Azar y probabilidad en la Escuela Primaria, ¿Qué podemos aprender de la investigación?

Ernesto Sánchez, CINVESTAV, México

Carmen Batanero, Universidad de Granada, España

Cuando un maestro o maestra comienza a trabajar con los niños la probabilidad, puede apoyarse en juegos como lanzar monedas o dados, girar ruletas o sacar bolas de urnas; pero muchas veces no sabe qué hacer exactamente con estos juegos ni cómo los niños aprenden probabilidad. En este trabajo describimos lo que se conoce sobre cómo razonan los niños con la probabilidad con el fin de orientar la práctica docente.

¿Comprende el niño el azar?

Lo primero necesitamos saber es a qué edad el niño comienza a diferenciar el azar del determinismo. Piaget e Inhelder (1951) se plantearon esta misma pregunta, concluyendo que los niños explican el azar como el resultado de varias causas, que actuando a la vez y de forma independiente, producen un resultado impredecible. Este razonamiento se puede observar mostrando a los niños una bandeja que tiene en uno de sus extremos dos compartimentos; en uno de los cuáles se colocan 8 bolas negras y en el otro 8 blancas (Figura 1).

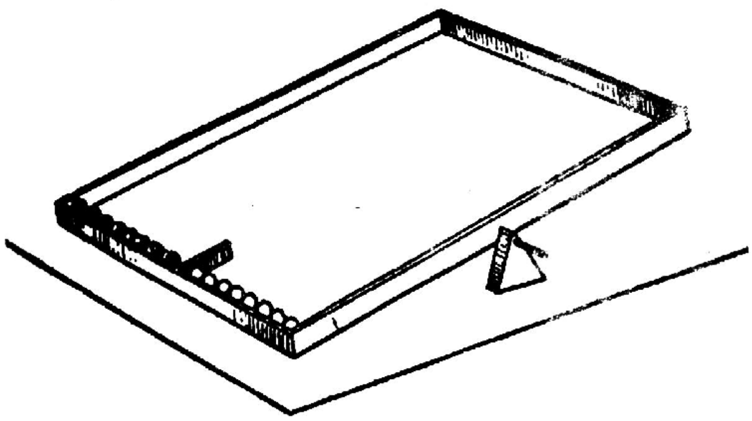

Figura 1. Bandeja usada por Piaget e Inhelder: Al mover la bandeja, las bolas, que al principio están ordenadas, se mezclan progresivamente

Si apoyamos la bandeja en un soporte, como muestra la figura, de forma que se pueda hacer bascular, al repetir el movimiento varias veces las bolas blancas y negras, que al principio estaban separadas, se mezclan al azar. Podemos observar el razonamiento de los niños haciéndoles preguntas sobre cómo se colocarán las bolas blancas y negras en los dos compartimentos, si repetimos muchas veces el movimiento de la bandeja.

Los niños de preescolar (hasta 5 o 6 años) responderán que, si movemos muchas veces la bandeja, las bolas terminarán en la posición inicial. También pueden responder que todas las bolas blancas acabarán en el lugar ocupado originalmente por las negras, y viceversa. Esta respuesta típica de los niños de esta edad se debe a que los niños no comprenden que las bolas se mezclen en forma aleatoria, pues su pensamiento es todavía muy determinista. Además el niño de esta edad no comprende bien la relación entre causa y efecto, en este caso, no entiende por qué el movimiento de la bandeja hace que se mezclen las bolas. Tampoco es capaz de pensar en todas las posibles formas en que pueden colocarse las bolas blancas y negras, porque no puede imaginar todas las permutaciones de objetos. Todo ello lleva a Piaget a pensar que estos niños no pueden comprender el azar.

A partir de 7 años, el niño comienza a desarrollar un razonamiento lógico y matemático, aunque todavía muy ligado al nivel concreto. Puede comprender que la posición final de las bolas (o el resultado de un juego de azar parecido) es impredecible, pero todavía no es capaz de imaginar todas las posibilidades. Cuando llega a esta comprensión, aparece la idea de probabilidad, como cociente de las posibilidades de un caso particular entre el conjunto total de posibilidades. Por tanto, la idea de azar, para Piaget no se comprende totalmente hasta los 11-12 años, en que se desarrolla el razonamiento combinatorio.

Este estudio de Piaget es completado por Fischbein (1975), quien, discutiendo las teorías de Piaget, sugiere que los niños pueden tener una intución del azar y diferenciar fenómenos aleatorios y deterministas antes de los 7 años. Fischbein se basa en el hecho observado de que en juegos de azar sencillos, por ejemplo, con dados o con ruletas, son capaces de elegir la opción de mayor probabilidad. También opina que la enseñanza es necesaria para que el pensamiento probabilística se desarrolle de una forma completa.

