EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE LOS FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA SOBRE PROBABILIDAD

TESIS DOCTORAL

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

NORDIN MOHAMED MAANAN
UNIVERSIDAD DE GRANADA

INDICE

INTRODUCCIÓN

La investigación que presentamos en esta Memoria está orientada a evaluar el conocimiento del contenido matemático y didáctico de los futuros profesores de educación primaria sobre la probabilidad. El marco teórico utilizado ha sido el Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) propuesta por Godino y colaboradores.

La elección del tema viene determinada por el estudio exploratorio realizado en el periodo de Investigación Tutelada (Mohamed, 2006). Este estudio nos sirvió de motivación para seguir trabajando en la misma línea de investigación, puesto que los resultados mostraron que los futuros profesores tenían dificultades para resolver problemas elementales de probabilidad. Para analizar si estas dificultades también persisten en otros conceptos probabilísticos, planteamos un estudio más amplio, que completa y continúa el anterior, sobre los conocimientos de los futuros profesores de educación primaria sobre la probabilidad.

Para ello se elaboraron dos nuevos cuestionarios. El primero, para evaluar el conocimiento matemático de los futuros profesores de educación primaria, incluía un mayor número de problemas y contemplaba los diferentes significados de la probabilidad. El segundo cuestionario, incluía cuatro problemas de probabilidad con respuestas de alumnos de primaria, donde los futuros profesores debían responder a unas cuestiones, para así poder evaluar su conocimiento didáctico.

La memoria se estructura en siete capítulos, el primero de los cuales es esta introducción. El capítulo 1, se inicia con el planteamiento del problema de investigación, resaltando su importancia, resumiendo el marco teórico y el marco curricular sobre el que fundamentamos nuestro estudio. También se describen con detalle los objetivos, hipótesis y la metodología empleada en el estudio.

En el capítulo 2, se presentan los antecedentes de esta investigación, que se ha organizado en dos partes diferenciadas. En primer lugar, se realiza un análisis detallado de las investigaciones relacionadas con la formación de profesores y la probabilidad. Hay muchos estudios recientes sobre formación de profesores, pero son escasos los que tratan el tema específico de la probabilidad, en particular sobre los conocimientos de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. Por ello, la ICMI (*International Commission on Mathematics Education*) y la IASE (*International Association for Statistics Education*) han promovido que se realicen investigaciones sobre estadística y probabilidad (Batanero, Burrill y Reading, 2011). En segundo lugar, analizamos las investigaciones relacionadas con la comprensión de probabilidad por parte de los estudiantes.

En el Capítulo 3, se presenta un estudio exploratorio, realizado en el periodo de Investigación Tutelada (Mohamed, 2006), obteniendo una evaluación inicial del conocimiento de los futuros profesores para resolver problemas elementales de probabilidad, comparando los resultados con los obtenidos por los niños de 10-14 años, que participaron en la investigación de Cañizares (1997). La muestra estaba constituida por 102 futuros profesores de educación primaria y el cuestionario incluía 7 problemas tomados de Green (1983) y Fischbein y Gazit (1984). Las investigaciones sobre el conocimiento de los docentes de la probabilidad eran y son escasas, por lo que esperábamos contribuir con este primer estudio exploratorio a la mejora de la formación de profesores en probabilidad y a la calidad de la enseñanza impartida por dichos profesores a sus alumnos sobre estos temas.

En el Capítulo 4, se analiza el conocimiento común del contenido matemático de los futuros profesores sobre probabilidad. Los participantes fueron 283 futuros profesores de educación primaria, estudiantes de la Diplomatura de Magisterio en la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla (Universidad de Granada). El cuestionario utilizado constaba de 15 problemas tomados de Fischbein y Gazit (1984), de Green (1983) y uno de un libro de texto. Se realiza un análisis detallado de los problemas del cuestionario, de las respuestas de los futuros profesores a los problemas propuestos así como de los razonamientos que aportan para justificar sus respuestas. Los resultados se comparan con los obtenidos por los niños de 10-14 años que participaron en la investigación de Cañizares (1997) y con los obtenidos en las investigaciones previas consultadas. Por último, se realiza un análisis de los resultados globales.

En el Capítulo 5, se evalúan los conocimientos didácticos del contenido de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria, en particular el contenido especializado y el conocimiento del contenido y los estudiantes. Los participantes fueron 31 grupos (de dos o tres estudiantes cada uno), el cuestionario utilizado constaba de cuatro problemas tomados del cuestionario anterior, al que le hemos añadido unas cuestiones para evaluar el conocimiento didáctico de los futuros profesores.

En el Capítulo 6, se presentan las principales conclusiones obtenidas en el estudio respecto a los objetivos generales de la investigación, indicando además las principales aportaciones derivadas del mismo y sus limitaciones. Finalizamos con algunas implicaciones didácticas para la formación de profesores y sobre posibles líneas de investigación para continuar el trabajo.

En la actualidad observamos un interés en España en adelantar el estudio de los fenómenos aleatorios y la probabilidad a la Educación Primaria, como puede observarse en los currículos escolares del Ministerio de Educación y Ciencia (2006a), donde proponen un cambio de contenidos y metodología. Ahora bien, la consecución de estos objetivos requiere una formación adecuada del futuro profesor de educación primaria (Stohl, 2005), tanto en los contenidos matemáticos como en los contenidos pedagógicos de la probabilidad. Por ello, resulta de interés realizar una evaluación inicial de los conocimientos previos de los futuros profesores de educación primaria para diseñar un programa de instrucción adecuado.

En resumen, nuestro estudio pretende aportar información sobre la formación de profesores y la probabilidad en un ámbito en el que hay pocas investigaciones. Esperamos que pueda ser de utilidad a otros investigadores que se interesen por el tema y para definir futuras líneas de investigación que permitan continuar el camino emprendido.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA Y FUNDAMENTOS DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha producido una reforma de la enseñanza obligatoria, que concede un mayor peso al estudio de la Probabilidad. Los nuevos decretos de Enseñanzas Mínimas de Educación Primaria del Ministerio de Educación (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a), en el Bloque de contenidos 4, *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*, incluyen contenidos sobre reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana, vocabulario relacionado, descripción y cuantificación de situaciones aleatorias, y planificación y realización de experimentos simples para estudiar el comportamiento de los fenómenos aleatorios. Otros currículos (por ejemplo, National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Secretaría Educación Pública, 2006) enfatizan la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y sugieren transmitir al niño un lenguaje elemental probabilístico mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, para que llegue al final de la etapa a asignar algunas probabilidades sencillas.

Para conseguir estos objetivos, un punto fundamental es la formación de los profesores que han de llevar a cabo la enseñanza (Stohl, 2005). Sin embargo, el gran esfuerzo de investigación sobre formación de profesores realizado en los últimos años (por ejemplo, Brown y Borko, 1992; Thompson, 1992; Llinares y Krainer, 2006; Hill, Ball y Schilling, 2008; Wood, 2008), apenas se ha tenido en cuenta en el caso específico de la formación de profesores para enseñar probabilidad, como se puede comprobar en el survey de Jones (2007). Una excepción ha sido el *Joint ICMI/IASE Study Statistics in School Mathematics* (Batanero, Burrill, Reading y Rossman, 2008).

En este capítulo presentamos el problema de investigación que es evaluar los conocimientos de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad, todos ellos estudiantes de la Diplomatura de Magisterio en la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla (Universidad de Granada). En este estudio, que se inscribe en la línea de investigación de Educación Estadística, del Departamento de Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Granada, continuamos los trabajos sobre probabilidad y futuros profesores de educación primaria (por ejemplo, Azcárate 1995; Cardeñoso, 2001; Estrada, 2002; Mohamed, 2006; Arteaga, 2011; Contreras, 2011), y otros sobre la probabilidad y estudiantes de educación secundaria y universitarios (Serrano, 1996; Ortiz, 1999; Sánchez, 1999; Mayén 2009). También aportamos información complementaria sobre el conocimiento pedagógico del contenido de la probabilidad de los futuros profesores.

A continuación se presentan algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática propuesto por Godino y sus colaboradores, que ha sido el marco teórico utilizado en este estudio. Seguidamente se realiza un análisis del objeto matemático "probabilidad" y del contenido que sobre este tema aparece en los programas formativos de los futuros profesores de educación primaria, en la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla, y en los currículos escolares de los niveles educativos anteriores a la universidad. Por último, se detallan los objetivos y las hipótesis de esta investigación y se describe la metodología seguida en los diferentes apartados que la componen.

1.2. IMPORTANCIA DE LA PROBABILIDAD EN LA FORMACIÓN DE LOS PROFESORES

El interés por mejorar la enseñanza de la probabilidad en todos los niveles educativos se ha producido en España y en otros países, como se puede comprobar en estudios recientes.

En el nivel universitario, concretamente en la formación de profesores de educación primaria, la enseñanza de la probabilidad suele estar presente en los programas formativos de las Facultades de Educación, aunque con una presencia escasa, como veremos más adelante, al comentar el itinerario formativo de los futuros profesores de educación primaria en la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla, Universidad de Granada.

Consideramos que esta investigación y sus resultados revisten importancia para el campo de la Didáctica de la Matemática, por dos motivos fundamentales:

Por un lado, debido a la importancia que ha adquirido la estadística y la probabilidad en nuestra sociedad actual, por su gran aplicabilidad en otras disciplinas y por la relevancia que se pretende tenga en la enseñanza de nuestros alumnos, como queda patente en los currículos escolares de los últimos años en España y otros países (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006 a y b; Secretaría de Educación Pública, 2006; National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

Por otro lado, como indica Stohl (2005), el éxito de cualquier currículo de probabilidad que trate de desarrollar la capacidad de razonamiento probabilístico de los alumnos depende, en gran medida, de la comprensión de los temas de probabilidad y de su conocimiento pedagógico del contenido por parte de los profesores. De ahí, la importancia de este tipo de investigaciones sobre probabilidad y formación de profesores, destacada por Shulman (1986) y Ball (2000), que nos puede aportar información sobre el conocimiento y las creencias de los profesores en lo referente al tema de probabilidad, lo que nos puede orientar sobre cuáles han de ser los contenidos a tratar en los programas de formación del profesorado así como en los cursos de formación continua dirigidos a profesores en práctica o en activo.

Está recogido en algunas investigaciones (Azcárate, 1995; Cardeñoso, 2001; Mohamed, 2006; Contreras, 2011; Arteaga, 2011) que, en general, la mayoría de profesores de educación primaria no han tenido ningún tipo de experiencia o muy poca sobre estos temas, y presentan gran dificultad en la resolución de problemas de probabilidad. Para corregir esta situación, a veces, se organizan cursos dirigidos a profesores, que suelen tener un contenido más bien teórico sobre estadística y algo de probabilidad, pero que no responden a las necesidades que tienen los docentes para desarrollar una enseñanza de calidad. Sin embargo, sin una formación específica muchos profesores deben confiar en sus creencias e intuiciones, presentando en algunos casos conceptos erróneos similares a los mostrados en nuestro estudio (Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006).

Por último, indicar que la investigación sobre el conocimiento de los profesores de la probabilidad es escasa, como se ha indicado anteriormente, por lo que esperamos contribuir con esta tesis a la mejora de la formación de profesores en probabilidad y a la calidad de la enseñanza impartida por dichos profesores a los alumnos de primaria sobre estos temas.

1.3. MARCO TEÓRICO

En este apartado presentamos algunos elementos del marco teórico que servirá de base a este estudio, denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática, propuesto por Godino y sus colaboradores: Teoría de los significado institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1998a y b); Teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005); Enfoque Ontosemiótico para la investigación en Didáctica de la Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) y Modelos del Conocimiento de los profesores (Godino, 2009; Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi, 2011). A partir de ahora utilizaremos el acrónimo EOS para referirnos a dicho marco teórico.

Describimos a continuación sus características generales y posteriormente los elementos que utilizaremos en esta investigación.

1.3.1. INTRODUCCIÓN

Este marco teórico adopta un punto de vista pragmático-antropológico sobre el conocimiento matemático, proponiendo tres dimensiones en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: epistemológica, cognitiva e instruccional. Cada una de ellas se aborda con herramientas agrupadas en tres modelos teóricos: teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1998 a y b); teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005) y teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006).

Este enfoque teórico considera la matemática desde un triple punto de vista: es una actividad humana, que implica la resolución de problemas (externos o internos a la disciplina) socialmente compartida; es un sistema conceptual organizado lógicamente; y un lenguaje simbólico, que sirve para expresar las ideas y las operaciones con los objetos matemáticos. En esta teoría, el concepto de situación-problema se toma como noción primitiva y es el punto de partida. A partir de esta idea los autores definen los conceptos de práctica, objeto, en sus dimensiones personal e institucional, y significado, que describimos a continuación.

1.3.2. SISTEMAS DE PRÁCTICAS

En este enfoque se considera la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Por ejemplo, en un problema de toma de decisión, en un ambiente de incertidumbre, como es la situación de escoger entre dos urnas con bolas blancas y negras, cuál es la que da mayor probabilidad de sacar una ficha de un determinado color, una práctica matemática puede ser elegir la urna para la cual es mayor el cociente entre el número de casos favorables y posibles en el experimento.

El interés en matemáticas, en general, no se centra en los problemas aislados sino en los campos de problemas, como conjunto de problemas para los cuales puede ser válida una misma solución o soluciones similares. Los problemas son generalmente compartidos por distintas personas, de donde surge la idea de institución. Una institución, para Godino y Batanero (1994), está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. En el problema anterior, hemos descrito una práctica usual en la institución matemática, que ha dado origen al objeto “probabilidad clásica” (Batanero, 2005).

Cuando una persona es miembro de una institución, puede ocurrir a veces que el significado que atribuye a los objetos matemáticos, no sea totalmente acorde con el que se acepta como válido dentro de la institución. Por ejemplo, algunos alumnos de primaria creen posible controlar los fenómenos aleatorios, y ésta sería una práctica no adecuada, desde el punto de vista de la institución de enseñanza de la probabilidad.

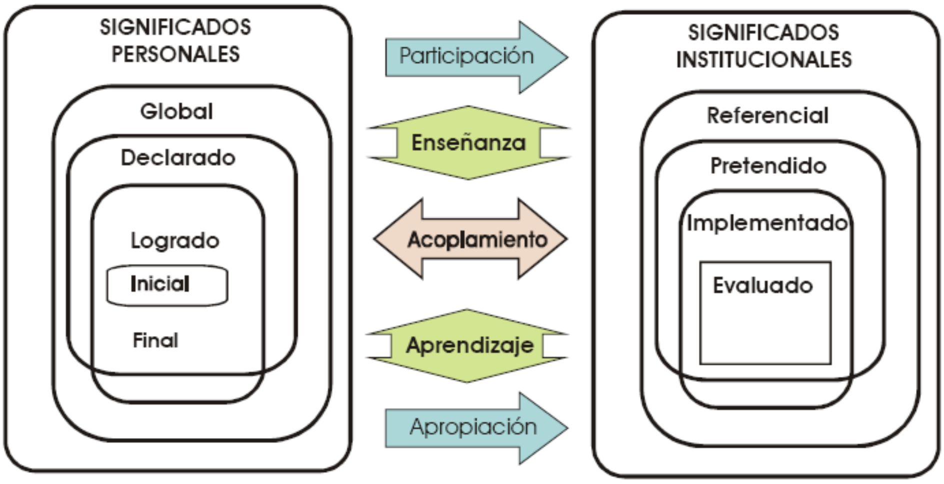
Por ello, en la teorización propuesta por Godino y Batanero se diferencia entre significados personales (subjetivos) e institucionales (objetivos) de los objetos matemáticos. Así cuando nos preguntamos qué es y qué significa la probabilidad, en este modelo teórico se propone como respuesta, “el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de problemas en los cuales se necesita calcular la probabilidad de un suceso en un experimento aleatorio”

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su uso en el análisis didáctico lleva a introducir en el EOS la siguiente tipología de significados (Figura 1.3.1). Respecto al significado institucional, se proponen los siguientes tipos: Pretendido, qué se pretende enseñar de la probabilidad; implementado, qué se logra enseñar; evaluado, qué parte se evalúa y referencial, qué parte de la probabilidad se considera en una enseñanza.

Respecto al significado personal, se proponen los siguientes tipos: Global, todo lo que el sujeto es capaz de manifestar sobre la probabilidad; declarado, lo que hemos conseguido evaluar, una vez realizada la evaluación y logrado, la parte del conocimiento que está conforme con el significado institucional. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se considera como errores de aprendizaje.

En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesa tener en cuenta los significados logrados iniciales de los estudiantes y los logrados que finalmente alcanzan. En la parte central de la figura 1.3.1 se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que suponen el acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales.

Figura 1.3.1. Tipos de significados institucionales y personales



1.3.3. OBJETOS EMERGENTES E INTERVINIENTES EN LOS SISTEMAS DE PRÁCTICAS

Se indica, en este modelo, que cuando se realizan prácticas matemáticas intervienen objetos matemáticos que evocamos y que son representados en forma textual, oral o gráfica. Por ejemplo, al resolver el problema de calcular la probabilidad de un suceso en un experimento aleatorio, donde se puede aplicar el enfoque clásico de probabilidad, intervienen los objetos "casos favorables", "casos desfavorables" y "casos posibles", así como "división" y "recuento de casos". Por otro lado, de los sistemas de prácticas emergen nuevos objetos (en el ejemplo, la probabilidad de un suceso sería la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables). Si los sistemas de prácticas son compartidos en una institución, los objetos emergentes son “objetos institucionales” y si corresponden a una persona son “objetos personales”.

Godino y Batanero (1998 a y b), proponen la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, que denominan “elementos del significado” (entendiendo el significado en el sentido sistémico-pragmático) y que a su vez se organizan en sistemas conceptuales y teorías:

- Situaciones-problemas (aplicaciones matemáticas y extra-matemáticas, ejercicios, …): Para el caso de la probabilidad, serían situaciones-problemas, por ejemplo, de comparación de probabilidades, con todos los sucesos equiprobables, donde sería útil el enfoque clásico de la probabilidad; de ruletas con áreas desiguales, donde sería preciso acudir a otros significados de la probabilidad, como la probabilidad de tipo frecuencial o probabilidad de tipo geométrica.

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos,…): por ejemplo, las palabras, “aleatorio”, “suceso”, probabilidad; los símbolos, “A”, P(A), P(A B), así como gráficos y diagramas utilizados.

- Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones): por ejemplo, las definiciones de probabilidad clásica y de probabilidad axiomática.

- Proposiciones (enunciados sobre conceptos): por ejemplo, que el valor de la probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1.

- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,…): por ejemplo el algoritmo que se utiliza para calcular la probabilidad según la regla de Laplace: p (A) = nº de casos favorables/nº de casos posibles.

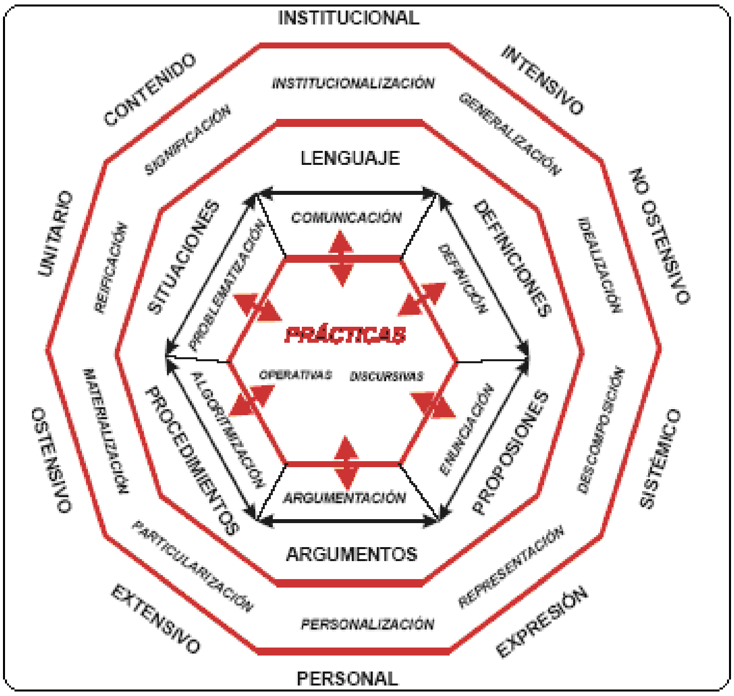
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,…). Finalmente, todas estas acciones y objetos se ligan entre sí mediante argumentos o razonamientos que se usan para comprobar las soluciones de los problemas o explicar a otro la solución. La forma usual de demostración en matemáticas es la deductiva, que es la más extendida en los libros universitarios. Este tipo de argumentación se completa o sustituye por otras como la búsqueda de contraejemplos, generalización, análisis y síntesis, simulaciones con ordenador, demostraciones, etc.

Según Godino, Batanero y Font (2007), estos seis tipos de elementos amplían la distinción habitual entre conceptos y procedimientos, pudiendo hablar entonces de comprensión conceptual y procedimental, pero también de lingüística o argumentativa, etc.

La situación-problema (por ejemplo, plantear y resolver un problema de probabilidad) es el origen de la actividad matemática; el lenguaje sirve para representar los problemas, conceptos, proposiciones y procedimientos; los argumentos justifican los procedimientos y las soluciones de los problemas así como las proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Como vemos en la figura 2 cada uno de estos objetos tiene asociado un proceso matemático: problematización, comunicación, definición, enunciación, argumentación y algoritmización (Godino, Batanero y Font, 2007). Además estos autores contemplan dichos objetos desde las siguientes dimensiones duales: personal/institucional, unitaria/sistémica expresión/contenido, ostensiva/no-ostensiva y extensiva/intensiva.

Figura 1.3.2. Tipos de objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas



También en la figura 1.3.2 observamos que se consideran una serie de procesos asociados a estas dualidades: generalización-particularización, institucionalización-personalización, representación-significación; descomposición-reificación; idealización-materialización.

Configuraciones de objetos

Los seis tipos de entidades elementales, descritas anteriormente, están relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas (Godino, Batanero y Font, 2007). Por ejemplo, podemos considerar la configuración "probabilidad clásica", que incluye todos los elementos de significado asociados a la misma, y que será diferente de otra configuración "probabilidad frecuencial". Todas ellas forman parte de una configuración global "Probabilidad: diferentes enfoques". Estas configuraciones, según los autores, se clasifican en epistémicas (redes de objetos institucionales) y cognitivas (redes de objetos personales).

1.3.4. RELACIONES ENTRE OBJETOS: FUNCIONES SEMIÓTICAS Y SUS TIPOS.

Para estudiar las relaciones entre estas entidades elementales (situaciones problemas, lenguajes, conceptos…), los autores utilizan la noción de función de signo de Hjelmslev (1943) y de la noción de función semiótica de Eco (1979), para referirse a la correspondencia entre un significante (expresión) y un significado (contenido), establecido por un sujeto (persona o institución), de acuerdo con un cierto código o regla de correspondencia. Por ejemplo, usamos la expresión "probabilidad clásica" para referirnos a la regla de Laplace, que indica que la probabilidad de un suceso es igual al cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que todos los sucesos sean equiprobables y el espacio muestral asociado al experimento sea finito. En este ejemplo, observamos que la regla de correspondencia entre la palabra "probabilidad clásica" y la fórmula establecida por Laplace, como ocurre en general, se ha establecido en la institución matemática.

Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), por ejemplo cuando usamos el símbolo P(A) para representar la expresión "probabilidad de A"; instrumental (un objeto usa a otro u otros como instrumento), como cuando usamos la simulación para estudiar un fenómeno aleatorio; y por último, estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos), como ocurre en la expresión: $0 \leq P(A) \leq 1$, donde cada uno de los símbolos nos remite a un objeto abstracto y la expresión completa a una relación entre los mismos.

Los cinco tipos de entidades considerados pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas. De este modo, las funciones semióticas y la ontología matemática introducida en el modelo teórico descrito, tienen en cuenta la naturaleza relacional de las matemáticas y generalizan la noción de representación, que no queda asumido en exclusividad por el lenguaje.

1.3.5. EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO

El objetivo principal de este trabajo es evaluar el conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. La investigación sobre formación de profesores diferencia entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento de contenido pedagógico. Este último sería “la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza” o bien “esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional” (Shulman, 1986, p. 8-9).

Ball, Lubienski y Mewborn (2001) hablan del conocimiento matemático para la enseñanza, que se describe en Hill, Ball y Schilling (2008) como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno.” (p. 374). Dentro del conocimiento del contenido matemático distinguen entre Conocimiento Común del Contenido (CCC), Conocimiento Especializado del Contenido (CEC), y Conocimiento en el Horizonte Matemático (CHM). Mientras el conocimiento común del contenido es el puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona, el conocimiento especializado del contenido incluye aspectos que no necesariamente tiene una persona ordinaria, por ejemplo, elegir una secuencia de enseñanza o identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema. El “conocimiento en el horizonte matemático” aporta perspectiva a los profesores para su trabajo, e incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias, o la historia de las matemáticas. Para el conocimiento pedagógico del contenido Hill, Ball y Schilling (2008) proponen tener en cuenta el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (CCE), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (CCEn), y Conocimiento del Currículo (CC). El Conocimiento del Contenido y los Estudiantes es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular” (p. 375). Incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático. Respecto al Conocimiento del Contenido y la Enseñanza resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas.

En esta investigación seguiremos a Godino (2009) y Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi (2011), quienes construyen un modelo de niveles y facetas del conocimiento matemático didáctico del profesor que engloba los citados anteriormente y propone, asimismo una guía para la formulación de cuestiones de evaluación de dicho conocimiento. Sin entrar en el detalle de todas las categorías de conocimientos contemplados en el modelo propuesto por Godino, sí utilizaremos la metodología sugerida por el autor que consiste en dos pasos:

1. Elegir una tarea matemática cuya solución ponga en juego los principales aspectos del contenido, o de las competencias a desarrollar;

2. Formular consignas que cubran las distintas (o principales) facetas y niveles de análisis didáctico del modelo propuesto. Para evaluar el conocimiento común del contenido, dicha consigna consistiría en resolver el problema; para evaluar el conocimiento especializado del contenido consistiría en identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución; para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes, una consigna posible sería describir los razonamientos que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta o los principales conflictos en dicha solución.

La finalidad de este trabajo es evaluar los conocimientos de los futuros profesores de educación primaria en relación con la idea de probabilidad. Más concretamente, nos centraremos en el conocimiento común y especializado del contenido y en el conocimiento del contenido y los estudiantes, utilizando la metodología y tipos de consignas sugeridas para estos conocimientos en Godino (2009).

La diferenciación entre objeto y significado de un objeto supone también el reconocimiento de la problemática de la evaluación de los estudiantes. Estos conocimientos tendrían un carácter inobservable, sin embargo las prácticas explicitadas durante la resolución de los problemas propuestos serían los indicadores empíricos utilizables en la evaluación de dicho conocimiento.

1.3.6. EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Godino, Batanero y Font, 2007). Los posicionamientos pragmatistas del EOS llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental. Se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas, lo cual implica concebirla también como "conocimiento y aplicación de las normas" que regulan la práctica.

Por otra parte, si se tiene en cuenta el papel esencial que las funciones semióticas, definidas anteriormente, tienen en el proceso relacional entre los objetos matemáticos activados en las prácticas, se puede interpretar la comprensión de un objeto matemático O por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como expresión o contenido.

Godino (1996) ya nos indica que sólo podemos observar las prácticas personales o significado, y no la comprensión personal del futuro profesor. La evaluación de la comprensión la haríamos a través del enfoque Ontosemiótico (EOS) y sería la correspondencia entre significados personales e institucionales. Por tanto, la institución donde se realiza la evaluación va a determinar si el estudiante "comprende" el significado de un objeto. Para evaluar la comprensión de este objeto por parte del estudiante, vamos a necesitar indicadores empíricos que en nuestro caso serán las prácticas observables.

En la investigación además de evaluar el conocimiento de los futuros profesores sobre probabilidad se pretende analizar qué parte de este conocimiento está de acuerdo con el conocimiento institucional y cuál indica dificultades de aprendizaje.

El instrumento de evaluación es un cuestionario con 15 problemas tomados de Fischbein y Gazit (1984), de Green (1983) y de un libro de texto, utilizados en investigaciones previas en las que han sido evaluados y han dado resultados probados. El cuestionario resultante define un nuevo significado que sería el significado evaluado.

Por último, el instrumento se prueba con una muestra de estudiantes. Las respuestas de cada estudiante a cada problema van a depender de ciertos factores (como el interés, cansancio y otros), y reflejan el significado declarado que es la parte a la que el investigador puede acceder.

1.3.7. LA PROBABILIDAD COMO OBJETO MATEMÁTICO

En este apartado se analiza el objeto matemático *probabilidad* y algunos objetos relacionados con él. Para ello hemos utilizado la tipología de objetos matemáticos primarios, propuesta en Godino y Batanero (1998 a y b), que denominan “elementos del significado” (entendiendo el significado en el sentido sistémico-pragmático) y que a su vez se organizan en sistemas conceptuales y teorías.

1.3.7.1. SITUACIONES PROBLEMAS

En el cuestionario utilizado en este estudio hemos propuesto diferentes situaciones problemas, que son elementos del significado del objeto matemático *probabilidad* y que, según Batanero (2005), representan el significado de la misma. Entre ellas se han planteado, problemas relacionados con los conceptos de espacio muestral, aleatoriedad, juegos equitativos, asignación de probabilidades simples, probabilidad condicional, muestreo, probabilidad frecuencial, variable aleatoria y probabilidad compuesta.

1.3.7.2. CONCEPTOS Y PROPIEDADES

Algebra de sucesos

Un experimento es determinista si realizado en las mismas condiciones sólo tiene un resultado posible. Sin embargo, un *experimento es aleatorio* si realizado en las mismas circunstancias se pueden obtener resultados diferentes.

Los resultados posibles de un experimento aleatorio son los *sucesos aleatorios*. Si se pueden descomponer en más elementos simples, se denominan *sucesos compuestos*; en caso contrario se llaman *sucesos elementales*.

El *espacio muestral* está formado por todos los sucesos elementales posibles de un experimento aleatorio. También se denomina *suceso seguro*.

Entre los sucesos se pueden definir las siguientes operaciones:

La *unión* de dos sucesos A y B, que se representa $A \cup B$, es el suceso formado por todos los elementos de A o B. El suceso $A \cup B$ se cumple cuando ocurre uno de ellos o los dos. En general, la unión de los sucesos $(A_i)_{i \in I}$, es el suceso que se verifica si y sólo si se cumple al menos uno de los sucesos A_i. Se representa por

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

La *intersección* de dos sucesos *A* y *B*, que se representa $A \cap B$, es el suceso formado por los elementos comunes de *A* y *B*. El suceso $A \cap B$ se verifica cuando ocurren los dos sucesos *A* y *B*. En general, la intersección de los sucesos $(A_i)_{i \in I}$ es el suceso que se cumple si y sólo si se cumplen simultáneamente todos los A_i. Se representa por

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

Los sucesos *A* y *B* son *incompatibles*, si $A \cap B = \emptyset$, siendo $\emptyset$ el *suceso imposible*, es decir, el resultado de la intersección de dos sucesos incompatibles es otro suceso que no se puede realizar.

A cada suceso *A* posible en un experimento asociaremos otro suceso $\overline{A}$ que llamaremos *suceso contrario* del dado, tal que $\overline{A}$ se cumple si y sólo si no se cumple *A*.

Álgebra de Boole de sucesos: el conjunto *P*(*E*) de todos los posibles sucesos asociados a un experimento aleatorio es cerrado para las operaciones $\cup$ y $\cap$, y puede demostrarse que cumple las propiedades de un Algebra de Boole. Si el espacio muestral *E* es finito, todos los sucesos pueden obtenerse mediante un número finito de operaciones entre sucesos elementales. Si el espacio muestral *E* es infinito, se define la estructura de *σ-Algebra de sucesos* como una clase de sucesos que es cerrada para la unión e intersección numerable.

Axiomas de probabilidad de Kolmogorov

En primer lugar, indicamos las propiedades de la frecuencia relativa para fenómenos aleatorios, que sirven de base intuitiva para la definición de los axiomas de la probabilidad de Kolmogorov:

1. La frecuencia relativa $\mathrm{h(A)}$ con que aparece un mismo resultado *A* en una serie idéntica de experimentos es un número comprendido entre 0 y 1.
2. Para cualquier número *n* de realizaciones del experimento, $\mathrm{h(E)} = 1$, el suceso seguro aparece con frecuencia relativa a uno.
3. Para cualesquiera sucesos *A* y *B* incompatibles asociados a un mismo experimento, $\mathrm{h(A \cup B)} = \mathrm{h(A)} + \mathrm{h(B)}$.
4. Cuando aumentamos el número de pruebas, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse alrededor de un valor fijo. Este valor es el que, en la concepción frecuencial, se define como probabilidad del suceso. Este hecho es conocido como *ley del azar* o ley de estabilidad de las frecuencias.

Los axiomas están basados en la abstracción de las propiedades citadas en las frecuencias relativas. Sea *E* el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y $\mathcal{A}$ un σ-álgebra de sucesos de *E*. Una función *P* definida sobre $\mathcal{A}$ es una medida de probabilidad si:

1. A todo suceso $A \in \mathcal{A}$ corresponde un número $P(A)$, tal que $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. La probabilidad del suceso seguro es uno ($P(E)=1$).
3. Si $(A_i)_{i \in I}$ son sucesos incompatibles dos a dos, siendo el conjunto de índices *I* finito o numerable, se verifica:

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

La terna $(E, \mathcal{A}, P)$ se llama espacio probabilístico.

Consecuencias de los axiomas:

a) *Probabilidad del suceso contrario*:

$$\forall A \in \mathcal{A}\ P(\bar{A}) = 1 - P(A).\ \text{En particular, } P(\emptyset) = 0$$

b) *Probabilidad de la unión de sucesos compatibles*:

Para todo par de sucesos A y B del álgebra $\mathscr{A}$, si (la intersección es distinta de $\emptyset$) $A \cap B \neq \emptyset$, se verifica:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

c) *Regla de Laplace*:

Sea E el espacio muestral asociado a un cierto experimento. Supongamos que se cumplen las dos condiciones siguientes:

- *E* consta de un número finito de elementos, y
- todos los sucesos elementales son igualmente probables.

En dicho caso, para todo suceso $A \subset E$, asociado al experimento se cumple:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

siendo k el número de sucesos elementales que componen el suceso *A* y *n* el número de elementos de *E*.

Las *probabilidades geométricas* se aplican cuando se trata de un espacio muestral infinito no numerable. Se elige un punto aleatoriamente dentro de un subconjunto *E* de R^n con medida finita $\mu(E)$. *E* es un cuadrado, esfera, circunferencia, etc., y μ la superficie, volumen o longitud, según el caso tratado. Se toma como álgebra de sucesos $\mathscr{A}$ la clase de subconjuntos de *E* que son medibles respecto a μ. Para cada suceso $A \in \mathscr{A}$ se define

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(E)}$$

la probabilidad de un suceso *A* es la fracción que representa su medida respecto a la de *E*. $(E, \mathscr{A}, P)$ es un espacio probabilístico.

Para resolver los problemas en los que se aplica la regla de Laplace, se deben determinar todos los casos posibles. Para realizar el recuento de todos los resultados posibles es importante el razonamiento combinatorio y conocer las diferentes muestras que se pueden formar a partir de un grupo dado, según sea con reemplazamiento y sin reeemplazamiento y ordenadas o no ordenadas. Entre ellas se distinguen: variaciones y combinaciones sin repetición y con repetición.

Probabilidad condicional. Dependencia

El concepto de probabilidad condicional se introduce en aquellas situaciones donde podemos tener alguna información sobre la ocurrencia de sucesos relacionados con el suceso que nos interesa.

Sea (E, $\mathcal{A}$, P) el espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio y A y B dos resultados posibles de dicho experimento. Si en N pruebas ha resultado N_A veces el suceso A, y entre éstas ha resultado $N_{A\cap B}$ veces el B, la frecuencia relativa del suceso B entre las veces que se ha producido A es:

$$h(B|A) = \frac{N_{A\cap B}}{N_A} = \frac{(N_{A\cap B}|N)}{(N_A|N)} = \frac{h(A\cap B)}{h(A)}$$

Al aumentar el número de pruebas N, las frecuencias relativas de A y $\mathrm{A\cap B}$ oscilarán alrededor de las probabilidades $\mathrm{P(A)}$ y $\mathrm{P(A\cap B)}$. Por ello, siempre que $\mathrm{P(A)} > 0$, la frecuencia de $\mathrm{h(B|A)}$ oscilará alrededor del cociente:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

que se define como la probabilidad condicional del suceso B cuando se ha realizado el suceso A.

Un ejemplo de probabilidad condicional puede ser el siguiente: al lanzar un dado, sea A el suceso obtener el número 3 y B el suceso obtener número impar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número obtenido sea 3, supuesto que ha resultado un número impar?

Tenemos:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\};\ A = \{3\};\ B = \{1,3,5\}$$

$$A\cap B = \{3\}$$

Por tanto, se cumple:

$$P(A) = \frac{1}{6}; P(B) = \frac{3}{6};$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

Para $A\in\mathcal{A}$ fijo, con $\mathrm{P(A)} > 0$, la probabilidad P_A: $\mathcal{A}\rightarrow$ $[0,1]$ definida por $P_A(B)= P(B|A)$ es una medida de probabilidad sobre (E,$\mathcal{A}$), que verifica los axiomas y, en consecuencia, todos los teoremas que se deducen de los mismos.

Probabilidad de la intersección de sucesos

De la definición de la probabilidad condicional obtenemos las expresiones:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A), \qquad P(A) > 0$$
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B), \qquad P(B) > 0$$

Esta regla se conoce como Teorema de la probabilidad compuesta o del producto, que puede generalizarse:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B); \;\; P(A \cap B) > 0$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1});$$

$$P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$$

Un ejemplo puede ser el siguiente: supongamos que una urna contiene 3 bolas azules y 2 bolas amarillas y nos preguntamos cuál será la probabilidad de que, tomando 3 bolas de la urna, sin reemplazamiento, las 3 sean azules.

A_1 suceso la primera bola es azul

A_2 suceso la segunda bola es azul

A_3 suceso la tercera bola es azul

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

Dependencia e independencia

A veces, la probabilidad de un suceso *B* condicionada por otro *A* es la misma probabilidad que la probabilidad del suceso *B*, cuando no se impone ninguna condición. Esta propiedad se utiliza para la definición de *dependencia e independencia* entre sucesos aleatorios.

Sean *A* y *B* dos sucesos aleatorios asociados a un mismo experimento, de forma que $\mathrm{P(B)} > 0$. Decimos que *A* no depende de *B* cuando $\mathrm{P(A|B)} = \mathrm{P(A)}$ y que *A* depende de *B* cuando $\mathrm{P(A|B)} \neq \mathrm{P(A)}$.

En el caso de que *A* no dependa de *B* se cumple

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

por tanto, si $P(A) > 0, P(B|A) = P(B)$,por lo cual *B* tampoco depende de *A*.

Dos sucesos son dependientes o independientes mutuamente. De igual modo, si *A* y *B* son independientes, también lo son *A* y $\overline{B}$, $\bar{A}$ y *B*, y $\bar{A}$ y$\bar{B}$.

Dada una colección de *n* sucesos A_1, A_2 , … , A_n los llamamos mutuamente independientes si la probabilidad de la intersección de *k* sucesos cualesquiera entre los n dados, es el producto de las probabilidades de estos *k* sucesos. Si esta relación es cierta sólo para $k = 2$, se dice que los sucesos son independientes dos a dos.

Experimentos compuestos. Experimentos independientes

Con frecuencia, se consideran varios experimentos que se realizan sucesivamente, de forma que las condiciones de cada uno de ellos pueden o no ser influidas por el resultado de los precedentes. Sean (E_1, $\mathscr{A}_1$, P_1) los espacios probabilísticos asociados a n experimentos. Llamamos espacio producto al (E, $\mathscr{A}$, P), en el que E es el producto cartesiano E_1 x … x E_n, $\mathscr{A}$ es el algebra engendrada por los productos A_1 x … x A_n, donde $A_1 \in \mathscr{A}_1$, … , $A_n \in \mathscr{A}_n$ y P es una medida de probabilidad sobre (E, $\mathscr{A}$).

Diremos que los experimentos considerados son independientes si y sólo si para todo suceso A_1 x … x A_n, $A_i \in \mathscr{A}_i$ se cumple:

$$P(A_1 x \dots x A_n) = P_1(A_1) \dots P_n(A_n)$$

Ensayos repetidos en las mismas condiciones

Un ejemplo bastante significativo de experimento compuesto es el de ensayos independientes, consistente en la repetición sucesiva de ese mismo experimento. El espacio probabilístico asociado es el espacio producto (E^n, $\mathscr{A}^n$, P), siendo E^n el producto cartesiano *n* veces de *E*, y $\mathscr{A}^n$ el álgebra engendrada por productos cartesianos de *n* elementos de *A*.

Se define una medida de probabilidad sobre (E^n, $\mathscr{A}^n$), mediante la igualdad $P(A_1 x \dots x A_n) = P_1(A_1) \dots P_n(A_n)$, en todas las σ-álgebras $\mathscr{A}_i$ coincidiendo con $\mathscr{A}$.

Variable aleatoria. Esperanza matemática

Si no estamos interesados en los resultados de un experimento, sino en una función de los mismos, es a lo que llamamos variable aleatoria.

Desde el punto de vista matemático, una variable aleatoria ξ se concibe como una función uniforme del espacio muestral *E* en un conjunto numérico, que, en general es *R*.

Si la variable ξ toma, como máximo, un conjunto numerable de valores recibe el nombre de *variable discreta*.

Sea $(x_i)_{i\in I}$ el conjunto de valores que toma una variable discreta ξ, siendo *I* un conjunto de índices finito numerable. Consideramos la sucesión $(p_i)_{i\in P}$ siendo p_i:

$$p_i = Q(x_i) = P(\xi^{-1}(x_i)),$$

es decir, p_i es la probabilidad de que ξ tome el valor x_i.

La sucesión $(x_i, p_i)_{i\in I}$ cumple las propiedades:

$$p_i \geq 0, para\ todo\ i \sum_{i\in I} p_i = 1,$$

y determina completamente a la variable ξ, recibiendo el nombre de distribución de probabilidad de la variable.

Dada una variable aleatoria discreta, con distribución de probabilidad (x_i,p_i). Se llama *esperanza matemática* o valor esperado de la variable de la suma:

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = \mu$$

Distribución binomial y normal

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que consiste en medir cuántos éxitos hay en una repetición de n ensayos de Bernouilli independientes, con una probabilidad p. En un experimento de Bernouilli sólo hay dos resultados posibles: uno de éxito con una probabilidad p y otro de fracaso con probabilidad q=1-p. En la distribución binomial el experimento se repite *n* veces de forma independiente y constituye la variable aleatoria ξ al número de éxitos, con valores comprendidos entre 0 y *n*. Supongamos que los resultados de una repetición de n ensayos independientes son *r* veces el suceso de éxito y *n-r* veces el suceso contrario. La función de probabilidad de la distribución binomial, en un experimento repetido n veces de forma independiente, consiste en calcular el número de éxitos y es:

$$P(\xi = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

Algunos ejemplos que se pueden modelizar mediante una distribución binomial pueden ser: lanzar un dado diez veces y contar el número de treses obtenidos, y lanzar una moneda dos veces y contar el número de caras que aparecen.

La distribución normal o de Gauss-Laplace es una distribución de probabilidad continua, la variable aleatoria ξ cumple la función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

donde μ y σ representan la media y desviación típica de ξ.

La importancia de la distribución normal se debe principalmente a que hay muchas variables relacionadas con fenómenos naturales que siguen el dicho modelo.

1.3.7.3. LENGUAJE

Para resolver los problemas propuestos en el cuestionario se han de utilizar diferentes expresiones, notaciones y representaciones, que son utilizadas para denotar los conceptos probabilísticos. Su importancia ha sido destacada por Orton (1990), quien indica que hay muchos aspectos del lenguaje que pueden afectar al aprendizaje de las matemáticas. Distinguimos los siguientes tipos:

Lenguaje verbal

Existe una gran variedad de expresiones que se pueden utilizar en la resolución de problemas de probabilidad. En la tabla 1.3.1 se presenta una relación alfabetizada de algunas de ellas.

Tabla 1.3.1. Lenguaje verbal utilizado en probabilidad

Asignar (probabilidad) Apuestas (acertar) Cálculo (de la probabilidad) Casi seguro Combinatoria, combinatorio Confianza Grado de incertidumbre Grado de inseguridad Equiprobable Equitativo Estimar Igualmente probables Imposible (casi imposible) Ley de Laplace Medir (la probabilidad) Muestra Muestreo Porcentaje Probable (muy, muy poco, poco, medianamente) Probabilidad	Probabilidad compuesta Probabilidad condicional Probabilidad experimental Probabilidad geométrica Probabilidad simple Probabilidad teórica Proporción Resultado Resultados favorables Resultados posibles Ruleta Sacar (una carta) Secuencia (de resultados aleatorios) Suceso Seguro Simétrica (simetría) Sondeo Suerte Tirar (un dado, moneda) Variable aleatoria

Lenguaje simbólico

Existe también una gran riqueza de símbolos utilizados para representar los diferentes objetos matemáticos que intervienen en la resolución de problemas de probabilidad, algunos de los cuales presentamos en la tabla 1.3.2.

Tabla 1.3.2.Lenguaje simbólico utilizado en probabilidad

Símbolo	Objeto matemático
A	Suceso
P(A)	Probabilidad del suceso A
$P(A^C)$	Probabilidad del suceso contrario de A
$P(A \cap B)$	Probabilidad de la intersección de dos sucesos
$P(A \cup B)$	Probabilidad de la unión de dos sucesos
P(A/B)	Probabilidad condicional de A, dado que ha ocurrido B

Representaciones

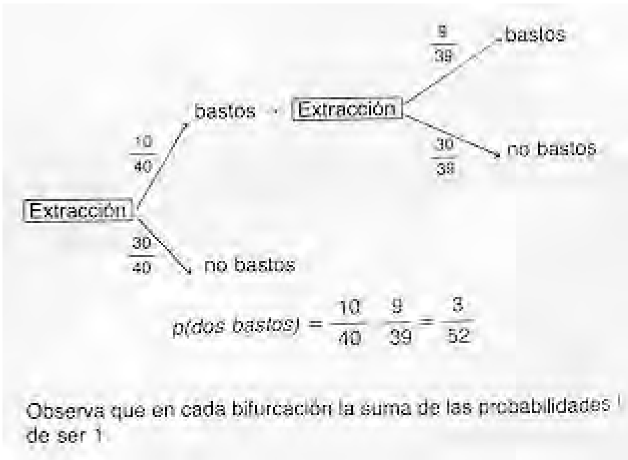
Para resolver los problemas de probabilidad se pueden utilizar diferentes representaciones que pueden ayudar a encontrar la solución. Es frecuente el uso de *tablas de doble entrada* para representar los elementos del espacio muestral en un experimento compuesto, como el siguiente ejemplo:

Al lanzar dos dados, los sucesos elementales son los 36 que aparecen en la tabla adjunta.

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Otro ejemplo es el uso del diagrama del árbol con relación a los experimentos compuestos. Sirven para representar esquemáticamente las posibilidades a favor y en contra del suceso de interés en cada paso o en cada componente de un experimento, como se muestra en la siguiente figura 1.3.4.

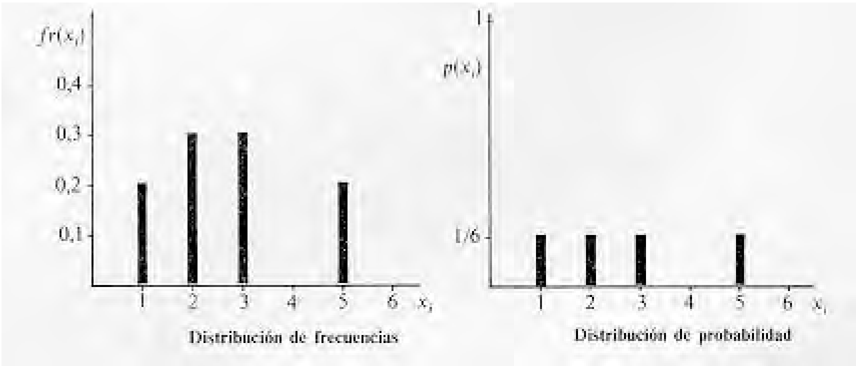
Figura 1.3.4. Diagrama del árbol



Fischbein (1975) ha subrayado el papel que estos modelos intuitivos tienen en el proceso de razonamiento matemático y en el aprendizaje y la resolución de problemas.

La utilización del diagrama de barras con relación a la variable aleatoria se presenta en el siguiente ejemplo, donde aparece un diagrama para representar la distribución de frecuencias relativas y otro para representar la distribución de probabilidad.

Figura 1.3.5. Diagrama de barras



1.3.7.4. PROCEDIMIENTOS

Para resolver los problemas propuestos en el cuestionario se han de utilizar diferentes procedimientos. Por ejemplo, para calcular la probabilidad de un suceso *A*, según la regla de Laplace, se aplica el siguiente algoritmo:

p (*A*) = nº de casos favorables/nº de casos posibles

Si se tiene en cuenta los axiomas de probabilidad de Kolmogorov, la probabilidad de un suceso *A* es una función entre el álgebra de sucesos asociado a un experimento y el conjunto de los números reales, que cumple las siguientes condiciones:

a) La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1
b) la probabilidad del suceso seguro es un $P(E) = 1$
c) La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos

Para el cálculo de la probabilidad frecuencial,nos basamos en la *Ley de los grandes números*, que establece que la frecuencia relativa de los resultados de un cierto experimento aleatorio, tienden a estabilizarse en cierto número, que es lo que denominamos probabilidad, cuando el experimento se realiza un gran número de veces.

En la probabilidad compuesta o de la intersección de sucesos, según sean sucesos independientes o dependientes, se aplican los siguientes algoritmos:

Sucesos independientes: $p(A \cap B) = p(A) . p(B)$

Sucesos dependientes: $p(A \cap B) = p(A) . p(B/A)$

Para calcular la probabilidad condicional de un suceso B, dado que ha ocurrido el suceso A, se aplica el siguiente algoritmo:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Para calcular la probabilidad geométrica de un suceso A, se aplica la siguiente fórmula:

p(A) = medida (A) /medida (E)

1.3.7.5. ARGUMENTOS

Para comprobar las soluciones de los problemas o explicar a otro la solución obtenida, se han de utilizar diferentes argumentos o razonamientos deductivos o de otro tipo, que permiten ligar entre sí todas las acciones y objetos mencionados anteriormente. Por ejemplo, en el problema 6 del cuestionario propuesto se puede justificar la respuesta mediante el argumento de que hay más niñas que niños o que hay más probabilidad de que salga niña que niño. En el problema 15, se puede argumentar que la chincheta no es un objeto equilibrado, porque la base pesa más que la punta, por lo que los sucesos “la chincheta cae con la punta hacia arriba” y “la chincheta cae con la punta hacia abajo” no son equiprobables. Por tanto, para calcular la probabilidad de dichos sucesos, no es posible utilizar la regla de Laplace, sino que hay que basarse en la información frecuencial facilitada en el enunciado. En el problema 11 de las ruletas, la justificación de la respuesta se basará en la relación entre el área que ocupa el suceso y el área total.

Este tipo de argumentación se completa o sustituye por otras como la búsqueda de contraejemplos, generalización, análisis y síntesis, simulaciones con ordenador, demostraciones, etc.

1.4. MARCO CURRICULAR

En este apartado se presenta el itinerario formativo de los futuros profesores de educación primaria, que cursan sus estudios en la Facultad de Educación de Melilla, Universidad de Granada. Así mismo, se describen brevemente los currículos vigentes en

Educación Primaria, nivel educativo donde han de impartir clase una vez finalicen sus estudios de magisterio, y los currículos de Educación Secundaria, vigentes durante la experiencia educativa en este nivel de estos futuros profesores, que nos puede aportar información útil sobre sus conocimientos actuales de probabilidad.

1.4.1. LA PROBABILIDAD EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS.

La formación matemática que reciben los futuros profesores de educación primaria, en la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla, se rige por el Plan de Estudios (BOE: 16/01/2002), y se concreta en la asignatura "*Matemáticas y su didáctica*".

En la titulación de Maestro, especialidad de Educación Primaria, la carga lectiva es de nueve créditos distribuida en tres horas semanales en dos cuatrimestres, uno en el primer curso y otro en el segundo curso. Esta formación se complementa con cuatro créditos y medio en segundo curso con la asignatura "*Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica en Educación Primaria*", de carácter fundamentalmente práctico.

En el programa de formación se contemplan los siguientes objetivos:

- *Dominar los contenidos matemáticos básicos de Educación Primaria y los procesos de enseñanza y aprendizaje implicados.*
- *Conocer y analizar el currículo de Matemáticas de Educación Primaria.*
- *Capacitar para consultar y trabajar documentación sobre la Didáctica de la Matemática.*
- *Fomentar el espíritu crítico e investigador, la capacidad de expresarse con claridad, precisión y rigor, así como posibilitar el desarrollo de competencias de autoformación.*
- *Enfatizar y ejemplificar el carácter interdisciplinar de las matemáticas y la utilidad de su conocimiento escolar.*
- *Favorecer el interés por la investigación en el aula con especial énfasis en los problemas que se deriven del proceso de enseñanza-aprendizaje y su evaluación en las matemáticas escolares.*
- *Conocer los recursos y materiales más utilizados en el aula de matemáticas.*
- *Capacidad de trabajar en equipo.*

Entre los contenidos solo hay un tema dedicado a la estadística y la probabilidad, donde se tratan los siguientes conceptos:

Conceptos generales de Estadística. Tablas y gráficos. Medidas de posición central. Medidas de dispersión

Fenómenos aleatorios. Concepto de Probabilidad. Cálculo de probabilidades elementales

Aspectos históricos

Aspectos didácticos de la Estadística y la Probabilidad en Educación Primaria

Resolución de Problemas

Secuenciación de los objetivos y contenidos en la Educación Primaria.

Materiales y recursos para la enseñanza aprendizaje de la Estadística y la probabilidad.

La acción en el aula y su planificación.

1.4.2. LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Los programas vigentes en Educación Primaria están recogidos en el *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria* (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a). Además de obtener una visión general de la situación de la estadística y la probabilidad en los currículos vigentes de esta etapa, puede aportar información sobre las matemáticas que han de enseñar los futuros profesores participantes en esta investigación.

En este decreto, los contenidos sobre probabilidad aparecen recogidos en el *Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad,* de la siguiente forma:

Primer ciclo: *Tratamiento de la información, azar y probabilidad: Carácter aleatorio de algunas experiencias. Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.*

Segundo ciclo: *Tratamiento de la información, azar y probabilidad: Carácter aleatorio de algunas experiencias. Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar.*

Tercer ciclo: *Tratamiento de la información, azar y probabilidad: Carácter aleatorio de algunas experiencias. Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.*

1.4.3. LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

En este apartado se presentan los programas vigentes en Educación Secundaria Obligatoria y en Bachillerato. Además de obtener una visión general de la situación de la estadística y la probabilidad en los currículos vigentes, puede aportar información sobre las matemáticas que estudiaron los futuros profesores participantes en esta investigación durante su formación en esta etapa educativa.

1.4.3.1. LA PROBABILIDAD EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

El currículo vigente en Educación Secundaria Obligatoria, está recogido en el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006b).

En este decreto, los contenidos sobre probabilidad aparecen recogidos en el *Bloque 6.Estadística y probabilidad,* de la siguiente formade la siguiente forma:

Primer curso: Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comportamiento.

Segundo curso: Se centra en la estadística.

Tercer curso: Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

Cuarto curso. Opción A: Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.

Cuarto curso. Opción B: Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.

1.4.3.2. LA PROBABILIDAD EN BACHILLERATO

Los programas vigentes en Bachillerato quedan recogidos en el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007).

El Bachillerato forma parte de la educación secundaria postobligatoria y comprende dos cursos académicos. Ofrece una preparación especializada al alumno y se desarrolla en varias modalidades. La enseñanza de las Matemáticas está comprendida en los cursos 1º y 2º, y se incluyen los siguientes contenidos con respecto a la probabilidad:

Modalidad de Ciencias y Tecnología, Matemáticas I: Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori. Distribuciones binomial y norma como herramienta para asignar probabilidades a sucesos.

Modalidad de Ciencias y Tecnología, Matemáticas II: no encontramos nada relacionado con la probabilidad.

Modalidad Humanidades y Ciencias Sociales, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I: Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados. Asignación de probabilidades a sucesos. Distribuciones de probabilidad binomial y normal.

Modalidad Humanidades y Ciencias Sociales, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II: Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes. Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la binomial a la normal y ley de los grandes números. Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población. Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales. Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida. Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

1.4.4. IMPLICACIONES

Cuando finalicen los estudios de magisterio, los futuros profesores en educación primaria habrán recibido unas 15 horas de clase sobre estadística y probabilidad. Consideramos que reciben una insuficiente preparación sobre este tema, máxime, cuando en su ejercicio profesional, serán responsables de la formación de los alumnos de 6-12 años, de la etapa de Educación Primaria.

Hay futuros profesores que han cursado la modalidad del bachillerato de Humanidades o Artístico, en cuyo currículo no se incluye la asignatura de matemáticas, así que su formación matemática previa a su ingreso en la universidad se reduce a los contenidos estudiados en Educación Primaria y en Educación Secundaria Obligatoria.

Los futuros profesores que han cursado la modalidad del bachillerato de Ciencias han recibido clase, como hemos visto, en primer curso sobre conceptos básicos de probabilidad, pero como no están incluidos en la prueba de acceso a la universidad no se les presta la debida atención.

Por último, los futuros profesores que han cursado la modalidad del bachillerato de Ciencias Sociales sí han cursado matemáticas, y la formación recibida en estadística y probabilidad es algo más amplia que en el caso anterior, ya que se extiende a dos cursos. Aunque se recomienda que los contenidos se trabajen en contextos de resolución de problemas relacionados con fenómenos sociales y económicos, en general los alumnos aprenden las “recetas” para resolver dichos problemas y poder superar la prueba de acceso a la universidad, sin detenerse mucho en la comprensión de los conceptos probabilísticos .

Todas estas consideraciones pueden explicar de alguna forma los preocupantes resultados obtenidos por los futuros profesores en la resolución de los problemas de probabilidad propuestos.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

En la línea de investigación que hemos comentado anteriormente, el objetivo general de nuestra investigación es *evaluar el conocimiento que tienen los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*, que se desglosa en los siguientes objetivos específicos:

Objetivo específico 1. Evaluar el conocimiento común del contenido de la probabilidad que tienen los futuros profesores de educación primaria.

Debido a la importancia que está adquiriendo la enseñanza de la probabilidad, incluso en los niveles de Educación Primaria, y puesto que el maestro es el encargado de impartir estos contenidos, consideramos importante responder a la cuestión de qué conocimientos de probabilidad tienen los futuros profesores de educación Primaria.

Este objetivo se aborda mediante dos estudios de evaluación. En el primero, descrito en el capítulo 3, se realiza un estudio exploratorio, donde presentamos una evaluación de los conocimientos matemáticos de una muestra de 102 futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad elemental, analizando sus respuestas a un cuestionario con siete problemas, tomados de Green (1983) y de Fischbein y Gazit (1984). Se les propone resolver problemas elementales de comparación de probabilidades, en contextos de urnas y en otros que contienen distractores de tipo subjetivo, comparando los resultados con los obtenidos por los niños de 10-14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997) y con los de otras investigaciones citadas en los antecedentes.

En el segundo estudio, detallado en el capítulo 4, presentamos una evaluación de los conocimientos matemáticos de una muestra de 283 futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad simple, probabilidad frecuencial, probabilidad condicional, probabilidad compuesta, probabilidad geométrica muestreo y variable aleatoria, analizando sus respuestas a un cuestionario con 15 problemas. Este cuestionario contiene algunos problemas del estudio previo, pero ha sido completado y mejorado con el fin de cubrir los diferentes elementos del significado de la probabilidad (Batanero, 2005). Realizamos además un análisis detallado de los argumentos utilizados por los futuros profesores, comparando los resultados con los obtenidos por los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997) y los de otras investigaciones citadas en los antecedentes.

Objetivo específico 2. Evaluar el conocimiento del contenido pedagógico de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria.

Para llevar a cabo este objetivo, presentamos en el capítulo 5, un estudio de evaluación del conocimiento especializado del contenido de la probabilidad y otro del conocimiento del contenido de probabilidad y de los estudiantes de una muestra de 70 futuros profesores de educación primaria, realizado a partir del análisis cuantitativo y cualitativo de sus respuestas, trabajando en grupos de dos o tres profesores (31 grupos en total).

Dicho cuestionario consta de cuatro problemas, extraídos del cuestionario anterior, en el que hemos incluido las consignas indicadas en el modelo propuesto por Godino (2009), para evaluar el conocimiento del contenido pedagógico. Por un lado, se les pide analizar los contenidos matemáticos necesarios para resolver los problemas propuestos, para evaluar de este modo su conocimiento especializado del contenido matemático. Por otro, se les pegunta, que para cada una de las respuestas incorrectas indiquen las posibles estrategias incorrectas o dificultades que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea, para así evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes.

1.6. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Una vez definidos los objetivos de esta investigación, en este apartado formulamos las hipótesis iniciales, expresadas en términos de los resultados que esperamos obtener en la misma.

Dichas hipótesis se han ido clarificando a medida que hemos ido avanzando en el estudio y muy especialmente al finalizar el Trabajo de Investigación Tutelada (Mohamed, 2006).

Hipótesis 1. Esperamos que los resultados revelen un conocimiento común insuficiente de los futuros profesores de la muestra sobre probabilidad, debido a que presentan dificultades con los conceptos probabilísticos, incurren en sesgos cognitivos y manifiestan una percepción incorrecta de la independencia de sucesos.

Esta hipótesis se justifica por los resultados obtenidos en las investigaciones previas de Azcárate (1995), Begg y Edwards (1999), Mohamed (2006) y Contreras (2011). No obstante esperamos que sean mejores que los obtenidos por los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997), debido a que poseen un mayor nivel de razonamiento proporcional, y que los obtenidos en las investigaciones previas consultadas, ya que la enseñanza de la estadística se ha reforzado en los últimos años.

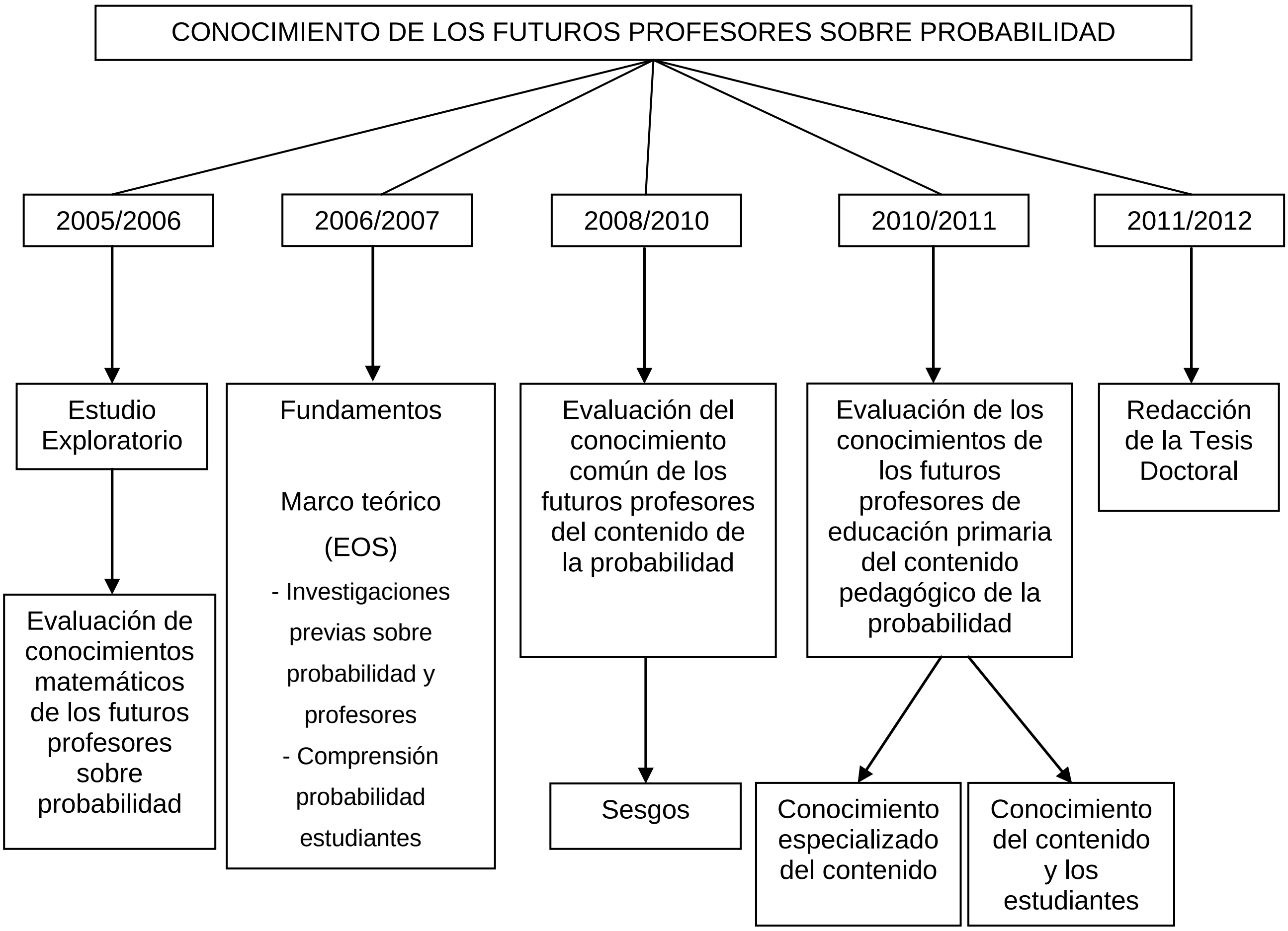
Hipótesis 2. Esperamos que el conocimiento de los futuros profesores de la muestra sobre el contenido pedagógico de la probabilidad será insuficiente, debido a que no reconocen los objetos matemáticos necesarios para la resolución de los problemas planteados, ni identifican las dificultades de los estudiantes cuando responden a las tareas propuestas.

