58%, respectivamente, de los estudiantes, son el 6 y el 8; seguramente porque los estudiantes perciben con mayor claridad esta importancia y están más seguros de su respuesta, hasta el punto de explicitarla.

Ese porcentaje es mínimo, entre el 14% y el 17%, en los problemas 1, 4 y 9 que son problemas con altos índices de error en las soluciones y que corresponden a operaciones combinatorias en donde está presente la repetición, de lo que parece desprenderse una mayor inseguridad a la hora de tener en cuenta este aspecto en el problema.

3.4.4 Posibilidad de repetición

Consiste en que el alumno identifique correctamente la posibilidad o no de repetición de elementos en la configuración combinatoria pedida: posibilidad de que el muestreo se efectúe con reemplazamiento, de que se puedan colocar en una casilla más de un objeto, o que un conjunto de una partición pueda tener más de un elemento. Con respecto a si los elementos se pueden o no repetir se han considerado las siguientes categorías:

Identificación correcta y explícita

Cuando el alumno realiza alguna afirmación al respecto y lo hace de forma acertada, como en el siguiente caso de formación de números a partir de una serie de dígitos en el que el alumno explicita correctamente tanto el orden como la repetición:

Importa el orden, pues no es lo mismo 332 que 323, y puede haber repetición, por tanto: $VR_4^3 = 4^3 = 64$ *.(Estudiante 50; problema 11)*

Identificación correcta, implícitamente:

El alumno no emite juicios al respecto, pero podemos deducir que su identificación es correcta por la operación combinatoria que elige o por la enumeración de casos que realiza, como la siguiente solución del mismo problema anterior, en que se ha tenido en cuenta el orden y la repetición, pero el alumno no lo explicita:

222			
224			
227			
229			
247	*274*	*294*	
249	*279*	*297*	
244	*277*	*299*	
242	*272*	*292*	*Son 16 números los que empiezan por 2.*

Análogamente, existirán 16 números que comiencen por 4, 7 y 9 respectivamente , por tanto, en total 64.
(Estudiante 52; problema 11)

Error en la identificación:

El alumno comete un error en la identificación al tener en cuenta la repetición, no siendo permitida o no tenerla en cuenta cuando es posible, como el siguiente alumno que interpreta erróneamente que es posible en un comité de 3 personas repetir una persona, esto es, asignarle dos cargos diferentes:

Se trata de repartir 4 elementos de 3 en 3; no importa el orden, es igual que estén en el 1º comité Arturo, Carlos y David que en el 2º comité.
Se pueden repetir, si Carlos está en el primer comité también puede estar en el segundo.
(Estudiante 60; problema 13)

No se sabe:

Cuando no puede deducirse nada al respecto de si el alumno ha identificado o no correctamente la posibilidad de repetición, a partir de su respuesta.

La tabla 3.4.4 contiene las frecuencias y porcentajes de cada categoría en esta variable en los distintos problemas del cuestionario.

Tabla 3.4.4 Frecuencias y porcentajes en cuanto a la identificación correcta de la posibilidad de repetición

	Identificación de la posibilidad de repetición				TOTAL
Problema	Correcta, explícita.	Correcta, implícita.	Errónea	No se sabe	
1	13 (16.7)	47 (60.3)	18 (23.1)	0 (0.0)	78 (100)
2	6 (8.2)	67 (91.8)	0 (0.0)	0 (0.0)	73 (100)
3	12 (14.8)	69 (85.2)	0 (0.0)	0 (0.0)	81 (100)
4	8 (15.1)	42 (79.2)	3 (5.7)	0 (0.0)	53 (100)
5	14 (17.5)	65 (81.2)	0 (0.0)	1 (1.3)	80 (100)
6	14 (19.4)	57 (79.2)	0 (0.0)	1 (1.4)	72 (100)
7	17 (34.0)	12 (24.0)	21 (42.0)	0 (0.0)	50 (100)
8	12 (19.4)	49 (79.0)	1 (1.6)	0 (0.0)	62 (100)
9	2 (3.2)	56 (88.9)	5 (7.9)	0 (0.0)	63 (100)
10	9 (12.7)	60 (84.5)	2 (2.8)	0 (0.0)	71 (100)
11	25 (52.1)	22 (45.8)	1 (2.1)	0 (0.0)	48 (100)
12	8 (14.5)	40 (72.7)	7 (12.7)	0 (0.0)	55 (100)
13	17 (28.8)	40 (67.8)	1 (1.7)	1 (1.7)	59 (100)
TOTAL	157 (18.6)	626 (74.1)	59 (7.0)	3 (0.4)	845 (100)

En la práctica totalidad de los casos hemos podido deducir la idea que tienen los estudiantes acerca de si hay o no hay repetición, en cada uno de los problemas del cuestionario, unas veces de forma explícita y otras implícitamente.

Aunque en la mayoría de los casos hay una identificación correcta, hay varios problemas en donde destaca el alto porcentaje de errores en comparación con el resto. En este caso hay un mayor porcentaje de interpretaciones incorrectas. La mayor parte de los errores se han cometido en los problemas 7 (42% de errores), 1 (23% de errores) y 12 (13% de errores), en todos ellos está presente la repetición. De aquí se deduce que dicho error, cuando se ha dado, ha consistido en ignorar la repetición cuando había que tenerla en cuenta y no dándose, salvo en caso excepcional, el otro tipo de error consistente en suponer que hay repetición cuando en realidad no la hay.

Los problemas 1 y 12 corresponden a permutaciones con repetición y el 7 es un problema compuesto donde también intervienen las permutaciones con repetición. Hay que destacar que fueron los problemas de permutaciones con repetición y variaciones con repetición donde con más frecuencia apareció el error de repetición en la investigación de Navarro- Pelayo y principalmente en los alumnos que habían recibido intrucción. Entrevistas posteriores mostraron que algunos de estos alumnos no habían entendido correctamente el concepto de repetición y es posible que esta confusión también esté presente en los alumnos de nuestra muestra.

En este caso la identificación correcta es mayoritariamente implícita, lo que sugiere que los alumnos podrían tener mayor inseguridad a la hora de decidir si es importante el orden que a la hora de decidir si es importante la repetición. Los problemas en los que aparece en un mayor porcentaje explícitamente y de forma correcta alguna afirmación respecto a la repetición, 52% y 34% respectivamente, son los problemas 11 y 7, donde los alumnos podrían tener mayor seguridad en su respuesta.

3.4.5. Condiciones de la partición

La última condición para interpretar correctamente un enunciado es identificar las condiciones exigidas en la partición en los problemas cuyo esquema combinatorio es la partición, donde es posible una variedad de condiciones: un sólo elemento por celda o un número dado de elementos por celda. También hay que tener en cuenta que hay que repartir el total de objetos entre las celdas. Hemos considerado las siguientes categorías:

Identificación correcta:

Cuando se puede apreciar que la unión de los subconjuntos considerados es la totalidad y que se respetan las condiciones de la partición, dadas por el enunciado del problema:

Dar los cuatro coches a un mismo hermano: 3 formas
Dar tres a uno y uno a otro: 3.2=6 formas
Dar dos a cada uno: 3 formas
Por tanto hay 12 formas diferentes (Estudiante 6; problema 4)

Identificación incorrecta:

La identificación de las condiciones de la partición es incorrecta; por ejemplo la unión de los subconjuntos no es el total de elementos o no se respeta alguna de las condiciones exigidas en la partición. En el siguiente ejemplo, repartir a parte iguales cuatro cromos entre dos niñas, la partición no siempre se hace a partes iguales:

Los 4 para una: 2 formas
3 para una y 1 para la otra: 2 . 4 formas
2 para cada una: 6 formas
En total 16 posibilidades, 16 = 6 + 8 + 2 (Estudiante 18; problema 10)

No se sabe:

No puede deducirse de la respuesta del estudiante si ha hecho una interpretación correcta o incorrecta, porque su explicación sobre este punto es insuficiente, como en el caso siguiente:

Cromos 1 , 2 , 3 , 4 (elementos)
María y Carmen (conjuntos)
Por tanto 4 . 2 = 8 (Estudiante 63; problema 10)

Para analizar este punto solo tenemos en cuenta los problemas de partición. La tabla 3.4.5 contiene las frecuencias y porcentajes de cada categoría de esta variable en los distintos problemas del cuestionario.

Tabla 3.4.5. Frecuencias y porcentajes de tipos de identificación de las condiciones de la partición

Problema	Correcta	Incorrecta	No se sabe	TOTAL
4	46 (86.8)	3 (5.7)	4 (7.5)	53 (100)
5	79 (98.7)	0 (0.0)	1 (1.3)	80 (100)
10	68 (95.8)	2 (2.8)	1 (1.4)	71 (100)
TOTAL	193 (94.6)	5 (2.5)	6 (2.9)	204 (100)

De los alumnos que proporcionan respuesta a los problemas de partición son muy pocos los que hacen una interpretación errónea de las condiciones de la partición y que casi todos la explicitan, por lo que este punto no parece conflictivo. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que en el problema 4 una parte importante de los alumnos no llegó a una solución, por lo que el problema de identificación de condiciones de la partición podría haberse dado en este problema y haber influído en que el alumno no diese ningún tipo de solución.

En consecuencia, nuestros alumnos no parecen tener grandes dificultades a la hora de interpretar el tipo de configuración pedida en el enunciado del problema, aunque hemos encontrado un porcentaje moderado de alumnos con tendencia a convertir el problema en otro de selección. En los problemas de permutaciones con repetición algunos alumnos suelen considerar como distinguibles los elementos idénticos, no diferenciando, por tanto, entre permutaciones simples y permutaciones con repetición. Los problemas de orden aparecen preferentemente en los problemas de combinaciones y los de repetición en los de variaciones y permutaciones con repetición. Los alumnos generalmente parecen identificar correctamente las condiciones de la partición. Nuestros resultados coinciden con los de Navarro-Pelayo, sobre todo en el grupo de alumnos con instrucción, excepto en el error de orden que es mucho menor en nuestro grupo de alumnos.

3.5. PROCESO GENERAL DE RESOLUCION DEL PROBLEMA

Un segundo punto analizado, una vez comprobado que la mayor parte de los alumnos interpreta correctamente los enunciados de los problemas, es el proceso general seguido en la resolución, así como las representaciones ostensivas que usa como apoyo en la visualización de la configuración combinatoria pedida y de sus procesos de enumeración y recuento.

El objetivo es analizar si un mismo alumno sigue un método constante de resolución o si este varia en función del problema. Queremos también ver si los alumnos usan los conocimientos adquiridos durante sus estudios sobre las operaciones combinatorias para resolver estos problemas y si se apoyan en otros recursos como la enumeración y el diagrama en árbol.

A continuación analizamos los resultados obtenidos que se refieren únicamente a aquellos alumnos que aportan algún tipo de solución a los problemas.

3.5.1. Simbolización

Hadar y Hadas (1981) indican que una de las principales dificultades de los estudiantes al resolver problemas combinatorios es elegir una notación adecuada que represente de una forma compacta toda la información dada en el enunciado del problema. Por ello, hemos estudiado en primer lugar si el alumno hace o no uso de la simbolización en caso de que haya resuelto el problema, así como el tipo de simbolización que usa y si este depende del tipo de problema planteado.

Las categorías de respuestas en esta variable, los códigos empleados para las mismas y su descripción se indican a continuación:

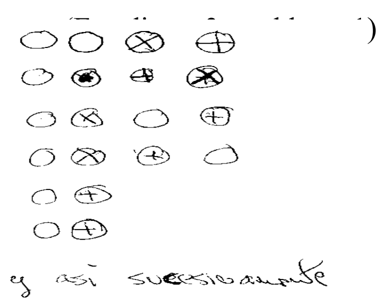
Simbolización algebraica:

El alumno utiliza símbolos algebraicos, que la mayor parte de las veces son las iniciales de los elementos que intervienen en el problema, como el siguiente caso, en que el alumno usa la inicial de los colores de los sobres en el problema 3 (azul, blanco, crema y dorado), para tratar de representarse la situación. Podemos ver también que el alumno comete un error de repetición al considerar que se puede meter más de una carta en el mismo sobre:

El problema se reduce a ver cuantas elecciones de 3 sobres, sin considerar el orden, podemos hacer y tendríamos:
A A A B
B B C C
C D D D
Y, por tanto, 4 elecciones posibles. *(Estudiante 1; problema 3)*

Simbolización gráfica:

El alumno utiliza elementos gráficos alusivos a los elementos que se citan en el problema, como el siguiente caso, en que el alumno, para resolver el problema de selección de bolas de colores dibuja cuatro bolas, dos de ellas idénticas, para representar las bolas del mismo color:

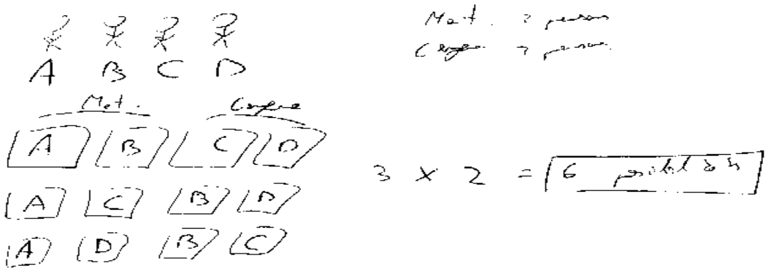


Simbolización algebraica y gráfica:

Con frecuencia los alumnos utilizan esta doble simbolización cuando en el problema aparecen elementos de dos tipos diferentes, para diferenciarlos entre si. En el ejemplo que reproducimos el alumno usa dibujos esquemáticas de personas y letras para sus nombres.

Luego agrupa físicamente estas iniciales para simbolizar el reparto de trabajos (matemáticas y lengua) en el problema 5:

(Estudiante 4; problema 5)



Simbolización numérica:

Cuando se utilizan los números naturales para representar a los elementos del problema, siendo unas veces dichos elementos de tipo numérico y otras sin serlo. Por ejemplo, en el caso que sigue a continuación, los números representan cromos que hay que repartir entre dos niñas:

María: *12*
13
14
23
24
34

Es análogo al anterior y, por tanto, hay 6 posibilidades. (Estudiante 1; problema 10)

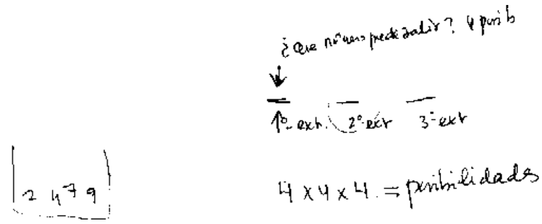
Simbolización algebraica y numérica:

Cuando se utiliza esta doble simbolización, lo que también ocurre en el caso de que el enunciado del problema contemple elementos de dos tipos diferentes y haya que diferenciarlos, como el ejemplo que reporducximos donde se usan letras para referirse a niños y números para representar los trabajos que hay que asignar en el problema 5:

4 niños: A, B, C, D
2 trabajos: 1, 2
Trabajo 1: AB, AC, AD, BC, BD, CD
Trabajo 2: CD, BD, BC, AD, AC, AB
Y por tanto hay 6 posibilidades. *(Estudiante 8; problema 5)*

Simbolización gráfica y numérica:

Si se emplea esta doble simbolización para el caso de que en el problema aparezcan diferentes tipos de elementos o un solo tipo de elementos y el gráfico sirve para representar la situación, como el siguiente caso tomado del problema 1:



(Estudiante 36; problema 11)

No usa simbolización:

A veces el estudiante se limita a aplicar la fórmula o explicita casos, lo hace en los mismos términos que aparecen en el enunciado

Las formas diferentes serían 4! = 24 (Estudiante 1; problema 1)

La tabla 3.5.1 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría de esta variable en los distintos problemas del cuestionario.

Tabla 3.5.1. Frecuencias y porcentajes de tipos de simbolización usada

	Tipo de simbolización							TOTAL
Problema	Algebraica	Gráfica	Algebraica y gráfica	Numérica	Algebraica y numérica	Numérica y gráfica	No usa	
1	43 (55.1)	2 (2.6)	7 (9.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	26 (33.3)	78 (100)
2	8 (11.0)	5 (6.8)	5 (6.8)	2 (2.7)	19 (26.0)	1 (1.4)	33 (45.2)	73 (100)
3	29 (35.8)	12 (14.8)	2 (2.5)	0 (0.0)	2 (2.5)	1 (1.2)	35 (43.2)	81 (100)
4	19 (35.8)	1 (1.9)	2 (3.8)	5 (9.4)	7 (13.2)	1 (1.9)	18 (34.0)	53 (100)
5	43 (53.7)	0 (0.0)	1 (1.3)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (1.3)	35 (43.7)	80 (100)
6	40 (55.6)	1 (1.4)	1 (1.4)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	30 (41.7)	72 (100)
7	0 (0.0)	2 (4.0)	0 (0.0)	34 (68.0)	1 (2.0)	3 (6.0)	10 (20.0)	50 (100)
8	6 (9.7)	3 (4.8)	0 (0.0)	6 (9.7)	23 (37.1)	0 (0.0)	24 (38.7)	62 (100)
9	32 (50.8)	0 (0.0)	1 (1.6)	1 (1.6)	0 (0.0)	0 (0.0)	29 (46.0)	63 (100)
10	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	51 (71.8)	0 (0.0)	4 (5.6)	16 (22.5)	71 (100)
11	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	19 (39.6)	0 (0.0)	6 (12.5)	23 (47.9)	48 (100)
12	42 (76.4)	1 (1.8)	0 (0.0)	1 (1.8)	0 (0.0)	0 (0.0)	11 (20.0)	55 (100)
13	34 (57.6)	1 (1.7)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (1.7)	0 (0.0)	23 (39.0')	59 (100)
TOTAL	296 (35.0)	28 (3.3)	19 (2.2)	119 (14.1)	53 (6.3)	17 (2.0)	313 (37.0)	845 (100)

Un porcentaje importante de alumnos no usa ningún tipo de simbolización, de lo que deducimos que intenta resolver el problema directamente a partir de la fórmula de la operación combinatoria. En caso de emplear simbolización, lo más frecuente es usar simbolización de tipo algebraico, sola o acompañada de otro tipo de representación, lo que en algunos problemas (1, 5, 6, 9, 12 y 13) ocurre con más de la mitad de los estudiantes. Entre ellos encontramos los problemas de permutaciones con repetición (1, 12, 5), problemas en que intervienen dos conjuntos de elementos (13 y 5).

Los problemas donde se usa más representación de tipo numérico son los 7, 8, 10 y 11 y algo también en el 2 y 4. En todos ellos, excepto el 4 el enunciado del problema hace referencia de alguna forma a elementos numéricos. En el problema 4 la simbolización numérica se emplea para enumerar los diversos tipos de particiones posibles.

Hay poca representación de tipo gráfico. Seguramente la madurez del alumno le hace innecesario el empleo de elementos icónicos para representar la situación, con excepción del problema 3 en que ha habido una mayor frecuencia de este tipo de representación.

El empleo de los símbolos depende, por tanto, del problema y se observa una influencia muy fuerte del contexto del enunciado sobre el tipo de representación que elige el alumno.

3.5.2. Método de solución

Seguidamente hemos analizado el método general que sigue el alumno en la resolución del problema, donde se han considerado las siguientes categorías:

Enumeración:

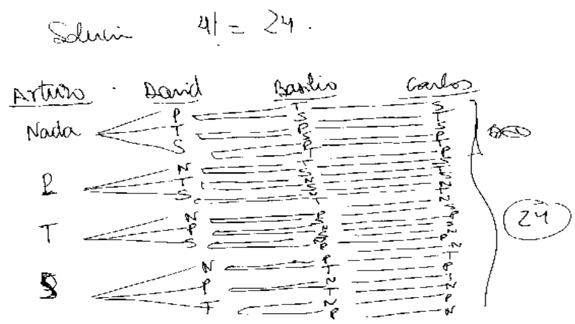
La enumeración es una de las técnicas combinatorias básicas, aunque no se suele enseñar explícitamente, pues se supone una capacidad que se desarrolla espontáneamente. Sin embargo, Hadar y Hadas (1981) indican que es difícil construir un método sistemático de enumeración para un problema no familiar, porque si se construye dicho método, ello implica que el alumno ha captado la esencia del problema. El alumno resuelve algunas veces el problema mediante el método de enumeración de casos en alguna de las modalidades que analizaremos posteriormente. En el siguiente caso, el alumno usa la enumeración no sistemática para resolver el problema de repartir 4 cromos entre dos niñas. Podemos observar como repite casos y sólo consigue completar la enumeración mediante ensayo y error.

Cromos: 1, 2 ,3 ,4
12 13 14 23 24 34
34 24 23 14 13 12
De 6 formas diferentes. (Estudiante 8; problema 10)

Diagrama de árbol:

El alumno construye un diagrama de árbol, como recurso para obtener la solución del problema. Fischbein (1975) da una gran importancia a estos diagramas como medio de visualización de la estructura de un problema combinatorio y también como recurso productivo en la producción de la solución. A partir de él los alumnos asimilan el principio constructivo de las configuraciones combinatorias y, además, les proporciona un significado intuitivo global, para la comprensión de la fórmula algebraica. Al igual que en el caso de la enumeración, la enseñanza de la combinatoria no contempla la práctica específica de construcción de estos diagramas, aunque algunos autores, como Pesci (1994) han mostrado las dificultades de los alumnos en la construcción e interpretación de los diagramas en árbol. El ejemplo que reproducimos muestra un diagrama en árbol correctamente contruido, a partir del cual se deduce la solución del problema:

(Estudiante 30; problema 13)



Fórmula:

El estudiante resuelve el problema aplicando la fórmula de una de las operaciones combinatorias, como el siguiente caso, al resolver el problema de elegir 3 chicos entre cinco voluntarios:

"Tiene que tomar 3 elementos de 5.
E, F, G, J, M
$(^{5}{}_{3})$ = (5!) / ((3!).(2!)) = (5.4) / 2! = 10 formas" (Estudiante 8; problema 6)

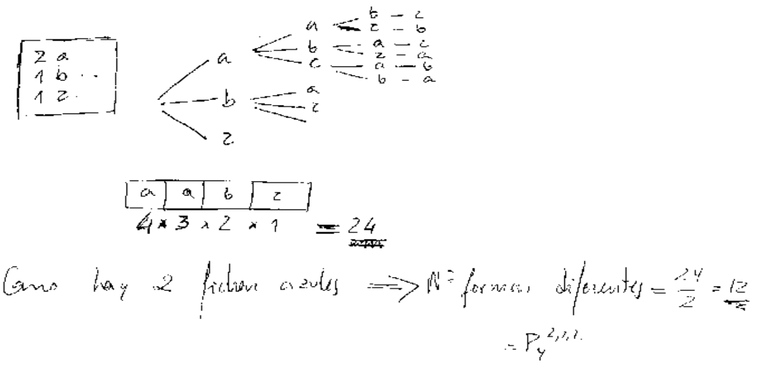
Enumeración y fórmula:

Cuando se emplean ambos métodos Unas veces utiliza la enumeración parcial para descubrir de qué operación combinatoria se trata y por tanto qué fórmula aplicar y, otras veces, comienza aplicando la fórmula y usa la enumeración de un subconjunto de casos a modo de comprobación o validación de la fórmula, como en el caso que reproducimos:

"$C_{4,3} = \binom{4}{3} / \binom{4}{4} = ((4!) / (3!.1!)) / 1 = 4$
ABC
ABD
ACD
BCD" (Estudiante 11; problema 3)

Diagrama de árbol y fórmula:

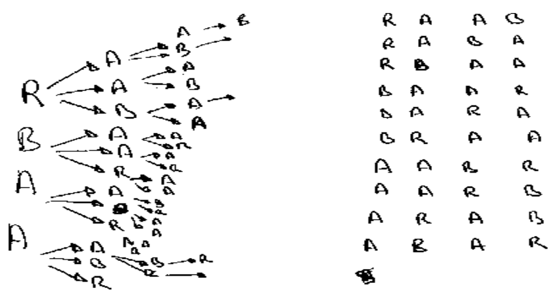
Como hemos indicado, el diagrama de árbol en ocasiones ayuda al alumno a encontrar la fórmula de la operación combinatoria. Si el número de casos a enumerar es grande, aparece una gran dificultad para construir completamente el diagrama en árbol y el alumno finaliza empleando la fórmula. Otras veces, usa el diagrama de árbol a modo de justificación del resultado obtenido al aplicar la fórmula. El ejemplo que mostramos corresponde al primer supuesto. La solución obtenida no es correcta porque el alumno no diferencia las dos bolas idénticas:



(Estudiante 2; problema 1)

Enumeración y diagrama en árbol:

El alumno suele comenzar con uno de estos dos métodos y luego pasa al otro para aclarar o simplificar lo que acaba de obtener o bien usa la enumeración, además del diagrama en árbol para simbolizar y visualizar mejor el diagrama construido, como en el caso que incluimos, del problema 1. El alumno acaba por pasar a la enumeración porque no sabe como tratar en el diagrama el caso de las dos bolas idénticas:



(Estudiante 13; problema 1)

Otros:

Sigue alguna otra estrategia, generalmente usa una serie de operaciones aritméticas para obtener la solución. Posteriormente analizaremos con más detalle algunas estrategias parciales, dentro de este apartado como: traduce el problema a otro equivalente, descompone en subproblemas, fija variables, regla de la suma, regla del producto y regla del cociente

"A, B, C, D
Las 4 a una------- 2
3 a una y 1 a otra -----4 (4 niños y cada vez uno solo)
2 a una y 2 a otra ----- 6 (igual que el problema 5)

y, por tanto, 6 + 6 = 12" (Estudiante 9; problema 9)

No se sabe:
No podemos deducir de lo que el alumno escribe la estrategia seguida, o bien usa un razonamiento combinatorio directo, como el siguiente ejemplo:

"Hay 3 formas de hacer dos grupos de dos chicos y en cada caso consideramos distinto el grupo si le asiognamos el trabajo de matemáticas o el de lengua. Hay pues, 6 posibilidades. "(Estudiante 18; problema 5)

Ninguno:
No resuelve el problema ni intenta, sobre el papel, hacerlo.

Tabla 3.5.2. Frecuencias y porcentajes de los métodos de resolución utilizados

	Método general de solución									Total
Problema	Enumeración	Diagrama en árbol	Fórmula	Enumeración y Fórmula	D. árbol y Fórmula	Enumeración y D. ärbol	Otros	No se sabe	No resuelve	
1	29	9	23	1	1	2	12	1	0	78
	(37.2)	(11.5)	(29.5)	(1.3)	(1.3)	(2.6)	(15.4)	(1.3)	(0.0)	(100)
2	18	2	6	0	0	0	47	0	0	73
	(24.7)	(2.7)	(8.2)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(64.4)	(0.0)	(0.0)	(100)
3	22	4	25	17	0	0	12	1	0	81
	(27.2)	(4.9)	(30.9)	(21.0)	(0.0)	(0.0)	(14.8)	(1.2)	(0.0)	(100)
4	11	0	9	1	0	0	32	0	0	53
	(20.8)	(0.0)	(17.0)	(1.9)	(0.0)	(0.0)	(60.4)	(0.0)	(0.0)	(100)
5	32	0	26	13	0	0	8	1	0	80
	(40.0)	(0.0)	(32.5)	(16.3)	(0.0)	(0.0)	(10.0)	(1.3)	(0.0)	(100)
6	11	2	36	13	2	0	8	0	0	72
	(15.3)	(2.8)	(50.0)	(18.1)	(2.8)	(0.0)	(11.1)	(0.0)	(0.0)	(100)
7	8	0	7	0	0	0	35	0	0	50
	(16.0)	(0.0)	(14.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(70.0)	(0.0)	(0.0)	(100)
8	7	1	24	1	0	0	29	0	0	62
	(11.3)	(1.6)	(38.7)	(1.6)	(0.0)	(0.0)	(46.8)	(0.0)	(0.0)	(100)
9	16	1	10	1	0	0	35	0	0	63
	(25.4)	(1.6)	(15.9)	(1.6)	(0.0)	(0.0)	(55.6)	(0.0)	(0.0)	(100)
10	25	1	25	11	1	0	8	0	0	71
	(35.2)	(1.4)	(35.2)	(15.5)	(1.4)	(0.0)	(11.3)	(0.0)	(0.0)	(100)
11	3	4	18	1	0	0	21	0	1	48
	(6.2)	(8.3)	(37.5)	(2.1)	(0.0)	(0.0)	(43.7)	(0.0)	(2.1)	(100)
12	18	4	13	0	0	0	20	0	0	55
	(32.7)	(7.3)	(23.6)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(36.4)	(0.0)	(0.0)	(100)
13	12	4	24	0	0	0	19	0	0	59
	(20.3)	(6.8)	(40.7)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(32.2)	(0.0)	(0.0)	(100)
TOTAL	212	32	246	59	4	2	286	3	1	845
	(25.1)	(3.8)	(29.1)	(7.0)	(0.5)	(0.2)	(33.8)	(0.4)	(1.0)	(100)

La tabla 3.5.2 contiene las frecuencias absolutas y los porcentajes de cada categoría de esta variable en los distintos problemas del cuestionario. Observamos una gran variabilidad de métodos de solución, que dependen del problema. La enumeración, sola o combinada con otras técnicas, aparece en mayor o menor porcentaje, pero siempre de forma apreciable en todos los problemas, excepto el 8, por lo que parece un recurso necesario para clarificar la estructura del problema o para tratar de hallar la solución. Por tanto consideramos conveniente analizar posteriormente con mayor detalle si los procedimientos de enumeración usados por los alumnos han sido completos y sistemáticos.

También la fórmula se emplea con una gran frecuencia, lo que es razonable porque es el procedimiento que se ha enseñado a estos alumnos. No siempre, sin embargo, el uso de la fórmula es mayor que el de la enumeración, lo que sugiere un olvido, por parte del alumno, de las fórmulas de las operaciones combinatorias.

El uso del diagrama en árbol es muy escaso, a pesar de la importancia que hemos señalado para visualizar la estructura de la configuración combinatoria.

La categoría con mayor frecuencia en 7 de los 13 problemas corresponde al apartado “otros”, es decir, aplicar estrategias mixtas y parciales, como reformular el problema, descomponer el problema, fijar variables, regla de la suma, regla del producto y regla del cociente que son métodos, todos ellos, que reducen el número de casos. Analizaremos este punto posteriormente.

3.5.3. Tipo de enumeración

La enumeración de todas las configuraciones combinatorias es un procedimiento complejo que requiere comprender el enunciado del problema y entender la estructura del mecanismo productor de todas las configuraciones. Para ser capaz de escribir todos los casos pedidos (y nada más que ellos) el sistema debe conjugar la recursividad y un procedimiento algorítmico. Mediante la recursividad reducimos el problema a otro semejante pero de menor tamaño y por ello más sencillo. El procedimiento algorítmico nos ayuda a ir usando cada uno de los objetos en un cierto orden en la producción de todas las configuraciones combinatorias.

De entre los alumnos que emplean la enumeración hemos analizado cómo se realiza. Las categorías consideradas son las siguientes:

Sistemática, completa y correcta:

El alumno establece un orden en la enumeración, escribe todos los casos y lo hace de una manera correcta, como en el ejemplo que mostramos referido al problema de colocar las cartas en sobres:

"Carta---S_A	*Carta---S_A*	*Carta---S_B*	*Carta---S_A*
Carta---S_B	*Carta---S_B*	*Carta---S_C*	*Carta---S_C*
Carta---S_{Crema}	*Carta---S_D*	*Carta---S_D*	*Carta---S_D"*

(Estudiante 14; problema 3)

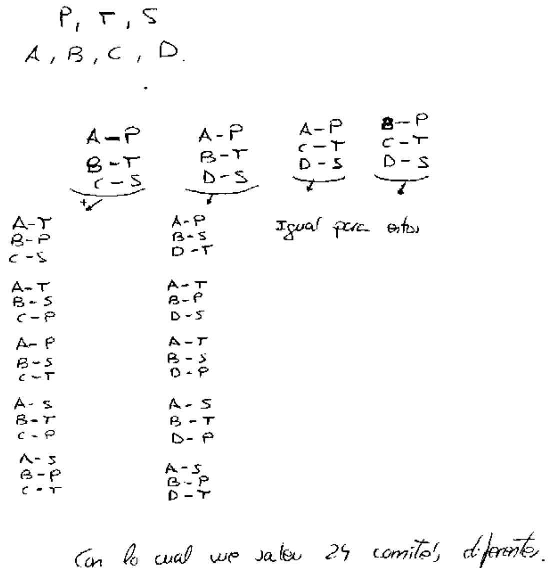
Sistemática, incompleta

Establece un procedimiento algorítmico de enumeración fijando algún elemento en la primera posición dada; escribe algunos casos manteniendo el elemento fijo, pero no logra completar la enumeración, porque no es capaz de repetir sistemáticamente la fijación de todos los elementos sucesivamente, repitiendo el procedimiento hasta agotar todas las posibilidades, es decir, falla en el proceso recursivo, como vemos en el caso que reproducimos a continuación, aunque hay un comienzo, puesto que el alumno ha tratado de repetir el proceso fijando diversos elementos en primera posición.

"BARA
BRAA
RBAA
ABRA
ARBA
AABR
AARB
RABA
Se pueden seleccionar de 8 formas diferentes".(Estudiante 14; problema 1)

Sistemática, parcial y generaliza bien:

En lugar de enumerar todos los casos, enumera solo una parte de forma sistemática. Una vez descubre la estructura del problema, generaliza correctamente y deduce el número de configuraciones pedido:



(Estudiante 14; problema 13)

Sistemática, parcial y no generaliza:

Fijado el primer elemento establece un orden en la enumeración, escribe solo algunos de los casos y generaliza de manera incorrecta o no consigue hacerlo. Tampoco repite el procedimiento cambiando sucesivamente el primer elemento por otros, es decir, de nuevo falla el procedimiento recursivo:

"222
224
227
229
242
272
292"(Estudiante 14; problema 11)

No sistemática, completa e incorrecta:

Usa el ensayo y error sin establecer un orden en la enumeración, escribe todos los casos y lo hace de una manera incorrecta porque, unas veces, deja casos sin escribir y, otras veces, escribe más casos de los que realmente son:

"5 tarjetas: A, B ,C ,C ,C
ACBCC
ABCCC
BACCC
BCACC
CCCAB
CCCBA
CCABC
CCBAC
CBACC
CABCC" (Estudiante 45; problema 12)

No sistemática, incompleta y generaliza mal:

Usa el ensayo y error y no establece un orden en la enumeración, escribe solo algunos de los casos y generaliza de manera incorrecta

"222
224

227
229
242
272
292
422
722
922
444
442
447
449
..." (Estudiante 17; problema 11)

La tabla 3.5.3 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría en los distintos problemas del cuestionario. Cuando se usa la enumeración aparece una proporción alta de enumeración sistemática, completa y correcta, sólo en los problemas 3, 5, 6 y 10, que son los cuatro problemas con menor tamaño de solución, lo que ha contribuído sin duda a que el alumno llegue a completar correctamente la enumeración. En otros casos aunque la enumeración es incompleta, es sistemática y se usa para generalizar correctamente y obtener una fórmula combinatoria (problema 2 y 13). Todos ellos, así como el problema 1 en que casi la mitad de enumeraciones son correctas han tenido un gran porcentajes de respuestas correctas, por lo que vemos como la enumeración correctamente realizada contribuye al éxito en la solución del problema combinatorio.