Comparación y estimación de probabilidades

Una vez que el niño distingue las situaciones aleatorias, surge la pregunta de si es capaz de estimar o comparar la probabilidad de diferentes sucesos. A esta edad nos hemos de limitar a situaciones donde el conjunto de resultados es finito y los resultados son equiprobables; por ejemplo, lanzamiento de una moneda o extracción de bolas de colores de una urna. En estos casos, si hay n resultados diferentes, la probabilidad de cada resultado es 1/n; por ejemplo, al lanzar un dado, cada resultado tiene probabilidad 1/6. Esta suposición se debe obtener de un análisis de cada situación concreta. En el ejemplo, suponemos que el dado se ha construido con material homogéneo y de manera que sean lo más cercano posible a un cubo perfecto; es razonable pensar que al arrojar un dado con esas condiciones cada cara tenga tantas posibilidades de caer como cualquier otra cara del mismo dado. En cambio, en un experimento en el que se observa a un jugador de basquetbol cuando va a realizar un tiro libre, no se puede suponer que cada resultado (encestar o no) tiene las mismas posibilidades de ocurrir.

Enfoque clásico de la probabilidad

Piaget e Inhelder (1951) también analizaron la capacidad de los niños para comparar probabilidades. Ellos pensaron que el niño de preescolar (hasta 7 años) es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, pues, según su teoría no posee el concepto de proporción ni los procedimientos combinatorios. Fischbein (1975) indicó que, a pesar de ello, el niño puede estimar probabilidades en situaciones sencillas. Una de estas situaciones, usada también por Piaget en sus experimentos es pedir al niño que elija, entre dos urnas o cajas con diferente número de bolas blancas y negras, aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola blanca (se proporciona al niño cajas transparentes con fichas de dos colores o bien un dibujo de las mismas):

> En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál caja elegirías?

En una primera etapa (hasta 7 años) los niños pueden resolver este problema de comparación de probabilidades de un mismo suceso (sacar ficha negra) en dos experimentos diferentes, pero sólo cuando el número de casos favorables (las fichas negras) o el número de casos desfavorables (las fichas blancas) son iguales en ambos experimentos. En una segunda etapa (7-11 años) ya pueden resolver este problema, cuando el número de casos favorables y desfavorables están en proporción; por ejemplo, en la caja A ponemos 2 bolas negras y 4 blancas y en la B 3 fichas negras y 6 blancas.

Tabla 1. Estrategias de los niños para comparar probabilidades

Estrategia	Edad	Descripción
a. Comparación del número de casos posibles	2-3 años	Elegir la caja que contenga mayor número de fichas
b. Comparación del número de casos favorables	4 años	Elegir la caja que contenga más fichas del color favorable. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos desfavorables es igual en las dos cajas.
c. Comparación del número de casos desfavorables	7 años	Elegir la caja con menor número de fichas del color desfavorable cuando el número de casos favorables es igual. Resuelve el problema correctamente cuando el número de casos favorables es igual en las dos cajas.
d. Estrategias aditivas	8-11 años	Elegir la caja donde la diferencia entre casos favorables y desfavorables sea mayor. Se tienen en cuenta todos los datos pero no se usan proporciones.
e. Estrategia de correspondencia	12-13 años	Establecer la proporción entre el número de casos favorables y desfavorables en una de las cajas y comparar con la composición de la otra, eligiendo la caja que de mayor proporción. Resuelve el problema correctamente cuando hay una proporción entre casos favorables y posibles en las cajas
f. Estrategias multiplicativas	12-14 años	Aplicar la regla de Laplace. Compara las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables en las urnas; resuelve todos los problemas de este tipo.
g. Otros tipos,		Hacer referencia a la suerte; elegir el color favorito, etc.

A partir de 12-13 años, cuando los niños comienzan a poder comparar fracciones con diferente denominador, ya podrían resolver este problema con cualquier número de bolas blancas y negras en cada urna. Muchos otros autores han analizado las estrategias que siguen los niños al comparar probabilidades. Reproducimos la tabla 5.1 una síntesis de las mismas.

Aunque esta idea de probabilidad (como cociente de casos favorables y posibles) parece simple, frecuentemente los niños tienen ideas propias acerca de las situaciones de azar que no corresponden a las de la teoría, aun cuando ésta se les haya enseñado. Algunos niños no creen en la equiprobabilidad de juegos en los que se suele suponer esta propiedad; otros piensan que hay resultados que pueden depender de la suerte de la persona. Por ejemplo, si hacemos la siguiente pregunta podemos encontrar muchos niños e incluso alguno de secundaria que piense que el 6 ocurre con menor frecuencia, debido a su experiencia en el juego del parchís (donde han de esperar al 6 para poder comenzar el juego).

> 4. ¿Cuando se arroja un dado ordinario de 6 caras qué número es más difícil de ocurrir? o ¿todas las caras tienen las mismas probabilidades de ocurrir?