Esta hipótesis se justifica por los resultados obtenidos en las investigaciones previas de Contreras (2011) y también en el hecho de que un conocimiento insuficiente del contenido matemático, como indican Ball, Lubienski y Mewborn (2001), implicaría un insuficiente conocimiento didáctico.

1.6. DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación que se presenta se ha realizado entre los años 2005 y 2011. Para una mejor comprensión del trabajo desarrollado, presentamos a continuación las cinco fases seguidas durante la investigación (ver Figura 1.6.1), que han sido diseñadas para dar cumplimiento a los objetivos planteados.

Figura 1.6.1. Fases de la investigación



La primera fase, que se desarrolló durante el curso 2005/2006, está constituida por un estudio exploratorio donde se evalúan los conocimientos matemáticos de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. Para ello, se analizan las respuestas obtenidas a un cuestionario con siete problemas de comparación de probabilidades y las estrategias utilizadas. Dicho estudio fue realizado como trabajo de Investigación tutelada para obtener el Diploma de Estudios Avanzados.

En la segunda fase, durante el curso 2006-2007, se realizó un estudio del marco teórico del enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática de Godino y colaboradores. Así mismo se realizó un análisis exhaustivo de todas las investigaciones previas sobre formación de profesores y probabilidad y de los estudios sobre comprensión de la probabilidad por los estudiantes, que nos han servido de fundamento para nuestra investigación.

En la tercera fase se evaluó el conocimiento común del contenido matemático de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria, mediante un cuestionario con 15 problemas que contempla los diferentes elementos de significado de la probabilidad. Para ello, se analizan las respuestas obtenidas clasificándolas en correctas e incorrectas, y se establecen diferentes categorías en función de los argumentos utilizados. Se desarrolló durante los cursos 2008/2009 y 2009/2010, tiempo necesario para conseguir reunir una muestra de tamaño aceptable.

La cuarta fase, que tuvo lugar durante el curso 2010/2011, está constituida por un estudio donde se evalúan los conocimientos de los futuros profesores de educación primaria del contenido pedagógico de la probabilidad. Para ello, se analizan las respuestas obtenidas a un cuestionario, con cuatro problemas y las soluciones facilitadas por alumnos de primaria, donde se plantean cuestiones sugeridas por Godino (2009). La última fase, durante el curso 2011-2012, ha consistido en la redacción y revisión de esta Tesis.

En primer lugar, esta investigación se fundamenta en el marco teórico descrito en este capítulo, que consta de un resumen de los elementos principales del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática; del estudio de la probabilidad como objeto matemático y del marco curricular de la probabilidad, tanto en el ámbito de la formación de los futuros profesores de educación primaria, como en los diferentes niveles educativos previos a la universidad. En segundo lugar, esta investigación se basa en un amplio estudio de las investigaciones previas, que se describe en el capítulo 2.

En la tabla 1.6.1 se presentan de forma resumida cada uno de los estudios realizados, así como la metodología utilizada y los resultados obtenidos.

Tabla 1.6.1. Estudios realizados y metodología utilizada

Estudios	Descripción	Muestras	Material	Análisis	Resultados
Estudio exploratorio (Capítulo 3)	Evaluación del conocimiento matemático de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad	102 futuros profesores de educación primaria	Cuestionario con 7 problemas,tomados de Green (1983) y Fischbein y Gazit (1984)	Análisis detallado de las respuestas. Análisis de los argumentos utilizados. Análisis estadístico.	Categorías de respuestas. Sesgos. Estrategias de comparación probabilidades. Conocimiento matemático de los futuros profesores.
Estudio del conocimiento matemático (Capítulo 4)	Evaluación del conocimiento común del contenido de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria	283 futuros profesores de educación primaria	Cuestionario con 15 problemas, tomados de Green (1983), Fischbein y Gazit (1984) y de un libro de texto.	Análisis detallado de las respuestas. Análisis de los argumentos utilizados. Análisis estadístico.	Categorías de respuestas. Sesgos. Estrategias de comparación probabilidades. Conocimiento común de los futuros profesores.
Estudio del conocimiento didáctico (Capítulo 5)	Evaluación del conocimientode los futuros profesores de educación primaria del contenido pedagógico de la probabilidad.	31 grupos (2 o 3 futuros profesores de educación primaria)	Cuestionario con 4 problemas sobre el conocimiento didáctico.	Análisis detallado de las respuestas. Análisis de los argumentos utilizados.	Categorías de respuestas. Sesgos. Conocimiento especializado y del contenido y los estudiantes.

El estudio exploratorio, que se presenta en el capítulo 3, es para evaluar el conocimiento matemático de 102 futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. Para ello, se han analizado las respuestas obtenidas a un cuestionario con siete problemas, tomados de Green (1983) y de Fischbein y Gazit (1984), que están relacionados con el objetivo propuesto. Se han utilizado algunos elementos del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino y Batanero, 1998 a y b; Godino, 2002; Godino, 2003).

El estudio de evaluación del conocimiento común de 283 futuros profesores de educación primaria del contenido matemático de la probabilidad, se describe en el capítulo 4. Para ello, se analizan las respuestas obtenidas a un cuestionario con 15 problemas, tomados de de Green (1983), de Fischbein y Gazit (1984) y de un libro de texto, representativo de los diferentes elementos del significado de la probabilidad, y que nos permiten lograr el objetivo específico 1. Se han utilizado algunos elementos del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) y el modelo de niveles y facetas del conocimiento didáctico propuesto por Godino y colaboradores (Godino 2009; Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi, 2011), que engloba teorías recientes sobre modelos del conocimiento matemático del profesor (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008).

El estudio de evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria del contenido pedagógico de la probabilidad, se presenta en el capítulo 5. Para ello, se analizan las respuestas obtenidas a un cuestionario, con cuatro problemas y las soluciones facilitadas por alumnos de educación primaria, en el que se plantean cuestiones sugeridas por Godino (2009), para evaluar los conocimientos didácticos de los futuros profesores. Se han utilizado algunos elementos del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) y el modelo de niveles y facetas del conocimiento didáctico propuesto por Godino y colaboradores (Godino 2009; Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi, 2011), que engloba teorías recientes sobre modelos del conocimiento matemático del profesor (Ball, Lubienski y Mewborn, 200; Hill, Ball y Schilling, 2008).

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES

2.1.INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los antecedentes del trabajo organizado en dos partes diferenciadas. En la primera, se realiza un análisis detallado de las investigaciones relacionadas con la probabilidad y la formación de profesores. Hay numerosos estudios recientes sobre formación de profesores, pero son escasos los que tratan el tema específico de la probabilidad, en particular sobre los conocimientos de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad.

En la segunda parte, analizamos las investigaciones relacionadas con la comprensión de la probabilidad por parte de los estudiantes. En particular, nos interesamos sobre el desarrollo cognitivo de conceptos fundamentales en probabilidad, tales como aleatoriedad, espacio muestral, enfoques de la probabilidad, probabilidad de un suceso, asignación de probabilidades, comparación de probabilidades, juegos equitativos, probabilidad frecuencial, probabilidad condicional, dependencia e independencia, probabilidad compuesta, variable aleatoria y heurísticas y sesgos en el razonamiento estocástico.

2.2. LA PROBABILIDAD Y LA FORMACIÓN DE PROFESORES

2.2.1. INTRODUCCIÓN

La investigación sobre formación de profesores es hoy día muy amplia, como se puede observar en libros y capítulos sobre el tema (Llinares y Krainer, 2006; Ponte y Chapman, 2006; Philipp, 2007; Sowder, 2007; Wood, 2008), en los artículos de la revista *Journal of Mathematics Teacher Education* y en la revisión realizada por el ICMI Study 15 (Even y Ball, 2008), aunque pocos trabajos se han centrado en los conocimientos de los futuros profesores respecto a la probabilidad y la estadística. Este olvido ha llevado a la International Commission on Mathematics Education (ICMI) y a la International Association for Statistics Education (IASE) a organizar un estudio conjunto para promover la investigación sobre el tema (Batanero, Burrill y Reading, 2011).

La importancia de la formación de profesores es crucial, ya que un elemento fundamental, si queremos promover una educación probabilística de calidad de los estudiantes, es precisamente dicha formación. Como indica Stohl (2005), el éxito de cualquier currículo, que pretenda el desarrollo del razonamiento probabilístico de los alumnos, depende en gran medida del conocimiento que sobre probabilidad y su didáctica tengan los profesores.

La estocástica es un área que se ha visto enfatizada en los planes de estudio escolares en los últimos años, (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Secretaría de Educación Pública, 2006). Sin embargo, la mayoría de los profesores de educación primaria en España no han tenido ningún tipo de experiencia, o muy poca, en estos temas, durante su educación preuniversitaria o en los programas de formación docente, y los profesores de educación secundaria, aunque tienen una base más sólida en matemática, han tenido escasa formación didáctica en probabilidad.

A nivel internacional el panorama es muy parecido, siendo durante la década de los 90 cuando se comienza a prestar algo de atención a la probabilidad y a la estadística tanto en los programas de formación de profesores como en los cursos dirigidos a profesores en activo. Algunos ejemplos de estas experiencias formativas con profesores, basadas en modelos teóricos de cómo debe ser la formación para enseñar probabilidad, los encontramos en diferentes países (Kvatinsky y Even, 2002; Batanero, Godino y Roa, 2004). Aunque han sido realizadas con muestras pequeñas, pueden servir de orientación a los formadores de profesores contribuyendo así a mejorar su acción didáctica.

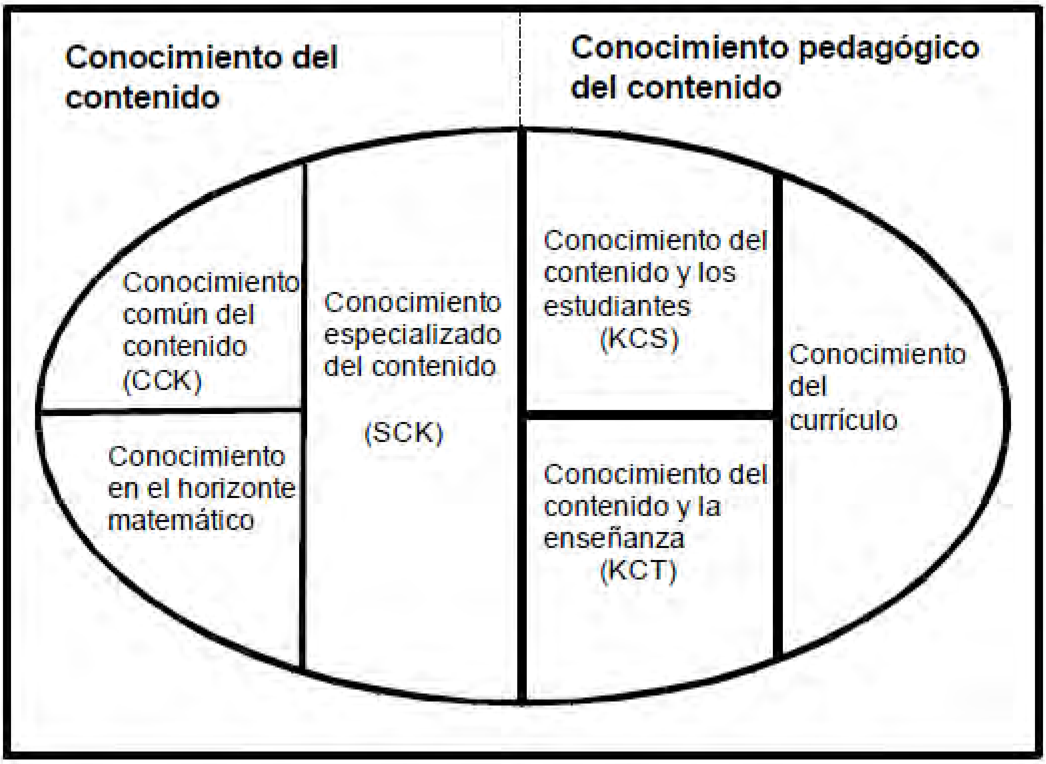
Presentamos a continuación los diferentes modelos teóricos sobre cuáles deben ser las componentes principales de la formación de los futuros profesores, y seguidamente un estudio detallado de las investigaciones relacionadas con la probabilidad y la formación de profesores.

2.2.2. MODELOS DE CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

La investigación sobre formación de profesores diferencia entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento de contenido pedagógico. Este último sería “la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza” o bien “esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional” (Shulman, 1986, p. 8-9).

Ball, Lubienski y Mewborn (2001) hablan del conocimiento matemático para la enseñanza, que se describe en Hill, Ball y Schilling (2008) como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno.” (p. 374) y lo clasifican en dos grandes categorías (Figura 2.2.1.): Conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido.

Figura2.2.1. Conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377)



Dentro del conocimiento del contenido matemático distinguen entre Conocimiento Común del Contenido, Conocimiento Especializado del Contenido, y Conocimiento en el Horizonte Matemático. Mientras el conocimiento común del contenido es el puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona, el conocimiento especializado del contenido incluye aspectos que no necesariamente tiene una persona ordinaria, por ejemplo, elegir una secuencia de enseñanza o identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema. El “conocimiento en el horizonte matemático” aporta perspectiva a los profesores para su trabajo, e incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias, o la historia de las matemáticas.

Para el conocimiento pedagógico del contenido Hill, Ball y Schilling (2008) proponen tener en cuenta el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes, Conocimiento del Contenido y la Enseñanza, y Conocimiento del Currículo. El Conocimiento del Contenido y los Estudiantes es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular" (p. 375). Incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático. Respecto al Conocimiento del Contenido y la Enseñanza resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas.

Godino (2009) y Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi (2011) construyen un modelo de niveles y facetas del conocimiento matemático didáctico del profesor que integra los citados anteriormente y propone una guía para el enunciado de cuestiones de evaluación de dicho conocimiento. El autor propone las siguientes facetas para analizar los procesos de instrucción:

- *Epistémica*: Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes de contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
- *Cognitiva*: Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
- *Afectiva*: Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- *Mediacional*: Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
- *Interaccional*: Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
- *Ecológica*: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, que soporta y condiciona el proceso de estudio.

En este trabajo se utilizará este modelo para evaluar el conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad, debido a que reconoce la especificidad de la estadística, mediante la componente epistémica. Puesto que la probabilidad y la estadística tienen sus propios problemas, conceptos, propiedades, lenguaje, argumentos y procedimientos, el profesor requiere un conocimiento específico de los mismos y de su relación con el resto de componentes del modelo.

Para evaluar algunos componentes del conocimiento didáctico utilizaremos la metodología sugerida por Godino (2009) que consiste en dos pasos:

1. Elegir una tarea matemática cuya solución ponga en juego los principales aspectos del contenido, o de las competencias a desarrollar.
2. Formular consignas que cubran algunas facetas y niveles de análisis didáctico del modelo propuesto por el autor. Dicha consigna consistiría en: a) resolver el problema, para evaluar el conocimiento común del contenido; b) identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución, para evaluar el conocimiento especializado del contenido, y c) describir los razonamientos que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta o los principales conflictos en dicha solución, para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes.

2.2.3. EL CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD

Muchas de las actividades habituales que realiza el profesor en clase, según Ball, Lubienski y Mewborn (2001), dependen en gran medida de sus conocimientos matemáticos. Por tanto, para mejorar la enseñanza de la probabilidad, sería necesario que los profesores tuvieran un sólido conocimiento de la probabilidad. En este apartado presentamos un resumen de las escasas investigaciones sobre este tema, que se han realizado mediante cuestionarios similares a los utilizados con estudiantes, donde se proponen problemas centrados en el conocimiento común del contenido pata tratar de determinar si los futuros profesores tienen conocimientos suficientes para resolver las tareas que tendrán que proponer a sus alumnos cuando estén en ejercicio.

Azcárate (1995) realizó un estudio sobre las concepciones y conocimientos probabilísticos que tenían 57 futuros profesores de educación primaria, para lo que propuso responder a un cuestionario con diferentes ítems sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. En general, encontró que pocos futuros profesores mostraban una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios. Algunos participantes explicaron la aleatoriedad mediante criterios de causalidad (por ejemplo, indicaron que un fenómeno es aleatorio únicamente si se desconocen sus causas). Otros tuvieron una fuerte influencia de los aspectos contextuales o consideraron que no es posible el estudio matemático de los fenómenos aleatorios. Se detectó también falta de esquemas combinatorios y escasa competencia de cálculo de probabilidades, cuantificando las expectativas de ocurrencia de un suceso desde criterios personales. Resultados similares fueron obtenidos por Serrano (1996) en un estudio exploratorio con 10 futuros profesores, utilizando entrevistas en las que propone realizar y evaluar experimentos aleatorios. Algunos de estos profesores también mostraron dificultades con el concepto de independencia y el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), que consiste en creer que todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, son equiprobables. Estas mismas concepciones incorrectas sobre la aleatoriedad e independencia fueron encontradas por Batanero, Arteaga, Ruiz y Roa (2010) en un estudio con 200 futuros profesores de educación primaria, donde se pide a los participantes evaluar sus propias concepciones sobre la aleatoriedad, a partir de un proyecto que incluye la realización de un experimento aleatorio.

Respecto a la idea de juego equitativo, Azcárate (1995) propuso tres ítems basados en el lanzamiento de dos dados, preguntando si sería justo apostar a producto par, suma par y suma 5 o 6. En el primer caso el 26.4% de los futuros profesores responde de forma incorrecta que el juego es justo. Entre los argumentos utilizados por los participantes para justificar sus respuestas destacan las reglas aritméticas (54.4%), la equiprobabilidad de los resultados (22.8%) y la explicaciónbasada en la combinatoria (14%). En el segundo caso, el de la suma par, hay un 28.1% que prefiere apostar par, frente a un 19.3% que prefiere jugar a impar. En cuanto a los argumentos utilizados por los participantes vuelven a destacar las reglas aritméticas (42.1%), la equiprobabilidad de todos los resultados (33.3%) y la explicación que se apoya en la combinatoria (15.8%). En el tercer caso, sobre si apostar suma 5 o 6, aunque una mayoría responde correctamente que apostaría por el 6 (59.6%), hay un porcentaje importante que apuesta por el 5 (21.1%). En cuanto a los argumentos utilizados destacan la equiprobabilidad de los sucesos (36.8%)ya que al ser un experimento aleatorio cualquier número puede salir; la utilización de reglas aritméticas (29.8%) y solo valoran la información mediante la utilización de la combinatoria (22.8%).

Sobre el concepto de muestreo, Azcárate (1995) propuso un ítem que trata sobre los nacimientos en un hospital, y pregunta si la variabilidad será mayor en un hospital grande o en uno pequeño. Encontró que solo el 10.5% de los futuros profesores respondió de forma correctaque en el hospital pequeño, mientras que el 22.8% consideró que es en un hospital grande y un 66.7% que pensó que es igual en uno u otro hospital. El porcentaje de argumentos correctos basados en una lectura frecuencial de la información aportada es bastante reducido (8.8%), predominando las justificaciones basadas en creencias y valoraciones, elaboradas a partir de la experiencia personal, o en el uso de estrategias heurísticas.

Respecto a la idea de probabilidad como grado de confianza, propuso a los futuros profesores un problema donde debían asignar un valor numérico, entre 0 y 10, que expresa la confianza que se tiene en la ocurrencia de un suceso, como por ejemplo el suceso "obtener una cruz al tirar una moneda, después de haber obtenido una secuencia de cuatro caras en los cuatro lanzamientos anteriores"o el suceso "conseguir un 3 al lanzar un dado cúbico". La autora encontró que el 57.9% otorgan un 5 a su grado de confianza en la obtención de una cruz, mientras que en el caso del dado un 89.5% de los participantes aportan valoraciones en el intervalo [0, 5], con una gran dispersión. Entre los argumentos destacan en los dos casos la equiprobabilidad, 56.1% en la moneda y un 33.3% en el dado, y los argumentos basados en la naturaleza incierta de los sucesos, 10.5% en el caso de la moneda y un 28.1% en el dado.

Sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad Azcárate (1995) a partir de una situación relacionada con el tiempo atmosférico, plantea cuatro problemas sobre la previsión del hombre del tiempo de que mañana hay un 70% de posibilidades de que llueva. Los porcentajes de respuestas correctas están en un intervalo entre el 49% del ítem1 y el 15% del ítem 4, lo que muestra, según la autora, como va disminuyendo significativamente el peso de la interpretación frecuencial de la información. También observó que una gran mayoría de los futuros profesores presentan dificultades para interpretar la probabilidad frecuencial, y que muchas de sus explicaciones parecen estar condicionadas por razonamientos propios de un pensamiento determinista, donde el objetivo principal es predecir resultados de pruebas aisladas más que en realizar un estudio global del fenómeno. Este tipo de razonamiento Konold (1991) lo relaciona con el heurístico "outcome approach".

En resumen,entre los futuros profesores participantes en esta investigación se evidencia una gran falta de conocimientos sobre los conceptos probabilísticos básicos y de capacidad combinatoria para enumerar todos los sucesos compuestos lo que hace imposible aplicar la regla de Laplace para calcular la probabilidad de cada experimento. Así mismo se detecta un número significativo de futuros profesores que no comprenden el significado frecuencial de la probabilidad, que están condicionados por su experiencia personal en estas situaciones y reflejan razonamientos propios de un pensamiento probabilístico intuitivo. Prácticamente ningún sujeto da un valor a las posibilidades de cada una de las alternativas.

Begg y Edwards (1999) comprobaron en un estudio llevado a cabo en 22 profesores en servicio y 12 profesores de enseñanza elemental en prácticas, que los docentes tenían un conocimiento poco sólido de la probabilidad, ya que alrededor de dos tercios comprendían eventos probables, y muy pocos comprendían el concepto de independencia. Los docentes tendían a creer que el orden o el modelo no estaban asociados con sucesos aleatorios y con frecuencia usaban el heurístico de la representatividad, suponiendo que toda muestra o serie de resultados debe ser una representación de la población esperada. Estos docentes mostraban menos seguridad a la hora de enseñar probabilidad en comparación con la enseñanza de gráficas o cálculos estadísticos, y emplean más tiempo buscando ideas y actividades para sus clases que ampliando sus conocimientos sobre probabilidad y estadística.

En un estudio realizado sobre la comprensión de la probabilidad condicionada en 13 profesores de enseñanza secundaria en prácticas, Carnell (1997) probó que todos mostraron tener conceptos erróneos, como por ejemplo, definir el elemento condicionante, el orden temporal del elemento condicionante y el elemento objetivo, o confundir la condicionalidad con la causalidad (Batanero y Sánchez, 2005; Jones y Thornton, 2005; Tarr y Lannin, 2005).

Watson (2001) realizó una encuesta a 15 profesores de primaria y a 28 profesores de secundaria de Australia. Los resultados mostraron que cuando se pidió a los profesores de primaria que eligieran temas sobre azar o datos usaban generalmente temas como encuestas, gráficas, ideas generales sobre el azar y la probabilidad en contextos específicos, mientras que los profesores de secundaria elegían principalmente ideas generales sobre el azar y algunas distribuciones de probabilidad. En general, todos los profesores se encontraban más cómodos usando el concepto de media que el de muestra, ya que éste último supone un grado mayor de incertidumbre para ellos. Además, Watson encontró que los profesores de secundaria tenían un nivel de seguridad más alto que los de primaria a la hora de enseñar cálculos probabilísticos básicos, y muestreo.

Batanero, Godino y Cañizares (2005), en un estudio realizado con 132 futuros profesores de educación primaria, donde evaluaban la presencia de sesgos en el razonamiento probabilístico de los profesores, observaron que un 60% razonaba de acuerdo a la heurística de representatividad (Tversky y Kahneman, 1982b) considerando irrelevante el tamaño de la muestra, otro 60% de los participantes mostró el sesgo de equiprobabilidad descrito en experimentos de Lecoutre (1992), Lecoutre y Durand (1988), que consiste en la creencia de los sujetos de que todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatoriotienen las mismas posibilidades, y que el 23% de los futuros profesores mostró el “outcome approach” descrito por Konold (1989) interpretando un enunciado probabilístico en forma no probabilística.

En un estudio para evaluar el conocimiento estadístico de 55 futuros profesores de educación primaria, Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008), propusieron un proyecto estadístico titulado “Comprueba tus intuiciones sobre el azar”, en el que cada estudiante se debía inventar una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda y posteriormente realizar de forma real otros 20 lanzamientos de una moneda. Con los resultados globales de la clase, obtenidos en la secuencia simulada y en la secuencia real, se pidió que de forma individual realizaran una comparación de las dos distribuciones obtenidas. Los autores observaron que, en general, los futuros profesores usaron los conceptos estadísticos elementales en el análisis de la tarea planteada, siendo sus principales errores la identificación de las variables estadísticas y un uso inadecuado de los gráficos. Solo un grupo muy pequeño obtuvo conclusiones válidas sobre la investigación planteada, por lo que indican la necesidad de mejorar la preparación de los futuros profesoresen estadística y probabilidad.

Arteaga (2011) realizó un estudio con 207 futuros profesores de educación primaria, donde mediante un proyecto abierto de análisis de datos, pretendía evaluar el conocimiento común y especializado que poseían dichos profesores sobre los gráficos estadísticos. Losresultados obtenidos indican que la construcción e interpretación de gráficos es una habilidad bastante compleja, ya que más de la mitad de los estudiantes utilizaron los gráficos incorrectamente en la solución de los problemas. Estos resultados, coincidentes con los obtenidos por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007), son preocupantes ya que el uso e interpretación de los gráficos estadísticos es muy frecuente en el ejercicio de su profesión. Sobre la influencia de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la estadística, comprobó que solo 50 futuros profesores utilizaron el ordenador para realizarlos gráficos y que la hoja de cálculo Excel no fue utilizada pese a que éstos la habíanmanejado en las prácticas de la asignatura "Matemáticas y su didáctica".

Para realizar un estudio sobre el conocimiento de la probabilidad condicional en 183 futuros profesores de educación primaria, Contreras (2011) propuso un problema con datos representados en una tabla de contingencia, donde debían calcular la probabilidad simple, condicional y compuesta. El autor encontró que la mayoría de los participantestuvo cierta dificultad en la lectura de la tabla y en el cálculo de las probabilidades pedidas. Los futuros profesores de educación primaria confundieron los conceptos de probabilidad condicional y compuesta, tal y como ocurría en las investigaciones de Einhorn y Hogarth (1986), Ojeda (1995) y Estrada y Díaz (2007). Contreras (2011) identificó otros errores que no habían sido descritos en trabajos previos como la confusión de un suceso con su complementario, errores en la fórmula de cálculo, cálculos incorrectos, confusión de frecuencia absoluta con probabilidad e inversión de la fórmula para calcular la probabilidad. Sus resultados fueron peores que los obtenidos por Estrada y Díaz (2007) en un estudio con profesores en formación.

Nicholson y Darnton (2003) sostienen que los docentes con una buena preparación en matemáticas pero con un conocimiento leve de la estadística tienden a centrarse en los cálculos para encontrar la respuesta correcta y no se sienten cómodos al estudiar y enseñar procesos aleatorios que busquen inferencia a la toma de decisiones. Pereira-Mendoza (2002), en un estudio con profesores de cursos elementales, considera que las experiencias matemáticas de los profesores tienen un impacto negativo en su visión de la estocástica e impiden su desarrollo como docentes en este campo.

En un estudio que se centró en diferencias culturales y lingüísticas, Zaslavsky, Zaslavsky, y Moore (2001) examinaron el conocimiento de 33 futuros profesores sobre sucesos independientes y mutuamente excluyentes. Casi el 70% no pudo explicar lo que significa sucesos mutuamente excluyentes y casi la mitad no pudo dar ejemplos de sucesos mutuamente excluyentes, siendo pocos los profesores que pueden determinar si dos acontecimientos dados son mutuamente excluyentes. De manera similar, el 70% de los profesores no pueden explicar cuando los sucesos son independientes y más del 40% de ellos no pudo determinar si dos sucesos son independientes. No es de extrañar que casi el 90% de ellos no entiendan la relación entre sucesos independientes y dependientes y sucesos mutuamente excluyentes. A pesar de su incapacidad para hacer frente a la independencia, alrededor del 80% de los futuros profesores pueden encontrar la probabilidad de selección de bolas consecutivas de una urna sin reemplazamiento.

2.2.4. CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD Y LA ENSEÑANZA

Ball (2000) anima a los formadores de profesores a interesarse en el conocimiento matemático de los docentes y cómo este conocimiento puede ampliarse para incluir conocimientos de la enseñanza que puedan usar en su práctica diaria como elegir tareas, destacar las respuestas de los estudiantes en sus intervenciones en clase o crear preguntas adecuadas para las evaluaciones. La importancia de las investigaciones sobre el conocimiento del contenido pedagógico de los profesores sobre probabilidad ha sido destacada por Callingham y Watson (2011), quienes consideran que es una de las metas principales de la educación estadística. Si se consiguen refinar los instrumentos de medida de estos conocimientos de los profesores, según los autores, se podrían utilizar para evaluar los programas formativos de los futuros profesores o para estudiar la posible relación entre el conocimiento de los profesores del contenido pedagógico de la probabilidad y la estadística y los resultados de aprendizaje obtenidos por sus alumnos.

A pesar de ello, la investigación sobre el conocimiento del contenido pedagógico de los profesores es todavía escasa. Esta es una situación grave habida cuenta la conclusión del trabajo de Greer y Ritson (1994) donde casi todos los profesores de primaria y la mitad de los profesores de enseñanza secundaria manifestaron nohaber estudiado la probabilidad en su formación inicial. Evidentemente, los investigadores necesitan mejores formas de obtener datos acerca sobre el conocimiento pedagógico de los profesores, su conocimiento de las cogniciones del estudiante, y sus prácticas instruccionales en probabilidad. Por otra parte, este tipo de investigación tiene que estar basada en datos de clase más que en información sobre el número de cursos o programas de desarrollo profesional en la probabilidad que han recibido (Watson, 2001). Presentamos a continuación un resumen de las investigaciones sobre el conocimiento de la probabilidad y la enseñanza.

Respecto al conocimiento especializado del contenido Chick y Pierce (2008) realizaron una investigación para evaluar la capacidad de los profesores para reconocer qué conceptos matemáticos pueden ser estudiados a partir de un problema propuesto. Los resultados indican que los profesores participantes no hicieron un uso adecuado de los datos y proyectos al programar sus lecciones, pues fueron incapaces de reconocer lo conceptos potenciales, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada. Únicamente se limitaron a pedir cálculos o gráficos nuevos, donde eran escasas las actividades de interpretación.

En un estudio con 183 futuros profesores de educación primaria, Contreras (2011) evaluó los conocimientos didácticos del contenido de la probabilidad condicional respecto a las componentes conocimiento especializado y conocimiento del contenido y la enseñanza. Respecto a la primera, encontró que fueron escasas las respuestas de los futuros profesores y los que sí contestaron cometieron errores de identificación tanto de los objetos matemáticos intervinientes en el problema como en las variables de tarea. En relación con el conocimiento del contenido y la enseñanza, muchos de los futuros profesores no consiguieron identificar las variables didácticas que pudieran variar la dificultad del problema, principalmente las variables sujeto y situación.

Para mejorar el razonamiento probabilístico de los estudiantes, se recomienda una enseñanza basada en investigaciones y simulaciones, pero son pocos los profesores que tienen experiencia en una metodología basada en experimentos y simulaciones. Así, en el estudio de Stohl (2005) los profesores tuvieron dificultades al implementar el enfoque experimental de la enseñanza de la probabilidad, ya que siempre utilizaban muestras pequeñas en las tareas propuestas a los estudiantes. Por ello, estos no pudieron apreciar la convergencia o el efecto del tamaño de la muestra sobre la misma, no logrando la idea central del enfoque frecuencial de la probabilidad. Watson (2001) en actividades basadas en la simulación y toma de muestras con profesores de primaria, no encuentra un enfoque coherente para el refuerzo de los conceptos estadísticos.

En el estudio llevado a cabo por Sánchez (2002), examinó a seis profesores de enseñanza secundaria acerca de las creencias del uso de la simulación en el aula después de haber experimentado la capacidad de simulación del software Fathom (Erickson, 2001) más de 8 horas semanales con sesiones de 3 horas. Tres profesores afirman que entienden mejor la variabilidad después de la solución de problemas con el software. Uno incluso menciona la adquisición de una mejor comprensión de probabilidad condicionada y la ley de los grandes números. Además, la mayoría de los profesores, cuando se le preguntó acerca de la utilidad de la simulación, se centró en las ideas asociadas desde el punto de vista frecuencial de la probabilidad. Sin embargo, un profesor no da valor al uso de la simulación en la construcción de la comprensión de los estudiantes en la aleatoriedad, de la distribución, o el proceso de validación de modelos de probabilidad.

Batanero, Godino y Cañizares (2005) en un estudio realizado con 132 futuros profesores de educación primaria, observaron que, mediante la realización de actividades de simulación con dispositivos manipulativos, tablas de números aleatorios y el software Statgraphics, los futuros profesores que participaron en esta experiencia de enseñanza presentaron una mejora general de las concepciones sobre la probabilidad, lo que sugiere el interés de la simulación como recurso didáctico.

Haller (1997) llevó a cabo observaciones en clase de profesores de enseñanza media, en un curso que incluía tres días de formación sobre probabilidad y enseñanza de la probabilidad, incluyendo las interpretaciones erróneas más comunes entre los estudiantes. Los resultados de la observación indicaron que los profesores con un conocimiento del contenido más bajo, evidenciaban tener errores de interpretación de las respuestas de los alumnos durante sus lecciones, dependían en gran medida de los libros de texto y dejaban pasar oportunidades para desarrollar relaciones entre las fracciones, los decimales y probabilidad. La experiencia docente no parecía tener tanta repercusión en la enseñanza de la probabilidad por los profesores.

En un estudio con profesores de enseñanza elemental en prácticas, Dugdale (2001) utilizó la simulación por ordenador para revelar el conocimiento didáctico. Observó que el uso de software permitió a los profesores diseñar un par de dados, con igual probabilidad de obtener pares que impares al multiplicar las cifras en cada tirada. Podían simular un gran número de tiradas, computar las frecuencias relativas, convenciéndose así de que el juego creado era representativo. El autor destacó que los profesores en prácticas podían usar este software como una herramienta para promover el debate y la comprensión de la probabilidad desde un punto de vista que normalmente no permite un número limitado de pruebas con un dado físico. También hizo énfasis en el hecho de que los profesores en prácticas no se conformaban con observar las frecuencias relativas generadas por la simulación por ordenador, sino que pasaban a razonar sobre las probabilidades teóricas para así verificar los resultados.

López (2006), analizó la forma en que los profesores diseñan e implementan unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad, sobre todo en la escuela primaria, que muestran la dificultad de éstos al enfrentarse a nuevos conceptos.

En un estudio con futuros profesores de primaria, Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) observaron que muchos de ellos tuvieron dificultades en juzgar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción. Esto es razonable debido a la preparación escasa de estos futuros profesores y a la complejidad del conocimiento didáctico del contenido. Los resultados indican la necesidad de mejorar la formación estadística de los futuros profesores que será posible si introducen cambios significativos en el currículo para asignar más tiempo a la educación estadística.

Según Serradó, Azcarate y Cardeñoso (2005), muchos docentes y libros de texto siguen un enfoque determinista en la enseñanza de la probabilidad, donde se proponen actividades basadas en cálculos teóricos que no tienen en cuenta las aplicaciones. Otros docentes experimentan un modelo de enseñanza constructivista, donde se destaca la construcción del conocimiento por el individuo (Von Glasersfeld, 1995), y se tienen en cuenta además las interacciones sociales entre los individuos (Voigt, 1996). Sin embargo, Heinz, Kinzel, Simon y Tzur (2000) han observado que en algunos casos la metodología de estos docentes pretende que los alumnos perciban las matemáticas tal y como ellos las entienden, descuidando la comprensión de los alumnos.

Podemos utilizar el enfoque clásico Laplaciano para el cálculo de la probabilidad teórica de un suceso, o si repetimos el experimento aleatorio un número determinado de veces, podemos usar un enfoque frecuencial para expresar la probabilidad experimental. En ambos casos se obtiene una aproximación a la probabilidad real. Debido a la falta de acierto de los resultados experimentales, los docentes prefieren el enfoque clásico de la probabilidad siempre que les sea posible, ya que utilizan técnicas de recuento, busca una explicación teórica para la probabilidad de que ocurra un suceso y evita una interpretación realista de ese valor.

Si queremos que los alumnos desarrollen intuiciones probabilísticas apropiadas y eviten los errores descritos por diversos autores (Batanero y Sánchez, 2005; Jones y Thornton, 2005; Watson, 2005), únicamente lo conseguiremos mediante un enfoque didáctico que aúne las tendencias clásica y frecuencial para la estimación de la probabilidad. La ley de los grandes números es el resultado clave para comparar los resultados experimentales con las probabilidades teóricas. Por lo tanto, es posible, aunque poco probable, obtener una probabilidad empírica sustancialmente diferente de la teórica, incluso después de un gran número de pruebas. Sin embargo, algunos profesores y libros de texto pueden informar solamente de que las probabilidades experimentales se acercan a las teóricas después de un gran número de pruebas, lo que puede constituirse en un obstáculo didáctico por parte de los alumnos para la construcción del concepto frecuencial de la probabilidad y también podría convertirse en un obstáculo ontogenético para la comprensión del significado de la estabilidad de las frecuencias relativas (Serradó, Azcarate y Cardeñoso, 2005).

Steinbring (1991) considera que la dificultad para la enseñanza de la probabilidad en las aulas se produce por la naturaleza misma de la probabilidad, ya que hay que tener en cuenta el enfoque clásico y experimental. Las dificultades que tienen los docentes para entender y enseñar probabilidad pueden deberse a la complejidad del concepto de probabilidad así como la no vinculación de los conceptos de probabilidad y estadística.

Shaughnessy (1992) afirma la necesidad de investigar sobre la comprensión de la estocástica en los docentes, aunque hasta la fecha ha sido muy escasa. En resumen los resultados de los proyectos para desarrollar el conocimiento de la estocástica han sido el conocimiento por parte de los profesores y su eficacia didáctica al enseñarla.

2.2.5. CONOCIMIENTO DE LA PROBABILIDAD Y LOS ESTUDIANTES

Numerosos estudios han mostrado que, en general, tanto adultos como estudiantes universitarios, manifiestan interpretaciones incorrectas sobre probabilidad (Fischbein y Schnarch, 1997; Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier y Lipson, 1993; Shaughnessy, 1977). Las implicaciones que podemos deducir de todos ellos es que los docentes y formadores deben comprender los conceptos relacionados con la probabilidad, comprender las ideas sobre probabilidad de los estudiantes, y reflexionar de forma crítica sobre los resultados de la investigación en lo referente al desarrollo de ideas probabilísticas en los alumnos.

Watson (2001) evaluó el conocimiento de los profesores sobre las dificultades de sus alumnos con la probabilidad y la estadística. Sólo dos profesores de primaria de los que participaron en el estudio mencionaron haber "encontrado dificultades", mientras que 13 profesores de secundaria encontraron dificultades, principalmente en aspectos procedimentales (como calcular probabilidades, permutaciones, diagramas de árbol) o conceptuales (como la probabilidad teórica, la inferencia o la probabilidad condicional). Aunque estos datos sugieren que los profesores son capaces de identificar los problemas de los alumnos, también muestran que éstos se centran principalmente en aspectos de procedimiento y su pedagogía se basa en un enfoque determinista que busca las clásicas respuestas simples. La autora también afirmó que había pocas pruebas de que los profesores de secundaria usaran actividades basadas en la simulación y toma de muestras para reforzar la teoría y, por el contrario, los profesores de primaria aunque utilizaban lecciones basadas en actividades, no parecía existir un enfoque coherente hacia el estudio de los conceptos sobre el azar.

Stohl (2004), examina cómo treinta y cinco profesores de enseñanza media interpretan las interacciones de los alumnos con una herramienta de simulación. Las interpretaciones serán comparadas con un análisis sobre cómo los alumnos trabajan con la herramienta de simulación, para así determinar las diferencias y las semejanzas con las interpretaciones hechas por los profesores. Los resultados preliminares del análisis del trabajo de los alumnos hecho por los profesores indican que estos últimos van acorde con las decisiones tomadas por los alumnos al recoger datos usando la herramienta de simulación y el uso de las representaciones para organizar los datos empíricos. Sin embargo, los profesores a menudo pasan por alto detalles sobre las acciones y el lenguaje de los alumnos que indican el desarrollo de ideas probabilísticas en ellos, centrándose en criticar la ausencia de ideas formales sobre probabilidad. Como consecuencia, los profesores no parecen comprender que el desarrollo de ideas sobre probabilidad es un proceso complejo y difícil de valorar.

En un estudio de Contreras (2011), donde se evaluaba una experiencia formativa, se pidió a 70 profesores de educación secundaria, unos en ejercicio y otros en período de formación, que identificaran los posibles errores y dificultades que podrían cometer sus estudiantes si realizaran esta actividad basada en una paradoja clásica de la probabilidad. El autor informa de que entre los conflictos identificados correctamente se encuentran los siguientes: No percibir la dependencia en los experimentos que intervienen en el juego, construir el espacio muestral, asignación incorrecta de probabilidades a los sucesos, no percibir la estructura del experimento y resistencia a considerar que los fenómenos aleatorios se puedan estudiar desde un punto de vista matemático. Otros profesores señalaron conflictos que no aparecen en la situación o dificultades que no eran importantes. Concluye que los resultados sugieren la importancia de realizar actividades de este tipo para los profesores con el objetivo de aumentar su conocimiento del contenido y los estudiantes.

Para investigar las creencias de los profesores sobre la probabilidad, Greer y Ritson (1994) encuestaron a profesores de primaria y de secundaria en Irlanda del Norte sobre cuestiones estocásticas. La mayoría de profesores de primaria consideran que la probabilidad es relativamente poco importante en comparación con otros temas de matemáticas, y más del 50% de primaria y secundaria apenas utilizan la probabilidad para los experimentos que realizan en sus prácticas con estudiantes. En un estudio similar, Gattuso y Pannone (2002) informaron de que profesores de secundaria en Italia reconocieron su inseguridad sobre cómo enseñar la estadística de la forma más correcta, no por falta de conocimiento estadístico, sino por no estar preparados con la didáctica adecuada para enseñar estas ideas.

2.2.6. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DOCENTE

Al sugerir ideas para la formación futura en probabilidad de los profesores necesitamos tener en cuenta el conocimiento pedagógico del contenido de los docentes y el conocimiento del contenido específico para la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

Las mejoras en la enseñanza de la probabilidad deben incluir una actividad simultánea por parte de los docentes: desarrollar sus conocimientos de estocástica y reflexionar sobre la naturaleza determinista y no determinista del mundo al ser aplicadas en diferentes contextos. Es por ello que, paralelamente al cambio del currículo surge la necesidad de formación didáctica de los profesores que incluye, además del conocimiento estadístico los siguientes componentes básicos según Batanero, Godino y Roa (2004):

- La reflexión epistemológica sobre la naturaleza del conocimiento estocástico, su desarrollo y evolución.
- Análisis de las transformaciones del conocimiento para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza.
- Estudio de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus

estrategias en la resolución de problemas que permitirá orientar mejor la tarea de enseñanza y evaluación del aprendizaje.

- Análisis del currículo, situaciones didácticas, metodología de enseñanza para temas específicos y recursos didácticos específicos.

Organizaciones como la Conference Board of Mathematical Sciences (CBMS, 2001) han desarrollado el conocimiento del contenido específico que deben conocer los docentes en los diferentes niveles educativos: enseñanza elemental, enseñanza media y enseñanza superior. El poner en común los puntos elaborados por Batanero, Godino y Roa (2004), el CBMS (2001) y los asuntos centrales presentados anteriormente debe servir para informar sobre el contenido de los cursos desarrollados para los profesores en activo y en prácticas.

El conocimiento pedagógico del contenido que se necesita para programar y aplicar adecuadamente lecciones sobre probabilidad es tan complejo como el estudio de la probabilidad en sí, y debe ser tenido en cuenta en la formación de los docentes. Los profesores deben comprender cómo usar diferentes representaciones y herramientas para ayudar a los alumnos a recoger y analizar datos de los experimentos y a conocer las propiedades de las diferentes representaciones para destacar determinados conceptos. Deben ser capaces de usar ejemplos extraídos de la investigación sobre las interpretaciones erróneas de los alumnos como punto de partida para la creación de tareas y debates en clase así como necesitan conocer las intuiciones más comunes entre los alumnos en relación con dichos ejemplos y diseñar actividades que permitan a los alumnos cuestionar sus primeras intuiciones. Sin embargo, los profesores deben evitar seguir un pensamiento determinista, mediante el cual sólo diseñen actividades basadas en el enfoque clásico que sólo permitan una única respuesta.

2.3. INVESTIGACIONES SOBRE PROBABILIDAD

En este apartado presentamos un resumen de las investigaciones relacionadas con los conceptos básicos de probabilidad, que tratan sobre la evaluación del conocimiento de los estudiantes de dichos conceptos así como de los posibles errores o dificultades que pueden tener.

2.3.1. ALEATORIEDAD

Según Batanero, Serrano y Green (1998), el concepto de aleatoriedad es el punto básico en el estudio de la probabilidad y por ello, es fundamental que el alumno tenga una correcta comprensión de esta idea, para que pueda avanzar en el campo del cálculo de probabilidades. Batanero y Serrano (1995) indican que el análisis epistemológico del concepto así como la investigación psicológica muestran la complejidad para los estudiantes del significado de la aleatoriedad.

Según Piaget e Inhelder (1951), la comprensión del azar por parte del niño es complementaria a la de la relación causa-efecto. Los niños conciben el azar como resultado de la combinación de una serie de causas independientes que producen un resultado inesperado. Según estos autores, se requiere un razonamiento combinatorio, para poder concebir las distintas posibilidades existentes en estas situaciones. Por tanto, la idea de azar no puede ser comprendida hasta que se desarrollo el razonamiento combinatorio, en la etapa de las operaciones formales (>12-14 años).

Para examinar la comprensión de los estudiantes sobre las mezclas aleatorias, utilizaron el conocido experimento de la bandeja. En los dos compartimentos de ésta se colocan ocho bolas blancas y ocho rojas. Al balancear la bandeja se produce la mezcla progresiva de las dos clases de bolas. Piaget e Inhelder concluyen que los estudiantes en la primera etapa del desarrollo del concepto de azar (*estadio pre-operacional, 4-7 años),* piensan que, después de mover la bandeja, las bolas vuelven a su lugar original, o que el conjunto de blancas acabarán en el lugar ocupado de las rojas, y viceversa. No comprende la naturaleza irreversible de la mezcla aleatoria.

Los estudiantes en una segunda etapa (*estadio de las operaciones concretas,* 8-11 años), comienzan a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios.

Por último, los estudiantes de la etapa 3 (*estadio de las operaciones formales*, a partir de 11 años), muestran una comprensión completa del azar, ante una situación aleatoria, por medio de esquemas operacionales se hace inteligible, y la síntesis entre el azar y lo operacional conduce al adolescente al concepto de probabilidad

Estos resultados han sido cuestionados por Fischbein (1975), quien considera que, la intuición primaria del azar, es decir la distinción entre fenómeno determinista y aleatorio sin instrucción previa, está presente en la conducta diaria de cada niño, incluso antes de la edad de 7 años. El azar es equivalente a impredecibilidad y cuando el número de posibilidades es pequeño el niño de preescolar razona correctamente. También afirma que la síntesis entre lo formal y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales. La explicación es que las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas unívocas.

Más recientemente Metz (1998b) indica que las principales dificultades que los conceptos de azar y aleatoriedad presentan a los estudiantes son: a) fallos al interpretar los patrones resultantes de muchas repeticiones de un suceso; b) la ocurrencia de que una persona o dispositivo puede controlar un suceso y c) la creencia de que algún tipo de orden o propósito subyace a los sucesos.

Desde el enfoque subjetivo de la probabilidad, según Hawkins, Jolliffe y Glickman (1992) muchas personas creen que los ejemplos más apropiados de la aleatoriedad son los “resultados desordenados”. Estos sesgos en la percepción subjetiva de la aleatoriedad se muestran en la tesis de Serrano (1996), quien encuentra que los alumnos comprenden bien las tendencias en las secuencias de resultados aleatorios, pero no perciben la variabilidad intrínseca de los mismos, o al menos la subestiman.

Los experimentos aleatorios tienen dos características importantes, la primera es su impredecibilidad; que es bien reconocida por los sujetos como ha quedado de manifiesto en investigaciones con niños pequeños (Green, 1982, 1989, 1991), con alumnos de secundaria (Toohey, 1995; Serrano, 1996) y adultos (Falk, 1981). La segunda característica es la repetibilidad de los experimentos aleatorios, que como afirman Batanero y Serrano (1995), un experimento aleatorio sólo tiene interés para el cálculo de probabilidades si es posible, al menos imaginariamente, repetirlo en idénticas condiciones. Steinbring (1991) indica que, desde el punto de vista formal, la idea central del concepto de azar es la de sucesión de resultados de un mismo experimento realizado de forma repetida e independientemente. En la exigencia de repetibilidad del experimento se halla implícita la concepción frecuencial de probabilidad (Fine, 1973; Buxton, 1970).

La aleatoriedad, según Zabell (1992), contiene ideas distintas, que se refieren al proceso de generación de los resultados aleatorios, a cada resultado aislado y al patrón obtenido en una serie de resultados de dicho proceso. El proceso de generación es lo que denominamos *experimento aleatorio*; los posibles resultados de este proceso son los *sucesos aleatorios* y la sucesión obtenida en una serie de ensayos particulares es lo que conocemos como secuencia aleatoria. Aunque parezca que estos aspectos están relacionados, esto no es siempre así. Un ejemplo son los números pseudoaleatorios producidos por calculadoras y ordenadores usando algoritmos deterministas, pero que se toman como aleatorios en las aplicaciones estadísticas.

Konold, Lohmeier, Pollatsek y Well (1991) consideran que el término “aleatoriedad” se puede ver como una familia de conceptos, que incluye la idea de experimento, suceso, espacio muestral, probabilidad, etc. Por ello, la aleatoriedad la podemos percibir como un modelo abstracto que se puede aplicar a situaciones muy variadas.

2.3.2. ESPACIO MUESTRAL

Entre las ideas fundamentales de la probabilidad, según Heitele (1975), se encuentra el álgebra de sucesos de Kolmogorov, donde asigna a cada experimento aleatorio un espacio muestral de sucesos observables. Para construir un modelo probabilístico se comienza habitualmente con la descripción de todos sus posibles resultados o espacio muestral.

Hawkins y cols. (1992) indican que en la definición del experimento aleatorio hay dos aspectos claves: la clara formulación de las condiciones del experimento y la enumeración del espacio muestral correspondiente al mismo. La correcta enumeración depende de la formulación, ya que si el estudiante interpreta incorrectamente el experimento, llegará a un espacio muestral incorrecto. En opinión de estos autores no se presta suficiente atención en la enseñanza a estos dos aspectos y ello puede ser el origen de concepciones incorrectas en los estudiantes.

Jones, Langrall, Thornton y Mogill (1999) examinaron la habilidad de estudiantes de 8 y 9 años para identificar el espacio muestral en situaciones aleatorias, encontrando que 15 de los 37 estudiantes participantes no creían que todos los resultados podrían ocurrir en un experimento aleatorio simple. Según los autores puede ser debido a que piensan en el espacio muestral desde un punto de vista determinista, atribuyendo certeza donde no existe, y que este problema persistió en dos de los 15 estudiantes a pesar de realizar una instrucción con múltiples experiencias mediante generadores aleatorios discretos y continuos.

La dificultad para determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio puede ser debida a una falta de razonamiento combinatorio como indican Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997) o bien a que es un concepto poco tratado en los currículos escolares, según English (2005).

Shaugnessy (2003) destaca que los programas de instrucción deben implicar a los estudiantes en la determinación de los espacios muestrales en los experimentos aleatorios. Según Jones, Langrall y Money (2007), si se quiere mejorar la enseñanza, los profesores deben tener en cuenta las características del pensamiento de los estudiantes sobre este concepto: a) la dificultad de parte de los niños para realizar una lista de los resultados de un experimento aleatorio, aunque sea simple; b) falta de herramientas sistemáticas para generar los resultados en un experimento compuesto, y c) imposibilidad de relacionar determinación del espacio muestral y probabilidad de los resultados.

Además del conjunto de todos los resultados (espacio muestral) y sus elementos (sucesos elementales), la teoría de la probabilidad se ocupa de los *sucesos* asociados al experimento. Se define un suceso como un subconjunto del espacio muestral. Esto es correcto para los espacios muestrales finitos, pero en los espacios muestrales infinitos, es necesario restringir la definición de probabilidad a conjuntos medibles (Borovcnik, Bentz y Kapadia, 1991).

2.3.3. ENFOQUES DE LA PROBABILIDAD

Un estudio histórico realizado por Batanero, Henry y Parzysz (2005), puso de relieve los tres enfoques utilizados para la medición de la probabilidad: el clásico (Laplace, 1825/1995), el frecuencial (Von Mises, 1928/1952), y el subjetivo (Lindley, 1980). La mayoría de ellas se centran en el enfoque clásico, aunque en investigaciones recientes empiezan a tratar el enfoque frecuencial. Sin embargo, no se encuentra ninguna investigación cognitiva de la medición de la probabilidad utilizando un enfoque subjetivo.

Hay dos tipos de investigaciones cognitivas de la medición de probabilidad mediante un enfoque clásico: El primero se centra en los estudiantes, vista la probabilidad de forma cualitativa (más probable/menos probable). En el segundo tipo se evalúa a estos alumnos a través de un razonamiento cuantitativo sobre la probabilidad:

probabilidad de un suceso, comparaciones de probabilidad, probabilidad de ajustes, y probabilidades condicionales.

Sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad, se pueden citar algunas investigaciones de aprendizaje (por ejemplo, Horvarth y Lehrer, 1998; Polaki, 2002a; Pratt, 1998, 2000; Shaughnessy y Ciancetta, 2002). Estos estudios sentaron las bases para una investigación más reciente, que se centra en la probabilidad experimental y la relación entre la probabilidad experimental, la probabilidad teórica y el tamaño de la muestra.

2.3.4. PROBABILIDAD DE UN SUCESO

Konold y cols. (1993), en un problema sobre el lanzamiento de una moneda justa cinco veces, donde se preguntaba cuál es el resultado más probable/menos probable: a) CCCXX, b) XCCXC, c) XCXXX, d) CXCXC, e) las cuatro secuencias son igualmente probables, encontraron los siguientes resultados: La mayoría de los estudiantes respondieron correctamente a la pregunta sobre el resultado más probable con el argumento e), mientras que a la pregunta sobre el resultado menos probable solo el 38% respondió con el argumento e). El autor alegó que este resultado se podía atribuir a un razonamiento basado en el enfoque de resultados, es decir, los alumnos interpretan el problema como una predicción de lo que puede suceder. En el caso de argumento menos probable, la mayoría de los estudiantes justifican su respuesta mediante la heurística de la representatividad (Kahneman y Tversky, 1972).

Watson, Collis y Moritz (1997) en su estudio pidieron a estudiantes en los grados 3, 6, y 9 si ciertos sucesos son más probables o igualmente probables. Encontraron que incluso cuando los estudiantes identifican los sucesos más probables o igualmente probables, su argumento no es normativo. Sus resultados fueron similares a los de Konold y cols. (1993), muchos alumnos interpretan igualmente probable con que "cualquier cosa puede suceder". Estos estudios sirvieron para plantearse una serie de preguntas acerca de cómo los estudiantes de diferentes edades identifican el caso menos probable de un suceso.

Estudios con niños más pequeños (Acredolo, O'Connor, Banks y Horobin, 1989; Jones, Langrall y cols., 1997; 1999; Polaki, 2002a) se han centrado en la construcción de la probabilidad de un suceso. En estos estudios, se les pidió a los estudiantes que identificaranlos casos más y menos favorables en base a un enfoque clásico de la probabilidad. En un intento por evitar los problemas planteados por Konold y cols. (1993) y Watson y cols. (1997), estos autores pedían a los alumnos justificar sus argumentos utilizando razonamientos cualitativos y cuantitativos. Acredolo y cols. sientan las bases para este tipo de estudios con los argumentos de niños en los grados 1, 3 y 5. Las estrategias utilizadas por los niños pueden ser descritas en términos de razonamiento parte-parte y parte-todo, como los siguientes estudios ponen de manifiesto.

Con estudiantes de grado 3, Jones, Langrall y cols. (1999) llegaron a la conclusión de que el reconocimiento y la utilización de las relaciones parte-todo ha facilitado a los estudiantes el razonamiento cuantitativo de la probabilidad. Además, se encontraron con que el esquema parte-todo, en lugar de utilizar el uso de fracciones, parecía ser un elemento fundamental de los estudiantes en su razonamiento. Otros investigadores también han identificado la importancia de la relación parte-todo en el razonamiento de los estudiantes más jóvenes a la hora de pensar en la probabilidad (Jansem, 2005; Metz, 1998a; Polaki, 2002 a y b; Ritson, 1998; Tarr, 1997).

2.3.5. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Al concepto de probabilidad, a lo largo de su evolución histórica, se le han asociado diferentes significados, que todavía coexisten quizás al desarrollo relativamente recientemente de éste, comparado con otras ramas de las matemáticas. Hacking (1975) indica que este lento desarrollo ha sido debido en gran parte al significado dual del término probabilidad, como grado de creencia y como cálculo estable de frecuencias de los sucesos aleatorios. Estos dos significados dieron origen a las definiciones posteriores de probabilidad desde el punto de vista subjetivo y objetivo, respectivamente. Estos criterios, aunque complementarios, no han cesado de provocar discusiones de tipo filosófico entre los defensores de una y otra postura.

Las diferentes concepciones de probabilidad permitirán poner de manifiesto, cómo cada una de estas diversas concepciones asignaría un significado diferenciado al término "probabilidad". Como consecuencia, podríamos decir que el objeto "probabilidad" sería diferente en estas diversas acepciones, a pesar de que todas ellas compartiesen algunas características comunes.

La definición clásica de probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades, según Laplace, es *la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los casos sean igualmente "probables"*. Según Godino, Batanero y Cañizares (1987), esta definición se encontró inadecuada incluso en su misma época, ya que a*demás de ser circular y restrictiva, no ofreció respuesta a la pregunta de qué es realmente la probabilidad; sólo proporcionó un método práctico de cálculo de probabilidades de algunos sucesos sencillos"* (p. 21).

En el enfoque frecuencial, la probabilidad de un suceso es entendida como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso en una secuencia de resultados, entendida esta convergencia en sentido estocástico, dado por los teoremas de límite y ha sido defendida, entre otros por John Venn, Von Mises, Reichembach y Kolmogorov (Godino y cols., 1987).

Hawkins y Kapadia (1984), hablan de probabilidad formal cuando ésta se calcula con precisión usando las leyes matemáticas de la teoría axiomática de Kolmogorov. Aunque la aproximación formal nos proporciona una definición inequívoca de la probabilidad y nos permite superar las circularidades e inconvenientes ya citados en los anteriores puntos de vista, Godino y cols. (1987) sugieren que este enfoque es inadecuado en los primeros niveles de enseñanza, debido a la complejidad de la teoría matemática subyacente.

Un caso particular de la definición general de probabilidad como medida (función de conjunto, normada, numerablemente aditiva), permite resolver problemas de probabilidades geométricas. El sentido es que si E es una región con una medida conocida, la probabilidad de que un punto elegido al azar pertenezca a un subconjunto A de E es el cociente entre la medida de A y la medida de E.

Entre los elementos subjetivos que pueden intervenir en la asignación de probabilidades podemos citar los siguientes:pensamiento causal, teorías previas y creencias socioculturales; y heurísticas y sesgos en el razonamiento estocástico.

El pensamiento causal está relacionado con la asignación no normativa de probabilidades. Pozo (1987) define este tipo de razonamiento como el conjunto de limitaciones formales a las que están sujetas todas las relaciones causales que establecemos los seres humanos. El autor recoge cuatro principios generales admitidos sobre razonamiento causal: constancia, asimetría, condicionalidad y transmisión generativa. Existe un metaprincipio que afirma que todo hecho es causal, que llamamos determinismo causal. Este autor describe dos teorías psicológicas comprensivas sobre el razonamiento causal: La primera, debida a Piaget, quien considera que el desarrollo del razonamiento causal requiere previamente el operacional, pero no se agota con él.

La segunda teoría, se debe a Kelley (1973), que toma de Piaget la idea de esquema. Cuando el sujeto carece de información precisa sobre la situación causal recurre a los esquemas causales. Pozo afirma que no podemos afirmar la validez del determinismo causal, hay que considerar que las personas tienden a reducir la incertidumbre de los sucesos.

La mayoría de los trabajos actuales sobre razonamiento, según Pérez Echeverría (1990), dan bastante importancia al contenido de los problemas y la relación que tienen con las teorías previas del sujeto que los resuelve. Nisbett y Ross (1980) afirman que el razonamiento humano no es el mismo en un laboratorio que en situaciones de la vida cotidiana, como algunos problemas probabilísticos en contextos cercanos a los niños.

Amir y Williams (1999) entrevistaron a 38 alumnos de 11-12 años de dos escuelas de Manchester, de diferentes razas y diferentes entornos culturales y religiosos, para estudiar el efecto de los factores culturales sobre las heurísticas, sesgos e intuiciones en el campo de la probabilidad así como su influencia en la idea de azar. Los resultados mostraron que las creencias son el elemento cultural que más influye en el razonamiento probabilístico. Los niños también se dejan influir por experiencias pasadas.

2.3.6. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

Para determinar las etapas de desarrollo cognitivo para la cuantificación de probabilidades, Piaget e Inhelder (1951) mostraban a los niños dos colecciones de fichas blancas, donde en el reverso de cada ficha podía haber una cruz o no. El estudio consistía en mezclar las dos colecciones y con la cara blanca colocada hacia arriba decidir, en qué colección sería más fácil obtener una ficha blanca con la cruz en el reverso.

Los autores determinaron tres estadios sobre el desarrollo del concepto de probabilidad: en el primer estadio, los niños no resuelven el problema debido a la falta de comparación lógico-aritmética; en el segundo estadio, los niños consiguen realizar comparaciones con una variable; en el tercer estadio los niños resuelven el problema dando una solución general y rápida. Resuelven el problema obteniendo los dobles cocientes mediante un sistema de correspondencias y no realizan todavía un cálculo de fracciones.