Tabla 3.5.3. Frecuencias y porcentajes del método de enumeración

	Tipo de enumeración						
	Sistemática				No sistemática		
	Completa	Incompleta	Parcial		Completa	Incompleta	
Problema	Correcta	Incorrecta	Generaliza	No generaliza			TOTAL
1	18 (48.6)	7 (18.9)	3 (8.1)	4 (10.8)	2 (5.4)	3 (8.1)	37 (100)
2	2 (9.5)	0 (0.0)	9 (42.9)	5 (23.8)	0 (0.0)	5 (23.8)	21 (100)
3	35 (89.7)	3 (7.7)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (2.6)	0 (0.0)	39 (100)
4	1 (4.8)	3 (14.3)	0 (0.0)	3 (14.3)	1 (4.8)	13 (61.9)	21 (100)
5	38 (82.6)	1 (2.2)	5 (10.9)	1 (2.2)	1 (2.2)	0 (0.0)	46 (100)
6	19 (76.0)	4 (16.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	2 (8.0)	25 (100)
7	0 (0.0)	1 (8.3)	1 (8.3)	5 (41.7)	0 (0.0)	5 (41.7)	12 (100)
8	0 (0.0)	0 (0.0)	5 (31.3)	1 (6.2)	1 (6.2)	9 (56.2)	16 (100)
9	8 (38.1)	3 (14.3)	1 (4.8)	2 (9.5)	4 (19.0)	3 (14.3)	21 (100)
10	36 (100)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	36 (100)
11	1 (12.5)	0 (0.0)	3 (37.5)	1 (12.5)	0 (0.0)	3 (37.5)	8 (100)
12	10 (41.7)	2 (8.3)	0 (0.0)	1 (4.2)	3 (12.5)	8 (33.3)	24 (100)
13	3 (25.0)	0 (0.0)	5 (41.7)	2 (16.7)	1 (8.3)	1 (8.3)	12 (100)
TOTAL	171(53.8)	24 (7.5)	32 (10.1)	25 (7.9)	14 (4.4)	52 (16.4)	318(100)

Aparece en algunos problemas una proporción importante de casos en que es incompleta, no se generaliza correctamente una enumeración parcial sistemática e incluso casos de enumeración no sistemática (problemas 2, 4, 7, 8, 11 y 12). Esto parece preocupante, ya que las teorías de desarrollo cognitivo suponen que la capacidad de enumeración sistemática se desarrolla espontáneamente con la edad. En nuestro caso, estos alumnos han alcanzado claramente el pensamiento formal y a pesar de ello muestran dificultad en la enumeración de problemas combinatorios. Como indica Saenz (1999) uno de los errores sistemáticos de los alumnos en el campo de la probabilidad es la incapacidad para hacer inventario completo de los sucesos asociados a un fenómeno aleatorio, debido a fallos en el esquema combinatorio.

Parece deducirse que, entre los estudiantes que usan la enumeración, el hecho de hacerlo de forma sistemática es una garantía casi segura de éxito y, en el extremo opuesto, el no hacerlo de forma sistemática es una garantía segura de fracaso.

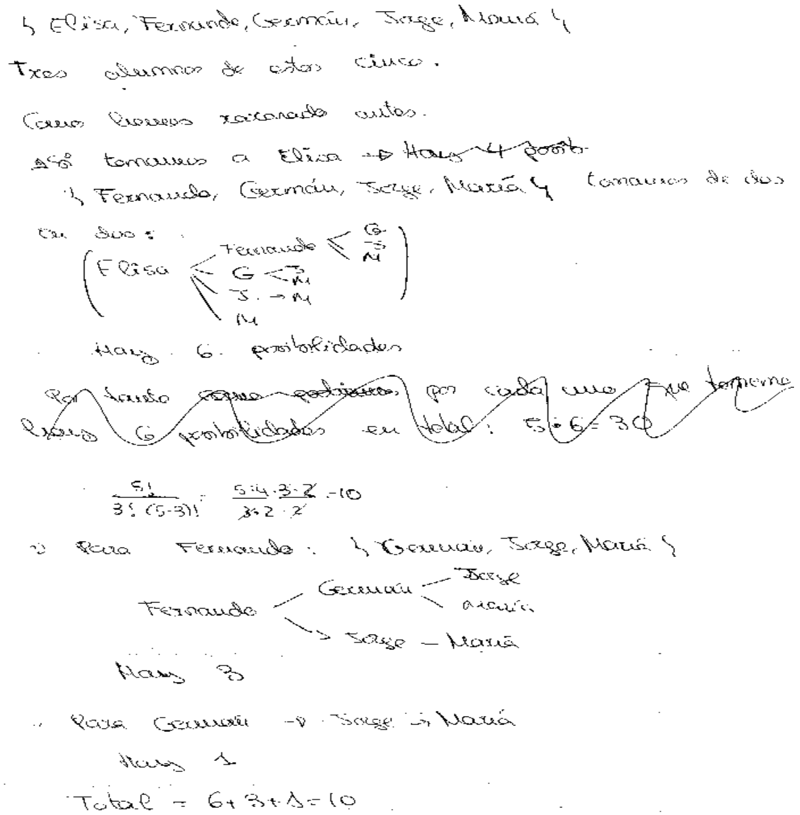
3.5.4. Uso del diagrama en árbol

Como hemos indicado el diagrama en árbol es considerado por Fischbein (1970) como uno de los principales recursos en la resolución de problemas combinatorios, aunque algunas investigaciones como la de Bessot y Richard (1980) y Pesci (1994) muestran que los alumnos tienen con frecuencia dificultades para la construcción de un diagrama en árbol o para su interpretación. Una construcción inadecuada puede llevarles a una solución errónea, incluso aunque se haya comprendido bien el enunciado del problema.

En la investigación de Navarro-Pelayo (1994) fueron muy pocos los alumnos que emplearon el diagrama en árbol, así como la dificultad de su correcta construcción en aquellos que lo emplearon. Hemos analizado si los alumnos emplean el diagrama en árbol, considerando las siguientes categorías:

Completo y correcto:

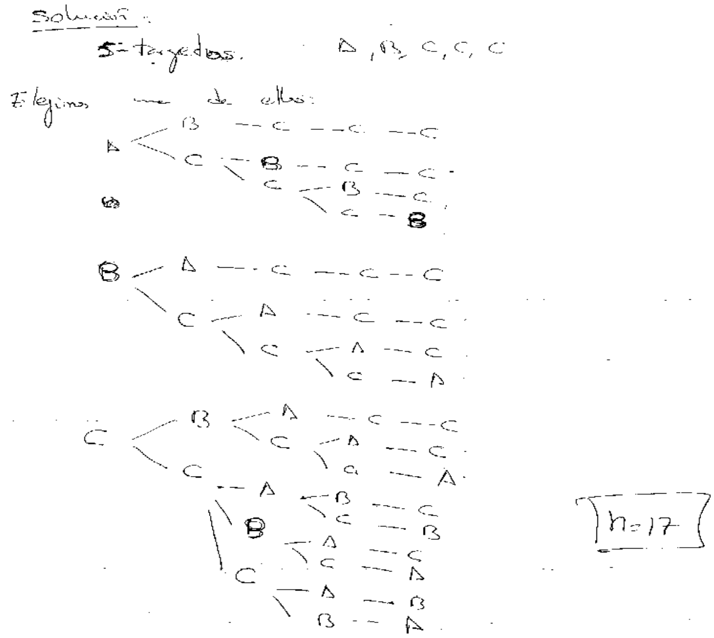
El alumno dibuja el diagrama completo hasta lograr enumerar todas las configuraciones combinatorias pedidas en el enunciado del problema y lo interpreta de manera correcta, obteniendo la solución:



(Estudiante 91; problema 6)

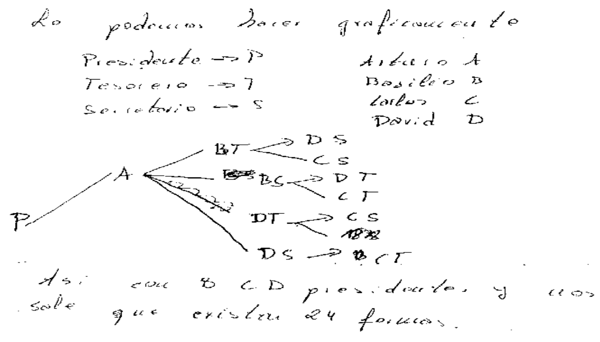
Completo e incorrecto:

El alumno trata de dibujar el diagrama completo, pero le faltan o le sobran ramas, bien por no haber comprendido el enunciado o por no poseer una técnica adecuada de construcción:



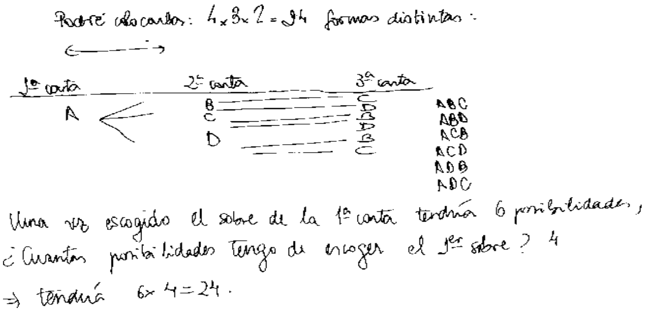
(Estudiante 61; problema 12)

Incompleto y generaliza bien:
El alumno construye un árbol parcial, por ejemplo, fijando una variable. Dibuja solo algunas de las ramas que son necesarias para resolver este problema parcial y generaliza correctamente haciendo uso de la recursión:



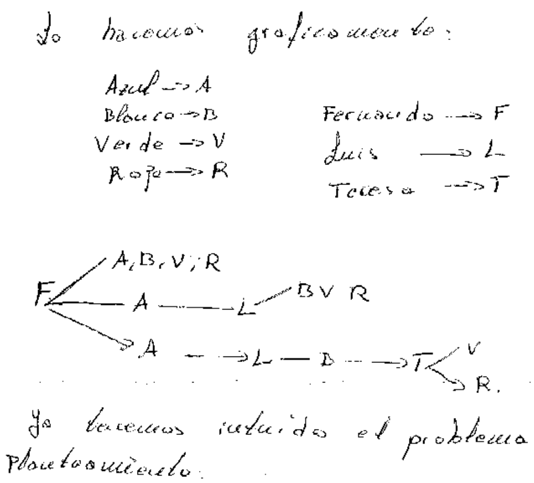
(Estudiante 79; problema 13)

Incompleto y generaliza mal:
El alumno trata de dibujar solo algunas de las ramas para resolver un problema más sencillo, generalmente fijando una variable, pero generaliza de forma incorrecta por no hacer uso de la recursión o una interpretación incorrecta:



(Estudiante 30; problema 3)

Incompleto y no lo usa:
Dibuja solo algunas de las ramas y lo abandona por no ser capaz de completarlo ni de generalizar:



(Estudiante 79; problema 4)

La tabla 3.5.4 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoria en los distintos problemas del cuestionario.

Tabla 3.5.4. Frecuencias y porcentajes en cuanto al diagrama en árbol

	Tipo de diagrama en árbol					
	Completo			Incompleto		TOTAL
Problema	Correcto	Incorrecto	Generaliza	No generaliza	No usa	
1	6 (46.2)	2 (15.4)	0 (0.0)	2 (15.4)	3 (23.1)	13 (100)
2	0 (0.0)	0 (0.0)	2 (100.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	2 (100)
3	0 (0.0)	2 (50.0)	0 (0.0)	2 (50.0)	0 (0.0)	4 (100)
4	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (100.0)	1 (100)
5	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0)
6	3 (75.0)	1 (25.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	4 (100)
7	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0)
8	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (100.0)	0 (0.0)	1 (100)
9	0 (0.0)	1 (100.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (100)
10	2 (100.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	2 (100)
11	0 (0.0)	0 (0.0)	3 (75.0)	1 (25.0)	0 (0.0)	4 (100)
12	0 (0.0)	1 (25.0)	0 (0.0)	3 (75.0)	0 (0.0)	4 (100)
13	1 (25)	0 (0.0)	3 (75.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	4 (100)
TOTAL	12 (30.0)	7 (17.5)	8 (20.0)	9 (22.5)	4 (10.0)	40 (100)

Vemos que han sido muy pocos los alumnos que usan el diagrama el árbol, coincidiendo con los resultados de Navarro- Pelayo e indicando que este recurso no les es familiar, posiblemente porque se ha hecho poco énfasis en él durante el aprendizaje del tema, tanto en Bachillerato como en la Universidad. Hay dos problemas, el 5 y el 7, en los que ningún estudiante intentó usar el diagrama de árbol.

En los pocos casos que se emplea, no siempre se dibuja completo e incluso cuando se dibuja completo, han aparecido errores en su elaboración. Una estrategia al construir el diagrama en árbol, es elaborar un árbol parcial, para estudiar la estructura del problema, averiguar el número de configuraciones de un subconjunto de las configuraciones pedidas y tratar de generalizar. Una parte de los alumnos que usan esta estrategia consiguen completar el proceso correctamente, pero otra no lo consigue por no ser capaz de generalizar correctamente; finalmente en otros casos, se abandona el diagrama en árbol y se pasa a una técnica diferente.

De todo esto deducimos que si el dibujar un diagrama en árbol completo es una cierta garantia de éxito al resolver el problema combinatorio, el dibujarlo de forma incompleta conduce, en porcentajes similares, al éxito y al fracaso. Sin duda la técnica de construcción y análisis del diagrama en árbol ha recibido poca atención en la enseñanza de la combinatoria y podría ser un aspecto a tener en cuenta en futuras propuestas de enseñanza.

3.5.5. Fórmulas de las operaciones combinatorias

Finalmente, otros alumnos emplean directamente las fórmulas de las operaciones combinatorias. Esto, sin duda, implica un mayor nivel de abstracción y formalización, porque indica que los alumnos han analizado los datos del problema, caracterizado un tipo de configuración combinatoria (correcta o no) y comparado la misma con una serie de modelos matemáticos de un repertorio adquirido durante el aprendizaje (la operación combinatoria). De entre los alumnos que emplean las fórmulas de la operaciones combinatorias hemos considerado las siguientes categorías:

Correcta:

Elige la operación combinatoria adecuada a la situación presentada en el problema, aplica la fórmula adecuada a dicha operación y la desarrolla correctamente, tanto en el aspecto formal, como de cálculo, como el siguiente alumno que identifica y desarrolla correctamente las permutaciones con repetición en el problema 1:

$P_4^{2,1,1} = (4!) / ((2!).(1!).(1!)) = 24 / 2 = 12$ (Estudiante 3; problema 1)

Operación combinatoria correcta con fórmula incorrecta:

El alumno elige la operación combinatoria adecuada, realizando una modelización correcta del problema planteado, pero escribe una fórmula que no corresponde a dicha operación, posiblemente por un olvido de la misma. Este es el caso del alumno 8, que identifica correctamente en el problema 11 las variaciones con repetición, pero usa una fórmula incorrecta:

4 bolas: 2 , 4 , 7 , 9
Importa el orden, son variaciones, y se pueden repetir.
$V_R (4 , 3) = 4.3 = 12$ (Estudiante 8; problema 11)

Operación combinatoria correcta y fórmula con error en parámetros:

El alumno elige la operación combinatoria adecuada y escribe la fórmula correspondiente pero con algún error en los parámetros, usualmente intercambiando los mismos. En la investigación de Navarro-Pelayo (1994) se identificó el error en parámetros, que fue característico de los alumnos con instrucción y, en particular, este error fue más frecuente en los problemas en que el parámetro m (número de objetos a combinar) es más pequeño que el n (número de elementos en la configuración combinatoria), lo que sugiere una confusión subyacente del significado de estos parámetros. Este es precisamente el caso que reproducimos, del problema 4, donde el número de objetos a combinar son los hermanos (3) y el número de elementos en el grupo son los coches (4). El alumno confunde los parámetros, lo que también es propiciado por el hecho de que en el modelo de partición (implícito en el enunciado de este problema) los parámetros m y n se intercambian respecto al modelo de selección, que es el que el alumno usualmente identifica con las operaciones combinatorias:

3 hermanos
4 coches distintos
$VR_4^3 = 4^3 = 64$ *formas* (Estudiante 28; problema 4)

Operación combinatoria correcta y fórmula correcta con error en el desarrollo:
En algunos casos se elige la operación combinatoria adecuada, escribe correctamente la fórmula, con valores adecuados de los parámetros, pero se desarrolla de manera incorrecta, usualmente por desconocer algunas propiedades de los números combinatorios o de los números factoriales:

Se trata de C_5^3, pues de entre 5 elementos tengo que escoger 3 y no importa el orden (pues da igual Elisa, Fernando y María que Fernando, María y Elisa).
Por tanto, existen $C_5^3 = (^5{}_3) = 5! / 2! = 60$.(Estudiante 62; problema 6)

Operación combinatoria correcta y fórmula correcta con error aritmético:
Elige la operación combinatoria adecuada, escribe correctamente la fórmula y a lo largo de los cálculos tiene algún fallo en las operaciones aritméticas o en la simplificación de las mismas:

$P_5^{3,1,1} = 5! / ((3!).(1!).(1!)) = 120 / 3 = 40$
Fijamos la posición de las tres "ces" y tenemos dos posibilidades para cada una: ACBCC, BCACC.
Por tanto basta hallar las posibles maneras de colocar las "ces" y luego multiplicar por 2. (Estudiante 3; problema 12)

Operación combinatoria correcta pero la cita con nombre incorrecto:
Elige la operación combinatoria adecuada y la desarrolla correctamente pero el nombre que le da a dicha operación no es el correcto. Pensamos que ello solo implica una confusión terminológica y no un error conceptual:

A la hora de resolverlo sabemos que son 4 elementos que los vamos a tomar de 2 en 2; sabemos que no se pueden repetir:
$P_4^2 = 4! / ((2!).(2!)) = (4.3.2!) / ((2!).(2!)) = 6$.
De seis formas pueden hacer las parejas; ahora, a cada pareja le puede corresponder hacer el trabajo de matemáticas o el de lengua y, por tanto, 2.6 = 12.(Estudiante 80; problema 5)

Fórmula correcta pero no cita el nombre de la operación combinatoria:
Aplica correctamente la fórmula pero no menciona de qué operación combinatoria se trata. No podemos deducir si hay o no confusión terminológica.

3 personas y 5 plazas pare elegir 3, por tanto: $3! . (^5{}_3) = 3! . 10 = 60$ formas(Estudiante 28; problema 8)

Operación combinatoria incorrecta:
Cuando el alumno elige una operación combinatoria inadecuada, por interpretar incorrectamente el enunciado o por realizar una modelización inapropiada del problema, como en el siguiente caso que se identifica la operación combinatoria de permutación en lugar de la de permutación con repetición:

4 ¡ = 4 . 3 . 2 . 1 = 24 formas.(Estudiante 15; problema 1)

La tabla 3.5.5 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría de esta variable en los distintos problemas del cuestionario.

Observamos que en los problemas 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 y 13 los estudiantes que emplearon las fórmulas hacen una identificación correcta y un desarrollo adecuado de la misma. Por tanto el empleo de la fórmula ha sido productivo, aunque hay que tener en cuenta que sólo fue usada por más de la mitad de los alumnos en el problema 6. Muchos alumnos parecen tener problemas en la identificación de la operación combinatoria, cuando se han decidido por otro método de solución en su mayoría.

Tabla 3.5.5. Frecuencias y porcentajes de tipo de uso de fórmulas combinatorias

Problema	Operación combinatoria								TOTAL
	Correctamente identificada							Incorrecta	
	Fórmula Correcta	Fórmula incorrecta	Error parám.	Error desarrollo	Error aritmético	No cita nombre	Cita n. incorrecta		
1	10 (38.5)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	16 (61)	26 (100)
2	4 (66.7)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	2 (33.3)	6 (100)
3	37 (86.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (2.3)	5 (11.6)	43 (100)
4	2 (20.0)	1 (10.0)	2 (20.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	5 (50.0)	10 (100)
5	29 (74.4)	1 (2.6)	1 (2.6)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (2.6)	7 (17.9)	39 (100)
6	45 (88.2)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (2.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	5 (9.8)	51 (100)
7	2 (16.7)	0 (0.0)	1 (8.3)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	9 (75.0)	12 (100)
8	18 (72.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (4.0)	2 (8.0)	0 (0.0)	4 (16.0)	25 (100)
9	5 (50.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	5 (50.0)	10 (100)
10	28 (75.7)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (2.7)	0 (0.0)	0 (0.0)	8 (21.6)	37 (100)
11	14 (73.7)	3 (15.8)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (5.3)	0 (0.0)	1 (5.3)	19 (100)
12	7 (53.8)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	1 (7.7)	0 (0.0)	0 (0.0)	5 (38.5)	13 (100)
13	15 (60.0)	3 (12.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	0 (0.0)	7 (28.0)	25 (100)
TOTAL	216 (68.4)	8 (2.5)	4 (1.3)	1 (0.3)	3 (0.9)	3 (0.9)	2 (0.6)	79 (25.0)	316 (100)

Más aún, encontramos un porcentaje importante de operaciones combinatorias incorrectamente identificada por fallo en la modelización del problema. Este porcentaje supone globalmente un 25% de las respuestas y, en los problemas 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12 y 13 supone una proporción apreciable. Teniendo en cuenta que no todos los alumnos que intentan este método de resolución, estos resultados arrojan serias dudas sobre la efectividad de centrar la enseñanza exclusivamente en el uso de las fórmulas, que en problemas como el 1, 4, 7 y 9 han producido más de un 50% de errores en la identificación. Se trata de uno de los problemas compuestos, un problema de variaciones con repetición y dos de permutaciones con repetición, operaciones en que con anterioridad hemos visto la presencia del error de repetición.

El resto de los errores carece de importancia, salvo el error en parámetros en el problema 4, que también apareció en este mismo problema en la investigación de Navarro-Pelayo.

Vemos pues que, entre los estudiantes que emplean las fórmulas, la identificación de la operación combinatoria garantiza el éxito en un porcentaje muy alto mientras que la identificación incorrecta es, como es lógico, determinante seguro de fracaso.

Los problemas con un mayor numero de fórmulas correctamente aplicadas son el 3 y el 6 (entre 85% y 90% de éxitos). Como media, el uso de las fórmulas ha sido productiva a 2 de cada 3 estudiantes que se han decidido por esta opción.

El resto de los errores carece de importancia, salvo el error en parámetros en el problema 4, que también apareció en este mismo problema en la investigación de Navarro-Pelayo.

Vemos pues que, entre los estudiantes que emplean las fórmulas, la identificación de la operación combinatoria garantiza el éxito en un porcentaje muy alto mientras que la identificación incorrecta es, como es lógico, determinante seguro de fracaso.

Los problemas con un mayor numero de fórmulas correctamente aplicadas son el 3 y el 6 (entre 85% y 90% de éxitos). Como media, el uso de las fórmulas ha sido productiva a 2 de cada 3 estudiantes que se han decidido por esta opción.

3.6. ESTRATEGIAS SEGUIDAS EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

El último punto analizado son las estrategias o técnicas que aplica el alumno durante el proceso de resolución. En los problemas combinatorios es particularmente útil el emplear algunas de las estrategias generales recomendadas para la resolución de problemas, como traducir el problema a otro equivalente, descomponer el problema en partes o fijar los valores de algunas de las variables. Hemos analizado también el empleo de tres reglas combinatorias básicas: la suma producto y cociente. A continuación presentamos nuestros resultados.

3.6.1 Traducción del problema a otro equivalente

Para identificar la operación combinatoria los alumnos deben modelizar la situación descrita en el enunciado como un caso particular de la definición aprendida de dichas operaciones que, generalmente ha sido como muestras ordenadas o no, con o sin reemplazamiento. En los problemas de selección esta modelización es directa, pero en los problemas de partición o colocación es preciso hacer una traducción del problema y formularlo en términos de muestreo. El alumno, alternativamente puede comparar el problema con otro parecido cuya solución conoce, para reeolver el problema usando la analogía. En lo que respecta a la traducción del problema a otro que el alumno considera equivalente, se han considerado las siguientes categorías:

La usa correctamente:

Reformula el problema, cambiando el contexto o la naturaleza de los elementos intervenientes, convirtiéndolo en otro con idéntica estructura combinatoria, como el siguiente alumno que transforma el problema de colocar cartas en sobres en otro de seleccionar sobres sin importar el orden:

El problema se traduce en seleccionar tres de los cuatro sobres (aquellos en los que introduciríamos una carta). Nos da igual el orden de selección, tan solo importa el color de las tres cartas que al final nos quedan, o equivalentemente (por paso al complementario), el color de la carta que descartamos. Hay, por tanto, 4 formas.(Estudiante 18; problema 3)

La usa incorrectamente:

Reformula el problema, cambiando el contexto o la naturaleza de los elementos intervenientes, en otro cuya estructura combinatoria difiere de la que tenía el problema original. Por ejemplo, el siguiente alumno busca un problema parecido en el enunciado al que trata de resolver, pero la estructura combinatoria difiere en uno y otro problema:

Este problema es equivalente al 9, identificando los niños de este con las habitaciones del otro y los cromos de este con los niños de aquel.(Estudiante 18; problema 10)

Tabla 3.6.1. Frecuencias y porcentajes en cuanto a traducción del enunciado de los problemas

Problema	Correcto	Incorrecto	No usa	TOTAL
1	0 (0.0)	0 (0.0)	78 (100.0)	78 (100)
2	0 (0.0)	0 (0.0)	73 (100.0)	73 (100)
3	12 (14.8)	0 (0.0)	69 (85.2)	81 (100)
4	0 (0.0)	0 (0.0)	53 (100.0)	53 (100)
5	1 (1.3)	0 (0.0)	79 (98.8)	80 (100)
6	1 (1.4)	0 (0.0)	71 (98.6)	72 (100)
7	0 (0.0)	4 (8.0)	46 (92.0)	50 (100)
8	1 (1.6)	0 (0.0)	61 (98.4)	62 (100)
9	1 (1.6)	0 (0.0)	62 (98.4)	63 (100)
10	6 (8.5)	1 (1.4)	64 (90.1)	71 (100)
11	0 (0.0)	0 (0.0)	48 (100.0)	48 (100)
12	7 (12.7)	0 (0.0)	48 (87.3)	55 (100)
13	0 (0.0)	0 (0.0)	59 (100.0)	59 (100)
TOTAL	29 (3.4)	5 (0.6)	811 (96.0)	845 (100)

No usa esta estrategia

El alumno no traduce el enunciado.

La tabla 3.6.1 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría en los distintos problemas del cuestionario.

Observamos que el porcentaje de estudiantes que intenta traducir el problema a otro equivalente, o sea, cambiar el enunciado que se les da por otro, es mínimo en casi todos los problemas y que en 5 de los 13 problemas esta estrategia no se utilizó nunca. No parece que esta estrategia sea para ellos familiar.

El mayor porcentaje de uso de esta estrategia correspondió a los problemas 3 y 12, entre un 10 % y un 15 %, ambos de colocación. Ambos problemas habían presentado índice de dificultad muy dispar y en ellos la traducción se hizo correctamente, es decir, a un problema equivalente.

Hay que destacar que en los problemas 4 y 7, los de mayor dificultad, o no se ha intentado la traducción o se ha realizado de forma incorrecta. Pensamos en consecuencia que la técnica de analizar el enunciado de un problema y formularlo en otros términos de modo que se conserve la estructura debería ser enfatizada en la enseñanza de la combinatoria y de la matemática, en general.

3.6.2. Fijación de variables

Según Hadar y Hadass (1981) la necesidad de fijar una o más de las variables para obtener un método coherente de enumeración es típica de los problemas combinatorios. Esto implica añadir una dificultad más a los alumnos y no es un paso convencional, puesto que estos están acostumbrados a usar solo las hipótesis y datos dados en el enunciado del problema. Hemos analizado este punto y, con respecto a si fija o no variables, se han considerado las siguientes categorías:

Uso correcto:

Cuando el alumno fija una o más variables para convertir el problema en otro del mismo tipo, pero con valores menores de los parámetros. Luego resuelve este problema más sencillo y, a partir de él, generaliza para resolver el problema inicial correctamente usando la recursión. En el siguiente ejemplo el alumno primeramente resuelve el problema de emparejar dos personas (las otras estarían determinadas). Para ello fija consecutivamente la primera y segunda persona en la pareja, teniendo en cuenta (recursivamente) que, fijada la primera, disminuye el número de casos para elegir. Resuelve el problema original usando la regla del producto:

Tengo que emparejar 4 personas de dos en dos; si elijo 2 primeramente, las otras dos están determinadas: elijo 2 de 4 (sin orden) para lo cual elijo una y después otra.
Elijo 1 de entre 4, son 4 posibilidades; quedan 3, elijo 1 de entre 3, son 3 posibilidades y, por tanto, 4 x 3 = 12 posibilidades.(Estudiante 21; problema 5)

Uso incorrecto:

El alumno fija una o más variables para reducir el problema a otro más sencillo, pero, o bien generaliza incorrectamente, o no tiene en cuenta los casos ya fijados. En el mismo problema anterior, este estudiante fija las parejas que han de asignarse a cada trabajo. El fallo se produce porque no tiene en cuenta, al intentar combinar todas las parejas, que una persona no puede simultáneamente formar parte de dos parejas diferentes (error de repetición):

4 amigos: A ,B ,C ,D
Trabajos: Matemáticas, Lengua.
Grupos de dos.
Tenemos que hacer dos grupos de chicos, hay que tener en cuenta que AB = BA.
Entonces tenemos AB, AC, AD, BC, BD, CD que son 6 posibles grupos.
Si en la primera materia tenemos, por ejemplo AB, nos quedan 5 posibilidades para la segunda materia y, por tanto, tenemos 6.5 = 30 posibles combinaciones.(Estudiante 89; problema 5)

No usa este recurso

El alumno no fija variables durante la solución del problema.

La tabla 3.6.2 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría de esta variable en los distintos problemas del cuestionario. Son pocos los alumnos que usan esta variable, ya que en todos los problemas hay un 62% o más de alumnos que no la emplean, porcentaje que sube hasta el 96% en el problema 10. Sin embargo, en todos los problemas hay un porcentaje mayor o menor (entre el 3.2% y el 37.5% de empleo correcto. El mayor uso se hizo en los problemas 11 (37.5 %) y 8 (29 %) que tienen una dificultad alta (solo resueltos correctamente por un 39.6 % y un 44 % respectivamente). Pensamos que el alumno ha tratado primeramente de resolver el problema directamente y solo ha recurrido a la fijación de variables en caso de no lograrlo por un método directo.

Tabla 3.6.2. Frecuencias y porcentajes en cuanto a fijación de variables

Problema	Tipo de respuesta			TOTAL
	Correcto	Incorrecto	No usa	
1	10 (12.8)	0 (0.0)	68 (87.2)	78 (100)
2	19 (26.0)	1 (1.4)	53 (72.6)	73 (100)
3	5 (6.2)	0 (0.0)	76 (93.8)	81 (100)
4	7 (13.2)	0 (0.0)	46 (86.8)	53 (100)
5	5 (6.3)	1 (1.3)	74 (92.5)	80 (100)
6	8 (11.1)	0 (0.0)	64 (88.9)	72 (100)
7	11 (22.0)	0 (0.0)	39 (78.0)	50 (100)
8	18 (29.0)	0 (0.0)	44 (71.0)	62 (100)
9	2 (3.2)	0 (0.0)	61 (96.8)	63 (100)
10	5 (7.0)	0 (0.0)	66 (93.0)	71 (100)
11	18 (37.5)	0 (0.0)	30 (62.5)	48 (100)
12	12 (21.8)	0 (0.0)	43 (78.2)	55 (100)
13	13 (22.0)	1 (1.7)	45 (76.3)	59 (100)
TOTAL	133 (15.7)	3 (0.4)	709 (83.9)	845 (100)

Es de destacar que el uso de esta estrategia ha sido correcto en la totalidad de los problemas. Parece, pues, un factor a tener en cuenta y que da buenos resultados en los casos en que se usa, por lo que recomendamos que la enseñanza de esta técnica forme parte del tema de la combinatoria.

3.6.3. Descomposición en subproblemas

Esta estrategia está en parte relacionada con la anterior, aunque los alumnos las aplican a veces en forma independiente. El alumno puede dividir el problema dado en una serie de subproblemas, resolverlos independientemente y combinar las soluciones parciales para resolver el problema dado. En lo que se refiere al hecho de descomponer el problema en subproblemas, se han considerado las siguientes categorías.

Uso correcto:

Descompone el problema en otros varios, de estructura combinatoria más sencilla y parámetros de menor tamaño, que recogen de forma exahustiva todos los casos del problema inicial. Combinando adecuadamente las soluciones parciales resuelve el problema inicial, como en el caso que presentamos, referido a un problema combinatorio compuesto:

Supongamos que las tres primeras son CCC, entonces habría dos posibilidades CCCAB y CCCBA. Ahora la manera de fijar las tres C son combinaciones de los 5 lugares tomados de 3 en 3, es decir, (5!) / ((3!).(2!)) = 10 posibilidades y como por cada una hay dos formas de colocar la A y la B, pues resultan 2.10 = 20 posibilidades(Estudiante 90; problema 12)

Uso incorrecto:

Descompone el problema en otros varios más sencillos pero que no abarcan en su totalidad los casos del problema inicial, como el caso que incluimos a continuación, referido a repartir cuatro coches entre tres hermanos:

Dar los cuatro a un mismo hermano: 3
Dar tres a uno y uno a otro : 3.2 = 6
Dar dos a cada uno: 3
Formas diferentes: 12.(Estudiante 6; problema 4)

No usa esta estrategia.

El alumno no divide el problema en partes.