También podemos encontrar en los niños razonamientos parecidos a los siguientes:

> No se puede predecir lo que vas a obtener. Algunas veces obtengo 6 a la primera, pero otras veces tengo que esperar mucho para que salga.
>
> Mi hermana tiene mucha suerte, ella obtiene el 6 ocho veces seguidas…

Refiriéndose al lanzamiento de dos dados:

> Hay más probabilidad de obtener números diferentes que el mismo número en ambos dados. Pero mi mamá es muy buena para obtener el mismo número en ambos dados

Estos razonamientos de los niños vienen de tres fuentes: el conocimiento formal que adquieren en la escuela, sus creencias y sus experiencias personales. Por otro lado, en contraste con la resistencia a aceptar que ciertos juegos son equiprobables, otra concepción extrema es lo que se conoce como *sesgo de la equiprobabilidad.* Este consiste en asignar la misma probabilidad a los resultados de experiencias aleatorias en situaciones en las que los resultados no tienen la misma probabilidad.

Los ejemplos anteriores se basan en la definición clásica de la probabilidad (cociente de casos favorables y posibles). Hemos visto que su correcta aplicación depende de las características de la situación, las creencias de los niños respecto al azar y la suerte y sus experiencias personales.

Enfoque frecuencial de la probabilidad

Otro enfoque de la probabilidad es el *frecuencial* donde la probabilidad se estima experimentalmente. Para ello se organiza un experimento (por ejemplo, el lanzamiento de un dado) y se repite un número grande de veces. La probabilidad de cada suceso (por ejemplo, obtener el número 3) se estima a partir de la frecuencia relativa de veces que apareció el suceso en el total de experimentos. Esta estimación será mejor conforme aumenta el número de repeticiones de la experiencia; pues teóricamente si se repitiera la experiencia un número infinito de veces, la frecuencia relativa tiende la probabilidad teórica del suceso. En la práctica, puesto que no se puede realizar un número infinito de ensayos, se obtiene sólo una *estimación* de la probabilidad teórica, a partir de la frecuencia relativa en un número grande de ensayos. Un aspecto importante en este enfoque es entender, la diferencia entre probabilidad (valor teórico constante que nunca alcanzamos) y frecuencia relativa (estimación experimental de la probabilidad, que puede cambiar de una estimación a otra). También hay que comprender que los resultados individuales de cada experiencia son *impredecibles*, mientras que el comportamiento general de un gran número de resultados sí se puede *predecir*. Así, no sabemos si el siguiente niño que nazca es un varón o una mujer, pero, en todos los nacimientos que ocurrirán hoy en el mundo, aproximadamente la mitad serán niños y el resto niñas.

El enfoque frecuencial se ve hoy dia facilitado por el software educativo que permite repetir experimentos aleatorios simulados un gran número de veces y observar su tendencia. Por ejemplo, en la Biblioteca Nacional de Manipulativos Virtuales podemos encontrar un juego de ruleta (http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_2_t_5.html) que permite elegir el número de colores diferentes en la ruleta y el número de sectores de cada color. Los resultados pueden irse guardando al girar la ruleta, para observar la tendencia en un diagrama de barras.

Figura 2. Applet sobre juego de ruleta

Aplicación en el aula

Las investigaciones y tareas que hemos descrito pueden ser usadas directamente o adaptadas para trabajar en el aula desde el comienzo de la educación primaria. Para ello el maestro debe tener en cuenta las dificultades que hemos analizado en el aprendizaje de la probabilidad. Rsperamos que la información dada al maestro sobre estas tareas para desarrollar los conceptos probabilísticos y los razonamientos de los niños con esos conceptos, le permita ofrecer a los niños buenas oportunidades de aprendizaje de esta materia. Esta información puede ampliarse en Godino, Batanero y Cañizares (1987), donde también proponemos actividades didácticas para enseñar probabilidad.

Referencias y bibliografía

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortíz, J. J. (1997). Evaluación del razonamiento probabilístico en niños de 10 a 14 años. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 297-300). Universidad de Granada

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1999). Influencias de creencias subjetivas de origen sociocultural en el pensamiento probabilístico de los alumnos de 10 a 14 años. En I Berenguer y cols. (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la Sociedad* (pp. 197-203). Granada: Sociedad Thales.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. *J.* (1999). Comprension de la idea de juego equitativo en los niños. *Números, 37,* 37-55. Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L., y Ortiz J. J. (2002). Un estudio de la estabilidad de la heurística de equiprobabilidad en alumnos de 11 a 14 años. *Zetetiké,* 15-16, 99-118. ISSN: 0104-4877.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic reasoning in children.* Dordrech: Reidel.

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Ortiz, J. J. Serrano, L., Cañizares, M. J. y Batanero, C. (2005). Ideas sobre aleatoriedad en alumnos de primaria y secundaria. *Publicaciones, 35,* 109-123.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Sánchez, E. y Batanero, C. (2011). Manejo de la información. En E. Sánchez (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Casos y perspectivas* (pp. 64-92). México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.