Fischbein utilizó su propio marco teórico sobre las intuiciones e instrumentos diferentes a los de Piaget y estudió el efecto de la instrucción sobre las intuiciones probabilísticas de los niños. Fischbein, Pamput y Minzat (1967) utilizan preguntas con representaciones gráficas donde dejan caer una bola por unos canales. En los casos equiprobables los resultados son mejores en niños de preescolar que en los niños de 10-12 años, lo que, según los autores,puede ser debido al hecho de que la enseñanza en las escuelas orienta al niño a una interpretación determinista de los fenómenos.

Fischbein, Pamput y Minzat (1970) utilizaron dos urnas con diferente número de bolas blancas y negras, donde los niños debían elegir la urna con mayor posibilidad de extraer un color determinado. Estos niños podían pertenecer a un grupo sin instrucción y a un grupo con una instrucción breve sobre cómo responder correctamente a los problemas. El efecto positivo de la instrucción se observó en los niños a partir de 9-10 años y no a los niños pequeños, por lo que los autores recomiendan la enseñanza de la probabilidad a partir de estas edades.

Un problema de comparación de probabilidad de un mismo suceso en dos espacios muestrales diferentes implica la comparación de dos fracciones. Por ello se han incluido las investigaciones de Noelting (1980 a y b), quien realiza un estudio que amplía las categorías de problemas de comparación de fracciones definidas por Piaget e Inhelder (1951). Noelting distingue varios niveles en estos problemas y en las estrategias que se le asocian. Estos niveles se corresponden con las etapas de desarrollo de Piaget en la tabla 2.1. La representación (a,b) y (c,d) corresponde con los dos tipos de elementos que comparamos en las fracciones.

Las características asignadas por Noelting a cada etapa del desarrollo de la noción de fracción, se resumen en la siguiente tabla 2.3.1.

Tabla 2.3.1. Niveles de problemas de comparación de fracciones y estrategias asociadas (Noelting, 1980)

Etapa	Nombre	Edad	Ejemplo ítem (a,b) vs (c,d)	Características	Estrategia “entre”	Estrategia “intro”
0	Simbólica	2;0	(1,0) vs (0,1)	Identificación de elementos		
IA	Intuitiva inferior	3;6	(1,4) vs (4,1)	Comparación del primer término	c>a (c,d)>(a,b)	
IB	Intuitiva media	6;4	(1,5) vs (1,2)	Primer término igual; comparación del segundo término	a=c, b>d (c,d)>(a,b)	
IC	Intuitiva superior	7;0	(5,2) vs (3,4)	Relación inversa entre los términos de ambos pares	a>c, b<d, (a,b)>(c,d)	a>b, c>d (a,b)>(c,d)
IIA	Operacional concreta inferior	8;1	(1,1) vs (2,2)	Clase de equivalencia de la razón (1,1)	a=b, c=d m/n(a,b)=(c,d), (a,b)=(c,d)	a/b=c/d=1/1, (a,b)=(c,d)
IIB	Operacional concreta superior	10;5	(4,2) vs (2,1)	Clase de Equivalencia de cualquier razón	m/n(a,b)=(c,d), entonces (a,b)=(c,d)	a/b=c/d (a,b)=(c,d)
IIIA	Operacional formal interior	12;2	(2,1) vs (4,3)	Razones con dos términos correspondientes múltiplos: hay tres tipos según los términos que guarden proporción	ma=c, m(a,b)=(ma,mb) Si ma=c, mb=<d, Entonces (a,b)>(c,d)	a/b=m, c/d=1+1/d<m, entonces (a,b)>(c,d)
			(4,2) vs (5,3)		(a,b)/b=(a/b,1), m/1=d; ma/b>c, m(a/b,1)>(c,d) entonces (a,b)>(c,d)	a/b=m, c/d=1+e/d<m entonces (a,b)>(c,d)
			(3,2) vs (4,3)		(a,b)=(b,b)+(e,0) (c,d)=(d,d)+(e,0) (b+b)<(d+d) e/(b+b)>e/(d+d), entonces (a,b)>(c,d)	a/b=1+1/b, c/d=1+1/d d>b, 1/d<1/b, 1+1/b>1+1/d, entonces (a,b)>(c,d)
IIIB	Operacional formal superior	15;10	(3,5) vs (5,8)	Cualquier razón	a+b=g, c+d=h hg=gh h(a,g)=(ha,hg) g(c,h)=(gc,gh) (gc,gh)<(ha,hg), entonces (a,b)>(c,d)	100a/b=x%, 100c/d=y%, x%>y%, entonces (a,b)>(c,d)

En comparaciones de fracciones, los autores (Vergnaud, 1983; Karplus, Pulos y Stage, 1983 a y b) encuentran dos tipos de estrategias correctas: multiplicativas y no multiplicativas. En las estrategias multiplicativas los términos de una razón se relacionan multiplicativamente y esta relación se extiende a la segunda razón. La relación se establece entre el numerador y denominador de la misma fracción (estrategia “intro”) o entre numeradores y denominadores de las dos fracciones (estrategias “entre”). Las estrategias no multiplicativas consisten en establecer una relación dentro de la fracción y extenderla a la segunda mediante operaciones aditivas (Hart, 1981).

Las investigaciones sobre probabilidad de Carretero, Pérez Echeverría y Pozo (1985) y Pérez Echeverría, Carretero y Pozo (1986), basadas en el procesamiento de la información, comparan los resultados de alumnos de primero y tercero de Bachillerato Unificado Polivalente y primero de Universidad en tareas sobre cuantificación de proporciones, probabilidades y correlaciones. En estos trabajos identificaron los siguientes niveles de dificultad:

- Nivel 1: problemas que se resuelven comparando el número de casos favorables y desfavorables.
- Nivel 2: misma proporción de casos favorables en ambas urnas y desfavorables en ambas urnas o entre casos favorables y desfavorables de cada urna.
- Nivel 3: misma proporción sólo entre los casos favorables de ambas urnas o sólo entre los desfavorables de ambas urnas o entre casos favorables y desfavorables de una sola urna.
- Nivel 4: no hay relación de proporción entre los cuatro miembros. Este tipo de problema sólo se podía resolver mediante un cálculo estricto de proporciones.

Las estrategias utilizadas por los participantes clasificaron en los cuatro tipos siguientes:

a) Comparación de magnitudes absolutas, típica, según Piaget e Inhelder, de los niños pre-operacionales. Resuelven con éxito las tareas del nivel 1.

b) Comparación aditiva. La solución se encuentra comparando los miembros de estas fracciones por medio de sumas y restas. Estrategia de la etapa de operaciones concretas. Pueden resolver con éxito los problemas del nivel 1.

c) La estrategia de correspondencia. Proporción en una fracción y aplicarlo a la otra fracción. Esta regla proporciona respuestas correctas en el nivel 2, y aproximadas en el nivel 3.

d) Comparación multiplicativa entre los miembros de cada fracción: típica, según Piaget e Inhelder (1951) de los sujetos que han adquirido las operaciones formales. Pueden resolver con éxito todos los problemas del cuestionario.

En sus conclusiones los autores afirman que, en general, los problemas en un contexto proporcional eran más sencillos que en un contexto probabilístico. Una diferencia importante es que el resultado de un problema en un contexto proporcional indica un acontecimiento seguro, mientras que el resultado de un problema en un contexto probabilístico indica un grado de incertidumbre.

En un estudio de Falk, Falk y Levin (1980) con niños de 4 a 11 años, plantearon problemas sobre comparación de probabilidades en contextos de bolas en urnas, ruletas y peonzas. Las tareas fueron clasificadas por el contexto utilizado y por el tipo de fracciones presentadas en la comparación. Los resultados mostraron que, a partir de los 6 años, los niños manifiestan un razonamiento de tipo probabilístico y el error dominante en los niños pequeños fue elegir el conjunto con mayor número de casos favorables. Los contextos no influyeron para medir la capacidad de los niños para evaluar probabilidades.Los autores sugieren que la probabilidad se compone de los conceptos de azar y proporción, ya que la capacidad de calcular proporciones debe tener en cuenta la imposibilidad de predecir los resultados.

Green (1983 a y b), mediante un test de evaluación de intuiciones probabilísticas, encontró las siguientes estrategias de razonamiento en los niños:

En contextos de comparación de urnas: a) escoger la bolsa con mayor número total de bolas; b) escoger la bolsa con mayor número de casos favorables; c) escoger la bolsa con mayor diferencia entre casos favorables y desfavorables; d) escoger la bolsa con mayor proporción entre casos favorables y desfavorables.

En contexto de ruletas encuentra los siguientes tipos de estrategias: a) Uso del concepto de área; b) comparación numérica; c) Comparación de razones; d) Posición o velocidad de la aguja; e) Idea de continuidad; f) Idea de separación.

Maury (1984) basó sus investigaciones en las estrategias utilizadas por los niños de 15-16 años en problemas relativos a la cuantificación de probabilidades, atendiendo a la influencia del contexto y el vocabulario, tanto en las respuestas, como en los razonamientos empleados por los sujetos. Partiendo de las investigaciones de Piaget e Inhelder, la autora establece tres tipos de tareas:

a) Comparación de una sola variable: el número de casos favorables es el mismo en ambos sacos, y difiere sólo el número de casos posibles. Estas tareas se resuelven, según Piaget e Inhelder, en la etapa de operaciones concretas.

b) Proporcionalidad: La razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles es la misma en ambos sacos. Estas tareas se resuelven, según Piaget, al final de la etapa de operaciones concretas.

c) Comparación de dos variables: Hay un número diferente de casos favorables y posibles en ambos sacos. Para Piaget son las más difíciles, y se resuelven en la etapa de operaciones formales.

Estas tres situaciones se plantean en dos tipos de contexto: uno discreto, deurnas con bolas de dos colores (azules y rojas) y otro continuo de ruletas divididas en sectores iguales, coloreados en rojo y azul.Por ello, en las bolas el alumno se siente más seguro con las relaciones de tipo parte-parte y en la ruleta en las relaciones del tipo parte-todo, que serían situaciones *For every y Out of*, según Singer y Resnick (1992)

Los resultados mostraron que la modalidad de urnas con bolas permite poner en evidencia un mayor número de concepciones espontáneas de probabilidad en un mismo alumno, que cuando se les propone tareas con ruletas. En cuanto a las justificaciones utilizadas por los estudianteslas clasificaron en:

a) Argumentos pertinentes: en las ruletas casos favorables/casos posibles (regla de Laplace); casos favorables/casos desfavorables.

b) Argumentos no pertinentes: 1) Distribución: Son argumentos, que en el caso de las ruletas, hacen referencia a la distribución de los sectores coloreados con el color pedido. 2) Diferencia: para cada saco, se considera la diferencia entre casos favorables y desfavorables o al revés, y luego se comparan las diferencias encontradas, para tomar una decisión. Para Piaget este es un procedimiento típico del final de etapa de operaciones concretas. 3) Casos favorables: El alumno sólo compara los números de casos favorables de los dos sacos, sin tener en cuenta los desfavorables o los posibles. Según Piaget, ésta es la estrategia utilizada por los niños más pequeños, en la etapa de operaciones concretas. En este argumento sólo se tiene en cuenta una parte de los datos aportados, ignorando los demás.

La variable contexto tuvo una fuerte influencia sobre los argumentos, lo que evidencia,según la autora, que problemas equivalentes en el plano probabilístico no lo son forzosamente en el plano cognitivo. Por ello, considera que se debe proponer a los estudiantes problemas presentados en diferentes contextos, que podría favorecer la explicitación de conflictos cognitivos y su superación. La variable vocabulario solo influyó en los resultados.

En otros estudios posteriores (por ejemplo, Falk, 1983; Fischbein, Nello y Marino 1991; Jones y cols., 1997; Way, 1996), donde se utilizaron dos urnas con bolas de dos colores diferentes y se preguntaba a los estudiantes en cuál de las dos es más favorable obtener un determinado color, la conclusión general es que muchos niños, sobre todo los de corta edad, basan su elección en cuestiones idiosincrásicas, tales como "su color favorito" o centrándose solo en el número de casos favorables. Falk ha identificado tres estrategias que los estudiantes utilizan para decidir qué conjunto es más favorable: (a) más casos favorables, (b) casos no favorables, y (c) conjunto con una mayor diferencia en casos favorables. Falk observó que los alumnos que se inician en el razonamiento proporcional, comienzan a utilizar estrategias donde relacionan el número de casos favorables y desfavorables, o el número de casos favorables, desfavorables y el total, que sugieren los esquemas parte-parte y parte-todo.

Jones, Thornton, Langrall y Mogill (1996) describen una evaluación de un experimento de enseñanza basado en las investigaciones previas sobre el razonamiento probabilístico de los niños. El marco teórico usado parte de cuatro ideas claves: espacio muestral, probabilidad de un suceso, comparación de probabilidades y probabilidad condicional. Para cada uno de ellos establece cuatro niveles de pensamiento:

El nivel 1 se asocia con el pensamiento subjetivo. La asignación de probabilidades se basa en juicios subjetivos. La comparación de probabilidades es subjetiva y no se diferencia entre situaciones equitativas y no equitativas.

El nivel 2 o transicional entre subjetivo y cuantitativo ingenuo se caracteriza porque la asignación de probabilidades puede usar argumentos cuantitativos o subjetivos. La comparación cuantitativa puede ser incorrecta y limitada, aunque comienzan a diferenciarse las situaciones equitativas y no equitativas.

El nivel 3 o cuantitativo informal, usa, informalmente, números para calcular probabilidades; distingue los sucesos “cierto”, “posible” e “imposible”, justificando informalmente su decisión. Distingue las situaciones equitativas y no equitativas mediante razonamientos numéricos.

El nivel 4 o numérico predice el suceso más probable en experimentos simples. Asigna probabilidades a sucesos. Compara probabilidades y asigna probabilidades numéricas iguales a sucesos equiprobables.

La investigación realizada por Cañizares (1997), plantea la pregunta general de si los alumnos poseen los requisitos suficientes para que sea posible adelantar la enseñanza de la probabilidad antes de la adolescencia y qué tipo de tareas serían las idóneas para esta iniciación. En particular se centró en el intervalo de edad 10-14 años, para complementar, por un lado, la investigación de Serrano (1996) llevada a cabo con alumnos de 14-18 años, y porque era el intervalo común a dos investigaciones sobre el razonamiento probabilístico intuitivo, las de Green (1982) y Fischbein y Gazit (1984).

Este trabajo se llevó a cabo en dos fases: En la primera, realizó un estudio comparativo de dos instrumentos clásicos de evaluación de intuiciones probabilísticas sobre una misma muestra de 321 alumnos de los cursos de 5º a 8º de Educación General Básica. Los instrumentos fueron tomados de Green (1982) y Fischbein y Gazit (1984), que están pensados para alumnos de estas edades que no hayan recibido instrucción en probabilidad. El primero de ellos evalúa una gama amplia de contenidos probabilísticas y permite situar al alumno en un nivel de razonamiento probabilístico según las teorías de Piaget e Inhelder (1951). El segundo, aunque más limitado, permite evaluar el uso que hacen los niños de elementos subjetivos en la asignación de probabilidades. Comparó sus resultados con los de ambos autores y mostró la falta de correlación entre las puntuaciones de dichos instrumentos, lo que indica que el test de Fischbein y Gazit contiene elementos no evaluados en el trabajo de Green. En la segunda fase de la investigación profundizó en el empleo, por parte de los niños, de estos elementos subjetivos en la asignación y comparación de probabilidades, y su relación con el razonamiento proporcional. Para ello construyó un nuevo instrumento de evaluación que incluía el test completo de Fischbein y Gazit y algunos ítems de Green, entre los que destacan los de comparación de probabilidades. Con este nuevo instrumento se obtuvieron datos de una muestra de 130 alumnos de 5º y 6º de Educación General Básica y 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria, sobre las estrategias y niveles en los ítems de comparación de probabilidades, utilizando los descritos por Noelting (1980 a y b) para la comparación de fracciones. Así mismo, analizó las creencias subjetivas de los alumnos sobre la independencia, control del azar y juego equitativo, junto con su razonamiento combinatorio.

Como conclusión, considera la autora que es necesario rechazar la hipótesis de estructura lineal del razonamiento probabilístico de los niños y que las etapas descritas por Piaget no deben ser entendidas en sentido global. Por el contrario, un mismo niño puede estar en distintas etapas para diferentes conceptos y tipos de problemas probabilísticos, de tal forma que el razonamiento probabilístico de los niños puede describirse mediante un constructo de tipo vectorial y sistémico, entre cuyos elementos podemos citar la aleatoriedad, independencia, elementos subjetivos, razonamiento proporcional y combinatorio. En consecuencia, propone un estudio individualizado de cada uno de estos elementos y un tratamiento didáctico específico de las dificultades de razonamiento y comprensión asociadas.

Watson, Collis y Moritz (1997),realizaron un estudio con una amplia muestra de estudiantes de los grados 3, 6, y 9 donde se proponían problemas de bolas de distinto color en cajas (por ejemplo,Urna A: 6 bolas rojas y 4 bolas azules; Urna B: 60 rojas y 40 azules). Los autoresclasificaron las respuestas de los estudiantes, siguiendo el modelo de desarrollo de Biggs y Collins (1991), en dos ciclos, a través de cuatro niveles de complejidad para cada uno de ellos.

En el primer ciclo sobre la adquisición del concepto identifica: en el nivel más bajo las respuestas son subjetivas; en el segundo nivel, en las respuestas hay reconocimiento de colores pero no de la frecuencia de los colores; en el tercer nivel en las respuestas hay reconocimiento de frecuencia pero su uso es indebido en el problema; en el cuarto nivel en las respuestas reconocieron el número de bolas en cada caja comparando los colores. En el segundo ciclo, sobre la aplicación del concepto se identifican los siguientes niveles: El primero, reconoce la equivalencia de las cajas. En el segundo, las explicaciones son más matemáticas y utilizan proporciones; en el tercero y cuarto nivel, aparecen las respuestas que utilizan las ideas de proporción o porcentajes para las comparaciones dentro de una misma caja o entre las dos cajas.

La mayoría de las respuestas de los estudiantes en los grados 3 y 6 se encuentran en el tercer nivel del primer ciclo, mientras que la mayoría de las respuestas de los estudiantes de grado 9 se encuentran en el segundo ciclo de desarrollo.Esta categorizaciónrealizada por Watson y cols. (1997) puede orientar a los profesores sobre la instrucción en probabilidad en primaria y secundaria, ya que fue realizada a estudiantes de un amplio rango de edad.

Citando las limitaciones que tienen las tareas típicas usadas en la investigación sobre probabilidad de un suceso y comparación de probabilidades, Falk y Wilkening (1998) proponen el uso de *tareas de ajuste de probabilidad*, como la siguiente, donde el alumno es preguntado sobre cuántas bolas blancas hay que añadir en la segunda urna para que la probabilidad de extraer una bola blanca sea la misma en las dos urnas (1ª urna: 2 bolas blancas, 3 bolas negras; 2ª urna: 6 negras). Los autores consideran que estas tareas requieren la evaluación de la magnitud de probabilidad y al mismo tiempo conservan la necesidad de comparar dos probabilidades. Encontraron que los estudiantes de 6-7 años fueron incapaces de generar la probabilidad pedida usando las nociones de proporcionalidad. Los alumnos de 9-10 años intentaron integrar las dos dimensiones pero tomaron las decisiones basándose en la diferencia entre el número de bolas blancas y negras en las dos urnas. Los de 13 años fueron utilizando la proporcionalidad aunque a un nivel más bajo que el perfecto de ejecución. La conclusión principal es que en un nivel dado la maestría en tareas de elección binaria precede a la habilidad para ajustar probabilidades.

2.3.7. JUEGOS EQUITATIVOS

Los juegos de azar tuvieron gran importancia en el origen de la teoría de probabilidad y son uno de los principales contextos en el que los niños pueden comprender las características de las situaciones aleatorias (Batanero, 2005). Estos juegos forman parte de la cultura del niño fuera de la escuela, y, a través de los mismos, los niños adquieren conocimientos probabilísticos incluso antes de una instrucción formal (Peard, 1990). Por este motivo, varias investigaciones han analizado las concepciones de los niños tienen sobre el juego equitativo.

Watson y Collis (1994) estudiaron las interpretaciones de los diagramas de barras y la toma de decisiones sobre si un dado es o no sesgado, encontrando un funcionamiento multimodal en algunas respuestas y la relación de éstas con la forma concreta de presentación simbólica. También algunos alumnos consideran la necesidad de experimentación para decidir sobre la equitatividad de los dados. En Lidster, Pereira-Mendoza, Watson y Collis (1995) describen dos estudios con alumnos de 8 a 14 años que tratan de relacionar las experiencias dentro y fuera de la escuela con el desarrollo de la noción de equitatividad. Los autores creen que la noción de equitatividad y sesgo se desarrolla antes del comienzo de la escuela y se preguntan si hay un desajuste entre el aprendizaje previsto por el profesor y el conocimiento construido por el alumno. En Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz (1999), pretendían analizar las concepciones de los niños entre 10 y 14 años sobre la idea de juego equitativo, completando anteriores estudios sobre las creencias de los niños en el terreno de probabilidad y su influencia en la asignación de probabilidades (Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz, 1997; Cañizares y Batanero, 1998). Entre sus conclusiones destacan que la mayoría de los alumnos demuestran una adecuada concepción de la idea de juego justo o equitativo, aunque las entrevistas mostraron una gran variedad en las concepciones de los alumnos, desde los que no diferencian entre sucesos equiprobables y no equiprobables, hasta los que son capaces de resolver correctamente todos los problemas.

Aunque las investigaciones han mostrado una serie de sesgos en el razonamiento probabilístico, también se han encontrado muchas ideas productivas de los niños y adolescentes sobre la probabilidad. Vahey, Enyedy y Gifford (1997) mostró que los alumnos de secundaria empleaban el razonamiento probabilístico de forma productiva en una tarea sobre equitatividad en un entorno tecnológico, y también sugiere que algunas heurísticas citadas frecuentemente, como la representatividad, no describen adecuadamente los razonamientos de los estudiantes. Scholttmann y Anderson (1994) que han estudiado las intuiciones de los niños de 5 a 10 años sobre la esperanza matemática, concluyen que, incluidos los niños más jóvenes, tienen una intuición correcta sobre la idea de esperanza matemática, teniendo en cuenta, tanto la probabilidad, como el valor del premio para tomar sus decisiones. Sin embargo, tanto en la asignación de probabilidad, como en la puesta en relación del premio y la probabilidad de ganar siguen, con frecuencia, estrategias aditivas.

2.3.8. PROBABILIDAD FRECUENCIAL

Según el enfoque frecuencial de la probabilidad, la probabilidad de un suceso es entendida como el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa de un suceso en una secuencia de resultados, entendida esta convergencia en sentido estocástico, dado por los teoremas de límite y ha sido defendida, entre otros, por John Venn, Von Mises, Reichembach y Kolmogorov (Godino y cols., 1987).

Se basa en dos características que pueden ser observadas en las sucesiones de resultados de un mismo experimento aleatorio repetido en idénticas condiciones. La primera es la estabilidad global aproximada de las frecuencias relativas de cada uno de los posibles sucesos asociados al experimento y la segunda es la imposibilidad de predecir con seguridad el resultado particular de cada uno de ellos.

La importancia de la aproximación frecuencial se debe a que permite establecer un puente de unión entre la estadística y la probabilidad, ya que el enfoque clásico de la inferencia estadística se basa en esta concepción de la probabilidad. Además, este enfoque se recomienda, desde un punto de vista metodológico, en numerosas propuestas curriculares para la enseñanza no universitaria (MEC, 2007; NCTM, 2000). Permite también la simulación de experimentos, con lo que podemos analizar modelos probabilísticos cuyo tratamiento a partir del cálculo directo de probabilidades sería demasiado difícil para los estudiantes y también otros que serían difíciles de observar. Este enfoque, no obstante, tiene algunos inconvenientes desde los puntos de vista filosófico, conceptual y práctico relacionados con la noción de número infinito de experimentos.

2.3.9. PROBABILIDAD CONDICIONAL

El concepto probabilidad condicional, es fundamental, tanto para la noción de independencia, como para poder definir la probabilidad en experimentos compuestos. Según Heitele (1975) la probabilidad condicional mide el cambio en el grado de nuestras creencias en función de la nueva información. Puesto que la aleatoriedad no es una propiedad de los objetos o fenómenos, sino un modelo que aplicamos en su análisis, en situaciones concretas este modelo puede ser reforzado por nuestro conocimiento complementario sobre la situación. Este es el punto de vista de la escuela bayesiana, donde todas las probabilidades son condicionales, y que postula una aproximación diferente a la inferencia estadística, lo que indica la importancia de este concepto dentro de esta escuela.

Dados dos sucesos *A* y *B* de un espacio muestral *E* y la probabilidad de *B* es distinta de cero, entonces definimos la probabilidad de *A* condicionada por *B* como la probabilidad de que, habiendo ocurrido *B* se verifique también *A*, es decir, la probabilidad de *A* condicionada por *B* viene dada por la fórmula siguiente, supuesto p(*B*) ≠ 0:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Según esta definición, si ocurre *B*, la probabilidad de *A* se evalúa en un espacio muestral reducido. Puede demostrarse que la probabilidad condicional cumple los axiomas de probabilidad.

Falk (1983, 1988) y Shaughnessy (1992) describen tres ideas principales erróneas en la literatura sobre la probabilidad condicional. El primero, denominado "el fenómeno Falk" o la falacia del eje tiempo, pone de relieve la dificultad que tienen los estudiantes en relación con una probabilidad condicional, P(*A* | *B*), donde el suceso *A* precede al suceso *B* (también en Batanero y Sánchez, 2005). La segunda idea errónea aportada por Shaughnessy se refiere a la dificultad de determinar el condicionamiento del acontecimiento (por ejemplo el problema de la tarjeta en Shaughnessy y el problema de la moneda en Batanero y Sánchez). La tercera se refiere a la dificultad de distinguir entre una declaración condicional y su inversa, es decir, entre los eventos como "tengo el sarampión, dado que tengo una erupción cutánea" y "Tengo una erupción, dado que tengo el sarampión" (en Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987).

En una instrucción diseñada para aumentar la comprensión de probabilidad condicional e independencia en estudiantes de quinto de primaria, Tarr (1997) se acercó a la probabilidad condicional a través de una secuencia aleatoria de tareas que incluían situaciones con y sin sustitución. Una de las principales conclusiones está relacionada con el cambio en el razonamiento de los estudiantes, pasando de la utilización del esquema parte-parte al esquema parte-todo y el impacto que ello tuvo en su capacidad para tratar con probabilidades condicionales. Antes de la instrucción, los estudiantes utilizaron el razonamiento parte-parte en las comparaciones de no sustitución.

Muchos de los estudiantes que participaronen la investigación de Tarr (1997) no usaron la notación convencional para describir probabilidades condicionales.El autor caracterizó cuatro representaciones. La primera representación fue una descripción de la oportunidad, utilizada como unidad de medición. Una segunda representación que utiliza una frecuencia de comparación que, además, incorpora razonamiento parcial. Una tercera representación, observa el espacio para la muestra con dos resultados "oportunidad x de y". La cuarta representación, que aparece después de la instrucción, que participa de la presentación de informes de probabilidades como una relación de porcentajes. Aunque matemáticamente incorrecta, Tarr informó de que en esta investigación la notación parecía tener sentido para los estudiantes.

Pollatsek y cols. (1987) reveló que los estudiantes universitarios tenían "confusión acerca de una sentencia condicional y su inversa". Tarr (1997) destacó la importancia de que los estudiantes construyan probabilidades condicionales de selección y cuenten con el espacio muestral de los resultados, mientras que Watson y Moritz (2002) llegan a la conclusión de que los estudiantes manejan los temas de frecuencia condicional mejor que la probabilidad condicional. En ambos estudios, la investigación sugiere que "contar", o la frecuencia de datos, es importante en el desarrollo de conceptos de probabilidad condicional. Resultados similares se han encontrado en una reciente investigación psicológica (Gigerenzer, 1994; Hopfsenberger, Kranendonk y Scheaffer, 1999) que revelan que los estudiantes utilizan la frecuencia de los datos para construir probabilidades. Desde una perspectiva pedagógica Shaughnessy (2003) sugiere que "la enseñanza de la probabilidad en realidad debería comenzar con los datos, y las preguntas de probabilidad deben ser planteadas a partir de conjuntos de datos”.

2.3.10. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA

Para Borovcnick, Bentz y Kapadia (1991) la independencia es el concepto que distingue la teoría de la probabilidad, de la teoría de la medida. Es parte de las definiciones fundamentales en esta rama de las matemáticas, pero no un axioma básico. Es una hipótesis clave en teoremas fundamentales, como el de Bernoulli, que establece un puente del enfoque estructural a la interpretación frecuencial y por ello la identificación de este concepto contribuyó a la aceptación rápida de la axiomática de Kolmogorov por la comunidad científica.

Con el concepto de independencia de ensayos similares es posible deducir una medida de probabilidad en el espacio producto con solo conocer la distribución de probabilidad en los espacios muestrales de cada experimento simple. Por ello, se convirtió en una pieza clave en la axiomática de Kolmogorov. Para Freudenthal (1973) la independencia es un concepto fundamental en probabilidad, aunque indefinido, como lo son los puntos y rectas en geometría. Considera que una comprensión completa de la independencia no puede obtenerse en la escuela.

En los libros de texto usados en la enseñanza secundaria y universitaria se suele definir la independencia entre dos sucesos, a partir de la regla de multiplicación de probabilidades, del siguiente modo:

Definición 1. Dos sucesos A y B son independientes, si y solo si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A). \mathrm{P}(B)$, es decir, si la probabilidad de la intersección de los dos sucesos viene dada por el producto de las probabilidades simples de los sucesos considerados.

Una definición equivalente, salvo para el caso de que A o B tengan probabilidad 0, y que, Según Freudenthal (1973), es más conveniente desde el punto de vista didáctico es la siguiente:

Definición 2. Dos sucesos A y B son independientes si y solo si$\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)$, es decir, si la probabilidad del suceso B no cambia cuando se añade la condición de que haya ocurrido el suceso A. En cualquiera de las dos definiciones se puede mostrar con facilidad que la independencia o la dependencia es una relación simétrica. Esta propiedad se ve directamente en la definición 1 y se obtiene con ligeras manipulaciones de la definición 2. Esta última definición tiene el inconveniente que es preciso exigir que los sucesos tengan probabilidades no nulas (al menos el suceso A) para poder asegurar la existencia de las probabilidades condicionales.

Un problema con la definición 1 es cuando A y B son sucesos pertenecientes a distintos experimentos, por ejemplo cuando decimos que el resultado al lanzar una moneda es independiente del resultado obtenido al lanzar otra. Supongamos que en este caso el suceso A sea "obtener cara en la primera moneda" y el suceso B "obtener cara en la segunda". ¿Qué significaría $A \cap B$? La intersección de conjuntos sólo puede definirse sobre subconjuntos del mismo conjunto universal.

Truran y Truran (1997) indican que el concepto de independencia puede referirse a sucesos o a experimentos aleatorios y que tiene un significado diferente en estos dos contextos. Sugieren distinguir estas dos situaciones como modo de superar las dificultades sobre el tema, dando las dos definiciones siguientes:

Independencia clásica: Se refiere a los sucesos que son subconjuntos de un mismo espacio de probabilidad. Dos sucesos A y B se dice que son independientes si y sólo si $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B)$. Esta definición hace claro que la independencia es una relación simétrica.

La forma $\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A)$hace claro que la probabilidad de obtener A a partir del subespacio de posibilidades B es la misma que la de obtener A a partir del espacio muestral completo. La independencia de A y B no implica falta o existencia de relación causal entre A y B o de un tercer suceso con A y B. La definición alternativa "A no produce efecto sobre B" ha producido mucha confusión entre dependencia/independencia y causalidad.

Independencia de experimentos: Para Truran y Truran (1997) la independencia de experimentos es una decisión subjetiva sobre si el resultado de un experimento aleatorio es o no influenciado por otro experimento aleatorio, posiblemente del mismo generador aleatorio. Lleva también a la multiplicación de probabilidades, pero no puede usar la notación conjuntista clásica (definición 1).

Dos experimentos X e Y con m y n resultados, An y Bm son independientes si se juzga que ninguno de ellos tiene efecto sobre el otro. Esto significa que la probabilidad de que X produzca el resultado Ai y Y produzca el resultado Bj es igual a la probabilidad de que X produzca el resultado Ai multiplicada por la probabilidad de que Y produzca el resultado Bj.

Esta característica común de la multiplicación es lo que ha confundido la distinción entre los dos tipos de independencia. Sin embargo, la distinción es clara: la independencia de ensayos se refiere a la interrelación entre diferentes espacios probabilísticos y la independencia clásica a la de los resultados de un único experimento, lo que es mucho más sencillo.

Para Heitele (1975) la idea de independencia es más fundamental incluso que la de probabilidad condicional. Para este autor, es una idea fundamental considerar independientes los experimentos aleatorios que no tienen conexión física. Sin embargo esto no resuelve el problema de las situaciones en donde las probabilidades de los elementos del espacio producto cartesiano se definen en modo que no todos los elementos son equiprobables. Esto explica la dificultad de aplicación de la idea de independencia, en los contextos prácticos, porque la decisión de considerar si realmente dos experimentos son independientes uno de otro es, hasta cierto punto, subjetiva. También muestra la discrepancia entre los modelos teóricos y su puesta en práctica. La idea de independencia expresada en la regla del producto es fácil de comprender, pero incluso los científicos entrenados en estadística tienen dificultad en reconocer si la independencia es aplicable o no en una situación práctica. Hawkins y cols. (1992) también indican que los estudiantes confunden a veces las ideas de sucesos excluyentes y sucesos independientes.

2.3.11. PROBABILIDAD COMPUESTA

En probabilidad, según Freudenthal (1973), el interés casi nunca se centra en un solo espacio probabilístico, sino más bien en la interrelación de muchos espacios probabilísticos. Un recurso útil es construir el producto cartesiano de dos o más espacios muestrales para obtener el espacio muestral del experimento compuesto.

Separar los conceptos de espacio muestral y distribución puede parecer ahora obvio, pero ha sido uno de los obstáculos tradicionales en el desarrollo conceptual. La cuestión de extensión de las probabilidades de varios experimentos simples al experimento compuesto no fue alcanzada hasta el desarrollo de las ideas de independencia y probabilidad condicional (Borovnick y cols. 1991).

2.3.12. VARIABLE ALEATORIA

El concepto de variable aleatoria, según Hawkins y cols. (1992), es bastante sutil, ya que es una función con valores numéricos cuyo dominio es un espacio muestral. Según Heitele (1975) la idea de variable aleatoria es fundamental en estadística, ya que amplió notablemente las aplicaciones de la probabilidad. Tres son las ideas fundamentales en el modelo de variable aleatoria: la distribución, la esperanza y la varianza. La distribución de una variable permite comparar cada caso aislado con el conjunto de observaciones. La esperanza matemática se interpreta intuitivamente como la media aritmética de los valores de la variable si repitiésemos un gran número de veces el experimento en idénticas condiciones. La varianza permite apreciar la variabilidad de la distribución en torno a la media. También es importante la composición de variables aleatorias mediante operaciones de tipo diverso para obtener otras nuevas.

Los niños pequeños consideran equidistribuidas todas las variables aleatorias. Incluso los alumnos mayores asumen la equidistribución en experimentos tan sencillos como el número de caras al lanzar dos monedas, como ha puesto de manifiesto Lecoutre y Cordier (1990) en repetidos experimentos con estudiantes de diversa edad y preparación. Considera Heitele que esta creencia es un problema didáctico y sugiere que debería introducirse a los alumnos al estudio de distribuciones, como la normal, donde este principio falla. Sin embargo, puesto que los teoremas de límite no son accesibles hasta llegar a la universidad, quizás el único modo de introducir la distribución normal para alumnos de niveles educativos anteriores sería por medio de la simulación.

Borovcnik y cols. (1991) indican que una variable es aleatoria cuando su valor se determina como resultado de un experimento aleatorio. Para caracterizarla necesitamos conocer el conjunto de todos sus posibles resultados y las probabilidades asociadas a cada uno de ellos.

Una variable aleatoria se define como una función ζ del espacio muestral E en el conjunto de números reales R.

$$\zeta : E \longrightarrow R$$

No cualquier función puede ser una variable aleatoria. Se requiere que, para cada intervalo I, el conjunto $\{s: \zeta\,(s) = I\}$ sea un suceso del espacio muestral, y, por tanto, tenga una probabilidad bien definida. Esto garantiza que la variable aleatoria transporte la probabilidad P que está definida sobre el espacio muestral E a la línea real, definiendo P_{ζ} (I) = (P{s: ζ (s) $\in$ I})

2.3.13. HEURÍSTICAS Y SESGOS EN EL RAZONAMIENTO ESTOCÁSTICO

Desde el campo de la psicología, el razonamiento probabilístico se refiere al uso de heurísticas en el razonamiento probabilístico. Autores como Bar-Hillel (1983), Hope y Kelly (1983), Kahneman, Slovic y Tversky (1982), han descrito que se cometen errores sistemáticos de tipo psicológico cuando el individuo toma de decisiones en casos probabilísticos.

Pérez Echeverría (1990) indica que la toma de decisiones se basa en teorías cognitivas y del procesamiento de la información. La característica de este modelo es la utilización de heurísticas que se describen como "mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos con la complejidad de estímulos ambientales" (pág. 51).

La heurística de representatividad (Kahneman y cols., 1982; Benzt y Borovcnik, 1982) consiste en calcular la probabilidad de un suceso en base a cómo está representado con respecto a la población de la que proviene. El uso de esta heurística es inapropiado y da lugar a sesgos probabilísticos, como:

1. *Insensibilidad al tamaño de la muestra*: según Tversky y Kahneman (1982a), el sujeto cree que muestras pequeñas pueden representar a la población.
2. *Concepciones erróneas de las secuencias aleatorias*: la representación de un proceso aleatorio mediante pocos ensayos conlleva a pensar que secuencias ordenadas no parezcan aleatorias. Este sesgo es llamado falacia del jugador y se detalla en la tesis de Serrano (1996).

Lecoutre (1985, 1992), Lecoutre y Durand (1988), Lecoutre y Cordier (1990), describen en sus investigaciones el sesgo de equiprobabilidad, que consiste en la creencia de los niños de que todos los sucesos asociados a un proceso aleatorio son iguales de probables. En cualquier contexto y formato de la pregunta, los resultados son los mismos y demuestran que los dos resultados son equiprobables. Los alumnos consideran que el resultado del experimento "depende del azar" y por ello todos los posibles resultados son igual de probables.

Konold (1991) indica que el término “probabilidad” es dual, como grado de creencia y como límite de las frecuencias relativas de una sucesión de ensayos, y puede explicar algunas dificultades en el razonamiento probabilístico. El “outcome approach” o “enfoque en el resultado aislado”, consiste en que los alumnos interpretan de forma errónea los problemas sobre probabilidad, teniendo la creencia que el fin principal de las situaciones de azar no es llegar a la probabilidad de la ocurrencia, sino predecir con éxito el resultado de un ensayo simple (Konold, 1989).

CAPÍTULO 3

ESTUDIO EXPLORATORIO

3.1. INTRODUCCIÓN.

Como hemos comentado anteriormente, debido al interés creciente por el estudio de la probabilidad que se manifiesta en los currículos recientes (MEC, 2006a) y la importancia en este contexto de la formación de profesores que han de llevar a cabo la enseñanza (Stohl, 2005), decidimos realizar un estudio exploratorio durante el curso académico 2005-2006 para intentar responder a la pregunta de si efectivamente estos futuros profesores de educación primaria tienen suficientes conocimientos de probabilidad para enseñar el tema. Para obtener una primera aproximación a la respuesta, en este trabajo se realizó un estudio de evaluación del conocimiento matemático de los futuros profesores sobre probabilidad. Para ello, se analizaron las respuestas de 102 futuros profesores de educación primaria a 7 problemas, tomados de Green (1983) y de Fischbein y Gazit (1984).

Las investigaciones sobre el conocimiento de la probabilidad de los docentes eran y son escasas, por lo que esperábamos contribuir con este primer estudio exploratorio y su continuación con la tesis a la mejora de la formación de profesores de educación primaria sobre probabilidad y a la calidad de la enseñanza impartida por dichos profesores a sus alumnos sobre estos temas. Parte de estos resultados han sido publicados en Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006); Ortiz, Mohamed, Serrano y Rodríguez (2009); Ortiz, Serrano y Mohamed (2009); Ortiz, Mohamed, Serrano (2010).

3.2. OBJETIVOS DEL ESTUDIO

El trabajo de investigación se basó en el análisis realizado de las respuestas de los futuros profesores de educación primaria al cuestionario administrado, identificando las diferentes estrategias utilizadas y su relación con la dificultad de cada uno de los problemas, comparando posteriormente estos resultados con los obtenidos por los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997).

El objetivo principal de esta investigación fue realizar una evaluación inicial del conocimiento matemático de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad, en particular para resolver problemas elementales de comparación de probabilidades, comparando los resultados con los obtenidos por los niños de 10-14 años que participaron en la investigación de Cañizares (1997).

3.3. METODOLOGÍA

El enfoque de esta investigación es predominantemente cualitativo y exploratorio, por lo que utilizamos métodos estadísticos para el análisis de las respuestas correctas y análisis de tipo cualitativo de las estrategias y argumentos utilizados por los futuros los futuros profesores de educación primaria para resolver los problemas de comparación de probabilidades.

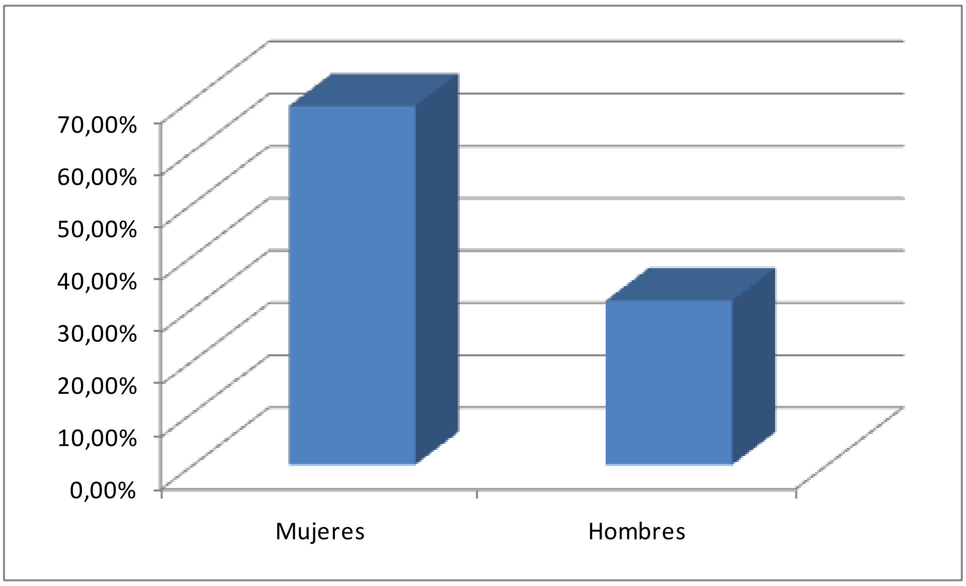
Para realizar nuestro trabajo utilizamos un cuestionario con problemas tomados de Green (1983) y de Fischbein y Gazit (1984), que nos permitieron profundizar en el razonamiento probabilístico de los futuros profesores. De este modo, combinamos elementos cuantitativos y cualitativos, por lo que nos encontramos en un punto intermedio entre ambos paradigmas de investigación (Goetz y Lecompte, 1988; Shulman, 1989). Las variables que intervienen tienen un carácter cualitativo (estrategias utilizadas) y el enfoque de la investigación es interpretativo (Denzin y Lincoln, 1994). Nuestro interés se centra en los componentes cualitativos del significado personal de los futuros profesores de educación primaria de la muestra sobre el concepto de probabilidad, aunque también usamos porcentajes de respuestas correctas para apoyar nuestras afirmaciones.

Según la clasificación que hace Bisquerra (1989) de tipos de investigación en Educación, consideramos nuestro trabajo como investigación fundamental y básica ya que se pretende aportar nuevo conocimiento sobre el razonamiento probabilístico de los futuros profesores de educación primaria, en particular sobre los problemas de comparación de probabilidades, que permitan mejorar la enseñanza de la probabilidad que impartirán a sus alumnos.

3.3.1. PARTICIPANTES

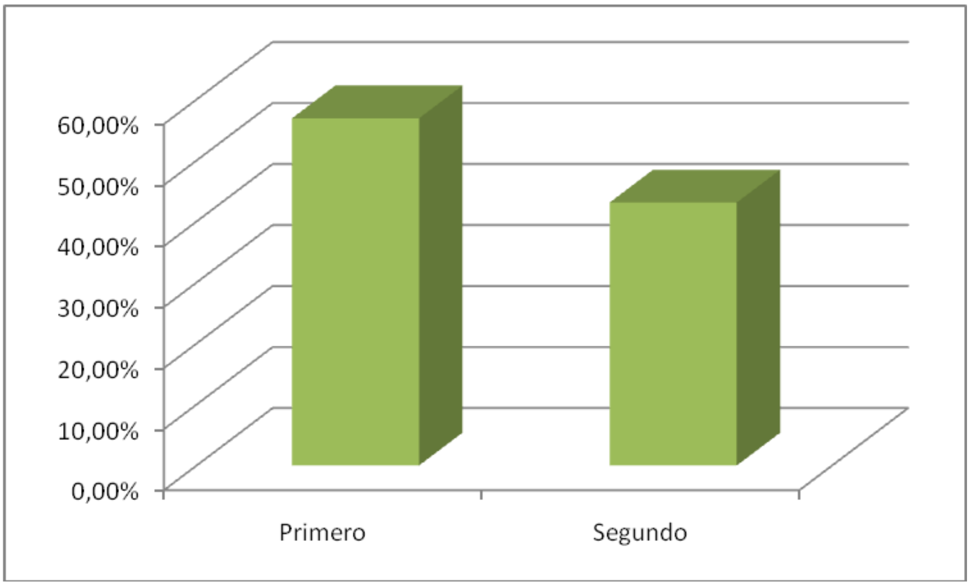
Los participantes en esta investigación fueron 102 futuros profesores de educación primaria de la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla, Universidad de Granada. Si atendemos a la variable sexo, en la figura 3.3.1 se observa que el 68.6% son mujeres y el 31.4% hombres. Cabe destacar el mayor número de mujeres, más del doble, que realizan estos estudios.

Figura 3.3.1. Porcentaje de futuros profesores agrupados por el sexo.



Los alumnos participantes fueron de los dos primeros cursos de la Diplomatura de Maestro, que es donde se imparten las asignaturas de Matemáticas y su Didáctica. En la figura 3.3.2 se observa que el 56.9% es de primer curso y el 43.1% de segundo.

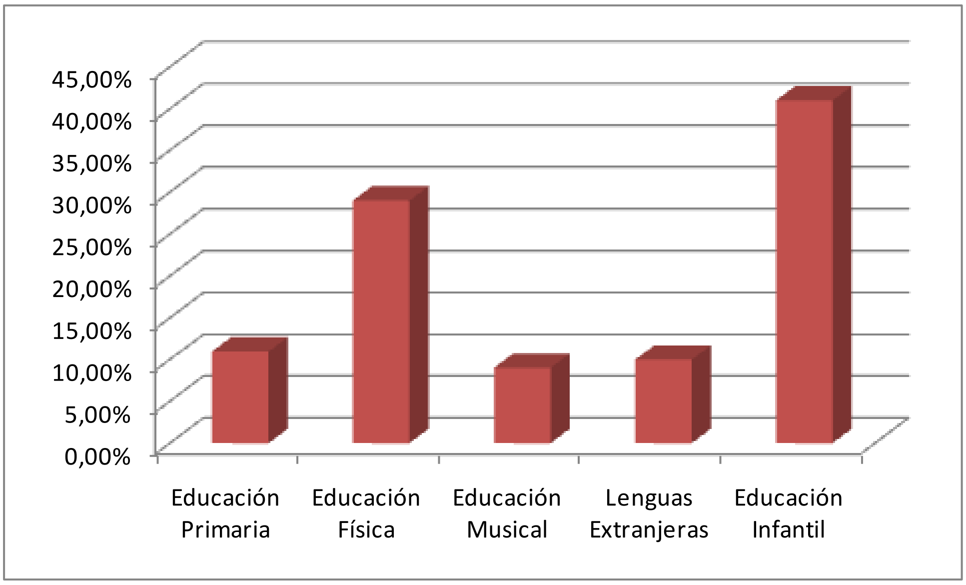
Figura 3.3.2. Porcentaje de futuros profesores agrupados por cursos.



En la figura 3.3.3 se observa que la distribución de las especialidades cursadas por los futuros profesores fue la siguiente: 11% de Educación primaria; 29% de

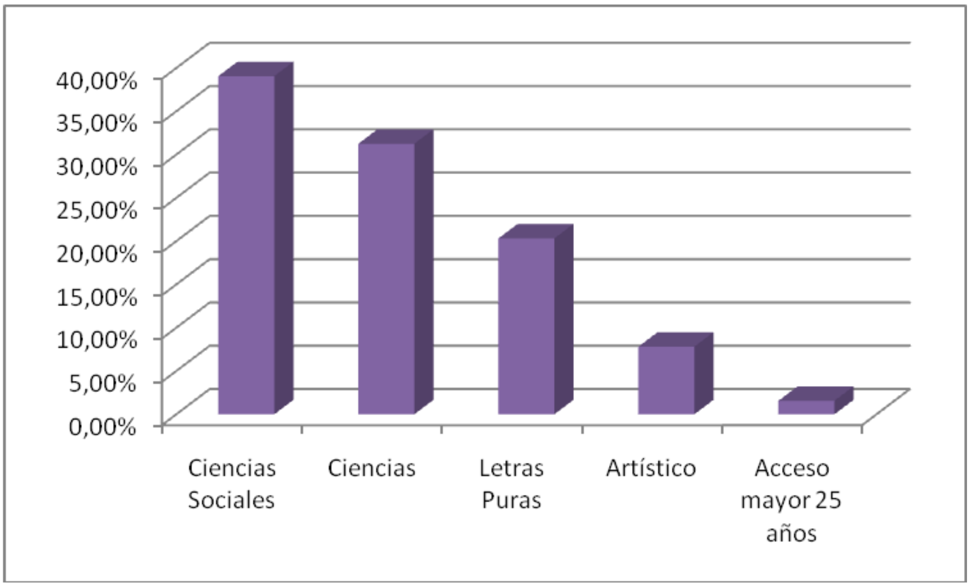
Educación Física; 9% de Educación Musical; 10% de Lenguas Extranjeras; y 41% de Educación Infantil.

Figura 3.3.3. Porcentaje de futuros profesores agrupados por especialidades.



Estos futuros profesores, en general, tienen escasa formación matemática, y en particular probabilística. La distribución según la modalidad del bachillerato cursada, que aparece en la figura 3.3.4, es la siguiente: El 39.06 % es de Ciencias Sociales, el 31.25 % es de Ciencias, el 20.31 % de Letras Puras, el 7.81 % del Artístico y el 1.56 % procede de la prueba de acceso a la universidad para mayores de 25 años.

Figura 3.3.4. Porcentaje futuros profesores agrupados por el tipo de acceso



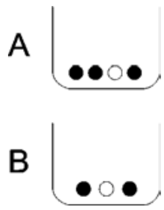
3.3.2. DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO

El cuestionario utilizado en la evaluación inicial de los conocimientos probabilísticos de los futuros profesores de educación primaria (ver Anexo I) estuvo compuesto de siete problemas. Cinco de ellos (1, 2, 3, 6 y 7), tomados de Green (1983), en los que se pide decidir cuál, entre dos cajas con fichas blancas y negras da mayor probabilidad de un cierto color, son similares entre sí, variando la composición de las urnas y el orden de los distractores. Se pide argumentar la respuesta. El primero de ellos es el siguiente:

A continuación describimos con detalle los problemas del cuestionario que se aplicó antes de la instrucción.

Problema 1.- En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo)

Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿Cuál elegirías para hacerla extracción? Señala la respuesta correcta:



A. La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
B. La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra ___
C. Las dos cajas dan la misma posibilidad..................................... ___
D. No lo sé.. ___

¿Por qué? ....
……………………………………………………………………………………………………..

Los otros dos problemas (4 y 5), tomados del cuestionario de Fischbein y Gazit (1984), introducen algunos factores subjetivos que en la investigación de Cañizares (1997) tuvieron una influencia, tanto en los resultados como en las estrategias empleadas.

Problema 4.- Pilar tiene 10 años. En su caja hay 40 bolas blancas y 20 negras. Rosa tiene 8 años. En su caja hay 30 bolas blancas y 15 negras. Cada una saca una bola de su propia caja sin mirar. Rosa opina que Pilar tiene mayor posibilidad de extraer una bola blanca porque ella es mayor, y por tanto es la más inteligente de las dos. ¿Cuál es tu opinión?

Problema 5.- Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión?

Se trata de identificar estrategias de elección de urnas en casos de diferente nivel de dificultad y buscar la relación entre el nivel de dificultad de la tarea y estrategia que utiliza el alumno. Se quiere establecer la consistencia o inconsistencia de la estrategia que elige un mismo alumno, entre las diferentes tareas y estudiar la influencia del contexto en la elección de la estrategia.

Carretero, Pérez Echeverría y Pozo, (1985) y Pérez Echeverría, Carretero y Pozo (1986) establecen 4 niveles de dificultad en los problemas de proporción y probabilidad. Partiendo de esta clasificación y del estudio hecho por Green (1982), incluimos los problemas 1, 2, 3, 6 y 7, modificando las cantidades de bolas del problema 7, con el fin de cubrir el nivel 4 de dificultad, que no se alcanza con ninguno de los otros. Estos problemas, con el 4 y 5, sacados del cuestionario de Fischbein y Gazit (1984), cubren los 4 niveles de dificultad de Pérez Echeverría, Carretero y Pozo (1986). Los niveles están diseñados dependiendo del tipo de estrategia que se requiere para su resolución.

Los problemas de nivel 1 son aquellos que se resuelven con una comparación de magnitudes absolutas. Según Piaget e Inhelder (1951) corresponden al período pre-operacional. También se pueden utilizar sumas o restas de datos (estrategias aditivas), que corresponden con el período de las operaciones concretas. Los problemas incluidos en este nivel son el 1, 2 y 3.

Los problemas de nivel 2 intervienen pares de urnas con composición proporcional, por lo que serán equivalentes sus probabilidades de éxito. La estrategia a utilizar es la correspondencia entre cuántos casos favorables hay por uno desfavorable. Problemas 4 y 5.

Los problemas de nivel 3 (problema 6) se pueden resolver con estrategias de correspondencias, pero en este caso las urnas no son equivalentes.

En el nivel 4 (problema 7) no hay relación de correspondencia entre los datos, se utiliza una estrategia multiplicativa. Según Piaget e Inhelder (1951) corresponde al período de las operaciones formales.

Estos problemas se seleccionaron con el criterio de que se encuentren representados todos los niveles de razonamiento proporcional descritos por Noelting (1980 a y b) para la comparación de fracciones.

Puesto que, en los problemas puede aplicarse el principio de indiferencia, nos encontramos ante un ejemplo en que la asignación de probabilidades debe hacerse aplicando la regla de Laplace. Para resolver el problema es necesario, por tanto, comparar dos fracciones dadas. Además de ello, se debe movilizar la concepción sobre el experimento aleatorio, diferenciar los posibles sucesos en este experimento (espacio muestral), asociar el número de casos favorables al suceso dado, el número de casos desfavorables al suceso contrario y considerar el número total de bolas como conjunto de posibilidades. En la Tabla 3.3.1 se clasifican los problemas de acuerdo al nivel requerido de razonamiento proporcional en la categoría de Noelting (1980 a y b).

Tabla 3.3.1. Clasificación de los problemas según los niveles descritos por Noelting

Problema	Composición (favorables, desfavorables) cada caja	Tipo (Noelting)	Estrategia posible	Otros
1	(3,1); (2,1)	IA	Comparar casos favorables	
2	(5,2); (5,3)	IB;	Comparar casos desfavorables	
3	(2,2); (4,4)	IIA;	Correspondencia	
4	(40,20); (30.15)	IIB;	Correspondencia	Factores subjetivos
5	(10,20); (30.60)	IIB;	Correspondencia	Factores subjetivos
6	(12,4); (20,10)	IIIA;	Correspondencia	
7	(7,5); (5,3)	IIIB;	Reducir común denominador	

3.3.3. TÉCNICAS DE RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS.

Se utilizó el cuestionario comentado anteriormente, que se puede calificar como una técnica objetiva de recogida de datos, pues se ha aplicado de forma uniforme al total de la muestra (Scott, 1988; Thorndike, 1989). El tipo de pregunta es variado, incluyendo problemas de opciones múltiples o preguntas de verdadero o falso, completadas con una opción de repuesta abierta y tareas a realizar por el alumno.

De la administración del cuestionario se obtuvieron dos tipos de datos. Por un lado, la opción elegida en cada problema. Por otro, el argumento en que se basa la respuesta. Para éstos últimos, de tipo cualitativo, se ha usado previamente el análisis de contenido (Weber, 1986; Fernández y Rico, 1984), que proporcionó una serie de categorías (tipos de estrategias) de respuestas en las variables consideradas, teniendo en cuenta los criterios de Huberman y Miles (1994).

Los datos aislados no son significativos, por lo que, como indica Gil (1994), una vez codificados todos los datos, se elaboraron tablas de frecuencia para las diferentes variables. Así mismo hemos comparado nuestros resultados con los obtenidos por los niños de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997).

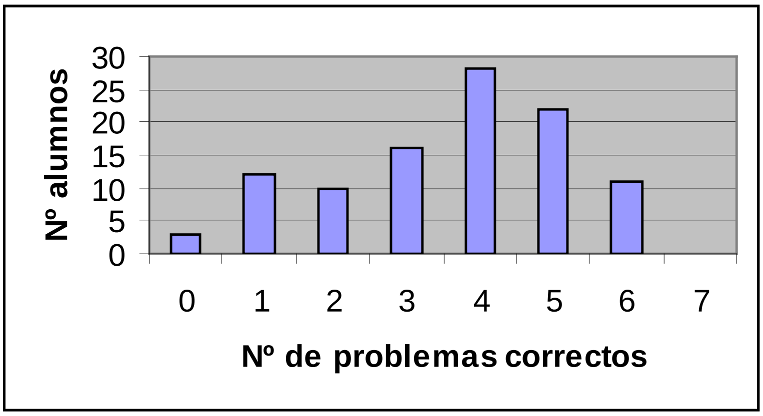
3.4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A continuación se presentan el análisis y discusión de los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria para los diferentes problemas del cuestionario propuesto.

3.4.1. PROMEDIO DE PROBLEMAS CORRECTOS

Se calculó el número de problemas que resolvieron correctamente los futuros profesores de educación primaria. En la figura 3.4.1 se pueden observar los resultados obtenidos. No hay ningún estudiante que haya resuelto de forma correcta los siete problemas; sólo hay un 11% de alumnos que han resuelto correctamente 6 problemas; aproximadamente el 50% de los alumnos han resuelto 4 o 5 problemas. Sin embargo, cerca de un 38% sólo resuelven correctamente 1, 2 o 3 e incluso hay un 3% que no ha contestado correctamente ninguno de los problemas propuestos.

Figura 3.4.1. Número de problemas resueltos correctamente



El promedio resultante es de 3.61 problemas correctos, lo que constituye un resultado algo superior al 2.97 obtenido como promedio de aciertos por los niños de la investigación de Cañizares, pero que no son muy buenos dada la sencillez de los problemas y el nivel de conocimiento que suponemos deberían tener los futuros profesores de educación primaria.

Entre los futuros profesores de educación primaria que han obtenido entre 5 y 6 aciertos predominan los que han cursado la modalidad de bachillerato de Ciencias; entre los que han obtenido 4 aciertos están repartidos entre las modalidades de Ciencias, Ciencias Sociales y Letras. Los alumnos que han cursado la modalidad de Letras Puras o Artística son los que han obtenido los peores resultados.

3.4.2. ANÁLISIS DE RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS

En la Tabla 3.4.1 presentamos los porcentajes de respuestas correctas a los problemas propuestos en cada grupo de edad de los alumnos que participaron en la investigación de Cañizares (1997) que muestra una mejora general con la edad, en los tres primeros, habiendo mayor dificultad en los que involucran mayor nivel de razonamiento proporcional o elementos subjetivos.

En el caso de los futuros profesores de educación primaria, se observó una mejora respecto a la media global de resultados de los niños en todos los problemas excepto en el primero. Por otro lado, el problema 7 resultó ser el más difícil (75% errores en los futuros profesores), en que la falta de proporcionalidad entre las cuatro cifras presentadas obliga al sujeto a un cálculo de proporciones, es decir a la aplicación de la regla de Laplace, donde tiene que comparar los casos favorables con los posibles en cada urna. Sin embargo, en este problema el distractor más fuerte no es la caja con el mayor número de bolas del color favorable, sino la opción de equiprobabilidad. Pensamos que esto se debe a que, en este problema, la diferencia entre los casos favorables y desfavorables en ambas cajas es la misma. El problema 7 corresponde al nivel 4 de los propuestos por Pérez Echeverría (1990) y nivel IIIB de la clasificación de Noelting.

Le sigue el problema 4 tomado de Fischbein y Gazit (1984), donde se produce la inversión del orden de dificultad, respecto al previsto en la clasificación de Noelting, posiblemente debido a los distractores de tipo subjetivo (70 % de errores en futuros profesores), lo que nos indica que un alto porcentaje de alumnos no llegó a establecer la proporcionalidad de las cajas o no la consideró relevante. Otro problema difícil fue el 5 con 57% de errores, también con elementos subjetivos, donde además el número de bolas del color favorable era inferior al de desfavorables, al contrario que en el problema 4. Otra diferencia entre estas dos cuestiones eran los datos entre los que se establecían las proporcionalidades, que es lo que establece los dos tipos de Pérez Echevarría: proporción entre el número de casos favorables de ambas cajas y desfavorables de ambas cajas, como en el problema 5. En los dos se ha manifestado como respuesta errónea más frecuente la elección como más probable de la caja con mayor número de bolas del color favorable.

Otro problema especialmente difícil es el problema 6 (con un 40% de errores). En este caso sí existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables de cada urna pero la proporción no es la misma, lo que hace que las urnas no sean equivalentes. Aunque los futuros profesores parecen ser conscientes de esta falta de equivalencia entre las dos urnas, sin embargo se decantan por la que tiene una mayor cantidad absoluta de casos favorables o la diferencia entre los casos favorables y desfavorables es mayor. El problema 6 corresponde a los niveles 3 de los propuestos por Pérez Echevarría (1990) y al nivel IIIB de la clasificación de Noelting.

Los tres primeros problemas, correspondientes a los tres tipos del nivel 1 de Pérez Echevarría y niveles IA, IB y IIA de Noelting, muestran un resultado algo mejor con solo un 30% aproximado de errores. No obstante debemos destacar el fuerte impacto que tiene la opción de equiprobabilidad en los dos primeros problemas, aún sabiendo que hay igualdad de casos favorables o desfavorables, mientras que en problema 3 el distractor más fuerte es el de mayor número absoluto de casos favorables.

Hay que destacar, también, la aparición de una categoría de respuesta denominada ambigua o incompleta, bastante frecuente en el problema 4, y que se refiere exclusivamente al factor secundario introducido en estos dos problemas, de modo que el estudiante hace algún comentario sobre dicho factor, sin llegara tomar una decisión sobre cual de las dos cajas ofrece mayor probabilidad. Además, la redacción de estos dos problemas de respuesta abierta favorece la ambigüedad en las respuestas.

Tabla 3.4.1. Porcentaje de respuestas correctas en los problemas

	Alumnos					Futuros profesores
Ítem	10-11 (n=36)	11-12 (n=37)	12-13 (n=38)	13-14 (n=32)	Total (n=143)	Total (102)
1	75.0	70.3	86.8	87.5	79.7	79.4
2	52.8	67.6	65.8	56.2	60.8	68.6
3	47.2	54.1	81.6	73.6	63.6	72.5
4	6.0	27.0	23.6	23.8	20.0	29.4
5	13.9	32.4	39.5	43.7	32.5	43.1
6	30.6	27.0	34.2	21.9	28.7	59.8
7	19.4	5.41	5.3	6.2	9.1	25.5

Si comparamos el orden de dificultad de los problemas entre los alumnos de la investigación de Cañizares (1997) y los futuros profesores observamos que los dos problemas más difíciles en ambos casos son el 7 y el 4. En el primero es necesario aplicar la regla de Laplace y en el segundo creemos que se debe a los elementos distractores. Estos resultados nos muestran que estas dificultades pueden persistir a lo largo del tiempo desde la Educación Secundaria hasta la edad de los futuros profesores.