La tabla 3.6.3 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría en los distintos problemas del cuestionario.Es también poco frecuente que el alumno divida el problema en partes, aunque esta estrategia aparece en un porcentaje apreciable de alumnos en los problemas 2 y 7 (problemas combinatorios compuestos), 4, 8, 9 y 12. Son precisamente los problemas de partición y colocación, exceptuados aquellos cuyo valor de parámetros es muy pequeño, lo que ha permitido al alumno resolver directamente mediante enumeración o por ensayo y error.

Tabla 3.6.3.Frecuencias y porcentajes en cuanto a descomposición del problema en partes

Problema	Tipo de respuesta			Total
	Correcta	Incorrecta	No usa	
1	2 (2.2)		88 (97.8)	90 (100)
2	28 (32.9)		57 (67.1)	85 (100)
3			91 (100)	91 (100)
4	22 (26.2)	14 (16.7)	48 (57.1)	84 (100)
5	1 (1.1)		88 (98.9)	89 (100)
6			88 (100)	88 (100)
7	26 (32.5)	2 (2.5)	52 (65.0)	80 (100)
8	11 (13.1)		73 (86.9)	84 (100)
9	37 (48.1)	2 (2.6)	38 (49.4)	77 (100)
10		2 (2.5)	79 (97.5)	81 (100)
11	4 (5.4)		70 (94.6)	74 (100)
12	9 (12.8)		66 (88.8)	75 (100)
13	3 (4.3)		67 (95.7)	70 (100)

La estrategia ha sido usada en la mayoría de los casos correctamente, por lo que pensamos podría ser una técnica muy interesante de resolución de los problemas compuestos y problemas de partición y colocación.

3.6.4. Uso de la regla de la suma

Finalmente, en el caso de que los alumnos no reconozcan la operación combinatoria, y traten de generar un modelo combinatorio mediante la enumeración y el recuento, deberán emplear las tres reglas combinatorias básicas de la suma, producto y cociente, sólas o combinadas entre sí, dependiendo del tipo de problema. Asimismo, en los problemas combinatorios compuestos será necesaria la regla del producto, incluso cuando los alumnos identifiquen directamente las operaciones combinatorias que dan la solución de los problemas combinatorios simples en que se descompone el problema compuesto.

La regla de la suma se usa cuando un conjunto de configuraciones combinatorias se determina como la unión de un número de subconjuntos mutuamente excluyentes. Su uso no será necesario cuando el resolutor ajusta al problema un modelo combinatorio aplicando una operación combinatoria simple (variaciones, permutaciones, etc.). Para el caso de que el sujeto no recuerde las fórmulas y trate de generar un modelo, nuestro análisis a priori muestra que el uso de la regla de la suma será especialmente adecuada en los problemas 4 (repartir 4 coches entre 3 hermanos), 9 (colocar cuatro niños en dos habitaciones).

Se han tenido en cuentas las siguientes categorías de uso:

Uso correcto:

Aplica la regla de la suma en el contexto adecuado, dividiendo el conjunto de configuraciones en subconjuntos mutuamente excluyentes de forma adecuada, como el siguiente caso en que descompone las configuraciones en función de que un elemento entre o no en el grupo:

1.- Andrés hace matemáticas:

AB , AC , AD tres casos.

Lengua los otros dos.
2.- Andrés no hace matemáticas:
AB , AC , AD tres casos.
Matemáticas los otros dos.
Total 6 formas. (Estudiante 77; problema 5)

Uso incorrecto:

Aplica la regla de la suma en un contexto inadecuado porque los subconjuntos dados no son excluyentes o no cubren el conjunto total. En el siguiente caso los subconjuntos son excluyentes, pero no se cubre el total de las configuraciones:

Es análogo al problema de repartir 4 coches entre 3 hermanos.
La disposición puede ser:
-Si los 4 van a la misma: hay 2 formas.
-Si 3 van a una y uno a otras, hay ABC , ABD , ACD , BCD que van al salón (o a la buhardilla) con lo que habrá 8 formas.
-Si 2 van a una y otros 2 a otra; pueden ir al salón AB , AC , AD , BC , BD , CD con lo que, si también pueden ir a la buhardilla esos mismos, hay 2.6 = 12 formas.
Con esto habrá 22 formas de distribuir a los niños.(Estudiante 64; problema 9)

Tabla 3.6.4. Frecuencias y porcentajes en cuanto al uso de la regla de la suma

Problema	Tipo de respuesta			TOTAL
	Correcto	Incorrecto	No usa	
1	2 (2.6)	2 (2.6)	74 (94.9)	78 (100)
2	2 (2.7)	3 (4.1)	68 (93.2)	73 (100)
3	0 (0.0)	2 (2.5)	79 (97.5)	81 (100)
4	6 (11.3)	18 (34.0)	29 (54.7)	53 (100)
5	1 (1.3)	0 (0.0)	79 (98.8)	80 (100)
6	1 (1.4)	0 (0.0)	71 (98.6)	72 (100)
7	1 (2.0)	3 (6.0)	46 (92.0)	50 (100)
8	1 (1.6)	1 (1.6)	60 (96.8)	62 (100)
9	18 (28.6)	17 (27.0)	28 (44.4)	63 (100)
10	0 (0.0)	1 (1.4)	70 (98.6)	71 (100)
11	3 (6.3)	2 (4.2)	43 (89.6)	48 (100)
12	4 (7.3)	1 (1.8)	50 (90.9)	55 (100)
13	7 (11.9)	0 (0.0)	52 (88.1%)	59 (100)
TOTAL	46 (5.4)	50 (5.9)	749 (88.6)	845 (100)

No usa este recurso

No usa la regla de la suma.

La tabla 3.6.4 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría en los distintos problemas del cuestionario. Los resultados muestran la mayor frecuencia de aparición precisamente en los problemas previstos 9 (55.6%, de uso) y 4 (45.3%); ambos problemas son de variaciones con repetición, distinto modelo y bastante dificultad. Ocasionalmente aparece en otros problemas, no llegando al 10% de uso. En la tabla 3.5.2. podemos ver que sólo el 18.9% de los alumnos que dio solución al problema usó las fórmulas para resolver el problema 4 y el 15.9% en el problema 9.

Deducimos que no fue completamente intuitivo el uso de la regla de la suma en estos problemas, ni siquiera para el alumno que trata de generar un modelo combinatorio mediante enumeración y otro procedimiento. Por otro lado, el uso incorrecto predomina sobre el correcto y no parece que llegue a constituir una herramienta valiosa para resolver problemas combinatorios.

3.6.5. Uso de la regla del producto

Otra regla combinatoria básica es la regla del producto, mediante la cual construimos productos cartesianos de conjuntos de elementos un número dado de veces. Su uso será necesario para resolver los problemas compuestos (2 y 7) para todos los alumnos y para resolver el resto de los problemas en caso de que el alumno trate de generar un modelo combinatorio, en lugar de emplear las fórmulas.

En cuanto al uso de la regla del producto se han considerado las siguientes categorías:

Uso correcto:

El alumno aplica la regla del producto en el contexto adecuado, para calcular el número de elementos en un producto cartesiano de varios conjuntos dados de elementos, como el caso siguiente en un problema combinatorio compuesto.

3 figuras, tendré P_3 = 3! Formas de ordenarlas; añado una carta más que puedo colocarla en 4 lugares distintos (x4); tengo 9 cartas distintas que puedo añadir (x9).
Tendré en total 6.4.9 = 24.9 = 216 maneras distintas. (Estudiante 49; problema 2)

Uso incorrecto:

Aplica la regla del producto en un contexto inadecuado, porque o bien el producto cartesiano no es el adecuado, o los subconjuntos que se multiplican no son los pertinentes:

$C_{12}^{4}.\ P_{3} = 11880 / 9$
En este caso no influye el orden, por tanto, utilizaré combinaciones; como tengo 12 elementos y selecciono 4 pues tendré combinaciones de 12 elementos tomados de 4 en 4.
Por otro lado, necesito que estén todas las figuras siempre seleccionadas, como tienen que salir siempre tengo permutaciones de 3 elementos ya que los coges todos. (Estudiante 59; problema 2)

No usa este recurso

No usa el producto cartesiano.

La tabla 3.6.5 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría en los distintos problemas del cuestionario.

Tabla 3.6.5. Frecuencias y porcentajes en cuanto al uso de la regla del producto

Problema	Tipo de respuesta			TOTAL
	Correcto	Incorrecto	No usa	
1	5 (6.4)	3 (3.8)	70 (89.7)	78 (100)
2	37 (50.7)	15 (20.5)	21 (28.8)	73 (100)
3	0 (0.0)	4 (4.9)	77 (95.1)	81 (100)
4	8 (15.1)	26 (49.1)	19 (35.8)	53 (100)
5	7 (8.8)	15 (18.8)	58 (72.5)	80 (100)
6	2 (2.8)	5 (6.9)	65 (90.3)	72 (100)
7	6 (12.0)	31 (62.0)	13 (26.0)	50 (100)
8	22 (35.5)	14 (22.6)	26 (41.9)	62 (100)
9	4 (6.3)	17 (27.0)	42 (66.7)	63 (100)
10	2 (2.8)	2 (2.8)	67 (94.4)	71 (100)
11	12 (25.0)	5 (10.4)	31 (64.6)	48 (100)
12	8 (14.5)	6 (10.9)	41 (74.5)	55 (100)
13	15 (25.4)	2 (3.4)	42 (71.2)	59 (100)
TOTAL	128 (15.1)	145 (17.2)	572 (67.7)	845 (100)

El uso de la regla del producto ha variado mucho, dependiendo del problema, y ha sido utilizada en todos los problemas, con frecuencias que oscilan entre el 4.9 % y el 74 %.

Los problemas en los que más se ha usado han sido el 7, con un 74 %, y el 2, con un 71.2 %; ambos problemas son compuestos y mientras que en el 2 se usó correctamente de forma mayoritaria, en el 7 sucedió lo contrario. Estos son precisamente los problemas en los que todos los alumnos debieran usar esta regla, por lo que apreciamos que, aunque su uso es mayoritario en estos problemas, todavía un 28.8% en el problema 2 y un 26% en el problema 7 no la emplean, lo que indica que no han sido capaces de relacionar la solución de los problemas combinatorios simples para resolver el problema compuesto.

En los restantes problemas se fueron alternando los éxitos y los fracasos, siendo su uso mayor en los problemas de colocación y partición, así como en el problema 11 de permutaciones con repetición. Al comparar la frecuencia de empleo de esta regla, respecto a la tabla 3.5.2, vemos que sólo una parte de los sujetos que trata de generar un modelo la usa. Esto indica que los estudiantes tuvieron dificultad en generalizar el número de configuraciones en un subconjunto de casos, para obtener los factores en la regla del producto. También el porcentaje de aplicaciones incorrectas de la regla, entre los alumnos que la emplean señala en esta misma dirección.

3.6.6. Uso de la regla del cociente

La regla del cociente se emplea para relacionar entre si combinaciones y variaciones o bien permutaciones ordinarias y permutaciones con repetición, es decir, sería pertinente en los problemas 3, 6, 7, 10 (combinaciones) y 1, 5, 12 (permutaciones con repetición). Usar la regla del conciente implica establecer una relación de equivalencia dentro de un conjunto de configuraciones combinatorias.

Cuando el alumno identifica directamente la operación combinatoria no será necesario el uso de esta regla a nivel consciente, pero si en los alumnos que tratan de generar un modelo.

En cuanto al uso de la regla del cociente se han tenido en cuenta las siguientes categorías:

Uso correcto:

El alumno aplica la regla del cociente en el contexto adecuado, estableciendo una relación de equivalencia dentro de un conjunto de configuraciones combinatorias e identificando el número de elementos en cada clase de equivalencia. El siguiente alumno identifica una clase de equivalencia en dos permutaciones obtenidas al intercambiar la posición de dos números iguales:

$(V_{5,2}) / 2$). $P_3 = ((5.4) / 2) . 6 = 60$
$V_{5,2}$ es la forma de obtener las distintas posiciones que pueden ocupar los dos ochos dentro de los cinco puestos posibles. Hemos dividido por 2 porque con $V_{5,2}$ suponemos que los dos ochos son números diferentes pero como eso no es así cada dos casos se reducen a uno y, por eso, divido los posibles casos por 2.
Luego hemos multiplicado por $P_3 = V_{3,3}$ que serían las posibles posiciones a ocupar de los 3 números restantes para los tres puestos que quedan, tras haber colocado los dos ochos. (Estudiante 48; problema 7)

Uso incorrecto:

Aplica la regla del cociente inadecuadamente porque la relación de equivalencia identificada no es pertinente o porque no identifica correctamente el número de elementos en cada clase de equivalencia. En el siguiente ejemplo no es pertinente permutar los grupos entre si, la relación establecida es por tanto inadecuada:

Están 4 personas para hacer 2 trabajos distintos, con lo cual tenemos varias posibilidades:
AB , AC , AD
CD , BD , CB
Hay 6 posibiulidades para cada grupo, por tanto, se pueden hacer 3 grupos distintos de parejas.
(Estudiante 47; problema 5)

No usa este recurso

El alumno no emplea la regla del cociente.

La tabla 3.6.6 contiene las frecuencias absolutas y porcentajes de cada categoría en los distintos problemas del cuestionario. El uso de la regla del cociente, tan ligado a muchos de los procesos de resolución de problemas combinatorios, ha sido practicamente testimonial en los problemas previstos: sólo en el problema 1, de dificultad media, la usó un 12.8 % de los estudiantes, unas veces satisfactoriamente y otras tantas no, a pesar de que en este problema aproximadamente el 70 % de los estudiantes trataron de generar un modelo con diversos métodos (tabla 3.5.2). Algo parecido ocurre en los problemas 7 (86% de alumnos trata de generar un modelo) y 12 (76% de alumnos trata de generar un modelo). En los problemas 3, 5 y 10, debido al tamaño pequeño de la solución puede comprenderse mejor que el alumno trate de resolverlo simplemente por ensayo y error, sin recurrir a la fórmula del cociente. En el problema 6 casi un 70 % de los alumnos hicieron uso de las fórmulas, pero el 30% restante, prácticamente nunca usa la regla del cociente.

Tabla 3.6.6. Frecuencias y porcentajes en cuanto al uso de la regla del cociente

Problema	Tipo de respuesta			TOTAL
	Correcto	Incorrecto	No usa	
1	5 (6.4)	5 (6.4)	68 (87.2)	78 (100)
2	0 (0.0)	0 (0.0)	73 (100.0)	73 (100)
3	0 (0.0)	0 (0.0)	81 (100.0)	81 (100)
4	0 (0.0)	0 (0.0)	53 (100.0)	53 (100)
5	1 (1.3)	1 (1.3)	78 (97.5)	80 (100)
6	2 (2.8)	0 (0.0)	70 (97.2)	72 (100)
7	1 (2.0)	0 (0.0)	49 (98.0)	50 (100)
8	1 (1.6)	0 (0.0)	61 (98.4)	62 (100)
9	0 (0.0)	0 (0.0)	63 (100.0)	63 (100)
10	2 (2.8)	0 (0.0)	69 (97.2)	71 (100)
11	0 (0.0)	0 (0.0)	48 (100.0)	48 (100)
12	0 (0.0)	1 (1.8)	54 (98.2)	55 (100)
13	0 (0.0)	0 (0.0)	59 (100.0)	59 (100)
TOTAL	12 (1.4)	7 (0.8)	826 (97.8)	845 (100)

Debido al escasísimo uso, no siempre correcto, no parece que sea una regla intuitiva ni que haya aportado nada a la resolución de problemas combinatorios. Pensamos que no se ha dado suficiente énfasis a esta regla durante la enseñanza de la combinatoria que han recibido los alumnos de la muestra.

En general, podemos decir que tanto la regla de la suma como la del cociente se han manifestado inoperantes y, únicamente, la regla del producto parece constituir una herramienta con un cierto calado entre los estudiantes, aunque con unos resultados que deberían mejorarse.

3.7. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO CUANTITATIVO

En este Capítulo hemos presentado un estudio cuantitativo de las soluciones de los estudiantes a los problemas planteados, tanto respecto al número de soluciones correctas y el efecto de las variables de tarea del cuestionario sobre las mismas, como respecto a la interpretación del enunciado y estrategias de resolución. Las principales conclusiones se describen a continuación.

3.7.1. Dificultad de los problemas

Nuestro estudio pone de manifiesto la notable dificultad de los problemas combinatorios simples y compuestos por dos operaciones combinatorias para alumnos con alta preparación matemática. Ello resulta paradójico puesto que las herramientas matemáticas precisas en su solución se suponen adquiridas en el aprendizaje de la matemática elemental.

Al comparar con los resultados de Navarro-Pelayo (1994), en general nuestros alumnos obtienen mayor proporción de problemas resueltos correctamente, pero en algunos de los problemas los resultados de nuestros estudiantes no son mejores que los de alumnos de 14 años.

La distribución del número total de problemas resueltos sugiere también la separación de dos tipos de alumnos (buenos y malos resolutores de problemas combinatorios), punto que trataremos de analizar en el siguiente capítulo.

3.7.2. Efecto de las variables de tarea

No hemos encontrado un efecto del esquema combinatorio implícito en el enunciado de los problemas sobre la dificultad de los problemas, aunque sí de la operación combinatoria, conservándose el mismo orden de dificultad de las operaciones combinatorias que se dio en la investigación de Navarro-Pelayo (1994) que no coincidía con el señalado anteriormente en las investigaciones de Fischbein y Gazit (1988).

Hemos observado también el efecto del tamaño de la solución sobre la dificultad de los problemas, obteniendo un valor significativo y moderadamente alto del coeficiente de correlación entre estas dos variables. Este punto no había sido estudiado en anteriores investigaciones.

3.7.3. Interpretación del enunciado

Nuestros resultados avalan la hipótesis de Navarro-Pelayo de que el alumno en su respuesta usa, por lo general, el esquema sugerido en el enunciado del problema. En caso de traducir el problema a otro esquema, se emplea generalmente el esquema de selección, que es el que se usa para definir las operaciones combinatorias (como muestras ordenadas o no ordenadas) y es precisamente en los problemas de partición y colocación donde con mayor frecuencia se produce un cambio de modelo por parte del alumno.

En general los alumnos diferencian correctamente el tipo de elementos (distinguibles o indistinguibles) y el principal error respecto a este punto aparece en los problemas de permutaciones y variaciones con repetición. Los errores de nuestros alumnos en este punto se asemejan a los de los alumnos sin instrucción en la investigación de Navarro-Pelayo lo que indica un olvido de las definiciones de las operaciones combinatorias.

El error de orden aparece muy raramente, lo que indica que la preparación y madurez de los alumnos les ha llevado a superar este error, tan frecuente entre chicos y adolescentes, como es señalado en la mayoría de investigaciones sobre razonamiento combinatorio. En caso de aparecer el error viene asociado a los problemas de combinaciones, coincidiendo con los resultados de Fischbein y Gazit (1988) y Navarro-Pelayo (1994).

Es también raro el error de repetición, aunque se produce especialmente asociado a los problemas de permutaciones con repetición, donde los alumnos podrían tener una idea errónea del significado de esta operación combinatoria. Los alumnos parecen identificar con claridad las condiciones requeridas en la partición en este tipo de problema.

3.7.4. Métodos de resolución

Un porcentaje importante de alumnos no usa ningún tipo de simbolización como elemento ostensivo que ayude a la visualización de la estructura de la configuración combinatoria pedida. En caso de usar simbolización esta es preferentemente algebraíca sola o acompañada de otras simbolizaciones, generalmente numérica. El contexto de los problemas tiene una clara influencia en la simbolización empleada.

La fórmula de la operación combinatoria y la enumeración, sóla o combinada con otras técnicas, aparece en mayor o menor medida como método de solución preferente en todos los problemas, siendo raro el empleo del diagrama en árbol u otras técnicas. Aunque la mayoría de los alumnos que usan la fórmula identifican correctamente la operación combinatoria correcta, un 25% de casos se produce un error en la identificación de la operación combinatoria o en los valores de los parámetros.

En caso de usar la enumeración ésta es mayoritariamente sistemática, aunque un porcentaje apreciable de alumnos muestra métodos no sistemáticos o no completos de enumeración. En otros casos el alumno no generaliza correctamente una enumeración parcial o no es capaz de seguir un proceso recursivo de solución. Comentarios similares podemos hacer respecto al empleo del diagrama en árbol, que apenas se usa y en caso de hacerlo no siempre se construye correctamente.

3.7.5. Estrategias

En general los alumnos no emplean estrategias para reducir la complejidad del problema. Las estrategias empleadas dependen del tipo de problema:

- traducción del problema a otro equivalente, en los problemas de partición y colocación;
- fijación de variables en los problemas con mayor tamaño de solución;
- descomposición del problema en partes en los problemas de partición y colocación;
- uso de la regla del producto en los problemas compuestos;

- uso de la regla de la suma en los problemas de variaciones con repetición.

No se usa apenas la regla del cociente, lo que sugiere que el alumno tiene dificultad para establecer clases de equivalencia en las configuraciones combinatorias.

En resumen, estos resultados indican que el razonamiento combinatorio no se desarrolla espontáneamente con tanta facilidad como se podría pensar, puesto que alumnos maduros y de alta preparación matemática fallan en resolver problemas o en enumerar sistemáticamente casos, cuando se suponen deberían tener asumida esta capacidad de un modo natural.

Por otro lado cuestionan los métodos actuales de enseñanza de la combinatoria con un énfasis excesivo en las definiciones de las operaciones combinatorias y en la identificación de las mismas como único método de resolución de problemas. La combinatoria es, por el contrario, un campo donde las estrategias de resolución de problemas tales como dividir el problema en partes, traducir el enunciado a un problema equivalente, fijar variables, etc. pueden ser adecuadamente ejemplificadas. Pensamos que es una oportunidad interesante de ayudar al alumno a desarrollar estas herramientas, mediante la práctica adecuada de estas destrezas en el aula. Como afirma Sáenz (1998), "la cuestión clave del proceso educativo, y lo que diferencia un método inefectivo de otro que logra sus objetivos es la adquisición por los estudiantes de un pensamiento matemático equilibrado, que incluye no solo el dominio de algoritmos y automatismos, sino también la capacidad de plantear problemas y de hacer uso de heurísticas personales apropiadas y creativas" (p. 254).

CAPITULO 4

UN ESTUDIO DE CASOS EXPLICATIVO DE LAS DIFICULTADES Y LOGROS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS ELEMENTALES

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo realizamos un estudio en profundidad de las soluciones dadas a los 13 problemas que componen el cuestionario por una muestra de 4 estudiantes, así como de sus respuestas a las preguntas formuladas durante una entrevista individual, realizada después de la prueba.

Nos proponemos con ello conocer con más detalle las estrategias de resolución que siguieron, las interpretaciones de los enunciados, las dificultades y logros que pusieron de manifiesto. La confrontación de estos procesos con los análisis a priori de la solución potencial a los problemas realizados en el capítulo 2 nos va a permitir formular explicaciones plausibles de dichos procesos, dificultades y logros.

4.2. METODOLOGÍA DEL ESTUDIO DE CASOS

La muestra sobre la que se realizó el estudio de casos estuvo formada por cuatro estudiantes que colaboraron voluntariamente con nosotros. Estos estudiantes fueron seleccionados de forma intencional de entre los alumnos de quinto curso de matemáticas que respondieron al cuestionario descrito en el capítulo 2.

Uno de nuestros fines era analizar los razonamientos seguidos por los estudiantes y discriminar los que han sido productivos frente a las improductivos, así como detectar los puntos erróneos de estos últimos. Para lograr este fin se seleccionaron, en cada una de las muestras segunda y tercera los mejores y peores estudiantes en cuanto a los resultados del cuestionario. Es decir, ordenados los estudiantes por el número de respuestas correctas, elegimos de la segunda muestra dos alumnos en cada uno de los extremos de esta ordenación y cuatro alumnos en cada uno de los extremos en la tercera muestra, en total 12 estudiantes.

A cada uno de estos alumnos se le realizó una entrevista, cuyo guión se recoge en el anexo 3 y cuya metodología describimos más adelante. La finalidad de la entrevista era conocer cúando y cómo habían estudiado la combinatoria, qué recordaba de este tema y analizar con más detalle los procesos de resolución seguidos, con objeto de seleccionar los cuatro estudiantes que formaría parte del estudio de casos.

Puesto que, en nuestro análisis a priori de los procesos de resolución potenciales (capítulo 2) preveíamos dos tipos principales de razonamiento, pretendíamos elegir estudiantes que representasen estos dos tipos teóricos de resolutores o sujetos epistémicos. El primero de ellos es el que recuerda las definiciones y fórmulas de las operaciones combinatorioas y es capaz de aplicarlas a los problemas propuestos (modeliza la situación partir de un modelo combinatorio conocido). El segundo es el alumno que ha olvidado estas definiciones o no es capaz de aplicarlas y, por tanto, debe recurrir a otras estrategias, generando por sí mismo el modelo combinatorio. Además, para cada uno de estos sujetos teóricos queríamos seleccionar un estudiante con buenos resultados y otro con dificultades en la resolución de problemas.

En consecuencia, finalizado el estudio de la tercera muestra y a partir de las 12 entrevistas disponibles (4 en la segunda muestra y 8 en la tercera), ordenamos los estudiantes por el número de problemas correctamente resueltos y, en los extremos de esta ordenación (buenos y malos resolutores) se tomó un estudiante que, como estrategia habitual tratara de identificar la fórmula de la operación combinatoria que da la solución del problema (modelizador de la situación) y otro que intentara resolverlos mediante otras técnicas, como enumeración (generador del modelo). De este modo podríamos comparar la efectividad de estos dos tipos de resolutores teóricos para la solución de los problemas combinatorios, contrastar el análisis a priori realizado en el capítulo 2 y poner de manifiesto el significado personal realmente asignado por los alumnos de la muestra a los problemas combinatorios planteados. Los cuatro sujetos seleccionados resultaron ser los de la segunda muestra. El análisis semiótico de los procesos de resolución se efectuó sobre estos cuatro alumnos.

El estudio de casos tiene dos componentes: una entrevista realizada con el objetivo de seleccionar los estudiantes y un análisis detallado de las soluciones dadas al cuestionario escrito de los cuatro estudiantes elegidos.

Para completar esta información se realizaron entrevistas en profundidad individualmente a los cuatro alumnos. La entrevista estaba orientada a la obtención de datos de nivel profundo, planteando a los alumnos preguntas que pueden responder a nivel consciente, pero a partir de las cuales tratamos de inferir sus conocimientos, destrezas y procesos de razonamiento.

Cada uno de los 12 alumnos preseleccionados fue entrevistado individualmente por el autor de la memoria durante un espacio de una hora a hora y media sobre sus conocimientos previos y los procesos seguidos para resolver los problemas. Durante la entrevista, que fue grabada y posteriormente transcrita, el alumno dispuso del cuestionario que había completado, sobre el cual podía recordar las respuestas.

Para ello elaboramos un guión que tratara de responder a los objetivos de la entrevista. Puesto que el guión era sólo orientativo y se tenía libertad de variar ligeramente las preguntas o hacer preguntas complementarias, en caso de creerlo conveniente, podemos clasificar la entrevista como entrevista semiestructurada (Fontana y Fey, 1994).

Una vez transcritas las entrevistas, se analizó su contenido y se seleccionaron los 4 alumnos de los que se haría el análisis detallado del contenido de sus respuestas escritas al cuestionario descrito en el capítulo 2. Para cada uno de los 13 problemas propuestos, se analizaron las respuestas de estos estudiantes, aplicando la metodología del análisis semiótico propuesto por Godino y colaboradores, y que hemos usado también en el análisis a priori descrito en el capítulo 2. Este análisis nos proporcionó datos sobre los procesos de resolución de los problemas, errores y dificultades de los alumnos, en definitiva sobre sus modos de razonamiento combinatorio.

En el Anexo 4 incluimos el texto completo de las entrevistas realizadas a estos 4 alumnos, de la cual extraemos, en cada caso, aquellas observaciones que nos parecen pertinentes para el tipo de análisis que realizamos.

4.3. EL CASO DE ADOLFO[1] (13 problemas resueltos correctamente)

4.3.1. Conocimientos previos

Este alumno no había estudiado combinatoria durante el bachillerato, aunque sí en el primer curso en el contexto de la asignatura de Estadística incluida en el plan de estudios de la licenciatura de Matemáticas. Llama la atención el hecho de que durante los estudios de licenciatura los problemas combinatorios sólo se han tratado en el contexto de problemas probabilísticos.

I: ¿Cuando viste la Combinatoria por última vez?.
A: En primero de carrera.
I: ¿Y por primera vez?.
A: En primero de carrera por primera y última vez porque yo no la vi en BUP, se dejó para el final y no se vio; lo vi en primero de carrera cuando di Estadística.
I: ¿Como preparación para la Probabilidad?.
A: Si, la asignatura era Estadística y Probabilidad.
I: Y lo estudiaste por tu cuenta o ¿te lo explicaron?.
A: Yo cuando llegué a la carrera no sabía nada de Combinatoria, nada, nada.

[1] Para mantener el anonimato de los estudiantes entrevistados los nombres usados son ficticios.

No recuerda las fórmulas combinatorias, como se pone de manifiesto en los procesos de resolución de los problemas, aunque en la entrevista afirma que recuerda algunas fórmulas, no recuerda las variaciones ni las combinaciones con repetición. Ello posiblemente ha influído en que use preferentemente la enumeración, en lugar de las fórmulas en la resolución de los problemas:

P: Veo, a lo largo de tu ejercicio, que no has utilizado fórmulas y sí aparece, por el contrario mucho de enumeración de casos, ... ¿Por qué?
A: Porque no me acordaba de las fórmulas y además de esta forma se entera uno mejor si está bien, pues, si aplicas una fórmula, te sale un número y no sabes si está bien o no.
P: Entonces, ¿tienes más confianza en las fórmulas que en la enumeración de casos?
A: En la enumeración de casos.
I: ¿Te acuerdas de la definición de permutaciones, variaciones y combinaciones con y sin repetición?.
A: Si.
I: ¿Te acuerdas de la fórmulas de las permutaciones?
A: Si.
I: ¿De las permutaciones con repetición?
A: No.
I: ¿Y de las variaciones?
A: No
I: ¿De las variaciones con repetición?
A: Si.
I: ¿De las combinaciones?
R: Si.
I: ¿De las combinaciones con repetición?.
A: No.

4.3.2. Conocimientos puestos en juego en la resolución de los problemas

En este apartado realizamos un análisis pormenorizado del proceso seguido por Adolfo en la resolución de los 13 problemas incluidos en el cuestionario con el fin de identificar los conocimiento que pone en juego. El tipo de análisis que hacemos es similar al realizado en el capítulo 2 como análisis a priori de las tareas, clasificando los conocimientos en los cinco tipos que propone el modelo epistemológico descrito en el capítulo 1 (elementos extensivos, ostensivos, actuativos, intensivos y validativos).

4.3.2.1. Problema 1: Selección ordenada de objetos distinguibles e indistinguibles [$PR_{4;2,1,1}$]

Enunciado:

En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

Transcripción de la solución:

U1 Fijo la blanca en la 1ª posición y varío las otras
BRAA, BARA, BAAR
U2 Fijo una azul en la 1ª posición y varío las otras
AARB, ARAB, AABR, ARBA, ARBA, ABRA
U3 Fijo la roja en 1ª posición y varío las otras
RAAB, RABA, RBAA
U4 He hecho todas las combinaciones posibles: 3+6+3 = 12 formas diferentes.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Indica la acción interiorizada de fijar la posición de una ficha y variar las otras de modo

sistemático (técnica de fijación de una variable; actuativo).
- Pone en juego además la técnica de descomponer el problema en subproblemas (actuativo) que da lugar al enunciado de un problema relacionado con el dado más sencillo (extensivo)
- Introduce una notación simbólica para referirse a los resultados de la extracción de las fichas. (BRAA significa que ha obtenido blanca, roja, azul, azul).
- Con la escritura BRAA, BARA, BAAR se realiza la tarea de enumerar un subconjunto de configuraciones.

U2 y U3: Moviliza los mismos conocimientos que en U1. Nótese el uso de la recursión, ya que el alumno fija una variable para reducir el problema a uno semejante de menor tamaño y sucesivamente va fijando en forma sistemática y coordinada cada uno de los elementos en primera posición y resolviendo el problema reducido.

U4:
- El conjunto de las notaciones escritas se interpreta como el conjunto de las extracciones posibles (intensivo).
- Se halla el cardinal de los conjuntos parciales de configuraciones (actuativo); se identifica la regla de la suma (intensivo) y se realizan las operaciones aritméticas (actuativo).

U1 a U3:
- La secuencia de textos U1 a U3 constituye la justificación de la solución.

En síntesis Adolso introduce una notación para representar las configuraciones y establece un plan sistemático de formación del conjunto de las mismas, basado en la fijación sucesiva de una de las fichas (blanca, azul, roja). La secuencia de textos U1 a U4 constituye la justificación de que no falta ninguna de las formas posibles. Se pone en juego también la técnica de descomponer el problema en partes y componerlas mediante la regla de la suma, la recursión y enumeración sistemática.

4.3.2.2. Problema 2: Colocación ordenada de objetos distinguibles con condiciones dadas [P_4 x V_9]

Enunciado:

> Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras? Ejemplo: sota caballo rey 1.

Transcripción de la solución:

U1	Veo las combinaciones posibles que se pueden hacer con sota, caballo y rey y el orden importa.
U2	sota, caballo, rey ; caballo, sota, rey ; rey, sota, caballo sota, rey, caballo ; caballo, rey, sota ; rey, caballo, sota
U3	Hay 6.
U4	Si pongo el 1 en la 1ª posición y pongo a continuación cada una de las seis comb. Posibles anteriores tengo 6 maneras de alinear.
U5	Si hago lo mismo poniendo el 1 en la 2ª posic., en la 3ª posición y en la 4ª posición, tengo en total 24 posibles para el 1, la sota, el caballo y el rey.
U6	Como hay 9 números, análog. tendría para cada uno de estos números 24 comb. posibles.
U7	Luego en total tengo 9.24 = 216 maneras de alinear.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Descompone el problema en subproblemas (extensivo), fijando la atención en las "combinaciones" (intensivo) que se pueden hacer con sota, caballo y rey.
- No recuerda la distinción que se hace en teoría de la combinatoria entre 'combinaciones' y 'permutaciones'.
- Reconoce que el orden (intensivo) influye en la formación de las configuraciones que se debe formar.