En el caso de los problemas 5 y 6 se produce un cambio en el orden de dificultad entre ambos colectivos. Para los futuros profesores el problema 5, sobre la equiprobabilidad de los juegos fue más difícil que el 6 donde se ha de elegir entre dos urnas la más favorable. Puede ser que el concepto de juego justo haya sido menos trabajado tanto en su etapa de estudiante de secundaria como en el período de formación como maestro mientras que los alumnos de la investigación de Cañizares hayan tratado más este tema, debido a que actualmente se le presta mayor atención. El orden de dificultad es el mismo entre ambos colectivos en los tres primeros problemas.

Estos resultados son preocupantes, dado la sencillez de los problemas (comparación de probabilidades simples) y el alto número de errores, tanto en los que involucran comparación de fracciones como en los que incluyen elementos subjetivos.

3.4.3. ESTRATEGIAS DE LOS FUTUROS PROFESORES EN LA COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

Un segundo punto de estudio fue el análisis de las estrategias empleadas por los futuros profesores, pues los estudiantes pueden haber elegido una respuesta correcta siguiendo un razonamiento incorrecto. A continuación analizamos estas estrategias, usando la misma clasificación que Cañizares (1997) empleó con los alumnos de 10 a 14 años, que son las siguientes:

3.4.3.1. COMPARACIÓN DE UNA SOLA VARIABLE

Hay tres tipos de estrategias en las que el alumno sólo tiene en cuenta una variable del problema:

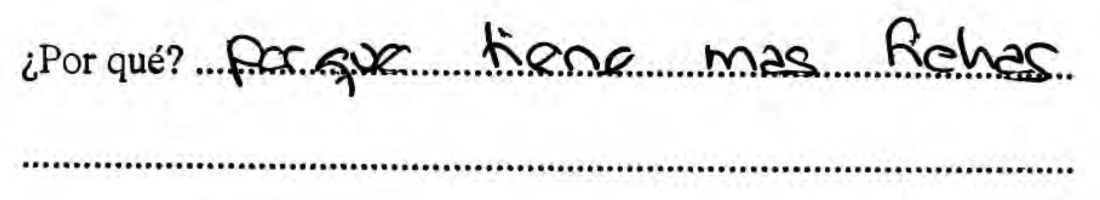
A1) Comparación del número de casos posibles

Consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas. Esta estrategia, aunque puede generar una respuesta correcta al problema 1, carece de base lógica. Según Piaget e Inhelder (1951, cap. IV) corresponde al principio del período pre-operacional. En ocasiones el alumno ve como más probable la caja con más bolas, como lo demuestra la respuesta del estudiante 65 al problema 1: Un ejemplo se transcribe a continuación:

> *“(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra. Porque hay una bola más y una posibilidad más”*

En este ejemplo observamos que los estudiantes solo tienen en cuenta una variable, el número de casos posibles de ambas cajas, sin considerar la relatividad de las proporciones de bolas blancas y negras. Esta estrategia, aunque puede generar una respuesta correcta, como en este caso, carece de base lógica y tiene su origen en la imposibilidad de los alumnos de comparar el conjunto total con un subconjunto, típica de este período evolutivo.

Hemos incluido en esta categoría aquellos estudiantes que justificaban su elección aludiendo al hecho de que "hay más" o "tiene más fichas", aunque somos conscientes de que cabe la posibilidad de que se estén refiriendo a las fichas negras sin explicitarlos. Así el alumno nº 29 responde al problema 7, eligiendo una opción incorrecta "(B) Caja J":


¿Por qué? Porque tiene mas fichas

¿Por qué? Porque tiene más fichas

Hemos encontrado esta estrategia en algunos estudiantes, pero hemos de indicar que no resultó persistente, ya que en general la utilizaban de forma aislada. Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 1, 3, 6 y 7 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en los problemas 2, 4 y 5 están algo por encima.

A2) Comparación del número de casos favorables

Es la estrategia más simple, ya que de los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos. Esta estrategia la hemos considerado pertinente en el problema 1, y aplicada a cualquier otro genera respuestas incorrectas. Según Piaget e Inhelder (1951) corresponde al final del período pre-operacional. Estos autores encuentran que el procedimiento que siguen los alumnos es tratar de comparar, en primer lugar, los casos posibles (estrategia A1) y, a igualdad de casos posibles, centrar entonces su atención en la comparación de casos favorables, eligiendo la caja que tenga más.

A la vista de nuestros resultados, no estamos totalmente de acuerdo con esta afirmación, ya que hay un gran porcentaje de alumnos que usan esta estrategia en el problema 1 sin comparar previamente los casos posibles. Pensamos que esta diferencia puede ser debida al tipo de tarea presentada, ya que en los experimentos de Piaget e Inhelder se utilizaban grupos de fichas iguales, donde algunas de ellas tenían una cruz en el reverso, lo que, a nuestro entender, puede favorecer la consideración, por parte del alumno del conjunto de fichas, todas iguales, como un todo, más que compuesto de dos partes, tal y como se apreciaría en nuestras tareas, en que las bolas son de dos colores distintos, lo que perceptivamente anima a la consideración del conjunto partido.

Esta estrategia la hemos considerado pertinente como argumento para justificar la respuesta correcta al problema 1, aunque su aplicación a cualquier otro problema no sería adecuada y generaría respuestas incorrectas. Un ejemplo claro de esta estrategia nos los proporciona la respuesta correcta del estudiante nº 7, al problema 1, al responder “(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra”, argumentando:

¿Por qué? porque hay mayor nuero de fichas negas. , mayor posabilidad.

¿Por qué? Porque hay mayor número de fichas negras, mayor probabilidad

Otro ejemplo lo tenemos en la respuesta correcta “(B) Caja G” del estudiante nº 28 al problema 6, con el argumento:

¿Por qué? porque tiene mas negras que blancas.

¿Por qué? Porque tiene más negras que blancas

Nos queda por expresar nuestro reparo a considerar que, como indican Piaget e Inhelder, en esta estrategia solo se esté considerando la comparación de una sola variable. Creemos que esto sería así en los casos en que da lugar a respuestas incorrectas, donde claramente se ignora el número de bolas desfavorables o posibles, pero en el caso que justifica una respuesta correcta, como en este primer ejemplo, pensamos que el alumno si está realizando una comparación de dos variables aunque no lo explicite, ya que estaría basando su elección en el número de bolas favorables, después de darse cuenta que el número de número de bolas desfavorables era el mismo, en ambas cajas, sólo que esto último no considera necesario explicitarlo. En estos casos se espera que el alumno cambie de estrategia al tener que decidir sobre los siguientes problemas.

Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 3, 5, 6 y 7 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en el problema 1 donde consideramos pertinente esta estrategia está por encima, aunque también está por encima la utilización de esta estrategia que genera respuestas incorrectas en el problema 4. Los porcentajes de utilización en el problema 2 son prácticamente iguales.

A3) Comparación del número de casos desfavorables:

Consiste en elegir la caja con menor número de bolas del color desfavorables. Para Piaget e Inhelder (1951, cap. IV), cuando, una vez intentada la anterior, existe igualdad de casos favorables, los sujetos centran su atención sobre el número de casos desfavorables. El único problema en el que la justificación mediante esta estrategia daría lugar a una respuesta correcta es el 2, donde de nuevo ponemos en duda el hecho de que el alumno esté considerando una sola variable, sino que puede estar utilizando una correspondencia del tipo "a igualdad de casos favorables, elijo la que presente menor número de desfavorables", sin llegar a decir toda la frase en base a economizar los esfuerzos en la comparación, ya que la tarea no exige una estrategia más elaborada.

En cualquier caso, nosotros hemos considerado adecuada esta estrategia para justificar la respuesta correcta al problema 2, y en cualquier otro caso la hemos considerado no adecuada. Un ejemplo de ella nos lo proporciona el estudiante nº 13 cuando responde de forma correcta "(A) Caja C" al problema 2 con el argumento:

¿Por qué? Porque hay menos bolas blancas y el número de negras es igual en las dos cajas

¿Por qué? Porque hay menos bolas blancas y el número de negras es igual en las dos cajas

En el problema 6, aunque el estudiante nº 94 responde de forma correcta "(B) Caja G", no consideramos adecuada la estrategia:

¿Por qué? por que hay ~~muy~~ menos blancas ;aunque la H tiene más negras tambien tiene muchas más blanca y el tanto por ciento es menor

¿Por qué? Porque hay menos blancas; aunque la H tiene más negras también tiene muchas más blanca y el tanto por ciento es menor

Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 2, 3, 4, 5 y 6 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en el problema 7 está por encima, siendo prácticamente igual en el problema 1. Es curioso que esta estrategia que se puede considerar pertinente para el problema 2 ya que genera una respuesta correcta la usen más los niños que los futuros profesores.

3.4.3.2. ESTRATEGIAS DE DOS VARIABLES

Los alumnos buscan la solución del problema comparando todos los datos que aparecen en el enunciado. En ocasiones esta comparación la realizan mediante una operación aditiva, restando entre sí los casos favorables y desfavorables de cada caja y comparando estas diferencias o mediante una operación multiplicativa, estableciendo la comparación de probabilidades en base a la regla de Laplace. También se puede establecer la comparación mediante alguna regla de poner en correspondencia los casos favorables y desfavorables de las cajas, con el fin de establecer si existe o no algún tipo de proporcionalidad entre ellos.

Son estrategias más elaboradas que las anteriores, ya que consideran un mayor número de datos por parte del alumno, así como en algunas de ellas, la utilización del razonamiento proporcional y la herramienta del cálculo y la comparación de fracciones y por tanto corresponden a un nivel evolutivo superior.

A4) Estrategias aditivas

Los alumnos que utilizan esta estrategia tienen en cuenta los casos favorables, los desfavorables y los posibles, simultáneamente, pero gestionan los datos por medio de alguna operación aditiva para poder establecer la comparación.

Un ejemplo de este tipo de razonamiento lo tenemos en el estudiante nº 52, que en el problema 7, responde "(D) No lo sé", argumentando:

¿Por qué? La diferencia entre las 2 es de 2 bolas entre negras y blancas por lo qe ya no sé si sería la K por tenes menos blancas o las 2 igual por un espacio de 2 bolas entre ellas.

¿Por qué? La diferencia entre las 2 es de 2 bolas entre negras y blancas por lo que ya no sé si sería la K por tener menos blancas o las 2 igual por un espacio de 2 bolas entre ellas.

En el problema 6 el alumno 67 responde de forma incorrecta "(C) Caja H":

¿Por qué? Porque hay 8 fichas más negras que en la caja 6 [~~negras~~] y sólo 6 más blancas.

¿Por qué? Porque hay 8 fichas más negras que en la caja G y sólo 6 más blancas.

Para Piaget e Inhelder, estos argumentos son propios del período de operaciones concretas, en las tareas de proporciones hay un fracaso sistemático, y al final descubren un intento por parte de los alumnos de dar solución a estos problemas. En general, estas estrategias no se consideran pertinentes.

Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 1, 3, 4, 5 y 7 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en los problemas 2 y 6 está por encima. Destaca el alto porcentaje de futuros profesores que utilizan estrategias aditivas para los problemas 6 y 7 que ni generan respuestas correctas ni se consideran pertinentes. Incluso en el problema 6 este porcentaje está por encima de los niños de 10-14 años.

A5) Estrategia de correspondencia

Según Pérez Echevarría (1990), esta estrategia consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra. Piaget e Inhelder (1951) afirman que, a falta de un cálculo de fracciones, el sujeto determina las dobles relaciones por un sistema de correspondencias cuando las proporciones o desproporciones no aparecen como inmediatas. Aunque en los casos más sencillos de cajas proporcionales aparece durante el periodo de operaciones concretas, se desarrolla en el período de operaciones formales, para ir transformándose en una estrategia multiplicativa, en que se contemplan las relaciones entre los casos favorables y los posibles. Nosotros hemos considerado este razonamiento pertinente para resolver correctamente los problemas 3, 4, y 6. También es utilizado en los problemas 1, 2 y 3, pero al ser éstos de una dificultad inferior y poder resolverlos por las estrategias ya citadas, resulta difícil saber si el alumno está razonando estableciendo una correspondencia o por estrategia aditiva, como ocurre con la respuesta del alumno nº 43, que en el problema 3 responde de forma correcta “(C) La misma posibilidad” con el argumento:

¿Por qué? Porque en los dos hay el mismo numero de bolos blancos que de bolos negros

¿Por qué? Porque en la dos hay el mismo número de bolas blancas que de bolas negras.

es decir, la caja E dos negras y dos blancas y la caja F cuatro negras y cuatro blancas.

Otro ejemplo de esta estrategia lo encontramos en la respuesta correcta del alumno 73 al problema 6, "(B) La caja G", con el argumento:

¿Por qué? porque sólo hay 1/3 de blancas mientras en la otra un 50

¿Por qué? Porque sólo hay 1/3 de blancas mientras en la otra un 50

que ha obtenido a partir de los datos de la caja G 12 negras y 4 blancas y la caja H con 20 negras y 10 blancas.

El único problema que no puede resolverse aplicando esta estrategia es el problema 7, que corresponde al nivel 4, en que no existe proporcionalidad alguna entre los cuatro datos del problema, como vemos en la respuesta incorrecta "(A) La misma posibilidad" del alumno 71 a dicho problema, argumentando:

¿Por qué? porque la proporción es la misma y por tanto la probabilidad también lo es.

¿Por qué? Porque la proporción es la misma y por tanto la probabilidad también lo es.

Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 1, 2, los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en el resto de los problemas está por encima.

A6) Estrategias multiplicativas:

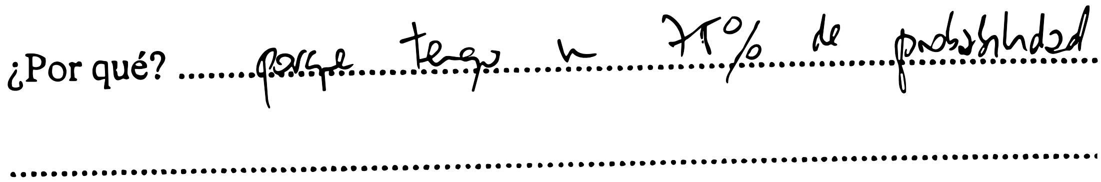
Esta estrategia, desarrollada, según Piaget e Inhelder (1951) en el período de las operaciones formales, es sin duda, la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Para ello, se puede poner en relación el número de casos favorables con el número de casos posibles (regla de Laplace), es decir, la parte con el todo, o bien establecer las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después comparar las fracciones así obtenidas. Esta estrategia resuelve con éxito todos los problemas de comparación de probabilidades, que no son resueltos por ninguna de las estrategias anteriores.

Un ejemplo de esta estrategia lo encontramos en la respuesta correcta "(C) La caja K" que el estudiante 30 da al problema 7, con el siguiente argumento:


¿Por qué? P(N/J) = 7/12 Caja K P(N) = 5/8

¿Por qué? P(N/J) = 7/12 Caja K P(N) = 5/8

Otro ejemplo de este tipo de estrategia es la respuesta correcta "(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra" que el estudiante 95 da en el problema 1, argumentando:


¿Por qué? porque tengo un 75% de probabilidad

¿Por qué? Porque tengo un 75% de probabilidad

Para Maury (1984), la aplicación de estas estrategias se suele dar en contextos de ruletas que se prestan mucho mejor a la consideración de relaciones parte-todo, y a la aplicación de la regla de Laplace, mientras que los contextos de urnas con bolas favorecen las relaciones parte-parte, y por tanto las estrategias aditivas y de correspondencia.

Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por encima en todos los problemas, lo que es normal dada la edad de los niños.

3.4.3.3. OTROS TIPOS

A7) Hacer referencia a la suerte:

Los sujetos que utilizan esta estrategia tienden a suponer que todos los sucesos aleatorios son equiprobables por naturaleza, y el hecho de que los sucesos aleatorios sean impredecibles hace que se piense que es imposible estimar una probabilidad para los mismos. Aunque no han aparecido muchos casos, sí hay algunos como el ejemplo de la respuesta correcta "(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra" que el estudiante 9 da al problema 1, aunque en el argumento no aparece muy clara su idea:

¿Por qué? Es verdad que la caja A tiene mas posibilidades de sacar una ficha negra pero eso nunca se sabe dependerá de la suerte.

¿Por qué? Es verdad que la caja A tiene más posibilidades de sacar una ficha negra pero eso nunca se sabe dependerá de la suerte.

Otros casos similares han aparecido en los problemas 4 y 5 que incluían elementos distractores y que han contribuido a la aparición de estos argumentos.

A8) Hacen referencia a trampa

Son escasas estas respuestas, pero algún caso se ha dado, como el siguiente ejemplo donde en el problema 4 (con elementos distractores), el estudiante 15 responde:

No tiene nada que ver la probabilidad con la edad o inteligencia, a no ser, que Rosa piense que Pilar pueda hacer algún tipo de trampa...

¿Por qué? No tiene nada que ver la probabilidad con la edad o inteligencia, a no ser, que Rosa piense que Pilar pueda hacer algún tipo de trampa.

A9) Otras estrategias:

Incluimos algunas estrategias que se han presentado de una manera aislada, o por un número muy reducido de alumnos, o explicaciones que no concuerdan con la respuesta elegida, por lo que no sabemos lo que el alumno realmente ha querido decir. Los dos tipos más importantes que se han incluido en esta clase: por un lado, es la estrategia de tomar la decisión de equiprobabilidad alegando que "en las dos cajas hay bolas negras". Por otro lado, la estrategia de realizar la elección en función de la disposición que presentan las bolas en los dibujos o de cómo se pueden meter las manos, como la respuesta del estudiante 101 al problema 1 con el siguiente argumento:

¿Por qué? porque yo metería la mano centrada y llegaría a cogerla igualmente, o no, así que en ambos casos se da la misma posibilidad.

¿Por qué? Porque yo metería la mano centrada y llegaría a cogerla igualmente, o no, así que en ambos casos se da la misma posibilidad

También hemos incluido los estudiantes que responden simplemente con "la misma probabilidad", sistemáticamente y sin ninguna justificación a todos los problemas. Destaca el alto porcentaje de futuros profesores que aparece en el apartado

“No responde o incompleta” en todos los problemas, siempre por encima de los niños de 10-14 años. Parece preocupante que incluso en los problemas de menor dificultad se den estos porcentajes, ya que puede indicar un desconocimiento de estos temas de probabilidad.

En la tabla 3.4.2 donde se han sombreado las estrategias correctas para cada problema, observamos que para algunos problemas (7, 6, 2) hay menor porcentaje de estrategias correctas que de respuestas correctas, lo que implica que la dificultad de los problemas es todavía mayor que la que aparece en la tabla anterior, puesto que algunos alumnos obtuvieron en estos problemas respuestas correctas con un razonamiento inadecuado. Por el contrario, en el problema 5 algunos estudiantes que usan estrategias adecuadas, no llegan a la solución, influidos por los elementos subjetivos del problema. En el resto, los porcentajes de estrategias y respuestas correctas se corresponden.

Tabla 3.4.2. Porcentaje de estrategias según problema

	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6	Problema 7
Casos posibles	**4** *4.9*	**2** *1.4*	**2** *5.6*	**2** *1.4*	**2** *0.7*	**0** *7.0*	**2** *7.7*
Casos favorables	**56.8** *51.7*	**28.4** *28.7*	**9.8** *16.8*	**28.4** *25.7*	**11.8** *42.7*	**20.6** *27.3*	**10.8** *13.3*
Casos desfavorables	**2.9** *2.8*	**31.4** *35.0*	**0** *1.4*	**0** *0.7*	**2** *4.9*	**8.8** *11.2*	**4.9** *2.1*
Aditivas	**5.9** *7.7*	**13.7** *4.9*	**6.9** *15.4*	**1** *2.9*	**1** *4.2*	**24.5** *21.0*	**36.3** *39.9*
Correspondencia	**2** *13.3*	**2.9** *11.2*	**50** *36.4*	**15.7** *15.0*	**43.1** *26.6*	**15.7** *6.3*	**18.6** *1.4*
Multiplicativa	**17.6** *1.4*	**12.7** *0.7*	**20.6** *0.7*	**13.7** *0.0*	**14.7** *0.0*	**15.7** *0.7*	**13.7** *1.4*
Suerte	**1** *11.2*	**0** *4.2*	**0** *4.2*	**2** *27.1*	**2** *4.9*	**0** *8.4*	**0** *7.7*
Otras	**1** *5.6*	**0** *11.2*	**0** *14.7*	**0** *5.0*	**0** *4.2*	**1** *12.6*	**1** *18.9*
No responde o incompleta	**7.8** *1.4*	**7.8** *2.8*	**9.8** *4.9*	**30** *22.1*	**12.8** *12.1*	**12.7** *5.6*	**10.8** *7.7*

Nota: con letra en negrita aparecen los porcentajes de los futuros profesores y debajo con letra cursiva aparecen los porcentajes de los niños.

En resumen, los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria con respecto a la investigación de Cañizares (1997), podemos expresar las siguientes conclusiones:

El promedio resultante es de 3.61 problemas correctos, lo que constituye un resultado algo superior al 2.97 obtenido como promedio de aciertos por los niños de la investigación de Cañizares, pero que no son muy buenos dada la sencillez de los problemas y el nivel de conocimiento que suponemos deberían tener los futuros profesores. Entre los futuros profesores de educación primaria que han obtenido entre 5 y 6 aciertos predominan los que han cursado la modalidad de bachillerato de Ciencias; entre los que han obtenido 4 aciertos están repartidos entre las modalidades de Ciencias, Ciencias Sociales y Letras. Los alumnos que han cursado la modalidad de Letras Puras o Artística son los que han obtenido los peores resultados.

Sobre los porcentajes de respuestas correctas obtenidas en cada uno de los problemas, consideramos que estos resultados son preocupantes, teniendo en cuenta, como hemos comentado en el apartado anterior, la escasa dificultad de los problemas (comparación de probabilidades simples) y el alto número de errores, tanto en los que involucran comparación de fracciones como en los que incluyen elementos subjetivos.

En relación con las estrategias utilizadas, los futuros profesores de educación primaria hacen mayor uso de estrategias correctas y, en general multiplicativas y correspondencias, lo cual corresponde a mayor razonamiento proporcional, aunque todavía hay un grupo importante que usa estrategias aditivas.

3.5. CONCLUSIONES

En este apartado presentamos de forma sucinta las conclusiones más relevantes obtenidas en el estudio exploratorio sobre los conocimientos de probabilidad de los 102 futuros profesores de educación primaria, participantes en dicha investigación.

En relación al análisis efectuado del promedio de problemas resueltos correctamente, el promedio resultante es de 3.61 problemas correctos, lo que constituye un resultado algo superior al 2.97 obtenido como promedio de aciertos por los niños de la investigación de Cañizares, pero que no son muy buenos dada la sencillez de los problemas y el nivel de conocimiento que suponemos deberían tener los futuros profesores.

Entre los futuros profesores que han obtenido entre 5 y 6 aciertos, predominan los que han cursado la modalidad de bachillerato de Ciencias; entre los que han obtenido 4 aciertos están repartidos entre las modalidades de Ciencias, Ciencias Sociales y Letras. Los estudiantes que han cursado la modalidad de Letras Puras o Artística son los que han obtenido los peores resultados.

En el análisis de las respuestas de los futuros profesores se observa una mejora respecto a la media global de resultados de los niños de la investigación de Cañizares (1997) en todos los problemas excepto en el primero. Por otro lado, el problema 7 resultó ser el más difícil (75% errores en los futuros profesores), en que la falta de proporcionalidad entre las cuatro cifras presentadas obliga al sujeto a la aplicación de la regla de Laplace. Sin embargo, en este problema el distractor más fuerte no es la caja con el mayor número de bolas del color favorable, sino la opción de equiprobabilidad. Pensamos que esto se debe a que, en este problema, la diferencia entre los casos favorables y desfavorables en ambas cajas es la misma.

Le sigue el problema 4 tomado de Fischbein y Gazit (1984), donde se produce la inversión del orden de dificultad, respecto al previsto en la clasificación de Noelting, posiblemente debido a los distractores de tipo subjetivo (70% de errores en futuros profesores), lo que nos indica que un alto porcentaje de estudiantes no llegó a establecer la proporcionalidad de las cajas o no la consideró relevante. Otro problema difícil es el 5 con 57% de errores, también con elementos subjetivos, donde además el número de bolas del color favorable era inferior al de desfavorables, al contrario que en el problema 4. En los dos se ha manifestado como respuesta errónea más frecuente la elección como más probable de la caja con mayor número de bolas del color favorable.

Otro problema especialmente difícil es el problema 6 (con un 40% de errores). En este caso sí existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables de cada urna pero la proporción no es la misma, lo que hace que las urnas no sean equivalentes. Aunque los futuros profesores parecen ser conscientes de esta falta de equivalencia entre las dos urnas, sin embargo se decantan por la que tiene una mayor cantidad absoluta de casos favorables o la diferencia entre los casos favorables y desfavorables es mayor.

Los tres primeros problemas muestran un resultado algo mejor con solo un 30% aproximado de errores. No obstante, debemos destacar el fuerte impacto que tiene la opción de equiprobabilidad en los dos primeros problemas, aún sabiendo que hay igualdad de casos favorables o desfavorables, mientras que en problema 3 el distractor más fuerte es el de mayor número absoluto de casos favorables.

Hay que destacar, también, la aparición de una categoría de respuesta denominada ambigua o incompleta, bastante frecuente en el problema 4, y que se refiere exclusivamente al factor secundario introducido en estos dos problemas, de modo que el estudiante hace algún comentario sobre dicho factor, sin llegar a tomar una decisión sobre cual de las dos cajas ofrece mayor probabilidad. Además, la redacción de estos dos problemas de respuesta abierta favorece la ambigüedad en las respuestas.

Si comparamos el orden de dificultad entre los alumnos de la investigación de Cañizares (1997) y los futuros profesores de educación primaria observamos que los dos problemas más difíciles en ambos casos son el 7 y el 4. En el primero es necesario aplicar la regla de Laplace y en el segundo creemos que se debe a los elementos distractores. Estos resultados nos muestran que estas dificultades pueden persistir a lo largo del tiempo desde la Educación Secundaria hasta la edad actual de los futuros profesores.

En el caso de los problemas 5 y 6 se produce un cambio en el orden de dificultad entre ambos colectivos. Para los futuros profesores el problema 5, sobre la equiprobabilidad de los juegos es más difícil que el 6 donde se ha de elegir entre dos urnas la más favorable. Puede ser que el concepto de juego justo haya sido menos trabajado tanto en su etapa de estudiante de secundaria como en el período de formación como maestro mientras que los alumnos de la investigación de Cañizares hayan tratado más estos temas, debido a que actualmente se le presta mayor atención. El orden de dificultad es el mismo entre ambos colectivos en los tres primeros problemas.

Estos resultados son preocupantes, dado la sencillez de los problemas (comparación de probabilidades simples) y el alto número de errores, tanto en los que involucran comparación de fracciones como en los que incluyen elementos subjetivos.

Un segundo punto de estudio fue el análisis de las estrategias empleadas por los futuros profesores, pues los estudiantes pueden haber elegido una respuesta correcta siguiendo un razonamiento incorrecto. A continuación analizamos estas estrategias, usando la misma clasificación que Cañizares (1997) empleó con los alumnos de 10 a 14 años, que son las siguientes:

Comparación de una sola variable

Hay tres tipos de estrategias en las que el alumno sólo tiene en cuenta una variable del problema:

A1) Comparación del número de casos posibles. Hemos encontrado esta estrategia en algunos estudiantes, pero hemos de indicar que no resultó persistente, ya que en general la utilizaban de forma aislada. Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 1, 3, 6 y 7 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en los problemas 2, 4 y 5 están algo por encima.

A2) Comparación del número de casos favorables. Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 3, 5, 6 y 7 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en el problema 1 donde consideramos pertinente esta estrategia está por encima, aunque también está por encima la utilización de esta estrategia que genera respuestas incorrectas en el problema 4. Los porcentajes de utilización en el problema 2 son prácticamente iguales.

A3) Comparación del número de casos desfavorables: Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 2, 3, 4, 5 y 6 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en el problema 7 está por encima, siendo prácticamente igual en el problema 1. Es curioso que esta estrategia que se puede considerar pertinente para el problema 2 ya que genera una respuesta correcta la usen más los niños que los futuros profesores.

Estrategias de dos variables

Hay tres tipos de estrategias en las que el alumno tiene en cuenta dos variables del problema:

A4) Estrategias aditivas. Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 1, 3, 4, 5 y 7 los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en los problemas 2 y 6 está por encima. Destaca el alto porcentaje de futuros profesores que utilizan estrategias aditivas para los problemas 6 y 7 que ni generan respuestas correctas ni se consideran pertinentes. Incluso en el problema 6 este porcentaje está por encima de los niños de 10-14 años.

A5) Estrategia de correspondencia. Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que en los problemas 1, 2, los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por debajo de los porcentajes de los niños, mientras que en el resto de los problemas está por encima.

A6) Estrategias multiplicativas: Si comparamos estos resultados con los alumnos de 10-14 años de la investigación de Cañizares (1997), encontramos que los porcentajes de utilización de esta estrategia por los futuros profesores están por encima en todos los problemas, lo que es normal dada la edad de los niños.

Otros tipos

A7) Hacer referencia a la suerte: Aunque no han aparecido muchos casos, sí hay algunos. Otros casos similares han aparecido en los problemas 4 y 5 que incluían elementos distractores y que han contribuido a la aparición de estos argumentos.

También han aparecido casos aislados que hacían referencia a hacer *trampa (A8)* y *otras estrategias (A9).*

En resumen, estos resultados indican que el conocimiento matemático de los futuros profesores de educación primaria de la muestra es insuficiente, debido a que hay una mayoría que presenta dificultades para resolver problemas de probabilidad. Con respecto a la investigación de Cañizares (1997) los futuros profesores de educación primaria hacen mayor uso de estrategias correctas y, en general multiplicativas y correspondencias, lo cual corresponde a mayor razonamiento proporcional, aunque todavía hay un grupo importante que usa estrategias aditivas, propias según Piaget e Inhelder (1951) del período de las operaciones concretas. Por último, hay un grupo de futuros profesores que basan sus respuestas en criterios personales sin fundamento alguno, o como único argumento hacen referencia a la suerte.

Observamos que para algunos problemas (7, 6, 2) hay menor porcentaje de estrategias correctas que de respuestas correctas, lo que implica que la dificultad de los problemas es todavía mayor que la que aparece en la tabla anterior, puesto que algunos estudiantes obtuvieron en estos problemas respuestas correctas con un razonamiento inadecuado. Por el contrario, en el problema 5 algunos estudiantes que usan estrategias adecuadas, no llegan a la solución, influidos por los elementos subjetivos del problema.

En el resto, los porcentajes de estrategias y respuestas correctas se corresponden.

Destaca el alto porcentaje de futuros profesores que aparece en el apartado “No responde o incompleta” en todos los problemas, siempre por encima de los niños de 10-14 años. Parece preocupante que incluso en los problemas de menor dificultad se den estos porcentajes, ya que puede indicar un desconocimiento de estos temas de probabilidad. Como indica Stohl (2005) el desarrollo del razonamiento probabilístico en los alumnos depende en gran medida de la comprensión de la probabilidad por parte de los docentes, además de otros asuntos, como las posibles interpretaciones incorrectas de los alumnos, por lo que consideramos urgente mejorar la formación probabilística de los futuros profesores de educación primaria.

Estos resultados sugieren que es urgente mejorar la formación probabilística de los futuros profesores de educación primaria, tanto en el conocimiento específico de probabilidad como en el conocimiento pedagógico del mismo, ya que como hemos observado en nuestra investigación los resultados obtenidos y las estrategias utilizadas por los futuros profesores en varios problemas son muy similares a las empleadas por los niños de la investigación de Cañizares (1997). Es por tanto preocupante que los futuros profesores cometan los mismos errores que los alumnos a los que han de formar.

Es necesaria una gran labor de diseño curricular para planificar un buen programa de formación matemática, en particular de formación estocástica, para profesores de educación primaria. Entre los objetivos de este programa deberían contemplarse, al menos, los siguientes:

a) Comprender los conceptos relacionados con la probabilidad.

b) Comprender las ideas sobre probabilidad de los alumnos

c) Reflexionar de forma crítica y provechosa para su práctica docente sobre las investigaciones relacionadas con el desarrollo probabilístico de los alumnos.

Consideramos que las sucesivas reformas de los planes de estudio de magisterio no han abordado debidamente dicha formación matemática, por lo que es urgente insistir en la necesidad de reforzar su formación sobre estos temas. Esperemos que con la última reforma de la Ley Orgánica de Universidades y con la adaptación que estamos realizando de nuestros planes de estudio al Espacio Europeo de Educación, las Facultades de Educación seamos capaces de ofrecer una enseñanza de calidad a los docentes, tanto en formación como en activo.

Es necesaria la exigencia de que para cursar estudios de profesor de Educación Primaria se tenga una adecuada educación matemática en las etapas educativas anteriores a la universidad. No puede ocurrir que pretendan ser profesores de matemáticas de una etapa importantísima, como es la Educación Primaria, con una formación matemática que incluye su experiencia, en algunos casos, sólo de Educación Secundaria Obligatoria y la formación en sus estudios de magisterio de 13.5 créditos en la especialidad de Educación Primaria o de 4.5 créditos en las especialidades de Educación Física, Educación Musical y Lenguas Extranjeras.

Los resultados del estudio exploratorio mostraron el interés de la investigación sobre la probabilidad y la formación de los profesores de educación primaria. Por ello, se decidió realizar un segundo estudio sobre evaluación del conocimiento de los futuros profesores sobre probabilidad, donde se utilizó un nuevo cuestionario que incluyera un mayor número de problemas, que contemplaran los diferentes significados de la probabilidad y nuevos conceptos. También se diseñó un segundo cuestionario que incluyera algunas preguntas sobre el conocimiento didáctico de los futuros profesores de educación primaria sobre la probabilidad.

Por último, se ha contado con una nueva muestra de estudiantes de la Diplomatura de Maestro de la especialidad de Educación Primaria, de un tamaño mayor que la utilizada en este trabajo. Presentamos a continuación los resultados del nuevo estudio que se presenta en los siguientes capítulos 4 y 5.

CAPÍTULO 4

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO DE PROBABILIDAD DE LOS FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

4.1. INTRODUCCIÓN

El estudio exploratorio que hemos presentado en el capítulo anterior nos sirvió de motivación para seguir trabajando en la misma línea de investigación, puesto que los resultados obtenidos mostraron que existían dificultades con los problemas de comparación de probabilidades en los futuros profesores.

Para analizar si estas dificultades también persisten en otros conceptos probabilísticos, en este capítulo presentamos los resultados de un estudio más amplio sobre los conocimientos matemáticos que manifiestan los futuros profesores de educación primaria sobre la probabilidad. Para ello hemos elaborado un cuestionario más completo, incluyendo un mayor número de problemas que contemplen los diferentes elementos del significado de la probabilidad y nuevos conceptos, que permita evaluar los conocimientos probabilísticos de los futuros profesores.

En consecuencia, nos proponemos profundizar en los resultados previos obtenidos, realizando un análisis más exhaustivo de las respuestas de los futuros profesores a los problemas propuestos.

Los resultados presentados en este capítulo se estructuran en tres grandes secciones, que a su vez tienen varios apartados. En la primera, se realiza un análisis detallado de cada uno de los problemas del cuestionario y un estudio de la validez de contenido así como un estudio detallado de la muestra de futuros profesores. En la segunda, se realiza un análisis minucioso de los resultados y de los argumentos de cada uno de los problemas del cuestionario comparándolos con los resultados de los niños de 10 a 14 años que participaron en la investigación de Cañizares (1997) así como con los obtenidos en las investigaciones citadas en los antecedentes. En la tercera, se realiza un análisis de los resultados globales a los problemas del cuestionario, como la puntuación total, análisis del índice de dificultad y análisis de la fiabilidad. Parte de estos resultados han sido publicados en Ortiz, Mohamed y Serrano (2010); Mohamed y Ortiz (2011); Mohamed, Ortiz y Serrano (2011); Mohamed y Ortiz (2012).

4.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO

El objetivo principal de esta investigación es evaluar los conocimientos matemáticos de los futuros profesores de educación primaria en relación con los objetos matemáticos que aparecen implícitos en la resolución de los problemas de probabilidad propuestos. Más concretamente, el objetivo de este estudio es:

Objetivo 1. Evaluar el conocimiento común del contenido de la probabilidad que tienen los futuros profesores de educación primaria.

Para lograr este objetivo pasamos un cuestionario (ver Anexo II) con 15 problemas para evaluar los conocimientos de probabilidad de los futuros profesores de educación primaria. Los resultados se comparan con los obtenidos por Cañizares (1997) en una investigación similar con una muestra de niños de 10 a 14 años, y con los obtenidos en las investigaciones citadas en los antecedentes.

Hipótesis 1. Esperamos que los resultados revelen un conocimiento común insuficiente de los futuros profesores de la muestra sobre probabilidad, debido a que presentan dificultades con los conceptos probabilísticos, incurren en sesgos cognitivos y manifiestan una percepción incorrecta de la independencia de sucesos.

Esta hipótesis se justifica por los resultados obtenidos en las investigaciones previas de Azcárate (1995), Begg y Edwards (1999), Mohamed (2006) y Contreras (2011). No obstante esperamos que sean mejores que los obtenidos por los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997), debido a que poseen un mayor nivel de razonamiento proporcional, y que los obtenidos en las investigaciones previas consultadas, ya que la enseñanza de la estadística se ha reforzado en los últimos años.

A continuación se describe la metodología utilizada en este estudio y los resultados obtenidos. Parte de ellos han sido publicados en Ortiz, Mohamed y Serrano (2010); Ortiz, Serrano y Mohamed (2009); Mohamed y Ortiz (2011); Mohamed, Ortiz y Serrano (2011); Mohamed y Ortiz (2012).

4.3. METODOLOGÍA

En este estudio se han utilizado algunos elementos del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) y el modelo de niveles y facetas del conocimiento didáctico de los profesores, propuesto por Godino y colaboradores (Godino 2009; Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi, 2011), que engloba teorías recientes sobre modelos del conocimiento matemático del profesor (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008).

Para evaluar el conocimiento común del contenido de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria, se han analizado las respuestas obtenidas a un cuestionario con 15 problemas de probabilidad, que cubren los diferentes significados de la probabilidad. Este conocimiento sería inobservable, pero según el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), las prácticas explicitadas por los futuros profesores durante la resolución de los problemas propuestos serían los indicadores empíricos en la evaluación de dicho conocimiento.

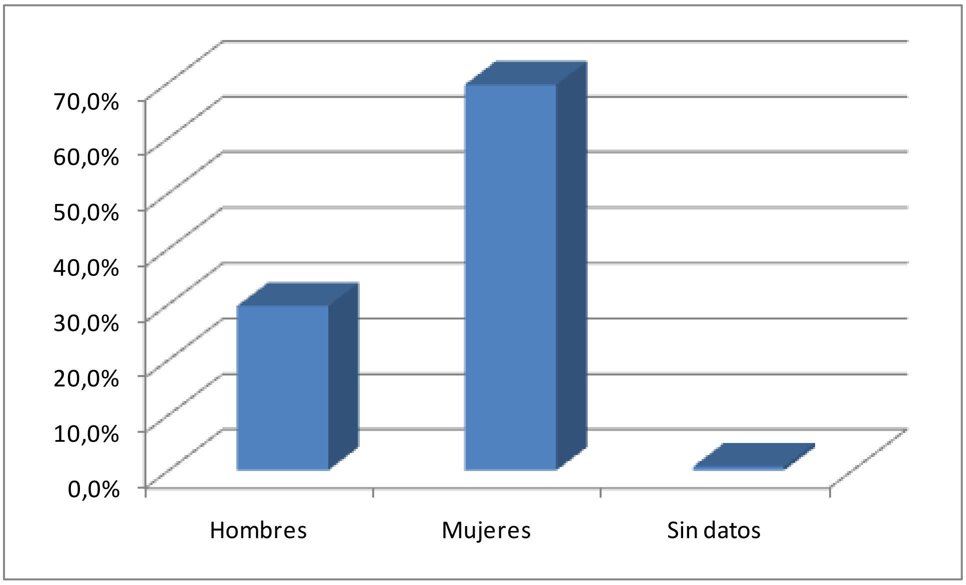
El análisis de las respuestas de los futuros profesores nos aporta información sobre sus conocimientos matemáticos de la probabilidad, las principales dificultades que se presentan, los sesgos del razonamiento probabilístico que manifiestan y errores que cometen. También hemos obtenido diferentes categorías de argumentos utilizados para justificar sus respuestas a cada uno de los problemas. Como método estadístico se han utilizado los estadísticos descriptivos, calculando las frecuencias y porcentajes de respuestas correctas e incorrectas y de cada categoría de argumentos.

4.3.1. PARTICIPANTES

La muestra participante estuvo integrada por 283 futuros profesores de la especialidad de Educación Primaria, matriculados en 1º y 2º curso de los estudios de Diplomatura de Magisterio, en la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla. En primer curso hay 125 alumnos, distribuidos en dos grupos; en segundo curso hay 150, repartidos en dos grupos, y 8 futuros profesores que no han cumplimentado este dato.

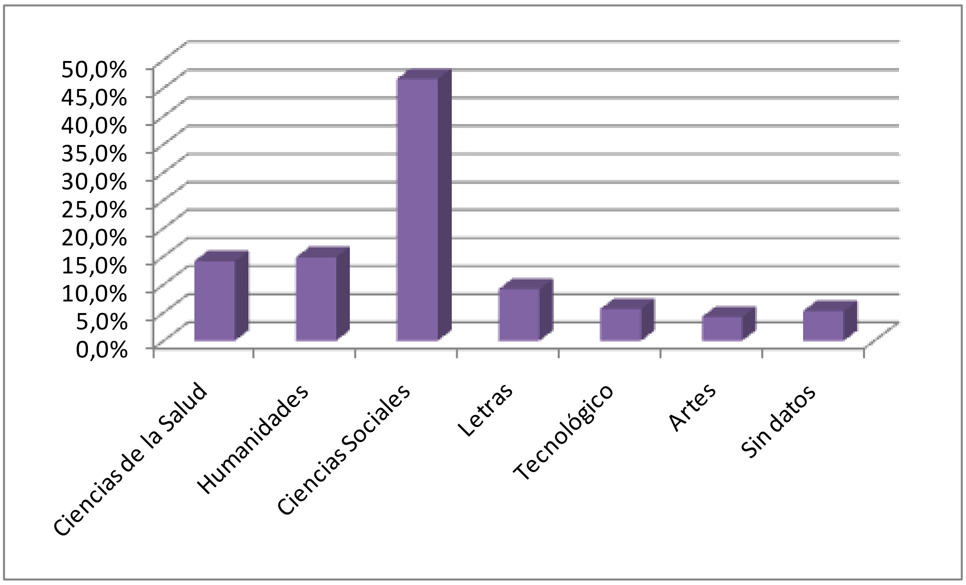
En cuanto a la distribución de estudiantes por género, se observa en la figura 4.3.1 que hay 84 hombres (29.7%), 197 mujeres (69.6%) y dos estudiantes de los que no tenemos este dato (0.7%).

Figura 4.3.1. Distribución por género.



La distribución por modalidad de bachillerato cursada, como se observa en la tabla 4.3.2 es la siguiente: Ciencias de la Salud 40 (14.1%), Humanidades 42 (14.8%), 132 de Ciencias Sociales 132 (46.6%), Letras 26 (9.2%), Tecnológico 16 (5.7%), Artes 12 (4.2%), y de los que no tenemos este dato 15 (5.3%).

Figura 4.3.2. Distribución por bachillerato cursado.



Estos estudiantes, en general, tienen escasa formación matemática, y en particular, probabilística. A los 283 futuros profesores se les aplicó un cuestionario con 15 problemas, tomados de de Green (1983) y de Fischbein y Gazit (1984), excepto uno que es de un libro de texto, en una sesión de hora y media, y como una actividad en clase de la asignatura de “Matemáticas y su Didáctica”, antes de iniciar el tema de estadística y de probabilidad. Unos problemas son de respuesta abierta y otros de opciones múltiples. Al comenzar la sesión se les explicó las instrucciones para contestar adecuadamente cada uno de los tipos de problemas, debiendo dar en ambos tipos de problemas además de una respuesta numérica una justificación lo más detallada posible. Le pedimos su colaboración para cumplimentar el cuestionario con interés ya que pretendíamos detectar las posibles dificultades con el fin de mejorar la enseñanza sobre el tema. En todos los grupos hemos tenido un buen nivel de colaboración y han aportado respuestas detalladas.

4.3.2. ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO

A continuación describimos de forma detallada los 15 problemas del cuestionario que se aplicó antes de la instrucción.

PROBLEMA 1

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. Se sacan las bolas sin mirar ¿Cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color? ¿Por qué?

Ha sido tomado del test de Fischbein y Gazit (1984), siendo la respuesta correcta 8 bolas. Se incluye en el cuestionario para profundizar en el conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre la noción de suceso seguro, y comprobar si se manifiesta sistemáticamente la tendencia de intercambiar el espacio muestral implícito en el experimento {r, v, b}, formado por tres sucesos no equiprobables, por otro espacio muestral formado por sucesos equiprobables {r, r, r, r, v, v, v, b, b}. También se observará si los futuros profesores muestran confusión entre los conceptos de suceso seguro y suceso posible. Asimismo, se evalúa si el futuro profesor pone en juego la capacidad combinatoria para establecer mentalmente todas las posibilidades en el experimento.

En el trabajo de Cañizares (1997) se obtuvo en este problema un alto porcentaje de niños que pensaban que es suficiente con sacar 3 bolas, o que sacando todas las bolas tendremos el problema resuelto. La autora indica que los alumnos que emplean esta última estrategia, que Fischbein y Gazit no describen en su artículo, lo hacen porque, al trabajar a un nivel muy concreto, representándose las posibilidades cuando se extraen cuatro bolas, y así sucesivamente, se encuentran con una sucesión de cálculos tediosos y difíciles de llevar a cabo mentalmente.

Así, estos alumnos no llegan a conseguir la generalización que les permita dar la respuesta referida a la mínima cantidad de bolas necesarias, simplificando en exceso la cuestión, y dando respuestas como “3 bolas” (“porque es posible que suceda sacando tan sólo 3 bolas”, lo que implica una confusión entre las ideas de “posible” y “seguro”) y “9 bolas” (“sacando todas las bolas me ahorro el trabajo de calcular, y consigo el mismo propósito”). Sería de interés detectar si estas respuestas se producen en los futuros profesores.

PROBLEMA 2

Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar con el primero porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a lo que piensa Olivia y Juana?

Se trata de un problema de comparación de probabilidades de sucesos elementales en experimentos compuestos, donde la respuesta correcta es que la probabilidad de que salga un número o el otro es la misma. El problema fue tomado del test de Fischbein y Gazit (1984), y con él se pretende explorar la utilización de sesgos y heurísticas erróneas en los sujetos relacionadas con la idea de independencia, cuya aplicación, como se ha indicado, ofrece dificultades a los alumnos (Truran y Truran, 1997).

El futuro profesor debe reconocer la equiprobabilidad de los sucesos, pero los factores de tipo subjetivo, presentes en el enunciado del problema, pueden inducir a considerar que no son equiprobables. Puede manifestarse de nuevo la heurística de la representatividad, donde se espera que una muestra sea semejante a la población, por la cual no se admite como aleatorio las secuencias de resultados ordenados. Este sesgo fue definido por Kahneman, Slovic y Tversky (1982), quienes encuentran que se presentan con mucha frecuencia, incluso en personas adultas y con alto nivel cultural.

PROBLEMA 3

Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar pues piensa: “la lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima”. ¿Cuál es tu opinión sobre el razonamiento de Pedro?

La respuesta correcta a este problema, tomado de Fischbein y Gazit (1984), es que Pedro no tiene razón y que la probabilidad de ganar en el próximo sorteo es independiente de los resultados obtenidos anteriormente. Con él se intenta ver la comprensión, por parte de los futuros profesores, de la idea de independencia y evaluar la diferenciación entre muestreo con y sin reemplazamiento así como evaluar la creencia en la posibilidad de control sobre los mecanismos aleatorios. Se espera encontrar un grupo de futuros profesores que manifiesten el sesgo de recencia negativa, descrito en numerosas investigaciones y que ha sido atribuido a la heurística de la representatividad por Khaneman, Slovic y Tversky (1982), que induciría a creer que, puesto que Pedro no ha ganado en los anteriores sorteos, sus posibilidades de ganar aumentan en la próxima jugada. Esto se debe a una concepción incorrecta de la independencia.

PROBLEMA 4

Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luís hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

Para resolver este problema, tomado de Fischbein y Gazit (1984), hay que comparar dos probabilidades. Para ello hay que basarse en la comparación de fracciones, siendo dichas fracciones iguales, pues la composición de las urnas es proporcional. Con este problema se pretende evaluar el conocimiento que sobre el juego equitativo tienen los futuros profesores y determinar la posible influencia de la mención explícita de la equitatividad en los resultados obtenidos. Según Cañizares (1997), dicha mención a la equitatividad del juego introduce elementos subjetivos, relacionados con las concepciones del alumno sobre la aleatoriedad y el juego equitativo.

Dicho distractor consiste en una idea muy extendida entre los niños, que consiste en pensar que, a pesar de tener igual proporción de casos favorables y posibles, el mayor número de casos favorables da más probabilidad a una de las urnas. Según los resultados de nuestra investigación previa (Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz, 1999), este tipo de elemento subjetivo hace que aumente el nivel de dificultad del problema con respecto al esperado en un problema de comparación de fracciones como los propuestos por Noelting (1980a). También puede ocurrir que se consideren los casos desfavorables y a más casos desfavorables da menos probabilidad a una de las urnas.

La respuesta correcta a este problema es que el juego es justo ya que ambas cajas tienen la misma proporción de bolas blancas y negras.

PROBLEMA 5

María y Esteban juegan a los dados. María gana 1 euro si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo?
RESPUESTA _________ €. ¿Por qué?

Con este problema, tomado de Green (1983), se pretende evaluar las intuiciones que manifiestan los futuros profesores sobre lo que sería un juego equitativo, en concreto la idea de que si uno de los jugadores lleva ventaja, las ganancias deberán ser inversamente proporcionales a la esperanza de ganar de cada jugador. En este caso, por tanto, la respuesta correcta es que Esteban debe ganar 5 euros. Se espera que los futuros profesores contesten correctamente, pero también habrá alguno que haga caso omiso del desequilibrio de probabilidades y responda que ambos jugadores deberán ganar lo mismo. Una opción intermedia, que apareció en la investigación de Cañizares (1997), podría ser dar la respuesta correcta mediante la correspondencia entre casos favorables y desfavorables *(«por cada vez que gane Esteban, María ganará unas cinco veces»)*.

PROBLEMA 6

Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___

(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___

(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___

(D) No lo sé ___

¿Por qué?

En este problema, tomado de Green (1983), se pide comparar las probabilidades de los sucesos elementales en un experimento aleatorio simple con dos resultados no equiprobables y la discriminación, por parte de los futuros profesores, entre sucesos equiprobables y no equiprobables, en un contexto de muestreo usando papeles con nombre de niño/niña (13 niños/16 niñas), realizando una extracción al azar.

La respuesta correcta es la opción (B) “Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño”, se debe a que hay más niñas que niños y mediante la aplicación de la regla de Laplace.

Para contestar correctamente no es preciso el razonamiento proporcional, basta con comparar cantidades absolutas y observar que es más probable que el nombre seleccionado por el profesor sea el de una niña. Los posibles errores o dificultades que pueden cometer los estudiantes son una generalización incorrecta de la regla de Laplace, respondiendo que hay la misma probabilidad de elegir niño que niña, mostrando el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre y Durand (1988). La respuesta errónea también podría indicar que el futuro profesor considera un espacio muestral diferente, cuyos elementos serían cada uno de los alumnos de la clase (29 sucesos elementales equiprobables), y que interpreta la pregunta cómo obtener la probabilidad que tiene cada uno de los niños y las niñas de la clase.

PROBLEMA 7

En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera resultando, 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad ___
(B) El azul tiene mayor probabilidad ___
(C) El verde tiene mayor probabilidad ___
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad ___
(E) No lo sé ___

¿Por qué?

Este es un problema de comparación de probabilidades en el caso de extracciones sin reemplazamiento, tomado de Green (1983). Al efectuar la extracción de dos bolas rojas y una azul, la composición de la urna ha variado, por lo que la respuesta correcta a la pregunta es que el color más probable de la bola en la siguiente extracción es el azul. Se quiere determinar si los futuros profesores diferencian los casos de extracción con reemplazamiento de los de extracción sin reemplazamiento y detectar el sesgo de equiprobabilidad, y su consistencia en diferentes contextos, así como identificar la estrategia de elección utilizada.

La respuesta correcta es la opción (B) “El azul tiene mayor probabilidad”, porque después de sacar las bolas quedan 2 rojas, 3 azules y 2 verdes. Por lo tanto quedan más bolas azules y también se puede obtener la respuesta correcta mediante la aplicación de la regla de Laplace.

La composición de la bolsa es conocida, con tres sucesos simples, cuyas probabilidades variarán después de cada extracción. Se pretende comprobar si el estudiante es consciente de esta variabilidad de las probabilidades, y tiene en cuenta todos los datos del problema al hacer su elección, o sólo contempla la composición de partida. De nuevo se puede presentar el sesgo de equiprobabilidad, esta vez en un contexto diferente (bolas de tres colores), por lo que resulta interesante comprobar si el estudiante que lo manifestó en el problema anterior persiste en este caso.

En este caso también es suficiente comparar magnitudes absolutas para dar una respuesta adecuada, siempre que se tenga en cuenta los cambios de composición, pero se considera de interés identificar con claridad la estrategia utilizada.

PROBLEMA 8

Dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas: Caja G: 12 negras y 4 blancas. Caja H: 20 negras y 10 blancas. ¿Qué caja da mayor posibilidad de sacar una ficha negra?
(A) La misma posibilidad ___
(B) Caja G ___
(C) Caja H ___
(D) No lo sé ___
¿Por qué?

En este problema, tomado de Green (1983), se pide comparar las probabilidades de dos sucesos no equiprobables por la composición de las urnas. La respuesta correcta es que la caja G da mayor probabilidad de sacar una ficha negra, que se puede obtener mediante la aplicación de la regla de Laplace o con la utilización del razonamiento proporcional.

Se trata de identificar estrategias de elección de urnas y buscar relaciones entre el nivel de dificultad de la tarea y la estrategia utilizada por el futuro profesor, así como establecer la consistencia o inconsistencia de la estrategia elegida por los futuros profesores, a lo largo de los diferentes tipos de tareas.

Los posibles errores/dificultades están relacionados con la falta de razonamiento proporcional. En unos casos respondiendo que la caja H tiene más posibilidades porque en ella hay más casos favorables o bien usando estrategias aditivas. Y en otros casos respondiendo las mismas posibilidades considerando los sucesos blanco y negro como elementales en vez de compuestos.

PROBLEMA 9

Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:
- Lanzan dos dados sucesivamente y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor. Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2 entonces Carmen gana 1 ficha. Si resultan 3, 4, o 5 es Daniel quien gana una ficha. ¿Te parece que este juego es equitativo? ¿Por qué?
¿Cuántas fichas deberían ganar cada jugador para que el juego sea equitativo sin cambiar el resto de las reglas?

Este problema, tomado de un libro de texto, evalúa las intuiciones que manifiestan los futuros profesores sobre lo que sería un juego equitativo. La respuesta correcta es que el juego no es equitativo, pues Carmen gana a la larga 24 veces de cada 36, es decir 2/3 de las veces, mientras Daniel gana 1/3. Una posible ayuda que pueden usar los alumnos de Educación Primaria o los futuros profesores para resolver el problema es preparar un recuento de todos los casos posibles en el experimento (espacio muestral), clasificándolos según el valor de la diferencia entre el valor mayor y menor de los puntos. En la figura 4.3.3 se presenta la distribución de probabilidad de la variable aleatoria (diferencia) implícita en el juego. No esperamos que los futuros profesores reconozcan la variable aleatoria, pues no la han estudiado, pero si que preparen un esquema similar al de la figura. Por recuento simple de los casos y aplicando la regla de la suma de probabilidades, se deduce fácilmente la solución. Los alumnos tienen que movilizar una idea elemental de juego equitativo, como juego que concede a los dos jugadores la misma probabilidad.

Figura 4.3.3. Distribución de probabilidad de la variable aleatoria diferencia.

Diferencia	Casos posibles	Número de casos	Probabilidad	Gana
0	11,22,33,44,55,66	6	6/36	Carmen
1	12,21,23,32,34,43,45,54,56.65	10	10/36	Carmen
2	13,24,31,35,42,46,53,64	8	8/36	Carmen
3	14,25,36,41,52,63	6	6/36	Daniel
4	15,26,51,62	4	4/36	Daniel
5	16,61	2	2/36	Daniel
Total		36		

En el segundo apartado la respuesta correcta es que Carmen debe ganar 1 ficha cada vez que salga alguno de sus números y Daniel 2 fichas para que el juego sea equitativo, ya que Carmen tiene el doble de probabilidad de ganar.

Los posibles errores o dificultades que podemos encontrar en los futuros profesores están relacionados con la falta de razonamiento proporcional inverso; no se comprende bien la idea de juego equitativo, no se concibe la convergencia a la larga y se fijan sólo en el resultado del experimento, fallo en la idea de esperanza; fallo en razonamiento combinatorio.

PROBLEMA 10

La probabilidad de que nazca un varón es 1/2. A lo largo de un año completo habrá más días en los cuales al menos el 60% de los nacimientos corresponden a varones:

(A) En un hospital grande (100 nacimientos al día) ___

(B) En un hospital pequeño (10 nacimientos al día) ___

(C) No hay ninguna diferencia ___

¿Por qué?

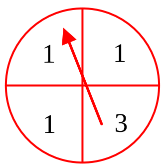
En este problema, tomado de Green (1983), se evalúa la percepción de la influencia del tamaño de las muestras en la variabilidad de los resultados. La respuesta correcta es que en un hospital pequeño, donde se atienden menos nacimientos al día, es donde se producirá una mayor variabilidad.

Se espera encontrar un grupo de profesores que manifiesten un desconocimiento de los efectos del tamaño de la muestra sobre las estimaciones de los resultados, siendo atribuido a la heurística de la representatividad, que induce a creer que no hay ninguna diferencia basándose en que la probabilidad de que nazca varón es 1/2 en la población. También se puede encontrar un grupo de profesores que pueden pensar que hay más variabilidad en las muestras grandes eligiendo el hospital grande, por una concepción errónea sobre aleatoriedad.

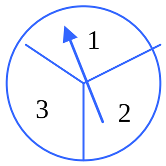
Implícitamente se está presentando el concepto de enfoque frecuencial, donde se sabe que el valor de las frecuencias relativas se estabiliza en torno a la probabilidad de un suceso en muestras grandes.

PROBLEMA 11

La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es más fácil obtener un 3? Señala la respuesta correcta:



(ROJO)



(AZUL)

(A) Es más fácil obtener 3 en el disco rojo............................... ___

(B) Es más fácil obtener 3 en el disco azul............................... ___

(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3. .... ___

(D) No lo sé.. ___

¿Por qué eliges esa respuesta?

Este problema, tomado de Green (1983), ha sido incluido en el cuestionario con el objetivo de estudiar la influencia del contexto en la respuesta y elección de estrategia. Se trata de comparar la probabilidad de un mismo suceso entre dos ruletas seccionadas con agujas giratorias, donde cada ruleta está dividida en un número de sectores diferentes pero de igual área. La respuesta correcta es que es más fácil obtener el 3 en el disco azul, ya que aplicando la regla de Laplace, se obtiene que la probabilidad de obtener un 3 en el disco azul es 1/3, mayor que la de obtener un 3 en el disco rojo que es solo de 1/4.

Los posibles errores o dificultades pueden ser: Usar la regla de Laplace, sin tener en cuenta el área y dar más probabilidad a la ruleta roja; o considerar todos los sucesos equiprobables y dar la misma probabilidad a las dos ruletas.

PROBLEMA 12

Una moneda equilibrada se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. De las siguientes frases, señala la que consideres correcta:
(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ___
(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ ___
(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___
(D) No lo sé ___
¿Por qué?

Este problema, tomado de Green (1983), evalúa la percepción de la independencia de ensayos repetidos en las mimas condiciones. Por ello se ha introducido una información sobre los resultados de los lanzamientos anteriores para intentar observar la posible influencia que esto tiene en las respuestas de los futuros profesores.

La respuesta correcta a la pregunta es que la próxima vez es más probable que salga cara o cruz, el futuro profesor debe reconocer la equiprobabilidad de los sucesos, aplicando la regla de Laplace. Como indica Cañizares (1997), se espera encontrar futuros profesores donde se manifiesta el sesgo de recencia positiva o negativa, descritos en numerosas investigaciones y que ha sido atribuido a la heurística de la representatividad por Kahneman, Slovic y Tversky (1982).

Los posibles errores o dificultades pueden ser: Falta de comprensión de la independencia que puede llevar a contestar “cruz” pensando que la moneda debe equilibrarse en una racha corta; o no se entiende el concepto de moneda equilibrada y se piensa que la moneda tiene tendencia a producir caras.

PROBLEMA 13

En un experimento se lanzan al aire 12 monedas juntas y caen sobre la mesa. Si el experimento se repite muchas veces ¿cuáles de los siguientes resultados ocurren más a menudo?
(A) 2 caras y 10 cruces ___
(B) 6 caras y 6 cruces ___
(C) 4 caras y 8 cruces ___
(D) Todas tienen la misma posibilidad ___
¿Por qué?

Este problema, tomado de Green (1983), trata de un experimento compuesto donde se lanzan doce monedas. Se trata de decidir qué resultado de los propuestos ocurren más a menudo. Para contestar correctamente a la pregunta los futuros profesores deben de tener en cuenta que se trata de comparar diferentes probabilidades binomiales, donde cada experimento simple puede ser cara o cruz, luego el número total de posibilidades es de 2^{12}. Se espera que los futuros profesores, por medio de su experiencia, puedan tener una idea intuitiva de variable aleatoria, en este caso de una distribución binomial y que el valor esperado se obtiene mediante el producto del número de ensayos por la probabilidad;

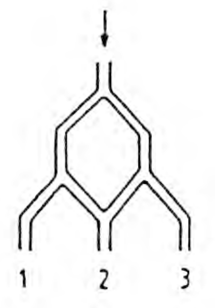
Valor esperado (E) = n . p = 12. 0,5=6.

Por tanto, la respuesta correcta es la opción B "6 caras y 6 cruces".

Para resolver el problema los futuros profesores, y debido a su falta de razonamiento combinatorio, podrían pensar que todos los resultados son equiprobables, y por ello aplicar incorrectamente la regla de Laplace. También se podría encontrar un grupo de futuros profesores que manifiesten el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988).

PROBLEMA 14

Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado



(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___

(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por la 1 ó 3 ___

(C) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 y unas pocas por 3 ___

(D) Ninguna de estas ___

¿Por qué?

Este problema, tomado de Green (1983), evalúa la comparación de probabilidades en experimentos compuestos. El espacio muestral está formado por tres sucesos simples no equiprobables {1, 2, 3} donde aplicando la regla del producto de las probabilidades en los experimentos compuestos y la regla de la suma se obtiene:

$p(1) = p(3) = ¼$ y $p(2) = 2/4$,

por lo que la respuesta correcta es que por el canal 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por la 1 ó 3.

Como indica Cañizares (1997), consideramos que debido a la simetría geométrica del dibujo algunos futuros profesores puedan responder que todos los canales tienen la misma probabilidad. La respuesta A también puede constituir un distractor para los futuros profesores que generalicen indebidamente la regla de Laplace.

Otros posibles errores o dificultades que puedan manifestar los futuros profesores son: Fallo en el razonamiento combinatorio, no siendo capaz de razonar todos los caminos que llevan a 1, 2 y 3; fallo en la multiplicación o suma de fracciones, no llegando a la solución B y dando C o D.

PROBLEMA 15

El profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas. Algunas caen con la punta para arriba y otras caen hacia abajo. El resultado fue: ARRIBA = 68; ABAJO = 32. Después el profesor pidió a una niña que repitiera el experimento.

De la lista siguiente elige el resultado que tú crees que obtendrá la niña:

(A) ARRIBA = 36; ABAJO = 64 ___

(B) ARRIBA = 63; ABAJO = 37 ___

(C) ARRIBA = 51; ABAJO = 49 ___

(D) Todos los resultados anteriores tienen la misma probabilidad ___

¿Por qué?

Este problema, tomado de Green (1983), pide comparar probabilidades binomiales. Se trata de un experimento compuesto, siendo la respuesta correcta la opción B “Arriba=63 y Abajo=37”, debido a que que es el resultado más parecido al obtenido por el profesor en un experimento anterior.

Para contestar correctamente hay que tener en cuenta ciertos aspectos como la falta de simetría de la chincheta. Para que el futuro profesor pueda hacer una predicción experimental, se proporciona una información de 100 lanzamientos.

Se espera encontrar futuros profesores que consideran los sucesos como equiprobables ignorando el resultado del experimento realizado previamente por el profesor. Se trata de probabilidades a priori de los resultados, la poca o nula sensibilidad a este tipo de probabilidades está considerada por Kahneman, Slovic y Tversky (1982) como una de las causas de la heurística de representatividad, ya mencionada en el problema 12.

Otro posible error que pueden cometer los futuros profesores sería pensar que en el siguiente ensayo los resultados han de equilibrarse para conseguir una probabilidad 1/2.

En la tabla 4.3.1 presentamos los objetos matemáticos utilizados para resolver cada uno de los problemas propuestos en el cuestionario. Se han diferenciado en conceptos, procedimientos, lenguajes y argumentos, atendiendo a la tipología de objetos matemáticos establecida por Godino, Batanero y Font (2007), a la que hemos añadido los posibles sesgos que pueden aparecer. Como puede observarse se trata de una amplia gama de contenidos relacionados con la probabilidad, para así poder evaluar el conocimiento común del contenido de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria.

En los procedimientos que aparecen en la tabla cuando hacemos referencia a cálculo probabilístico formal, queremos indicar que para resolver el problema se puede utilizar alguna fórmula como la regla de Laplace, la probabilidad de la suma, la probabilidad condicional o la probabilidad compuesta.

Tabla 4.3.1. Tipología de objetos que intervienen en la solución de los problemas

	Problemas/contenidos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Conceptos	Espacio muestral	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Suceso. Tipos	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Suceso seguro y probable	X	X	X												
	Aleatoriedad		X	X												
	P. subjetiva		X	X												
	P. clásica						X		X							
	P. frecuencial										X		X			X
	P. condicional							X								
	P. geométrica											X				
	P. compuesta														X	
	Independencia		X	X									X			
	Muestreo										X					
	Variable aleatoria													X		
	Juego equitativo				X	X				X						
	Esperanza matemática				X	X				X						
	Proporcionalidad				X	X			X	X						
Procedimientos	Enumeración sistemática	X														
	Cálculo probabilístico formal		X	X	X	X	X	X	X	X		X		X	X	
	Cálculo probabilidad frecuencial										X		X			X
	Comparación de probabilidades		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Cálculo de probabilidad geométrica											X				
Lenguajes	Diagrama árbol									X						
	Verbal	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Numérico	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Gráfico											X			X	
	Simbólico Tabla									X						
Argumentos	Razonamiento formal	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X		X	
	Razonamiento empírico										X	X		X		X
Sesgos	Representatividad		X	X							X					
	Azar = desorden		X													
	Equiprobabilidad				X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Recencia positiva y negativa			X									X			

4.4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Seguidamente analizamos los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria en cada uno de los problemas propuestos en el cuestionario. Para facilitar el estudio, los problemas se han agrupado según el concepto que se trabaja en cada uno de ellos. Se comparan los resultados obtenidos en nuestra muestra con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años participantes en la investigación de Cañizares (1997) y con los obtenidos en otras investigaciones que han sido citadas en los antecedentes.

4.4.1. ENUMERACIÓN DEL ESPACIO MUESTRAL

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria en el problema 1, sobre el concepto de espacio muestral.

PROBLEMA 1

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. Se sacan las bolas sin mirar ¿Cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color? ¿Por qué?

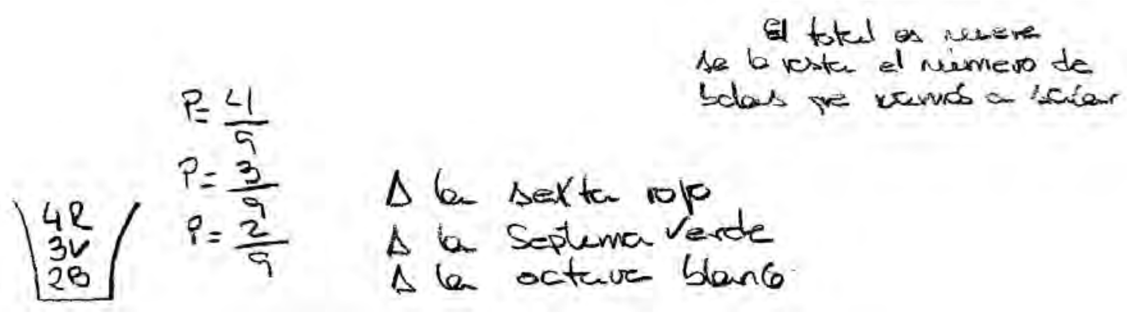
En este problema se evalúan los conocimientos de los futuros profesores de educación primaria sobre la noción de espacio muestral. Sus respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la tabla 4.4.1.1. A continuación analizamos las respuestas correctas e incorrectas.

Tabla 4.4.1.1. Resultados en el problema 1

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
2 bolas	3	1.1		
3 bolas	27	9.5	48	33.6
4 bolas	13	4.6		
5 bolas	7	2.5		
6 bolas	24	8.5	37	25.8
7 bolas	8	2.8		
8 bolas (*)	132	46.3	19	13.3
9 bolas	23	8.1	18	12.6
Otras	13	4.6	17	11.9
No contesta	33	11.7	4	2.8

(*) Respuesta correcta

En ella observamos que la categoría mayoritaria es “8 bolas” (46.3%), donde hemos incluido a los futuros profesores que han respondido correctamente, indicando que el mínimo número de bolas que se debe sacar para estar seguro de que hay una de cada color es ocho. Un ejemplo es la respuesta siguiente: “*El total es nueve se le resta el número de bolas que vamos a sacar*. *A la sexta rojo, a la séptima verde, a la octava blanco*” (alumno 24).



Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría “3 bolas”, donde están los futuros profesores que han respondido que es necesario extraer tres bolas, que muestran confusión entre los conceptos de suceso seguro y suceso posible, seguidas de las categorías “6 bolas” (8.5%) y “9 bolas” (8.1%). Ésta última puede estar causada por una falta de capacidad combinatoria, respondiendo de esa forma para evitar los cálculos.

Con porcentajes menores aparecen una gran variedad de categorías, donde hemos incluido los futuros profesores que por falta de razonamiento combinatorio no estiman bien el número de bolas, dando respuestas con diferente número de bolas, como vemos a continuación:

- 1 bola (1 alumno): *"Sacaremos una bola sola ya que las tres son de color"* (alumno 243).
- 2 bolas (3 alumnos): *"Dos bolas, porque como hay dos bolas blancas, es el máximo que se puede sacar de cada bola"* (alumno 71).
- 4 bolas (13 alumnos): *"Uno debe sacar 4 bolas para estar seguro de que obtendrá una bola de cada color, porque como hay 4 lo máximo de bolas que hay son 4 de un color, se deben sacar para obtener una bola de cada color"* (alumno 202), donde el estudiante confunde "al menos una de cada color" con "al menos dos de color diferente".
- 5 bolas (7 alumnos):*"En total hay 9 bolas en la caja, por lo que debemos al menos sacar 5 bolas para que haya una probabilidad del 50% de que salga una de cada color"* (alumno 99), donde confunde la probabilidad del 50% con el 50% de casos posibles.
- 7 bolas (8 alumnos): *"7 bolas porque seguro que se saca o bien todas las rojas, 1 verde y otra blanca, o bien todas las verdes y blancas y alguna roja"* (alumno 67).

En la categoría "Otras" hemos incluido a los futuros profesores que aportan respuestas incoherentes, como por ejemplo, "*Hay que sacar 6 bolas para que salga una roja, 6 bolas para que salga alguna verde y 7 bolas para que salga alguna blanca"* (alumno 8), o indican que no comprenden bien el enunciado "*¿se vuelven a meter las que se sacan? No lo tengo muy claro este ejercicio?* (alumno 33), que muestra una confusión entre muestreo con reemplazamiento y sin reemplazamiento.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que los futuros profesores han obtenido un porcentaje mucho mayor de respuestas correctas, aunque todavía existe una proporción muy importante de ellos que comete errores (42%), como se comprueba en la gran variedad de tipos de respuestas incorrectas, o que no contesta (11,7 %).

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.1.2.

Tabla 4.4.1.2. Argumentos utilizados en el problema 1

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n= 143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
8 bolas (suceso seguro) (*)	128	45.2	21	14.7
Con tres bolas es suficiente	30	10.6	85	59.5
Número variable de bolas	47	16.6	0	0
No es posible saber	7	2.5	0	0
Debe de sacar todas las bolas	23	8.1	18	12.6
Ambiguo	14	4.9	12	8.4
No contesta	34	12.0	7	4.8

(*) Argumento correcto

En ella observamos que el 45.2% de ellos apoya su respuesta correcta con el argumento adecuado relacionado con la idea de suceso seguro. Un ejemplo es el siguiente: *"Hay que sacar 8 bolas para estar seguro, puesto que puede pasarte que saques las cuatro rojas seguidas, luego las 3 verdes y una blanca. Así que sacando 8 te aseguras de que todos los colores estén fuera"* (alumno 182).

Entre los argumentos incorrectos, destaca "Con tres bolas es suficiente" (10.6%), que ha sido utilizado por los futuros profesores que confunden suceso seguro con posible, al considerar que con tres bolas se pueden obtener los tres colores. Un ejemplo es el siguiente: "*3 porque hay 3 bolas de distinto color*" (alumno 194).

El argumento "Debe sacar todas las bolas" (8.1%) ha sido utilizado por los futuros profesores que fallan en el razonamiento combinatorio y responden "*9 veces, porque es la cantidad de bolas que hay. Sacándolas toda, sacará también una de cada color*" (alumno 157).

Con un número de bolas variable como argumento (16.6%), justificando el razonamiento desde la forma en que entiende el juego aleatorio y responden "*Se deben sacar 6 bolas, una de las dos blancas, 2 de las tres verdes y 3 de las 4 rojas para que haya una bola de cada color"* (alumno 7).

El argumento "no es posible saber" (2.5%), basado en la idea de que al ser un juego aleatorio no es posible saber el resultado, ha sido el menos utilizado por los profesores.

El resto aporta un argumento “ambiguo” (4.9%), como por ejemplo: *“Pienso que deben sacarse mínimo 4 bolas para que haya mayor probabilidad de sacarse bolas de distinto color”* (alumno 82), o no contesta (12%).

Si comparamos estos resultados con los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997), el porcentaje de futuros profesores que argumenta de forma correcta es mucho mayor (45.2% frente a un 14.7%). Los argumentos que conducen a respuestas incorrectas son similares a los utilizados por los niños, aunque entre los futuros profesores presentan una mayor variedad.

Los resultados muestran que la mayor parte de los futuros profesores de educación primaria participantes en este estudio muestra un conocimiento común insuficiente del contenido en relación al espacio muestral, ya que solo el 46% de los futuros profesores responde correctamente a la cuestión planteada. Además hay un porcentaje importante de respuestas incorrectas, como el 9.5% de los futuros profesores que responde que con tres bolas se está seguro de obtener una bola de cada color, que muestra confusión entre suceso seguro y suceso posible, o bien, como indican Hawkins y cols. (1992), se ha podido producir una interpretación incorrecta del experimento aleatorio que ha llevado a los futuros profesores a considerar un espacio muestral incorrecto.

Por último, el 8.1% de los futuros profesores que responde que se han de sacar todas las bolas, quizás lo haga debido a una falta de capacidad combinatoria, descrita también por Azcárate (1995) entre los futuros profesores de educación primaria.

4.4.2. CREENCIAS SOBRE LA ALEATORIEDAD

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria en los problemas 2 y 3, sobre el concepto de aleatoriedad.

PROBLEMA 2

Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar con el primero porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a lo que piensa Olivia y Juana?

En el problema 2 se estudia si los futuros profesores reconocen la equiprobabilidad, en presencia de factores subjetivos. Sus respuestas al problema se han clasificado en las categorías que aparecen en la tabla 4.4.2.1.

Tabla 4.4.2.1. Resultados en el problema 2

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
No hay relación (*)	107	37.8	41	28.7
Olivia tiene razón	3	1.1	2	1.4
Juana tiene razón	98	34.6	56	39.2
Azar/Suerte	66	23.3	7	4.9
Otras	7	2.5	35	24.5
No contesta	2	0.7	2	1.4

(*) Respuesta correcta

En ella observamos que la categoría mayoritaria es "No hay relación" (37.8%), donde hemos incluido a los futuros profesores que han respondido correctamente, indicando que los dos números tienen la misma probabilidad de salir y que no hay relación entre el resultado de obtener un número u otro por el hecho de que sean consecutivos o estén desordenados. Un ejemplo es la respuesta siguiente: "*Pues que ambos tienen la misma posibilidad de salir 1/1000000 y es 1000000 debido a que en los sorteos también se incluye el cero*" (alumno 29).

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría "Juana tiene razón" (34.6%), donde están los futuros profesores que manifiestan su acuerdo con Juana, ya que consideran que al tratarse de un juego aleatorio es más fácil obtener números no consecutivos, lo que pone de manifiesto la alta incidencia de la heurística de representatividad descrita por Kahneman, Slovic y Tversky (1982) así como las creencias de las personas, desde un enfoque subjetivo, de que los resultados desordenados se consideran un ejemplo más adecuado para la aleatoriedad, como indica Hawkins y cols. (1992).

También hay dificultades en la percepción de la independencia, cuya aplicación puede ofrecer dificultades a los estudiantes (Truran y Truran, 1997). Un ejemplo es la respuesta "*Yo estoy de acuerdo con Juana, porque es muy difícil que al azar salgan todos los números consecutivos de un mismo frasco*" (alumno 31).

Otra categoría destacada es "Azar/suerte" (23.3 %), donde están los futuros profesores que afirman que el resultado depende del azar, la suerte o el destino. Un ejemplo es la respuesta siguiente del alumno 71:

que es imposible saber que número va a tocar. y portanto todo depende del azar.

"*Que es imposible saber qué número va a tocar, y por tanto todo depende del azar*" (alumno 71)

En la categoría "Otras" (2.5%), hemos incluido respuestas diversas, que no se podían incluir en las anteriores, como por ejemplo: "*en mi opinión se puede ganar uno de los números según el tipo de juego*" (alumno 173). Por último, la categoría "Olivia tiene razón" (1.1 %), está formada por los futuros profesores que muestran su acuerdo con Olivia porque consideran más probable que salgan los números ordenados.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es mayor y que la incidencia de la heurística de representatividad ha sido muy alta en los dos grupos.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.2.2.

Tabla 4.4.2.2. Argumentos utilizados en el problema 2

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)
	Frecuencia	Porcentaje	
Mejor números consecutivos	2	0.7	N
Mejor números no consecutivos	97	34.3	O
Tienen la misma probabilidad (*)	94	33.2	D
Azar/suerte	73	25.8	A
Otros	11	3.9	T
No contesta	6	2.1	O

(*) Argumento correcto

En ella observamos que un 33.2% de los futuros profesores apoya su respuesta correcta con el argumento adecuado de que los dos números "tienen la misma probabilidad", utilizando la regla de Laplace. Un ejemplo es el siguiente: "*Da igual el número que se compre, pues la probabilidad de que te toque uno u otro es la misma P(toque)=1/1.000.000*" (alumno 54).

Entre los argumentos incorrectos, destaca "mejor números no consecutivos" (34.3%), que ha sido utilizado por los futuros profesores que admiten la ventaja de Juana en la creencia de que el número preferido por ella es más probable al estar desordenado. Un ejemplo es el siguiente: "*Es muy difícil que salgan números consecutivos por lo que pienso que hay más probabilidad de que salga el número de Juana*" (alumno 68).

El argumento "Azar/suerte" (25.8%) ha sido utilizado por los futuros profesores que basan su respuesta en la idea de azar o suerte (25.8%), como en el ejemplo siguiente: "*Pues pienso que la lotería es algo azaroso, es decir, es más fácil que salgan números salteados y no consecutivos. Aunque todo es cuestión de suerte*" (alumno 55).

El argumento "mejor números consecutivos" (0.7%), basado en la creencia de que el número más probable es el número ordenado tal y como opinaba Olivia, ha sido el menos utilizado por los futuros profesores. Por último, en la categoría "Otros" (3.9%) hemos incluido diversas justificaciones, como por ejemplo la siguiente: "*Olivia piensa que al ir sacando las bolas con los números, habrá menos posibilidades que se vuelvan a repetir*" (alumno 271).

PROBLEMA 3

Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar pues piensa: "la lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima". ¿Cuál es tu opinión sobre el razonamiento de Pedro?

Las respuestas de los futuros se han clasificado en las categorías que aparecen en la tabla 4.4.2.3 que se presenta a continuación.

Tabla 4.4.2.3. Resultados en el problema 3

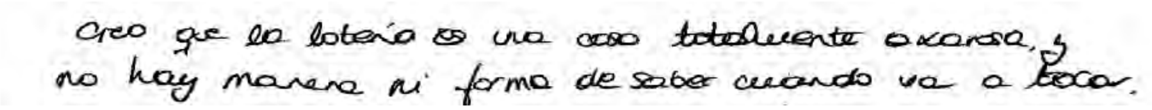
	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
No hay relación (*)	110	38,9	33	23.1
Pedro tiene razón	84	29.7	53	37.1
Azar/Suerte	75	26.5		
Otras	7	2.5	50	35.0
NS/NC	7	2.5	7	4.9

(*) Respuesta correcta

En ella observamos que la categoría mayoritaria es "No hay relación" (38.9%), donde hemos incluido a los futuros profesores que han respondido correctamente, indicando que el hecho de haber ganado o no en anteriores sorteos no influye en el resultado de la próxima jugada. Un ejemplo es la respuesta siguiente: "*Tiene la misma probabilidad el que juega por primera vez que el que ha jugado un millón de veces*" (alumno 59).

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría "Pedro tiene razón" (29.7%), donde están los futuros profesores que manifiestan su acuerdo con Pedro, al afirmar que puesto que no ha ganado todavía ninguna vez en los últimos meses, en el próximo sorteo tendrá más probabilidad de ganar. Un ejemplo es la respuesta siguiente: "*Que lleva razón ya que las probabilidades de que le puede salir en la próxima lotería aumentan si aún no le ha tocado, por el contrario, si acaba de ganar la lotería vuelve a probar suerte las probabilidades de que le vuelvan a salir son mininas*" (alumno 113), manifestando así el efecto de recencia negativa, que son aquellos tipos de respuestas, según Fischbein (1975), en que el estudiante considera más probable el suceso contrario al que ya ha ocurrido. Este sesgo está relacionado con una incorrecta percepción de la independencia.

Otra categoría destacada es “Azar/suerte” (26.5%), donde están los futuros profesores que consideran que el hecho de que Pedro gane o no en el sorteo depende del azar o de la suerte (26.5%), como la siguiente:


Creo que la lotería es una cosa totalmente azarosa, y no hay manera ni forma de saber cuando va a tocar.

> *“Creo que la lotería es una cosa totalmente azarosa, y no hay manera ni forma de saber cuando va a tocar”* (alumno 36)

En la categoría “Otras” (2.5%) hemos incluido diversos tipos de respuestas incorrectas. Por último no contestan el 2.5%.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que en los futuros profesores el porcentaje de respuestas correctas es bastante mayor y que el efecto de recencia negativa ha tenido menor incidencia. La categoría Azar/suerte, muy destacada entre los futuros profesores, también ha aparecido entre los niños en un alto porcentaje, pero ha sido incluida en la categoría “Otras”.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.2.4.

Tabla 4.4.2.4. Argumentos utilizados en el problema 3

	Futuros profesores (n=283)	
	Frecuencia	Porcentaje
No depende de anteriores sorteos (*)	87	30.7
Tiene una probabilidad mínima de ganar	12	4.2
Tiene una mayor probabilidad	60	21.2
Azar/Suerte	106	37.5
Otros	8	2.8
No contesta	10	3.5

(*) Argumento correcto

En ella observamos que solo un 30.7% de los futuros profesores apoya su respuesta correcta con un argumento adecuado "No depende de anteriores sorteos", indicando que la probabilidad de ganar el sorteo de Pedro no depende de los resultados obtenidos anteriormente, y algunos utilizan la regla de Laplace. Un ejemplo es el siguiente: "*Cada vez que se juega se tienen las mismas probabilidades de que toque ni más ni menos*" (alumno 150).

Entre los argumentos incorrectos, destaca "Azar/suerte" (37.5%), que ha sido utilizado por un alto porcentaje de futuros profesores que justifican su respuesta con las ideas de azar y suerte. Un ejemplo es el siguiente: "*La lotería es cuestión de suerte y no por jugar más se van a acertar la infinidad de números que hay por combinar*" (alumno 107).

El argumento "tiene una mayor probabilidad de ganar" (21.2%) ha sido utilizado por los futuros profesores que consideran que es más probable que Pedro gane el próximo sorteo, porque no lo ha hecho en los sorteos anteriores (*efecto de recencia negativa*), aunque también hay algunos futuros profesores que argumentan que Pedro "tiene una probabilidad mínima de ganar" (4.2%), ya que no ha ganado anteriormente (efecto de recencia positiva).

En la categoría "Otros" (2.8%) hemos encuadrado diversos tipos de argumentos, como por ejemplo el siguiente: "*Analizar números premiados en esos dos meses e inventar estrategia*" (alumno 261).

En resumen, los resultados muestran que la mayor parte de los futuros profesores participantes en este estudio muestra un conocimiento común insuficiente del contenido en relación a la aleatoriedad, ya que solo en torno al 38% han respondido de forma correcta en los dos problemas, mientras que las respuestas y argumentos del resto están basados en experiencias previas o en creencias incorrectas. No obstante, estos resultados son algo mejores que los obtenidos por Azcárate (1995), quien encontró que de los 57 futuros profesores de educación primaria participantes en el estudio, muy pocos mostraban una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios. Algunos participantes explicaron la aleatoriedad mediante criterios de causalidad (por ejemplo, indicaron que un fenómeno es aleatorio únicamente si se desconocen sus causas). Otros tuvieron una fuerte influencia de los aspectos contextuales o consideraron que no es posible el estudio matemático de los fenómenos aleatorios.

Resultados similares fueron obtenidos por Serrano (1996) en un estudio exploratorio con 10 futuros profesores, que muestran las dificultades de los participantes con el concepto de independencia. Estas mismas concepciones incorrectas sobre la aleatoriedad e independencia fueron encontradas por Batanero, Arteaga, Ruiz y Roa (2010) en un estudio con 200 futuros profesores de educación primaria, donde se pedía a los participantes evaluar sus propias concepciones sobre la aleatoriedad, a partir de un proyecto que incluye la realización de un experimento aleatorio.

Los resultados obtenidos en este estudio corroboran los de Begg y Edwards (1999), donde muy pocos profesores comprendían el concepto de independencia y con frecuencia usaban el heurístico de la representatividad, suponiendo que toda muestra o serie de resultados debe ser una representación de la población esperada. Lo mismo ocurre con los obtenidos por Zaslavsky, Zaslavsky y Moore (2001), quienes indican que el 70% de los profesores no pueden explicar cuando dos sucesos son independientes.

En los dos problemas, la cuarta parte de los futuros profesores considera que los resultados dependen del azar o de la suerte. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Azcárate (1995), donde un 26.3% de los futuros profesores de educación primaria relacionaban el azar con la suerte o la casualidad.

Para ayudar a los futuros profesores a mejorar su razonamiento probabilístico, otros autores se han preocupado del diseño de acciones formativas Por ejemplo, Batanero, Godino y Cañizares (2005) proponen un cuestionario con problemas de probabilidad a 132 futuros profesores de educación primaria, observando sesgos en su razonamiento probabilístico, como la heurística de la representatividad (consistente en juzgar la probabilidad de una muestra en base a su similitud con la población de la que se toma) y la heurística de la equiprobabilidad. Estos sesgos se vieron notablemente reducidos después de un experimento de enseñanza basado en la simulación con dispositivos manipulativos y ordenadores.

4.4.3. JUEGOS EQUITATIVOS

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria en los problemas 4, 5 y 9 relacionados con la idea de juego equitativo.

PROBLEMA 4

Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luís tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luís hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

En el problema 4 se estudia si los futuros profesores reconocen la idea de juego equitativo, mediante la introducción de factores subjetivos relacionados con el contexto y con la mención explícita que se hace sobre la equitatividad del juego. Las respuestas de los futuros profesores se han clasificado en las categorías que aparecen en la tabla 4.4.3.1 que se presenta a continuación.

Tabla 4.4.3.1. Resultados en el problema 4

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
El juego es justo (*)	195	68.9	51	35.7
Luis más ventaja	44	15.5	61	42.7
Eduardo más ventaja	27	9.5	14	9.8
Ambigua, incompleta	16	5.7	12	8.4
No contesta	1	0.4	5	3.5

(*) Respuesta correcta

En ella observamos que la categoría mayoritaria es “El juego es justo” (68.9%), donde hemos incluido a los futuros profesores que han respondido correctamente, indicando que los dos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar el juego. Un ejemplo es la respuesta siguiente: “*La probabilidad de Eduardo es de 1/3 de sacar bola blanca y la probabilidad de Luis es de 1/3 de sacar bola blanca luego la probabilidad sí es la misma, ya que Luis tiene más blancas pero es la misma proporción*” (alumno 61).

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría “Luis más ventaja” (15.5%), donde están los futuros profesores que manifiestan su acuerdo con la opinión de Eduardo de que Luis tiene más ventaja al tener más bolas blancas, lo que confirma nuestra suposición de que el distractor que consiste en pensar que, a pesar de tener igual proporción de casos favorables y posibles, el mayor número de casos favorables da más probabilidad a una de las urnas, ha tenido una influencia notable. Un ejemplo es la respuesta "*Realmente no es justo porque Luis al tener más bolas blancas, tiene más probabilidad de sacar antes dicha bola*" (alumno 78).

En la categoría "Eduardo más ventaja" (9.5%), hemos incluido los futuros profesores que consideran que el juego es favorable a Eduardo. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Luis podrá tener 30 bolas blancas, pero tiene 60 negras, que es el doble, por lo tanto hay más probabilidad de que saque la bola blanca Eduardo*" (alumno 98).

En la categoría "Ambigua, incompleta" (5.7%), están los futuros profesores que aportan respuestas confusas o incompletas. Un ejemplo sería la siguiente: "*Que no tiene nada que ver con que sea justo o no, sino con el azar*" (alumno 110).

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), se observa que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es casi el doble y que el distractor que consiste en pensar que, a pesar de tener igual proporción de casos favorables y posibles, el mayor número de casos favorables da más probabilidad a una de las urnas, ha tenido una influencia menor que en los niños. No obstante el porcentaje de respuestas incorrectas entre los futuros profesores sigue siendo importante.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos más utilizados por los futuros profesores según las estrategias establecidas por Piaget e Inhelder (1951) para la comparación de dos probabilidades, que se presentan a continuación en la tabla 4.4.3.2.

Tabla 4.4.3.2. Estrategias utilizadas en el problema 4

Estrategias	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Correspondencia (*)	141	49.8	38	26.6
Multiplicativa (*)	52	18.4	0	0
Compara casos posibles	10	3.5	1	0.7
Compara casos favorables	41	14.5	61	42.7
Compara casos desfavorables	15	5.3	7	4.9
Estrategias aditivas	3	1.1	6	4.2
Azar/suerte	4	1.4		
Otras	10	3.5	13	9.1
Ambigua, incompleta	4	1.4	17	11.8
No contesta	3	1.1		

(*) Argumento o estrategia correcta

Comparación del número de casos posibles

Consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas. Esta estrategia ha sido utilizada por 8 futuros profesores. Aunque en algún caso pudiera generar una respuesta correcta, carece de base lógica, por lo que se considera incorrecta. Un ejemplo de esta estrategia es el siguiente: "*Luis tiene más bolas blancas y negras que Eduardo. Por lo tanto, hay una cierta desventaja*" (alumno 88).

La proporción de los futuros profesores que la utiliza (3.5%) es superior a la de los niños (0.7%), participantes en la investigación de Cañizares (1997).

Comparación absoluta del número de casos favorables

Es una estrategia incompleta, ya que de los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos y se ignoran los demás. Piaget e Inhelder (1951) encuentran que, cuando se propone a los niños comparar dos probabilidades, tratan de comparar en primer lugar los casos posibles. Una vez superada esta etapa, centran su atención en la comparación de los casos favorables, eligiendo la caja que tiene más. Ha sido utilizada por 41 futuros profesores y les ha llevado a responder de forma incorrecta. Un ejemplo de esta estrategia es el siguiente: "*Lleva razón Eduardo porque al tener Luis más bolas blancas la probabilidad de sacar una de ellas es mayor que la de Eduardo*" (alumno 8).

lleva razón Eduardo porque al tener Luis más bolas blancas, la probabilidad de sacar una de ellas es mayor que la de Eduardo.

El porcentaje de utilización de esta estrategia por los futuros profesores (14.5%) está bastante por debajo de los porcentajes de los niños (42.7%) de la investigación de Cañizares (1997), aunque se considera que es alto debido a la sencillez del problema planteado y tratándose de futuros profesores de educación primaria.

Comparación absoluta del número de casos desfavorables

Cuando, una vez intentada la estrategia anterior, existe igualdad de casos favorables, los sujetos centran su atención sobre el número de casos desfavorables, eligiendo la caja que tenga menos casos desfavorables. Corresponde, según Piaget e Inhelder (1951) al final del nivel pre-operacional, en que el alumno no posee aún la capacidad para establecer relaciones entre el todo y las partes. Ha sido utilizada por 15 futuros profesores que han respondido de forma incorrecta. Un ejemplo de esta estrategia es el siguiente: "*No estoy de acuerdo porque en ese caso Luis tiene menos posibilidades de ganar porque tiene más bolas negras*" (alumno 87).

Los resultados del estudio muestran que el porcentaje de utilización de esta estrategia por los futuros profesores (5.3%) es algo superior a los porcentajes de los niños (4.9%) de la investigación de Cañizares (1997), aunque con una diferencia mínima.

Estrategias aditivas

Consisten en comparar las cuatro cantidades mediante operaciones de adición o substracción. Ha sido utilizada por 3 futuros profesores, que se han respondido de forma incorrecta basándose en la diferencia entre bolas blancas y negras. Un ejemplo de esta estrategia es el siguiente: "*Es cierto que Luis tiene más bolas blancas, pero también lo es que la diferencia en el número total de bolas y en la diferencia que tienen cada uno entre blancas y negras. Es decir, Que Luis tiene 30 bolas de diferencia entre blancas y negras mientras que Eduardo solo tiene 10 bolas de diferencia*" (alumno 31).

La proporción de los futuros profesores que han utilizado esta estrategia (1.1%) es menor que la de los niños (4.2%).

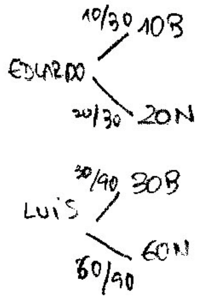
Estrategia de correspondencia

Esta estrategia consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra fracción. Piaget e Inhelder (1951) afirman que, a falta de un cálculo completo de fracciones, el niño realiza la comparación por un sistema de correspondencias; cuando las proporciones entre casos favorables y desfavorables no aparecen como inmediatas, el sujeto calcula los casos favorables que hay por cada caso desfavorable (o viceversa) en una de las cajas y compara si esta proporción es mayor o menor en la otra caja. Ha sido utilizada por 141 futuros profesores que han respondido que en las dos cajas hay la misma proporción de bolas blancas y negras, por lo que el juego es justo. Se ha considerado este razonamiento pertinente ya que permite resolver correctamente este problema. Ejemplo de esta estrategia es el siguiente: "*Existe una equivalencia entre las proporciones de bolas blancas y negras en las respectivas bolsas, por lo que las posibilidades son las mismas*" (alumno 50).

En los resultados se observa que el porcentaje de utilización de esta estrategia por los futuros profesores (49.8%) es bastante más alto que el de los niños (26.6%), aunque se considera que es demasiado elevado ya que se trata de una estrategia utilizada por personas que aún no tienen un dominio completo del cálculo de fracciones.

Estrategia multiplicativa

Esta estrategia, desarrollada, según Piaget e Inhelder (1951), en el período de las operaciones formales, es sin duda, la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Ha sido utilizada por 48 futuros profesores que han calculado la probabilidad de obtener blanca en cada una de las cajas, aplicando la regla de Laplace. Un ejemplo de esta estrategia que resuelve con éxito este problema es el siguiente: "*El juego sí es justo porque Eduardo tiene la probabilidad de sacar una bola blanca de 10/30; y Luis tiene la probabilidad de sacar una bola blanca de 30/90, por lo tanto tienen igualdad de oportunidades*" (alumno 57).



El juego si es justo porque Eduardo tiene la probabilidad de sacar una bola blanca de $\frac{10}{30}$; y Luis tiene una probabilidad de sacar una bola blanca de $\frac{30}{90}$, por tanto tienen igualdad de oportunidades.

En este caso el porcentaje de utilización de esta estrategia por futuros profesores es del 18.4%, no apareciendo ningún caso entre los niños de 10 a 14 años, como, por otra parte, era de esperar, ya que la mayoría no han estudiado la regla de Laplace.

Estrategia Azar/suerte

Hay un grupo muy reducido de futuros profesores que, aunque responden que el juego es justo, emplean otras estrategias que no siempre proporcionan la solución correcta. Justifican su argumento haciendo referencia a la suerte, como el siguiente ejemplo: "*Pues que tener más bolas blancas no tiene nada que ver ya que también tienen más bolas negras que él y puede que el azar le haga sacar una blanca o una negra depende de la suerte*" (alumno 53).

El porcentaje de utilización de esta estrategia es sólo del 1.4%, no apareciendo ningún caso entre los niños de 10 a 14 años.

Otras estrategias

Hay un grupo reducido de futuros profesores que, aunque responden que el juego es justo, emplean otras estrategias que no siempre proporcionan la solución correcta. Unos comparan los casos favorables en una urna con desfavorables en la otra (Luis tiene más blancas, Eduardo menos negras), como por ejemplo: "*Que el juego sí es justo porque aunque Eduardo afirme que Luis tiene más bolas blancas que él. Él tiene también menos bolas negras que Luis, por lo tanto Eduardo tiene posibilidades de que le toque una bola blanca y Luis aunque tenga más bolas blancas que Eduardo le resulta más difícil que le toque porque tiene muchas bolas negras*" (alumno 190). Otros hacen referencia a la repartición de bolas para que ambos tengan el mismo número de bolas de cada color, como el siguiente ejemplo: "*Sí que es verdad que Luis tiene más bolas* *blancas pero también tiene el doble de negras. Por lo tanto, lo que yo haría sería repartir las bolas de Luis para que quedaran 20 bolas blancas y 40 negras. Así jugarían en igualdad de condiciones*" (alumno 149).

El porcentaje de utilización de estas estrategias es sólo del 3.5% bastante menor que el de los niños (9.1%).

En resumen, se observa el predominio de la utilización de las estrategias pertinentes o correctas en los futuros profesores (68.2%), lo cual corresponde a un mayor razonamiento proporcional, aunque todavía hay un porcentaje importante que utiliza estrategias incorrectas. Destaca también el alto porcentaje de argumentos confusos o que no responden en los dos grupos estudiados.

Como se comprobó en la investigación previa (Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz, 1999), la mención explícita de la equitatividad es un elemento subjetivo que ha podido influir en el aumento del nivel de dificultad del problema con respecto al esperado en un problema de comparación de fracciones como los propuestos por Noelting (1980a).

PROBLEMA 5

María y Esteban juegan a los dados. María gana 1 euro si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo?

RESPUESTA _________ €. ¿Por qué?

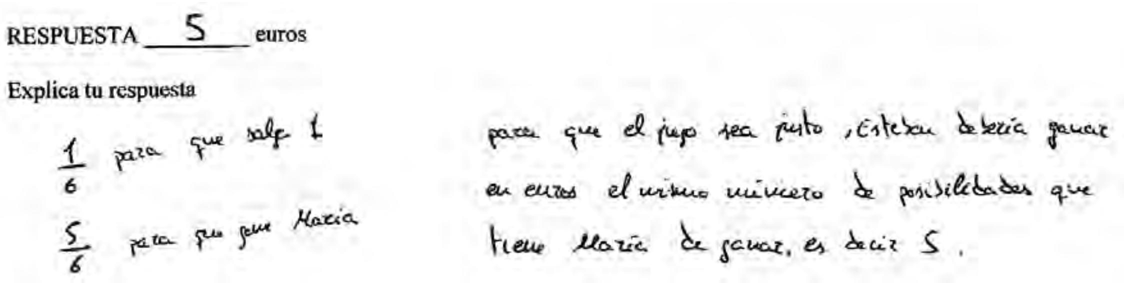
El problema 5, tomado de Green (1983), evalúa las intuiciones de los futuros profesores sobre un juego equitativo en el que las ganancias deberán ser inversamente proporcionales a la esperanza de ganar de cada jugador. Puesto que Maria tiene 5 posibilidades y cada vez gana un euro, a la larga gana 5 euros cada 6 jugadas, y como Esteban tiene sólo una posibilidad, ha de ganar 5 euros cada vez que gane. Las respuestas de los futuros profesores se han clasificado en las categorías que aparecen en la tabla 4.4.3.3 que se presenta a continuación.

Tabla 4.4.3.3. Resultados en el problema 5

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
1	6	2.1	17	11.9
2, 3 ,4 euros	12	4.3	13	9.1
5 euros (*)	224	79.2	83	58.0
6 euros	14	4.9	13	9.1
Otras	8	2.8	10	7.0
No contesta	19	6.7	7	4.9

(*) Respuesta correcta

En ella observamos que la categoría mayoritaria es “5 euros” (79.2%), donde hemos incluido a los futuros profesores que han respondido correctamente, indicando que Esteban debe ganar 5 euros para que el juego sea justo. Un ejemplo es la respuesta siguiente: “*1/6 para que salga 1, 5/6 para que gane María. Para que el juego sea justo, Esteban debería ganar en euros el mismo número de posibilidades que tiene María de ganar, es decir 5*” (alumno 37).


RESPUESTA 5 euros

Explica tu respuesta

1/6 para que salga 1

5/6 para que gane Maria

para que el juego sea justo, Esteban debería ganar en euros el mismo número de posibilidades que tiene María de ganar, es decir 5.

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría “6 euros” (4.9%), donde están los futuros profesores que consideran que Esteban debe ganar 6 euros para que el juego sea justo, debido a que tienen en cuenta solamente los resultados posibles y no las veces que cada uno de los jugadores gana el juego. Un ejemplo es la respuesta “*Maria 5€ 5/6=90% Esteban 1/6=10%. Si el dado tiene 6 números, y María gana 1 euro con cada número que no sea el 1. Para que el juego sea equitativo Esteban tendrá que ganar 6€ cada vez que salga su número, para compensar los demás veces que han salido los números de María*” (alumno 36).

En la categoría “2, 3 y 4 euros” (4.3%), hemos agrupado los futuros profesores que han respondido que Esteban debe ganar 2, o 3 o 4 euros, ya que consideran que Esteban debe ganar algo más pero no aciertan al considerar las probabilidades de ganar de cada uno de los jugadores. Un ejemplo es la respuesta “*Debe ganar 4€ puesto que María tiene 4 posibilidades más para acertar*” (alumno 210).

Le sigue la categoría “1 euro” (2.1%) formada por los futuros profesores que otorgan la misma ganancia (2.1%), independientemente de las probabilidades de ganar. Un ejemplo es la respuesta “*Porque hay la misma probabilidad de salir 1 que salir 2, 3, 4, 5, o 6*” (alumno 74).

En la categoría “Otras” están los profesores que aportan diversas justificaciones que no se pueden incluir en las categorías anteriores. Un ejemplo es la respuesta “*0.20 euros, Maria tiene 5 posibilidades de ganar, a 1 € cada una. Esteban sólo tiene 1 posibilidad frente a las 5 de María*” (alumno 247). Por último aparecen los futuros profesores que no contestan (6.7%).

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es superior, aunque hay cerca de un 20% que responde de forma incorrecta.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.3.4.

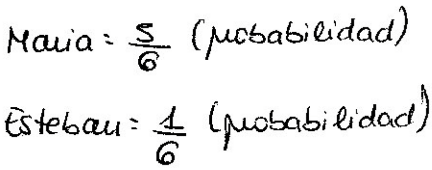
Tabla 4.4.3.4. Argumentos utilizados en el problema 5

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
María y Esteban igual	2	0,7		
María tiene 5 posibilidades y Esteban 1 (*)	137	48.4	66	46.0
María tiene más posibilidades	32	11.3	28	19.6
María tiene P=5/6 y Esteban P=1/6 (*)	80	28.3		
Otros	12	4.2	10	7
No contesta	20	7.1	7	4.9

(*) Argumento correcto

En ella observamos que el argumento correcto mayoritario es “María tiene 5 posibilidades y Esteban 1” (48.4%), donde hemos incluido los futuros profesores que apoyan su respuesta correcta con el argumento adecuado de que la probabilidad de ganar María es 5 veces mayor que la de ganar Esteban. Un ejemplo es el siguiente: "*Las posibilidades de que gane Maria es de 5 sobre 6, las de Esteban, 1 sobre 6. María tiene 5 veces más posibilidades*" (alumno 20).

El argumento correcto "María tiene P=5/6 y Esteban P=1/6" (28.3%) ha sido utilizado por los futuros profesores que han calculado la probabilidad y responden correctamente. Un ejemplo es el siguiente: "*María = 5/6 (probabilidad) y Esteban = 1/6 (probabilidad)*" (alumno 52).



Entre los argumentos incorrectos, destaca "María tiene más posibilidades" (11.3%), que ha sido utilizado por los futuros profesores que admiten la ventaja de María, pero no la cuantifican explícitamente. Este tipo de argumentos se usa para justificar la respuesta correcta, o cualquier cantidad de dinero superior a 1 euro, como ocurre con la siguiente respuesta: "*(Esteban debe ganar) 6 euros, porque hay 1 posibilidad entre 6 de que salga el 1*" (alumno 23).

El argumento "María y Esteban igual" (0.7%), que consideran Esteban debe ganar igual que María, ha sido utilizado por los futuros profesores. Un ejemplo es el siguiente: "*(Esteban debe ganar)1 euro, es lo mismo que gana María sacando un número del 2 al 6*" (alumno14).

En el caso de los niños, participantes en la investigación de Cañizares (1997), un 46% del total de los alumnos argumentan la respuesta correcta basándose en la ventaja de María, como ocurre con la respuesta de Ricardo (12 años; 1 mes): *«María tiene 5 oportunidades más, o sea, que considero justo que sean 5 euros.»*, y un 19.6% considera que María tiene más posibilidades de ganar, pero tampoco la cuantifican.

En resumen, se puede afirmar que aunque los porcentajes de respuestas correctas de los futuros profesores son algo mayores que los de los niños, existe todavía un porcentaje elevado de argumentos incorrectos utilizados. Destaca también el alto porcentaje de otro tipo de respuestas o sin contestar en los dos grupos estudiados, siendo del 12.7% en el caso de los futuros profesores y del 11.9% en el caso de los niños de 10-14 años.

PROBLEMA 9

Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:
- Lanzan dos dados sucesivamente y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor. Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2 entonces Carmen gana 1 ficha. Si resultan 3, 4, o 5 es Daniel quien gana una ficha. ¿Te parece que este juego es equitativo? ¿Por qué?
¿Cuántas fichas deberían ganar cada jugador para que el juego sea equitativo sin cambiar el resto de las reglas?

Con este problema, tomado de un libro de texto, se estudia si los futuros profesores reconocen la idea de juego equitativo, y que respondan, en caso de que no sea equitativo, qué premio habría que otorgar a cada jugador para que el juego sea equitativo. Las respuestas de los futuros profesores se han clasificado en las categorías que aparecen en la tabla 4.4.3.5, que se presenta a continuación.

Tabla 4.4.3.5. Resultados en el problema 9

	Futuros profesores (n=283)	
	Frecuencia	Porcentaje
No es equitativo (*)	118	41.7
Si es equitativo	94	33.2
Otras	13	4.6
No contesta	58	20.5

(*) Respuesta correcta

En ella observamos que la categoría mayoritaria es “No es equitativo” (41.7%), donde hemos incluido a los futuros profesores que han respondido correctamente, indicando que el juego no es equitativo ya que Carmen tiene mayor probabilidad de ganar el juego. Un ejemplo es la respuesta siguiente: “*No, porque es más probable que las diferencias sean de números menores*” (alumno 9). “*No, Carmen tiene 15/21 y Daniel 6/21 probabilidades en ganar*” (alumno 40).

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría “si es equitativo” (33.2%), donde están los futuros profesores que consideran que el juego es equitativo ya que Carmen y Daniel tienen la misma probabilidad de ganar. Un ejemplo es la respuesta “*Si, porque hay la misma probabilidad de que salga 1 que un 6, por lo que es equitativo*” (alumno 75).

En la categoría "Otras" hemos incluido los futuros profesores que contestan que el juego es equitativo o bien que el juego no es equitativo, pero la justificación es totalmente incorrecta, como el ejemplo siguiente: "*Sí (es equitativo), es difícil sacar siempre lo mismo o los mismos números. Los dos tienen una serie de números difícil de sacar*" (alumno 192).

En este caso no se comparan los resultados obtenidos con los de los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), ya que este problema no fue utilizado por la autora. Sin embargo destaca el hecho de que cerca del 60% responde de forma incorrecta.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.3.6.

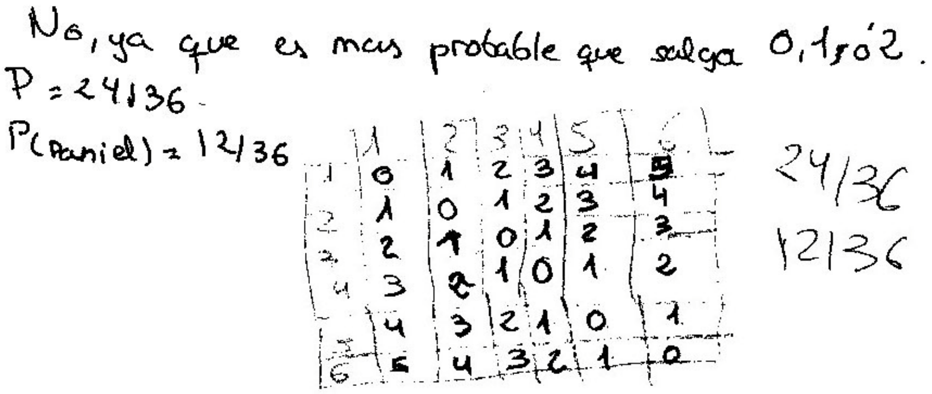
Tabla 4.4.3.6. Argumentos utilizados en el problema 9

		Futuros profesores (n=283)	
		Frecuencia	Porcentaje
Juego no equitativo	Carmen tiene doble posibilidades que Daniel (*)	3	1.1
	Carmen tiene más posibilidades (*)	102	36.0
Juego equitativo	Carmen y Daniel igual posibilidad	87	30.7
	Juego aleatorio	5	1.8
	Otro tipo de respuestas	3	1.1
	No justifican	2	0.7
Juego no equitativo	Carmen tiene menos posibilidades	13	4,6
	Otro tipo de respuestas	10	3.5
	No contesta	58	20.5

(*) Argumento correcto/parcialmente correcto

En ella observamos que el argumento correcto "Carmen tiene doble posibilidades que Daniel" (1.1%), solo ha sido utilizado por tres participantes (1.1%) que fueron capaces de enumerar el espacio muestral mediante una tabla y, a partir de ella, calcular correctamente la probabilidad de cada jugador. Una vez calculada, indican que el juego no es equitativo porque Carmen tiene el doble de posibilidades realizando el cálculo de probabilidades correctamente, es decir, identifica correctamente el número de casos posibles y favorables. Un ejemplo (alumno 254) se muestra en la Figura 4.4.1.

Figura 4.4.1. Ejemplo de respuesta correcta

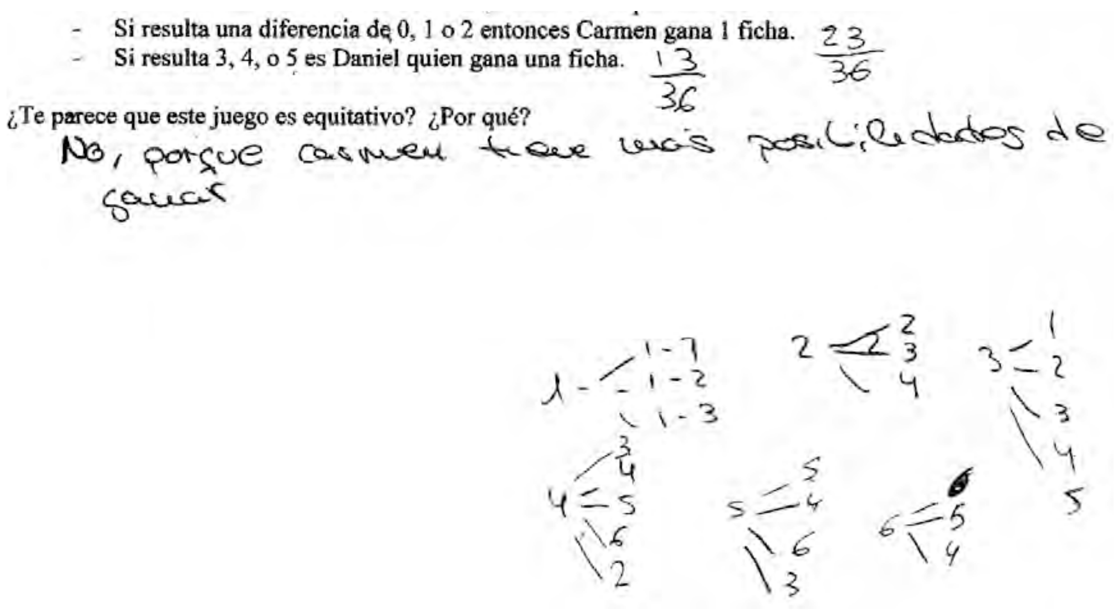


El argumento “Carmen tiene más posibilidades” (36%), ha sido utilizado por los 102 futuros profesores que han respondido de forma parcialmente correcta, ya que indican que el juego no es equitativo, pero no fueron capaces de concretar las posibilidades a favor o en contra de cada uno de los jugadores. Entre ellos distinguimos cinco grupos.

Grupo 1. Estudiantes que indican que el juego no es equitativo, porque Carmen tiene más posibilidades sin realizar ningún cálculo de probabilidades. Está formado por 50 futuros profesores. Un ejemplo es el siguiente, que afirma que "*No (es equitativo), porque Carmen tiene más posibilidades de ganar una ficha*" (alumno 216).

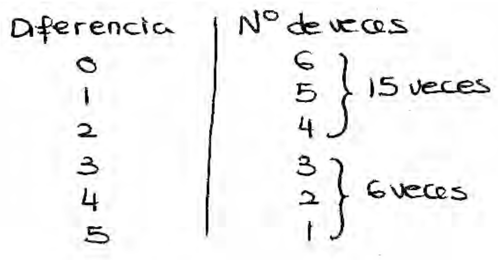
Grupo 2. Estudiantes que indican que el juego no es equitativo, ya que Carmen tiene más probabilidades pero, aunque identifican los casos posibles, tienen error en los cálculos. Está formado por 18 futuros profesores. Un ejemplo (alumno 28) se presenta en la figura 4.4.2. El alumno ha utilizado el diagrama de árbol para enumerar el espacio muestral, pero su falta de capacidad combinatoria le hace llegar a una enumeración incompleta. Por otro lado, la solución aportada es también incorrecta porque la suma de dos sucesos complementarios no es igual a la unidad, hecho que el alumno no percibe.

Figura 4.4.2. Ejemplo de respuesta.



Grupo 3. Estudiantes que indican que el juego no es equitativo, ya que Carmen tiene más probabilidades y cometen un error de orden al identificar los casos posibles. Está formado por 27 futuros profesores. En la figura 4.4.3 se muestra un ejemplo (alumno 265) que considera que las diferencias 0, 1 y 2 con las que juega Carmen se obtendrían 15 veces mientras que las diferencias 3, 4 y 5 se obtendrían 6 veces.

Figura 4.4.3. Ejemplo de respuesta



Grupo 4. Estudiantes que contestan que el juego no es equitativo e indican que Carmen gana a la larga. Está formado por 4 futuros profesores. Se observa una percepción de la convergencia, pero el estudiante no llega a cuantificar las posibilidades de cada jugador. Un ejemplo (alumno 141) es el siguiente: "*No (es equitativo), Carmen tiene ventaja a la larga*".

Grupo 5. Estudiantes que indican que el juego no es equitativo pero no justifican la respuesta. Está formado por 3 futuros profesores, que consideran que el juego no es equitativo pero no explican su respuesta.

En cuanto a los argumentos incorrectos, hay 97 futuros profesores (34.3%) que indican que el juego es equitativo. Entre ellos distinguimos cuatro grupos:

Grupo 1. Indican que el juego es equitativo, mostrando el sesgo de equiprobabilidad. Son 87 futuros profesores que sólo tienen en cuenta los valores de las diferencias (0, 1, 2) frente a (4, 5, 6), asignando a cada una de las diferencias igual probabilidad. Muestran, en consecuencia el sesgo descrito por Lecoutre (1992). Un ejemplo es el siguiente:"*Si (es equitativo), porque los dos tienen las mismas posibilidades de que salgan esas diferencias*" (alumno 166).

Grupo 2. Afirman que el juego es equitativo basando su argumento en que el juego es aleatorio. Está formado por 5 futuros profesores. Un ejemplo es el siguiente: "*Si (es equitativo), porque los números que salgan en los dados salen a suerte, por lo que la diferencia entre ellos también*" (alumno 65).

Grupo 3. Dan otro tipo de respuesta. Está formado por tres futuros profesores. Un ejemplo es el siguiente: "*Sí (es equitativo), porque los dos lanzan a la vez los dados*" (alumno 103).

Grupo 4. Estudiantes que indican que el juego es equitativo y no justifican su respuesta. Dentro de ella hay dos futuros profesores.

En cuanto a los argumentos incorrectos, hay 23 futuros profesores (8%) que indican que el juego no es equitativo. Entre ellos distinguimos dos grupos:

Grupo 1. Afirman que el juego no es equitativo y muestran una incorrecta percepción de la independencia. Hay 13 futuros profesores que aplican la *falacia de jugador*, indicando que Carmen tiene menos posibilidades puesto que es muy difícil que la diferencia sea 0 por la repetición del mismo número en los dos dados. Un ejemplo es el siguiente: "*No (es equitativo), porque hay menos posibilidades de sacar una diferencia de 0, es decir que los dados saquen el mismo número*" (alumno 183).

Grupo 2. Dan otro tipo de respuesta. Está formado por diez futuros profesores que aportan justificaciones diversas. Un ejemplo es el siguiente: "*No es equitativo porque tiene los resultados consecutivos para enumerar todos los sucesos vos tendrían que repartirse los números para que lo fuera*"(alumno 131). Finalmente los que no contestan es el 23%.

Sobre la cuestión de cuántas fichas debe ganar cada jugador para que el juego sea equitativo, hubo diversidad de respuestas que han sido clasificadas y que se presentan en la tabla 4.4.3.7.

Tabla 4.4.3.7. Resultados en el problema 9

	Futuros profesores (n=283)	
	Frecuencia	Porcentaje
Carmen 1 y Daniel 2 (*)	32	11.3
El mismo número	57	20.1
Daniel más fichas	26	9.2
Carmen más fichas	17	6.0
Otras	14	4.9
No contesta	137	48.4

(*) Respuesta correcta

En ella observamos que la categoría “Carmen 1 Daniel 2” (11.3%), donde hemos incluido a los futuros profesores que han respondido correctamente, indicando que el juego no es equitativo ya que Carmen tiene el doble de probabilidad de ganar el juego que Daniel, ha sido escasamente utilizada. Un ejemplo es la respuesta siguiente: “*Carmen una ficha y Daniel 2*” (alumno 21).

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría “Carmen y Daniel deben recibir el mismo número de fichas” (20.1%), donde están los futuros profesores que consideran que el juego es equitativo y por tanto Carmen y Daniel deben tener la misma ganancia. Un ejemplo es la respuesta siguiente: “*Sí, porque los dos juegan por igual y ganan lo mismo una ficha*” (alumno 53).

En la categoría “Daniel debe ganar más fichas” (26 futuros profesores, 9.2%), hemos incluido los futuros profesores que consideran que Daniel debe ganar más fichas porque tiene menos posibilidades.

- Carmen 2 y Daniel 5 fichas (6 alumnos): “*Carmen debería ganar 2 fichas y Daniel*

5 fichas (en proporción a sus probabilidades)" (alumno 11).

- Carmen 1 y Daniel 10 fichas (3 alumnos): "*Si Carmen gana 1 Daniel ganaría 10 porque Carmen tiene 10 veces más probabilidad de ganar (árbol de resultados)*". (alumno 28).
- Carmen 6 y Daniel 15 fichas (2 alumnos): "*Probabilidad de Carmen es 15/21; probabilidad de Daniel es 6/21 -> Cada vez que gane Carmen ganará 6 fichas y cada vez que gane Daniel ganará 15. (Resultados de las diferencias 1-1=0, 2-1=1, 2-2=0,…)*". (alumno 93).
- Carmen 2 fichas y Daniel 3 fichas (1 alumno): "*Para que el juego sea equitativo Carmen debería ganar 2 fichas por cada resultado (0,1,2); mientras que Daniel debe ganar 3 fichas por los resultados posibles ((3,4)*". (alumno 7).
- Carmen 1 ficha y Daniel 5 fichas (1 alumno): "*Carmen 1, Daniel 5*". (alumno 153).

En la categoría "Carmen debe ganar más fichas" (17 futuros profesores, 6.0%), hemos incluido los futuros profesores que consideran que Carmen debe ganar más fichas porque tiene menos posibilidades.

- Carmen 2 fichas y Daniel 1 ficha (13 alumnos): "*Carmen deberá ganar 2 fichas y Dani 1*" (alumno 1).
- Carmen 3 fichas y Daniel 2 fichas (1 alumno): "*3 fichas Carmen y 2 Daniel*". (alumno 191).
- Carmen 30 y Daniel 8 fichas (1 alumno): "*Daniel tendrá que ganar 8 fichas si acierta y Carmen 30*". (alumno 286).
- Carmen 15 y Daniel 6 (1 alumno): "*Pues Carmen deberá ganar 15 y Daniel 6 de esta manera el juego será equitativo*". (alumno 284).

En la categoría "Otras" (14 futuros profesores, 4.9%), hemos incluido los futuros profesores que responden de forma incorrecta contestando que cada uno de los jugadores deben recibir diferentes números de fichas para que el juego sea equitativo.

- No cuantifican el número de fichas: "*Pienso que las que se establezcan en el juego ya que no creo que deba de haber un número establecido de fichas para que el* *juego fuese equitativo*", o el alumno 183 "*Carmen debería ganar más fichas*" (alumno 2).

- No lo sé (3 alumnos): "*No lo sé, porque pienso que el juego es equitativo ya que están en la misma situación, ganando lo mismo y con la misma probabilidad*".
- Ninguna (2 alumnos): "*Ninguna*" (alumno 249).
- Diferencia 0 (2 alumnos): "*Para que fuese justo la diferencia 0 tendría que salir el mismo número de veces que la 3. Pero la diferencia 0 sale 6 veces más y la 3 solo 3 veces*" (alumno 163).

Por tanto, en este problema han respondido de forma correcta que el juego no es equitativo el 41.7% de los futuros profesores, pero han justificado esta respuesta de forma correcta o parcialmente correcta solo el 37%. Sobre la cuestión de cuántas fichas debe ganar cada jugador para que el juego sea equitativo, sólo el 11% de los futuros profesores ha respondido de forma correcta, aportando el resto una gran variedad de respuestas incorrectas.

En resumen, los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los futuros profesores posee un conocimiento común suficiente del contenido en relación al juego equitativo, ya que el 69% de los participantes clasifica correctamente el juego descrito en el problema 4 y el 79.2% es capaz de encontrar el valor del premio necesario para transformar en equitativo el juego descrito en el problema 5, aplicando correctamente la idea de esperanza matemática de la cantidad a ganar. Sin embargo, este conocimiento no parece ser consistente, ya que en el problema 9, el 57% de los futuros profesores manifiesta una incorrecta percepción de la equitatividad del juego, como en la investigación de Azcárate (1995), pero en una proporción muy superior, y solo el 11% es capaz de estimar cuanto debe ganar cada jugador para que el juego sea equitativo.

En los dos primeros problemas los resultados obtenidos son similares a los de Azcárate (1995), pero en el problema 9 son peores. Esto último puede ser debido a que el juego propuesto dificultó la tarea, en la que muchos participantes fallaron debido, no a falta de comprensión de la idea de juego equitativo, sino a falta de razonamiento combinatorio, que les ha impedido, a pesar de ayudarse con el diagrama del árbol, realizar una enumeración completa del espacio muestral, que confirma los resultados de la investigación de Azcárate (1995).

Asimismo las estrategias utilizadas para comparar probabilidades, con el objetivo de decidir si el juego es o no equitativo, han sido en su mayoría correctas en los problemas 4 y 5, confirmando los resultados de Ortiz y cols. (2006) pues predominan las estrategias de correspondencia o multiplicativas (68.2% en el problema 4 y 76.7% en el problema 5). Sin embargo en el problema 9 este porcentaje se reduce al 37%.

No obstante, hay errores, respuestas incompletas o no respuestas, en los tres problemas. En el problema 4, alrededor de un 24% de futuros profesores llega a la conclusión de que el juego no es equitativo al aplicar estrategias incorrectas en la comparación de probabilidades, propias de niños en las etapas pre-operacional y concreta según Piaget e Inhelder (1951) y que serían improcedentes en estos problemas. En otros casos se obtiene la conclusión de que el juego es equitativo basándose en aspectos irrelevantes de la tarea, similares a los usados por niños en la investigación de Watson y Collis (1995) o en la de Cañizares y cols. (1999).

En el problema 5, aunque algunos futuros profesores calculan correctamente las probabilidades, estiman el valor del premio en función del número de casos posibles, y no de la probabilidad de ganar (4.9%); comparan las probabilidades de ganar los dos jugadores sin llegar a establecer el premio (2.8%); o asignan el mismo premio, o un valor no relacionado con la probabilidad a los dos jugadores (6.4%).

En el problema 9, el error identificado con más frecuencia ha sido el sesgo de equiprobabilidad, que coincide con los resultados obtenidos en investigaciones previas con futuros profesores, aunque en un caso resolviendo problemas de comparación de probabilidades (Ortiz y cols., 2006) y en otro trabajando mediante proyectos estadísticos (Batanero y cols., 2010). Otros errores encontrados han sido la realización incorrecta de los cálculos de la probabilidad, el sesgo conocido como la falacia del jugador y los que han basado su respuesta en que el juego es aleatorio. Destaca también el hecho de que casi la cuarta parte de los futuros profesores no contesta a la cuestión sobre la equitatividad del juego y casi la mitad no es capaz de responder sobre cuántas bolas debe ganar cada jugador para que el juego sea equitativo.

4.4.4. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES SIMPLES

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria en los problemas 6, 8 y 11 sobre la asignación de probabilidades en situaciones contextuales diferentes.