U2:

- Enumera (actuativo) de manera sistemática usando una tabla (ostensivo) todas las

permutaciones (que no son identificadas como tales) de tres objetos.
U3:
- Expresa el resultado de contar (actuativo) el número de configuraciones que ha formado en U2.
U4:
- Inicia la solución del segundo problema parcial (extensivo): intercalar un número del 1 al 9 entre las configuraciones de sota, caballo y rey formadas en U2.
- Calcula (actuativo) el número de configuraciones posibles que se obtiene poniendo el 1 en la primera posición.
U5:
- Calcula (actuativo) recursivamente el número de configuraciones posibles que se obtiene poniendo el 1 en la 2ª, 3ª y 4ª posición (de nuevo 6 posibilidades).
- Reconoce la regla del producto (intensivo) y procede a aplicarla (actuativo).
U6:
- Se plantea los problemas (extensivos) de hallar el número de configuraciones posibles al intercalar los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 entre la sota, caballo y rey. Identifica que estos problemas tienen la misma solución que el resuelto en U4+U5 (generaliza correctamente).
- El número 24 (ostensivo) se interpreta (representa) como solución de los 9 subproblemas planteados en U4 a U6.
U7:
- Reconoce la regla del producto (intensivo) y procede a aplicarla (actuativo).

Como síntesis podemos decir que los conocimientos puestos en juego en este problema han sido:
- Descomposición del problema en subproblemas, recursión y generalización;
- Enumeración sistemática de las permutaciones de 3 objetos.
- Enumeración sistemática de las combinaciones de 4 elementos (posiciones de los dígitos entre las figuras) tomados de 1 en 1.
- Composición cartesiana de las soluciones parciales de los subproblemas.

El esquema operatorio usado implícitamente es el de colocación de objetos distinguibles (figuras y números) en posiciones distintas.

Como recurso notacional observamos el uso de una disposición tabular para formar las permutaciones. Esta disposición tabular junto con el uso de la regla del producto son los dos medios usados para validar la solución dada.

4.3.2.3. Problema 3: Colocación de objetos iguales en celdas distintas [$C_{4,3}$]

Enunciado:

> Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: Amarillo, Blanco, Crema y Dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: Podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

Transcripción de la solución:

U1 Como nos pide el número de formas en las que podemos colocar las 3 cartas en los 4 sobres diferentes, no importa el orden en el que estén las cartas.

U2 1ª opción: no poner ninguna carta en el amarillo y poner cada carta en uno de los sobres restantes.
2ª opción: no poner ninguna carta en el sobre blanco.
3ª opción: no poner ninguna careta en el sobre crema.
4ª opción: no poner ninguna carta en el sobre dorado.
Luego hay 4 formas.

Conocimientos puestos en juego:
U1:
- Deduce que el orden no influye en la formación de configuraciones relacionando las expresiones "cartas iguales" y "sobres diferentes"; identifica una propiedad (intensivo) del proceso de colocación.

U2:
- Descompone el problema en subproblemas (actuativo), obteniendo el enunciado de 4 subproblemas (extensivos).
- Resuelve (de modo implícito) cada subproblema mediante una enumeración simple (1, en cada caso).
- Identifica y aplica la regla de la suma (intensivo y actuativo).

En resumen, Adolfo interpreta el proceso de formación de las configuraciones mediante el esquema operatorio de colocación no ordenada. Como no recuerda ninguna definición de las operaciones combinatorias procede a la descomposición del problema en subproblema y a realizar una enumeración sistemática. Finalmente compone los casos mediante la regla de la suma.

4.3.2.4. Problema 4: Partición de un conjunto de objetos distintos en partes distintas [$VR_{3,4}$]

Enunciado:

> Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Transcripción de la solución:

U1 Caso 1
a) Le da los 4 coches a Fernando.
b) Le da los 4 coches a Luis.
c) Le da los 4 coches a Teresa.

U2 Caso 2
Da los 4 coches a 2 de sus hermanos. Veamos que posibilidades hay:
A) a) Fernando y Luis b) Fernando y Luis c) Fernando y Luis

(3 coches)	(1 c.)	(2 coches)	(2 c.)	(1 coche)	(3 c.)
ABV	R	AB	VR		
ABR	V	AV	BR	Hay 4 formas	
ARV	B	AR	VB	(análogo a a))	
BRV	A	BV	AR		
		BR	AV		
		BR	AB		

U3 Hay 4 formas Hay 6 formas
U4 Luego hay 14 formas diferentes de repartir entre Fernando y Luis.
U5 B)Análogamente hay 14 formas diferentes entre Fernando y Teresa.
U6 C)Análogamente hay 14 formas diferentes entre Luis y Teresa.
Caso 3:
Todos los hermanos tienen algún coche.
A) a)Fernando 2, Luis 1, Teresa 1 b)Fernando 2, Luis 1, Teresa 1

AB	V	R	BV	A	R
AB	R	V	BV	R	A
AV	B	R	BR	A	V
AV	R	B	BR	V	A
AR	B	V	BR	A	B
AR	V	B	RV	B	A

U7 Luego el caso A) tiene 12 posibilidades distintas.
Análogamente, el caso B) Luis 2, Fernando 1, Teresa 1 tiene 12 posibilidades distintas.
U8 Análogamente, el caso C) Teresa 2, Fernando 1, Luis 1 tiene 12 posibilidades distintas.
Sumando todas las opciones tengo:
U9 Caso 1 + caso 2 + caso 3 = 3 + (14+14+14) + (12+12+12) = 81 formas diferentes.

Conocimientos puestos en juego:

U1, U2 y U6 (descomposición en 3 casos) indica la técnica de descomponer el problema en subproblemas. Se vuelve a aplicar dentro de los casos 2 y 3.
- En cada paso fija algunas variables y resuelve un conjunto relacionado de subproblemas mediante recursión y generalización.

- En cada subproblema se aplica la técnica de la enumeración sistemática como método de solución, apoyada en una notación simbólica para representar los coches y una disposición tabular que prueba la sistematicidad.
- Se reconoce y aplica la regla de la suma.

Adolfo ha interpretado el problema según el esquema de partición de un conjunto en subconjuntos, sin condiciones adicionales, que es el sugerido en el enunciado del problema, sin intentar hacer una traducción al esquema de selección. Resaltamos aquí la complejidad de la solución dada por Adolfo, comparada con el ajuste del modelo de las variaciones con repetición. Hay que destacar en este problema la gran destreza de Adolfo en la técnica de dividir el problema en subproblemas y en la enumeración

En el caso de hacer una traducción, hay que realizar una interpretación del problema que resulta poco habitual: en lugar de repartir los coches a las personas se deben seleccionar las personas a las cuales se repartirá los coches. Se puede seleccionar una persona más de una vez (para recibir más de un coche) y el orden es importante (porque indica el color del coche a recibir). De este modo se trata de hallar las variaciones de 3 objetos distinguibles (las personas), tomados de 4 en 4 (con repetición). Enumeración sistemática apoyada en las disposiciones tabulares.

4.3.2.5. Problema 5: Partición de un conjunto de objetos diferentes en dos subconjuntos distintos [$C_{4,2}$]

Enunciado:

> Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

Transcripción de la solución:

U1 Veamos cuantos grupos de 2 amigos pueden hacer el trabajo de matemáticas, los otros dos amigos harían el de lengua:

U2 Matemáticas
Andrés-Benito
Andrés-Clara
Andrés-Daniel
Benito-Clara
Benito-Daniel
Clara-Daniel

U3 6 formas
Luego hay 6 formas para hacer los trabajos de Matemáticas y Lengua.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Planteamiento de un subproblema (formas de asignar el trabajo de matemáticas a 2 amigos) (extensivo); se justifica que la solución de este problema resuelve el dado ya que "los otros dos amigos harían el de lengua" (validativo). Se reconoce la propiedad de que los grupos de m personas tomadas de n en n son iguales que los grupos de m personas tomadas de m-n en m-n (intensivo).
- Descomposición del problema en subproblemas (actuativo).

U2:
- Enumeración sistemática de los distintos modos de seleccionar los 2 alumnos para el trabajo de matemáticas (actuativo).
- Se representa el conjunto de configuraciones mediante el listado de los pares de nombres de las personas (ostensivo).
- Se supone que una forma distinta de hacer el trabajo requiere que haya en la pareja al menos una persona diferente; el orden no influye; no se pueden repetir las personas (condiciones de realización de la acción) (intensivos).

U3:

- Recuento del cardinal del conjunto de configuraciones (actuativo).

U4:

- Se interpreta el número 6 como la solución del problema; la expresión sirve como justificación del proceso seguido (validativo).

De nuevo apreciamos la eficacia de la práctica combinatoria de Adolfo: descomponer el problema en subproblemas y enumerar sistemáticamente los casos, tras una representación ostensiva de las configuraciones.

4.3.2.6. Problema 6: Selección de muestras no ordenadas [$C_{5,3}$]

Enunciado:

> Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

Transcripción de la solución:

U1	No importa el orden.
U2	Fijo Elena y varío los otros.
U3	Elisa-Fernando-Germán
	Elisa-Fernando-Jorge
	Elisa-Fernando-María
	Elisa-Germán-Jorge
	Elisa-Germán-María
	Elisa-Jorge-María
U4	Ahora dejo a Elisa fuera.
U5	Fernando-Germán-Jorge
	Fernando-Germán-María
	Fernando-Jorge-María
	Germán-Jorge-María
U6	En total 6+4=10 formas.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Identificación de las condiciones de realización del esquema operatorio (no influencia del orden; no se pueden repetir elementos) (intensivo).

U2:

- Descomposición del problema en subproblemas (actuativo), fijando variables y como resultado de la acción se produce un problema relacionado (extensivo).

U3:

- Enumeración sistemática (actuativo) de los casos en que Elisa puede entrar a formar parte; como resultado de esta acción se produce el conjunto estructurado de configuraciones (intensivo); este conjunto se expresa mediante el listado ordenado de los nombres de ternas elegibles (ostensivo).

U4:

- Planteamiento de otro subproblema, en forma recursiva.

U5:

- Análoga interpretación que U3.

U6:

- Cálculo mediante recuento del cardinal de los conjuntos formados en U3 y U5 (actuativo).
- Aplicación de la regla de la suma (actuativo, intensivo).

4.3.2.7. Problema 7: Colocación ordenada, con repetición y condiciones [$VR_{4,3}$ x $C_{5,2}$]

Enunciado:

> ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1 , 2 , 4 , 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos? Ejemplo: 8 8 1 2 4.

Transcripción de la solución:

U1 Formas de poner números de 3 cifras usando 1, 2, 4 y 6:

U2	1111	1121	1141	1161
	1112	1122	1142	1162
	1114	1124	1144	1164
	1116	1126	1146	1166

U3 Fijo el 1 en la 1ª posición
Si pongo en la 2ª posición el 2 tengo otras 4 posibilidades.
4 " " " "
6 " " " "

U4 Fijo el 1 en la 1ª posición tengo, pues, 16 posibilidades

U5 Variando en la 1ª posición el 1, el 2, el 4 y el 6

U6 Tengo 16.4 = 64 posibilidades.

U7 Veamos las posiciones en las que puedo colocar dos 8 en un número de 5 cifras:
8, 8, - - -

U8 8, -8, -, -
8, --8, -
8, -, -, -, 8

-,8, 8,-, -
-,8, - 8, -
-,8, -, -8

-, -, 8, 8,-
-, -, 8,- 8
-, -, -, 8,8

U9 Hay 10

U10 En cada una de estas 10 posiciones puedo meter las 64 combinaciones de 3 cifras de 1, 2, 4, 6.

U11 Luego hay 64 . 10 = 640 números de 5 cifras con dos 8**.**

Conocimientos puestos en juego:

U1:- Interpretación del enunciado según el esquema de colocación;
- Descomposición del problema en subproblemas (actuativo) y enunciado de un subproblema (extensivo).

U2:
- Enumeración sistemática (actuativo) mediante una disposición tabular (notación) de una parte de las configuraciones (intensivo) del primer subproblema; la disposición tabular prueba que no falta ningún número cumpliendo las condiciones exigidas (validativo).
- En cada configuración sobra la escritura de un número 1 en la primera posición (notación improcedente); esto no conlleva que el cardinal del conjunto sea incorrecto. No completa todos los casos; parece un intento fallido.

U3: Cambio de estrategia: Fijación sistemática de variables y recursión.
- Explica la disposición tabular, indicando que ha descompuesto el problema en subproblemas y que los resuelve mediante enumeración sistemática.

U4:
- Recuento del número de números formados; el número 16 es la propiedad del conjunto de configuraciones formadas que se determina mediante la acción de contar. Regla del producto.

U5:
- Planteamiento recursivo de 4 subproblemas similares al que acaba de resolver.

U6:
- Identificación de la regla del producto (intensivo) y realización del cálculo (actuativo).

U7:
- Planteamiento de subproblema (colocación de los dos 8) entre los otros 3 números.

U8:
- Enumeración sistemática del conjunto de configuraciones posibles.

U9:
- Calculo mediante recuento del cardinal del conjunto de configuraciones (actuativo).
U10:
- Composición de los subproblemas mediante la regla del producto; reconocimiento de las condiciones de aplicación.
U11:
- Realización de los cálculos e interpretación del resultado como solución del problema.

4.3.2.8. Problema 8: Colocación de objetos distinguibles en casillas distintas [$V_{5,3}$]

Enunciado:

> El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:
>
> 1 2 3 4 5
>
> ¿De cuantas formas pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera? Ejemplo: Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4.

Transcripción de la solución:

U1 A= Angel, B= Beatriz, C= Carmen
U2 Fijo A en la cochera 1:
U3 ABC- -
AB - C -
AB - - C
ACB - -
AC – B -
AC - - B
A – BC -
A – B – C
A - - BC
A - - CB
A – CB -
A – C – B
U4 12 Formas
U5 Si fijo A en la cochera 2 tenemos otras 12.
U6 Si fijo A en la cochera 3 tenemos otras 12
U7 Si fijo A en la cochera 4 tenemos otras 12
U8 Si fijo A en la cochera 5 tenemos otras 12
U9 En total 12.5 = 60 formas de aparcar.

Conocimientos puestos en juego:
U1:
- Intepretación del enunciado según el esquema de colocación.
- Introduce una notación para representar los coches de las 3 personas.
U2:
- Fijación de una variable.
- Descomposición del problema en subproblemas (actuativo) y enunciado (implícito) del problema ¿de cuántas formas puedo aparcar los otros dos coches?
U3:
- Formación del conjunto de todas las configuraciones (intensivo) mediante enumeración sistemática (actuativo); la disposición tabular (ostensivo) prueba que la enumeración es exhaustiva (validativo).
U4:
- Cálculo del cardinal del conjunto de configuración mediante recuento.
U5 a U8:
- Planteamiento recursivo de 4 subproblemas (extensivos); se asume que estos subproblemas son ejemplares similares que el U2 y que la solución es la misma. Generalización.

U9:
- Identificación de las condiciones de aplicación de la regla del producto (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

4.3.2.9. Problema 9: Colocar objetos distintos en celdas distintas (más de un objeto por celda) [$VR_{2,4}$]

Enunciado:

> Cuatro niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana) van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar a los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

Transcripción de la solución:

U1 1º Caso: Todos en el salón.
U2 2ºCaso: Todos en la buhardilla.
U3 3º Caso: 3 en el salón y 1 en la buhardilla
U4 Salón Buhardilla
A,B,C D
A,B,D C
A,C,D B
B,C,D A
U5 4 formas
U6 4º Caso: 2 en el salón y 2 en la buhardilla.
U7 Salón
A,B
A,C
A,D
B,C
B,D
C,D
U8 6 formas.
U9 5º Caso: 1 en el salón y 3 en la buhardilla.
U10 Análogo al caso 3º, hay 4 formas.
U11 1 + 1+ 4 + 6 + 4 = 16 formas diferentes.

Conocimientos puestos en juego:

U1 A U10:
- Interpreta el enunciado según el esquema de colocación.
- Descomposición recursiva del problema en subproblemas (actuativo) y resolución mediante enumeración sistemática.
- Resolución de un problema auxiliar: descomposición del número 4 en sumandos de todas las formas posibles.
- Identificación de que el cambio de orden y la repetición no se permiten en cada colocación (intensivo).
- Uso de una notación (ostensivo) para expresar cada configuración (modos de colocar los niños en las habitaciones).
- Disposición tabular de las configuraciones para validar que la enumeración de casos es exhaustiva.

U11:
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla de la suma (intensivo), expresión y realización de los cálculos (ostensivo, actuativo).

4.3.2.10. Problema 10: Reparto de objetos distinguibles en celdas distinguibles [$C_{4,2}$]

Enunciado:

> María y Carmen tienen cuatro cromos numerados del 1 al 4. Deciden repartírselos entre las dos a partes iguales. ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos? Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2 y Carmen con los cromos 3 y 4.

Transcripción de la solución:

U1	María	Carmen
	1,2	3,4
	1,3	2,4
	1,4	2,3
	2,3	1,4
	2,4	1,3
	3,4	1,2
U2	Hay 6 formas.	

Conocimientos puestos en juego:
U1:
- Interpretación del enunciado en el esquema de partición.
- No influencia del orden; no posibilidad de repetición; formado un subconjunto el otro queda determinado (intensivos).
- Formación del conjunto de configuraciones mediante enumeración sistemática.
- Uso de una disposición tabular para validar la exhaustividad de la enumeración.

U2:
- Cálculo del cardinal del conjunto de configuraciones mediante recuento; interpretación de dicho cardinal como solución del problema.

4.3.2.11. Problema 11: Selección ordenada con reemplazamiento y repetición [$VR_{4,3}$]

Enunciado:

> En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2 , 4 , 7 y 9. Elegimos una bola del bombo, anotamos su número y la devolvemos al bombo. Se elige una segunda bola, se anota su número y la devolvemos al bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: Se puede obtener el número 2 2 2.

Transcripción de la solución:

U1	Como la bola se devuelve al bombo, pueden aparecer números con cifras repetidas.			
	Importa el orden, ya que, por ejemplo, 247 es distinto de 742.			
U2	Fijo el 2 en la 1ª posición, veamos qué números puedo obtener:			
U3	222	242	272	292
U4	224	244	274	294
	227	247	277	297
	229	249	279	299
U5	son 16 números			
U6	Si fijo el 4 en la 1ª posición tendré otros 16 números.			
U7	Si fijo el 7 en la 1ª posición tendré otros 16 números			
U8	Si fijo el 9 en la 1ª posición tendré otros 16 números			
U9	En total 16 + 16 + 16 + 16 = 64 números diferentes.			

Conocimientos puestos en juego:
U1:
- Reconocimiento de las condiciones de realización de la acción de extracción: las cifras se pueden repetir (intensivo).

U2:
- Idem, respecto del orden.

U3:
- Descomposición del problema en subproblemas, fijando variables.

U4:
- Enumeración sistemática y validación de su exhaustividad mediante una disposición tabular del conjunto de números posibles.

U5:
- Cálculo del cardinal del conjunto de configuraciones mediante recuento.

U6 a U8:

- Planteamiento recursivo de 3 subproblemas cuya estructura se reconoce como equivalente al U3.
U9:
- Identificación de las condiciones de aplicación de la regla de la suma y realización de la operaciones aritméticas.

4.3.2.12. Problema 12: Colocación ordenada exhaustiva con repetición de elementos [$PR_{5;3,1,1}$]

Enunciado:

> Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A , B , C , C , C . ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de otra formando una hilera? Ejemplo: Pueden estar colocadas de la siguiente forma A C B C C .

Transcripción de la solución:

U1	Veamos en qué posiciones diferentes están B, C, C y C.		
U2	BCCC		
	CBCC		
	CCBC		
	CCCB		
U3	4 formas		
U4	Si pongo A en la 1ª posición y le añado las 4 formas anteriores tendré 4 hileras distintas.		
	Como A puede ponerse en 5 posiciones distintas, tengo 5 . 4 = 20 hileras distintas.		
U5	ABCCC	BACCC	BCACC
	ACBCC	CABCC	CBACC
U6	ACCBC	CACBC	CCABC
	ACCCB	CACCB	CCACB
	BCCAC	BCCCA	
	CBCAC	CBCCA	
	CCBAC	CCBCA	
	CCCAB	CCCBA	

Conocimientos puestos en juego:
U1:
- Planteamiento de un subproblema reduciendo el tamaño del problema: ordenaciones de las letras B, C, C, C.

U2:
- Formación del conjunto de configuraciones mediante enumeración sistemática (disposición tabular).

U3:
- Recuento de las ordenaciones posibles.

U4 y U5:
- Planteamiento recursivo de subproblemas: colocación de la letra A entre las restantes. Generalización.
- Reconocimiento de las condiciones de aplicación de la regla del producto y realización del cálculo.

U6:
- Comprobación de la solución mediante la formación del conjunto de configuraciones por enumeración sistemática.

4.3.2.13. Problema 13: Selección ordenada sin reemplazamiento ni repetición [$V_{4,3}$]

Enunciado:

> Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: Presidente, Tesorero y Secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos? Ejemplo: Que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

Transcripción de la solución:

U1	A= Arturo, B= Basilio, C= Carlos, D= David
U2	Caso1º: Arturo presidente
U3	B Tesorero y C ó D secretario
	C Tesorero y B ó D secretario
	D Tesorero y B ó C secretario
U4	Hay 6 formas
U5	Caso 2º: Basilio presidente, 6 formas.
U6	Caso 3º: Carlos presidente, 6 formas.
U7	Caso 4º: David presidente, 6 formas.
U8	6 . 4 = 24 formas distintas de elegir el comité.

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Introducción de una notación para representar las configuraciones.

U2:

- Planteamiento de un subproblema: A presidente.

U3:

- Enumeración sistemática del conjunto de configuraciones; disposición tabular.

U4:

- Recuento del número de configuraciones.

U5 A U7:

- Planteamiento recursivo de 3 subproblemas y reconocimiento de que tienen la misma estructura que U2. Generalización.

U8:

- Identificación de las condiciones de aplicación de la regla del producto y realización de los cálculos.

4.3.3. Análisis de la entrevista de Adolfo

En la entrevista personal, aparte de las cuestiones introductorias sobre cuándo estudió combinatoria y sobre su recuerdo de las operaciones combinatorias planteamos cuestiones sobre el proceso seguido en la solución de algunos problemas, la similitud entre distintos problemas y el posible proceso de generalizacion de las soluciones a problemas con valores mayores de los parámetros.

Como datos relevantes y aclaratorios de los conocimientos de Adolfo en relación a la Combinatoria, puestos de manifiesto en la entrevista personal, destacamos los siguientes.

(1) Desconocimiento de la noción de combinación:

En varias ocasiones Adolfo usa la palabra combinaciones con un sentido "no técnico", más bien como "configuración". Así en el problema 2:

I: ¿Serias capaz de enunciar el problema de otra forma?
A: Se puede hacer de varias maneras, una podría ser cómo se lo enuncio al niño de otra manera y, otra, es cuando a la hora de hacer uno el problema piensa, bueno, esto ... y se lo enuncia uno a si mismo de otra manera....
El problema es, simplemente, que quiero hacer combinaciones de cuatro cartas, hay doce cartas, quieres que tres salgan siempre y aparte otra y hay que ver las formas...
I: La solución la encontraste como vemos en el papel o ¿hiciste otras cosas?.
A: No, solo lo que aquí se ve; yo primero vi las combinaciones que se podían formar con la sota, el caballo y el rey, teniendo en cuenta el orden, y como me faltaba una carta pues cogía, por ejemplo, el uno y lo ponía en las distintas posiciones y entonces ya tenía seis, después hacía lo mismo con todos los demás números; bueno, con el uno tengo veinticuatro porque lo puedo aplicar con cada uno de estos seis pero lo puedo meter en un orden distinto (en el primer, segundo, tercer o cuarto lugar).

(2) Dependencia de la generalización de las soluciones del conocimiento de las fórmulas de las operaciones combinatorias:

Ante la pregunta de generalizar la solución a problemas similares con mayor número de elementos Adolfo cree que podría extender la técnica que ha utilizado (básicamente la descomposición del problema en subproblemas, la enumeración sistemática y la recursión), aunque se encuentra inseguro de ser capaz de producir todas las configuraciones por enumeración sistemática. Por ello indica que sería más fiable ajustar un modelo combinatorio haciendo uso de las fórmulas correspondientes, en caso de recordarlas:

I: ¿Como resolverías el problema si hubiera muchas más cartas, por ejemplo treinta, y tuvieras que ponerlo en filas, por ejemplo de siete, en lugar de cuatro?¿Lo harías de la misma forma?.
A: Tal como lo he hecho aquí el que haya treinta cartas y los grupos de siete no presenta problema porque, simplemente, voy a hacer las combinaciones de siete en siete y luego meter cada una de las otras, el problema sería hacer las combinaciones de las siete y, si me acordara de la fórmulas, las haría por la fórmula.
I: O sea que ahí si utilizarías la fórmula.
A: Si me acordara, si.
I: ¿Como resolverías este problema [PROBLEMA 4]si en vez de cuatro coches y tres hermanos fueran treinta coches y siete hermanos?
A: Aplicaría la fórmula.
I: ¿Y qué harías si no te acuerdas de la fórmula?
A: Supongo que haría lo mismo pero lo reduciría, procuraría encontrar todos los casos pero sería bastante complicado
.

(3) Influencia del orden en la formación de las configuraciones

En las respuestas a algunos preguntas Adolfo es capaz de identificar sobre el papel que el orden de colocación o selección de elementos puede tener en la formación de las configuraciones. Así en el problema 4 (repartir 4 coches de colores entre 3 hermanos), por tratarse de un problema de partición el orden no tiene importancia, sino que es el hecho de que los objetos a repartir sean diferentes lo que convierte el problema en un problema de variaciones. Esto es perfectamente identificado por Adolfo:

I: ¿Es importante el orden en este problema?.
A: Aquí no se puede entender el orden, el orden puede entenderse cuando hay números pero como aquí son coches diferentes.

En el problema 6 (elegir tres estudiantes entre cinco voluntarios para borrar la pizarra) se pone de manifiesto las dudas sobre la influencia del orden. Al comparar el enunciado de este problema con los problemas 3 (colocar cartas iguales en sobres diferentes) y 10 (repartir cuatro cromos entre dos niñas) (modelizables como combinaciones), y por tanto, en ambos el orden no determina nuevas configuraciones:

I: Mira a ver si se parece este problema al número tres.
A: Yo le encuentro bastante parecido, si acaso en lo que se diferencian es que en este, el número 3, no importa el orden.
I:En el número 3 no importa el orden...
Bueno, no exactamente; que tenemos tres cartas y da exactamente igual que una carta vaya a un sobre u otro, en cambio en este, en el número 6,... son iguales.
I: ¿Son iguales?
A: Si,si.
I: ¿Y al número 10?
A: En el problema 6 serían combinaciones y en el 10 son permutaciones, creo.

(4) Inseguridad en el conocimiento de las fórmulas:

En el problema 6 queda patente la inseguridad de Adolfo sobre el uso de las fórmulas:

> *I: ¿Cómo encontraste la solución?*
> *A:Escribiendo todas las combinaciones.*
> *I: Y si en vez de cinco voluntarios y tres para borrar hubiera cuarenta voluntarios y once para borrar ¿cómo lo harías?*
> *A: Aplicaría la fórmula, en este caso era cinco sobre tres, sería 5 factorial por 3!..¿? sería cinco por cuatro veinte, no, no.*
> *I:¿5 sobre 3 es lo que quieres hacer?*
> *A: Sería (5-3)! por 3! no, no.*
> *I: Es verdad que no te acuerdas.*
> *A:Si, un momento, 5! partido por 3! y, falta algo...y por (5-3)!, eso es.*
> *I: O sea, que el no utilizar las fórmulas ha sido, en parte, porque tampoco has sentido la necesidad pero si los números hubieran sido más grandes...*
> *A: Si, me hubiera esforzado.*

4.3.4. Síntesis y conclusiones finales del caso de Aldolfo

El estudio pormenorizado que hemos realizado de las respuestas dadas por Adolfo a los 13 problemas del cuestionario y las aclaraciones obtenidas mediante la entrevista personal nos ha permitido identificar los conocimientos (y "desconocimientos") que ha puesto en juego. Su confrontación con el análisis a priori de los procesos de solución realizado en el capítulo 2 nos permite caracterizar a Adolfo como un sujeto generador de modelos.

Presentamos, a continuación, lo que podemos describir como el significado sistémico y personal de la combinatoria elemental para Adolfo, clasificando los componentes de este significado en los cinco tipos que propone el modelo epistemológico que hemos adoptado para interpretar los resultados de nuestra investigación.

(1) Elementos extensivos

Adolfo resuelve los 13 problemas propuestos a pesar de que no recuerda las definiciones y fórmulas de las operaciones combinatorias. El éxito se basa en el correcto reconocimiento de las configuraciones combinatorias que se deben contar, en la interpretación adecuada de los datos del enunciado, en su destreza en formular subproblemas y problemas relacionados en forma recursiva y en componerlos mediante las reglas de la suma y del producto.

(2) Elementos ostensivos

En la mayor parte de los problemas introduce una notación para representar las configuraciones pedidas, bien usando las iniciales de los nombres de los objetos, o los propios nombres de tales objetos. Usa números, en caso de que las configuraciones pedidas sean de tipo numérico.

Además dispone de forma tabular los ejemplares de las configuraciones que forma para garantizar la exhaustividad de la enumeración. En ningún caso utiliza diagramas en árbol. En los casos en que debe aplicar la regla de la suma y del producto identifica sin error los valores que debe asignar a los sumandos y los factores.

(3) Elementos actuativos

Las técnicas que pone en juego son:

- Descomposición del problema en subproblemas, hallar las soluciones parciales mediante enumeración, generalizando casos semejantes y aplicando la regla de la suma o el producto (7 problemas, 2, 4, 6, 7, 9, 11 y 13).
- Reducir el problema a otro equivalente más simple o reducir su dimensión; resolver este nuevo problema y generalizar al primero (4 problemas: 1, 8, y 12 que los reduce de tamaño fijando un elemento; y el 3, que lo transforma en seleccionar un sobre para dejarlo vacío).
- Uso de la fijación de variables y recursión para formular problemas más simples del mismo

tipo al dado.
- Enumeración directa de las configuraciones cuando el tamaño es pequeño (2 problemas: 5 y 10).

(4) Elementos intensivos
- Identifica con seguridad las condiciones de realización del esquema operatorio (influencia del orden y repetición en los problemas de selección), (elementos distinguibles o indistinguibles, casillas iguales o diferentes en los problemas de partición y colocación), condiciones de las particiones y colocaciones, así como las condiciones de aplicación de las reglas de la suma y del producto.
- Generaliza correctamente la solución parcial de un problema a problemas equivalentes obtenidos al variar sistemáticamente los valores de una variable.
- Identifica propiedades combinatorias, tales como que $C_{m,n}= C_{m, m-n}$
- No recuerda ninguna de las definiciones de las operaciones combinatorias (variaciones, permutaciones, combinaciones).

(5) Elementos validativos
- Presenta la descomposición en casos y la enumeración sistemática, apoyada en la disposición tabular, como justificación de que ha formado el conjunto de todas las configuraciones pedidas.
- Justifica la influencia del orden y la repetición recordando las condiciones del problema. “Como la bola se devuelve al bombo, pueden aparecer números con cifras repetidas”. “Importa el orden, ya que, por eemplo el número 247 es distintos del 742” (problema 11).

4.4. EL CASO DE LUISA (12 problemas resueltos correctamente)

4.4.1. Conocimientos previos

Esta alumna estudió combinatoria en Bachillerato, así como también en el primer curso de la licenciatura (asignatura de Estadística); también afirma que la ha utilizado de forma esporádica en la carrera.

Recuerda las fórmulas combinatorias, aunque reconoce que tuvo esforzarse para reconstruir algunas de ellas. El esquema combinatorio estudiado fue el de selección, resultándole extraño el uso de las aplicaciones (esquema de colocación) en las definiciones de las operaciones combinatorias.

- *I: Y de las fórmulas ¿te acuerdas?.*
- *L: De las fórmulas ... me acuerdo que me costó acordarme y de algunas no estaba muy segura.*
- *I: ¿De cuáles no estabas muy segura?*
- *L: De las permutaciones si.*
- *I: ¿Con y sin repetición?*
- *L: La de permutaciones con repetición me costó acordarme; de las demás no me acordaba demasiado pero razonando y viendo lo que tenía que salir fui reconstruyendo las fórmulas.*
- *I: El tipo de definición que viste, en su momento, para permutaciones, variaciones, etc. era del tipo tengo tantos objetos y tengo que formar grupos... o del tipo tengo dos conjuntos, establezco una aplicación inyectiva...*
- *L: Eso no lo he visto nunca.*

Utiliza en todos los problemas el procedimiento general de ajuste de un modelo combinatorio, aunque reconoce que su empleo no es automático. Es preciso reconocer las condiciones de aplicación a partir del enunciado, es decir, esta alumna se acerca al tipo de sujeto que en nuestro análisis "a priori" hemos llamado sujeto modelizador:

- *I: Siempre que has podido has ido a la fórmula...*
- *L: Si he podido, si; pero, claro, para aplicar las fórmulas también tienes que razonar, tienes que pensar de qué tipo es el problema pues, aunque te sepas las fórmulas, no tienes por qué saber hacer los problemas.*

- *¿Qué es más fiable para ti la fórmula o el diagrama? Cuando hablo de diagrama me re*
- *fiero al diagrama en si, a la enumeración de casos,...*
- *L: Con el diagrama lo voy a tener todo más claro y más seguro pero yo me he fiado mucho de las fórmulas porque creo que he entendido bien cuando se podía aplicar cada una de ellas; de las fórmulas siempre te puedes fiar porque sabes que son ciertas pero, claro, lo que ya no te puedes fiar es de saber si estás aplicando la correcta o no, entonces, cuando estoy más o menos segura de que razonado bien, pues aplico la fórmula y ya está, lo malo es que no siempre estás segura, te puedes asegurar con el diagrama.*

No tiene una valoración fundamentada del papel de la combinatoria dentro de la matemática discreta, considerándola como un tema difícil incluso para alumnos que cursan la carrera de matemáticas, aunque reconoce su papel en el desarrollo de formas de razonamiento:

- *L: Yo creo que puede ayudar bastante a razonar, a desarrollar el razonamiento pero también es verdad que a los niños, en general, les cuesta mucho y a lo mejor es complicarles la vida porque, en realidad esto después de BUP, que yo recuerde, no se vuelve a utilizar. Luego después si hace una carrera puede que si le sirva el razonar sobre este tipo de cosas, pues yo me acuerdo que la Estadística de primero de carrera la gente lo que menos sabía hacer era estos problemas de bolas y cosas así; a mi me gustaban porque a mi se me daba bien en BUP, pero te das cuenta de que las cosas se empiezan a complicar de una manera que había cosas que no era capaz de hacer, costaba bastante; esto es más difícil de lo que parece.*

4.4.2. Conocimientos puestos en juego en la resolución de los problemas.

4.4.2.1. Problema 1: Selección ordenada de objetos distinguibles e indistinguibles [$PR_{4;2,1,1}$]

Enunciado:

> En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

Transcripción de la solución:

U1 2A, 1B, 1R
U2 $PR_4^{2,1,1} = 4! / 2! = 12$
U3 Tenemos 4 fichas, de las cuales 2 son iguales.
U4 El experimento nos da distintas formas de ordenar estos elementos,
U5 Pero teniendo en cuenta que el color azul se repite 2 veces.
U6 Por eso utilizamos permutaciones con repetición.