PROBLEMA 6

Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña ___

(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño ___

(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña ___

(D) No lo sé ___

¿Por qué?

En este problema se trata de realizar una asignación de las probabilidades en un experimento, cuyo espacio muestral consta de dos sucesos simples que no son equiprobables y responder cuál de los dos sucesos simples es más probable. Como observamos en la tabla 4.4.4.1, el porcentaje 89.4% de los futuros profesores eligió la opción correcta B "Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño", lo que indica que no fue muy complicado.

Entre las respuestas incorrectas hay un 5.7% de futuros profesores que elije el distractor C "Es igual de probable que sea un niño que una niña", manifestando el sesgo de equiprobabilidad. Dado que en esta cuestión no era necesario comparar fracciones, sino que bastaba con una simple comparación absoluta del número de niñas y el de niños, consideramos que la notable incidencia de este tipo de respuesta (C) es debida a una incorrecta asociación intuitiva entre aleatoriedad y equiprobabilidad, por la cual algunos estudiantes sostienen que el hecho de que un resultado sea impredecible equivale a que todos los sucesos implicados tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Este sesgo ha sido descrito por Lecoutre (1992). Los datos apuntan a que dicho sesgo, aunque mejora con la edad, parece ser que se mantiene bastante estable como lo muestra el porcentaje de futuros profesores que sostiene que ambos sucesos son equiprobables.

El 3.9% de los futuros profesores elige la opción A "Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña".

Tabla 4.4.4.1. Resultados en el problema 6

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
A	11	3.9	4	2.8
B (*)	253	89.4	91	63.6
C	16	5.7	41	28.7
D	1	0.4	6	4.2
No contesta	2	0.7	1	0.7

(*) Respuesta correcta

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que los futuros profesores han obtenido un porcentaje mucho mayor de respuestas correctas y que la incidencia del sesgo de equiprobabilidad (distractor C) es mayor entre los niños.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.4.2.

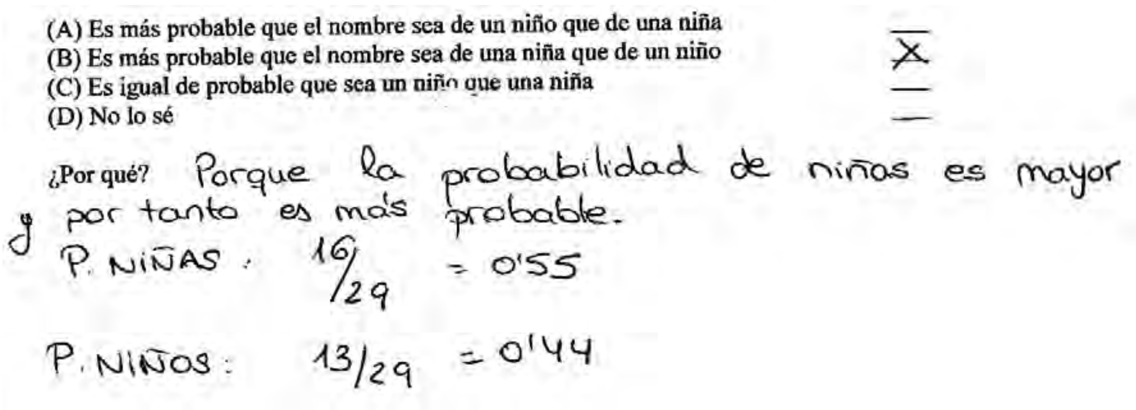
Tabla 4.4.4.2. Argumentos utilizados en el problema 6

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Hay más niñas que niños (*)	198	70.0	96	67.4
La probabilidad de niña es mayor (*)	59	20.8	0	0
Azar/suerte	13	4.6	33	23.2
Hay más niños	1	0.4	6	4.1
Otros	4	1.4	6	4.5
Ambigua	3	1.1	0	0
No contesta	5	1.8	1	0.8

(*) Argumento correcto

En ella observamos que la justificación mayoritaria proporcionada por ellos es la correcta "Hay más niñas que niños" (70.0%). Un ejemplo es el siguiente: "*Es más probable que salga el nombre de una niña porque no están en igualdad de número respecto a los niños. Hay más niñas, con lo cual, es más fácil que salga el nombre de alguna de ellas*" (alumno 106).

Hay un 20.8% que argumenta que "La probabilidad de niña es mayor", basando su justificación en la regla de Laplace que no es adecuada ya que los dos sucesos que forman el espacio muestral no son equiprobables. Un ejemplo es el siguiente: "*Porque la probabilidad de niñas es mayor y por tanto es más probable. P(niñas)=16/29=0.55 y P(niños)=13/29=0.44*" (alumno 2).


(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña __
(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño X
(C) Es igual de probable que sea un niño que una niña __
(D) No lo sé __

¿Por qué? Porque la probabilidad de niñas es mayor y por tanto es más probable.
P. NIÑAS: 16/29 = 0'55
P. NIÑOS: 13/29 = 0'44

Sin embargo hay un importante porcentaje de futuros profesores que considera que es "Azar/suerte" (4.6%). Un ejemplo es el siguiente: "*Porque es algo al azar*" (alumno 103).

Otro tipo de argumentos ha sido utilizado por un 1.4% de los futuros profesores, como por ejemplo: "*Porque al hacer la probabilidad de este problema, hay 8 posibilidades de que salga niña mientras que hay 6.1 posibilidades de que sea niño*" (alumno 13); o ha aportado un argumento ambiguo 1.1%, como por ejemplo: "*Hay más probabilidad de que salga el nombre de una niña, pero esto no quiere decir que vaya a salir, hay más probabilidad, pero no decide nada*" (alumno 75). Por último el 1.8% de futuros profesores no contesta.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que el porcentaje del argumento correcto "Hay más niñas que niños" es algo superior en los futuros profesores y que la regla de Laplace no es utilizada por ningún alumno (10-14 años), lo que se puede considerar lógico, ya que, o no la conocen, o la han tratado de forma superficial.

PROBLEMA 8

Dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas: Caja G: 12 negras y 4 blancas. Caja H: 20 negras y 10 blancas. ¿Qué caja da mayor posibilidad de sacar una ficha negra?

(A) La misma posibilidad ___
(B) Caja G ___
(C) Caja H ___
(D) No lo sé ___

¿Por qué?

En el problema 8 proponemos al futuro profesor que decida cual, entre dos urnas dadas, ofrece mayor probabilidad de obtener una ficha negra. Puesto que en la situación dada puede aplicarse el principio de indeferencia, y no disponemos de información de tipo frecuencial, se puede aplicar la regla de Laplace. Además de esta estrategia, que podemos considerar como normativa, este problema de comparación del tipo IIIA2 (términos múltiplos en las fracciones) en la clasificación de Noelting (1980 a y b), puede resolverse con una estrategia de correspondencia, que consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarla a la otra, y nos permite decidir sin comparar fracciones. En la tabla 4.4.4.3, se observa que el 77% de los futuros profesores responden correctamente.

Tabla 4.4.4.3. Resultados en el problema 8

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
A	13	4.6	17	12
B (*)	218	77.0	87	60.6
C	47	16.6	36	25.5
D	4	1.4	2	1.6
No contesta	1	0.4	1	0.3

(*) Respuesta correcta

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la opción C “La caja H: 20 negras y 10 blancas” (16.6%). La mayor dificultad de este problema se encuentra en que aunque existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables, la proporción no es la misma en cada urna. Aunque los futuros profesores son conscientes de esta falta de equivalencia, el 16.6% elige esta opción, considerando que en la caja H hay más probabilidad de obtener una ficha negra, ya que hay mayor cantidad absoluta de casos favorables o mayor diferencia entre casos favorables y desfavorables.

Menor es el porcentaje de futuros profesores que eligió la opción A "La misma posibilidad" (4.6%), al considerar que en las dos cajas hay la misma posibilidad de obtener ficha negra. Este grupo de estudiantes consideran que en cada una de las cajas el número de casos favorables supera de forma considerable al número de casos desfavorables, porque en las dos cajas hay la misma posibilidad de sacar una bola negra.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que los futuros profesores han obtenido un porcentaje mucho mayor de respuestas correctas, un 77.0% frente un 60.6%, y que la incidencia del distractor C, hay mayor número de casos favorables, es mayor entre los niños.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.4.4. Se analizan estas estrategias usando la clasificación de Piaget e Inhelder (1951).

A1) Comparación del número de casos posibles: Consiste en elegir la caja que contenga mayor número de bolas. Esta estrategia es utilizada por el 1.8% de los futuros profesores genera una respuesta incorrecta, como por ejemplo: "*Porque tiene más bolas todo lo contrario a la caja G que tiene la mitad y quien sacaría más? Pues la ley del mayor. La caja H*" (alumno 116).

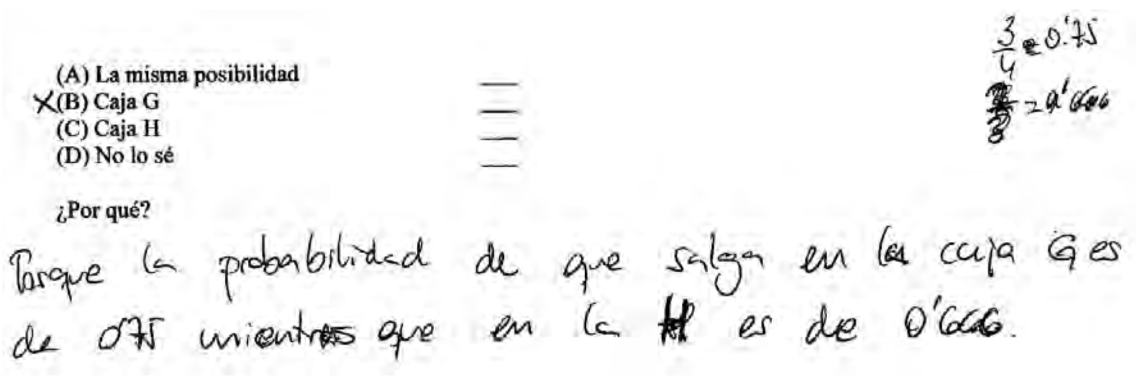
A2) Comparación del número de casos favorables: Es la estrategia más simple, ya que de los cuatro datos proporcionados en el problema, sólo se comparan dos. Esta estrategia utilizada por el 14.5% de los futuros profesores también genera respuestas incorrectas. Un ejemplo es el siguiente: (la caja H) "*Porque tiene más fichas negras*" (alumno 147).

A3) Comparación del número de casos desfavorables: Cuando, una vez intentada la anterior, existe igualdad de casos favorables, los sujetos centran su atención sobre el número de casos desfavorables. Usada por el 7.1% de los futuros profesores, porcentaje prácticamente igual que el de los niños en la investigación de Cañizares (1997), también genera respuestas incorrectas. Un ejemplo es el siguiente: (la caja G) "*Contiene menos* *fichas blancas en relación con las negras*" (alumno 81).

A4) Estrategias aditivas: Los alumnos que utilizan esta estrategia tienen en cuenta los casos favorables, los desfavorables y los posibles, simultáneamente, pero gestionan los datos por medio de alguna operación aditiva para poder establecer la comparación. Esta estrategia utilizada por el 1.8% de los futuros profesores, no se considera pertinente. Un ejemplo es el siguiente: (la caja G) "*Porque en la caja G la diferencia entre blancas y negras es de 8 y en la H es de 10*" (alumno 72).

*A5) Estrategia de correspondencia: C*onsiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra. Piaget e Inhelder (1951) afirman que, a falta de un cálculo de fracciones, el sujeto determina las dobles relaciones por un sistema de correspondencias cuando las proporciones o desproporciones no aparecen como inmediatas. Esta estrategia utilizada por el 42.4% de los futuros profesores la hemos considerado pertinente para resolver este problema, como por ejemplo: "*Sería la G ya que hay tres veces más bolas negras que blanca, mientras que la caja H tiene solo el doble de negras que de blanca*" (alumno 269).

A6) Estrategias multiplicativas: Esta estrategia, desarrollada, según Piaget e Inhelder (1951) en el período de las operaciones formales, es la más elaborada y requiere del dominio del cálculo con fracciones. Esta estrategia, que resuelve con éxito este problema, ha sido utilizada por el 25.4% de los futuros profesores y prácticamente por ningún alumno (10-14 años) como ocurría en el problema anterior. Un ejemplo es el siguiente: "*Porque la probabilidad de que salga en la caja G es de 0,75 mientras que en la H es de 0,666*" (alumno 6).


(A) La misma posibilidad
X(B) Caja G
(C) Caja H
(D) No lo sé

¿Por qué?

Porque la probabilidad de que salga en la caja G es de 0'75 mientras que en la H es de 0'666.

A7) Otros tipos (5.7%): por ejemplo, hacer referencia a la suerte o fijarse en la posición de las bolas en el dibujo o utilizar cualquier otro procedimiento. Un ejemplo es el siguiente: "*Porque aunque una caja tiene más fichas que otras, el número que hay de fichas negras y blancas en cada caja son adaptados entre el número de fichas, es decir al haber menor número de fichas negras hay menos fichas blancas, al mayor número de fichas negra hay mayor número de blancas respecto a la otra caja*" (alumno 110).

Tabla 4.4.4.4. Argumentos utilizados en el problema 8

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Casos posibles	5	1.8	10	7.0
Comparación absoluta de casos favorables	41	14.5	39	27.3
Comparación absoluta de casos desfavorables	20	7.1	16	11.2
Estrategia aditiva (Diferencia n – b)	5	1.8	30	21.0
Correspondencia (*)	120	42.4	9	6.3
Estrategia multiplicativa (*)	72	25.4	1	0.7
Otros (idea azar, suerte,…)	16	5.7	30	21.0
No sabe/ no contesta	4	1.4	8	5.6

(*) Estrategia pertinente o correcta

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que los futuros profesores usan más estrategias correctas, en general multiplicativas y correspondencias, lo cual corresponde a mayor razonamiento proporcional. Sin embargo todavía hay un porcentaje importante de ellos que utilizan estrategias erróneas de comparación absoluta de casos favorables o desfavorables y estrategias aditivas.

PROBLEMA 11

La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número. ¿Con qué disco es más fácil obtener un 3? Señala la respuesta correcta:

(ROJO) (AZUL)

(A) Es más fácil obtener 3 en el disco rojo.............................. ___

(B) Es más fácil obtener 3 en el disco azul.............................. ___

(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3. ..... ___

(D) No lo sé.. ___

¿Por qué eliges esa respuesta?

Teniendo en cuenta la influencia del contexto en las estrategias utilizadas por los futuros profesores (Singer y Resnick, 1992; Maury, 1984), para resolver problemas de comparación, tanto de fracciones como de probabilidades, hemos seleccionado el problema 11 similar a los dos anteriores, pero en contexto de ruleta seccionada, con el fin de comprobar la estabilidad de las estrategias utilizadas por los futuros profesores y la posible influencia del contexto (discreto o continuo) en sus argumentos. Mientras que los contextos de los dos problemas anteriores, de alumnos en una clase o de urnas con diferente composición de bolas blancas y negras, para la comparación de probabilidades, evocarían una comparación del tipo parte-parte (o casos favorables vs casos desfavorables), el contexto de este problema con ruletas con sectores numerados, inducirían a un tipo de comparación parte-todo, y por tanto a la aplicación de la regla de Laplace.

En este problema, se trata por tanto de comprobar la estabilidad de las estrategias utilizadas y la posible influencia del contexto. Como se observa en la tabla 4.4.4.5, el 85.2% de los futuros profesores elige la respuesta correcta, lo que indica que no fue muy complicado.

Tabla 4.4.4.5. Resultados en el problema 11

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=251)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
A	4	1.4	8	3,2
B (*)	241	85.2	194	77,3
C	25	8.8	49	19,5
D	6	2.1	0	0
No contesta	7	2.5	0	0

(*) Respuesta correcta

Entre las respuestas incorrectas destaca un significativo porcentaje de futuros profesores (8.8%), que eligen la respuesta C "Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3", que manifiestan el sesgo de equiprobabilidad.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), se observa que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es bastante mejor y que han tenido menor incidencia los distractores A y C.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.4.6.

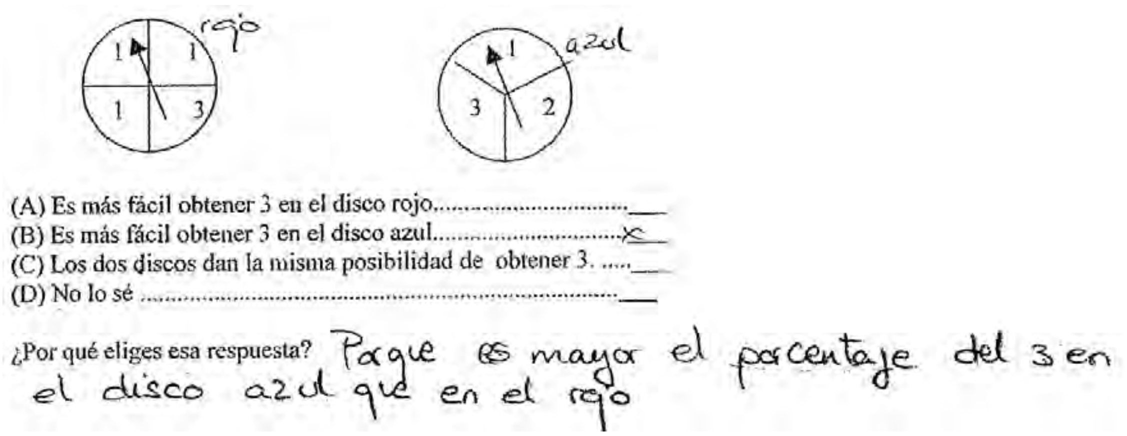
Tabla 4.4.4.6. Argumentos utilizados en el problema 11

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=251)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Concepto de área (*)	112	39.5	124	49,4
Regla de Laplace (*)	86	30.4	0	0
Recuento secciones (*)	41	14.5	58	23,1
Concepto de razón (*)	0	0	8	3,2
Otros	33	11.7	53	21,1
No contesta	11	3.9	8	3,2

(*) Argumento correcto

En ella observamos que un 84.4% de los futuros profesores apoya su respuesta correcta con un argumento adecuado. Entre ellos aparecen justificaciones basadas en los conceptos de área, indicando que *"el espacio o tamaño del 3 en el disco azul es más grande"*, la utilización de la regla de Laplace o el recuento de sectores de las ruletas.

El argumento más utilizado “Concepto de área” (39.5%), ha sido empleado por los futuros profesores que basan su respuesta en el espacio que ocupa el 3 en un disco y en el otro. Un ejemplo es el siguiente: “*Porque es mayor el porcentaje del 3 en el disco azul que en el rojo*” (alumno 74),



Seguida del argumento “Regla de Laplace” (30.4%), que ha sido utilizado por los futuros profesores que basan su respuesta considerando los casos favorables y los casos posibles. Un ejemplo es el siguiente: “*Porque el rojo tiene una probabilidad de 1/4 y el azul de 1/3*” (alumno 83);

El argumento “Recuento de secciones” (14.5%), ha sido utilizado por los futuros profesores que basan su respuesta haciendo referencia al número de secciones de las ruletas. Un ejemplo es el siguiente: “*Yo creo que es más fácil obtener un 3 con el disco azul porque hay menos números que en el disco rojo*” (alumno 56).

En la categoría “Otros” (11.7%), hemos incluido 7.1% de argumentos diversos, como por ejemplo: “*Porque la aguja está más cerca del 3*” (alumno 96); y argumentos relacionados con la idea de suerte (4.6%), como por ejemplo: “*Pues porque al tirar fuete la ruleta nunca se sabría donde quedaría. Es cuestión de azar*” (alumno 101). Por último, los que no contestan representan el 3.9%.

Si comparamos estos resultados con los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que la regla de Laplace sólo es utilizada por los futuros profesores mientras que los niños (10-14 años) no lo hacen. Los argumentos basados en áreas y en el recuento de secciones son menos utilizados más por los niños de 10 a 14 años que por los futuros profesores.

El problema de urnas permite, más que las ruletas, poner en evidencia varias concepciones espontáneas de probabilidad en el mismo sujeto. La variable contexto, discreto o continuo, observamos que ha influido cuando comparamos los resultados del problema 8 (urna con bolas) y del problema 11 (ruletas), siendo mayor el porcentaje de respuestas correctas en este último caso, en ambos grupos. Con respecto a los argumentos pertinentes, el área solo aparece en el contexto de ruletas, mientras que la regla de Laplace y casos favorables/casos desfavorables, son utilizados en ambos contextos, aunque la regla de Laplace es más utilizada en los contextos de ruletas, y el último es utilizado mayoritariamente en los contextos de bolas. Esto se explica como consecuencia de que la ruleta, favorece el establecimiento de las relaciones parte-todo (o regla de Laplace), mientras que en los contextos de bolas se favorece el establecimiento de relaciones parte-parte. En cuanto a los argumentos no pertinentes, el contexto tiene aquí también un fuerte impacto, pues el argumento de diferencia que no aparece en el contexto de ruletas, es utilizado para las respuestas incorrectas en contextos de bolas. Esta fuerte influencia del contexto en los argumentos de los estudiantes pone de manifiesto que problemas equivalentes desde el punto de vista probabilístico, no lo son forzosamente en el plano cognitivo.

Los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los futuros profesores posee un conocimiento común suficiente del contenido en relación a la asignación de probabilidades, ya que el porcentaje de respuestas correctas en los tres problemas ha sido muy alto. La incidencia del sesgo de equiprobabilidad ha sido bastante baja, en una proporción muy inferior a los resultados obtenidos por los futuros profesores, participantes en la investigación de Azcárate (1995) de un 56% y de Batanero, Godino y Cañizares (2005) con un 60%, en situaciones relacionadas con contextos de juegos. La presencia de este sesgo en las justificaciones de las respuestas de los futuros profesores, puede ser debida, como indica Azcárate (1995), a que los estudiantes cuantifican la probabilidad de un suceso desde criterios personales sin analizar de forma global el fenómeno.

Estos resultados también son mejores que los obtenidos por futuros profesores de educación primaria en las investigaciones de Contreras (2011) y Estrada y Díaz (2006), quienes encontraron que solo el 65.5% y el 75% respectivamente realizaron correctamente el cálculo de la probabilidad simple pedida, aunque en estos dos últimos casos la tarea consistía en el cálculo de dicha probabilidad a partir de los datos facilitados en una tabla de doble entrada, lo que ha se ha podido convertir en un elemento de dificultad para los estudiantes al no estar familiarizados con este tipo de enunciados.

El error más frecuente ha sido la utilización de estrategias incorrectas por el 23% de los futuros profesores en el problema 8. Entre los argumentos utilizados en los problemas 6 y 8 aparece la idea de azar, pero en proporción mucho menor que en la investigación de Azcárate (1995).

4.4.5. PROBABILIDAD CONDICIONAL

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria en el problema 7, sobre el concepto de probabilidad condicional.

PROBLEMA 7

En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se mezclan. Se sacan tres bolas fuera resultando, 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores. ¿De qué color es más probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad ___
(B) El azul tiene mayor probabilidad ___
(C) El verde tiene mayor probabilidad ___
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad ___
(E) No lo sé ___

¿Por qué?

En el problema 7 se estudia si los futuros profesores reconocen la probabilidad condicional y son conscientes del muestreo sin reemplazamiento. En la tabla 4.4.5.1, se observa que el 88.7% de los futuros profesores ha elegido la respuesta correcta (B) “El azul tiene mayor probabilidad” (88.7%), lo que indica que no fue muy complicado.

Tabla 4.4.5.1. Resultados en el problema 7

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
A	4	1.4	5	3.5
B (*)	251	88.7	86	60.1
C	1	0.4	6	4.2
D	16	5.7	38	26.6
E	7	2.5	6	4.2
Más de una opción	4	1.4	2	1.4

(*) Respuesta correcta

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la opción D “Todos los colores tienen la misma probabilidad” (5.7%), donde están los futuros profesores que manifiestan el sesgo de equiprobabilidad. Con porcentajes menores aparecen la opción A “El rojo tiene mayor probabilidad” (1.4%), y la categoría “Más de una opción” (1.4%), que la destacamos por la presencia de futuros profesores, aunque sean pocos, que eligen en su respuesta más de una opción.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), el porcentaje de respuestas correctas es mayor entre los futuros profesores y el sesgo de equiprobabilidad tiene menor incidencia entre ellos.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.5.2.

Tabla 4.4.5.2. Argumentos utilizados en el problema 7

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Hay más rojas	3	1.1		
Quedan más azules (*)	250	88.3		
La misma probabilidad	10	3.5	12	8.4%
Azar/suerte	7	2.5		
Otro	8	2.8		
No contesta	5	1.8		

(*) Argumento correcto

En ella observamos que un 88.3% de los futuros profesores apoya su respuesta con el argumento adecuado "Quedan más azules", puesto que al realizar la extracción de 3 bolas quedan más bolas azules. Un ejemplo es el siguiente: "*Es más probable que salga el azul, porque de las siete bolas que quedan hay más azules (3) que lo los otros colores*" (alumno 104).

El argumento "La misma probabilidad" (3.5%), ha sido utilizado por los futuros profesores que basan su respuesta en que como hay casi el mismo número de bolas de cada color la probabilidad es la misma. Un ejemplo es el siguiente: "*Porque nos quedarían 2 bolas rojas, 3 azules y 2 verdes. Al suceder esto tendríamos la misma probabilidad de sacar cualquier color ya que el número de cada uno es casi igual*" (alumno 282).

El argumento "Azar/suerte" 2.5% ha sido utilizado por los futuros profesores que basan su respuesta en que no puede saberse porque es un juego aleatorio. Un ejemplo es el siguiente: "*En un principio se dirá que el azul es el de mayor probabilidad, pero lo que también es cierto es que todos los colores puede aparecer por azar, así que tienen la misma probabilidad*" (alumno 101).

El argumento "Hay más rojas" (1.1%), ha sido utilizado por los futuros profesores que basan su respuesta en considerar el resultado en la extracción de las tres primeras bolas. Un ejemplo es el siguiente: "*hay el doble de rojas por lo tanto tienen un 66% de posibilidades de que sea roja frente al 33% de que sea azul*" (alumno 109).

El argumento "Otro" (2.8%), ha sido utilizado por los futuros profesores que basan su respuesta en considerar otros aspectos. Un ejemplo es el siguiente: "*Porque las verdes solo son 2 y aún quedan 5 bolas de los otros colores*" (alumno 118).

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), se observa una mayor variedad de justificaciones entre los futuros profesores. La incidencia del sesgo de equiprobabilidad es inferior a la de los niños, aunque ambos grupos justifican su elección con el argumento de que la diferencia entre las cantidades de bolas es muy pequeña, y por tanto no influye significativamente en la comparación de probabilidades.

Los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los futuros profesores posee un conocimiento común suficiente del contenido en relación a la probabilidad condicional, ya que el porcentaje de respuestas correctas ha sido muy alto del 88%. La incidencia del sesgo de equiprobabilidad ha sido bastante baja, en una proporción muy inferior a los resultados obtenidos por los futuros profesores, participantes en la investigación de Azcárate (1995) de un 56% y de Batanero, Godino y Cañizares (2005) con un 60%, en situaciones relacionadas con contextos de juegos. Estos resultados también son mucho mejores que los obtenidos por futuros profesores de educación primaria en las investigaciones de Contreras (2011) y Estrada y Díaz (2006), quienes encontraron que solo el 43.7% y el 53% respectivamente realizaron correctamente el cálculo de la probabilidad condicional pedida, aunque en estos dos últimos casos la tarea consistía en el cálculo de dicha probabilidad a partir de los datos facilitados en una tabla de doble entrada, que ha podido ser un elemento de dificultad para los estudiantes al no estar familiarizados con este tipo de enunciados.

La comprensión del concepto de probabilidad condicional también ha sido mayor que la de los profesores participantes en la investigación de Carnell (1997), quien mostró que todos ellos poseían conceptos erróneos, como por ejemplo, definir el elemento condicionante, el orden temporal del elemento condicionante y el elemento objetivo, o confundir la condicionalidad con la causalidad. También queda de manifiesto que la mayoría de los futuros profesores participantes en este estudio han sabido diferenciar entre sucesos dependientes e independientes, teniendo en cuenta que la primera extracción de bolas realizada influye en el resultado de la segunda extracción, al contrario que lo ocurrido en la investigación de Zaslavsky, Zaslavsky y Moore (2001), quienes indican que casi el 90% de ellos no entienden la relación entre sucesos independientes y dependientes.

4.4.6. MUESTREO.

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria en el problema 10, sobre el concepto de muestreo.

PROBLEMA 10

La probabilidad de que nazca un varón es 1/2. A lo largo de un año completo habrá más días en los cuales al menos el 60% de los nacimientos corresponden a varones:

(A) En un hospital grande (100 nacimientos al día) ___

(B) En un hospital pequeño (10 nacimientos al día) ___

(C) No hay ninguna diferencia ___

¿Por qué?

En este problema se pretende evaluar si los futuros profesores detectan qué muestra presenta mayor variabilidad, una muestra pequeña o una muestra grande. En la tabla 4.4.6.1, se observa que la respuesta correcta de los futuros profesores alcanza tan sólo el 4.9% (B) "En un hospital pequeño (10 nacimientos al día)", lo que indica que ha sido uno de los de mayor dificultad.

Fue muy alta la proporción de futuros profesores que eligió la opción incorrecta (C) "No hay ninguna diferencia" (64.7%), ya que no tienen en cuenta la influencia del tamaño de la muestra en la variabilidad de los resultados y aplica la heurística de la representatividad al responder que no hay ninguna diferencia.

El 14.1% de los futuros profesores elige la opción incorrecta A "En un hospital grande" (14.1%), donde están los futuros profesores que afirman que esa variabilidad se dará en el hospital grande, donde hay más números de nacimientos.

Por último destacar el alto porcentaje de futuros profesores que elige la opción "No sabe/No contesta" (16.3%).

Tabla 4.4.6.1. Resultados en el problema 10

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=251)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
A	40	14.1	17	6.8
B (*)	14	4.9	17	6.8
C	183	64.7	126	50.2
No contesta	46	16.3	91	36.3

(*) Respuesta correcta

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es algo más bajo y es mayor el porcentaje de los que utilizan la heurística de la representatividad al elegir la opción C "No hay ninguna diferencia".

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.6.2.

Tabla 4.4.6.2. Argumentos utilizados en el problema 10

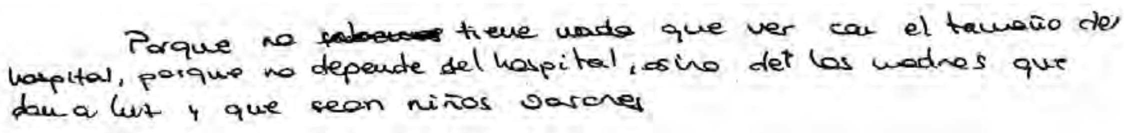
	Futuros profesores (n=283)	
	Frecuencia	Porcentaje
Hospital pequeño, mayor variabilidad (*)	11	3.9
No influye el tamaño de la muestra (heurística representatividad)	159	56.2
En un hospital grande (Concepción errónea de probabilidad)	36	12.7
Otros	16	5.7
No contesta	61	21.6

(*) Argumento correcto

En ella observamos que un 3.9% de los futuros profesores apoya su respuesta correcta con el argumento adecuado "Hospital pequeño, mayor variabilidad", de que en las muestras pequeñas hay mayor variabilidad. Un ejemplo es el siguiente: "*En un hospital pequeño es más fácil, que se dé una proporción un poco diferente, ya que es una muestra pequeña, insuficiente, sólo 10 nacimientos, mientras que en un hospital grande, la proporción de niños y niñas tiende a igualarse en función de la probabilidad. En resumen, es más fácil que nazcan 6 niños y 4 niñas a que nazcan 60 niños y 40 niñas*" (alumno 11), que implícitamente manifiesta un conocimiento del enfoque frecuencial.

El 56.2% de los futuros profesores justifica su respuesta incorrecta con el argumento inadecuado "No influye el tamaño de la muestra", ya que consideran que la variabilidad de nacimientos en ambos hospitales es la misma porque el tamaño de la muestra no tiene influencia, manifestando la heurística de la representatividad (Kahneman y cols., 1982; Benzt y Borovcnik, 1982; Tversky y Kahneman, 1982a), que, como ya indicamos, consiste en calcular la probabilidad de un suceso en base a cómo está representado con respecto a la población de la que proviene. Un ejemplo es el siguiente: "*No hay diferencia, la probabilidad será la misma, sea un hospital grande o* *pequeño*" (alumno 120).

Otro argumento utilizado para justificar la respuesta incorrecta es el siguiente: "*Porque no tiene nada que ver con el tamaño del hospital, porque no depende del hospital, sino de las madres que dan a luz y que sean niños varones*" (alumno 80).


Porque no tiene nada que ver con el tamaño del hospital, porque no depende del hospital, sino del las madres que dan a luz y que sean niños varones

El argumento "En un hospital grande" (12.7%) ha sido utilizado por los futuros profesores que basan su respuesta en la creencia de que hay mayor variabilidad en un hospital grande, manifestando una concepción errónea de la probabilidad. Un ejemplo es el siguiente: "*Porque esa probabilidad es para todo el año y por ejemplo, para toda una ciudad, por lo que en un hospital grande, al haber más nacimientos habrá más posibilidad de que esa probabilidad varía o no, dándose así, ese 60% de nacimientos de varones*" (alumno 10).

En la categoría "Otros" (5.7%), hemos incluido los futuros profesores que manifiestan respuestas diversas, entre las que encontramos la idea de azar, como por ejemplo: "*Porque es cosa del azar, pueden nacer más niñas en un hospital pequeño que en un hospital grande*" (alumno 78). Destaca el alto porcentaje de los futuros profesores que no contesta (21.6%)

Los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los futuros profesores posee un conocimiento común insuficiente del contenido en relación al concepto de muestreo, ya que el porcentaje de respuestas correctas es solo del 4.9%. Este porcentaje es prácticamente la mitad del obtenido por Azcárate (1995), donde el 10.5% de futuros profesores de primaria respondió de forma correcta un problema similar, e indica una gran dificultad con este concepto, que puede ser debida, como indica Watson (2001), a que, en general, tanto los profesores de primaria como los de secundaria no se encuentran cómodos usando el concepto de muestra, ya que supone un grado mayor de incertidumbre para ellos. Además, Watson encontró que el nivel de seguridad de los profesores de primaria, a la hora de enseñar cálculos probabilísticos básicos y muestreo, era más bajo que el de los profesores de secundaria.

La incidencia de la heurística de la representatividad ha sido del 64.7%, proporción ligeramente inferior al resultado obtenido por Azcárate (1995), del 66,7% y algo mayor que el obtenido por Batanero, Cañizares y Godino (2005), del 61%, pero también muy alta y que muestra una falta de comprensión de la convergencia estocástica y una insensibilidad al tamaño de la muestra a la hora de tomar decisiones en situaciones probabilísticas concretas. Un elemento de dificultad, como indica Azcárate, ha podido ser presentar la información dada en términos porcentuales, ya que puede inducir a errores al valorar la información probabilística de naturaleza frecuencial.

4.4.7. PROBABILIDAD FRECUENCIAL

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria en los problemas 12 y 15, sobre el concepto de probabilidad frecuencial.

PROBLEMA 12

Una moneda equilibrada se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. De las siguientes frases, señala la que consideres correcta:

(A) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA ___

(B) La próxima vez es más probable que salga CRUZ ___

(C) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ ___

(D) No lo sé ___

¿Por qué?

En este problema se pretende evaluar si los futuros profesores tienen una adecuada percepción de la independencia en ensayos repetidos en las mismas condiciones, y que han sido descritos en las investigaciones de Truran y Truran (1997). En la tabla 4.4.7.1 se observa que el 85.9% de los futuros profesores ha elegido la opción correcta (C) “La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ”, un porcentaje bastante alto que indica que no ha sido muy complicado.

Tabla 4.4.7.1. Resultados en el problema 12

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=251)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
A	11	3.9	23	9.2
B	18	6.4	16	6.3
C (*)	243	85.9	208	82.9
D	11	3.9	4	1.6

(*) Respuesta correcta

Entre las respuestas incorrectas, aparece la opción B “La próxima vez es más probable que salga CRUZ” (6.4%), donde están los futuros profesores que consideran que al haber salido cinco veces cara, en los sucesivos lanzamientos de una moneda, ahora es más probable que en el siguiente obtengamos cruz, manifestando el sesgo de recencia negativa, debido probablemente a que no manejan adecuadamente el concepto de independencia de sucesos.

Un 3.9% eligió la opción A “La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA”, donde están los futuros profesores que opinan que es más probable que vuelva a salir cara, manifestando el sesgo de recencia positiva.

Como vemos, se han observado los efectos de recencia negativa o positiva, sesgos que han sido descritos en las investigaciones a partir del trabajo de Piaget e Inhelder (1951) y que posteriormente han sido atribuidos a la heurística de representatividad por Khaneman, Slovic y Tversky (1982).

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que el porcentaje de respuestas correctas es bastante similar, y que entre los futuros profesores es menor la proporción que manifiesta el efecto de recencia positiva, lo que puede ser debido a un efecto no deseado de la instrucción.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.7.2.

Tabla 4.4.7.2. Argumentos en el problema 12

	Futuros profesores (n=283)	
	Frecuencia	Porcentaje
Puede salir cualquiera de los dos resultados (*)	211	74.6
Es más difícil que salga cara	19	6.7
Es más fácil que salga cara	12	4.2
Azar/suerte	27	9.5
No sabe/No contesta	14	4.9

(*)Argumento correcto

En ella observamos que 74.6% de los futuros profesores apoya su respuesta correcta con el argumento adecuado "Puede salir cualquiera de los dos resultados", aunque se pueden distinguir dos grupos. El primero, formado por 155 futuros profesores (54.8%) que utiliza una estrategia multiplicativa, calculando la probabilidad de cada uno de los sucesos mediante la aplicación de la regla de Laplace. Un ejemplo es el siguiente: "*La moneda equilibrada P(C)=P(X)=1/2*" (alumno 130). El segundo grupo está constituido por 56 futuros profesores (19.8%) que utiliza el argumento adecuado pero no realiza ningún cálculo. Un ejemplo es el siguiente: "*Porque parte de las mismas posibilidades (1 de 2)*" (alumno 126).

Entre los argumentos incorrectos, destaca "Azar/suerte" (9.5%) que ha sido utilizado por los futuros profesores que apoyan su respuesta haciendo alusión a las ideas de azar o suerte, como por ejemplo: "*Porque se hace de forma azarosa no sistemática*" (alumno 166).

El argumento "Es más difícil que salga cara" (6.7%), ha sido utilizado por los futuros profesores que justifican su respuesta incorrecta en la creencia de que al haber obtenido previamente cinco caras en los lanzamientos previos, es más difícil que vuelva a salir cara. Un ejemplo es el siguiente: "*Porque por un lado creo que si ambas tienen una probabilidad de ½, podía ser cualquiera de las dos, pero de x veces que se lanza, pues entonces diría cruz, porque la cara ya ha agotado posibilidades*" (alumno 180).

El argumento "Es más fácil que salga cara" (4.2%), ha sido utilizado por los futuros profesores que justifican su respuesta incorrecta basándose en los resultados anteriores y consideran que puesto que se han obtenido cinco caras en los lanzamientos previos, ahora es más fácil que salga cara. Un ejemplo es el siguiente: "*Por la racha de caras*" (alumno 141).

PROBLEMA 15

El profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas. Algunas caen con la punta para arriba y otras caen hacia abajo. El resultado fue: ARRIBA = 68; ABAJO = 32. Después el profesor pidió a una niña que repitiera el experimento

De la lista siguiente elige el resultado que tú crees que obtendrá la niña:

(A) ARRIBA = 36; ABAJO = 64 ___

(B) ARRIBA = 63; ABAJO = 37 ___

(C) ARRIBA = 51; ABAJO = 49 ___

(D) Todos los resultados anteriores tienen la misma probabilidad ___

¿Por qué?

Este problema ha sido otro de los propuestos a los futuros profesores para evaluar su conocimiento sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad. En él se pide comparar probabilidades binomiales en el experimento, disponiendo para ello de una estimación de probabilidad a priori de tipo frecuencial, ya que en este caso no se puede aplicar el principio de indiferencia.

Las respuestas de los futuros profesores se han clasificado en las categorías que aparecen en la tabla 4.4.7.3. En ella se observa que el porcentaje de respuestas correctas de los futuros profesores ha sido del 30.7%, lo que indica que ha sido más complicado que el problema 12.

Tabla 4.4.7.3. Resultados en el problema 15

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=251)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
A	4	1.4	17	6.6
B (*)	87	30.7	43	17
C	6	2.1	18	7.2
D todos los resultados tienen la misma probabilidad	166	58.7	166	66.1
No contesta	20	7.1	8	3.1

(*) Respuesta correcta

Entre las respuestas incorrectas, destaca la opción D “Todos los resultados anteriores tienen la misma probabilidad” (58.7%), donde están los futuros profesores que consideran que todos los resultados propuestos tienen la misma probabilidad, no valorando la información proporcionada en el enunciado del problema. Esta insensibilidad hacia las probabilidades a priori de los resultados está considerada por Khaneman, Slovic y Tversky (1982) como una de las causas de la heurística de la representatividad. Con porcentajes menores aparecen las opciones A y C correspondiente a los otros dos resultados propuestos. El 7.1% de futuros profesores no contesta.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), comprobamos que el porcentaje de respuestas correctas ha sido más alto entre los futuros profesores y que el porcentaje de los que manifiestan el sesgo de equiprobabilidad es algo más bajo que entre los niños. Sin embargo el porcentaje de los que no contestan es más alto entre los futuros profesores.

Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.7.4.

Tabla 4.4.7.4. Argumentos en el problema 15

	Futuros profesores (n=283)	
	Frecuencia	Porcentaje
Más frecuente arriba por razones físicas (*)	72	25.4
Basado en el experimento del profesor (*)	14	4.9
La misma probabilidad	91	32.2
Azar/suerte	38	13.4
No contesta	68	24.0

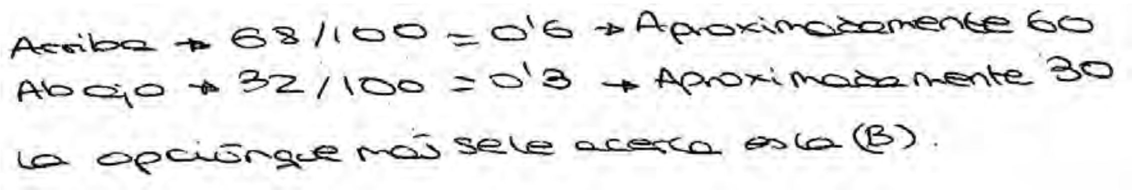
(*) Argumento correcto

En ella observamos que el 30.3% de los futuros profesores apoya su respuesta correcta con argumentos adecuados, aunque se pueden distinguir dos grupos. El primero, formado por 72 futuros profesores que indica que es “Más frecuente arriba por razones físicas” (25.4%), como por ejemplo: “*La chincheta tiene mayor probabilidad de caer con la punta hacia arriba siempre, por lo tanto, pocas chinchetas caerán boca abajo*” (alumno 165). El segundo grupo, formado por 14 profesores, utiliza el argumento “Basado en el experimento del profesor” (4.9%), que si han tenido en cuenta la información aportada en el enunciado del problema. Un ejemplo es el siguiente:

“Arriba → 68/100 = 0’6 → Aproximadamente 60

Abajo → 32/100 = 0’3 → Aproximadamente 30

La opción que más se le acerca es la (B)” (alumno 9).



Entre los argumentos incorrectos, destaca “La misma probabilidad” (32.2%), que ha sido utilizado por los futuros profesores que consideran que los dos sucesos son igual de probables, lo que muestra que no distinguen correctamente entre sucesos equiprobables y no equiprobables. Un ejemplo es el siguiente: “*Porque hay la misma probabilidad que salgan de un lado que de otro*” (alumno 153).

El argumento “Azar/suerte” (13.4%), ha sido utilizado por los futuros profesores que basan su respuesta en la idea de azar o suerte. Un ejemplo es el siguiente: “*Dependerá del azar y no de otra cosa. Así que se pueden dar cualquiera de los casos*” (alumno 182). Es bastante alto el porcentaje de futuros profesores que no aportan ningún argumento (24.0%).

En el problema 12, los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los futuros profesores posee un conocimiento común suficiente del contenido en relación al concepto probabilidad frecuencial, ya que el porcentaje de respuestas correctas es del 85,9% muy superior a los resultados obtenidos por Azcárate (1995), donde los futuros profesores de primaria, en cuatro problemas similares pero en un contexto de previsión del tiempo atmosférico, obtienen porcentajes de respuestas correctas, comprendidos entre el 49% y el 15%. En este último caso hay una mayor variabilidad en los resultados, lo que muestra, según la autora, como va disminuyendo significativamente el peso de la interpretación frecuencial de la información.

Sin embargo en el problema 15, los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los futuros profesores posee un conocimiento común insuficiente del contenido en relación al concepto probabilidad frecuencial, ya que solo el 30% responde de forma correcta. Estos dos resultados tan diferentes parecen indicar que existe cierta inestabilidad en el conocimiento de este concepto por parte de los futuros profesores, ya que los mismos estudiantes ante situaciones en diferentes contextos obtienen resultados muy diferentes.

Por otro lado, coincidimos con Azcárate (1995), en que una mayoría de los futuros profesores presentan dificultades para interpretar la probabilidad frecuencial, y que muchas de sus explicaciones parecen estar condicionadas por razonamientos propios de un pensamiento determinista, donde el objetivo principal es predecir resultados de pruebas aisladas más que en realizar un estudio global del fenómeno, razonamiento que Konold y cols. (1993) lo relaciona con el heurístico "outcome approach". Sin embargo en este estudio los futuros profesores en el problema 12 sí hacen un mayor uso del cálculo probabilístico para justificar sus respuestas.

En el problema 15 el sesgo de equiprobabilidad se ha manifestado en el 58.7%, de los futuros profesores, similar a los resultados obtenidos por Godino, Batanero y Cañizares (2005), donde la incidencia ha sido del 60% de los futuros profesores, y mucho más alto que los obtenidos por Azcárate (1995), donde la incidencia entre los futuros profesores estuvo comprendida entre el 14% y el 24%.

4.4.8. VARIABLE ALEATORIA

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria en el problema 13 sobre el concepto de variable aleatoria.

PROBLEMA 13

En un experimento se lanzan al aire 12 monedas juntas y caen sobre la mesa. Si el experimento se repite muchas veces ¿cuáles de los siguientes resultados ocurren más a menudo?

(A) 2 caras y 10 cruces ___

(B) 6 caras y 6 cruces ___

(C) 4 caras y 8 cruces ___

(D) Todas tienen la misma posibilidad ___

¿Por qué?

Los resultados en este problema se presentan en la tabla 4.4.8.1, donde se observa que la respuesta correcta de los futuros profesores ha sido tan sólo del 11.7%, siendo uno de los de mayor dificultad.

Tabla 4.4.8.1. Resultados en el problema 13

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=251)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
A	0	0	9	3.4
B (*)	33	11.7	11	4.2
C	1	0.4	12	4.6
D	239	84.5	218	86.7
No sabe/No contesta	10	3.5	3	1.1

(*) Respuesta correcta

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la opción D "Todas tienen la misma posibilidad" (84.5%), donde están 153 futuros profesores que manifiestan el sesgo de equiprobabilidad.

Si comparamos estos resultados con los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), se observa que el porcentaje de respuestas correctas de los futuros profesores ha sido algo más alto y que la incidencia del sesgo de equiprobabilidad ha sido alta y similar en los dos grupos

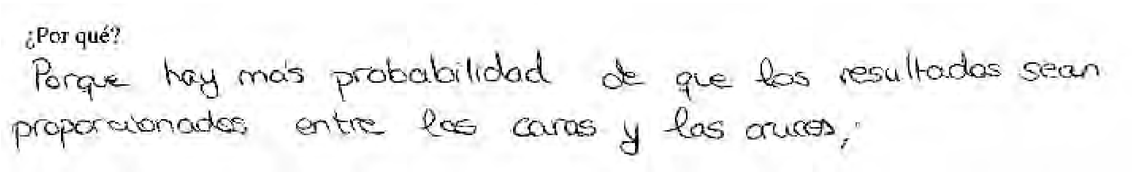
Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.8.2.

Tabla4.4.8.2. Argumentos utilizados en el problema 13

	Futuros profesores (n=283)	
	Frecuencia	Porcentajes
Está equilibrado/proporcionado nº caras y cruces (*)	28	9.9
Todos tienen misma posibilidad	153	54.1
Azar/suerte	47	16.6
Otros	10	3.5
No contesta	45	15.9

(*)Argumento correcto

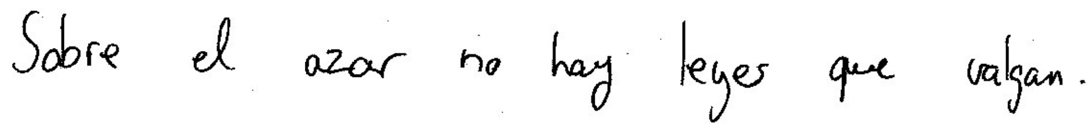
En ella observamos que un 9.9% de los futuros profesores apoya su respuesta correcta con el argumento adecuado "Está equilibrado/proporcionado nº caras y cruces", es decir que implícitamente están utilizando la idea de esperanza matemática al considerar que el resultado correcto es seis caras y seis cruces, ya que la esperanza de obtener cara sería: $E = n*p = 12*0.5= 6$. Un ejemplo es el siguiente: "*Porque hay más probabilidad de los resultados sean proporcionados entre las caras y las cruces*" (alumno 2).


¿Por qué?
Porque hay más probabilidad de que los resultados sean proporcionados entre las caras y las cruces.

Entre los argumentos incorrectos, destaca "Todos tienen la misma posibilidad" (54.1%), que ha sido utilizado por un alto porcentaje de futuros profesores que consideran que al ser un experimento aleatorio todos los resultados son igualmente posibles. Un ejemplo es el siguiente: "*Supongo que al ser siempre la misma cantidad de monedas y cada moneda tiene cara o cruz, se tienen las mismas posibilidades con todas ellas*" (alumno 167).

El argumento "Azar/suerte" (16.6%) ha sido utilizado por un significativo porcentaje de los futuros profesores que justifican su respuesta con las ideas de azar y suerte. Un ejemplo es el siguiente: "*Porque es cuestión de azar*" (alumno 197).

En la categoría "Otros" (3.5%) hemos encuadrado diversos tipos de argumentos, como por ejemplo el siguiente: "*Sobre el azar no hay leyes que valgan*" (alumno 127).


Sobre el azar no hay leyes que valgan.

Destaca el 15.5% de los futuros profesores que no justifican la respuesta aportada.

Los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los futuros profesores posee un conocimiento común insuficiente del contenido en relación al concepto de variable aleatoria, ya que el porcentaje de respuestas correctas ha sido solo del 11.7%. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Lecoutre y Cordier (1990), donde en varios experimentos con estudiantes de diversa edad y preparación, encontraron que incluso los alumnos mayores asumen la equidistribución de la variable aleatoria, en experimentos tan sencillos como el número de caras al lanzar dos monedas. Para corregir esta creencia, Heitele (1975) sugiere que debería presentarse a los estudiantes la distribución normal, donde este principio falla. Quizás una forma de introducir la distribución normal de forma intuitiva a los alumnos de niveles educativos anteriores a la universidad sería por medio de la simulación.

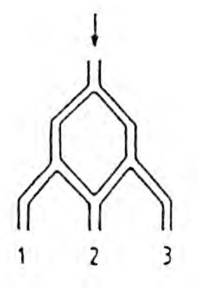
Ninguno de los futuros profesores han aportado una respuesta formal al problema, solo unos pocos, a partir de su experiencia previa, han mostrado tener cierta intuición sobre el valor esperado de éxitos en una distribución binomial, respondiendo de forma correcta. Hemos detectado algunos estudiantes que aplican incorrectamente la regla de Laplace, suponiendo todos los resultados equiprobables, posiblemente por falta de razonamiento combinatorio, mostrando el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988).

4.4.9. PROBABILIDAD COMPUESTA

En este apartado se analizan los resultados obtenidos por los futuros profesores de educación primaria en el problema 14 sobre probabilidad compuesta.

PROBLEMA 14

Supón que dejamos caer muchas bolas en el conjunto de canales dibujado



(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ___

(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por la 1 ó 3 ___

(C) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 y unas pocas por 3 ___

(D) Ninguna de estas ___

¿Por qué?

Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 4.4.9.1, donde se observa que este problema también ha presentado cierta dificultad para los futuros profesores, ya que el porcentaje de respuestas correctas solo ha sido del 36.7%.

Tabla 4.4.9.1. Resultados en el problema 14

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=251)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
A	40	14.1	71	28.1
B (*)	104	36.7	98	38.9
C	50	17.7	56	22.5
D	61	21.6	21	8.2
No contesta	28	9.9	6	2.3

(*) Respuesta correcta

Entre las respuestas incorrectas, destaca la opción C "Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 y unas pocas por 3" (17.7%), donde están los futuros profesores que consideran que casi todas pasarán por el canal dos, pero no cuantifican exactamente la probabilidad. Seguida muy de cerca por la opción A "Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas" (14.1%), donde hemos incluido a los futuros profesores que admiten que por cada canal pasarán idéntico número de bolas. La opción D "Ninguna de estas" (21.6%), donde se encuentran los futuros profesores que consideran que ninguna de las opciones propuestas anteriormente es correcta. Por último destacar el 9.9% de los futuros profesores que no contestan.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los futuros profesores es prácticamente el mismo, siendo algo más bajo los porcentajes de respuestas incorrectas correspondientes a las opciones A y C.

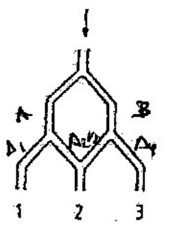
Para comprender mejor los razonamientos, se han clasificado los argumentos utilizados por los futuros profesores que se presentan a continuación en la tabla 4.4.9.2.

Tabla 4.4.9.2. Argumentos utilizados en el problema 14

	Futuros profesores (n=283)	
	Frecuencia	Porcentaje
Por el 2 el doble de bolas que por 1 y 3 (*)	96	34.0
Casi todas por 2 por tener más (o el doble) canales, vías	27	9.5
Los tres tienen la misma posibilidad (probabilidad)	57	20.1
Azar/suerte	10	3.5
Otros	21	7.4
No contesta	72	25.4

(*) Argumento correcto

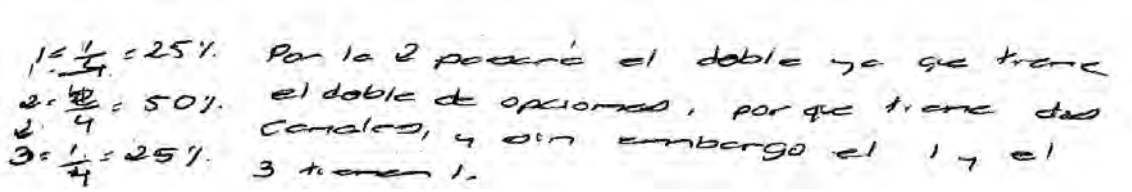
En ella observamos que el 34% de ellos apoya su respuesta correcta con el argumento adecuado "Por el 2 el doble de bolas que por 1 y 3", aunque se pueden distinguir dos grupos diferenciados. El primero, donde están los 80 futuros profesores que justifican su respuesta correcta con un argumento intuitivo, sin realizar ningún cálculo de probabilidad. Un ejemplo es el siguiente: "(Por el 2 el doble de bolas que por 1 y 3). *Recoge bolas de A2 y A3*" (alumno 130).


(A) Por cada canal pasará aproximadamente el mismo número de bolas ....
(B) Por 2 pasarán aproximadamente el doble de bolas que por 1 ó 3 X
(C) Unas pocas pasarán por 1, casi todas por 2 y unas pocas por 3 ....
(D) Ninguna de éstas ....

¿Por qué?

RECOGE BOLAS DE A2 Y A3

El segundo grupo, donde se han incluido los 16 futuros profesores que justifican su respuesta correcta mediante la utilización de la probabilidad compuesta. Un ejemplo es el siguiente: "*1=1/4=25% 2=2/4/50% 3=1/4=25% Por la 2 pasará el doble ya que tiene el doble de opciones, porque tiene dos canales, y sin embargo el 1 y el 3 tienen 1*" (alumno 27).


1= 1/4 = 25% Por la 2 pasará el doble ya que tiene
2= 2/4 = 50% el doble de opciones, porque tiene dos
canales, y sin embargo el 1 y el
3= 1/4 = 25% 3 tienen 1.

Entre los argumentos incorrectos, destaca “Los tres tienen la misma posibilidad (probabilidad)”, que ha sido utilizado por el 20.1% de los futuros profesores, que consideran que los tres canales tienen la misma posibilidad o probabilidad. Un ejemplo es el siguiente: “*todos tienen la misma probabilidad de que pasen las bola por cada uno de ellos*” (alumno 31).

El argumento “Casi todas por 2 por tener más (o el doble) de canales” ha sido utilizado por el 9.5% de los futuros profesores que basan su respuesta en que la mayoría de las bolas van a pasar por el canal 2, debido a que hay más canales. Un ejemplo es el siguiente: “*Hay más posibilidades que pasen por el canal 2, ya que hay dos tubos que se dirigen a ella, mientras que los otros tan sólo uno*” (alumno 52).

En el argumento “Otros” (7.4%) hemos incluido diversas justificaciones, entre las que se destacan las siguientes:

- Más posibilidad por el canal 2 (5 futuros profesores), como por ejemplo: “*En teoría deberían tener los 3 las mismas probabilidades pero pudiera ser que el canal dos por la caída que presenta pueda ejercer sobre la bola una mayor inercia*” (alumno 63).
- Más posibilidades 1 y 3 (8 futuros profesores), como por ejemplo: “*Porque por ahí, por la 1 o 3, es más fácil que lleguen antes las bolas porque recorren menos distancia, en cambio la 2, tiene que pasar aún por el centro*” (alumno 205).
- Ninguna de éstas opciones anteriores (3 futuros profesores), como por ejemplo: “*Porque depende de la velocidad que lleve la bola y demás*” (alumno 204).
- Igual probabilidad de que se repartan por los tres canales o de que salgan todas por el mismo canal (5 futuros profesores), como por ejemplo: “*La probabilidad de que se repartan es la misma de que se vayan todas por el mismo canal*” (alumno 51).

El argumento “Azar/suerte” (3.5%) ha sido utilizado por los futuros profesores que basan su respuesta en la idea de azar o suerte. Un ejemplo es el siguiente: “*Porque* *es cosa del azar y tienen la misma posibilidad, de pasar todos por todos los canales*" (alumno 36). El porcentaje de los futuros profesores que no aportan ningún argumento es muy elevado (25.4%).

Los resultados obtenidos muestran que la mayor parte de los futuros profesores posee un conocimiento común insuficiente del contenido en relación al concepto de probabilidad compuesta, ya que el porcentaje de respuestas correctas ha sido solo del 36.7%. Estos resultados también son peores que los obtenidos por futuros profesores de educación primaria en las investigaciones de Contreras (2011) y Estrada y Díaz (2006), quienes encontraron que solo el 42% y el 55% respectivamente realizaron correctamente el cálculo de la probabilidad compuesta pedida, a pesar de que en estos dos últimos casos la tarea consistía en el cálculo de dicha probabilidad a partir de los datos facilitados en una tabla de doble entrada 2x2, lo que ha se ha podido convertir en un elemento de dificultad para los estudiantes al no estar familiarizados con este tipo de enunciados.

El sesgo de equiprobabilidad se ha presentado en una proporción mucho más baja que en el estudio realizado con profesores en formación por Batanero, Cañizares y Godino (2005). La respuesta A ha constituido un elemento distractor para algunos futuros profesores que han generalizado indebidamente la regla de Laplace. La simetría del dibujo también ha provocado que algunos estudiantes den una respuesta basada en la equiprobabilidad.

4.5. RESULTADOS GLOBALES

Una vez analizados los resultados en los diferentes problemas, se presentan a continuación algunos datos relativos a la valoración global de los resultados. Con este análisis se pretende apreciar el grado de dificultad de los problemas, así como valorar la fiabilidad del cuestionario.

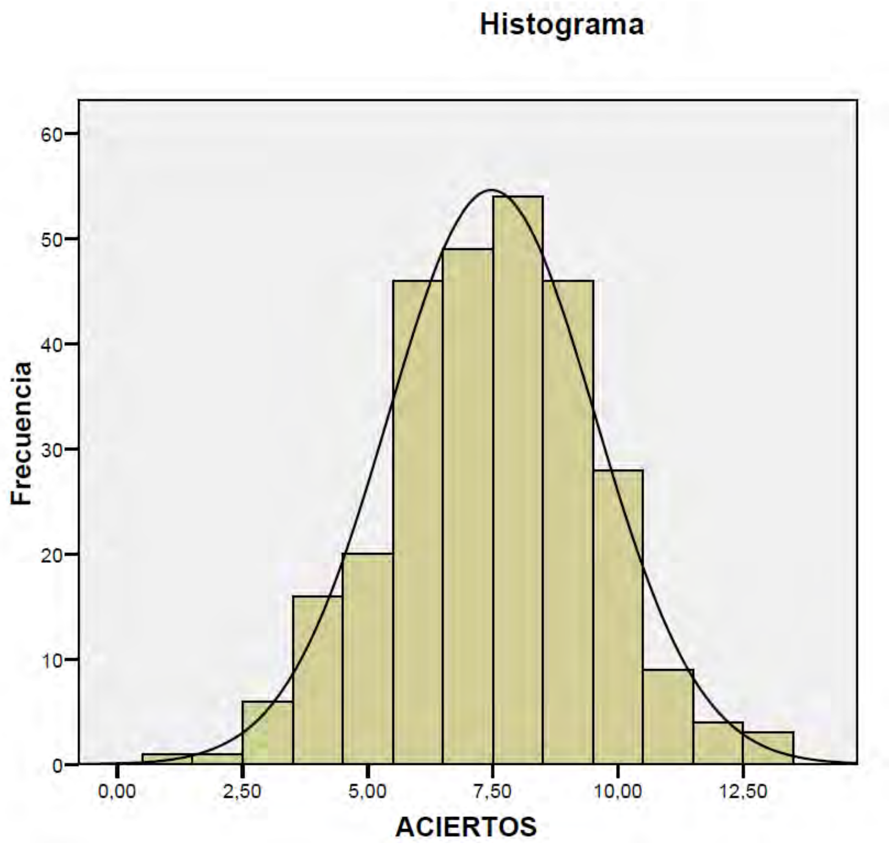
Para ello, en primer lugar, se analiza la puntuación total del cuestionario, presentando seguidamente el índice de dificultad de los problemas y el análisis de la fiabilidad.

4.5.1. PUNTUACIÓN TOTAL DEL CUESTIONARIO

Para realizar el análisis de la puntuación total del cuestionario, teniendo en cuenta que hay problemas abiertos, se han categorizado las respuestas de los futuros profesores en correctas e incorrectas, asignando el valor 1 por cada respuesta correcta y el valor 0 para cada respuesta incorrecta o sin contestar. El cuestionario consta de 15 problemas, lo que significa que la puntuación de cada futuro profesor puede tomar un valor de 0 a 15, debido al número de preguntas con respuestas correctas.

En el histograma de frecuencias (Figura 4.5.1) presentamos los resultados obtenidos por los futuros profesores. Se observa que la puntuación media es de 7.48, y la desviación típica de 2.07. No hay ningún futuro profesor que haya resuelto de forma correcta los 15 problemas.

Figura 4.5.1. Puntuación total en el cuestionario de los futuros profesores



Media = 7.48

Desviación típica = 2.067

N = 283

Teniendo en cuenta que las puntuaciones pueden variar de 0 a 15 valores, la puntuación media es de 7.48 con el intervalo de confianza (7.24, 7.72) que aparece en la tabla 4.5.1, indica que, en general, los futuros profesores presentan grandes dificultades respecto al contenido evaluado, lo que confirma los diferentes tipos de errores analizados en cada uno de los problemas. Hay alumnos que aciertan una sola pregunta y el número máximo de preguntas contestadas correctamente es 13. Los estadísticos descriptivos correspondientes de la tabla 4.5.1 muestran que sólo el 50% de los futuros profesores contesta correctamente la mitad de los problemas formulados, pues el segundo cuartil es ocho, que coincide con el número más frecuente de respuestas correctas.

Tabla 4.5.1. Estadísticos descriptivos de la puntuación total de los futuros profesores

Futuros profesores (n=283)		
Estadísticos		Valor
Media		7.48
Error típico de la media		0,12
Intervalo de confianza para la media al 95%		
	Límite inferior	7,24
	Límite superior	7,72
Mediana		8,00
Moda		8,00
Desviación típica		2,07
Varianza		4,27
Asimetría		-0,09
Error típico de asimetría		0,15
Curtosis		0,07
Error típico de curtosis		0,29
Mínimo		1,00
Máximo		13,00
Suma		2116,00
Percentiles	25	6,00
	50	8,00
	75	9,00

En la tabla 4.5.2 se observa que el número más frecuente de respuestas correctas de los futuros profesores es ocho, con 54 alumnos (19.1%), seguido de siete respuestas correctas con 49 alumnos (17.3%), y 9 y 6 respuestas correctas con 46 alumnos (16.3%) cada una de ellas. Con 10 respuestas correctas hay 28 alumnos (9.9%), con 5 respuestas correctas hay 20 alumnos (7.1%), y con 4 respuestas correctas hay 16 alumnos (5.7%).

Con porcentajes menores 1.1% aparecen los futuros profesores que han obtenido 13 respuestas correctas, un 4.6% los que han obtenido 11 o 12 respuestas correctas y por último un 2.9% los que solo han respondido de forma correcta a 1, 2 o 3 problemas.

No se observa ningún alumno que haya resuelto de forma correcta 14 o 15 problemas.

Tabla 4.5.2. Frecuencia y porcentaje del número de respuestas correctas de futuros profesores

Futuros profesores (n=283)			
Aciertos	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
1	1	0.4	0.4
2	1	0.4	0.7
3	6	2.1	2.8
4	16	5.7	8.5
5	20	7.1	15.5
6	46	16.3	31.8
7	49	17.3	49.1
8	54	19.1	68.2
9	46	16.3	84.5
10	28	9.9	94.3
11	9	3.2	97.5
12	4	1.4	98.9
13	3	1.1	100
Total	283	100	

4.5.2. ANÁLISIS DEL ÍNDICE DE DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS

Para este análisis utilizamos la misma clasificación que para el estudio de la puntuación total del cuestionario. Las respuestas de los alumnos se clasifican en correctas e incorrectas, considerando las respuestas en blanco como incorrectas. Si la respuesta es correcta le asignamos el valor 1, y por el contrario si es incorrecta le asignamos el valor 0.

El índice de dificultad (ID) de un problema, según Muñiz (1994), se corresponde con la proporción de sujetos que lo aciertan de aquellos que han intentado resolverlo (Muñiz, 1994). Cuanto mayor es el índice de dificultad, el problema es más sencillo para los alumnos y no más difícil. De este modo, es posible ver qué problemas han resultado más fáciles o más difíciles.

En la tabla 4.5.3 se presentan los índices de dificultad encontrados en los futuros profesores. En ella observamos que los cuatro problemas de mayor dificultad han sido por este orden:

- problema 10 (ID = 0.05), sobre muestreo, se evalúa si los futuros profesores detectan qué muestra presenta mayor variabilidad, una muestra pequeña o una grande.
- problema 9 (ID = 0.11), sobre juego equitativo, se evalúa si los futuros profesores reconocen la idea de juego equitativo, y que respondan en el caso de que no lo sea la forma en que pueda llegar a ser equitativo.
- problema 13 (ID = 0.12), sobre variable aleatoria, se pide comparar diferentes probabilidades binomiales, y se pretende que a través de su experiencia tengan una intuición sobre el valor esperado de éxitos en una distribución binomial.
- problema 15 (ID = 0.31), sobre probabilidad compuesta, se evalúa el conocimiento que tienen los futuros profesores sobre el enfoque frecuencial de la probabilidad, por medio de un experimento con chinchetas.

Los problemas con una dificultad media han sido:

- problema 14 (ID = 0.37), sobre experimento compuesto, se estudia el conocimiento del futuro profesor en la comparación de probabilidades en experimentos compuestos, en un contexto de canales bifurcados por donde se dejan caer bolas.
- problema 2 (ID = 0.38) y problema 3 (ID = 0.39), sobre aleatoriedad, se estudia si los futuros profesores reconocen la equiprobabilidad.
- problema 1 (ID = 0.46), sobre el concepto de suceso seguro, se estudian los conocimientos de los futuros profesores sobre la noción de espacio muestral.

Tabla 4.5.3. Índice de dificultad y desviación típica

Futuros profesores (n=283)		
PROBLEMAS	Índice de dificultad	Desviación típica
Problema 1	0.46	0.50
Problema 2	0.38	0.49
Problema 3	0.39	0.49
Problema 4	0.69	0.46
Problema 5	0.79	0.41
Problema 6	0.89	0.31
Problema 7	0.89	0.32
Problema 8	0.77	0.42
Problema 9	0.11	0.32
Problema 10	0.05	0.22
Problema 11	0.85	0.36
Problema 12	0.86	0.35
Problema 13	0.12	0.32
Problema 14	0.37	0.48
Problema 15	0.31	0.46

Entre los problemas con menor dificultad están:

- problema 6 (ID = 0.89), sobre asignación de probabilidades simples, se evalúa el conocimiento de los futuros profesores en resolver cuál de los sucesos simples es más probable.
- problema 7 (ID = 0.89), sobre probabilidad condicional, se estudia si los futuros profesores reconocen la probabilidad condicional y son conscientes del muestreo sin reemplazamiento.
- problema 12 (ID = 0.86), sobre la percepción de la independencia, se evalúa en los futuros profesores la percepción de la independencia en ensayos repetidos en las mismas condiciones.
- problema 11 (ID = 0.85), sobre probabilidad geométrica, se evalúa en los futuros profesores cómo resuelven problemas de comparación, tanto de fracciones como de probabilidades, en un contexto de ruleta seccionada.

- problema 5 (ID = 0.79), sobre juego equitativo, se evalúa las intuiciones de los futuros profesores sobre juego equitativo en el que las ganancias deberán ser inversamente proporcional ala esperanza de ganar de cada jugador.
- problema 8 (ID = 0.77), comparación de probabilidades, se evalúa el conocimiento de los futuros profesores en decidir entre dos urnas cuál de ellas ofrece mayor probabilidad de obtener una ficha negra.
- problema 4 (ID = 0.69), juego equitativo, se estudia si los futuros profesores reconocen la idea de juego equitativo, mediante la introducción de factores subjetivos.

4.5.3. ANÁLISIS DE LA FIABILIDAD DEL CUESTIONARIO

El análisis de fiabilidad del cuestionario para la segunda fase de la investigación se ha realizado utilizando el coeficiente alfa de Cronbach.

Tabla 4.5.4. Resultados relacionados con el análisis de la fiabilidad del cuestionario

Futuros profesores (N=283)		
PROBLEMAS	**Media**	**Desviación típica**
Problema 1	0.46	0.50
Problema 2	0.38	0.49
Problema 3	0.39	0.49
Problema 4	0.69	0.46
Problema 5	0.79	0.41
Problema 6	0.89	0.31
Problema 7	0.89	0.32
Problema 8	0.77	0.42
Problema 9	0.11	0.32
Problema 10	0.05	0.22
Problema 11	0.85	0.36
Problema 12	0.86	0.35
Problema 13	0.12	0.32
Problema 14	0.37	0.48
Problema 15	0.31	0.46

La estimación del coeficiente de fiabilidad para los 15 problemas con los 283 futuros profesores es • = 0.576. Este coeficiente es relativamente bajo, debido a la poca semejanza de los problemas. Ello se debe a que para evaluar el conocimiento común del contenido de la probabilidad, los problemas incluyen diferentes significados de la probabilidad, para dar cumplimiento a los objetivos propuestos.

Diferentes factores externos, como la disponibilidad de los alumnos, las programaciones de los cursos, etc., nos han limitado realizar un estudio más amplio sobre la unidimensionalidad de los problemas, por lo que hemos valorado principalmente la validez del contenido con tal de cubrir los diferentes significados de la probabilidad, siendo conscientes de algunas de sus limitaciones.

4.6. CONCLUSIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO COMÚN DEL CONTENIDO DE PROBABILIDAD

En este capítulo se ha presentado el estudio dirigido a realizar una evaluación de los conocimientos matemáticos de los futuros profesores de educación primaria en relación con los objetos matemáticos que aparecen implícitos en la resolución de los problemas de probabilidad propuestos. El objetivo de dicho estudio era el siguiente:

Objetivo 1. Evaluar el conocimiento común del contenido de la probabilidad que tienen los futuros profesores de Educación Primaria.

Para lograr este objetivo se plantearon 15 problemas de probabilidad que cubren los diferentes significados sobre este concepto. Los resultados se han analizado de forma detallada a lo largo del capítulo, realizando un análisis estadístico de las respuestas de los futuros profesores a cada uno de los problemas y categorizando los argumentos aportados para justiciar sus respuestas. Los resultados se han comparado con los obtenidos por Cañizares (1997) en una investigación similar con una muestra de niños de 10 a 14 años, y con los obtenidos en las investigaciones citadas en los antecedentes. Resultados de este estudio se han publicado en Ortiz, Serrano y Mohamed (2009); Ortiz, Mohamed y Serrano (2010); Mohamed y Ortiz (2011); Mohamed, Ortiz y Serrano (2011); Mohamed y Ortiz (2012).

La hipótesis formulada fue que *esperábamos que nuestros resultados mostraran que el conocimiento común del contenido matemático de la probabilidad de los futuros* *profesores de educación primaria es insuficiente*. Dicha hipótesis se ha confirmado, pues el análisis de los resultados nos indica que la resolución de problemas de probabilidad ha sido una tarea difícil para los futuros profesores de educación primaria de la muestra participante.

Las conclusiones sobre este objetivo e hipótesis es que la mayoría de los futuros profesores tienen grandes dificultades para responder de forma correcta a los problemas de probabilidad propuestos. Aunque la proporción de futuros profesores que respondieron de forma correcta ha sido alta en los problemas relacionados con asignación de probabilidades simples (89.4%, 77% y 85.2% de aciertos), probabilidad condicional (88.7% de aciertos), probabilidad frecuencial (85.9% de aciertos) y juegos equitativos (68.9% y 79.2% de aciertos). Hay otros problemas donde los porcentajes de respuestas correctas de los futuros profesores son inferiores al 50%, como ocurre en los problemas sobre espacio muestral (46.3%), juegos equitativos (41.74%), aleatoriedad (40%), probabilidad compuesta (36.7%) y probabilidad frecuencial (30.7%).

Finalmente, los problemas de mayor dificultad, donde la proporción de futuros profesores que respondieron de forma correcta es muy baja, son los relacionados con los conceptos de variable aleatoria (11.7%) y muestreo (4.9%). Aunque se observa una mejora respecto a los resultados de los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997), estos resultados son preocupantes dada la sencillez de los problemas y el nivel de conocimiento que se supone deberían tener los futuros profesores. Todo ello indica el escaso conocimiento común del contenido de la probabilidad que tienen los futuros profesores participantes en el estudio. A continuación comentamos las conclusiones sobre cada uno de los conceptos trabajados.

En relación con el **espacio muestral**, el error más frecuente es la confusión entre suceso seguro y suceso posible, que les lleva a responder tres bolas, una de cada color, ya reseñado por Hawkins y cols. (1992) considerando que los futuros profesores determinan un espacio muestral incorrecto. Otra dificultad encontrada ha sido la falta de razonamiento combinatorio que se manifiesta en los que responden que hay que extraer todas las bolas (8.1%), descrita también por Azcárate (1995) entre futuros profesores de educación primaria.

En relación con la **aleatoriedad**, en torno al 63% de los futuros profesores no mostraron una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios, aunque los resultados son algo mejores que los obtenidos por Azcárate (1995), quién encontró que muy pocos mostraban esa competencia. Otra dificultad importante está relacionada con el concepto de independencia, que también han sido descritas por Serrano (1996) y Batanero, Arteaga, Ruiz y Roa (2010) en futuros profesores en formación de educación primaria.

Estos resultados corroboran los de Begg y Edwards (1999), donde muy pocos profesores comprendían el concepto de independencia y con frecuencia usaban el heurístico de representatividad. Lo mismo ocurre con los obtenidos por Zaslavsky, Zaslavsky y Moore (2001), quienes indican que el 70% de los profesores no pueden explicar cuando dos sucesos son independientes.

En los dos problemas, la cuarta parte de los futuros profesores considera que los resultados dependen del azar o de la suerte. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Azcarate (1995), donde un 26.3% de los futuros profesores de educación primaria relacionaban el azar con la suerte o la casualidad.

En relación con el **juego equitativo**, consideramos que se manifiesta cierta inconsistencia sobre el conocimiento de este concepto, ya que aunque en los dos primeros problemas hay un elevado porcentaje de respuestas correctas, en el problema 9 sólo el 11% de los futuros profesores manifiesta una correcta percepción de la equitatividad del juego. En los dos primeros problemas los resultados obtenidos son similares a los de Azcárate (1995), pero en el problema 9 son peores. Esto último puede ser debido a la falta de razonamiento combinatorio, que les ha impedido, a pesar de ayudarse con el diagrama del árbol, realizar una enumeración completa del espacio muestral, que confirma los resultados de la investigación de Azcárate (1995).

Asimismo las estrategias utilizadas para comparar probabilidades, con el objetivo de decidir si el juego es o no equitativo, han sido en su mayoría correctas en los problemas 4 y 5, confirmando los resultados de Ortiz y cols. (2006) pues predominan las estrategias de correspondencia o multiplicativas (68.2% en el problema 4 y 76.7% en el problema 5). Sin embargo en el problema 9 este porcentaje se reduce al 37%.

No obstante, hay errores, respuestas incompletas o no respuestas, en los tres problemas. En el problema 4, alrededor de un 24% de futuros profesores llega a la conclusión de que el juego no es equitativo al aplicar estrategias incorrectas en la comparación de probabilidades, propias de niños en las etapas pre-operacional y concreta según Piaget e Inhelder (1951) y que serían improcedentes en estos problemas. En otros casos se obtiene la conclusión de que el juego es equitativo basándose en aspectos irrelevantes de la tarea, similares a los usados por niños en la investigación de Watson y Collis (1995) o en la de Cañizares y cols. (1999).

En el problema 5, algunos futuros profesores, aunque calculan correctamente las probabilidades, calculan el valor del premio en función del número de casos posibles, y no de la probabilidad de ganar (4.9%); comparan las probabilidades de ganar los dos jugadores sin llegar a establecer el premio (2.8%); o asignan el mismo premio, o un valor no relacionado con la probabilidad a los dos jugadores (6.4%).

En el problema 9, el error identificado con más frecuencia ha sido el sesgo de equiprobabilidad, que coincide con los resultados obtenidos en investigaciones previas con futuros profesores, aunque en un caso resolviendo problemas de comparación de probabilidades (Ortiz y cols., 2006) y en otro trabajando mediante proyectos estadísticos (Batanero y cols., 2010). Otros errores encontrados han sido la realización incorrecta de los cálculos de la probabilidad, el sesgo conocido como la falacia del jugador y los que han basado su respuesta en que el juego es aleatorio.

En relación con la **asignación de probabilidades simples**, los resultados han sido mejores que en otros problemas, y la incidencia del sesgo de equiprobabilidad ha sido bastante baja, en una proporción muy inferior a los resultados obtenidos por los futuros profesores, participantes en la investigación de Azcárate (1995) de un 56% y de Batanero, Godino y Cañizares (2005) con un 60%, en situaciones relacionadas con contextos de juegos. La presencia de este sesgo en las justificaciones de las respuestas de los futuros profesores, puede ser debida, como indica Azcárate (1995), a que los estudiantes cuantifican la probabilidad de un suceso desde criterios personales sin analizar de forma global el fenómeno.

Estos resultados también son mejores que los obtenidos por futuros profesores de educación primaria en las investigaciones de Contreras (2011) y Estrada y Díaz (2006), quienes encontraron que solo el 65.5% y el 75% respectivamente realizaron correctamente el cálculo de la probabilidad simple pedida, aunque en estos dos últimos casos la tarea consistía en el cálculo de dicha probabilidad a partir de los datos facilitados en una tabla de doble entrada, lo que ha se ha podido convertir en un elemento de dificultad para los estudiantes al no estar familiarizados con este tipo de enunciados.

El error más frecuente ha sido la utilización de estrategias incorrectas por el 23% de los futuros profesores en el problema 8. Entre los argumentos utilizados en los problemas 6 y 8 aparece la idea de azar, pero en proporción mucho menor que en la investigación de Azcárate (1995).

En relación con la **probabilidad condicional**, los resultados han sido buenos con un 88% de respuestas correctas, y la incidencia del sesgo de equiprobabilidad ha sido bastante baja, en una proporción muy inferior a los resultados obtenidos por los futuros profesores, participantes en la investigación de Azcárate (1995) de un 56% y de Batanero, Godino y Cañizares (2005) con un 60%, en situaciones relacionadas con contextos de juegos. Estos resultados también son mucho mejores que los obtenidos por futuros profesores de educación primaria en las investigaciones de Contreras (2011) y Estrada y Díaz (2006), quienes encontraron que solo el 43.7% y el 53% respectivamente realizaron correctamente el cálculo de la probabilidad condicional pedida, aunque en estos dos últimos casos la tarea consistía en el cálculo de dicha probabilidad a partir de los datos facilitados en una tabla de doble entrada, que ha podido ser un elemento de dificultad para los estudiantes al no estar familiarizados con este tipo de enunciados.

La comprensión del concepto de probabilidad condicional también ha sido mayor que la de los profesores participantes en la investigación de Carnell (1997), quien mostró que todos ellos poseían conceptos erróneos, como por ejemplo, definir el elemento condicionante, el orden temporal del elemento condicionante y el elemento objetivo, o confundir la condicionalidad con la causalidad. También queda de manifiesto que la mayoría de los futuros profesores participantes en este estudio han sabido diferenciar entre sucesos dependientes e independientes, teniendo en cuenta que la primera extracción de bolas realizada influye en el resultado de la segunda extracción, al contrario que lo ocurrido en la investigación de Zaslavsky, Zaslavsky y Moore (2001), quienes indican que casi el 90% de ellos no entienden la relación entre sucesos independientes y dependientes.

En relación **al concepto de muestreo**, el porcentaje de respuestas correctas ha sido el más bajo de todos los problemas (4.9%). Los resultados han sido peores que los obtenidos por Azcárate (1995), del 10.5%. Se manifiesta una gran dificultad con este concepto, que puede ser debida como indica Watson (2001), a que, en general, tanto los profesores de primaria como los de secundaria no se encuentran cómodos usando el concepto de muestra, ya que supone un grado mayor de incertidumbre para ellos.

La incidencia de la heurística de la representatividad ha sido del 64.7%, proporción ligeramente inferior al resultado obtenido por Azcárate (1995), del 66,7%, y algo mayor que el obtenido por Batanero, Cañizares y Godino (2005), del 61%, que muestra una insensibilidad al tamaño de la muestra a la hora de tomar decisiones en situaciones probabilísticas concretas. Un elemento de dificultad, como indica Azcárate, ha podido ser presentar la información dada en términos porcentuales, ya que puede inducir a errores al valorar la información probabilística de naturaleza frecuencial.

En relación con la **probabilidad frecuencial**, en el problema 12 hay un elevado porcentaje de respuestas correctas (85.9%), mientras que en el problema 15 solo el 30% de los futuros profesores manifiesta una correcta percepción de la probabilidad frecuencial. Por ello, consideramos que los futuros profesores manifiestan cierta inconsistencia en el conocimiento de este concepto, debido a que los mismos estudiantes ante situaciones en diferentes contextos obtienen resultados muy diferentes. En el problema 12 los resultados obtenidos son mucho mejores que los obtenidos por Azcárate (1995), comprendidos entre el 49% y el 15%.

Por otro lado, coincidimos con Azcárate (1995), en que una mayoría de los futuros profesores presentan dificultades para interpretar la probabilidad frecuencial, y que muchas de sus explicaciones parecen estar condicionadas por razonamientos propios de un pensamiento determinista, donde el objetivo principal es predecir resultados de pruebas aisladas más que en realizar un estudio global del fenómeno, razonamiento que Konold y cols. (1993) lo relaciona con el heurístico “outcome approach”. Sin embargo en este estudio los futuros profesores en el problema 12 sí hacen un mayor uso del cálculo probabilístico para justificar sus respuestas.

En el problema 15, la proporción de futuros profesores que manifiesta el sesgo de equiprobabilidad es mucho mayor que la obtenida por Azcárate (1995) y coincide con los resultados obtenidos por Godino, Batanero y Cañizares (2005), también con futuros profesores de educación primaria.

En relación **con la variable aleatoria**, la baja proporción de respuestas correctas (11.7%) indica que los futuros profesores no muestran una idea clara sobre este concepto. La incidencia del sesgo de equiprobabilidad ha sido bastante alta. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Lecoutre y Cordier (1990), donde en varios experimentos con estudiantes de diversa edad y preparación, encontraron que incluso los alumnos mayores asumen la equidistribución de la variable aleatoria, en experimentos tan sencillos como el número de caras al lanzar dos monedas. Para corregir esta creencia, Heitele (1975) sugiere que debería presentarse a los estudiantes la distribución normal, donde este principio falla. Quizás una forma de introducir la distribución normal de forma intuitiva a los alumnos de niveles educativos preuniversitarios sería por medio de la simulación.

Ninguno de los futuros profesores ha aportado una respuesta formal al problema. Solo unos pocos, a partir de su experiencia previa, han mostrado tener cierta intuición sobre el valor esperado de éxitos en una distribución binomial, respondiendo de forma correcta. Hemos detectado algunos estudiantes que aplican incorrectamente la regla de Laplace, suponiendo todos los resultados equiprobables, posiblemente por falta de razonamiento combinatorio, mostrando el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988).

En relación **a la probabilidad compuesta**, los resultados no son tan buenos ya que solo el 36.7% de los futuros profesores responden de forma correcta. Estos resultados son peores que los obtenidos por futuros profesores de educación primaria en las investigaciones de Contreras (2011) y Estrada y Díaz (2006) con el 42% y el 55% respectivamente. La simetría del dibujo también ha provocado en algunos alumnos una respuesta de equiprobabilidad. La incidencia del sesgo de equiprobabilidad ha sido baja, en menor proporción que en los resultados obtenidos por Batanero, Cañizares y Godino (2005).

En resumen, el promedio de problemas correctos es de 7.48, que no es muy alto, si se considera la sencillez de los problemas y el nivel de conocimiento que suponemos deberían tener los futuros profesores de educación primaria. Si atendemos a la modalidad de bachillerato cursada, se observa que los promedios más altos son los obtenidos por los estudiantes que cursaron las modalidades del Bachillerato Tecnológico 8.69, del Científico 7.58 y Ciencias Sociales 7.46. Con porcentajes algo menores se encuentran los que cursaron las modalidades de Letras 7.42; de Artes 7.25, y por último, los de Humanidades con 7.00.

CAPÍTULO 5

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE LOS FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA

5.1. INTRODUCCIÓN

Como se ha indicado, en la actualidad observamos un interés en adelantar el estudio de los fenómenos aleatorios y la probabilidad a la Educación Primaria. Por ejemplo, en los Decretos de Enseñanzas Mínimas en España (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a) se incluyen los siguientes contenidos en el primer ciclo de este nivel educativo: *"Fenómenos aleatorios y vocabulario relacionado";"descripción y cuantificación de situaciones aleatorias"; "reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana"; "planificación y realización de experimentos simples para estudiar el comportamiento de los fenómenos aleatorios*". Otros programas recientes (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Secretaría Educación Pública, 2006) sugieren transmitir al niño un lenguaje elemental probabilístico mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, para que aprenda a identificar las situaciones aleatorias y llegue al final de la etapa a asignar algunas probabilidades sencillas.

La consecución de estos objetivos requiere una formación adecuada del futuro profesor de educación primaria (Stohl, 2005), tanto en los contenidos matemáticos como en los contenidos pedagógicos de la probabilidad. Por ello, resulta de interés realizar una evaluación del conocimiento de los futuros profesores sobre el contenido pedagógico de la probabilidad. Los resultados de este tipo de estudios, como indican Callingham y Watson (2011), nos pueden permitir evaluar o diseñar un programa de instrucción adecuado.

En este capítulo se evalúan algunos conocimientos didácticos de los futuros profesores sobre la probabilidad. En lo que sigue se describen los objetivos, la metodología y los resultados obtenidos. Parte de estos estudios han sido publicados en Mohamed y Ortiz (2011); Mohamed, Ortiz y Serrano (2011); Mohamed y Ortiz (2012).

5.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO

La finalidad de este estudio es evaluar el conocimiento didáctico de los futuros profesores de educación primaria, que se concreta en el siguiente objetivo.

Objetivo 2. Analizar el conocimiento especializado y el conocimiento del contenido y los estudiantes de los futuros profesores de educación primaria sobre el juego equitativo y el espacio muestral.

Para evaluar el conocimiento especializado matemático se propone a los futuros profesores que identifiquen los contenidos matemáticos involucrados en los cuatro problemas del cuestionario (ver Anexo III) sobre el juego equitativo y el espacio muestral. A partir de las respuestas facilitadas por alumnos de educación primaria, se pide a los futuros profesores que identifiquen las posibles dificultades o errores que presentan estos alumnos, para así evaluar su conocimiento del contenido y los estudiantes.

Hipótesis 2. Esperamos que el conocimiento de los futuros profesores de la muestra sobre el contenido pedagógico de la probabilidad será insuficiente, debido a que no reconocen los objetos matemáticos necesarios para la resolución de los problemas planteados, ni identifican las dificultades de los estudiantes cuando responden a las tareas propuestas.

Esta hipótesis se justifica por los resultados obtenidos en las investigaciones previas de Contreras (2011) y también en el hecho de que un conocimiento insuficiente del contenido matemático, como indican Ball, Lubienski y Mewborn (2001), implicaría un insuficiente conocimiento didáctico.

5.3. METODOLOGÍA

En este trabajo se sigue el método sugerido por Godino (2009) y Godino y cols. (2011) para la formulación de cuestiones de evaluación del conocimiento del profesor. Para ello seguiremos dos pasos:

1. Elegir una tarea matemática cuya solución ponga en juego los principales aspectos del contenido, o de las competencias a desarrollar;
2. Formular consignas que cubran las distintas (o principales) facetas y niveles de análisis didáctico del modelo propuesto. Para evaluar el conocimiento especializado del contenido dicha consigna consistiría en identificar los objetos y procesos

matemáticos puestos en juego en la solución; para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes, una consigna posible sería describir los razonamientos que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea propuesta o los principales conflictos en dicha solución.

El análisis de las respuestas de los futuros profesores nos permite obtener los principales objetos y procesos matemáticos identificados por ellos en los problemas propuestos así como las principales dificultades o errores que han observado en la resolución de los problemas por los alumnos de primaria. Como método estadístico se han utilizado los estadísticos descriptivos, calculando las frecuencias correspondientes.

5.3.1. PARTICIPANTES

La muestra participante estuvo formada por 31 grupos de futuros profesores de educación primaria, con dos o tres estudiantes en cada uno de los grupos. Estos estudiantes son una parte de los futuros profesores que resolvieron los 15 problemas del cuestionario presentado en el capítulo 4, y que mostraron su disposición a participar en este segundo estudio. Como se indicó anteriormente, dichos estudiantes cursaban una asignatura de Matemáticas y su Didáctica y los datos se recogieron en la mencionada asignatura en la segunda sesión de hora y media de duración.

En esta sesión se les entregó un cuestionario con cuatro de esos problemas, presentados en la figura 5.3.1, pidiéndoles que los resolvieran por escrito, trabajando en pequeños grupos, cada uno de los apartados del mismo, con el objetivo de evaluar el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del contenido y los estudiantes sobre la probabilidad de los futuros profesores de la muestra, en particular sobre el juego equitativo y el espacio muestral. En total se organizaron 31 grupos, que iniciaron la tarea en clase y se les permitió finalizar en casa, debiendo entregar el cuestionario cumplimentado la semana siguiente. Con el cuestionario se adjuntó información complementaria sobre probabilidad para consultar, estructurada en tres documentos: El primero, Godino, Batanero y Font (Proyecto Edumat), sobre dificultades, errores y obstáculos en matemáticas, así como las posibles causas que las originan; el segundo, de Batanero y Godino (Proyecto Edumat), sobre didáctica de la probabilidad con cuestiones sobre el desarrollo cognitivo y aprendizaje de conceptos probabilísticos, con situaciones y recursos, ejemplos de situaciones que pueden producir conflictos en el aprendizaje y un taller de didáctica con diversas actividades como análisis de textos escolares y diseño de unidades didácticas, análisis de ítems de evaluación y diseño de situaciones didácticas y análisis de entrevistas a niños; y el tercero y último, de Piaget, Inhelder y Szeminska (1960), sobre el desarrollo cognitivo de la idea de fracción, dificultades y errores, el desarrollo del razonamiento proporcional y las diferentes etapas que pasan los niños para resolver tareas hasta alcanzar el razonamiento proporcional adulto.

5.3.2. ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO

El cuestionario está constituido por cuatro problemas. Para cada uno de ellos, se plantean tres cuestiones a las que han de responder por escrito los futuros profesores, trabajando en pequeños grupos (31 grupos en total). El apartado a) pide analizar el contenido matemático necesario para resolver el problema. De acuerdo con Godino (2009) y Godino y cols. (2011), este tipo de pregunta lleva a pensar de manera sistemática en los diferentes procedimientos posibles de resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego en su formulación, así como sobre maneras de argumentar o justificar los procedimientos y por tanto evalúa el conocimiento especializado del contenido. En el apartado b) se debe decidir, entre una serie de respuestas dadas por niños a los mismos problemas, cuáles de ellas son correctas o incorrectas, y en el c) indicar las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea evaluando por tanto, el conocimiento del contenido matemático y los estudiantes.

En el problema 1, tomado de Fischbein y Gazit (1984), las probabilidades de obtener una bola blanca en las dos urnas son iguales, al ser proporcional el número de casos favorables y posibles en las dos urnas. El juego es, por tanto, equitativo pues ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar (y reciben el mismo premio). El problema incluye un distractor, que describe la creencia de algunos niños en que, a pesar de tener igual proporción de casos favorables y posibles, el número de casos favorables representa una ventaja. Según Cañizares y cols. (1999), este distractor aumenta la dificultad del problema con respecto a los de comparación de fracciones propuestos por Noelting (1980a). El problema se resuelve mediante la regla de Laplace. El contenido matemático (apartado a) incluye, por tanto, comparación de fracciones, en este caso con denominador proporcional, experimento aleatorio, describir los casos posibles (espacio muestral), casos favorables y desfavorables. En el enunciado también se hace referencia a la idea de juego equitativo; por tanto se deben usar las ideas sobre esperanza matemática.

Las respuestas correctas (apartado b) son las de los alumnos A3, A6 y A7. El alumno A3 ha comparado la razón entre casos desfavorables/favorables (denominador/numerador), ha puesto en juego las ideas de probabilidad y razón, así como la comparación de razones. El estudiante A6 ha comparado la razón entre casos favorables/desfavorables (numerador/denominador), ha manejado las ideas de probabilidad y razón, así como la comparación de fracciones. Por último, el alumno A7 aplica la regla de Laplace (cociente entre casos favorables y posibles), utiliza las ideas de probabilidad, fracción y número decimal, y comparación de fracciones y decimales.

Respecto a las dificultades previstas en los estudiantes (apartado c), el alumno A1 razona sólo en base al denominador, mostrando dificultad en la comparación de probabilidades y fracciones. El estudiante A2 razona sólo en base al numerador, mostrando también dificultad en la comparación de probabilidades y fracciones. El alumno A4 está en un nivel muy básico ya que compara razones mediante estrategias aditivas en vez de multiplicativas y el A5 manifiesta una concepción errónea de la aleatoriedad, suponiendo que todos los sucesos son equiprobables.

El problema 2, tomado de Green (1983), evalúa las intuiciones sobre un juego equitativo en el que las ganancias deberán ser inversamente proporcionales a la esperanza de ganar de cada jugador. Puesto que Maria tiene 5 posibilidades y cada vez gana un euro, a la larga gana 5 euros cada 6 jugadas, y como Esteban tiene sólo una posibilidad, ha de ganar 5 euros cada vez que gane. El contenido matemático (apartado a) puesto en juego para resolver este problema incluye conocimientos sobre los casos favorables y posibles, poseer una idea intuitiva de convergencia, equitatividad, valor esperado y proporcionalidad inversa.

Figura 5.3.1. Cuestionario

En lo que sigue presentamos algunas de las preguntas del cuestionario sobre probabilidad, junto con algunas de las respuestas obtenidas en la misma. Para cada una de las preguntas:

a. Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta
b. Señala cuál o cuáles de las respuestas dadas por alumnos son correctas
c. Para cada una de las respuestas incorrectas señala las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea

Problema 1. Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre esto?

Respuestas de los alumnos

A1. "Que es mejor para Eduardo porque tiene menos bolas negras y más oportunidad de sacar la blanca"

A2. "*Lleva razón Eduardo porque al tener Luis más bolas blancas la probabilidad de sacar una de ellas es mayor que la de Eduardo*":

A3. "*Que no es cierto lo que opina Eduardo ya que Luis también tiene el doble de bolas negras que blancas. Así que los dos tienen las mismas posibilidades*"

A4. "Que tiene más posibilidades Eduardo, porque la diferencia entre negras y blancas es menor (10), mientras que Luis tiene 30 más negras que blancas. Así que es más fácil que Luis saque una bola negra".

A5. "Los dos tienen la misma posibilidad, porque es un juego aleatorio y ganar depende de la suerte"

A6. "*Creo que ambos están en las mismas condiciones ya que el número de bolas blancas y negras de uno y otro es proporcional*"

A7. "*Eduardo: 10 B y 20 N   10/30 = 0,33*
Luis: 30 B y 60 N   30/90 = 0,33   tienen exactamente la misma posibilidad de obtener o sacar una bola blanca ambos"

Problema 2: María y Esteban juegan a los dados. María gana 1 euro si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó *5 ó* 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de dinero. ¿Cuánto debe ganar Esteban cuando le sale el 1 para que el juego sea justo o equitativo? Respuesta_________ euros. ¿Por qué?

Respuestas de los alumnos

B1. «María tiene 5 oportunidades más, o sea, que considero justo que sean 5 euros los que gane Esteban»

B2. «(Esteban debe ganar) 6 euros para que sea justo porque tiene menos posibilidades», *B3. "Si a Esteban le diesen 5 euros estaría equilibrado, porque a ella por cada número que salga le dan un euro; pero sólo si le dan a Esteban tres oportunidades, ya que Maria tiene cinco oportunidades de ganar y él solo una"*

B4. "El juego no es justo porque María tiene muchas más oportunidades; aunque le des más dinero a Esteban cuando gane, sigue sin ser justo, porque tiene menos posibilidades de ganar"

B5. "Para que el juego sea justo Maria tiene que ganar tres veces y Esteban otras tres; por ejemplo, Maria gana con el 1, 2, 3 y Esteban con el 4, 5, 6."

Problema 3. En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. Se sacan las bolas sin mirar ¿Cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Respuestas de los alumnos

C1. "Tres, porque hay tres tipos de colores"

C2. "Debe sacar tres bolas, a lo mejor le toca una roja, una verde y una blanca"

C3. "Si se sacan primero las rojas y verdes son siete, pero como hace falta una de cada color, pues ocho"

C4. "Nunca se puede estar seguro, porque a lo mejor sacas dos rojas y dos verdes"

C5. "Debe sacar nueve, es decir todas, y así estará lo más seguro posible"

C6. "Debe mirar en la caja y así estará seguro de sacar una de cada color".

Problema 4: Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:

- Lanzan dos dados y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2, entonces Carmen gana 1 ficha.
- Si resulta 3, 4, o 5 es Daniel quien gana una ficha.

¿Te parece que este juego es equitativo? ¿Por qué?

Respuestas de los alumnos

D1. "Es equitativo, pues cada uno tiene tres oportunidades de ganar"
D2. "No es equitativo pues Carmen tiene doble oportunidad de ganar que Luis"
D3. "Para que fuese justo la diferencia 0 tendría que salir el mismo número de veces que la 3. Pero la diferencia 0 sale 6 veces y la 3 solo 3 veces".

El único alumno que ha respondido de forma correcta (apartado b) ha sido el B1. El alumno B2 identifica los casos favorables y posibles, pero falla al estimar el valor del premio aplicando proporcionalidad inversa.

Respecto a las dificultades previstas en los estudiantes (apartado c), el estudiante B3 estima bien el valor del premio, pero exige jugar tres veces; esperando que en tres jugadas se equilibre el juego, aunque la serie es muy corta. Los alumnos B4, B5 conciben el juego justo como aquél en que los dos jugadores tienen las mismas probabilidades, no relacionando la respuesta con el valor del premio. Por tanto, las posibles dificultades serán debidas a falta de razonamiento proporcional, no comprender la idea de juego equitativo, no concebir la convergencia a la larga, o la idea de esperanza.

El problema 3, tomado de Fischbein y Gazit (1984), evalúa la comprensión del concepto de suceso seguro, ya que Fischbein considera esta noción más difícil que la de suceso probable. Al mismo tiempo se analiza la capacidad de razonamiento combinatorio del estudiante ya que debe enumerar las diferentes posibilidades que se le presentan al extraer sucesivamente las bolas de la urna. Se trata de un problema de extracción de bolas de una urna (contexto discreto), que puede considerarse como una sucesión de extracciones sin reemplazamiento, por lo que los sucesivos experimentos serían dependientes y harían cambiar la composición de la urna.

El espacio muestral consta de tres sucesos elementales no equiprobables por razón de la composición de la urna. En los sucesivos experimentos la composición de la urna se modifica, por lo que cambian las probabilidades de los sucesos elementales. En esta situación hay que sacar 8 bolas para estar seguro de que habrá una bola de cada color, pues en el peor de los casos, con 8 bolas sacas todos menos una blanca. Por tanto, los contenidos matemáticos (apartado a) necesarios para resolver el problema son el concepto de suceso seguro y nociones de combinatoria elemental para pensar en todas las posibilidades.

El único alumno que ha respondido de forma correcta (apartado b) ha sido el C3, que considera que se deben sacar ocho bolas para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color. Este alumno ha determinado todos los casos posibles y favorables, así como ha pensado en todas las posibles posibilidades en sucesivas extracciones (razonamiento combinatorio) y diferencia las ideas de suceso seguro y suceso posible.

Las dificultades de los estudiantes (apartado c) que han respondido de forma incorrecta son que el alumno C1 confunde suceso seguro con el espacio muestral y el alumno C2 confunde la noción de suceso seguro con posible. Los alumnos C4, C5, C6, tienen fallos en el razonamiento combinatorio. Por tanto, los posibles errores o dificultades que se pueden presentar en la resolución de este problema pueden deberse a confundir el suceso seguro con la noción de suceso posible, por ejemplo si un alumno responde “tres bolas, ya que le puede tocar una roja, una verde y una blanca”, ya que estaría interpretando de forma incorrecta que se pide el mínimo número de bolas para que sea posible obtener una de cada color. En otros casos, pueden pensar que nunca se puede estar seguro, al ser un experimento aleatorio, respondiendo que “no se puede saber” o “nunca es posible”. Por último, ciertas dificultades pueden estar relacionadas con un fallo en el razonamiento combinatorio, que sería el caso de respuestas como “nueve porque así se sacan todas”.

En el problema 4, tomado de un libro de texto, la respuesta correcta es que el juego no es equitativo, pues Carmen gana a la larga 24 veces de cada 36, es decir 2/3 de las veces mientras Daniel gana 1/3. Una posible forma de resolver el problema para estos estudiantes es preparar un recuento de todos los casos posibles en el experimento (espacio muestral), clasificándolos según el valor de la diferencia entre el valor mayor y menor de los puntos (Figura 5.3.2). En esta figura se presenta la distribución de probabilidad de la variable aleatoria (diferencia) implícita en el juego. No esperamos que los futuros profesores reconozcan la variable aleatoria, pues no la han estudiado, pero si que preparen un esquema similar al de la figura mencionada. Por recuento simple de los casos y aplicando la regla de la suma de probabilidades, se deduce fácilmente la solución. Los alumnos tienen que movilizar una idea elemental de juego equitativo, como juego que concede a los dos jugadores la misma probabilidad.

Figura 5.3.2. Esquema solución

Diferencia	Casos posibles	Número de casos	Probabilidad	Gana
0	11,22,33,44,55,66	6	6/36	Carmen
1	12,21,23,32,34,43,45,54,56.65	10	10/36	Carmen
2	13,24,31,35,42,46,53,64	8	8/36	Carmen
3	14,25,36,41,52,63	6	6/36	Daniel
4	15,26,51,62	4	4/36	Daniel
5	16,61	2	2/36	Daniel
Total		36		

El problema se puede resolver como hemos visto anteriormente por recuento de las veces que gana Carmen y las veces que gana Daniel, por tanto los contenidos matemáticos (apartado a) presentes en el problema son experimento aleatorio, casos favorables y posibles, suceso, espacio muestral, idea intuitiva de convergencia, nociones de equitatividad, valor esperado y proporcionalidad inversa, variable aleatoria y razonamiento combinatorio elemental (para deducir todos los casos).

La respuesta correcta (apartado b) es la que proporciona D2, que ha determinado todos los casos favorables a cada jugador con un esquema parecido al anterior, y considera que el juego no es equitativo porque "*Carmen tiene doble oportunidad de ganar que Luis*", tal como hemos visto en la solución previa del mismo.

Las dificultades (apartado c) de los estudiantes que han respondido de forma incorrecta son que el alumno D1 considera que al tener cada uno de los jugadores tres opciones el juego es equitativo, pero no tiene en cuenta la probabilidad de cada uno de los sucesos. No ha sido capaz de determinar todos los casos posibles en cada una de las diferencias, por lo que consideramos que tiene fallos en el razonamiento combinatorio. La respuesta de D3 también es incorrecta ya que la diferencia 0 se obtiene 6 veces pero la diferencia 3 también se obtiene 6 veces como podemos observar en la solución presentada anteriormente. El alumno D3 no considera el orden de los dados en la diferencia 3, es decir sólo considera los casos (14), (25) y (36), por lo que al igual que en el caso anterior manifiesta fallos en razonamiento combinatorio. Por tanto, las posibles dificultades que pueden tener los alumnos son no comprender bien la idea de juego equitativo, no concebir la convergencia a la larga y se fijan sólo en el resultado del experimento, así como fallos en la idea de esperanza y en el razonamiento combinatorio.

5.4. CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL CONTENIDO

Una vez resueltos los problemas en la primera sesión, en la segunda los futuros profesores trabajaron en pequeños grupos para resolver el resto de las cuestiones. A continuación, analizamos los resultados en el primer apartado en que preguntamos por los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución del problema, con lo que se pretende evaluar el conocimiento especializado de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria.

5.4.1. ANÁLISIS DE RESULTADOS EN EL PROBLEMA 1

En la Tabla 5.4.1 se observa que los contenidos matemáticos mejor identificados por los futuros profesores en este problema fueron la probabilidad y regla de Laplace (21 grupos). Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Probabilidad, dividir el número de bolas blancas por el total de bolas*" (grupo 1).

El uso y comparación de fracciones es citado por pocos grupos (10 grupos). Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Los alumnos tienen que usar fracciones para demostrar sus conclusiones como hace el alumno A7*" (grupo 3). También ha sido escasa la mención de la proporcionalidad (7 grupos), un ejemplo es el siguiente: "*En la respuesta A7 el niño utilizará un procedimiento matemático basado en dividir el número de bolas (de cada niño) para averiguar qué posibilidades hay de sacar la blanca, y visto que son las mismas posibilidades, ya la cantidad de blancas y negras son proporcionales, también tendrán las mismas posibilidades de sacar las negras*" (grupo 24).

Tanto la aleatoriedad como la estimación de posibilidades solo han sido mencionados por cuatro grupos en ambos casos. Un ejemplo es el siguiente: "*Los alumnos deben tener conocimientos sobre estimación de posibilidades*" (grupo 4).

Por último, solo dos grupos hicieron referencia a la comparación de probabilidades y a números y operaciones en ambos casos. Un ejemplo de respuesta es el siguiente: "*Los alumnos deben utilizar la estimación de posibilidades y noción de probabilidad, para que el niño pueda hacer juicios probabilísticos, en situaciones, como el ejemplo que estamos tratando, los niños comienzan resolviendo problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso A en dos experimentos diferentes sólo en situaciones donde, bien el número de casos favorables o el número de casos no favorables a A son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias). Posteriormente pasan a resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción*" (grupo 9). En este caso se aprecia que han utilizado la información complementaria sobre probabilidad que se les facilitó a todos los grupos para realizar esta parte del cuestionario.

No se identifica el espacio muestral, o sucesos, casos favorables o posibles, idea de juego equitativo, valor esperado o razón, por lo que se considera que el conocimiento especializado del contenido sobre juego equitativo mostrado por los futuros profesores sería, en consecuencia, muy escaso.

Tabla 5.4.1. Contenidos matemáticos identificados por los grupos de futuros profesores en el problema 1 (n=31).

Contenidos	Frecuencia
Probabilidad, regla de Laplace	21
Fracciones, comparación de fracciones	10
Proporcionalidad	7
Azar/aleatoriedad	4
Estimación posibilidades	4
Comparación de probabilidad	2
Números y operaciones	2

5.4.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS EN EL PROBLEMA 2

En la Tabla 5.4.2 se observa que los contenidos matemáticos mejor identificados por los futuros profesores en este problema fueron la probabilidad y regla de Laplace (10 grupos). Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Los alumnos deben conocer qué es una situación equilibrada para poder resolver el problema, además de los conceptos básicos de probabilidad*" (grupo 31).

2.- Los alumnos deben conocer qué es una situación equilibrada par poder resolver el problema además de los conceptos básicos de probabilidad

El juego equitativo ha sido identificado por 6 grupos y la intuición del azar por 5 grupos. Un ejemplo del primer caso es la siguiente respuesta: "*Juego equitativo*" (grupo 6).

Es escasa la mención al razonamiento combinatorio (4 grupos), a la estimación de la probabilidad mediante la frecuencia (4 grupos), como la siguiente respuesta: "*Estimación de la frecuencia relativa*" (grupo 12); a la proporcionalidad (2 grupos), como la siguiente respuesta: "*B1. Aquí se trata de una regla de tres, puesto que María por cada posibilidad, en este caso, 5, gana un euro, entonces, Esteban por una* *posibilidad debe ganar 5 euros. B4. Es correcta por lógica, puesto que María irá tirando el dado, y al ser 5 posibilidades irá acumulando dinero, mientras que Esteban deberá esperar bastante más a que le salga el uno*" (grupo 24). Solo dos grupos mencionan el uso y comparación de fracciones, como la siguiente respuesta: "*Contenidos; uso y razonamiento de las fracciones, comparándolas con un denominador común (uso de m.c.m.)*" (grupo 2).

Entre otros contenidos se aluden a la lógica (1 grupo), como por ejemplo: "*El contenido matemático utilizado es la lógica*" (grupo 8); a la experimentación (1grupo); a los números y operaciones (1 grupo), como la siguiente respuesta: "*Bloque 1. Números naturales, operaciones, estrategias de cálculo. Gráficos estadísticos y carácter aleatorio de algunas experiencias*" (grupo 19), y al conocimiento matemático (1 grupo), como la respuesta siguiente: "*Ninguno de los alumnos utiliza el contenido matemático necesario para demostrar sus conclusiones*" (grupo 3).

Tabla 5.4.2. Contenidos matemáticos identificados por los grupos de futuros profesores en el problema 2 (n=31).

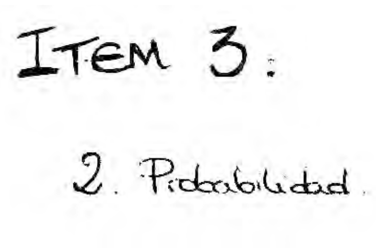
	Objetos identificados	Frecuencia
Correctamente	Probabilidad, regla de Laplace	10
	Juego equitativo	6
	Azar y aleatoriedad	5
	Estimación de la probabilidad	4
	Fracciones, comparación de fracciones	2
	Proporcionalidad	2
	Otros	4
Incorrectamente	Razonamiento combinatorio	4

No hay mención al experimento aleatorio, casos favorables o posibles, esperanza o valor esperado o convergencia. Así mismo, se considera que los cuatro grupos que han identificado como contenido matemático necesario para la resolución de este problema el razonamiento combinatorio, lo han hecho de forma incorrecta ya que en este problema no se utiliza. Un ejemplo es la respuesta: "*Razonamiento combinatorio. Permite analizar de forma metódica las posibles combinaciones de elementos o ideas para descubrir relaciones específicas*" (grupo 5).

Por ello, se considera que el conocimiento especializado del contenido mostrado sobre juego equitativo por los futuros profesores es muy insuficiente.

5.4.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS EN EL PROBLEMA 3

En la tabla 5.4.3 se observa que el contenido matemático mejor identificado por los futuros profesores en este problema fue el concepto de probabilidad (16 grupos). Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Probabilidad*" (grupo 10).



El azar y la aleatoriedad es citado por pocos grupos (10 grupos). Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*El alumno deberá primero ser capaz de diferenciar entre situaciones aleatorias y deterministas. Seguidamente deberá ser capaz de estimar la mayor o menor frecuencia con laque ocurren los fenómenos y para resolver el problema plantado debe tener claro la 'intuición de azar"* (grupo 4).

Es también escasa la mención a la estadística (5 grupos); al razonamiento combinatorio o razonamiento lógico (4 grupos), como la siguiente respuesta: "*Este es un caso de razonamiento combinatorio ya que tenemos que enumerar todos los casos en un experimento aleatorio*" (grupo 21); o a la estimación de frecuencias de probabilidad (3 grupos) y a las posibilidades (3 grupos). Un ejemplo es la respuesta siguiente: "*Intuición del azar. Puede salir cualquier bola de cualquier color, a lo mejor en las tres primeras veces se puede sacar una bola de cada color, pero siempre hay que tener presente la posibilidad de que se saquen todas las bolas rojas y verdes, por lo que habría que sacar una más para lograr tener una de cada color*" (grupo 5).

Hicieron referencia a porcentajes (2 grupos) y a diagrama de árbol (2 grupos), como la respuesta siguiente: "*Deben usar un árbol para así controlar el porcentaje de probabilidad, teniendo en cuenta que este partirá con tres ramas y de cada una de ellas otras tres ramas*" (grupo 16).

Por último, citados por un solo grupo aparecen las fracciones, como ejemplo la respuesta siguiente: "*Probabilidad (Fracciones)*" (grupo 7); y operaciones numéricas como la siguiente respuesta: "*Bloque 1: números naturales, operaciones, estrategias de cálculo*" (grupo 19). Destacar que hay siete grupos que no contestan.

Tabla 5.4.3. Contenidos matemáticos identificados por los grupos de futuros profesores en el problema 3 (n=31).

	Objetos identificados	Frecuencia
Correctamente	Probabilidad	16
	Azar (8)/aleatoriedad (2)	10
	Razonamiento combinatorio (3)/lógico (1)	4
	Posibilidades	3
	Porcentajes	2
	Diagrama del árbol	2
	Fracciones	1
	Operaciones numéricas	1
Incorrectamente	Estadística (4)/Gráfico estadístico (1)	5
	Estimación frecuencial probabilidad	3
	No utiliza conocimiento matemático	1
No contesta		7

Se considera que han sido incorrectamente identificados como contenidos matemáticos necesarios para la resolución de este problema los contenidos relacionados con la estadística (5 grupos), como ejemplo la respuesta: *"Los niños se fijan más en los colores que en el nº de bolas"* (grupo 22); y el enfoque frecuencial de la probabilidad (3 grupos), como ejemplo la respuesta: "*Asignación frecuencial*" (grupo 6), ya que en este problema no se utilizan. Por ello se considera que el conocimiento especializado del contenido sobre espacio muestral mostrado por los futuros profesores sería, en consecuencia, muy escaso.

5.4.4. ANÁLISIS DE RESULTADOS EN EL PROBLEMA 4

En la tabla 5.4.4 se observa que el contenido matemático mejor identificado por los futuros profesores en este problema fue el concepto de probabilidad (11 grupos). Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*El alumno posee la noción de probabilidad/estimación frecuencial de probabilidades*" (grupo 4).

El azar y la aleatoriedad (6 grupos) han sido citados por pocos grupos. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Cada uno tiene las mismas posibilidades de ganar, sólo depende del azar*" (grupo 22).

Ha sido también escasa la mención del razonamiento combinatorio o razonamiento lógico (6 grupos), de la estadística (5 grupos) o de la estimación de frecuencias de probabilidad o de frecuencia relativa (4 grupos). Un ejemplo del primer caso, es la siguiente respuesta: "*Se tiene que utilizar un razonamiento combinatorio*" (grupo 21).

Dos grupos en cada caso hicieron referencia a experimentación, posibilidades, fracciones y operaciones numéricas. Por último, citados por un solo grupo aparecen los conceptos de equidad y tabla. No se identifican el espacio muestral, o sucesos, casos favorables o posibles, idea de juego equitativo, valor esperado o razón.

Tabla 5.4.4. Contenidos matemáticos identificados por grupos de futuros profesores (n =31)

	Objetos identificados	Frecuencia
Correctamente	Probabilidad	11
	Azar/aleatoriedad	6
	Razonamiento combinatorio(4)/lógico(2)	6
	Experimento aleatorio	2
	Fracciones	2
	Operaciones numéricas	2
	Posibilidades	2
	Juego equitativo	1
	Tablas	1
Incorrectamente	Estadística(4)/Gráfico estadístico(1)	5
	Estimación frecuencial probabilidad(3)/f.rel(1)	4
	No utiliza conocimiento matemático	1

Sin embargo, sí consideran necesarios para la resolución de este problema conceptos o gráficos estadísticos (5 grupos), como ejemplo la respuesta: "*Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad*" (grupo 15); así como la utilización del enfoque frecuencial de la probabilidad (4 grupos), como ejemplo la respuesta: "*Experimentación y estimación frecuencial de probabilidades*" (grupo 23), que no son pertinentes. Por ello, se considera que el conocimiento especializado del contenido sobre juego equitativo mostrado por los futuros profesores sería, en consecuencia, muy escaso.

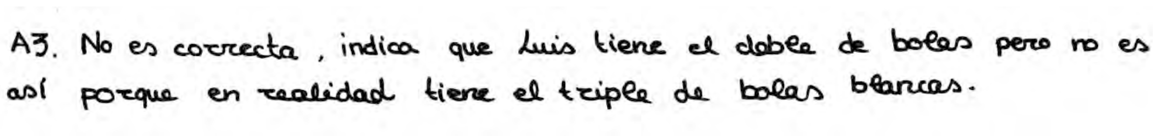
Los resultados de este apartado en los cuatro problemas corroboran la investigación de Chick y Pierce (2008), cuyos profesores que no hicieron un uso adecuado de los datos proporcionados por el investigador al planificar sus lecciones, fallaron en sacar a la luz los conceptos latentes, a pesar de la riqueza de conceptos de la situación didáctica planteada.

5.5. CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO Y LOS ESTUDIANTES

En los dos apartados b) y c) se pide a los futuros profesores evaluar las respuestas de estudiantes de educación primaria a los problemas propuestos e indicar las causas de sus dificultades, con lo que se pretende evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes de los futuros profesores de educación primaria. A continuación analizamos los resultados.

5.5.1. ANÁLISIS DE RESULTADOS EN EL PROBLEMA 1

En la Tabla 5.5.1 se observa que la mayoría de los grupos de futuros profesores fue capaz de discriminar las respuestas correctas e incorrectas a este problema, siendo el caso más difícil de diferenciar el A3, que 8 grupos de futuros profesores consideraron incorrecta, posiblemente porque el niño usa menos elementos matemáticos en su respuesta que las dadas por A6 y A7. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*No es correcta, indica que Luís tiene el doble de bolas pero no es así porque en realidad tiene el triple de bolas blancas*" (grupo 25).


A3. No es correcta, indica que Luis tiene el doble de bolas pero no es así porque en realidad tiene el triple de bolas blancas.

Otros tres grupos de futuros profesores consideraron correcta la respuesta dada por el alumno ficticio A5, asumiendo que los dos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar, manifestando el sesgo de equiprobabilidad que ya se mostró al analizar el conocimiento del contenido matemático, al considerar que todos los sucesos son equiprobables al ser un juego aleatorio. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*El niño debe ser consciente de que se trata de un juego de azar, y que no hay ninguna* *teoría que le confirme de manera exacta quién sacará la bola, ya que es igualdad de condiciones*” (grupo 24).

Tabla 5.5.1. Frecuencia de respuestas consideradas como correctas por los grupos de futuros profesores (n=31).

	Correcta	Incorrecta	En blanco
A1	0	30	1
A2	0	30	1
A3 (Correcta)	22	8	1
A4	0	30	1
A5	3	27	1
A6 (Correcta)	29	1	1
A7 (Correcta)	29	1	1

Si se realiza un análisis entre el resultado de cada uno de los 31 grupos de futuros profesores en la tarea de detectar las respuestas correctas e incorrectas en el problema y el resultado obtenido por cada uno de los futuros profesores pertenecientes al grupo al resolver el problema de forma individual (se trató en el capítulo anterior) se observa lo siguiente:

Hay 22 grupos que han detectado las respuestas correctas al problema, entre los que se encuentran 13 grupos en que todos sus miembros resolvieron el problema correctamente; 5 grupos donde algunos de sus componentes no resolvieron el problema de forma correcta; y 4 grupos donde todos los profesores pertenecientes al grupo resolvieron incorrectamente el problema. Por ello, se considera que la tarea de detectar las respuestas correctas e incorrectas en el problema ha sido más sencilla para los futuros profesores cuando trabajan en grupo que la resolución del problema por cada uno de sus miembros, trabajando de forma individual, debido precisamente a que esta parte se resolvió en pequeños grupos, por lo que el trabajo en colaboración ha influido positivamente en la corrección de la respuesta.

De los nueve grupos que no han detectado las respuestas correctas al problema, encontramos a siete grupos donde sorprendentemente todos sus componentes resolvieron correctamente el problema, mientras que en 2 grupos solo algunos de sus componentes resolvieron el problema de forma correcta. En este último caso, los resultados parecen indicar que los futuros profesores que resolvieron incorrectamente el problema han influido negativamente en el resultado del trabajo en grupo.

En la Tabla 5.5.2 se observa que pocos grupos detectaron las causas de los razonamientos erróneos, dando explicaciones alternativas. La estrategia errónea de comparar solo casos favorables (alumno A2) fue la más reconocida (17 grupos). Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Es falso, porque aunque Luís tenga más bolas blancas, también tiene más bolas negras*" (grupo 26).

A2. "Lleva razón Eduardo porque al tener Luis más bolas blancas la probabilidad de sacar una de ellas es mayor que la de Eduardo".
Es falso porque aunque Luis tenga más bolas blancas, también tiene más bolas negras.

Le sigue la estrategia errónea de comparar solo casos desfavorables (alumno A1) identificada por 13 grupos. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*que al tener menos bolas negras Eduardo es más fácil sacar blancas*" (grupo 12).

Las estrategias aditivas (alumno A4) y el sesgo de equiprobabilidad (alumno A5) han sido menos reconocidas. Un ejemplo del primer caso es la respuesta siguiente: "*Los niños se fijan en las cantidades, como ven que Eduardo tiene menos bolas, pues tiene más probabilidad de sacar una blanca*" (grupo 28).

Tabla 5.5.2. Identificación de dificultades por los grupos de futuros profesores en las respuestas erróneas (n= 31 grupos).

Explicación dada al error del alumno ficticio	A1 Compara casos desfavorables	A2 Compara casos favorables	A4 Estrategia aditiva	A5 Equiprobabilidad
Explicación correcta	13	17	10	9
El alumno no tienen en cuenta proporción de casos favorables y posibles	9	6	10	3
El alumno desconoce la probabilidad	1	1	3	7
No saben explicar la causa del error o dan una explicación no satisfactoria	8	7	8	12

Entre las explicaciones alternativas aportadas por los grupos de futuros profesores destacan no tener en cuenta la proporción entre casos favorables y posibles en las dos urnas o el desconocimiento de la probabilidad por parte de los alumnos. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Desconocimiento del concepto de proporcionalidad que no es capaz de relacionar los dos casos*" (grupo 4).

3. A1: Desconocimiento del concepto de proporcionalidad ya que no es capaz de relacionar los dos casos.

Un alto número de grupos de futuros profesores (entre 7 y 12) no contestan o no saben explicar la causa del error de los diferentes alumnos ficticios. Así, por ejemplo, un grupo de futuros profesores afirma que "*el alumno A1 ha realizado un razonamiento lógico a priori, comparando la cantidad de bolas negras de las dos urnas, pero inconscientemente ha asumido que los dos porcentajes son iguales*" (grupo 8). Esta explicación no es satisfactoria porque el alumno A1 no ha comparado las dos proporciones, sino sólo el número de casos favorables en cada urna.

5.5.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS EN EL PROBLEMA 2

En los dos apartados b) y c) se pide a los futuros profesores evaluar las respuestas de estudiantes de Educación Primaria al problema e indicar las causas de sus dificultades. A continuación analizamos los resultados.

En la Tabla 5.5.3 se observa que la mayor parte de los grupos fue capaz de discriminar las respuestas correctas e incorrectas a este problema, aunque hay un importante número de grupos que no las diferencia. Los casos más difíciles fueron el B5 y B4 donde respectivamente 11 y 9 grupos de futuros profesores consideran que las respuestas dadas son correctas, debido a la creencia de que el juego sólo es justo si los dos jugadores tienen las mismas probabilidades, no utilizando el valor del premio en su respuesta. Un ejemplo de estos grupos es la respuesta del grupo 29: "*Piensan que al tener 6 caras el dado a Esteban le corresponden 6€ pero a él solo le corresponde una cara*"

③ Piensan que al tener 6 caras el dado a Esteban le correspondería
6 € pero a él sólo le corresponde una cara

Otro caso con cierta dificultad fue el B3, que 7 grupos consideran correcta, esperando que en 3 jugadas se equilibre el juego, lo cual es poco probable en una serie tan corta. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*En este caso incluso se da una solución a parte*" (grupo 18).

Tabla 5.5.3. Frecuencia de respuestas consideradas como correctas por los grupos de futuros profesores (n=31).

	Correcta	Incorrecta	En blanco
B1 (Correcta)	30	0	1
B2	0	31	0
B3	7	24	0
B4	9	22	0
B5	11	20	0

Si se realiza un análisis entre el resultado de cada uno de los 31 grupos de futuros profesores en la tarea de detectar las respuestas correctas e incorrectas en el problema y el resultado obtenido por cada uno de los futuros profesores pertenecientes al grupo, al resolver el problema de forma individual (se trató en el capítulo anterior), se observa lo siguiente:

Hay 30 grupos que han detectado la respuesta correcta al problema, entre los que se encuentran 20 grupos en que todos sus miembros resolvieron el problema correctamente; 8 grupos donde algunos de sus componentes no resolvieron el problema de forma correcta; y 2 grupos donde todos los profesores pertenecientes al grupo resolvieron incorrectamente el problema. Por ello, se considera que la tarea de detectar las respuestas correctas e incorrectas en el problema ha sido más sencilla para los futuros profesores cuando trabajan en grupo que la resolución del problema por cada uno de sus miembros, trabajando de forma individual, debido precisamente a que esta parte se resolvió en pequeños grupos, por lo que el trabajo en colaboración ha influido positivamente en la corrección de la respuesta.

En el único grupo (grupo 5) que no ha detectado la respuesta correcta al problema, se observa que todos sus componentes, trabajando de forma individual, resolvieron correctamente el problema.

En la Tabla 5.5.4 se observa que fueron pocos los grupos que detectaron los razonamientos erróneos presentados, optando la mayoría por dar una explicación alternativa. La estrategia errónea mejor reconocida fue el fallo en la proporcionalidad inversa (alumno B2), identificada por 21 grupos. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Esteban debe ganar 5€ ya que tiene una sola oportunidad para ganar y es que salga 1, mientras María tiene 5 oportunidades. Por tanto, el niño se ha equivocado porque no ha hecho bien las cuentas o no se ha fijado en eso*" (grupo 18)

B2. Esteban debe ganar 6€ para que sea justo porque tiene menos posibilidades.