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo).
U2: Reconocimiento de la operación combinatoria (permutaciones con repetición); escritura de la fórmula (ostensivo) e idendificación de parámetros (intensivo). Realización de los cálculos (actuativo).
U3, U4, U5: Reconocimiento de propiedades, la ficha azul se repite, y reonocimiento de la obtención de las configuraciones (intensivos) como distintas formas de ordenar los elementos.
U6: Justificación del ajuste del modelo de las permutaciones con repetición (validativo).

En síntesis, Luisa identifica en el enunciado que se trata de formar todas las ordenaciones posibles de 4 objetos, en el caso de que 1 objeto se repite 2 veces. Reconoce en esto las condiciones de aplicación del modelo combinatorio de las permutaciones con repetición, $PR_4^{2,1,1}$, siendo capaz de atribuir correctamente los valores a los parámetros y de realizar las operaciones aritméticas requeridas.

4.4.2.2. Problema 2: Colocación ordenada de objetos distinguibles con condiciones dadas [$P_4 \times V_{9,1}$]

Enunciado:

> Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres

restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras? Ejemplo: sota caballo rey 1.

Transcripción de la solución:

U1 $P_4 . 9 = 4! . 9$
U2 Se supone que las 3 cartas de las figuras están fijas;
U3 sólo hay que elegir una carta más de las 9 restantes: hay 9 posibilidades de elegirlas.
U4 Una vez que tenemos 4 cartas, el nº de ordenaciones posibles de estas 4 cartas es P_4 .
U5 Este nº ha de multiplicarse por las 9 posibilidades que teníamos.

Conocimientos puestos en juego:

U1:
- Expresión simbólica (ostensivo) que permite calcular (actuativo) la solución del problema. Se compone de una simbolización para el número de permutaciones de 4 elementos P_4 (intensivo representado por los ostensivos P_4 y 4!) y de la multiplicación por 9.
- Ajuste de un modelo combinatorio compuesto del producto (intensivo) de las permutaciones (intensivo) de 4 elementos con el número de variaciones (intensivo) de 9 elementos tomados de 1 en 1.

U2 a U5: Validación de que el modelo se ajusta al problema.
U2:
- Identificación de la forma de las configuraciones combinatorias (incluyen siempre las tres figuras, sota, caballo, rey y un número del 1 al 9).

U3:
- Cálculo del número de elecciones posibles de 1 número entre 9 distintos (variaciones o combinación de 9 elementos tomados de 1 en 1); no se usan explícitamente las variaciones.

U4:
- Ajuste (aplicación) del modelo de las permutaciones de 4 elementos.

U5:
- Aplicación de la regla del producto.

En síntesis, la tarea se resuelve,
- Descomponiendo el problema en dos subproblemas;
- Aplicando modelos combinatorios, las permutaciones, variaciones y la regla del producto a los dos subproblemas y su composición.
- El reconocimiento de los modelos combinatorios se hace según el esquema semiótico de selecciones.
- Se representa la solución usando notaciones simbólicas para las permutaciones.

4.4.2.3. Problema 3: Colocación de objetos iguales en celdas distintas [$C_{4,3}$]

Enunciado: Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: Amarillo, Blanco, Crema y Dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: Podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

Transcripción de la solución:

U1 Tenemos 4 sobres, de los cuales cada vez elegimos 3, para colocar una carta en cada uno.
Da igual la carta que haya en cada sobre, puesto que son iguales los 3.
U2 Entonces se trata de escoger grupos o combinaciones de los cuatro sobres tomados de 3 en
U3 3, y el orden no interviene para nada.
U4 Luego, la solución es $C_4^3 = \binom{4}{3} = 4! / (3!1!) = 4$
U5 $\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ D$
$\underline{A}\ B\ \underline{C}\ \underline{D}$
$A\ \underline{B}\ \underline{C}\ \underline{D}$
$\underline{A}\ \underline{B}\ C\ \underline{D}$

Conocimientos puestos en juego:
U1: Traduce el problema a otro equivalente en el esquema de selección;
- Identificación de las configuraciones como selecciones de 3 de los 4 sobres.
U2, U3: Reconocimiento de las condiciones de la selección: el orden no influye (intensivo) porque las cartas son iguales (validativo).
U4: Reconocimiento de la operación combinatoria, escritura simbólica de las combinaciones y del número combinatorio $C_4^3 = \binom{4}{3}$ (ostensivo), identificación de parámetros (intensivo), y realización de los cálculos (actuativo).
U5: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo) y enumera de una manera sistemática las distintas configuraciones (actuativo). La disposición tabular de las configuraciones la usa como comprobación (validativo) de la solución calculada mediante el ajuste del modelo; comprobación mediante enumeración sistemática.

En síntesis el proceso de solución se basa en la traducción del problema a otro de selección; identificación de las condiciones de aplicación del modelo de las combinaciones ordinarias de 4 elementos tomados de 3 en 3 en el esquema de selección, reconociendo que se requiere formar muestras no ordenadas sin repetición de los elementos que componen las configuraciones. Traduce la condición de elementos iguales por no influencia del orden.

4.4.2.4. Problema 4: Partición de un conjunto de objetos distintos en partes distintas [$VR_{3,4}$]
Enunciado: Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis

Transcripción de la solución:
U1 A, B, V, R
U2 Hay que tener en cuenta que los coches son distinguibles.
U3 Casos:
Que le de a uno solo los 4 coches: 4 posibilidades.
Que le de a uno 3 coches: $4.C_4^3$
Que le de a uno 2 coches y a otro otros 2: $C_4^2 . 4 . 3$
Que le de a uno 2 coches y a cada uno de los otros 2 un coche: $C_4^2 . 4 . C_3^2$
Que le de uno a cada uno: P_4.
U4 Se suman todas las posibilidades

U5

F	L	T
4	0	0
3	1	0
3	0	1
2	1	1
2	2	0
2	0	2
1	3	0
1	2	1
1	1	2
1	0	3
0	4	0
0	0	4
0	3	1
0	2	2
0	1	3

Conocimientos puestos en juego:
U1: Interpreta el enunciado en el esquema de partición;
- Introduce una notación simbólica para designar los elementos a repartir (ostensivo).
U2: Reconocimiento de que los coches son distinguibles (intensivo).
U3: Descomposición del problema en subproblemas (extensivo) con aplicación incorrecta, en

cada uno, de operaciones combinatorias para resolverlos (intensivo). Resolución de un problema auxiliar: descomposición del número 4 en sumandos.
U4: Aplicación de la regla de la suma (intensivo).
U5: Se utiliza una nueva notación (ostensivo), una disposición tabular y enumera las distintas desconposiciones del número 4 en sumandos configuraciones básicas en cuanto al número de coches (actuativo). La enumeración no es sistemática.

- Solo tiene en cuenta el número de coches que recibe cada chico y no usa el hecho de que los coches son distinguibles, con lo cual no finaliza la resolución del problema.

Este es el único problema que Luisa no resuelve correctamente. No acierta a traducir el problema a otro de selección que sería mucho más sencillo, considerando la selección con repetición de las 3 personas, en lugar de los coches. En este caso la solución es tan simple como las variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 4 en 4. Procede en su lugar a descomponer el problema en subproblemas, pero no logra resolverlos correctamente mediante el ajuste de los modelos correspondientes, debido a que la enumeración no es sistemática y no usa el hecho de que los coches son distinguibles para formar las particiones.

4.4.2.5 Problema 5: Partición de un conjunto de objetos diferentes en dos subconjuntos distintos [$C_{4,2}$].

Enunciado:
Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos?. Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

Transcripción de la solución:

U1 Basta considerar cuantos grupos distintos de 2 alumnos podemos tomar para el trabajo de Matemáticas (ya sabemos que los dos restantes harán el trabajo de Lengua).
Tenemos 4 elementos y los elegimos de 2 en 2,
U2 de forma que no importa el orden ,
U3 luego la solución es $C_4^2 = 4! / (2!.2!) = 6$
U4 Los subrayados harían el trabajo de matemáticas y el resto el de lengua:
U5 $\underline{A}\ \underline{B}\ C\ D$
$\underline{A}\ B\ \underline{C}\ D$
$\underline{A}\ B\ C\ \underline{D}$
$A\ \underline{B}\ \underline{C}\ D$
$A\ \underline{B}\ C\ \underline{D}$
$A\ B\ \underline{C}\ \underline{D}$

Conocimientos puestos en juego:
U1: Traduce el problema a otro en el esquema de selección, que es más sencillo (formas de asignar el trabajo de matemáticas a 2 amigos) (extensivo); se justifica que la solución de este problema resuelve el propuesto ya que "los dos restantes harán el trabajo de lengua" (validativo). Identificación de una propiedad combinatoria.
U2: Identificación de las configuraciones como muestras de 2 elementos de un conjunto de 4 (intensivo).
U3: Reconocimiento de que no importa el orden (intensivo).
U4: Reconocimiento de la operación combinatoria, identificación de la operación combinatoria y los valores de sus parámetros (intensivo), y realización de los cálculos (actuativo).
U5: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo) y enumera de una manera sistemática las distintas configuraciones (actuativo).

En síntesis se traduce el enunciado a un problema de selección; se reconocen en éste las condiciones de aplicación del modelo de las combinaciones de 4 objetos tomados de 2 en 2 (muestras no ordenadas). Identifica una propiedad combinatoria. Comprueba la solución mediante una enumeración sistemática.

4.4.2.6. Problema 6: Selección de muestras no ordenadas [$C_{5,3}$].

Enunciado:

Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos?. Ejemplo: Elisa, Fernando, María.

Transcripción de la solución:

U1 E, F, G, J, M
U2 Tenemos 5 elementos, de los cuales hay que elegir 3,
U3 sin importarnos el orden.
U4 El número de grupos de 3 chicos que podemos hacer es $C_5^3 = 5! / ((3!)(2!)) = (5.4.3.2!) / (3.2.2!) = 10$

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo).
U2: Identificación de las configuraciones (intensivo) usando el mismo esquema de selección del enunciado.
U3: Reconocimiento de que no importa el orden (intensivo).
U4: Reconocimiento de la operación combinatoria (combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3) (intensivo); expresión de la fórmula (ostensivo), identificación de parámetros (intensivo), y realización de los cálculos (actuativo).

4.4.2.7. Problema 7: Colocación ordenada, con repetición y condiciones [$VR_{4,3}$ x $C_{5,2}$].

Enunciado:

¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos?. Ejemplo: 8 8 1 2 4.

Transcripción de la solución:

U1 1, 2, 4, 6, 8 y cada número contiene dos ochos.
U2 88 - - -
8 - 8 - -
8 - - 8 -
8 - - -8
- 8 - - 8
U3 Sabemos que hay exactamente 2 ochos, luego, hay que elegir entre los otros 4 dígitos para formar un número de 5 cifras.
U4 Estos 4 dígitos se pueden repetir o no.
U5 Además, hay que tener en cuenta que influye el orden en las 5 cifras.
U6 La elección entre 1, 2, 4, 6 tendrá VR_4^3 posibilidades.
U7 Luego habrá que multiplicar por el número de formas posibles de colocación de los 2 ochos,
U8 Que es C_5^2 (pues tenemos 5 “lugares” para meter 2 “ochos”, cogemos grupos de 2 “lugares”,
U9 Es análogo a lo de las cartas en los sobres).
U10 Luego la solución es $VR_4^3 \cdot C_5^2$

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo).
U2: Introduce una nueva notación simbólica (ostensivo) y hace una enumeración sistemática e incompleta (actuativo).
U3: Descompone en dos subproblemas (extensivo), uno de ellos en enunciado de selección.
U4, U5: Reconocimiento de que los dígitos distintos del ocho se pueden repetir y de que influye el orden en los números de cinco cifras (intensivos).
U6: Identificación de la operación combinatoria que resuelve el subproblema de hallar la parte del número que no tiene ochos (intensivo) y notación de la misma (ostensivo).

U7: Reconocimiento de la necesidad de aplicar la regla del producto (intensivo) para componer los dos subproblemas planteados.
U8: Planteamiento del otro subproblemas (colocar dos 8) con un enunciado de selección (traduciendo el problema). Identificación de la operación combinatoria que resuelve el subproblema (intensivo) y notación de la misma (ostensivo).
U9: Identificación de la similitud entre el subproblema de colocar dos 8 en 5 posiciones y el problema 3 (colocación de las cartas). Se puede identificar aquí tanto un elemento extensivo - correspondencia entre problemas- como intensivo -reconocimiento de la estructura común.
U10: Identificación de la regla del producto (intensivo). Las operaciones se dejan indicadas.

En síntesis se procede a descomponer el problema en dos subproblemas, que se enuncian en esquema de selección, traduciendo para ello uno de los enunciados. Se combinan las soluciones parciales con la regla del producto. Cada subproblema se resuelve mediante el ajuste de modelos combinatorios (variaciones con repetición y combinaciones) identificando las condiciones de aplicación.

4.4.2.8. Problema 8: Colocación de objetos distinguibles en casillas distintas [$V_{5,3}$].
Enunciado:

El garage de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay tres coches; los de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada dia el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:
1 2 3 4 5
¿De cuántas formas pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?. Ejemplo: Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4.

Transcripción de la solución:

U1	A	B	C	__	__
	A	B		C	
	A	B			C
	A		B	C	
	A		B		C
	A			B	C
	...				

U2 Tenemos 5 lugares a ocupar y 3 coches a distribuir,
U3 que son distintos,
U4 luego nos importa el orden en que se aparquen.
U5 Habrá que considerar las combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3,
U6 y luego multiplicar por las permutaciones de 3 elementos: $C_5^3 \, . \, P_3$

Conocimientos puestos en juego:
U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo) y hace una enumeración incompleta (actuativo).
U2, U3, U4: Identificación de las configuraciones (intensivo), reconocimiento de que el orden importa (intensivo) ya que los lugares a utilizar son distintos (validativo).
U5: Se identifican las operaciones combinatorias que intervienen (intensivo) para resolver un problema relacionado: aparcar los coches sin tener en cuenta el orden que es equivalente a elegir tres plazas entre las cinco disponibles (modelo de selección).
U6: Para resolver el problema inicial, habrá que permutar los coches en cada configuración anterior (permutaciones) y se aplica la regla del producto (intensivo).

Resaltamos el hecho de que Luisa no reconoce en este problema de manera directa las condiciones de aplicación del modelo de las variaciones ordinarias. Por el contrario resuelve bien el problema considerandolo como un problema compuesto de otros dos subproblemas, producto de combinaciones por permutaciones, el primero de ellos en el esquema de selección que le permite identificar con facilidad la operación combinatoria.

4.4.2.9 Problema 9: Colocar objetos distintos en celdas distintas (más de un objeto por celda) [$VR_{2,4}$].

Enunciado:

Cuatro niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana) van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar a los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuerla colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

Transcripción de la solución:

U1 A, B, C, D

U2 Salón Buhardilla
ABCD
ABC D
AB CD
A BCD

U3 ABCD

U4 Tenemos que distribuir el salón y la buhardilla entre 4 niños,

U5 De manera que el salón y la buhardilla pueden repetirse
A B C D
S S S S
S S S B
S S B B
...

U6 Además, importa el orden pues los niños son distintos.

U7 Luego la solución es VR_2^4

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos a distribuir (las iniciales de los nombres de los niños).

U2: Utiliza una nueva notación (ostensivo) y una disposición tabluar para indicar los modos de asignar los niños a las habitaciones; comienza a escribir una enumeración incompleta de casos (actuativo).

U3: Traducción del problema a otro equivalente: distribución de las habitaciones entre los niños (extensivo), que usa el esquema de selección, puesto que considera que puede haber repetición, cosa que no es posible en los esquemas de partición o de colocación.

U4: Identificación de las condiciones de las configuraciones: los elementos se pueden repetir (intensivo).

U5: Se utiliza una nueva notación (ostensivo) para expresar las configuraciones en el problema traducido y se enumeran de una forma incompleta (actuativo). Nótese como cambian ahora de disposición relativa las habitaciones y los niños.

U6: Reconocimiento de las condiciones de formación de las configuraciones: el orden de las habitaciones influye (intensivo), porque "los niños son distintos" (validativo). Traduce una condición del problema de colocación a la condición equivalente en el problema de selección.

U7: Ajuste de la operación combinatoria (intensivo) variaciones con repetición, e identificación de parámetros (intensivo).

Observamos que en las unidades U1 y U2 se ensaya un modo de solución basado en formar configuraciones de niños, que es abandonada. El enunciado se traduce a otro equivalente mucha más fácil de modelizar como variaciones con repetición. Se reconocen las condiciones de aplicación de este modelo y se aplica.

4.4.2.10. Problema 10: Reparto de objetos distinguibles en celdas distinguibles [$C_{4,2}$].

Enunciado:

María y Carmen tiene cuatro cromos numerados del 1 al 4. Deciden repartírselos entre las dos a partes iguales. ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos?. Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2 y Carmen con los cromos 3 y 4.

Transcripción de la solución:

U1 1, 2, 3, 4
U2 Hay que repartir 4 cromos diferentes entre 2 personas, dando 2 a cada una.
U3

M	C
12	34
13	24
14	23
23	14
24	13
34	12

U4 Basta considerar de cuantas formas puede coger María 2 cromos,
U5 es decir, $C_4^2 = 6$

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo).
U2: Identificación de las configuraciones y reconocimiento del reparto equitativo (intensivo),
U3: Se introduce una nueva notación (iniciales de los nombres) para indicar las personas que reciben cada pr de cromos y se enumeran las distintas configuraciones de una forma sistemática y completa (actuativo).
U4: Plantea un problema más simple equivalente al dado, refiriendose a las posibles parejas de cromos que puede coger María (extensivo) traduciendo el enunciado a otro de selección.
U5: Ajuste del modelo de las combinaciones al subproblema, identificación de parámetros (intensivo), y realización de los cálculos (actuativo).

Vemos que Luisa resuelve este problema por dos métodos: enumeración sistemática de casos introduciendo una notación adecuada para las configuraciones, y traducción a un problema equivalente en el esquema de selección, modeliándolo posteriormente mediante las combinaciones ordinarias.

4.4.2.11. Problema 11: Selección ordenada con reemplazamiento y repetición [$VR_{4,3}$].

Enunciado:

En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2 , 4 , 7 y 9. Elegimos una bola del bombo, anotamos su número y la devolvemos al bombo. Se elige una segunda bola, se anota su número y la devolvemos al bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?. Ejemplo: Se puede obtener el número 2 2 2.

Transcripción de la solución:

U1 2, 4, 7, 9
U2 Se trata de ver cuantos números de 3 cifras se pueden formar con esos 4.
U3 La solución es VR_4^3

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos que componen las configuraciones (ostensivo).
U2: Identificación de las configuraciones (intensivo) en el esquema de selección.
U3: Reconocimiento implícito de las condiciones de aplicación del modelo de las variaciones con repetición; identificación de parámetros (intensivo), y realización de los cálculos (actuativo).
U3: Reconocimiento de la operación combinatoria, identificación de parámetros (intensivo), identificación de parámetros (intensivo).

No expresa la fórmula sin realiza los cálculos; en realidad no da la solución final del problema, pero podemos inferir que Luisa conoce perfectamente cómo calcular el número pedido.

4.4.2.12. Problema 12: Colocación ordenada exhaustiva con repetición de elementos [$PR_{5;3,1,1}$].

Enunciado:

Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A , B , C , C , C. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de otra, formando una hilera?. Pueden estar colocadas de la siguiente forma: ACBCC.

Transcripción de la solución:

U1 A, B, C, C, C

U2 A,B,C,C,C
A,C,B,C,C
A,C,C,B,C
A,C,C,C,B
...

U3 La solución es $PR_5^{3,1,1} = 5! / (3!.1.1) = 20$

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos que componen las configuraciones pedidas.

U2: Inicia la enumeración de manera incompleta las distintas configuraciones (actuativo).

U3: Reconocimiento de las condiciones de aplicación del modelo de las permutaciones con repetición (intensivo); escritura de la fórmula (ostensivo); identificación de parámetros (intensivo), y realización de los cálculos (actuativo). Pensamos que ha usado el esquema de selección, aunque no lo explicita.

4.4.2.13. Problema 13: Selección ordenada sin reemplazamiento ni repetición [$V_{4,3}$].

Enunciado:

Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: Presidente, Tesorero y Secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos?. Ejemplo: Que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

Transcripción de la solución:

U1 P, T, S

U2 A, B, C, D

U3

P	T	S
A	B	C
A	C	B
B	C	A
C	B	A
B	A	C
C	A	B
A	B	D
...		

U4 Cogemos grupos de 3 elementos, en los cuales importa el orden.

U5 La solución es $V_4^3 = 4.3.2 = 24$

Conocimientos puestos en juego.

U1, U2: Introduce una notación simbólica para designar los elementos que componen las configuraciones.

U3: Enumera de una manera sistemática pero incompleta las distintas configuraciones (actuativo), usando una disposición tabular (ostensivo).

U4: Se usa el esquema de selección. Identificación de las configuraciones (intensivo); reconocimiento de que no importa el orden (intensivo),

U5: Ajuste del modelo de las variaciones ordinarias (intensivo); identificación de parámetros (intensivo), expresión de la fórmula (ostensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

4.4.3.Análisis de la entrevista de Luisa

(1) Inseguridad en la interpretación de los enunciados

A pesar de que Luisa resuelve bien todos los problemas excepto el 4, cuando se le pregunta si entendió los enunciados comienza a dudar en algunos de ellos, por ejemplo, sobre el problema 2:

- *I: ¿Entendiste el enunciado?*
- *L: Yo creía que si pero ahora...lo veo de otra manera.*
- *I: ¿En qué sentido lo ves de otra manera?*
- *L: Antes lo entendí en el sentido de que había tres cartas fijas que no influían y ahora entiendo que si influyen; yo supuse que esas tres cartas ya estaban elegidas pero no es así porque yo tengo las doce cartas y cada vez cojo cuatro y es ahí donde está la ambigüedad porque como yo considero solo los casos en que siempre están esas tres figuras ... y no sé si tendría que tener en cuenta la probabilidad de coger esas cartas.*

(2) Generalización de las soluciones

El hecho de que Luisa usa como método general para resolver los problemas el ajuste de modelos combinatorios, puesto que recuerda con seguridad las definiciones de las operaciones y las fórmulas, la generalización de los problemas le resulta fácil, ya que sólo tiene que cambiar los valores de los parámetros:

- *I: ¿Cómo harías este problema si en vez de tener doce cartas tuvieras más, digamos treinta, y en lugar de formar grupos alineando cuatro entre figuras y no figuras tuvieras que alinear más, digamos dieciocho?¿Lo harías de la misma forma?.*
- *L: Sí. Por la "cuenta la vieja" no lo puedo hacer porque serían muchos datos, pero..., lo haría igual, solo que cambiarían los números.*

(3) Efecto de los esquemas combinatorios

En las respuestas dadas por Luisa a varios problemas se pone de manifiesto la influencia del esquema operatorio implícito en los enunciados en los procesos de resolución. Luisa traduce todos los problemas al esquema de selección, en el caso de que el enunciado venga dado en uno de los otros dos esquemas. Muestra una gran habilidad en realizar esta traducción y en traducir las condiciones de uno a otro modelo.

Por ejemplo, los problemas 8 (aparcamiento de coches, esquema de colocación) y 13 (formación de comités, esquema de selección) se pueden modelizar ambos según el modelo de las variaciones ordinarias. Luisa modeliza de ese modo el problema 13 pero tiene dificultades con el problema 8, que lo resuelve bien, pero como producto de combinaciones por permutaciones, posiblemente por efecto del esquema de colocación.

- *L: ¡Es lo mismo!, se me va y queda variaciones, es lo mismo; si hay mas datos lo mismo me pilla y lo hago de esta forma, a veces yo creo que depende de los enunciados que te hacen pensar el problema de una o de otra manera pues, ya te digo, son iguales y los he razonado distinto, no se por que.*
- *I: Uno lo has hecho con variaciones y otro con combinaciones, en uno importa el orden y en el otro no importa, lo que pasa es que luego lo has arreglado con las permutaciones...*
- *L: Es que importa el orden en los dos.*
- *I: Pero entonces no puede ser uno variaciones y otro combinaciones...*
- *L: Pero al multiplicar por las permutaciones se me queda igual, es que este lo he dividido también en dos partes, lo he podido hacer de una vez como el otro pero, no se por qué, lo he dividido en dos.*

En la solución dada a los problemas 4, 9 y 11 queda bien patente el efecto del esquema combinatorio. Los tres se pueden modelizar como variaciones con repetición; pero el problema 4, está enunciado según el esquema de partición, el 9 como colocación, mientras que el 11 consiste en la selección ordenada con reemplazamiento y repetición de bolas numeradas. El 11 es resuelto de manera inmediata; prácticamente se limita a escribir la expresión $VR_{4,3}$. El problema 9 comienza con un primer intento de colocar los niños en las habitaciones, pero se da cuenta de la complicación de este modo de considerar el problema y lo interpreta como de asignación de las habitaciones a los 4 niños. Finalmente, en el problema 4 no logra traducirlo de manera similar al 9 y emprende un procedimiento excesivamente complicado que le hace fracasar. En la entrevista Luisa se extraña de que no fuera capaz de interpretar este problema de manera similar a como lo hizo con el 9, pero no llega a identificar la misma estructura en los tres problemas:

- *I: Mira a ver si se parece este problema [el 4] al número 9, cuando digo parecerse es que tengan la misma estructura.*
- *L: Se trata de colocar cuatro niños en cuatro habitaciones y alguna habitación puede quedar vacía, el problema es casi igual, no sé por qué no lo he hecho igual; vamos a ver, este dice de cuantas formas diferentes se pueden poner cuatro niños en dos habitaciones, los niños son distinguibles al igual que los coches y tengo que repartirlos en dos habitaciones, o sea, que es lo mismo que repartir cuatro coches distinguibles entre tres niños diferentes, aquí entre dos habitaciones diferentes, lo que cabe pensar es por qué este me lo planteé de una forma y el otro de otra diferente, no sé.*
- *I: ¿En que se parece nuestro problema, seguimos con el número 4, al número 11?.*
- *L: Yo este lo he entendido como cuántos números de tres cifras se pueden formar con cuatro dígitos, entonces... no le veo mucho parecido con el otro.*
- *I: Pero...¿el hecho de que en uno haya cifras y en otro coches...?*
- *L: No, no, igual que en el otro he visto que era el mismo caso, que era repartir cosas distinguibles entre cosas distinguibles, aquí no es igual pues se pueden repetir... no sé, el único parecido que le veo es que coge cosas distinguibles pero no es lo mismo porque en uno tienes que repartir entre otras cosas también distinguibles y aquí no, simplemente, eliges un grupo a partir de otro y ya está, no, no se parecen.*

4.4.4. Síntesis y conclusiones finales del caso de Luisa

(1) Elementos extensivos

Luisa resuelve correctamente 12 de los 13 problemas propuestos fracasando en el número 4 (reparto de 4 coches entre 3 personas, que viene formulado según el esquema de partición y no es capaz de traducirlo según el esquema de selección). En todos los demás problemas de colocación y partición traduce el enunciado a esquema de selección.

En varios de ellos no calcula el número pedido, pero deja indicada la expresión que permite calcularlo de manera inmediata (problemas 2, 7, 8, 9 y 11). Reconoce en los enunciados las condiciones de aplicación de los modelos combinatorios que proporcionan la solución de los problemas, bien mediante una operación simple, dos operaciones compuestas por la regla del producto (problemas 2 y 7). El problema 8 que se puede modelizar con la única operación de las variaciones $V_{5,3}$, lo resuelve como $C_{5,3}$. P_5.

En cuanto a la formulación de subproblemas, además de en los problemas compuestos 2 y 7, enuncia subproblemas en el 4 (que no logra modelizarlo como $VR_{3,4}$), y de manera innecesaria en el 8. En los problemas 5 y 10 sustituye el enunciado propuesto por otro más sencillo pero equivalente.

Vemos, por tanto, que Luisa muestra una alta capacidad en la formulación de nuevos problemas combinatorios y en la identificación de un enunciado como caso particular de aplicación de un modelo combinatorio.

(2) Elementos ostensivos

Luisa identifica bien las configuraciones combinatorias que se deben contar haciendo uso de notaciones específicas para los elementos que las componen (generalmente usa las iniciales de los nombres de los elementos), aunque en la mayor parte de las ocasiones no llega a escribir los ejemplares completos de las configuraciones. Las notaciones que introduce cumplen un mero papel de recuerdo de los datos del problema. Por ejemplo, en el problema 1 usa la notación 2A, 1B, 1R (como recordatorio de que hay 2 fichas azules, 1 blanca y 1 roja), pero no ve necesario escribir BARA como ejemplo de configuración posible.

En el problema 3 sí llega a escribir una notación para las configuraciones y las enumera mediante una disposición tabular. En el problema 4 introduce notaciones para los elementos (tanto para los objetos a distribuir, A, B, V, R, como para las casillas, F, L, T) pero no las usa para formar las configuraciones, lo que puede ser uno de los motivos por los que fracasa en la solución del problema.

Cuando escribe las configuraciones introduciendo una notación lo hace básicamente como comprobación del cálculo cuando el número de casos es pequeño (problemas 3, 5, 10). En otros casos, la representación de algunos ejemplares de configuraciones le ha servido como base para ajustar el modelo apropiado (problema 7, en el que usa el guión (-) como variable; problemas 8, 9, 12 y 13).

Luisa recuerda con seguridad las expresiones y fórmulas específicas de las distintas operaciones combinatorias (V, VR, C, P), aunque nunca escribe las fórmulas generales, sino particularizadas a los valores de los parámetros pertinentes. En ninguna ocasión usa el diagrama en árbol.

(3) Elementos actuativos

Como conocimientos de tipo actuativo u operatorio identificamos en las producciones de Luisa los siguientes:

- Descomposición de problemas en subproblemas: en los problemas compuestos 2 y 7, problema 8 (que descompone las variaciones como producto de combinaciones por permutaciones -al venir dado el problema según el esquema de colocación no logra traducirlo al modelo de selección) y el problema 4 (que descompone en 5 subproblemas, pero que no logra resolver). Como caso especial de descomposición tenemos la reducción del problema dado a otro equivalente más sencillo (problemas 5 y 10).
- Enumeración sistemática completa: Luisa procede a enumerar las configuraciones como comprobación de la solución previamente calculada (problemas 3, 5 y 10). En otros casos realiza una enumeración incompleta del conjunto de configuraciones, lo que le sirve como base para ajustar el modelo combinatorio correspondiente.
- Ejecución de las operaciones aritméticas indicadas en las fórmulas combinatorias. Luisa realiza sin error las operaciones requeridas.

(4) Elementos intensivos

Destacamos en Luisa su conocimiento seguro de las reglas y condiciones de aplicación de las distintas operaciones combinatorias (variaciones, permutaciones, combinaciones, regla de la suma y del producto), influencia o no del orden y la repetición de elementos. También tiene seguridad en la escritura de las fórmulas y el significado de los parámetros. Este dominio de las definiciones le ha llevado a preferir el ajuste de modelos combinatorios en lugar de la enumeración sistemática, la cual usa como mera comprobación.

El fallo en la solución del problema 4 se debe, en primer lugar, a no haber sido capaz de reformular el problema en términos de asignación de las personas con repetición en lugar de los coches (como es lo habitual) y la relativa complejidad de los subproblemas que formula para resolver este problema, ya que obtiene 5 problemas compuestos.

(5) Elementos validativos

En la mayoría de los problemas Luisa justifica la pertinencia del modelo combinatorio ajustado haciendo referencia a las condiciones de los enunciados. Tiene bien asumido cuándo hay que tener en cuenta el orden o la repetición de elementos y asocia estas condiciones para discriminar entre el uso de las variaciones con y sin repetición, permutaciones y combinaciones. Así, por ejemplo, en el problema 1 escribe directamente la expresión de las permutaciones con repetición, y a continuación la justifica afirmando *"Tenemos 4 fichas, de las cuales 2 son iguales. El experimento nos da distintas formas de ordenar estos elementos, pero teniendo en cuenta que el color azul se repite 2 veces"*.

En varios casos resuelve el problema por enumeración sistemática y usa esa solución para comprobar los cálculos previamente efectuados (problemas 3, 5 y 10), mientras que en otros -posiblemente por cansancio- no aporta ninguna justificación (problemas 11 y 12).

4.5. EL CASO DE JULIAN (4 problemas resueltos correctamente)

4.5.1. Conocimientos previos

En relación a los conocimientos previos sobre combinatoria Julián dice que recuerda las definiciones de las operaciones combinatorias pero ha tenido dificultades para recordar las fórmulas. Sólo está seguro de las permutaciones ordinarias a pesar de que hace poco tiempo que las ha repasado ya que ha dado clases como profesor en una academia.

Valora el tema como importante en la formación del alumno de secundaria, incluso para la vida diaria, pero da la impresión que estas respuestas resultan un tanto protocolarias al aportar argumentos poco pertinentes para el tema:

- ***I:*** *¿Te parece que la Combinatoria debe ser un tema importante de curriculum de BUP? ¿Para la formación del alumno, como preparación para otros temas, ...?.*
- ***J:*** *Sí, por supuesto que sí.*
- ***I:*** *Y en la vida diaria, ¿te parece interesante la Combinatoria?.*
- ***J:*** *Aparte de que me parezca interesantes es que, cada día, nos bombardean con datos, estadísticas, resultados, ..., claro que me parece interesante.*

La estrategia general que adopta para resolver los problemas es la de ajustar un modelo combinatorio, considerándolo como el procedimiento más económico:

- ***J:*** *Primero probaba cuantos casos salían, de la manera más rápida que yo sé, aplicando una fórmula, que para eso están ¿no?,... para ahorrarte trabajo; dependiendo de los casos intentaba hacer un diagrama, en otros casos lo he dejado indicado.*

Sólo en caso de que el número de casos fuera pequeño haría una comprobación mediante enumeración:

- ***J:*** *Si, pero utilizaba la fórmula porque si me iban a salir quinientos casos no me iba a poner a deducirlos pero si salían diez o veinticinco pues los escribía.*

Se pone de manifiesto, tanto en la resolución de los problemas como en las respuestas a las preguntas sobre el empleo de las fórmulas que Julián no dispone de otras herramientas distintas que la identificación de las condiciones de aplicación de las operaciones combinatorias, ya que si no está seguro en las fórmulas tendría que haber optado por generar otro método de solución.

4.5.4. Conocimientos puestos en juego en la resolución de los problemas.

4.5.2.1. Problema 1: Selección ordenada de objetos distinguibles e indistinguibles [$PR_{4;2,1,1}$]

Enunciado:

> En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1 Se tiene en cuenta el orden de salida asi como la naturaleza de las fichas.
U2 Se hace distinción de casos de la primera ficha para darnos cuenta que hay dos bloques iguales.
U3 A - - - = A - - -
B - - -
R - - -
U4 $V_{3,3} = 3! / (3-3)! = 3! = 6$
U5 Por tanto, el número de casos es 3 . 6 = 18

Conocimientos puestos en juego:
U1: Identificación de las configuraciones a contar, interpretándolas en el enunciado de selección, dado por el enunciado. Reconocimiento de que importa el orden (intensivo).
U2: Reconocimiento de que hay dos fichas iguales (intensivo) y por tanto hay dos bloques equivalentes de configuraciones (intensivo) si se colocan cualquiera de las azules en primera posición. Descompone el problema en subproblemas (extensivo y actuativo).
U3: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo) y hace un esquema de enumeración sistemática incompleta (actuativo). Plantea (implícitamente) el subproblema de hallar el número de elementos fijando la primera posición (resolución recursiva).
U4: Reconocimiento de la operación combinatoria (intensivo) que daría la solución al problema parcial identificación de los parámetros (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo). Generalización incorrecta porque el número de configuraciones no es igual si B o R van en primera posición, ya que si la A va en cualquiera de las otras posiciones algunas permutaciones se repiten y sólo hay 3 casos. Fallo en el reconocimiento de una clase de equivalencia.
U5: Aplicación de la regla del producto (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo). La regla del producto no es pertinente en este problema y habría que aplicar la regla de la suma, ya que la solución de los diferentes subproblemas no es idéntica. No identifica correctamente el efecto sobre la producción de configuraciones de la ficha cuyo color azul está repetido; al intercalar otra ficha A en la ordenación ABR sólo se producen nuevas configuraciones en dos posiciones ABAR, ABRA, y no en 3 como supone.

Julián no logra identificar en las condiciones del problema el modelo de las permutaciones con repetición de 4 elementos en los que 2 son repetidos.

4.5.2.2. Problema 2: Colocación ordenada de objetos distinguibles con condiciones dadas [P_4 x V_9]

Enunciado:

> Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras? Ejemplo: sota caballo rey 1.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1 12 cartas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sota, caballo, rey

U2 Casos: sota --- nº casos = $C_{11,3}$ = 11!/ (11-3)!3 = (9.10.11)/3 = 330

Caballo --- nº casos = " ..... = 330

rey --- nº casos = " .... = 330

990

U3 $C_{m,\,n}$ = n! / (m-n)!n

U4 "He tenido en cuenta que una alineación de cartas no tiene en cuenta el orden de las mismas"

Conocimientos puestos en juego:
U1: Representación ostensiva del conjunto de los 12 objetos (cartas) mencionados en el enunciado. Sirve para fijar la atención en las condiciones de la tarea.
U2:
- Descompone el problema en tres casos, interpretando el enunciado como si pidiera contar el número de maneras diferentes en que se puede elegir cuatro cartas si una de ella es una de las figuras (sota, caballo, rey). Confusión de los términos "siempre estén las tres figuras" y "una de las figuras al menos esté".
- Ajusta el modelo combinatorio de las combinaciones de 11 elementos tomados de 3 en 3 para resolver el problema parcial planteado
- Escribe la fórmula de las combinaciones (incorrectamente) particularizada con los valores del

problema y realiza los cálculos correspondientes en cada caso; suma los resultados.
- Otro error es no tener en cuenta que con este procedimiento repite las configuraciones en que dos o tres de las figuras estén incluídas en la selección.
U3:
- Escribe (incorrectamente) la fórmula general de las combinaciones ordinarias.

Vemos que Julian descompone el problema en tres subproblemas y trata de ajustar un modelo combinatorio para resolverlos. Pero no identifica correctamente la configuración combinatoria. Fija una figura y supone que las otras tres pueden elegirse entre las 11 restantes; de ese modo no se respetan las condiciones de que estén seleccionada las tres figuras en cada configuración. Tampoco reconoce que el orden de colocación de las 4 cartas sí influye en la obtención de configuraciones, por lo que el modelo que se debe ajustar serían las variaciones y no las combinaciones. Escribe incorrectamente la fórmula de las combinaciones.

4.5.2.3. Problema 3: Colocación de objetos iguales en celdas distintas [$C_{4,3}$]

Enunciado:

> Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: Amarillo, Blanco, Crema y Dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes?. Ejemplo: Podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

Transcripción de la solución (correcta):

U1 $C_{n,m} = n! / ((n-m)!.m!) = C_{4,3} = 4! / 1!.3! = 4$

Conocimientos puestos en juego:
U1: Reconocimiento de la operación combinatoria (intensivo), identificación de los parámetros (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

En este caso carecemos de información suficiente sobre el razonamiento realizado para identificar correctamente la configuración y la operación combinatoria que resuelve correctamente el problema. Escribe correctamente la fórmula de las combinaciones ordinarias con parámetros variables y es capaz de asignar los valores correctos a dichos parámetros.

Podemos inferir que el alumno ha traducido el problema a otro de selección y el contexto del problema permite reconocer fácilmente que el orden no influye (cartas iguales) y que no hay repetición ya que en cada sobre sólo se introduce una carta. De ello ha reconocido la operación combinatoria que da la solución al problema.

4.5.2.4. Problema 4: Partición de un conjunto de objetos distintos en partes distintas [$VR_{3,4}$]

Enunciado:

> Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1 A, B, V, R Fer., Luis, Ter.
U2 Cuenta el orden y la naturaleza de los elementos (el orden va a ser necesario para tener en cuenta cual coche se lleva cada hermano, es decir, es distinto que le toque a un hermano el coche verde que el azul) y, por tanto:
U3 $V_{4,3} = 4! /(4-3)! = 4! / 1! = 24$ maneras posibles.

Conocimientos puestos en juego:
U1: Introduce una doble notación simbólica para designar los distintos elementos del problema (ostensivo).
U2: Intenta traducir al esquema de selección, donde conoce la definición de las operaciones combinatorias. Traduce la condición de ser coches distintos por tener en cuenta el orden (intensivo).
U3: Reconocimiento incorrecto de la operación combinatoria (intensivo), ya que no identifica la posibilidad de repetición. Identificación incorrecta de los parámetros, puesto que al traducir

del esquema de partición al de selección los parámetros se intercambian entre si (intensivo). El alumno no los ha intercambiado. Realización de los cálculos (actuativo).

La solución del problema requiere reconocer que se trata de elegir, con repetición 4 personas entre un conjunto de 3 ($VR_{3,4}$), no modos de elegir sin repetición 3 objetos entre 4, como ha supuesto erróneamente Julián.

4.5.2.5. Problema 5: Partición de un conjunto de objetos diferentes en dos subconjuntos distintos [$C_{4,2}$].

Enunciado:
Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos?. Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

Transcripción de la solución (correcta):

U1 $V_{4,2}$ = 4! / (4-2)!.2 = 6 formas distintas.
U2 He tenido en cuenta que es distinto el caso A-B Matemáticas C-D Lengua y el caso C-D Matemáticas y A-B Lengua.
U3 Mat. Leng.
AB CD
AC BD
AD BC
BC AD
BD AC
CD AB

Conocimientos puestos en juego:
U1: Reconocimiento de la operación combinatoria (intensivo), identificación de los parámetros (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo). Escribe incorrectamente V (variaciones), en lugar de C (combinaciones), que es realmente el modelo que ajusta. No justifica que la solución del problema viene dada por las formas de asignar los dos chicos a uno de los trabajos, ya que los otros dos realizarán el otro. La fórmula dada para la operación combinatoria elegida es también incorrecta.
U2: Reconocimiento de que las tareas son distinguibles (intensivo), pero no justifica que el orden de asignación de los trabajos dentro de cada subgrupo no influye en la obtención de formas diferentes de hacer las tareas. Usa el esquema de colocación dado por el enunciado.
U3: Cambia de estrategia. Introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo) y enumera de una manera completa y sistemática las distintas configuraciones (actuativo) obteniendo la solución.

4.5.2.6. Problema 6: Selección de muestras no ordenadas [$C_{5,3}$].
Enunciado:
Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos?. Ejemplo: Elisa, Fernando, María.

Transcripción de la solución (incorrecta):
U1 E, F, G, J, M
U2 No entra en juego el orden (da igual E-F-M que M-F-E
U3 $C_{5,3}$ = 5! /((5-3)!.3!) = 20 maneras distintas.

Conocimientos puestos en juego:
U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos dados (ostensivo).
U2: Reconocimiento de que no importa el orden (intensivo).
U3: Reconocimiento de la operación combinatoria (intensivo), identificación de los parámetros (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

Plantea correctamente la solución del problema según el modelo de las combinaciones ordinarias e incluso identifica correctamente los valores de los parámetros; pero comete un error en los cálculos aritméticos. Justifica la elección de las combinaciones aduciendo que el orden de los elementos en cada subconjunto de 3 no influye.

4.5.2.7. Problema 7: Colocación ordenada, con repetición y condiciones [$VR_{4,3}$ x $C_{5,2}$].

Enunciado:

¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos?. Ejemplo: 8 8 1 2 4.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1 88 - -
8 – 8 -
8 - - 8
- 88 -
- 8 - 8
- - 88
U2 Son las formas de combinar dos ochos en cuatro celdas, es decir, 6.
U3 Vemos cuantos posibles números hay en cada forma tomando los dígitos 1, 2, 4 y 6,
U4 Teniendo en cuenta el orden
U5 y la repetición
U6 $VR_{4,2} = 4^2 = 16$
U7 Por tanto, el número de números que se pueden formar es 4 . 16 = 64

Conocimientos puestos en juego:

U1, U2: Descompone el problema en subproblemas (colocación de dos 8); interpreta el enunciado erróneamente y trata de hallar números de 4 cifras. Aunque usa la palabra 'combinar' no aplica el modelo de las combinaciones a este subproblema.
- Introduce una doble notación simbólica para designar los elementos del problema (ostensivo) y hace una enumeración sistemática y completa de las distintas maneras de colocar los dos ochos (actuativo) para el problema planteado. Pero no tenemos constancia de que fuera capaz de resolver el problema original con 5 cifras.
U3: Considera la configuración consistente en colocar dos de entre los cuatro dígitos diferentes de ocho (intensivo); de nuevo no reconoce que debe elegir 3 números entre 4.
U4: Reconocimiento de que importa el orden en los dígitos distintos de ocho (intensivo).
U5: Reconocimiento de que los dígitos distintos del ocho se pueden repetir (intensivo).
U6: Reconocimiento de la operación combinatoria (intensivo), identificación de los parámetros (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).
U7: Aplicación de la regla del producto (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo). No reconoce correctamente uno de los factores, $C_{5,2}$, modos de colocar los dos 8 entre las 5 posiciones.

En síntesis observamos que Julian descompone correctamente el problema en subproblemas (elección de los números distintos de 8 y colocación de los dos 8 en las posiciones). Pero un error en la lectura del enunciado le lleva a considerar números de 4 cifras y no de 5, por lo que la solución de cada subproblema es incorrecta. Identifica bien las operaciones combinatorias que resuelven los dos subproblemas y reconoce la regla del producto, pero asigna erróneamente el valor de uno de los factores.

4.5.2.8. Problema 8: Colocación de objetos distinguibles en casillas distintas [$V_{5,3}$].

Enunciado:

El garage de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay tres coches; los de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada dia el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1 2 3 4 5

¿De cuántas formas pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?. Ejemplo: Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1 1, 2, 3, 4, 5
Coche Angel = A, Coche Beatriz = B, Coche Carmen = C

U2 Hay que tener en cuenta que los coches son diferentes
Asi como el lugar donde aparcan el coche.

U3 $V_{5,3} = 5! / ((5-3)!.3) = 5! / (2!.3) = 20$ maneras distintas.

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una doble notación simbólica para designar los elementos del problema (ostensivo).

U2: Reconocimiento de que los coches son diferentes y que las cocheras son diferentes, de lo que se infiere que el orden influye (intensivo).

U3: Reconocimiento de la operación combinatoria (intensivo), identificación de los parámetros (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo). Escribe incorrectamente la fórmula de las variaciones, por lo que la solución dada es errónea.

No se realiza traducción del enunciado. De manera poco clara justifica que el orden de colocación de los coches (al ser diferentes) en las cocheras influye en obtener formas distintas de colocaión, lo que llevaría a modelizar el problema como de "variaciones". El supuesto implícito de que en cada cochera cabe sólo un coche indicaría que las variaciones son sin repetición. Pero Julián no tiene seguridad en la expresión de cálculo de las variaciones ordinarias, por lo que la solución que da es errónea.

4.5.2.9. Problema 9: Colocar objetos distintos en celdas dstintas (más de un objeto por celda) [$VR_{2,4}$].

Enunciado:

Cuatro niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana) van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar a los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuerla colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla

Transcripción de la solución: (incorrecta):

U1 A, B, C, D Salón, Buhardilla

U2 Puede colocarlos:

a) Todos en el salón, 1 manera.
b) Todos en la buhardilla, 1 manera.
c) o puede distribuirlos entre el salón y la buhardilla
$C_{4,2} = 4! / 2! = 12$ maneras distintas de distribuir a los niños entre el salón y la buhardilla.

U3 Por tanto, hay 1 + 1+ 12 = 14 maneras distintas.

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para los cuatro niños (ostensivo).

U2: Hace referencia al esquema de colocación. Descompone en subproblemas (extensivo), reconoce la operación combinatoria (intensivo) y realiza los cálculos. La descomposición es incompleta, ya que no contempla los casos en que se pongan 3 niños en una habitación, y 1 en la otra. El caso de equipartición se modeliza correctamente según las combinaciones, pero la fórmula de cálculo es incorrecta.

U3: Aplicación de la regla de la suma (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

En síntesis observamos que Julián no consigue reconocer las condiciones de aplicación del modelo de las variaciones con repetición, que resuelve de manera fácil este problema. Inicia un proceso de descomposición del problema en subproblemas y logra solucionar los casos por enumeración simple en dos casos (1 modo) y tratando de ajusta el modelo de combinaciones en otro. Pero la descomposición en casos es incompleta y la fórmula de cálculo de las combinaciones es incorrecta.

4.5.2.10. Problema 10: Reparto de objetos distinguibles en celdas distinguibles [$C_{4,2}$].
Enunciado:

María y Carmen tiene cuatro cromos numerados del 1 al 4. Deciden repartírselos entre las dos a partes iguales. ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos?. Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2 y Carmen con los cromos 3 y 4.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1 1, 2, 3, 4 M, C
U2 No se tiene en cuenta el orden de los cromos, es decir, es igual que Carmen tenga el 1 y el 2 que el 2 y el 1.
U3 $C_{4,2} = 4! / 2! = 12$

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una doble notación simbólica para designar los distintos elementos del problema (ostensivo).
U2: Reconocimiento de que no importa el orden en lo que se refiere a los cromos (intensivo).
U3: Reconocimiento de la operación combinatoria (intensivo), identificación de los parámetros (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

Supone, sin justificar, que resolver el problema equivale a determinar los modos de asignar dos cromos a una de las chicas, ya que los otros dos se asignarían a la otra. Esto equivale a reducir el problema a uno más sencillo que modeliza según las $C_{4,2}$, ya que el orden no influye. Pero escribe incorrectamente la expresión de las combinaciones, por lo que la solución es incorrecta.

4.5.2.11. Problema 11: Selección ordenada con reemplazamiento y repetición [$VR_{4,3}$].
Enunciado:

En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2 , 4 , 7 y 9. Elegimos una bola del bombo, anotamos su número y la devolvemos al bombo. Se elige una segunda bola, se anota su número y la devolvemos al bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?. Ejemplo: Se puede obtener el número 2 2 2.

Transcripción de la solución (correcta):

U1 2, 4, 7, 9
U2 Orden
U3 Repetición
U4 $VR_{4,3} = 4^3 = 64$

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo).
U2: Reconocimiento de que importa el orden (intensivo).
U3: Reconocimiento de que hay repetición (intensivo).
U4: Reconocimiento de la operación combinatoria (intensivo), identificación de los parámetros (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

El esquema de selección dado en el enunciado y la naturaleza de los elementos que componen las configuraciones (números) lleva a reconocer de manera inmediata que el orden afecta y que los números se pueden repetir. Las dos palabras claves (orden y repetición) llevan a escribir la expresión $VR_{4,3}$. En este caso Julián identifica correctamente el modelo combinatorio, recuerda la fórmula y la aplica con éxito.

4.5.2.12. Problema 12: Colocación ordenada exhaustiva con repetición de elementos [$PR_{5;3,1,1}$].
Enunciado:

Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A , B , C , C , C. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de otra, formando una hilera?. Pueden estar colocadas de la siguiente forma: ACBCC.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1 1ª De cuantas formas diferentes se pueden colocar dos cartas con las letras C,C:
CC- - -

U2 C – C - -
C - - C -
C - - - C
- CC - -
- C – C -
- C - - C
- - CC -
- - C – C
- - - CC

U3 2º En cada caso anterior, cuántas formas hay de distribuir las cartas restantes (A, B, C).

U4 Orden

U5 Sin repetición

U6 $V_{3,3} = 3! / 0! = 6$

U7 3º Número total de casos: 10 . 6 = 60

Conocimientos puestos en juego:

U1: Usa el esquema de colocación del enunciado. Define dos subproblemas (extensivo), e introduce una notación simbólica para designar los elementos (ostensivo).

U2: Enumera de una manera sistemática y completa los modos de colocar dos cartas de las marcadas con una C (actuativo). Debiera haber usado tres cartas con la letra C.

U3: Plantea la configuración consistente en completar cada una de las formas anteriores con tres cartas distintas (intensivo). No reconoce que la letra C, al ser igual a las otras dos ya colocadas, no añade nuevas formas.

U4: Reconocimiento de que importa el orden en las cartas con marcas diferentes (intensivo).

U5: Reconocimiento de que no hay repetición en las cartas con marcas diferentes (intensivo).

U6: Reconocimiento de la operación combinatoria (intensivo), identificación de los parámetros (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo). La operación correcta es P_2, o $V_{2,2}$.

U7: Aplicación de la regla del producto (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

En síntesis, observamos que Julián no ha reconocido las condiciones de aplicación de las permutaciones con repetición y, en consecuencia, ha procedido a descomponer el problema en dos subproblemas que compone según la regla del producto. El primer subproblema lo resuelve por enumeración sistemática, usando una notación tabular; pero en la solución del segundo problema no se reconoce que la tercera letra C no añade nuevas formas de colocación, al ser igual que las dos anteriormente colocados. Sólo las permutaciones de las letras A y B producirán nuevas formas que habría que componer con las 10 formas anteriores.

4.5.2.13. Problema 13: Selección ordenada sin reemplazamiento ni repetición [$V_{4,3}$].

Enunciado:

Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: Presidente, Tesorero y Secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos?. Ejemplo: Que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

Transcripción de la solución (correcta):

U1 P, T, S A, B, C, D

U2 Orden

U3 No se repiten

U4 $V_{4,3} = 4! / (4-3)! = 24$ maneras distintas.

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una doble notación simbólica para designar los elementos (ostensivo).

U2: Reconocimiento de que importa el orden (intensivo).
U3: Reconocimiento de que los elementos no se pueden repetir (intensivo).
U4: Reconocimiento de la operación combinatoria (intensivo), identificación de los parámetros (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

En este problema Julián reconoce con seguridad las condiciones de aplicación del modelo de las variaciones ordinarias. No tenemos constancia si traduce o no el enunciado: el orden influye (se trata de personas que desempeñarán cargos distintos) y no procede repetir (ya que los cargos se suponen que deben ser desempeñados por personas distintas). Aquí ha recordado bien la fórmula, asigna correctamente los valores a los parámetros y realiza sin error los cálculos aritméticos.

4.5.3. Análisis de la entrevista de Julián

(1) Dificultades en identificar las configuraciones

En las preguntas aclaratorias de los procesos de solución de problemas particulares hemos podido apreciar que Julían ha tenido dificultades en identificar el tipo de configuración que se debe contar, a pesar del ejemplo que se le proporciona en cada caso. Así en el problema 2 los cálculos que hace se basan en suponer que sólo debe aparecer una figura y que el cambio de orden (alineación) de los objetos no produce nuevas configuraciones:

- ***J:*** *Es que yo no lo entendí así, yo lo entendí como que tenía que haber alguna figura y, claro, me salían 990 alineaciones posibles.*
- ***I:****¿Las tres figuras pueden ir colocadas en distintos sitio?*
- ***J:*** *Eso no lo especifica el problema.*

Es cierto que una de las claves del problema está en interpretar la palabra 'alinear' como significando que un cambio de orden en la disposición (alineación) de las fichas produce nuevas configuraciones. Julián no ha interpretado de este modo el enunciado:

- ***I:*** *¿Hay datos superfluos en el enunciado?.*
- ***J:*** *Por ejemplo, si debemos tener en cuenta el orden o no es un dato que no viene especificado.*

En el problema 4 no logra identificar como configuración los distintos modos de seleccionar, con repetición, 4 personas entre un conjunto de 3, que da como solución $VR_{3,4}$. Su manera de ver las configuraciones se centra en la asignación de los coches; como consecuencia de que los coches son diferentes piensa que el orden influye, pero es claro que no se pueden repetir. Dado que los 4 coches se asignan a las personas las configuraciones no consisten en muestras de 3 objetos tomados de entre 4, que es lo que Julián calcula. Podemos resaltar que el problema 11 (selección de 3 bolas numeradas entre un conjunto de 4) sí lo resuelve correctamente (VR), pero no reconoce la misma estructura de este problema con el número 4:

- **I:***¿Se parece al problema número 11?.*
- ***J:*** *No, no se le parece.*

(2) Errores en la lectura del enunciado

Comete un error de lectura del enunciado del problema 7 que tiene consecuencias fatales: considera que los números a formar son de cuatro cifras en lugar de 5.

- ***I:*** *¿Qué pide el problema?.*
- ***J:*** *Las posibles ordenaciones de cinco dígitos en números de cuatro cifras y que el ocho intervenga dos veces.*

...

- ***J:*** *No, aquí lo que hice es que, como tengo dos ochos, voy a ver de cuantas formas puedo colocar los ochos en un número de cuatro cifras porque hay que contar el orden pues los números son diferentes si se colocan los dígitos de manera diferente y, luego, ver como puedo colocar tres de los dígitos que me quedan en los tres huecos que dejan los ochos.*

(3) Inseguridad en el reconocimiento de las condiciones de realización del esquema combinatorio.

En el problema 7 lo descompone bien en dos subproblemas: formas de colocar los dos 8 (que resuelve incorrectamente por enumeración) y formas de intercalar los restantes números, que modeliza como $VR_{4,2}$, en lugar de $VR_{4,3}$. Pero a pesar de que usa VR, se muestra inseguro en la pertinencia de la repetición:

- ***I:*** *La idea pienso que si está bien, has visto las posibilidades de colocar los ochos y luego has visto cuantas formas de rellenar los huecos y has dicho tantas posibilidades con el ocho y tantas posibilidades de rellenar los huecos pues multiplico el uno por el otro y...*
- ***J:*** *Si, ese era el planteamiento pero lo que pasa es que me he equivocado, variaciones con repetición ¿por qué?, ¿quién se repite? solamente tengo cuatro elementos y son diferentes.*

4.5.4. Síntesis y conclusiones finales del caso de Julián

El estudio pormenorizado que hemos realizado de las respuestas dadas por Julián a los 13 problemas del cuestionario nos ha permitido identificar los conocimientos que ha puesto en juego. Su confrontación con el análisis a priori de los procesos de solución realizado en la sección 2.5 nos permite clasificarlo en relación al sujeto epistémico 1, (modelizador), y también identificar los "*desconocimientos*" que han impedido resolver correctamente 9 de los 13 problemas propuestos. Presentamos, a continuación, lo que podemos describir como el significado sistémico y personal de la combinatoria elemental para Julián, clasificando los componentes de este significado en los cinco tipos que propone el modelo epistemológico que hemos adoptado para interpretar los resultados de nuestra investigación.

(1) Elementos extensivos

Julián afronta la solución de los problemas tratando de ajustar un modelo combinatorio a los enunciados, teniendo éxito en sólo 4 de ellos:

- problema 3: combinaciones ordinarias de 4 objetos (cartas iguales) tomados de 3 en 3 (colocación en 3 sobres distintos);
- problema 5: combinaciones de 4 objetos (personas, distintas) tomados de 2 en 2 (partición en dos grupos distinguibles);
- problema 11: variaciones con repetición de 4 objetos (bolas numeradas) tomados de 3 en 3 (selección de números de 3 dígitos);
- problema 13: variaciones ordinarias de 4 elementos (selección personas distintas) tomados de 3 en 3 (formación de un comité).

En el problema 6 (selección de muestras no ordenadas, $C_{5,3}$) Julián reconoce las condiciones de aplicación de las combinaciones y asigna correctamente los valores a los parámetros, pero comete un error en los cálculos aritméticos. En el problema 10 identifica correctamente la operación combinatoria, pero desarrolla incorrectamente la fórmula.

Hacemos notar que identifica con éxito la operación combinatoria en todos los problemas en esquema de selección, excepto el 1 correspondiente a permutaciones con repetición. También identifica con éxito la operación combinatoria en los problemas 3 y 5 donde el número de configuraciones a formar es pequeño (en el problema 5 se ayuda de la enumeración). El éxito en la modelización de estos problemas se apoya esencialmente en la busqueda de términos claves como "influye o no el orden", "se repiten o no los elementos", que sirven para discriminar entre las variaciones y las combinaciones precisamente en el esquema de selección. Traduce los problemas 8 (de colocación) y 4 y 10 (partición) a selección. La traducción del 4 es incorrecta y obtiene un problema no equivalente.

El planteamiento de subproblemas y problemas relacionados se pone en juego sin éxito en los problemas siguientes:

- problema 1: generaliza incorrectamente;
- problema 2: interpretación incorrecta del enunciado y no descomposición no excluyente de los subconjuntos de comfiguraciones;

- problema 7: el problema que resuelve tiene un tamaño menor de los parámetros;
- problema 9: no considera todas las posibles particiones; no tiene en cuenta que los conjuntos de la partición son distinguibles.

(2) Elementos ostensivos

Utiliza en casi todos los problemas una notación simbólica para representar los elementos que componen las configuraciones, pero en pocos casos llega a usar esas notaciones para escribir efectivamente las configuraciones que se deben contar. Prefiere en algunos casos marcar con guiones (-) las posiciones en las cuales colocaría los elementos. El hecho de no explotar de un modo efectivo las notaciones para representar las configuraciones le impide identificar el modelo adecuado o poner en juego la enumeración sistemática. Sólo en un problema (nº 5) llega a representar y enumerar de forma tabular todas las combinaciones, aunque aquí esta enumeración la usa como comprobación del calculo hecho previamente.

En cuanto a la expresión de las fórmulas recuerda, aunque a veces con inseguridad, las correspondientes a combinaciones y variaciones. En ambos casos comete errores, bien en la escritura o en el cálculo. En los casos en que ha identificado correctamente la operación y ha escrito la fórmula, no ha tenido dificultad en identificar el valor de los parámetros correspondientes.

(3) Elementos actuativos

Ya hemos indicado antes en qué problemas procede Julián a descomponer el problema en subproblemas y cómo esta estrategia ha resultado improductiva debido al carácter incompleto de los casos, o a no identificar correctamente los sumandos o factores correspondientes.

La enumeración sistemática de las configuraciones se usa raramente. En el problema 5, como una comprobación del cálculo, y en el problema 7 dentro de un subproblema.

En cuanto a la realización de operaciones aritméticas hemos encontrado un error en el problema 6 (desarrollo de factoriales).

(4) Elementos intensivos

En los problemas que resuelve bien se pone en juego la identificación de las condiciones de realización del esquema operatorio formador de las configuraciones (influencia del orden, repetición de elementos). Pero observamos el efecto negativo de distintas variables de las tareas para el logro de esta identificación (naturaleza de los objetos, esquema operatorio).

Recuerda con cierta seguridad el concepto de variación (al que asocia “influye el orden”) y combinación (no influye el orden); pero en ningún caso pone en juego el concepto de permutación. Las reglas de la suma y del producto se pone en juego en los problemas 2 y 9 (suma) y 1 y 7 (producto).

(5) Elementos validativos

En general Julián no aporta justificaciones de las afirmaciones que hace; en algún caso se limita a escribir la fórmula que considera da la solución (problema 3), y a lo sumo “justifica” tal elección afirmando que el orden y la repetición influye o no. Pero la validación de que tales características del proceso de formación de las configuraciones son pertinentes sólo se argumentó en el problema 4.

4.6. EL CASO DE PEDRO (5 problemas resueltos correctamente)

4.6.1. Conocimientos previos

Este alumno hizo una prueba deficiente y es consciente de ello en el momento de la entrevista. Muestra una actitud negativa hacia el contenido de la combinatoria hasta el punto de considerarla un tanto fuera de lo que (para él) son las matemáticas:

- **P:** Exactamente, porque me gustan más. Este tema no es que no me guste sino que lo veo un poco fuera de lo que son las Matemáticas, ¿sabes?, esto es hacer numeritos y cuentas y para allá y para acá.

Estudió el tema de combinatoria en primer curso de bachillerato y también en tercer curso de la licenciatura en la asignatura de Probabilidad y Estadística. A pesar de ello tiene inseguridad en las definiciones de las operaciones combinatorias y dice no recordar ninguna fórmula. En consecuencia se ve forzado a seguir la estrategia general de generar un modelo combinatorio enumerando, al menos parcialmente, el conjunto de configuraciones.

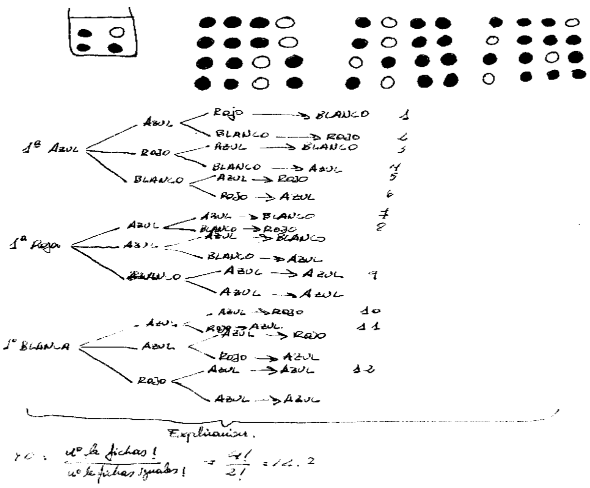
4.6.2. Conocimientos puestos en juego en la resolución de los problemas.

4.6.2.1. Problema 1: Selección ordenada de objetos distinguibles e indistinguibles [$PR_{4;2,1,1}$]

Enunciado:

> En una caja hay cuatro fichas de colores: dos azules, una blanca y una roja. Se toma una ficha al azar y se anota su color. Sin volver la ficha a la caja, se toma una segunda ficha y se anota su color. Se continúa de esta forma hasta que se han seleccionado, una detrás de otra, las cuatro fichas. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer la selección de las fichas? Ejemplo: Se pueden seleccionar en el siguiente orden, Blanca, Azul, Roja y Azul.

Transcripción de la solución (correcta):



Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar las configuraciones y la enumera de forma sistemática y completa (ostensivo y actuativo)

U2: Comprobación mediante un diagrama de árbol correctamente construido de todos los casos posibles (ostensivo, actuativo, validativo).

U3: Generación de un modelo combinatorio de permutaciones con repetición (regla del cociente) (intensivo); escritura de una expresión (ostensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

Vemos que Pedro resuelve este primer problema por tres métodos: dos enumeraciones sistemáticas y completas, apoyadas por una disposición tabular y un diagrama en árbol, y también mediante la aplicación de la regla del cociente (permutaciones con repetición, aunque sin mencionar esa operación de manera explícita). Nótese el uso de la recursión en la construcción del diagrama en árbol y la enumeración sistemática.

4.6.2.2. Problema 2: Colocación ordenada de objetos distinguibles con condiciones dadas [P_4 x V_9]

Enunciado:

> Un niño tiene doce cartas: 9 de ellas son los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las

doce cartas con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras? Ejemplo: sota caballo rey 1.

Transcripción de la solución (correcta):

U1	SCR1	SC1R	S1CR	1SCR
	SCR2	SC2R	S2CR	2SCR
	SCR3	SC3R	S3CR	3SCR
	SCR4	...	...	...
	SCR5	...	...	...
	SCR6			
	SCR7			
	SCR8			
	SCR9			

______________ v _____________/

U2	nSCR	SnCR	SRnC	SCRn
	nSRC	SnRC	RSnC	SRCn
	nCSR	CnSR	CRnS	RCSn
	nCRS	CnRS	RCnS	RSCn
	nRCS	RnSC	CSnR	CRSn
	nRSC	RnCS	SCnR	CSRn
	------	------	------	------
U3	54 +	54 +	54 +	54 = 216

Conocimientos puestos en juego:

U1:

- Introduce las letras S, C, R que representan las palabras ‘sota’, ‘caballo’, ‘rey’ (ostensivos)
- Cada combinación de 4 caracteres de la forma SCR1, ..., representa una configuración combinatoria (ostensivo)
- El texto U1 en su conjunto representa el proceso de formación de todas las configuraciones combinatorias posibles (intensivo); es también un procedimiento sistemático tabular (actuativo) de escribir todas las configuraciones. La enumeración es parcial y sistemática, hay una generalización correcta implícita.

U2:

- Cada grupo de 4 caracteres de la forma SCRn, SCnR, SnCR, nSCR, ..., (ostensivos) representa a un conjunto de 9 configuraciones indicadas en las columnas de U1 (ostensivos).
- En cada columna se forman ordenadamente (actuativo) las permutaciones (intensivo) de las letras SCR en forma sistemática.
- En cada fila se cambia ordenadamente (actuativo) la posición del número n entre las letras SCR.
- El conjunto de grupos de 4 caracteres, dispuestos tabularmente (ostensivo), representa al conjunto de todas las configuraciones posibles (intensivo). Se hace uso de la recursión, así como de la división del problema en partes: hallar todas las permutaciones de SCRn y luego fijada una de ellas ver cuantas posibilidades hay en función del valor de n.

U3:

- Cada número 54 es el resultado de multiplicar (actuativo) 6 (número de filas) por 9 (número de valores distintos que puede tomar n); se identifica la regla del producto (intensivo) y los valores de los factores.
- Se identifica la regla de la suma (intensivo) y se realiza el cálculo correspondiente (actuativo). El número 216 se interpreta como la solución del problema (número de maneras en que se pueden alinear las cuatro cartas en las condiciones impuestas por el enunciado).

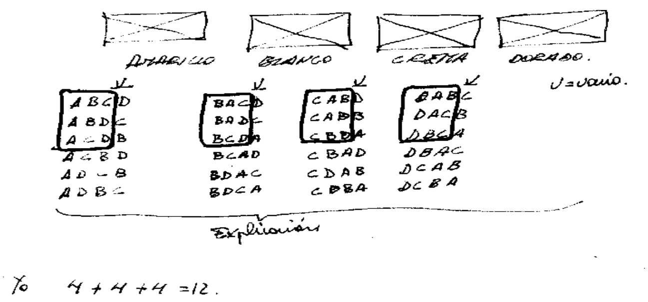
Como síntesis observamos que Jaime usa notación simbólica para representar las configuraciones, no ajusta un modelo combinatorio, sino que lo genera mediante una estrategia de enumeración sistemática, recursión, descomposición del problema en partes, fijación de variables y la aplicación de la regla de la suma y del producto.

4.6.2.3. Problema 3: Colocación de objetos iguales en celdas distintas [$C_{4,3}$]

Enunciado:

> Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: Amarillo, Blanco, Crema y Dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: Podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

Transcripción de la solución (incorrecta):



Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce notaciones simbólicas para representar las configuraciones, formadas por las iniciales de los colores de los sobres.

U2: Enumeración sistemática pero incorrecta de las distintas configuraciones (actuativo). No tiene en cuenta que las cartas son indistinguibles por lo que no reconoce como iguales varias de las configuraciones formadas.

No logra identificar correctamente las configuraciones pedidas por lo que aunque forma el conjunto de las variaciones $V_{4,4}$, no reduce todos los casos repetidos como consecuencia de que el orden de colocación de las cartas en los sobres no influye en la producción de configuraciones. Contrasta el fallo en la solución de este problema, a pesar del número tan reducido de casos (4), con la solución correcta del problema 2 para el que logra construir un procedimiento de formación de las 216 configuraciones.

4.6.2.4. Problema 4: Partición de un conjunto de objetos distintos en partes distintas [$VR_{3,4}$]

Enunciado:

Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (Azul, Blanco, Verde y Rojo) y decide repartírselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede repartir los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1	400	040	004
	301	130	013
	310	031	103
	220	022	
	202	121	
	211	112	

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación para indicar el número de coches que pueden recibir las personas, pero no tiene en cuenta quien recibe dichas cantidades.

No logra identificar las configuraciones que se deben contar. Aunque no lo especifica, parece usar el esquema de partición implícito en el enunciado, puesto que en la notación se usan grupos de tres dígitos para representar el número de coches que recibe cada hermano.

Ha producido correctamente todas las descomposiciones ordenadas del número 4 en tres sumandos. El problema es que considera tanto los objetos como los conjuntos de la partición como indistinguibles, siendo distinguibles.

4.6.2.5. Problema 5: Partición de un conjunto de objetos diferentes en dos subconjuntos distintos [$C_{4,2}$].

Enunciado:

Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lengua. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos?. Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1 A-----B B------C C-------D
C D
D

U2 AB, AC, AD, BC, BD, CD

U3 De 6 formas pueden hacer las parejas y,

U4 Como hay dos trabajos, son 12 formas.

Conocimientos puestos en juego:

U1, U2 , U3: Introduce una notación simbólica para designar los elementos e intenta enumerar enumera (mediante trozos de diagramas de árbol) las posibles parejas de una manera sistemática y completa (ostensivo, actuativo).

U4: Aplicación innecesaria de la regla de la suma (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

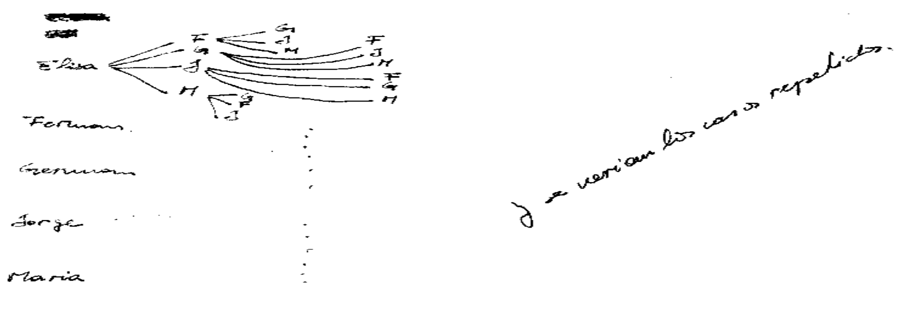
No se percata de que una vez asignadas dos personas a un trabajo las otras dos quedan asignadas al otro. Las configuraciones que se deben contar son los grupos de 4 sujetos, no de 2.

4.6.2.6. Problema 6: Selección de muestras no ordenadas [$C_{5,3}$].

Enunciado:

Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos?. Ejemplo: Elisa, Fernando, María.

Transcripción de la solución (incorrecta):



Conocimientos puestos en juego:

U1: Usando notación simbólica para los elementos realiza un diagrama en árbol incompleto para obtener las distintas configuraciones. En realidad forma las $V_{5,3}$ (60) y deja sin resolver el problema al no identificar los casos repetidos que serían P_3 = 6, ni identifica la regla del cociente.

4.6.2.7. Problema 7: Colocación ordenada, con repetición y condiciones [$VR_{4,3}$ x $C_{5,2}$].

Enunciado:

¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse utilizando los dígitos 1, 2, 4, 6 y 8, si cada uno de ellos debe contener exactamente dos ochos?. Ejemplo: 8 8 1 2 4.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1 111
112
113
121
122
123
131
132
133
U2 que por 3 son 27.
U3 88 - - - x 27
8 - 8 - - x 27
8 - - 8 - x 27
8 - - -8 x 27
- 88 - - x 27
- 8 - 8 - x 27
- 8 - - 8 x 27
- - 88 - x 27
- - 8 - 8 x 27
- - - 88 x 27
U4 Y por tanto 10 . 27 = 270

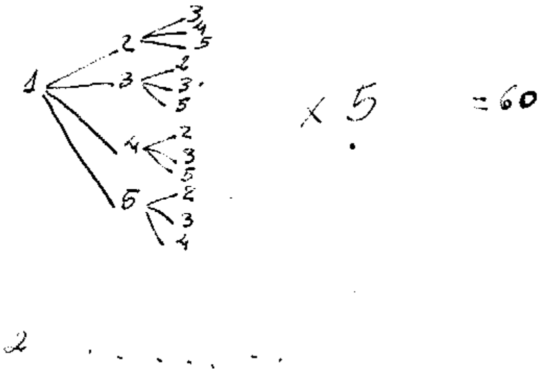
Conocimientos puestos en juego:
U1: Fija una variable. Enumeración sistemática y completa de todos los números de tres cifras que comienzan por uno (actuativo), pero no tiene en cuenta que los restantes números debe elegirlos entre el 2, 4 y 6, y no entre 2 y 3.
U2: Aplicación de la regla del producto (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo). No identifica correctamente el factor 4, ya que la elección de los números distintos del 8 se hace entre 1, 2, 4, y 6.
U3: Enumeración sistemática y completa de las distintas configuraciones que se pueden dar con dos ochos en cinco posiciones posibles (actuativo) y aplicación de la regla del producto (intensivo), aunque con un factor erróneo.
U4: Realización de los cálculos (actuativo).

Pedro descompone bien el problema en dos subproblemas: colocación de dos 8 y elección de los restantes números. El primero logra resolverlo correctamente mediante enumeración sistemática y completa, haciendo uso de la recursión, pero en el segundo falla en identificar las formas de seleccionar las tres posiciones restantes entre 4 números posibles. En realidad forma las $VR_{3,3}$ y no $VR_{4,3}$. Aplica correctamente la regla del producto.

4.6.2.8. Problema 8: Colocación de objetos distinguibles en casillas distintas [$V_{5,3}$].
Enunciado:

El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay tres coches; los de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada dia el coche en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:
1 2 3 4 5
¿De cuántas formas pueden Ángel, Beatriz y Carmen aparcar sus coches en la cochera?. Ejemplo: Ángel puede aparcar su coche en el aparcamiento número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4.

Transcripción de la solución (correcta):



Conocimientos puestos en juego:
U1: Usando una notación simbólica para designar los elementos, fija una variable (el primer coche en la plaza 1) y realiza un diagrama en árbol parcial correctamente construido (ostensivo y actuativo). Hace uso de la recursión.
U2: Generaliza al caso de variar la primera posición. Aplicación de la regla del producto (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

Este problema lo resuelve correctamente representando de modo parcial, mediante un diagrama en árbol, las distintas formas de poner los coches; hace uso de la recursión y generalización y fijación de variables. No escribe explícitamente la forma de las configuraciones que se cuentan, pero se puede inferir que es consciente de lo que cuenta. Aplica correctamente la regla del producto.

4.6.2.9. Problema 9: Colocar objetos distintos en celdas dstintas (más de un objeto por celda) [$VR_{2,4}$].
Enunciado:

Cuatro niños (Alicia, Berta, Carlos y Diana) van a pasar la noche a casa de su abuela. Esta tiene dos habitaciones diferentes (salón y buhardilla) donde poder colocar a los niños para dormir. ¿De cuántas formas diferentes puede la abuela colocar los cuatro niños en las dos habitaciones? (Puede quedar alguna habitación vacía). Ejemplo: Alicia, Berta y Carlos pueden dormir en el salón y Diana en la buhardilla.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1	S	B
	4	0
	3	1
	2	2
	1	3
	0	4

Conocimientos puestos en juego
U1: Introduce una notación para representar el número de niños en la buhardilla y salón. Nótese que usa el esquema implícito en el enunciado, como se observa en la disposición tabular que adopta indicando una asignación.
-Enumeración sistemática y completa de los modos de descomponer el número 4 en dos sumandos.

Esto constituye el enunciado y solución de un subproblema relacionado con el dado, pero que lleva a plantear 5 nuevos subproblemas que deben ser resueltos: ¿Cuántas configuraciones se producen en cada forma de descomponer el número 4?. Estos subproblemas no son afrontados por Pedro.

Podemos deducir, que, como en el caso del problema 4 se ha hecho una interpretación errónea del enunciado identificando los objetos (niños) como indistinguibles.

4.6.2.10. Problema 10: Reparto de objetos distinguibles en celdas distinguibles [$C_{4,2}$].

Enunciado:

María y Carmen tiene cuatro cromos numerados del 1 al 4. Deciden repartírselos entre las dos a partes iguales. ¿De cuántas formas se pueden repartir los cromos?. Ejemplo: María puede quedarse con los cromos 1 y 2 y Carmen con los cromos 3 y 4.

Transcripción de la solución (incorrecta):

U1 1, 2, 3, 4
U2 12 ~~23~~ ~~34~~
13 ~~24~~
14

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar elementos (ostensivo).

U2: Enumeración sistemática y completa de las combinaciones de 4 elementos tomados dos a dos (actuativo). Tacha algunas configuraciones porque considera indistinguibles las dos personas.

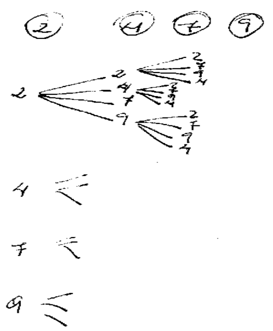
En este problema Pedro escribe 6 formas en que se pueden elegir dos cromos (mediante enumeración sistemática y completa de las combinaciones $C_{4,2}$,) pero no diferencia entre las dos personas, con lo que obtiene una solución incorrecta.

4.6.2.11 Problema 11: Selección ordenada con reemplazamiento y repetición [$VR_{4,3}$].

Enunciado:

En un bombo hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2 , 4 , 7 y 9. Elegimos una bola del bombo, anotamos su número y la devolvemos al bombo. Se elige una segunda bola, se anota su número y la devolvemos al bombo. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener?. Ejemplo: Se puede obtener el número 2 2 2.

Transcripción de la solución (parcialmente correcta, aunque incompleta):



Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (dígitos que componen los números a formar).

U2: Realización de un diagrama en árbol incompleto que expresa el procedimiento de formación sistemática de los números de 3 cifras a partir de los dígitos 2, 4, 7 y 9.

No expresa la solución final (4x4x4). No tenemos constancia de si ha identificado las configuraciones y conoce cómo calcular su número.

4.6.2.12. Problema 12: Colocación ordenada exhaustiva con repetición de elementos [$PR_{5;3,1,1}$].

Enunciado:

Disponemos de cinco cartas, cada una de ellas tiene grabada una letra: A , B , C , C , C. ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar en la mesa las cinco cartas, una al lado de otra, formando una hilera?. Pueden estar colocadas de la siguiente forma: ACBCC.

Transcripción de la solución (correcta):

U1	A, B, C, C, C					
U2	ABCCC	BACCC	...			
	ACBCC	CABCC	...			
	ACCBC	CACBC	...			
	ACCCB	CACCB	...			
U3	4 casos	4 casos	4 casos	4 casos	4 casos	= 20 casos

Conocimientos puestos en juego:
U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos que componen las configuraciones (letras que identifican las cartas).
U2: Enumeración sistemática parcial de las distintas configuraciones, fijando la A en primer lugar, y en segundo (actuativo).
U3: Aplicación de la regla de la suma (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

Inicia el proceso de formación sistemática de las configuraciones. Deja indicado el proceso: colocación de la ficha con la letra A en 1ª posición (4 casos que enumera), en 2ª posición (que también enumera) y deja indicado que hay otras 3 posiciones posibles. Ha hecho uso de la recursión y generalización correcta. Aplica la regla de la suma dando explícitamente la solución correcta.

4.6.2.13. Problema 13: Selección ordenada sin reemplazamiento ni repetición [$V_{4,3}$].
Enunciado:

Se quiere elegir un comité formado por tres miembros: Presidente, Tesorero y Secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos?. Ejemplo: Que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

Transcripción de la solución (correcta):

U1	P, T, S
U2	ABC
	ACB
	ABD
	ADB
	ACD
	ADC ....
U3	Y por tanto son 24.

Conocimientos puestos en juego:

U1: Introduce una notación simbólica para designar los elementos (iniciales de los cargos).
U2: Introduce una notación para designar las personas. Parece usar el modelo del enunciado. Inicia el proceso de formación sistemática de todas las configuraciones fijando una variable. A (Arturo) en la primera posición (6 casos, mediante enumeración sistemática y completa)
U3: Generaliza la solución del problema anterior al caso de jijar los otros elementos en primera posición. Ha hecho uso de la recursión. Expresión de la solución (24) que implícitamente obtiene con el producto de 6x4. Aplicación de la regla del producto (intensivo) y realización de los cálculos (actuativo).

4.6.3. Análisis de la entrevista de Pedro
(1) Confusión de combinación por configuración

Nos parece que el estudiante debe distinguir con claridad el uso específico de la palabra 'combinación' respecto del de configuración (muestra, disposición de objetos, etc.) que debe contarse. Pedro manifiesta su confusión sobre este aspecto cuando se le pide que reformule el problema 2:

- ***P:*** *Pues, no sé..., cojo una baraja española, eliges un palo al azar, por ejemplo oros, y haz combinaciones con cuatro cartas de las doce que tienes y que aparezca siempre sota, caballo y rey.*

- ***I:*** *Y, esa palabra que has dicho de "haz combinaciones" ¿Piensas que es adecuado? pues a lo mejor si le dices haz combinaciones o le estás dando una pista diciéndole que son combinaciones o lo estás despistando diciéndole que son combinaciones cuando realmente no lo son.*
- ***P:*** *No, es que aquí el problema dice realmente de cuántas formas puedes alinear, entonces el poner una alineación ¿no? tu lo puedes asociar directamente con una combinación, o sea, ¿de cuántas formas las puedo alinear? pues... lo puedes asociar con una combinación.*
- ***I:*** *Pero combinaciones más que nada como enumeración de casos ¿no?.*
- ***P:*** *No combinación como término matemático sino como...*
- ***I:****¿Como sinónimo de alinear?*
- ***P:*** *Exactamente.*

Esta misma imprecisión aparece cuando se le pregunta qué haría para generalizar el problema 2:

- ***I:*** *Y el caso contrario, si en lugar de doce cartas hubiera imagínate..., ya el caso no es muy válido pero...,cuarenta cartas y los grupos fueran en vez de tres fijas (sota,caballo,rey) hubiera siete fijas y tuvieras que formar grupos de once por ejemplo ¿Cómo lo harías?.*
- ***P:*** *Cogería y haría por un lado combinaciones con las siete y por otro lado combinaciones con las otras.*

(2) Influencia del orden y la repetición

Pedro tiene un conocimiento poco claro del significado de los términos 'orden' y 'repetición' en el contexto de la combinatoria como indicativos de condiciones de formación de las configuraciones, como se pone de manifiesto en el siguiente diálogo (problema 2):

- ***I:****¿Piensas que en este problema es importante el orden?*
- ***P:****¿El orden?*
- ***I:*** *Si*
- ***P:*** *Es importante para no perderte a la hora de realizarlo como yo lo he hecho.*
- ***I:*** *No me refiero a la hora de seguir un orden en tu razonamiento sino a la hora de poner las cartas si da lo mismo poner sota-caballo o caballo-sota ¿Es importante el orden?¿Hay que tenerlo en cuenta o el orden no influye?.*
- ***P:*** *Si*
- ***I:****¿Se pueden repetir las cartas?*
- ***P:****¿Cómo?*
- ***I:*** *En esos grupos que tienes que hacer de cuatro cartas.*
- ***P:****¿Si se pueden repetir?, cuando dices repetir ¿qué quieres decir?.*
- ***I:*** *Si en un grupo de esos puede haber dos cartas iguales, o sea, que pueda haber sota-caballo-rey-caballo por ejemplo.*
- ***P:*** *No, si tenemos doce cartas...*

La confusión entre orden y repetición es patente cuando al final de la entrevista le preguntamos qué se quiere decir de que hay repetición en el contexto de los problemas combinatorios:

- ***P:*** *Supongo que se referirá a que hay casos que se repiten; lo voy a explicar mejor con un ejemplo, en el problema de borrar la pizarra hay casos que, aunque no influye el orden, se repiten, por ejemplo Clara-Fernando-Ramón y Ramón-Fernando-Clara sería un caso repetido, eso es lo que yo entiendo por repetición.*

(3) Interpretación incorrecta del enunciado

La solución que da al problema 4 nos ha parecido en principio que es incompleta y que Pedro ha rehusado encontrarla. Sin embargo, en la entrevista se pone de manifiesto que él considera que ha resuelto completamente el problema, al interpretar de modo distinto a lo que pretendíamos el ejemplo (dar los cuatro coches a Luis): considera que las configuraciones pedidas son las descomposiciones del número 4 en 3 sumandos y que la condición de que los coches a distribuir son distinguibles (por los colores) es superflua:

- ***I:*** *Pasamos al siguiente ejercicio, el número 4. Pones en el folio unos cuantos casos y escribes abajo "explicación", eso qué es que ibas a poner la explicación después o que en ese gráfico se encuentra la explicación o ...*
- ***P:*** *No, no, que esa es mi explicación, están los cuatro coches de distintos colores y hay que repartirlos entre tres personas y entonces, como dice aquí en el ejemplo se les pueden dar los cuatro coches a una misma persona, entonces voy haciendo eso 4-0-0, 3-0-1,... voy viendo todos los posibles casos que hay y esa sería la explicación.*
- ***I:*** *Bueno y esto sería, al igual que el anterior, que esta situación se va a repetir, digamos seis veces, y por tanto hay que multiplicar por seis o está esto incompleto, es decir, ¿has intentado poner simplemente un grupillo de cosas que se pueden dar?.*
- ***P:*** *No, este problema es distinto del otro, es muy distinto; en el otro estás jugando con tres... ¿cómo te diría? estás jugando con cuatro cartas en donde tres tienen que aparecer seguro y este es una cosa muy distinta porque tu puedes darle los cuatro coches a una misma persona.*
- ***I:*** *Sin embargo aquí no has multiplicado por un determinado número y decir que la solución es tanto sino que no has llegado a la solución, quiero decir que con esto que has hecho es insuficiente para llegar a la solución ¿no?.*
- ***P:*** *No, la solución es esta, uno, dos,..., seis, quince.*
- ***I:****¿La solución sería quince?*
- ***P:*** *Si*
- ***I:****¿Has entendido el enunciado?*
- ***P:*** *Si, hay cuatro coches y hay que repartírselos a tres hermanos pudiendo dar el número de coches que quieras a cada hermano.*
- ***I:****¿Qué pide el problema?*
- ***P:*** *De cuantas formas diferentes puedo repartirlos.*
- ***I:****¿Hay datos superfluos?*
- ***P:*** *Los colores, por ejemplo.*
- ***I:*** *Los colores, o sea que ¿perfectamente podría omitirse el hecho de que los coches sean de colores diferentes?.*
- ***P:*** *Si*

4.6.4. Síntesis y conclusiones finales del caso de Pedro

(1) Elementos extensivos

Resuelve correctamente 5 de los 13 problemas propuestos mediante la generación de un modelo combinatorio basado en la fijación de variables, la recursión y la enumeración sistemática de configuraciones.

En los dos problemas compuestos formula dos subproblemas que los compone mediante la regla de la suma (problema 2) y mediante la regla del producto (problema 7). En el problema 4 formula nuevos subproblemas (mediante la descomposición del número 4 en dos sumandos), pero no inicia la solución de ninguno de ellos.

En todos los problemas, excepto el 4, 5 y 9 usa la recursión, resolviendo problemas semejantes al dado de menor tamaño y usando la solución obtenida para resolver el problema principal.

(2) Elementos ostensivos

Excepto en el primer problema que usa correctamente una expresión de las permutaciones con repetición (aunque sin mencionar dicha noción) no usa fórmulas de las operaciones combinatorias. Se apoya para resolver los problemas en la representación de las algunos ejemplos de configuraciones que dispone de modo tabular o mediante el diagrama en árbol.

(3) Elementos actuativos

Como conocimientos de tipo actuativo u operatorio identificamos en las respuestas de Pedro los siguientes:

- Descomposición de problemas en subproblemas (en realidad sólo en los dos problemas compuestos 2, y 7).

- Enumeración sistemática completa y correcta (problema 1, problema 5 (aunque interpreta erróneamente el enunciado). El subproblema de disponer los 8 en el problema 7, 10), sistemática incompleta pero recursiva (problema 2, 8, 11, 12 y 13), incorrecta por mala interpretación del enunciado en los problemas 3, 4, 9 y 10.
- Ejecución de operaciones aritméticas (problema 1, factoriales y cociente), sumas y productos sencillos.

(4) Elementos intensivos

Pedro muestra un claro desconocimiento de las definiciones de las operaciones combinatorias y de sus condiciones de aplicación. No menciona en ningún caso la pertinencia o no de tener en cuenta el orden o la repetición de los elementos en los procesos de formación de las configuraciones.

Ha tenido errores en la interpretación de los datos de los problemas, como en el número de elementos (problema 7) considerar indistinguibles elementos que no lo son o viceversa (problemas 3, 4, 9), tipos de celdas (problemas 4 y 10), y error de orden en el problema 6.

(5) Elemento validativos

En el problema 1 usa tres métodos diferentes para comprobar la solución, lo que interpretamos como un recurso validativo. Pero en general no justifica de manera clara la soluciones que propone.

4.7. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO DE CASOS

Como resumen del estudio de casos, y con la finalidad de comparar entre si los cuatro alumnos, así como comparar nuestros resultados con el análisis a priori realizado en el capítulo 2 presentamos las tablas 4.7.1 y 4.7.2. En la primera de ellas comparamos a los dos alumnos que han tenido una alta proporción de problemas correctamente resueltos y en la segunda a los dos alumnos que han tenido una alta proporción de errores en la resolución. En cada uno de los grupos hemos escogido, como dijimos, un alumno que se asemeja a nuestros sujetos epistémicos descritos en el análisis a priori de la resolución de los problemas (capítulo 2), es decir, un sujeto modelizador y un sujeto generador de modelos.

4.7.1. Comparación con el análisis a priori

Destacamos, en primer lugar, la pertinencia y utilidad del análisis de tipo teórico realizado en la sección 2.5, que nos ha permitido prever las diferencias entre estos tipos de sujetos. Al comparar las columnas izquierda y derecha de cada una de las tablas 4.7.1 y 4.7.2. con la tabla 2.5.14 detacamos el grado de acuerdo entre los elementos de significado en sus diversas categorías en el análisis a priori y en los resultados del estudio de casos.

Tabla 4.7.1.Significados de la combinatoria elemental para los estudiantes con alto porcentaje de problemas resueltos

Luisa (12 problemas resueltos) ***Sujeto modelizador***	***Adolfo (13 problemas resueltos)*** ***Sujeto generador de modelos***
Elementos extensivos: Traducción de los problemas de colocación y partición a selección, excepto el problema en el que falla. Identificación correcta de las configuraciones combinatorias en 12 problemas. Reconocimiento del problema dado como un ejemplo del tipo de problemas resolubles mediante el modelo combinatorio correspondiente. Planteamiento de problemas relacionados de menor tamaño en el problema que no traduce y en el problema 8 que convierte en problema compuesto debido a la traducción. Planteamiento de subproblemas en los problemas compuestos.	**Elementos extensivos:** Uso del esquema sugerido en el enunciado en los 13 problemas. Identificación correcta de las configuraciones combinatorias en 13 problemas. Planteamiento recursivo de problemas relacionados de menor tamaño. Planteamiento de subproblemas en los problemas compuestos.
Elementos ostensivos: Simbolización algebraica o numérica de los elementos a combinar, según su naturaleza. Uso de disposiciones tabulares. Notaciones y términos para denotar las operaciones combinatorias. Expresión de la fórmulas combinatorias. Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias. Expresión de las reglas de la suma producto y cociente. Correspondencia entre los datos del problema y los factores. Expresión de las operaciones aritméticas.	**Elementos ostensivos:** Simbolización algebraica o numérica de los elementos a combinar, según su naturaleza. Uso de disposiciones tabulares. Expresión de las reglas de la suma producto y cociente. Correspondencia entre los datos del problema y los factores. Expresión de las operaciones aritméticas.
Elementos actuativos: Traducción entre esquemas operatorios. Identificación de la operación combinatoria y desarrollo de la misma. Pocas enumeraciones, en general parciales. Descomposición del problema combinatorio compuesto en subproblemas y composición de los mismos. Realización de las operaciones aritméticas correspondientes.	**Elementos actuativos:** No traduce los esquemas operatorios. Fijación de variables. Enumeración parcial sistemática de las configuraciones combinatorias (selección, colocación, partición). Resolución recursiva del problema combinatorio simple. Descomposición del problema combinatorio compuesto en subproblemas y composición de los mismos. Realización de las operaciones aritméticas correspondientes.

Elementos intensivos: Identificación de las condiciones de realización del esquema operatorio de selección (influencia del orden, repetición). Traducción de condiciones de los esquemas de partición y colocación a condiciones del esquema de selección. Muestreo, partición, aplicación. Conceptos combinatorios (variaciones, permutaciones, combinaciones, definiciones y condiciones de aplicación. Reglas del producto, del cociente y de la suma; condiciones de aplicación. Identifica propiedades combinatorias.	**Elementos intensivos:** Identificación de las condiciones de realización del esquema operatorio (influencia del orden, repetición; tipo de elementos y celdas, condiciones de la partición). Muestreo, partición, aplicación. No recuerda los conceptos combinatorios (variaciones, permutaciones, combinaciones). Reglas del producto, del cociente y de la suma; condiciones de aplicación. Generalización de soluciones parciales. Identifica propiedades combinatorias.
Elementos validativos: Justificación de las condiciones de aplicación del modelo combinatorio correspondiente. No suele justificar las reglas de la suma y producto. Enumeración como comprobación de algunas soluciones.	**Elementos validativos:** Justificación de las condiciones de realización del esquema operatorio. Verificación de las condiciones de aplicación de las reglas del producto, del cociente y de la suma. Enuneración sistemática y disposición tabular como justificación.

Tabla 4.7.2.Significados de la combinatoria elemental para los estudiantes con bajo porcentaje de problemas resueltos

Julián (4 problemas resueltos) Sujeto modelizador	***Pedro (5 problemas resueltos) Sujeto generador de modelos***
Elementos extensivos: Traduce los problemas 8 de colocación y 4 y 10 partición a selección, la traducción del 4 es incorrecta y obtiene un problema no equivalente. Identificación correcta de las configuraciones combinatorias en 6 problemas. Reconocimiento del problema dado como un ejemplo del tipo de problemas resolubles mediante el modelo combinatorio correspondiente: 6 correctas; 4 incorrectas. Planteamiento de subproblemas en los problemas 1,2, 7, 8 y 9 con errores diversos.	**Elementos extensivos:** Uso del esquema sugerido en el enunciado en los 13 problemas. Identificación correcta de las configuraciones combinatorias en 6 problemas. Planteamiento recursivo de problemas iguales de menor tamaño en 10 problemas. Planteamiento de subproblemas en los problemas compuestos.

Elementos ostensivos: Simbolización algebraica o numérica de los elementos a combinar, según su naturaleza; 1 diagrama en árbol sin acabar. Uso de disposiciones tabulares que no explota para hacer enumeración. Notaciones y términos para denotar las operaciones combinatorias; errores en notación Expresión de la fórmulas combinatorias; erróneas en 3 problemas. Correspondencia entre los datos del problema y los parámetros de las fórmulas combinatorias en 7 problemas. Expresión de las reglas de la suma (2 veces) y producto (2 veces). Correspondencia entre los datos del problema y los factores: Errores en la correspondencia. Expresión de las operaciones aritméticas; errores en operaciones aritméticas.	**Elementos ostensivos:** Simbolización algebraica, numérica e icónica de los elementos a combinar, según su naturaleza. Uso de disposiciones tabulares. Uso de diagramas en árbol 1 completo, 4 parciales, todos sistemáticos, 1 incorrecto. Expresión de las reglas de la suma (1 correcta y 1 incorrecta), producto (4 correctas) y cociente (1 correcta). Correspondencia entre los datos del problema y los factores. En general correcta. Expresión de las operaciones aritméticas
Elementos actuativos: Traducción entre esquemas operatorios en 3 problemas; el resto usa el esquema del enunciado. Identificación de la operación combinatoria y desarrollo de la misma en todos los casos; 5 identificaciones erróneas, 1 error en parámetros y 3 errores de fórmula. Fijación de variables (3 problemas). Enumeración total sistemática (1) o parcial sistemática (2) . Descomposición de problemas en subproblemas y composición de los mismos, no siempre productiva. Realización de las operaciones aritméticas correspondientes.	**Elementos actuativos:** No traduce los esquemas operatorios. Fijación de variables correctamente en 4 problemas. Enumeración parcial sistemática y correcta de las configuraciones combinatorias (5 parciales, 4 completas) 4 incorrectas por mala interpretación enunciado. Resolución recursiva del problema combinatorio simple. Descomposición del problema combinatorio compuesto en subproblemas y composición de los mismos. Realización de las operaciones aritméticas correspondientes.

Elementos intensivos: Errores en la identificación de las condiciones de realización del esquema operatorio de selección (influencia del orden, repetición). No siempre traduce de los esquemas de partición y colocación a condiciones del esquema de selección. Muestreo, partición, aplicación. Conceptos combinatorios (variaciones, permutaciones, combinaciones, con errores en las definiciones y condiciones de aplicación. Reglas del producto y de la suma; con algunos errores en la aplicación. Generalización incorrectas de soluciones parciales. Identifica propiedades combinatorias.	**Elementos intensivos:** Errores en la interpretación de las condiciones de realización del esquema operatorio (influencia del orden (1 problema), repetición; tipo de elementos (3 problemas) y celdas (2 problemas), condiciones de la partición), número de elementos (1 problema). Muestreo, partición, aplicación. No recuerda los conceptos combinatorios (variaciones, permutaciones, combinaciones). Reglas del producto, del cociente y de la suma; condiciones de aplicación. Generalización correcta de soluciones parciales en 3 problemas No generaliza en 1 problema. No identifica una propiedad combinatoria (problema 5).
Elementos validativos: No suele aportar justificaciones. A veces justifica la pertinencia del orden y la repetición, pero no siempre es aplicable al problema. Enumeración como comprobación de algunas soluciones.	**Elementos validativos:** No suele aportar justificaciones. Enuneración sistemática y disposición tabular como justificación.

Podemos entonces diferenciar el *significado de la combinatoria elemental* para el *sujeto modelizador* y para el *sujeto generador de modelos.* En ambos casos hay un núcleo común, dado por la identificación de los esquemas combinatorios y sus particularidades, las ideas de muestreo, partición, aplicación, reglas de la suma y producto. Las prácticas de solución de los problemas incluyen el planteamiento de problemas relacionados, descomposición del problema en partes, la simbolización de los elementos, el uso de las reglas de la suma y producto y operaciones aritméticas.

Para el sujeto modelizador se añaden las nociones combinatorias de variaciones, permutaciones y combinaciones, sus reglas de aplicación, notaciones, fórmulas y parámetros, mientras que el sujeto generador de modelos hace un uso extenso de la enumeración, recursión, fijación de variables, descomposición del problema en partes. Todo ello le permite generar la solución a partir de las reglas de la suma y producto. Hemos observado, que, en contra de lo previsto, apenas se hace uso de la regla del cociente, en problemas en los que es pertinente su uso.

Por contra de lo esperado, el sujeto modelizador no siempre traduce los esquemas combinatorios y a veces la traducción es incorrecta. Cuando se hace traducción es siempre hacia el esquema de selección, que permite al alumno identificar las operaciones combinatorias básicas y los valores de sus parámetros.

En ambos tipos de sujetos aparece con frecuencia, como elemento ostensivo el uso de disposiciones tabulares que serán especialmente útiles para el sujeto generador de modelos como medio de control de la sistematicidad de la enumeración. En todo caso, la disposición tabular sirve para visualizar el tipo de configuración pedida en el enunciado del problema y ha parecido ser mucho más efectiva que el diagrama en árbol que es escasamente utilizado.

Es característico del sujeto contructor de modelos la recursión, no sólo como elemento actuativo, sino en el planteamiento de subproblemas relacionados con el dado. Ello hace que la enumeración, prevista para este tipo de sujetos, rara vez sea completa, aunque suele ser sistemática. El sujeto resuelve recursivamente una serie de problemas relacionados, realizando una enumeración (parcial) de un subproblema de menor tamaño y haciendo uso de la fijación de variables y la generalización para incorporar la solución parcial en la solución del problema primitivo.

La presencia de elementos validativos es menor de lo esperado, especialmente en los sujetos con alta tasa de fallo, posiblemente por su inseguridad respecto a la solución dada. Aparece el uso de las disposiciones tabulares como medio de justificación.

4.7.2. Factores explicativos de la dificultad de los problemas

Al comparar las tablas 4.7.1 y 4.7.2. deducimos una primera diferencia entre los buenos y malos resolutores en los problemas propuestos que es la correcta interpretación de los datos del enunciado, también indicada por Hadar y Hadass (1981). Observamos que éste es un punto fundamental, ya que el único error de Luisa es de este tipo y es el que produce su única solución incorrecta. Adolfo no tiene errores de interpretación, mientras que éstos son frecuentes en los dos alumnos con una baja tasa de éxito.

Estos errores aparecen tanto en el alumno que usa las fórmulas, como en el que trata de generar un modelo e indican que el campo de problemas combinatorios elementales es más complejo de lo que parece. Son muchas las condiciones del enunciado (esquema, tipo de elementos y celdas, orden, repetición, condiciones de partición). Pequeños cambios en estas condiciones producen una solución diferente del problema y la interpretación se complica aún más en los problemas de partición y colocación donde aparecen dos conjuntos diferentes.

Del análisis de las tablas 4.7.1 y 4.7.2 deducimos que no hay una ventaja del uso de las fórmulas, respecto a la enumeración para asegurar la resolución de los problemas, ya que ambas estrategias se han encontrado en los buenos y malos resolutores. Esto cuestiona la efectividad de la enseñanza actual de la combinatoria con un énfasis excesivo en el aprendizaje de las fórmulas combinatorias que el alumno olvida fácilmente y aplica con dificultad. Por el contrario el tipo de conocimientos puestos en juego por los sujetos generadores de modelos (Adolfo y Pedro) no son objeto explícito de enseñanza, aunque los alumnos lo aplican en forma intuitiva, llegando en algunos casos a resolver todos los problemas. Creemos que la enseñanza debiera explotar esta base intuitiva y desarrollar en los alumnos estas capacidades que pueden ser aplicadas en un conjunto más amplio de situaciones.

Por otro lado, en caso de tratar de usar la fórmula de la operación combinatoria, el principal fallo ha sido no saber traducir uno de los esquemas de colocación o partición al esquema de selección, que es el usado en la definición de las operaciones combinatorias. Consecuentemente, deducimos la importancia de tener en cuenta este punto en la enseñanza y enfatizar en los alumnos la actividad de análisis de los problemas y traducción entre unos modelos y otros.

Un punto que merece destacarse en nuestro análisis es la dificultad y el escaso uso que hacen los estudiantes del diagrama en árbol. A pesar de la importancia que le concede Fischbein (1975) como recurso productivo en la resolución de problemas probabilísticos y combinatorios, los alumnos han evitado su uso y, cuando lo emplean es con un escaso éxito. Creemos que el uso de este recurso debe ser reforzado en la enseñanza, pues Fischbein (1987) lo presenta como modelo figurativo que permite sugerir la generalización iterativa (extensión de un cierto procedimiento a cualquier número de elementos y la generalización constructiva (adaptación a nuevos problemas derivados que es característica del razonamiento recursivo). Es justamente en estos dos puntos donde se han observado muchos de los fallos de los estudiantes en la resolución de los problemas propuestos.

Las estrategias generales en la resolución de problemas: fijar variables, reducir el tamaño del problema, traducir a otro problema semejante más sencillo, descomponer el problema en partes, generalizar las soluciones, se han mostrado también como elementos que separan a los buenos y malos resolutores. Estas estrategias, bien aplicadas son fundamentales a la hora de resolver los problemas de un modo adecuado, especialmente combinadas con la enumeración sistemática.

Por otro lado, la Combinatoria es un campo donde pueden ejemplificarse con facilidad y ejercitarse estas estrategias. En consecuencia, creemos que los problemas combinatorios pueden jugar un papel fundamental en el aprendizaje de técnicas generales de resolución de problemas.

CONCLUSIONES GENERALES

A lo largo de esta Memoria hemos presentado nuestra investigación sobre los razonamientos y las dificultades de los estudiantes con preparación matemática avanzada en la resolución de problemas elementales de combinatoria, que continúa los trabajos anteriores sobre la didáctica de la combinatoria realizados en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Para finalizar el trabajo, presentaremos a continuación una síntesis de nuestras aportaciones sobre esta problemática, las conclusiones sobre las hipótesis estudiadas en la fase confirmatoria, una valoración personal del alcance de nuestro estudio y algunas sugerencias para continuar esta investigación.

Síntesis de aportaciones

Como hemos descrito a lo largo del trabajo, la combinatoria es un campo escasamente tratado en la investigación didáctica, a pesar de la importancia de la misma dentro de la matemática discreta y de la importancia del razonamiento combinatorio como constituyente del razonamiento formal. Esta importancia, así como su papel en el currículo de matemáticas es señalada por Kapur (1970) y Kenney y Hirsch (1991).

Nuestros resultados aportan conocimientos didácticos originales, respecto a cada uno de los objetivos específicos planteados en la sección 1.4.1, que reproducimos para facilitar la discusión.

O1: Caracterizar las dificultades y errores en la resolución de una muestra de problemas combinatorios elementales (simples y compuestos) en estudiantes con una intensa preparación matemática previa (estudiantes de 4º y 5º curso de la licenciatura de matemáticas)

.

En los capítulos 2 y 3 hemos presentado los resultados de aplicar dos cuestionarios con problemas combinatorios simples a tres muestras de alumnos de 4º y 5º curso de la licenciatura de matemáticas (n = 27 en el cuestionario A, n = 29, n = 91 en el cuestionario B).

Los resultados muestran la alta dificultad de estos problemas para los estudiantes, la variabilidad de esta dificultad en los diferentes problemas y la confirmación de su dificultad relativa en las distintas muestras. Mientras que en algunos problemas se observa claramente la mejora debida a la madurez y alta preparación de los alumnos, respecto a los resultados de Navarro-Pelayo (1994), en otros los resultados no son sensiblemente mejores que los de los alumnos de 14 años con instrucción en combinatoria.

En el Capítulo 3 realizamos un amplio estudio de la solución aportada por los estudiantes, definiendo una serie de variables sobre la interpretación del enunciado, los tipos de razonamientos y estrategias específicas usadas en la solución. Nuestros resultados muestran un alto porcentaje de alumnos con enumeración no sistemática, en los casos en que el tamaño de la solución de los problemas es elevado, cuando se trata de problemas compuestos o en los problemas de partición. Es también importante, por su incidencia, el error en la identificación de la fórmula combinatoria, que cobra aún mayor importancia teniendo en cuenta que sólo una parte de alumnos usa este método para resolver los problemas.

Por el contrario, hemos encontrado pocos casos de error en la identificación de los parámetros, y pocos errores aritméticos o de desarrollo de las fórmulas. En estos aspectos nuestros alumnos muestran unos resultados bastante mejores que los alumnos de la investigación de Navarro-Pelayo (1994).

O2: Estudiar el efecto sobre los índices de dificultad de los problemas de diversas variables de tarea (esquema combinatorio, tipo de operación combinatoria, tamaño de la solución).

Este estudio se aborda en el capítulo 3 sobre la tercera muestra de alumnos, utilizando un enfoque confirmatorio y contrastando las hipótesis que discutimos seguidamente.

O3: Analizar la comprensión que los alumnos muestran del enunciado del problema, los métodos generales y estrategias específicas de solución y relacionarlos con los índices de dificultad de los problemas y las características de los mismos.

En el Capítulo 3 realizamos un estudio pormenorizado de las respuestas a los problemas de los 91 alumnos de la tercera muestra que abordan estos problemas.
El primer bloque de variables analizado muestra las dificultades de estos alumnos en la comprensión del enunciado, que confirma lo expuesto por Hadar y Hadass (1981) quienes señalan esta fase como crucial para la resolución de los problemas combinatorios. Los alumnos confunden con frecuencia el tipo de elementos y celdas, la necesidad de repetición, así como las condiciones requeridas en las particiones. Sin duda ello es debido a la complejidad semiótica del campo de problemas combinatorios elementales, como se deduce de nuestro análisis semiótico a lo largo de la tesis. En los estudios de casos descritos en el capítulo 4 la comprensión del problema se revela como un punto crucial que separa los buenos y malos resolutores.

Hemos caracterizado los tipos de razonamiento, estrategias específicas y tipos de simbolización empleados. Destacamos el escaso uso del diagrama en árbol y el uso casi por igual de la enumeración y la fórmula combinatoria, que se revelan como las principales técnicas de resolución. Nuestros resultados dan una mayor validez al análisis a priori de los procesos de resolución potencial de los problemas descritos en la sección 2.5, puesto que nuestros dos sujetos epistémicos (teóricos) representan bien las dos tendencias generales en cuanto a razonamiento combinatorio identificadas en el estudio empírico.

Respecto a las estrategias o técnicas específicas encontramos que los alumnos no suelen traducir el enunciado del problema a un esquema diferente del dado por el enunciado, y en caso de hacerlo es casi siempre al esquema de selección. Hemos observado el uso de la fijación de variables y descomposición en subproblemas en un porcentaje aproximado del 30% de los alumnos en los diferentes problemas.

Finalmente hacemos notar el uso casi nulo de la regla del cociente, y la suma, (en casos en que es pertinente) en contra del uso de la regla del producto que es más generalizada.

O4: Indagar la influencia de nuevos factores explicativos (principalmente de tipo semiótico) sobre las estrategias errores y dificultades en la resolución de problemas combinatorios.

Este estudio se aborda en el capítulo 4, donde hacemos un estudio detallado de cuatro casos. Mediante el análisis semiótico de los procesos de resolución de los problemas de cuatro alumnos y su confrontación con el estudio a priori realizado en la sección 2.5 hemos confirmado en gran medida la existencia de dos tipologías diferenciadas de significado personal de la combinatoria, que corresponden a lo que teóricamente hemos llamado "sujeto modelizador" y "sujeto generador de modelos".

La unión de estos dos significados constituiría el significado institucional de referencia de la combinatoria elemental que se pretende adquieran los alumnos a lo largo de sus estudios, particularmente en la enseñanza secundaria y universitaria. La existencia de estudiantes que se acercan más a uno de estos dos significados personales restringidos muestra que no se alcanzan los objetivos curriculares fijados para el tema. Ello es más evidente aún cuando observamos los errores y desajustes que en el significado personal de estos tipos de alumnos se añaden y que no corresponden al significado de referencia, ni siquiera parcial.

La comparación dentro de cada uno de estos dos tipos de alumnos de dos casos, uno con alto número de problemas resueltos correctamente y otro con alta tasa de fallos plantea también serias dudas respecto a la eficacia del énfasis casi exclusivo que hoy día se da al aprendizaje de las definiciones y fórmulas de las operaciones combinatorias.

Por el contrario, los éxitos o fracasos están motivados por dificultades de tipo semiótico en la comprensión del enunciado y falta de capacidades básicas como la recursión y la enumeración sistemática, que podemos describir como los componentes pragmáticos del razonamiento combinatorio. Una reflexión final es si no sería más productivo tratar de cultivar estas capacidades que no se restringen al campo de la combinatoria, sino que tienen una aplicabilidad general a la adquisición de destrezas de resolución de problemas.

Conclusiones sobre las hipótesis

Nuestra investigación ha contado de varias fases, las primeras de las cuales han sido de tipo exploratorio. Por ello, al iniciar el trabajo no contábamos con unas hipótesis claramente definidas, sino con unos supuestos iniciales, que surgieron de los trabajos sobre esta temática anteriormente desarrollados en el equipo de investigación. A partir de estos supuestos, tras la fase exploratoria llegamos a definir unas hipótesis, que discutimos a continuación.

> ***Hipótesis 1:*** *Los problemas combinatorios simples presentan un grado de dificultad apreciable para alumnos con preparación matemática avanzada.*

Esta hipótesis queda apoyada, en primer lugar, por los elevados índices de fracaso de los estudiantes al resolver los problemas así como por el hecho de que en la tercera muestra el número medio de problemas resueltos fue 5.5; es decir que el alumno "típico" no llega a resolver correctamente la mitad de los problemas propuestos y ningún estudiante logró resolver más de 11 problemas.

> ***Hipótesis 2****: El esquema combinatorio implícito en el enunciado de los problemas combinatorios simples no tiene un efecto significativo sobre la dificultad de los problemas para los alumnos universitarios.*

En la Sección 3.4 realizamos un contraste formal de este efecto, a partir del análisis de varianza de medidas repetidas (Tejedor, 1984; Dunn y Clarck, 1997). No hemos obtenido un efecto significativo del esquema combinatorio sobre la dificultad del problema, aunque ello pudiera ser debido a haber sustituido dos de los problemas originales de Navarro-Pelayo.

Por otro lado, en el estudio realizado en los capítulos 3 y 4 hemos observado un efecto de tipo cualitativo marcado, sobre todo por los tipos de traducción del enunciado que efectúan los alumnos, que es prácticamente siempre al esquema de selección. Es también en los problemas de partición donde la frecuencia de interpretaciones erróneas del enunciado es mayor, posiblemente por la presencia de dos conjuntos diferentes de objetos en cada uno de los cuales el alumno debe diferenciar una serie de características.

> ***Hipótesis 3****: La operación combinatoria que proporciona la solución al problema tiene un efecto significativo sobre la dificultad de los problemas combinatorios simples para los alumnos universitarios.*

Esta hipótesis también fue contrastada por medio del análisis de varianza, obteniendo, en este caso, un efecto significativo. destacamos, además que se conserva el orden relativo de la dificultad de problemas, en función de la operación combinatoria, respecto a los resultados de Navarro-Pelayo (1994).

> ***Hipótesis 4****: El tamaño de la solución tiene un efecto significativo sobre la dificultad de los problemas combinatorios simples para los alumnos universitarios.*

Para estudiar este efecto hemos partido de la estimación del coeficiente de correlación lineal, que indica la existencia de una relación inversa y moderada entre estas dos variables. No tenemos pauta de comparación para este estudio, por lo que, en este punto aportamos un resultado complementario de otras investigaciones.

Hipótesis 5: *Son pocos los alumnos que usan estrategias básicas de resolución de los problemas combinatorios, tales como traducir el problema a otro equivalente, dividir el problema en partes o fijar variables.*

No hemos realizado un contraste de hipótesis formal sobre este punto. Nuestro estudio descriptivo presentado en el capítulo 3, muestra un apoyo sólo parcial sobre esta hipótesis. Hemos encontrado muy poco uso de la traducción del problema, pero, sin embargo, la estrategia de dividir el problema en partes y fijación de variables ha sido razonablemente utilizada, en particular en los problemas compuestos y problemas de partición.

Un problema sobre el uso de estas estrategias es que la falta de capacidad recursiva en algunos casos hace que los problemas parciales no estén adecuadamente formulados o resueltos o bien que la suma de todos ellos no agote el conjunto de configuraciones pedidas.

Hipótesis 6: *Una parte de los alumnos de la muestra no posee una capacidad de enumeración sistemática, o bien no son capaces de generalizar correctamente una enumeración sistemática de tipo parcial.*

Esta hipótesis ha sido estudiada sólo de forma exploratoria, puesto que no hemos realizado ningún contraste de hipótesis formal. Nuestros resultados contradicen esta hipótesis en parte, ya que la enumeración de los alumnos es generalmente sistemática. Sin embargo, encontramos casos de enumeración no sistemática y sobre todo fallos en la capacidad de generalización por lo que el alumno, en una proporción importante, no es capaz de completar la enumeración iniciada o de apoyarse en la enumeración parcial para hallar una solución correcta al problema.

Conclusiones sobre los supuestos de la investigación

Con el análisis a priori realizado en la sección 2.5. hemos caracterizado a nivel teórico dos modalidades básicas del razonamiento combinatorio que proporcionan la solución a la muestra de problemas seleccionados.

El sujeto epistémico que hemos descrito como *modelizador* ha sido instruido para reconocer las condiciones de aplicación de unos modelos combinatorios mediante un razonamiento cuasi-algorítmico: Analizar si influye o no el orden, influye o no la repetición. Esto permite reconocer la operación combinatoria que da la solución, si el problema se plantea o traduce a un esquema de selección, y es simple (de una operación). En este tipo de problemas, una vez recordadas las fórmulas correspondientes e identificados los valores de los parámetros basta realizar sencillas operaciones aritméticas.

Si el esquema en que se plantea, o al cual se traduce el modelo, es de partición o colocación, intervienen dos conjuntos; cada uno de los cuales puede ser ordenado o no; es esencial también diferenciar si los elementos de estos conjuntos son distinguibles o no y las condiciones de la partición (número de elementos en cada parte).

Este modo de razonar lo hemos encontrado experimentalmente en los casos de Luisa -con éxito casi completo- y de Julián, que ha tenido graves dificultades debido al olvido de elementos claves del razonamiento y a la dificultad de traducción al esquema de selección.

El sujeto epistémico que hemos descrito como *generador* de modelos, aunque haya sido instruido en el discurso teórico de la combinatoria, no lo recuerda, al menos con la seguridad que requiere la aplicación de un algoritmo. Por ello se ve obligado a razonar de manera distinta al sujeto modelizador. En primer lugar procede a identificar las configuraciones combinatorias cuyo conjunto debe contar (generalmente, "sin contar"), y para ello introduce una notación adecuada para las mismas. Descompone el problema en parte, enumera de manera sistemática y completa las configuraciones si se trata de un número asequible, o busca la estructura recursiva del conjunto, fijando variables.

Finalmente debe aplicar las reglas básicas de la suma, producto y cociente. En este último paso debe reconocer las condiciones de aplicación de tales reglas, y por tanto, en cierto modo se comporta como un sujeto modelizador, pero en este caso de las operaciones aritméticas. Experimentalmente hemos encontrado ejemplos de esta modalidad de razonamiento combinatorio en el caso de Adolfo (con éxito en todos los problemas) y en el caso de Pedro (que sólo logró 5 soluciones correctas).

El análisis semiótico de los ejemplos de razonamientos de los sujetos epistémicos y experimentales nos ha permitido mostrar las *exigencias cognitivas* de cada modalidad de razonamiento, aportándonos una explicación plausible de los elevados índices de dificultad de los problemas. El sujeto modelizador ha olvidado, con frecuencia, las condiciones de aplicación de las operaciones combinatorias y sus fórmulas. El sujeto generador que no logra resolver los problemas denota una falta de dominio en los elementos básicos que requiere esta modalidad de razonamiento.

Nuestra investigación ha mostrado claramente que los componentes pragmáticos del razonamiento combinatorio no se desarrollan de manera espontánea en los sujetos, incluso a pesar de la edad y una intensa preparación matemática, no específica de la combinatoria, y que, por tanto, requieren una atención particular en los procesos de instrucción matemática.

Nuestra investigación también ha puesto de manifiesto que es necesario promover con instrucción específica la articulación de ambas modalidades de razonamiento combinatorio. Por una parte la generalización de un problema a valores grandes de los parámetros se ve en gran medida facilitada por la disponibilidad de las fórmulas de las operaciones combinatorias simples, como hemos puesto de manifiesto en la entrevista con Adolfo. Por otra parte, la solución de problemas combinatorios compuestos, no reducibles a la aplicación de una sola fórmula, exige destrezas en la descomposición del problema, fijación de variables (paso esencial de la técnica recursiva), y aplicación de las reglas básicas del producto, cociente y la suma.

Pero, de manera crucial se requiere, en ambas modalidades de razonamiento, la identificación de los objetos que se cuentan: el conjunto de configuraciones y su estructura recursiva, para lo cual el uso de elementos ostensivos específicos (notaciones, tablas, diagramas) y la enumeración sistemática (al menos parcial) de configuraciones constituyen conocimientos imprescindibles.

Valoración de la investigación

Una vez presentadas nuestras conclusiones y aportaciones, creemos conveniente realizar una breve valoración de su alcance e interés para la didáctica de las matemáticas.

Pensamos que podemos calificar nuestro trabajo como innovador, no por su temática, sino por el tipo de alumnos con que se aborda. Aunque en algunas investigaciones sobre combinatoria se han aplicado cuestionarios a sujetos adultos (Fischbein y Grossman 1997 a y b; Lecoutre, 1992; Marchand 1994) en todas ellas se trataba de alumnos que iniciaban sus estudios universitarios en especialidades no científicas. Creemos que podemos afirmar que nuestro trabajo es el primero en plantear la dificultad de los problemas combinatorios elementales para los alumnos que finalizan sus estudios de matemáticas.

Hemos contribuido, asimismo, a contrastar la utilidad del modelo teórico utilizado en nuestro trabajo en el planteamiento de problemas de investigación en didáctica. La metodología de análisis semiótico se ha mostrado, asimismo, productiva para el desarrollo de nuestra investigación.

Queremos también hacer constar nuestras limitaciones asumidas. El carácter intencional de las muestras de estudiantes, así como su tamaño moderado nos han hecho reservar el estudio de tipo confirmatorio tan sólo para algunas de nuestras variables, precisamente las que habíamos controlado en el diseño del cuestionario y para las que se podría contar con hipótesis formuladas de antemano, no sólo en nuestra fase exploratoria, sino en las investigaciones previas.

Hemos preferido, en consecuencia, prescindir de estudios de tipo multivariante cuya estabilidad requeriría un mayor tipo de sujetos debido al número de variables implicadas (Thorndike, 1991). De acuerdo con las recomendaciones recientes sobre uso de la inferencia en los trabajos de investigación (Levin y Robinson, 1999; Wilkinson y cols., 1999) hemos restringido a lo estrictamente imprescindible el uso de contrastes de hipótesis para no encontrarnos con el problema de las comparaciones múltiples (Moses, 1992).

Esta restricción en el estudio cuantitativo se compensa con el exhaustivo estudio de tipo cualitativo, y la diversidad de variables analizadas que, necesariamente nos ha obligado a restringir el tamaño de la muestra.

Algunas líneas de investigación sugeridas

Las limitaciones anteriormente señaladas tienen también su aspecto positivo, en cuanto sugieren la continuidad de nuestro trabajo de una forma natural, mediante nuevas replicaciones del estudio, así como con el análisis multivariante de las diversas variables, lo que nos permitiría contestar preguntas como las siguientes:

- ¿Existen agrupaciones y jerarquías implicativas entre la resolución correcta a los diferentes problemas?;
- ¿Podemos encontrar correspondencias entre las variables de tareas de los problemas y los tipos de estrategias? ¿Y entre las estrategias y los errores?

Por otro lado, en este trabajo hemos apenas iniciado el análisis de los problemas combinatorios compuestos. Una línea de investigación prometedora es el análisis de la estructura de los problemas combinatorios compuestos por 2 (n) operaciones; el estudio semiótico de los posibles procesos de resolución; la determinación del significado de referencia y de los significados personales respecto al campo de los problemas combinatorios compuestos de 2 (n) operaciones.

Esperamos que otros investigadores se sientan tentados por estas líneas de investigación prometedoras y que nuestro trabajo tenga continuación en otros similares y contribuya asimismo a la mejora de la enseñanza de la combinatoria.

REFERENCIAS

Azorín, F. y Sánchez Crespo, J. L. (1986). *Métodos y aplicaciones del muestreo.* Madrid: Alianza Editorial.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido.* Madrid: Akal.

Barratt, B. B. (1975). Training and transfer in combinatorial problem solving: The development of formal reasoning during early adolescence. *Developmental Psychology,* 11 (6): 700-704.

Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1998). A study on the stability of the equiprobability bias in 10-14 year-old children. En L. Pereira-Mendoza y cols. (Eds.), *Proceedings of the V International Conference on Teaching Statistics* (p. 1447). Singapore: IASE.

Batanero, C. y Navarro-Pelayo, V. (1991). La enseñanza de la combinatoria en los niveles no universitarios. *Guadalbullón,* 6: 41-49.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994a). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1994b). Epistemology and mathematics instruction: the case of combinatorics. En L. Bazzini (Ed.), *Proceedings of the V Conference on systematic cooperation between theory and practice* (pp. 15-26). Universidad de Pavía. Mayo 23-27. Grado, Italia

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1995). The use of implicative and correspondence analysis for assessing pupils´combinatorial reasoning. En R. Gras (Ed.), *Méthodes d´analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des mathematiques* (pp. 245-256). Rennes: IRMAR.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1997 a). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32: 181-199.

Batanero, C., Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1997 b). Assessing combinatorial reasoning. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. e I.O.S. Press.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas. *UNO*, 5, 15-28.

Batanero, C., Serrano, L. y Garfield, J. B. (1996). Heuristics and biases in secondary school students’ reasoning about probability. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v2, pp. 51-58), Universidad de Valencia.

Bessot, A. y Richard, F. (1980). Une étude sur le fonctionnement du schema arbre pour la comande de variables d'une situation. *Recherches en Didáctique des Mathématiques,* 1, 17-28.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona: P.P.U.

Brennan, R. L. (1983). *Elements of generalizability theory.* Iowa: ACT Publications.

Brown, C. A. y Edward, A. S. (1990). *Discrete mathematics.* En N.C.T.M. (Eds.), *Results from the fourth mathematics asssesment of National Assesment of Educational Progress*. Reston, Va: N.C.T.M.

Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística.* Valencia: Servicio de Publicaciones de la Universidad.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO*, 14 (pp. 93-104).

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997b). Subjective elements in chidren's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the XXI International Conference on the Psychology of Mathematics Education.*(v.2, pp 4956) University of Lahti.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelo: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.

Dane, F. C. (1990). *Research methods*. Pacific Grow, California. Thomson Information Publ.Group.

Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research methods.* London: Sage.

Dubois, J.G. (1984). Une sistématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, 15: 37-57.

Dunn, O, J. y Clarck,V. A. (1987). *Applied statistics: Analysis of variance and regression*. New York: John Wiley.

Engel, A. (1973). *Probabilidad y Estadística*. Valencia: Mestral Universidad.

Engel, A., Varga, T. y Walser, W. (1976). *Hasard ou strategie?*. París: O.C.D.L.

English, L.D. (1991). Young children´s combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics* 22: 451-474.

English, L.D. (1993). Children´s strategies for solving two-and-three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (3): 255-273.

Feldt, L. S. y Brennan, R. L. (1991). Reliability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement*. New York. MacMillan.

Fischbein, E. Pampu, I, y Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. En E. Fischein (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Reide.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5: 193-198.

Fischbein, E., Sainiti, M., y Sciolis, M. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics,* 22: 523-549.

Fischbein, E. y Grossman, A. (1997 a). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 34: 27-47.

Fischbein, E. y Grossmann, A. (1997 b). Tacit mechanism of combinatorial intuitions. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International*

Group for the Psychology of Mathematics Education (v.2, pp. 265-272). Lahti: Lahti Research and Training Centre.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education* 28(1), 96-105.

Fontana, A. y Fey, H. (1994). Interviewing: The art of sciente. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 361-376). London: Sage.

Gascón, J. (1988). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de Matemáticas*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Ghiglione, R. y Matalón, B. (1989). *Las encuestas sociológicas.* México: Trillas.

Gil, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos.* Barcelona: P.P.U.

Giménez, J., Rico, L, Gil, F., Fernéndez, F., Castro, E., del Olmo, A., Moreno, F. y Segovia, I. (1997). ¿Por qué y para qué evaluar en matemáticas? En J. Giménez (Ed.), *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas* (pp. 15-35). Madrid: Síntesis.

Glaymann, M. y Varga, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela*. Barcelona: Teide.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, pp. 417-424). Universidad de Valencia, España.

Godino, J. D. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática. *VIII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica*. Granada, Diciembre de 1998.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Ed.), *Actas del IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática* (pp. 25-46). Guimaraes: Associaçao de Professores de Matemática.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1988): *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. y Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for he Psychology of Mathematics Education* (v. 3, pp. 1-8). University of Stellenbosch, South Africa.

Godino, J. D., Navarro-Pelayo, V. y Batanero, C. (1992). Analysis of student's errors and difficulties in solving combinatorial problems. *Proceedings of the XVI P.M.E.*, (v.1, pp. 241-248). University of New Hampshire. Durham.

Green, D.R. (1981). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years*. Ph. D. Thesis. Loughborough University.

Grimaldi, R. P. (1989). *Discrete and combinatorial mathematics: an applied introduction.* Reading, Ma: Addison- Wesley.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics,* 6, 187-205.

Hadar, N.y Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics,* 12: 435-443.

Hjelmslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.
Huberman, A. M. y Miles, F. M. (1994). Data management and analyis methods. En D. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-444). London: Sage.
Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Barcelona: Paidós.
Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 3, 111-127.
Kenney, M. J. y Hirsch, C. R. (1991). *Discrete mathematics across the Curriculum, K-12*. 1991 Yearbook. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
Kirk, J. y Miller, L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research.* London: Sage.
Lecoutre, M.P. (1985). Effet d´informations de nature combinatoire et de nature frequentielle sur les jugéments probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6 (2-3): 193-213.
Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23: 557 - 568.
Lecoutre, M.P. y Durand, J. L. (1988). Jugéments probabilistes et modéles cognitifs: étude d´une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (3): 357-368.
Lecoutre M. P. y Fischbein E. (1998). Évolution avec l'âge de "misconceptions" dans les intuitions probabilistes en France et en Israel. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,18 (1).
Levin, J. R. y Robinson, D. H. (1999). Further reflections on hypothesis testing and editorial policy for primary research journals. *Educational Psychological Review,* 11, 143-155.
Marchand, H. M. (1994). The resolution of two combinatorial tasks by mathematics teachers. En J.P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the PME XVIII Conference*, (v.4, p. 54). Lisboa: Departamento de Educaçao. Universidade de Lisboa.
Marshall, J. R. (1986). *Combinatorial theory.* New York: John Wiley.
Maury, S. (1986). *Contribution à l´étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la rèsolution des problèmes*. Thèse d´État. Université de Montpellier II.
Maury, S. y Fayol, M. (1986). Combinatoire et résolution de problemes au cours moyens première et deuxième annés. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (1): 63-104.
Mendelsohn, P. (1981). Analyse procedurale et analyse structurale des activités de permutation d´objets. *Archives de Psychologie,* 49: 171-197.
Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1984). *Qualitative data analysis. A sourcebook of new methods.* London: Sage.
Moses, L. E. (1992). The reasoning of statistical inference. En D.C. Hoaglin, y D. S. Moore (Eds.), *Perspectives on contemporary statistics.* The Mathematical Association of America.
Navarro-Pelayo, V. (1991). *La enseñanza de la combinatoria en el bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Navarro-Pelayo, V. y Batanero, C. (1991). La combinatoria en los textos de bachillerato. *Investigación en la escuela*, 14: 123-127.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1991). Enseñanza de la Combinatoria en Bachillerato. Una aproximación al pensamiento del profesor. *Revista de Educación*. Universidad de Granada, 4, 179-189.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación matemática*, 8(1): 26-39.

Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico.* Madrid: ICE de la Universidad Autónoma.

Pesci, A. (1994). Tree graphs: use as an aid in casual compounds events. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the PME XVIII,* (v.4, pp. 25-32). Lisboa: Departamento de Educaçao. Universidade de Lisboa.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La génèse de l´idée de hasard chez l´enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Polya, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Radatz, H. C. (1980). Students' errors in the mathematical learning: a survey. *For the learning of mathematics*, 1(1): 16-20.

Recio, A. M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ribnikov, K. (1988). *Análisis combinatorio.* Moscú: Mir.

Rico, L. (1993). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática*. (pp. 60-108). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (1996 a). Strategies in solving combinatorial problems by students with advanced mathematical background. En A. Gutiérrez y L. Puig (Eds.), *Proceedings of the XX PME Conference*, Valencia.

Roa, R**.,** Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (1996 b). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, 36, 433-446.

Roa, R., Godino, J. D. y Batanero, C. (2001). Dificultad de los problemas combinatorios en estudiantes con preparación matemática avanzada. *Números,*

Roa, R., Godino, J. D. y Batanero, C**.** (2001). Interpretación del enunciado de problemas combinatorios por estudiantes universitarios. *Epsilon,*

Roa, R., Navarro, V. y Batanero, C. (En prensa). Antecedentes y estado actual de la investigación en resolución de problemas en el campo de la combinatoria elemental. *Revista de Educación de la Universidad de Granada,*

Sáenz, C. (1998). Teaching probability for conceptual change. *Educational Studies in Mathematics*, 35: 233-254.

Sáenz, C. (1999). *Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades.* Madrid: ICE de la Universidad Autónoma.

Santisteban, C. (1990). *Psicometría. Teoría y práctica en la construcción de tests*. Madrid: Norma.

Sax, G. (1989). *Principles of educational and psychological measurement and evaluation.* Belmont, Ca: Wadsworth.

Scardamalia, M. (1977). Information processing capacity and the problem of horizontal décalage: A demonstration using combinatorial reasoning tasks. *Child Development*, 48 (1): 28-37.
Serrano, L., Batanero C. y Ortiz, J. J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 22, 43-50.
Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J.y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento estocástico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 10 (1): 7-25.
Shulman, L. S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en la enseñanza. En M. C. Wittrock (Ed.), *La investigación en la enseñanza* (v.1, pp. 9-92). Barcelona: Paidós.
Tejedor, F. J. (1984). *Análisis de la varianza aplicado a la investigación en pedagogía y psicología.* Madrid: Anaya.
Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada*. México: Limusa.
Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
Vallecillos, A. (1996). Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15(3): 53-81.
Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidences on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the ISI 52 Session* (Tome LVIII, Book 2, pp. 201-204). Helsinki: International Statistical Institute.
Varga, T. y Dumont, M. (1973). *Combinatoire, statistiques et probabilités de 6 à 14 ans*. París: O.C.D.L.
Weber, R. (1986). *Basic content analysis.* London: Sage.
Wilkinson, L. y la "Task Force on Statistical Inference" (1999). Statistical methods in psychology journals. *American Psychologist*, 54, 594-604.