Incorrecto. Esteban debe ganar 5€ ya que tiene una sola oportunidad para ganar y es que salga 1, mientras María tiene 5 oportunidades. Por tanto, el niño se ha equivocado porque no ha hecho bien las cuentas o no se ha fijado en eso.

Le sigue la estrategia errónea de considerar que el juego es equitativo solo si se juega varias veces (alumno B3), identificada por 12 grupos. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*porque los niños se fijan en las posibilidades*" (grupo 28).

Menos reconocida como errónea fue la de considerar que María y Esteban han de tener igual probabilidad (alumnos B4 y B5), identificada por 10 grupos. Un ejemplo en el caso del alumno B4 es la siguiente respuesta: "*Es cierto que María tiene más posibilidades de ganar dinero pero cuando le sale su número gana 1€. El juego es justo porque con una vez que salga 1 Esteban gana 5€*" (grupo 18). Hay tres grupos que consideran que este juego no es equitativo ya que María y Esteban no tienen las mismas oportunidades. Un ejemplo referido al alumno B5, es la respuesta siguiente: "*El alumno piensa que sólo dando las mismas oportunidades el juego es justo*"(grupo 1).

Destacan el alto número de grupos de futuros profesores que consideran correcta la respuesta o no contestan en cada uno de los casos B2, B3, B4 y B5.

Tabla 5.5.4. Identificación de dificultades por los grupos de futuros profesores en las respuestas erróneas (n= 31 grupos).

Explicación dada al error del alumno ficticio	B2 Fallo proporcionalidad inversa	B3 Sólo si juega varias veces	B4 Ha de tener igual probabilidad	B5 Ha de tener igual probabilidad
Explicación correcta	21	12	10	3
Fallo estimación valor del premio		1	2	2
Da un valor del premio al azar	2			
Fallo en la estimación de la frecuencia de aciertos			2	
El alumno no entiende el enunciado o no sabe explicar su razonamiento		1		9
No saben explicar la causa del error o da una explicación no satisfactoria	8	17	17	17

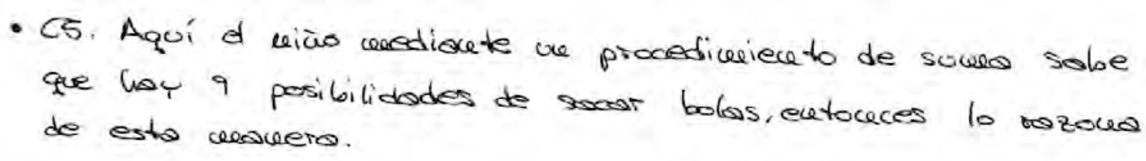
Lo más frecuente es indicar que los alumnos han hecho un razonamiento correcto pero no saben explicarlo, como por ejemplo un grupo de futuros profesores que indica “*(el alumno B5) ha razonado correctamente, pero no ha comprendido la pregunta que le hacen, ya que le preguntan cuánto dinero habría que darle para ser equitativo no de cuantos números le corresponden a uno y otro para ganar*” (grupo 23).

Una explicación alternativa en todos los casos, menos en el B2, es el fallo en la estimación del valor del premio, sin justificar por qué se ha producido tal fallo. En el caso B4, dos grupos indican que los niños no estiman correctamente la frecuencia. Un ejemplo es el siguiente: “*podemos observar que el alumno B4 no se adecua a la estimación de frecuencia, lo que puede ser debido por no tener los conocimientos previos necesarios*” (grupo 16). También se observa un número muy alto de grupos de futuros profesores que no contestan o dan una explicación inadecuada cuando intentan argumentar el razonamiento seguido por los diferentes alumnos ficticios. Por ejemplo, hay un grupo de futuros profesores que afirma que “*la respuesta del alumno B3 es falsa, si a Esteban le dan tres oportunidades le tienen que dar 3 euros*” (grupo 26) y otro grupo que indica que todas las respuestas son verdaderas menos la del alumno B2 “*que piensa que al tener 6 caras el dado a Esteban le corresponden 6 € pero a él solo le corresponde una cara*” (grupo 29).

5.5.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS EN EL PROBLEMA 3

En los dos apartados b) y c) se pide a los futuros profesores evaluar las respuestas de estudiantes de educación primaria al problema e indicar las causas de sus dificultades. A continuación analizamos los resultados.

En la Tabla 5.5.5 se observa que la mayor parte de los grupos de futuros profesores fue capaz de discriminar las respuestas correctas e incorrectas a este problema, aunque también hay algunos grupos a los que les cuesta diferenciarlas. Los casos más difíciles fueron las respuestas C4 y C5 donde respectivamente 7 y 6 grupos de futuros profesores consideran que las respuestas dadas son correctas, debido a que no han sabido distinguir entre el suceso seguro y un suceso posible. Como ejemplo la respuesta de un grupo sobre el alumno C4: “*El niño descubre que el ejercicio se basa en el azar y que existen multitud de posibilidades y variarán los colores y no se podrá estar seguro de los colores que sacarán*” (grupo 25), y la respuesta de otro grupo sobre el alumno C5: “*Aquí el niño mediante un procedimiento de suma sabe que hay 9 posibilidades de sacar bolas, entonces lo razona de esta manera*” (grupo 24).


• C5. Aquí el niño mediante un procedimiento de suma sabe que hay 9 posibilidades de sacar bolas, entonces lo razona de esta manera.

Otro caso con cierta dificultad fue la respuesta C6, que cuatro grupos consideran correcta, debido probablemente a que no comprenden el enunciado del problema que prohíbe explícitamente mirar cuando se sacan las bolas de la caja. Un ejemplo es la siguiente respuesta: “*Está haciendo trampas*” (grupo 11).

Tabla 5.5.5. Frecuencia de respuestas consideradas como correctas por los grupos de futuros profesores (n=31).

	Correcta	Incorrecta	En blanco
C1	1	30	
C2	2	29	
C3 (Correcta)	26	5	
C4	7	24	
C5	6	25	
C6	4	27	

Si se realiza un análisis entre el resultado de cada uno de los 31 grupos de futuros profesores en la tarea de detectar las respuestas correctas e incorrectas en el problema y el resultado obtenido por cada uno de los futuros profesores pertenecientes al grupo al resolver el problema de forma individual (se trató en el capítulo anterior), se observa lo siguiente:

Hay 26 grupos que han detectado la respuesta correcta al problema, entre los que se encuentran 5 grupos en que todos sus componentes resolvieron el problema correctamente; 15 grupos donde algunos de sus componentes no resolvieron el problema de forma correcta; y 6 grupos donde todos los profesores pertenecientes al grupo resolvieron incorrectamente el problema. Por ello, se considera que la tarea de detectar las respuestas correctas e incorrectas en el problema ha sido más sencilla para los futuros profesores cuando trabajan en grupo que la resolución del problema por cada uno de sus miembros, trabajando de forma individual, debido precisamente a que esta parte se resolvió en pequeños grupos, por lo que el trabajo en colaboración ha influido positivamente en la corrección de la respuesta.

De los 5 grupos que no han detectado la respuesta correcta al problema, nos encontramos a 3 grupos donde algunos de sus componentes resolvieron correctamente el problema, mientras que en 2 grupos todos sus componentes también resolvieron incorrectamente el problema. En este caso los resultados obtenidos en grupo y los obtenidos al trabajar sus miembros de forma individual son más similares que en los problemas 1 y 2.

En la Tabla 5.5.6 se observa que pocos grupos detectan las causas de los razonamientos erróneos, dando explicaciones alternativas. La estrategia errónea de confundir el suceso seguro con el espacio muestral (alumno C1) fue la más reconocida

(20 grupos). Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Tres es el número mínimo de bolas que se pueden sacar, pero para estar seguro de sacar una de cada color hay que sacar como máximo 8 bolas*" (grupo 18).

C1. Tres, porque hay tres tipos de colores.

Incorrecta. Tres es el número mínimo de bolas que se pueden sacar, pero para estar seguro de sacar una de cada color hay que sacar como máximo 8 bolas.

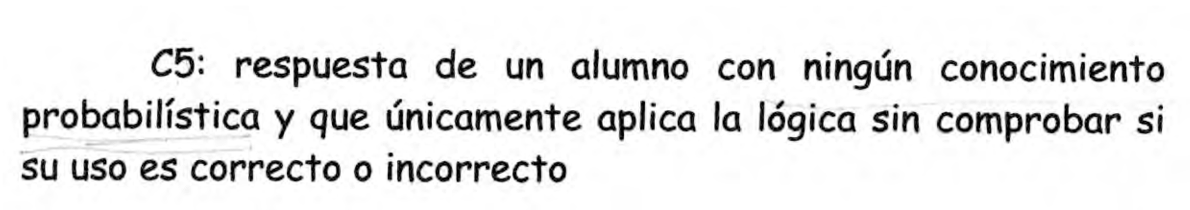
Le sigue la estrategia errónea de confundir el suceso seguro con un suceso posible (alumno C2) identificada por 18 grupos. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Este alumno tiene razón en que puede salir una de cada color, pero debe estar seguro y este no ha tenido en cuenta eso*" (grupo 10). Otra estrategia reconocida por 17 grupos ha sido la no comprender el enunciado del problema (alumno C6). Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*No se puede mirar en la caja, es decir, no ha leído bien el problema*" (grupo 14).

Las estrategias de fallo de razonamiento combinatorio (alumno C5) como la respuesta siguiente: "*El niño va a lo seguro, quiere sacar 9 bolas*" (grupo 13), y la de que nunca se puede estar seguro debido a que es un experimento aleatorio (alumno C4), como la respuesta: "*Su error fue en no predecir que es un juego aleatorio y nunca estamos seguros de lo que va a salir*" (grupo 23), apenas fueron reconocidas como erróneas.

Tabla 5.5.6. Identificación de dificultades por los grupos de futuros profesores en las respuestas erróneas (n= 31 grupos).

Explicación dada al error del alumno ficticio	C1 Confunde seguro esp. muestral	C2 Confunde Seguro posible	C4 Nunca seguro	C5 Fallo raz combina (Sacar todas)	C6 No comprende enunciado (Debe mirar caja)
Explicación correcta (3 sin justificar)	20	18	4+3	5	17
El futuro profesor no lo explica bien		2	5	4	3
Respuesta del alumno no adecuada			1	7	2
El alumno piensa en el azar		3	2		
El alumno no comprende el azar/aleatoriedad	3	1		2	1
El alumno no justifica la respuesta			2		
El alumno no tiene conocimiento de probabilidad	3	1	4	2	1
El alumno no realiza un razonamiento matemático	1	2	1	1	
El alumno no entiende el problema	1		2		1
El alumno no contesta	1	1	1	1	4
Nunca estamos seguros por ser un juego aleatorio	1	1		1	1

Una explicación alternativa aportada por los grupos de futuros profesores en todos los casos es la que indica que los alumnos de primaria han respondido de forma incorrecta debido a que no tienen conocimiento de probabilidad. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*C5. Respuesta de un alumno con ningún conocimiento probabilística y que únicamente aplica la lógica sin comprobar si su uso es correcto o incorrecto*" (grupo 4).


C5: respuesta de un alumno con ningún conocimiento probabilística y que únicamente aplica la lógica sin comprobar si su uso es correcto o incorrecto

Otra explicación alternativa en todos los casos, menos en el C4, es indicar que el alumno no comprende el azar o la aleatoriedad, sin explicitar la causa del posible error. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*En este caso podríamos justificar que el error se produce porque el niño no tiene en cuenta ni la observación ni la aleatoriedad*" (grupo

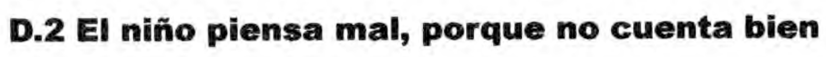
9).

Un pequeño número de grupos de futuros profesores justifica el error en todos los casos, menos en C6, porque el alumno no realiza un razonamiento matemático adecuado. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*C2. Aunque cabe la posibilidad, el alumno se confunde en su respuesta porque no realizar un razonamiento matemático*" (grupo 17).

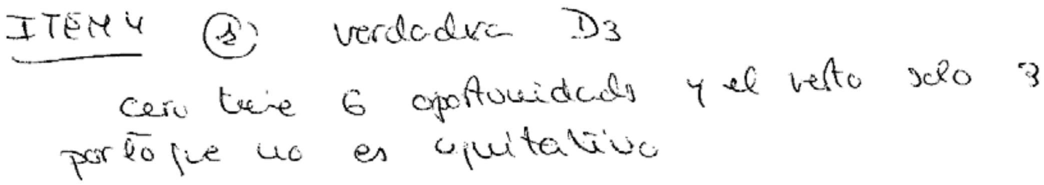
5.5.4. ANÁLISIS DE RESULTADOS EN EL PROBLEMA 4

En los dos apartados b) y c) se pide a los futuros profesores evaluar las respuestas de estudiantes de educación primaria al problema e indicar las causas de sus dificultades. A continuación analizamos los resultados.

En la Tabla 5.5.7 se observa que ha habido cierta dificultad a la hora de discriminar las respuestas correctas e incorrectas al problema. Así, la respuesta correcta dada por D2 de que el juego "No es equitativo pues Carmen tiene doble oportunidad de ganar que Luis" ha sido identificada como tal solo por 14 grupos de futuros profesores frente a 17 grupos que consideraron que dicha respuesta es incorrecta. Un ejemplo es la respuesta: "*D2. El niño piensa mal, porque no cuenta bien*" (grupo 13)


D.2 El niño piensa mal, porque no cuenta bien

Otro caso difícil de discriminar fue la respuesta incorrecta del alumno D3, ya que hay 14 grupos que la consideran correcta. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*D3. Cero tiene 6 oportunidades y el resto solo 3 por lo que no es equitativo*" (grupo 29).


ITEM 4 (2) verdadera D3
cero tiene 6 oportunidades y el resto solo 3
por lo que no es equitativo

El caso más sencillo de discriminar ha sido la respuesta dada por D1 de que "(el juego) Es equitativo, pues cada uno tiene tres oportunidades de ganar" ya que 27 grupos la identificaron como incorrecta y tan solo 4 grupos consideran que es correcta, como ejemplo la siguiente respuesta: "*Porque al ver el conjunto total, ve que los dos tienen 3 números, es decir 3 probabilidades*" (grupo 26). Entre estos grupos hay tres que consideran que hay dos respuestas correctas, que son las dadas por D2 y D3. Y diez grupos que consideran incorrecta la respuesta correcta de D2, ya que aunque están de acuerdo en que el juego no es equitativo, consideran que la justificación de D2 no es adecuada y eligen como respuesta correcta la respuesta incorrecta de D3. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Los alumnos no se paran ha hacer la comprobación matemática de cuántas posibilidades tienen con cada número*" (grupo 17).

Tabla 5.5.7. Frecuencia de respuestas consideradas correctas por los grupos de futuros profesores (n = 31)

	Correcta	Incorrecta
D1	4	27
D2 (correcta)	14	17
D3	14	17

Si se realiza un análisis entre el resultado de cada uno de los 31 grupos de futuros profesores en la tarea de detectar las respuestas correctas e incorrectas en el problema y el resultado obtenido por cada uno de los futuros profesores pertenecientes al grupo al resolver el problema de forma individual (se trató en el capítulo anterior), se observa lo siguiente:

Hay 14 grupos que han detectado la respuesta correcta al problema, entre los que se encuentra solo un grupo en que todos sus miembros resolvieron el problema correctamente; tres grupos donde algunos de sus componentes no resolvieron el problema de forma correcta; y 10 grupos donde todos los profesores pertenecientes al grupo resolvieron incorrectamente el problema. Por ello, se considera que la tarea de detectar las respuestas correctas e incorrectas en el problema ha sido más sencilla para los futuros profesores cuando trabajan en grupo que la resolución del problema por cada uno de sus miembros, trabajando de forma individual, debido precisamente a que esta parte se resolvió en pequeños grupos, por lo que el trabajo en colaboración ha influido positivamente en la corrección de la respuesta.

De los 17 grupos que no han detectado la respuesta correcta al problema, nos encontramos a 3 grupos donde algunos de sus componentes resolvieron correctamente el problema, mientras que en 14 grupos todos sus componentes también resolvieron incorrectamente el problema. En este caso los resultados obtenidos en grupo y los obtenidos al trabajar sus miembros de forma individual son también más similares que en los problemas 1 y 2.

En la Tabla 5.5.8 se observa que pocos grupos detectan las causas de los razonamientos erróneos, optando la mayoría por dar una explicación alternativa. La estrategia errónea mejor reconocida ha sido el fallo en el razonamiento combinatorio (alumno D1), identificada por 12 grupos. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*No es equitativo porque hay más posibilidades de que salga la diferencia de puntos 0 que 3*" (grupo 3).

D1: No es equitativo porque hay más posibilidades de que salga la diferencia de puntos 0 que 3.

Menos reconocida fue la estrategia de considerar que el juego es equitativo solo si la diferencia 0 sale el mismo número de veces que la diferencia 3 (alumno D3), que solo ha sido identificada por cuatro grupos. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Es incorrecto ya que los dos tienen 3 posibilidades*" (grupo 31).

Tabla 5.5.8. Identificación de dificultades por los grupos de futuros profesores en las respuestas erróneas de los niños (n = 31)

Explicación dada al error del alumno ficticio	D1 Fallo raz. combinatorio	D3 Fallo raz. combinatorio
Explicación correcta	12	4
El alumno no comprende bien la idea de juego equitativo	3	1
El alumno ha considerado números en lugar de diferencias	2	
El alumno no comprende/no lee el problema	2	1
El alumno se centra solo en la diferencia cero		2
No saben explicar la causa del error	6	8

Entre las explicaciones alternativas facilitadas por los futuros profesores en los dos casos, la primera ha sido la de que los alumnos no comprenden bien la idea de juego equitativo, pero sin explicar por qué, y la segunda considerar que los alumnos no han comprendido correctamente el enunciado del problema. En el caso del alumno D1 dos grupos indican que el error ha sido debido a que los niños han considerado números en lugar de diferencias. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Este alumno sólo tiene en* *cuenta que el dado tiene 6 lados, lo que no se para a pensar es que tiene que calcular la diferencia de puntos entre el mayor y el menor que salga en el dado"* (grupo 21). En el caso del alumno D3 dos grupos afirman que los niños se han centrado solo en la diferencia 0. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*Se han equivocado porque intuitivamente piensan que al existir la posibilidad de que cero salga 6 veces, que salgan el resto es 1/3 de posibilidad*" (grupo 27).

En ambos casos destaca el importante número de grupos de futuros profesores que no explica la causa del error cometido por el alumno o que da una explicación ambigua. Un ejemplo es la siguiente respuesta: "*El alumno se ha equivocado posiblemente debido a una existencia de cálculo por su parte, ya que cree que al tener los dos un margen de error de 3 números, tienen que haber las mismas probabilidades, pero esto no ocurre. Es una insuficiencia matemática, ya que no tiene los conocimientos necesarios para la resolución del problema*" (grupo 9).

Los resultados de este apartado en los cuatro problemas corroboran los obtenidos por Watson (2001), donde en un estudio para evaluar el conocimiento de los profesores sobre las dificultades de sus estudiantes con la probabilidad, encontró que sólo dos profesores de primaria de los participantes mencionaron haber encontrado dificultades.

5.6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este capítulo se ha tratado de evaluar algunos conocimientos didácticos de los futuros profesores de educación primaria en relación con la idea de juego equitativo y espacio muestral. El objetivo del estudio era el siguiente:

Objetivo 2. Analizar el conocimiento especializado y el conocimiento del contenido y los estudiantes de los futuros profesores de educación primaria sobre el juego equitativo y el espacio muestral.

Para lograr este objetivo se propuso a los futuros profesores diferentes consignas, siguiendo la metodología propuesta por Godino (2009) y Godino y cols. (2011), para evaluar el conocimiento didáctico del contenido de la probabilidad. Para evaluar el conocimiento especializado del contenido matemático sobre el juego equitativo y el espacio muestral, se les pidió que identificaran los contenidos matemáticos involucrados en los cuatro problemas del cuestionario. Los resultados se han analizado en la primera parte del capítulo, donde se realizó un análisis de las respuestas de los 31 grupos de futuros profesores que muestra que el conocimiento especializado del contenido respecto a la idea de juego equitativo y del espacio muestral en los participantes es claramente insuficiente. Aunque, al pedir a los futuros profesores que identificaran los contenidos matemáticos en las tareas propuestas trabajando en grupo, muchos grupos fueron capaces de reconocer en las tareas las ideas de probabilidad y el uso de la regla de Laplace, sólo la tercera parte identifican la comparación de fracciones, y menos aún la proporcionalidad, aleatoriedad, espacio muestral, comparación de probabilidades, juego equitativo. No se identifican los conceptos de esperanza matemática o proporcionalidad inversa ni el razonamiento combinatorio implícitos en algunas de las tareas.

En este punto, nuestros resultados apoyan las conclusiones de Chick y Pierce (2008), quienes, en un estudio sobre el trabajo con proyectos estadísticos, indican que algunos profesores no son capaces de identificar los conceptos latentes en una situación didáctica relacionada con la estadística o probabilidad.

La falta de capacidad para reconocer los objetos matemáticos necesarios para trabajar con una tarea, incluso cuando los futuros profesores utilizaron dichos objetos al resolver correctamente los problemas planteados, es un motivo de preocupación, pues podría dificultar algunas de las actividades que realiza el profesor, tales como “indagar lo que los estudiantes conocen, elegir y manejar representaciones de las ideas matemáticas, seleccionar y modificar los libros de texto, decidir entre modos posibles de acción” (Ball, Lubienski, y Mewborn, 2001, p. 453). Estas tareas dependen claramente de su conocimiento especializado del contenido y, en vista de nuestros resultados, sería necesario mejorar este conocimiento en los futuros profesores, si queremos asegurar su éxito al realizar dichas actividades profesionales en la clase de probabilidad.

Para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes de los futuros profesores, se les pidió que, a partir de las respuestas facilitadas por alumnos de educación primaria, identificaran cuáles eran correctas o incorrectas así como las posibles dificultades o errores que presentan estos alumnos.

Los resultados, obtenidos por los 31 grupos de futuros profesores, indican que fueron capaces de discriminar con facilidad las respuestas correctas e incorrectas de dichos alumnos de primaria a los problemas, debido posiblemente a que muchos de ellos habían resuelto correctamente los problemas. Fue mucho menor el conocimiento mostrado de las posibles razones de los errores en las respuestas, ya que en muchos grupos hubo una inconsistencia entre la clasificación de una respuesta (como incorrecta) y la razón dada para explicar el error (indicando que la respuesta era correcta y el alumno no supo explicarse). Los razonamientos erróneos mejor identificados fueron en el primer problema, la comparación solo de los casos favorables o desfavorables; en el segundo problema, el fallo en el razonamiento proporcional y el requerimiento de jugar varias veces para considerar un juego equitativo; en el tercer problema, la confusión entre el suceso seguro y el espacio muestral y entre el suceso seguro y el suceso posible; en el cuarto problema, el sesgo de equiprobabilidad y el fallo en la estimación de casos posibles. En resumen, los futuros profesores en este estudio muestran algunos conocimientos del contenido y los estudiantes, al reconocer las respuestas erróneas, pero la habilidad para explicar los errores de los estudiantes es insuficiente, lo que coincide con el estudio de evaluación realizado por Watson (2001). Sería necesario mejorar la formación en este punto, dándoles a conocer los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad, que habría que transmitirles mediante una adecuada transposición didáctica previa.

En este trabajo completamos los estudios previos sobre los conocimientos probabilísticos de futuros profesores, y proporcionamos resultados originales sobre el conocimiento especializado y el conocimiento del contenido y los estudiantes, que no han sido tenidos en cuenta en la investigación previa. Estos resultados sugieren que dichos conocimientos podrían ser insuficientes y apoyan el interés de realizar una evaluación inicial de los futuros profesores al iniciar su periodo de formación, para detectar estas carencias, y proporcionarles un refuerzo sobre estos conceptos, en caso necesario.

Una implicación de interés para los formadores de profesores es la necesidad de mejorar la formación de los futuros profesores de educación primaria, tanto en su conocimiento especializado del contenido matemático como en el conocimiento del contenido y los estudiantes en el ámbito de la probabilidad. Respecto a la metodología, para llevar a cabo esta formación, se sugiere proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas de los conceptos que se desean enseñar. Para prepararlos en la componente didáctica, serán de gran ayuda situaciones relacionadas con la docencia, como las usadas en este trabajo. Las nuevas tecnologías y los foros de discusión pueden ser también un vehículo formativo, que permita a los profesores intercambiar experiencias y ganar conocimiento de la práctica educativa (Viseu y Ponte, 2009). Resaltamos también la necesidad de continuar la investigación sobre otros componentes del conocimiento del profesor en el campo de la probabilidad, como paso necesario para mejorar la formación de los profesores.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

6.1. INTRODUCCIÓN

En esta memoria hemos presentado tres estudios de evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. En todos ellos, hemos utilizado las nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la Cognición e Instrucción Matemática propuesto por Godino y sus colaboradores: Teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994; 1998 a y b); Teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005); Enfoque Ontosemiótico para la investigación en Didáctica de la Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) y Modelos del Conocimiento de los profesores (Godino, 2009; Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi, 2011) .

Este marco teórico nos ha permitido analizar las respuestas de los estudiantes a los problemas de probabilidad propuestos en cada uno de los estudios. Los dos primeros, descritos en los capítulos 3 y 4, para determinar el conocimiento matemático de los futuros profesores sobre probabilidad. El tercero, para determinar el conocimiento didáctico de los futuros profesores sobre el contenido de probabilidad, en particular el conocimiento especializado y el conocimiento del contenido y los estudiantes.

En este capítulo final, presentamos las principales conclusiones generales obtenidas en el estudio completo respecto a los objetivos generales de la investigación, indicando además las principales aportaciones derivadas del mismo y sus limitaciones. Finalizamos con algunas implicaciones didácticas para la formación de profesores y sobre las posibles líneas de investigación para continuar el estudio.

6.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo general de esta investigación definido en el Capítulo 1 era *evaluar el conocimiento que tienen los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*.

Toda la investigación ha estado orientada a cumplir este objetivo y consideramos que lo hemos logrado de forma razonable, pues se ha obtenido información detallada sobre el conocimiento de los futuros profesores de educación primaria participantes en el estudio sobre probabilidad, en sus diferentes significados. Sin entrar a discutir este objetivo, pasamos a detallar los objetivos específicos que están contenidos en el anterior.

Objetivo específico 1. Evaluar el conocimiento común del contenido de la probabilidad que tienen los futuros profesores de educación primaria.

Este objetivo se abordó mediante dos estudios de evaluación. En el primero, descrito en el capítulo 3, se presenta un estudio exploratorio para evaluar los conocimientos matemáticos de una muestra de 102 futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad, donde se les propuso resolver siete problemas elementales de comparación de probabilidades, en contextos de urnas y en otros que contienen elementos distractores de tipo subjetivo. Fueron tomados de Green (1983) y de Fischbein y Gazit (1984), y son problemas con respuestas de opciones múltiples, debiendo justificar adecuadamente la elección realizada. El análisis de las respuestas a estos problemas permitió describir el conocimiento matemático de los futuros profesores sobre la probabilidad, definiendo categorías de respuestas correctas e incorrectas así como las estrategias utilizadas en la resolución de los mismos.

Además de cumplir este primer objetivo planteado en la investigación, en este estudio se confirma la hipótesis 1, ya que el análisis de los resultados indicó que la mayoría de los futuros profesores de educación primaria participantes en el estudio mostró un conocimiento común insuficiente del contenido de probabilidad, pues tuvieron dificultades para resolver de forma correcta los problemas propuestos, incurrieron en sesgos, utilizaron estrategias incorrectas en la resolución de los mismos y manifestaron una percepción incorrecta de la independencia.

La proporción de futuros profesores que responden de forma correcta es bastante baja, siendo en algunos casos solo del 25%. Aunque se observa una mejora respecto a la media global de resultados de los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997), en todos los problemas excepto en el primero, estos resultados son preocupantes dada la sencillez de los problemas y el nivel de conocimiento que se supone deberían tener los futuros profesores.

Hay una alta proporción de futuros profesores que cometen errores, tanto en los problemas que involucran comparación de fracciones como en los que incluyen elementos subjetivos. Entre ellos se pueden citar los que están relacionados con la falta de razonamiento proporcional, la dificultad para comparar dos fracciones e incluso errores de cálculo.

Existe un alto porcentaje de futuros profesores que incurren en sesgos relacionados con la probabilidad, destacando el sesgo de equiprobabilidad. Ello puede ser debido, entre otros factores, a la gran influencia que han tenido los elementos subjetivos presentes en el enunciado de algunos problemas.

En relación con las estrategias utilizadas, los futuros profesores de educación primaria hacen mayor uso de estrategias correctas y, en general multiplicativas y correspondencias, lo cual corresponde a mayor razonamiento proporcional. Sin embargo, todavía hay un grupo importante que basa la elección como más probable de la urna con mayor número de bolas del color favorable y que utiliza estrategias aditivas, propias de niños en las etapas pre-operacional y concreta según Piaget e Inhelder (1951), y que serían improcedentes en estos problemas.

En algunos problemas hay menor porcentaje de estrategias correctas que de respuestas correctas, lo que implica la existencia de respuestas correctas mediante un razonamiento inadecuado. Otras estrategias utilizadas por un grupo más reducido de futuros profesores han sido la comparación del número de casos posibles, comparación del número de casos desfavorables, y estrategias que hacen referencia a la suerte y a hacer trampas.

En el segundo estudio, detallado en el capítulo 4, presentamos una evaluación del conocimiento común del contenido de la probabilidad de una muestra de 283 futuros profesores de educación primaria, donde se les propuso resolver 15 problemas relacionados con los conceptos de probabilidad simple, juego equitativo, probabilidad frecuencial, probabilidad compuesta, probabilidad geométrica, muestreo y variable aleatoria, en contextos de urnas, de situaciones reales y otros que contienen elementos subjetivos. Estos problemas, tomados de Green (1983), de Fischbein y Gazit (1984), y uno de un libro de texto, son con respuestas de opciones múltiples, debiendo justificar adecuadamente la elección realizada. Este cuestionario contiene algunos problemas del estudio exploratorio mencionado anteriormente, pero ha sido completado y mejorado con el fin de cubrir los diferentes elementos del significado de la probabilidad (Batanero, 2005). El análisis de las respuestas a dichos problemas permitió describir el conocimiento común del contenido de la probabilidad de los futuros profesores participantes en este estudio, definiendo categorías de respuestas correctas e incorrectas así como las estrategias utilizadas en la resolución de los mismos. Realizamos además un análisis detallado de los argumentos utilizados por los futuros profesores para justificar sus respuestas, comparando los resultados con los obtenidos por los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997) y con los de otras investigaciones citadas en los antecedentes.

Además de cumplir el primer objetivo planteado en la investigación, en este segundo estudio se vuelve a confirmar la hipótesis 1, ya que el análisis de los resultados indicó que la mayoría de los futuros profesores de educación primaria participantes en el estudio mostró un conocimiento común insuficiente del contenido de probabilidad, pues tuvieron dificultades para resolver de forma correcta los problemas propuestos, incurrieron en sesgos, utilizaron estrategias incorrectas en la resolución de los mismos y manifestaron una percepción incorrecta de la independencia.

La proporción de respuestas correctas no supera el 50% en ocho problemas, destacando como más difíciles el problema 10 sobre muestreo (4.9%), el problema 9 sobre juego equitativo (11.3%), el problema 13 sobre variable aleatoria (11.7%) y el problema 14 de probabilidad compuesta (14.1%). Estos deficientes resultados, como indica Watson (2001), pueden ser debidos a que los futuros profesores de primaria no se encuentran cómodos usando los conceptos probabilísticos, ya que supone un grado mayor de incertidumbre para ellos. Coinciden en algunos casos con los obtenidos en las investigaciones previas consultadas, y en otros son mejores o peores, como se ha visto de forma detallada en el apartado de conclusiones y discusión del capítulo 4.

En todos los problemas hay un porcentaje de futuros profesores que no contesta, destacando los resultados obtenidos en el problema 9 sobre juego equitativo (20.5%), en el problema 10 sobre muestreo (16.3%), en el problema 1 sobre espacio muestral (11.7%), en el problema 14 sobre probabilidad compuesta (9.9%) y en el problema 15 sobre probabilidad frecuencial (7.1%). Estos porcentajes, en general, se ven aumentados cuando han de justificar las respuestas dadas.

Existe un alto porcentaje de futuros profesores que incurren en los diferentes sesgos relacionados con la probabilidad, especialmente el *sesgo de equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992), que consiste en creer que todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio son equiprobables, que ha aparecido en casi todos los problemas, y la *heurística de representatividad*, (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) consistente en juzgar la probabilidad de una muestra en base a su similitud con la población de la que se toma, que ha aparecido en los problemas sobre aleatoriedad y muestreo. Este último sesgo, según Godino, Batanero y Cañizares (1987), puede tener su origen en el desconocimiento de los efectos del tamaño de la muestra sobre la precisión de las estimaciones o en errores de azar, como la *falacia del jugador*, según la cual, en pruebas repetidas independientes, la aparición de una racha a favor de un resultado aumenta la probabilidad del contrario.

Otra dificultad que manifiesta un alto porcentaje de futuros profesores es una incorrecta percepción de la independencia, que les impide aplicar adecuadamente este concepto y que ha influido negativamente en los resultados obtenidos. Coincide con los resultados obtenidos por Truran y Truran (1997) con estudiantes, así como con los obtenidos por Serrano (1996) y Batanero, Arteaga, Ruiz y Roa (2010) con futuros profesores de educación primaria.

Hay una alta proporción de futuros profesores que cometen errores, tanto en los que involucran comparación de fracciones como en los que incluyen elementos subjetivos. Los errores están relacionados con la confusión entre suceso seguro y posible, falta de razonamiento combinatorio, dificultad en la comparación de probabilidades, utilización de estrategias incorrectas, falta de razonamiento proporcional, percepción incorrecta de la equitatividad en juegos aleatorios, no valorar adecuadamente la información probabilística de naturaleza frecuencial, y en basar sus respuestas en aspectos irrelevantes de la tarea. Destaca el alto porcentaje de profesores que manifiestan la creencia de que en los experimentos propuestos no se puede saber la respuesta correcta porque son juegos aleatorios, ya que el resultado depende del azar, la suerte o el destino.

Objetivo específico 2. Evaluar el conocimiento del contenido pedagógico de la probabilidad de los futuros profesores de educación primaria.

Para llevar a cabo este objetivo, presentamos en el capítulo 5, un estudio de evaluación del conocimiento especializado y del contenido y los estudiantes sobre probabilidad, de una muestra de 70 futuros profesores de educación primaria, realizado a partir del análisis cuantitativo y cualitativo de sus respuestas, trabajando en grupos de dos o tres profesores (31 grupos en total).

Dicho cuestionario consta de cuatro problemas, extraídos del cuestionario utilizado para la evaluación del conocimiento del contenido matemático de la probabilidad, en el que hemos incluido las consignas indicadas en el modelo propuesto por Godino (2009) y Godino y cols. (2012), para evaluar el conocimiento del contenido pedagógico. Por un lado, se les pide analizar los contenidos matemáticos necesarios para resolver los problemas propuestos, para evaluar de este modo su conocimiento especializado del contenido matemático. Por otro, se les pregunta, que para cada una de las respuestas incorrectas indiquen las posibles estrategias incorrectas o dificultades que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea, para así evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes.

Además de cumplir el segundo objetivo planteado en la investigación, en este estudio se ha confirmado la hipótesis 2, ya que el análisis de los resultados indicó que la mayoría de los futuros profesores de educación primaria participantes en el estudio mostró un conocimiento insuficiente del contenido pedagógico de la probabilidad, pues tuvieron dificultades para reconocer los contenidos matemáticos necesarios para resolver los problemas propuestos y para localizar las posibles estrategias incorrectas o dificultades que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea.

En cuanto al conocimiento especializado, los resultados analizados son claramente insuficientes, ya que sólo la tercera parte identifican la comparación de fracciones, y menos aún la proporcionalidad, aleatoriedad, espacio muestral, comparación de probabilidades, juego equitativo. No se identifican los conceptos de esperanza matemática o proporcionalidad inversa ni el razonamiento combinatorio implícitos en algunas de las tareas. Nuestros resultados apoyan las conclusiones de Chick y Pierce (2008), quienes indican que algunos profesores no son capaces de identificar los conceptos latentes en una situación didáctica relacionada con la estadística o probabilidad.

La falta de capacidad para reconocer los objetos matemáticos necesarios para trabajar con una tarea, incluso cuando los futuros profesores utilizaron dichos objetos al resolver correctamente los problemas planteados, es un motivo de preocupación, pues podría dificultar algunas de las actividades que realiza el profesor, tales como “indagar lo que los estudiantes conocen, elegir y manejar representaciones de las ideas matemáticas, seleccionar y modificar los libros de texto, decidir entre modos posibles de acción” (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001, p. 453). Estas tareas dependen claramente de su conocimiento especializado del contenido y, en vista de nuestros resultados, sería necesario mejorar este conocimiento en los futuros profesores, si queremos asegurar su éxito al realizar dichas actividades profesionales en la clase de probabilidad.

Y por último, en cuanto al conocimiento del contenido y los estudiantes, los resultados analizados indican que los futuros profesores fueron capaces de discriminar con facilidad las respuestas correctas e incorrectas de dichos alumnos de primaria a los problemas, debido posiblemente a que muchos de ellos habían resuelto correctamente los problemas. Fue mucho menor el conocimiento mostrado de las posibles razones de los errores en las respuestas, ya que en muchos grupos hubo una inconsistencia entre la clasificación de una respuesta (como incorrecta) y la razón dada para explicar el error (indicando que la respuesta era correcta y el alumno no supo explicarse).

Los razonamientos erróneos mejor identificados fueron el fallo en el razonamiento proporcional, el requerimiento de jugar varias veces para considerar un juego equitativo, la confusión entre suceso seguro y espacio muestral o entre suceso seguro y suceso posible.

En resumen, los futuros profesores en este estudio muestran algunos conocimientos del contenido y los estudiantes, al reconocer las respuestas erróneas, pero la habilidad para explicar las posibles dificultades de los estudiantes es insuficiente, tal como ha sido descrito en el estudio de Watson (2001). Sería necesario mejorar la formación en este punto, dándoles a conocer los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad, que habría que transmitirles mediante una adecuada transposición didáctica previa.

6.3. APORTACIONES E IMPLICACIONES DEL ESTUDIO.

Resumimos a continuación las principales aportaciones de esta investigación, que consideramos de interés para la formación de profesores en probabilidad.

En este trabajo completamos los estudios previos sobre los conocimientos probabilísticos de los futuros profesores de educación primaria, y proporcionamos información original respecto a su conocimiento común del contenido de la probabilidad en sus diferentes enfoques y variedad de conceptos tratados, complementando el trabajo de Azcárate (1995). Aunque el cuestionario utilizado ha sido tomado de investigaciones previas, el análisis de las respuestas al mismo ha sido mucho más detallado, lo que asegura una mayor validez, respecto a las originales. Por otro lado, el mayor tamaño de la muestra utilizada en el estudio de evaluación del conocimiento común, descrito en el capítulo 4, permite dotar de mayor fiabilidad a nuestros resultados.

Así mismo, proporcionamos información detallada sobre los principales sesgos en el razonamiento probabilístico que manifiestan los futuros profesores, fundamentalmente el *sesgo de equiprobabilidad*, que ha aparecido en casi todos los problemas, y la *heurística de representatividad,* que ha aparecido en los problemas sobre aleatoriedad y muestreo. La incorrecta percepción de la independencia de los sucesos o de los experimentos también ha tenido una incidencia negativa en los resultados.

Se han identificado errores en relación con el conocimiento común de la probabilidad, que confirman los hallazgos obtenidos en las investigaciones previas, y que se han descrito de forma más detallada. Fueron los siguientes: confusión entre suceso seguro y posible, falta de razonamiento combinatorio, dificultad en la comparación de probabilidades, utilización de estrategias incorrectas, falta de razonamiento proporcional, percepción incorrecta de la equitatividad en juegos aleatorios, no valorar adecuadamente la información probabilística de naturaleza frecuencial, basar sus respuestas en aspectos irrelevantes de la tarea y considerar que al ser experimentos aleatorios los problemas propuestos no se puede determinar la respuesta correcta porque es un juego aleatorio, ya que el resultado depende del azar, la suerte o el destino.

Sobre el conocimiento especializado y el conocimiento del contenido y los estudiantes de los futuros profesores, proporcionamos también resultados originales que no han sido tenidos en cuenta en las investigaciones previas consultadas. Aunque las tareas propuestas en el cuestionario han sido limitadas, estos resultados sugieren que dichos conocimientos podrían ser insuficientes y apoyan el interés de realizar una evaluación inicial de los futuros profesores al iniciar su periodo de formación, para detectar estas carencias, y proporcionarles un refuerzo sobre estos conceptos, en caso necesario.

Hemos realizado un estudio de las investigaciones previas relacionadas con nuestro objetivo de investigación, que hemos organizado en dos partes diferenciadas. En la primera, se incluye un análisis detallado de las investigaciones relacionadas con la probabilidad y la formación de profesores. En la segunda parte, analizamos las investigaciones que tratan sobre la comprensión de la probabilidad por parte de los estudiantes, en particular sobre el desarrollo cognitivo de conceptos fundamentales en probabilidad.

Una implicación de interés para los formadores de profesores es la necesidad de mejorar la formación de los futuros profesores de educación primaria, tanto en el conocimiento del contenido matemático de la probabilidad como en el conocimiento pedagógico. Respecto a la metodología, para llevar a cabo esta formación, se sugiere proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del significado de la probabilidad (Batanero, 2005). Para prepararlos en la componente didáctica, serán de gran ayuda situaciones relacionadas con la docencia, como las usadas en este trabajo.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, tal y como indican Godino y cols. (2011) se deberían proponer itinerarios formativos para los futuros profesores, que mejorasen su formación matemática y didáctica, que evitaran los sesgos observados en el razonamiento probabilístico y que los hicieran competentes para reconocer los contenidos matemáticos necesarios para resolver de forma correcta un problema y para identificar los errores en las respuestas dadas por estudiantes y las posibles razones que pueden explicarlos. Esta reforma debe ser urgente, ya que como hemos observado en esta investigación, los porcentajes de respuestas correctas y las estrategias utilizadas por los futuros profesores en varios problemas son muy similares a las empleadas por los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997). Es por tanto preocupante que los futuros profesores cometan los mismos errores que los estudiantes a los que han de formar

Las nuevas tecnologías y los foros de discusión pueden ser también un vehículo formativo, que permita a los profesores intercambiar experiencias y ganar conocimiento de la práctica educativa (Viseu y Ponte, 2009). Resaltamos también la necesidad de continuar la investigación sobre otros componentes del conocimiento del profesor en el campo de la probabilidad, como paso necesario para mejorar la formación de los profesores.

Destacar finalmente que todos estos resultados, a lo largo del período de elaboración de la Tesis, se han publicado en revistas, en comunicaciones y actas de congresos internacionales y nacionales de Didáctica de la Matemática y en libros específicos sobre Investigación y Formación de profesores en Educación Estadística, destacando Mohamed y Ortiz (2012); Mohamed y Ortiz (2011); Mohamed, Ortiz y Serrano (2011); Mohamed, Ortiz y Serrano (2012); Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006); Ortiz, Mohamed y Contreras (2011); Ortiz, Mohamed, Contreras y Serrano (2010); Ortiz, Mohamed y Serano (2010); Ortiz, Mohamed, Serrano y Rodríguez (2008); Ortiz, Mohamed, Serrano y Rodríguez (2009); Ortiz, Serrano y Mohamed (2009).

6.4. LIMITACIONES DEL ESTUDIO.

En el estudio para evaluar el conocimiento común de los futuros profesores de educación primaria, descrito en el capítulo 4, se ha utilizado una muestra de tamaño suficiente, no obstante se puede aumentar. Lo mismo se puede decir del estudio realizado para evaluar el conocimiento didáctico de los futuros profesores, descrito en el capítulo 5, donde han participado 70 estudiantes, distribuidos en 31 grupos. Por ello, no se pretende generalizar los resultados obtenidos, sino que somos conscientes de que solo se refieren al grupo de futuros profesores participantes y a los problemas planteados.

Para aumentar la representatividad de los resultados se podrían seleccionar futuros profesores de educación primaria de otras universidades españolas o de otros países, siempre teniendo presente los diferentes contextos curriculares donde se desarrollara el trabajo.

Los datos han sido obtenidos mediante cuestionarios escritos, sin tener una interacción directa con los participantes; por lo tanto, no pueden describirse de una forma exhaustiva la complejidad y riqueza de los conocimientos de los futuros profesores. Los resultados se podrían completar con entrevistas clínicas en profundidad a los futuros profesores que presenten los sesgos más importantes, con la finalidad de explicar con detalle las causas de los mismos.

El trabajo se ha centrado en la evaluación del conocimiento matemático de los futuros profesores, con un peso menor en el conocimiento especializado y en el conocimiento del contenido y los estudiantes del profesor, sobre el cual se podría profundizar en nuevos estudios.

6.5. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

A partir de las limitaciones de nuestro trabajo, indicadas en el apartado anterior, surgen nuevas líneas de investigación para continuar el análisis del conocimiento de los profesores de educación primaria sobre probabilidad.

a) Ampliar el tamaño de la muestra con nuevos futuros profesores de educación primaria, incluyendo a los que cursan las nuevas Titulaciones de Grado de Maestro en Educación Primaria y en Educación Infantil.

b) Comparar nuestros resultados con futuros profesores de educación primaria de otras universidades, lo que puede contribuir a tener una visión global del problema, detectando las semejanzas o diferencias entre dichos colectivos.

c) Profundizar en la evaluación de los diferentes tipos de conocimiento del profesor.

d) Extender estos estudios a profesores de educación primaria en activo, de los que existen pocas investigaciones.

e) Ampliar los problemas del cuestionario incluyendo un mayor número de problemas y utilizando diferentes contextos.

f) Elaborar propuestas de enseñanza para la formación de futuros profesores y profesores en activo de educación primaria que mejoren su conocimiento para la enseñanza.

REFERENCIAS

Acredolo, C., O'Connor, J., Banks, L. y Horobin, K. (1989). Children's ability to make probability estimates: Skills revealed through application of Anderson's functional measurement methodology. *Child Development, 60*, 933-945.

Amir, G. y Williams, J. S. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(10), 85-107.

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis Doctoral inédita. Universidad de Cádiz.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51,241-247.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problema of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Bar-Hillel, M. (1983). The base-rate fallacy controversy. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 39-62). Amsterdan: North-Holland.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática, 8*(3), 247-263.

Batanero, C., Arteaga, P., Ruiz, B. y Roa, R. (2010). Assessing pre-service teachers conceptions of randomness through project work. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eight International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM]. Lubjana: International Association for Statistical Education.

Batanero, C., Burril, G. y Reading, C. (2011). Overview: challenges for teaching statistics in school mathematics and preparing mathematics teachers. In C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School-Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 407-418), DOI 10.1007/978-94-007-1131-0, Springer. The original publication is available at http://www.springerlink.com/

Batanero, C., Burril, G., Reading, C. y Rossman, A. (2008). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Cahllenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. On line: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train Preservice School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. CD ROM. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*. Recuperado el 5 de septiembre de 2003 de: http://www.amstat.org/publications/jse/

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 181-199.

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). New York: Springer.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, 15-28.

Batanero, C., Serrano, L. y Green, D. R. (1998). Randomness, its meanings and implications for teaching probability. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 29 (1), 113-123.

Begg, A. y Edwards, R. (1999). *Teachers ideas about teaching statistics.* Paper presented at the combined annual meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education. Melbourne, Australia.

Bentz, H. J. y Borovcnik, M. G. (1982). Stochastics teaching based on common sense. En D. R. Grey y cols. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 276-284). University of Sheffield.

Biggs, J. B. y Collins, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behavior. In H. A. H. Eowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona: P.P.U.

Borovcnik, M., Bentz, H. J. y Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-73). Dordrecht: Kluwer.

Brown, C. y Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York, NY: Macmillan.

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas VII*, 57-85.

Buxton, R. (1970). Probability and its measurement. *Mathematics teaching*, 49, 4-12 y 50, 56-51.

Callingham, R. y Watson, J. (2011). Measuring Statisitical Pedagogiclal Knowledge. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 283-293). New York: Springer.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cañizares. M. J. y Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO*, 14, 99-114.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997). Subjective elements in children's comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed). *Proceedings of the 21st Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.2, pp. 49-56). Lahti.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, 37, 37-55.

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad*. Tesis Doctoral. Cádiz: Universidad de Cádiz.

Cardeñoso, J. M., Azcárate, P. y Serradó, A. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal, 4*(2), 59-81.

Carnell, L. J. (1997). *Characteristics of reasoning about conditional probability (preservice teachers)*. Unpublished doctoral dissertation, University of North Carolina-Greensboro.

Carretero, M., Pérez Echeverría, M. P. y Pozo, J. I. (1985). *El aprendizaje de las nociones de proporción, probabilidad y correlación durante la adolescencia y la vida adulta.* Madrid: Universidad Autónoma.

Chick, H. L. y Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: Beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE study: Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE round table conference*. Mexico: ICMI/IASE.

Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). *The mathematical education of teachers*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research methods.* London: Sage.

Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools*, 17(1/2), 173-182

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general.* Barcelona: Lumen.

Einhorn, H. J. y Hogarth, R. M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin. 99*, 3-19.

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). New York: Springer.

Erickson, T. (2001). *Data in depth: Exploring mathematics with Fathom.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática 11*, 99-119.

Estrada, A. (2002). Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado. Universidad Autónoma de Barcelona.

Estrada, A. y Díaz, C. (2006). Computing probabilities from two way tables. An exploratory study with future teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching of Statistics*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CD ROM.

Estrada, A. y Díaz, C. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO, 44*, 48-58.

Even, R. y Ball, D. (2008). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer.

Falk, R. (1981). The perception of randomness. *Proceedings of the V PME Conference.* Grenoble, 222-229.

Falk, R. (1983). Children's choice behavior in probabilistic situations. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, y G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 714-716). Sheffield, England: Teaching Statistics Trust.

Falk, R. (1988). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson y J. Swift (Eds.), *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 714-716). Victoria, BC, Canada: University of Victoria.

Falk, R., Falk, R. y Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 181-204.

Falk, R. y Wilkening, F. (1998). Children's construction of fair chances: Adjusting probabilities. *Development Psychology, 34*(6), 1340-1357.

Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*. Méjico: Limusa.

Fernandez, A. y Rico, L. (1984). *Prensa y Educación Matemática.* Madrid: Síntesis.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics,* 15(1), 1-24.

Fischbein, E., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children in adolescence. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 523-549.

Fischbein, E. Pamput, E. y Minzat, I. (1967). The child's intuition of probability. *Enfance*, *2*, 193-280.

Fischbein, E., Pamput, E. y Minzat, I. (1970). Comparison of fractions and the chance concepts in children. *Child Development, 41*, 365-376

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 96-105.

Fine, T. L. (1973). *Theories of Probability: An examination of foundations.* New York: Academic Press.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Gattuso, L., y Pannone, M. A. (2002). Teacher's training in a statistics teaching experiment. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* [CD-ROM], Hawthorn, VIC, Australia: International Statistical Institute.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161). Chichester, England: Wiley.

Gil, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos.* Barcelona: P. P. U.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En: L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-417-424), Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet : URL : http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématigues,* 14(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Educations. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics education a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.). *IX Seminário de Ivestigaçao em Educaçao Matemática (p. 25-45).* Associaçao de Profesores de Matemática. Portugal.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39(1-2), 127-135. (Versión ampliada en español disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino)

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60* (1), 3-36.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). *Assesing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work.* En C. Batanero, G. Burril, C. Reading y A. Rossman (2008).

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática.

Recherches en Didactiques des Mathematiques (aceptado).

Godino, J. D., Ortiz, J. J., Roa, R. y Wilhelmi, M. (2011). Models for Statistical Pedagogical Knowledge. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 271-282). New York: Springer.

Goezt, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years.* Ph. Dissertation. University of Loughborough.

Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3.000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). University of Sheffield.

Green, D. R. (1989). Schools students' understanding of randomness. In R. Morris (Ed): *Studies in Mathematics education. v.7: The Teaching of Statistics* (pp. 27-39). París: Unesco.

Green, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D.Vere Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 320 - 328). Dunedin: University of Otago.

Greer, B. y Ritson, R. (1994). *Readiness of teachers in Northern Ireland to teach data handling*. Paper presented at the Fourth International Conference on Teaching Statistics, Marrakech, Morocco.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge University Press. Cambridge.

Haller, S. K. (1997). *Adopting probability curricula: The content and pedagogical content knowledge of middle grades teachers*. Tesis Doctoral. University of Minnesota.

Hart, K. (1981). *Children’s understanding of Mathematics:11-16*. J. Murray, Londres.

Hawkins, A., Jolliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. London: Longman.

Hawkins, A. y Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability. A psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 349-377.

Heinz, K., Kinzel, M., Simon, M. A. y Tzur, R. (2000). Moving students through steps of mathematical knowing: An account of the practice of an elementary mathematics teacher in transition. *Journal of Mathematical Behavior, 19,* 83-107.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. En *Educational Studies in Mathematics,* 6, (187-205).

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 372-400.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning (*pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing Inc. Y NCTM.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje.* Madrid: Gredos.

Hope, J. A. y Kelly, I. W. (1983). Common difficulties with probabilistic reasoning. *Mathematics Teacher, 76,* 565-570.

Hopfsenberger, P., Kranendonk, H. y Scheaffer, R. (1999). *Data driven mathematics: probability through data*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Horvath, J. K. y Lehrer, R. (1998). A model-based perspective on the development of children's understanding of chance and uncertainty. In S. P. Lajoie (Ed.), Reflections *in statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12* (pp. 121-148). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Huberman, A. M. y Miles, F. M. (1994). Data management and análisis methods. En D. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-444). London: Sage.

Jansem, S. (2005). *Using instruction to trace thinking and beliefs in probability of primary students*. Unpublished doctoral dissertation, Srinakharinwirot University, Bangkok, Thailand.

Jones, G.A. (2007). Research in probability. Responding to classroom realities. En F. K. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 957-1008. NCTM. Greenwich, CT.

Jones, G., Langrall, C. y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Greenwich, CT: Information Age Publishing y NTCM.

Jones, G. A., Langrall, C W., Thornton, C. A. y Mogill, A. T. (1997). Framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 101-125.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A. y Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 487-519.

Jones, G. A. y Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the learning and teaching of probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 65-92). New York: Springer.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W. y Mogill, T. A. (1996). Using children's probabilistic thinking to inform instruction. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v2, pp. 137-144). Universidad de Valencia.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kahneman, D., y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive Psychology, 3,* 430-454.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983a). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983b). Early adolescents' proportional reasoning on rate problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 219-233.

Kelley, H. (1973). The process of causal attribution. *American Psychologist*, *28*, 107-128.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6*, 59-98.

Konold, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

Konold, C., Lohmeier, J., Pollatsek, A. y Well, A. (1991). *Novices views on randomness*. Comunicación presentada en el XIII PME Conference.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Lohmeier, J. y Lipson, A, (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics*

Education, 24(5), 392-414.

Kvatinsky, T. y Even, R. (2002). Framework of teacher knowledge and understanding of probability. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM]. Voorburg, Netherlands: International Statistical Institute.

Lecoutre, M. P. (1985). Effect d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur le judgments probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6*, 193.213.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

Lecoutre, M. P. y Cordier, J. (1990). Effect du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP, 372,* 9-22.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: etude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 357-368.

Lidster, S. T., Pereira-Mendoza, L., Watson, J. M. y Collis, K. F. (1995). *What us faur fir grade 6?*. Comunicación presentada en el Annual Conference of the Australian Association for Research in Education, Hobart, Tasmania.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (students) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.

Lindley, D. V. (1980). *Introduction to probability and statistics from the Bayesian viewpoint*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM] Salvador (Bahía) Brasil: International Statistical Institute.

Maury, S. (1984). La quantification des probabilities: analyse des arguments utilises par les élèves de classe de seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5(2), 187-214.

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato.* Tesis doctoral. Universidad de

Granada.

Metz, K. E. (1998a). Emergent ideas of chance and probability in primary-grade children. In S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assesment in grades K12* (pp. 149-174). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Metz, K. E. (1998b). Emergen understanding and attribution of randomness: Comparative analisys of reasoning of primary grade children an undergraduates. *Cognition and Instruction, 16*, 285-365.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006a). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006b). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan las enseñanzas mínimas.*

Mohamed, N. (2006). *Problemas de comparación de probabilidades. Un estudio experimental con maestros en formación*. Trabajo de investigación tutelada. Granada: Universidad de Granada.

Mohamed, N. y Ortiz, J. J. (2011). Creencias sobre la aleatoriedad de futuros profesores de educación primaria. En M. M. Moreno, N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM* (pp. 253-265). Lleida.

Mohamed, N. y Ortiz, J. J. (2012). Evaluación de conocimientos de profesores en formación sobre el juego equitativo. *Números*, (en prensa).

Mohamed, N., Ortiz, J. J. y Serrano, L. (2011). Evaluación del conocimiento y las creencias de profesores en formación sobre la probabilidad. En J. J. Ortiz (Ed.), *Investigaciones actuales en Educación estadística y formación de profesores* (pp. 133-146). Melilla. ISBN: 978-84-694-4597-6.

Mohamed, N., Ortiz, J. J. y Serrano, L. (2012). Evaluación del conocimiento sobre juego equitativo en futuros profesores. En Clame. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Ed.), *RELME 26 Vigésima Sexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Resúmenes*, (en prensa). Ouro Preto.

Brasil

Moore, D. (1995). *The Basic practice of statistics.* New York: Freeman.

Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los tests*. Madrid, Pirámide.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Nicholson, J. R., y Darnton, C. (2003). Mathematics teachers teaching statistics: Wat are the challenges for the classroom teacher? *In proceedings of the 54th Session of the International Statistical Institute.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Nisbett, R. y Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgments*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ration concept. Part I: Diferentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11* (2), 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at succesive stages: problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in mathematics, 11*(3), 331-363.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO, 5*, 37-55.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.

Ortiz, J. J., Mohamed, N. y Contreras, J. M. (2011). Significado personal del enfoque frecuencial de la probabilidad en profesores en formación. En P. Leston. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.* 24, (pp. 989-998). México D. F. (México).

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Contreras, J. y Serrano, L. (2010). Significado personal del enfoque frecuencial de la probabilidad en profesores en formación. En Clame. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Ed.), *RELME 24 Vigésima Cuarta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Resúmenes*, (p. 108). Ciudad de Guatemala. Guatemala.

Ortiz, J. J., Mohamed, N. y Serrano, L. (2010). Probabilidad frecuencial en profesores en formación. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. Santander: SEIEM. CD ROM.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2008). Asignación de probabilidades en profesores en formación. En Clame. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Ed.), *RELME 22 Vigésima Segunda Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Resúmenes*, (pp. 138-139). México D. F. Méjico.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2009). Asignación de probabilidades en profesores en formación. En P. Leston. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa A. C.* 22 (pp. 1545-1554). México D. F. (México).

Ortiz, J. J., Serrano, L. y Mohamed, N. (2009). Competencias de los futuros profesores de primaria sobre la probabilidad. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 95-115). Melilla. ISBN: 978-84-692-4151-6.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: MEC y Morata.

Peard, R. F. (1990). Probabilistic concepts in school mathematics. *Australian Mathematics Teacher*, 46(2), 14-15.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education for primary teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics*.

Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Universidad Autónoma.

Pérez Echeverría, M. P., Carretero, M. y Pozo, J. I. (1986). Los adolescentes ante las matemáticas: Proporción y probabilidad. *Cuadernos de Pedagogía.* 133, 9-13.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. En F. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-

315). Charlotte, NC: Information Age Publishing y NTCM.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. Routledge y Kegan Paul. London.

Polaki, M. V. (2002a). Using instruction to identify key features of Basotho elementary students' growth in probabilistic thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 4*, 285-314.

Polaki, M. V. (2002b). Using instruction to identify mathematical practices associated with Basotho elementary students' growth in probabilistic reasoning. *Canadian Journal for Science, Mathematics and Technology Education, 2*, 357-370.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). *Understanding conditional probabilities. Organitation, Behavior and Human Decision Processes, 40*, 255-269.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Pozo, J. A. (1987). *Aprendizaje de la ciencia y pensamiento causal*. Madrid: Visor.

Pratt, D. (1998). The co-ordination of meanings for randomness. *For the Learning of Mathematics, 18*(3), 2-11.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal of Research in Mathematics Education, 31*, 602-625.

Ritson, R. (1998). *The development of primary school children's understanding of probability*. Unpublished thesis, Queen's University, Belfast, Ireland.

Sánchez, E. (1999). *Significado de la regresión y correlación para estudiantes universitarios*. Universidad de Granada.

Sánchez, E. S. (2002). Teachers' beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* [CD-ROM]. Hawthorn, VIC, Australia: International Statistical Institute.

Secretaría de Educación Pública (2006). *Programa de estudio, educación secundaria.*

Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

Schlottmann, A. y Anderson, N. H. (1994). Children's judgements of expected value. *Developmental Psychology*, 30(1), 56-66.

Scott, P. (1988). *Introducción a la investigación y evaluación educativa.* México: UNAM.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, C. (2005). Randomness in textbooks: the influence of the deterministic thinking. *Proceedings of CERME 4.* On line: http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/SerradAzcarCarde.pdf

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Shaughnessy, J. M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small-group, activity-based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies in Mathematics*, *8*, 285-316.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.

Shaughnessy, J. M. (2003). Research on students’ understanding of probability. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, y D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 216-226). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shaughnessy, J. M. y Ciancetta, M. (2002). Students’ understanding of variability in a probability environment. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics: Developing a statistically literate society*. Cape Town: International Statistics Institute. CD-ROM.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en la enseñanza. En M. C. Wittrock (Ed.), *La investigación en la enseñanza* (v.1, pp. 9-92). Barcelona: Paidós.

Singer, J. A. y Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 231-246.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-224). Charlotte, N.C: Information Age Publishing y NCTM.

Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. In R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 135-167). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stohl, H. (2004). *Middle school teachers development of stochastic understanding as it applies to pedagogical understanding when using simulations.* Manuscript in preparation.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). Nueva York: Springer.

Tarr, J. E. (1997). *Using research-based knowledge of students' thinking in conditional probability and independence to inform instruction*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Normal.

Tarr, J. E. y Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning*. New York: Springer.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York, NY: Macmillan.

Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada.* México: Limusa.

Toohey, P. G. (1995). *Adolescent perceptions of the concept of randomness*. Unpublished Master Thesis. University of Adelaide.

Truran, J. M. y Truran, K. M. (1997). Statistical independence: One concept or two? En B. Phillips (Ed.), *Papers from Statistical Education Presented at Topic Group 9, ICME 8* (pp. 87–100), Victoria: Swinburne University of Technology.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridg University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty:*

Heuristics and biases (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridg University Press.

Vahey, P., Enyedy, N. y Gifford, B. (1997). Beyond representativeness: Productive intuitions about probability. *Comunicación presentada en la Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Stanford Un versity, Palo Alto, CA.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landu (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press.

Viseu, F. y Ponte, J. (2009). Desarrollo del conocimiento del futuro profesor de Matemática con apoyo de las TIC's. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. Relime v.12, n.3. México. 2009.

Voigt, J. (1996). Negotiation of mathematical meaning in classroom processes: Social interaction and learning mathematics. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 21-50). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Washintong, D. C.: Falmer Press.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education 4(4),* 305-337.

Watson, J. M. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 145-168). New York: Springer.

Watson, J. y Collis, K. F. (1994). Multimodal functioning in understandi chance and data concepts. En J. P. Ponte and J. P. Matos (Eds), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (v4, pp. 369-376). Universidad de Lisboa.

Watson, J. M., Collis, K. F. y Moritz, J. B. (1997). The development of chance measurement. *Mathematics Education Research Jornal, 9*, 60-82.

Watson, J. D. y Moritz, J. B. (2002). School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematics Education in Science and Techonology, 33*(1), 59-84.

Way, J. (1996). Children's strategies for comparing two types of random generators. In L. Puig y A. Gutierres (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp.