# PROBABILIDAD, GRADO DE CREENCIA Y PROCESO DE APRENDIZAJE[1]

[(1)] Carmen Batanero y [(2)] Carmen Díaz
[(1)] Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, batanero@ugr.es
[(2)] Departamento de Psicología, Universidad de Huelva, carmen.diaz@dpsi.uhu.es

RESUMEN

La deducción por Bayes en 1763 de su famoso teorema llevó a una conclusión inesperada: Las probabilidades de las causas podrían revisarse en función de las consecuencias observadas y perderían su carácter objetivo. Una nueva visión de la probabilidades como grados de creencia personal, basadas en el conocimiento previo y los nuevos datos, hace innecesaria la repetición del experimento en las mismas condiciones. El teorema de Bayes, aplicado sucesivamente, permite formalizar el proceso de aprendizaje a partir de la experiencia y unificar la metodología de la inferencia.

En este trabajo analizamos la visión subjetiva de la probabilidad y las consecuencias que se deducen para la inferencia estadística. Presentamos, asimismo, algunas situaciones cotidianas que permiten introducir esta visión en los últimos cursos de educación secundaria, junto con algunos recursos didácticos (tablas, diagramas en árbol y recursos en Internet) que facilitan a los estudiantes la comprensión del teorema de Bayes y el aprendizaje de técnicas de resolución de problemas.

ABSTRACT

The publication by Bayes in 1763 of its famous theorem lead to an unexpected conclusión: The probabilities of causes might be revised as a function of observed consequences and would loss their objective character. A new vision of probability as personal degree of belief, based on the previous knowledge and new data make unnecessary the repetition of an experiments in the same conditions. The Bayes' theorem, successively applied allow to formalize the process of learning from experience and to unify the inference methodology.

In this work we analyze the subjective vision of probability and its consequences for statistical inference. We also present some everyday situations useful to introduce this vision in the last courses of secondary education. Some didactic resources (tables, tree diagrams and Internet tools) can facilitate students' understanding of Bayes' theorem and the learning of new problem solving techniques.

[1] Ponencia Invitada en las *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.* Granada, Julio, 2007. Federación Española de Profesores de Enseñanza de las Matemáticas.

## 1. Introducción

Más allá de su comprensión intuitiva, la probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidades a favor y en contra, evidencia proporcionada por los datos, grado de creencia lógico o personal, propensión y modelo matemático que nos ayuda a comprender la realidad. El análisis de los diferentes significados históricos de la probabilidad: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo, lógico, propensión y axiomático (Batanero, 2005; Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Batanero y Díaz, en prensa) sugiere que su enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, ya que están ligadas dialécticamente.

Un análisis del currículo de matemáticas en la educación secundaria muestra que la enseñanza ha dado primacía a uno u otro significado, de acuerdo a las tendencias pedagógicas del momento, ya que las controversias que acompañaron la historia de la probabilidad, también han influido las tendencias educativas. Hasta 1970, la visión clásica, basada en cálculo combinatorio fue la dominante y muchos profesores vieron la probabilidad como una parte secundaria de las matemáticas, que sólo se interesaba por los juegos de azar, quedando ocultas sus aplicaciones a diferentes ciencias, donde la equiprobabilidad se encuentra raramente. Puesto que el razonamiento combinatorio es complejo, además muchos estudiantes encontraron difícil este enfoque. En la década de los 70, el auge de la teoría de conjuntos aumentó el interés de los matemáticos por la probabilidad, al ser una parte privilegiada para mostrar su aplicabilidad, tanto por su simplicidad, como por su conexión con la realidad. El enfoque axiomático, sin embargo, llevó a una abstracción excesiva para los alumnos de secundaria, puesto que se centró más en la formalización de la idea de probabilidad y el estudio de sus propiedades matemáticas que en su aplicabilidad a temas de interés para los estudiantes (Henry, 1997).

El desarrollo progresivo de los ordenadores y su introducción en la enseñanza ha elevado el interés por la introducción frecuencial de la probabilidad, con un enfoque experimental, donde los estudiantes recogen datos y estiman la probabilidad como límite de la frecuencia estabilizada. Las simulaciones y los experimentos ayudan a los estudiantes a resolver las paradojas que se presentan incluso en problemas de probabilidad aparentemente sencillos. Pero un enfoque experimental puro de la enseñanza de la probabilidad no es suficiente. Incluso cuando la simulación nos ayuda a encontrar las solución de problemas de probabilidad que surgen de la vida real, no permite probar que esta solución es la más adecuada, porque la simulación depende de las hipótesis establecidas de antemano y del modelo teórico que implementamos en el ordenador. Un conocimiento genuino de probabilidad solo se alcanza con el estudio de alguna probabilidad formal, aunque este estudio debe ser gradual y apoyado en la experiencia estocástica de los estudiantes, lo que ha llevado a combinar los enfoques clásico, axiomático y frecuencial, en mayor o menor medida en la enseñanza secundaria actual.

En lo que sigue, nos interesamos por la visión subjetiva de la probabilidad, que ha recibido una atención menor en la enseñanza secundaria, a pesar de su creciente incorporación en las aplicaciones de la estadística en todos los campos del conocimiento. Además, puesto que la situaciones en que la información previa incide en el cálculo de probabilidades de los sucesos son frecuentes en la vida cotidiana, pensamos que sería posible utilizar algunas de dichas situaciones para iniciar un acercamiento al significado subjetivo de la probabilidad en esta etapa educativa. La introducción podría facilitarse con ayuda de tablas, diagramas en árbol y recursos en Internet.

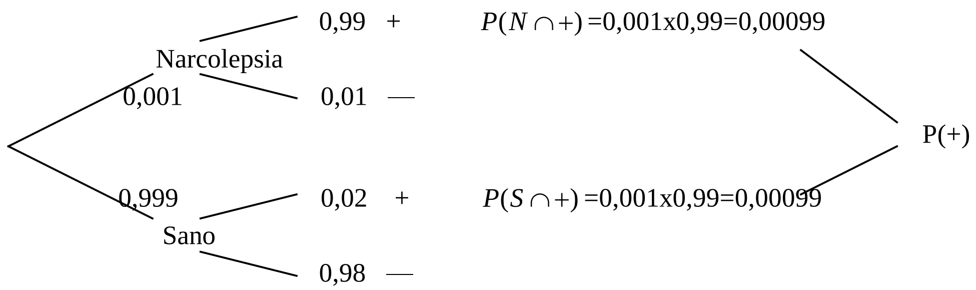
## 2. Probabilidad como grado de creencia

Las situaciones en que deseamos calcular una probabilidad, pero es difícil concebir un experimento realizado siempre en las mismas condiciones, son frecuentes. Consideremos, el ejemplo siguiente (Díaz, 2005).

Ejemplo 1. La narcolepsia es un trastorno primario del sueño, cuya sintomatología principal es la aparición recurrente e irresistible de ataques de sueño reparador. Las personas que tienen este trastorno no descansan bien; por tanto se vuelven irritables y no rinden lo que quisieran. En una gran ciudad una de cada 1000 personas sufre narcolepsia. Supongamos que el test es positivo en 99 de cada 100 personas enfermas y también en 2 de cada 100 personas sanas. ¿Cuál sería la probabilidad de que la persona sufra narcolepsia?

La situación anterior se puede visualizar mediante un diagrama en árbol como el representado en la Figura 1, donde observamos que la población se divide en dos grupos (enfermos y sanos) y en cada uno de estos grupos la probabilidad de que la prueba sea positiva es diferente.

Figura 1. Partición de la población supuesta




Como vemos en el árbol:

P(+)=P(N)xP(+/N)+P(S)xP(+/S)=0,001x0,009+0,999x0,002 =0,00099+0,01998=0,02097

Aplicando la fórmula de la probabilidad condicional, obtenemos la probabilidad pedida:

$$P(N/+) = \frac{P(N \cap +)}{P(+)} = \frac{0,00099}{0,02097} = 0,04721$$

El ejemplo muestra como, al obtener nueva información (el resultado de la prueba médica), podemos revisar las probabilidades iniciales de un suceso (sufrir narcolepsia). Para ello, utilizamos la regla de Bayes, publicada en 1763, que permite transformar las probabilidades iniciales (antes de realizar un experimento, en este caso la prueba médica) de varias causas, una vez se observan sus consecuencias. Las probabilidades finales incorporan la información de los datos observados (el resultado de la prueba. Para el caso general, si $A_i$ representa un conjunto de posibles sucesos que pueden dar lugar a unos datos *D*, y queremos calcular las probabilidades finales de los sucesos $P(A_i/D)$, conocidas sus probabilidades iniciales $P(A_i)$ y verosimilitudes de obtener estos datos según vengan causados por los diferentes sucesos $P(D/A_i)$, el teorema se puede expresar con la formulación siguiente:

$$(1) \qquad P(Ai/D) = \frac{P(Ai) \, x \, P(D/Ai)}{P(A_1) \times P(D/A_1) + P(A_2) \times P(D/A_2) + \ldots + P(A_n) \times P(D/A_n)}$$

El resultado del problema 1 no deja de sorprender a primera vista, dando la impresión de que las pruebas médicas son poco fiables. La explicación es que el número de personas que tienen la enfermedad, en el total de la población es muy pequeño. La probabilidad *P (+/N)* de que el test de positivo si la persona está enferma es muy alta, ya que casi todas las personas enfermas son detectadas en el test (el test tiene mucha sensibilidad). Por otro lado, la probabilidad *P(+/S)* de un resultado positivo si se está sano (falso positivo) es muy pequeña, pero un suceso con probabilidad pequeña no es un suceso imposible y puede ocurrir. Más aún, si el número de personas que pasan la prueba es muy grande, pueden aparecer más falsos positivos que enfermos reales. Si, en vez de la narcolepsia, consideramos una enfermedad frecuente (como gripe) los resultados serían muy diferentes. Con una probabilidad inicial *P(N)*=0,15 y los mismos datos se llegaría a una probabilidad inicial *P (N/+)*=0,8973.

Ejemplo 2. Supongamos ahora que la persona a la que el test dio positivo se repite la prueba y vuelve a obtener un resultado positivo, ¿Cuál es ahora la probabilidad de que realmente esté enferma?

Para responder esta pregunta hay que tener en cuenta que la persona, en cuestión ya no es una persona cualquiera tomada al azar de la población, sino tomada al azar entre aquellos que tuvieron la prueba positiva. Esta población restringida se divide a la vez en enfermos de narcolepsia y sanos, pero las probabilidades iniciales son ahora *P (N)*=0,04772 y *P(S)*=0,9528, puesto que, en el paso anterior, hemos obtenido que la probabilidad de narcolepsia entre los que tuvieron el test positivo es 0,04772. Repitiendo los cálculos con estas nuevas probabilidades iniciales (probabilidades finales obtenidas en la primera aplicación del test), resulta *P(+)=P(N)xP(+/N)+P(S)xP(+/S)*=0,04772x0,009+0,9528x0,002= 0,0658 y P(N/+)=0,7103.

Como se muestra en estos ejemplos de diagnóstico médico, las probabilidades de los sucesos de interés (estar o no enfermo) pueden revisarse (pasar de probabilidades iniciales a probabilidades finales) y pierden de este modo el carácter objetivo que les asigna la concepción frecuencial. Más aún, al realizar un diagnóstico, un médico tendría en cuenta otros factores, además de la prueba médica (edad del paciente, antecedentes familiares, etc.). Incluso diferentes médicos podrían asignar a la persona una probabilidad mayor o menor de tener una enfermedad, dependiendo del conocimiento del historial de la persona o de su propia experiencia con otros pacientes. Otros muchos ejemplos muestran que diferentes personas (dependiendo de su conocimiento) podrían considerar más o menos verosímil la ocurrencia de un suceso y aplicarle distintas probabilidades, concebidas éstas como su grado de creencia personal. El azar está presente en la vida cotidiana en muchos contextos en los que aparecen nociones de incertidumbre, riesgo y probabilidad, por ejemplo, el pronóstico del tiempo, estudio de la posibilidad de tomar un seguro de vida o efectuar una inversión, evaluación de un estudiante, etc. No sólo los profesionales, sino cualquier persona ha de reaccionar a mensajes en que aparecen estos elementos, tomar decisiones que le pueden afectar, emitir juicios sobre relación entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones (Gigerenzer, 2002).

## 3. La visión subjetiva de la probabilidad

En estas situaciones la probabilidad no es una propiedad física tangible- por tanto objetiva de los sucesos que nos afectan (como sería el peso, color, superficie, temperatura) sino una percepción o grado de creencia en la verosimilitud de la persona que asigna la probabilidad sobre la plausibilidad de ocurrencia del suceso (que ocurrirá o no). La constatación de estas aplicaciones lleva a matemáticos como Keynes (1921), Ramsey (1931), y de Finetti (1974) a describir las probabilidades como grados de *creencia personal*, basadas en el conocimiento y experiencia de la persona que las asigna sobre el suceso dado. Émile Borel indica que "la probabilidad de un suceso siempre se relaciona con un cierto sistema de conocimiento y no es necesariamente la misma para todas las personas" (Borel, 1930/1991, pp. 70-71). De Finetti llega a decir que la "probabilidad no existe", al considerar absurdo asumir un valor objetivo de la misma; la probabilidad sería para él un objeto teórico y su estimación dependería de muchas circunstancias, como el conocimiento del observador, las condiciones de observación o los datos que se pueden recoger. Identificar la probabilidad con su estimación –como se hace en el enfoque frecuencial sería tanto cómo confundir los datos que queremos modelizar (frecuencias obtenidas) con el modelo que utilizamos para modelizarlo (probabilidades).

Una dificultad inicial del enfoque subjetivo fue hallar una regla para asignar valores numéricos a las probabilidades, de forma que expresen los grados de creencia personal. Esta dificultad se supera cuando Ramsey (1931) y de Finetti (1974) deducen una teoría de decisión consistente, que permite separar las creencias de las preferencias, a partir de un sistema de apuestas, e inferir los valores de las probabilidades subjetivas.

La visión subjetiva, amplia también las aplicaciones de la probabilidad, no siendo ya un requisito la repetición de una experiencia en las mismas condiciones. Gradualmente, se desarrolla la distinción entre probabilidad frecuencial, empíricamente accesible a través de la frecuencia y probabilidad epistémica o grado de creencia en la ocurrencia de un suceso en un experimento único (Rouanet, 1998), mientras se conforman dos escuelas de inferencia. Mientras que en inferencia clásica un parámetro $\theta$ se considera constante, en inferencia bayesiana un parámetro $\theta$ es una variable aleatoria con una distribución inicial de probabilidades $p(\theta)$, de carácter epistémico, que indica el conocimiento (o falta de conocimiento) sobre $\theta$ antes de tomar los datos. Si se considera $y = (y_1,..., y_n)$ un conjunto de datos, cuya *función de verosimilitud* $p(y/\theta)$ depende del parámetro, entonces la distribución final de $\theta$ dados los datos observados $y$ viene dada por el teorema de Bayes (Lee, 2004):

(2)
$$p(\theta / y) = \frac{p(y/\theta)\,p(\theta)}{\int p(y/\theta)\,p(\theta)}$$

La aplicación sistemática del teorema de Bayes constituye el método principal de la inferencia bayesiana, cuyo objetivo básico es actualizar la distribución inicial de los parámetros. La distribución final es la esencia de la estimación bayesiana. A la pregunta, una vez visto los datos, ¿qué sabemos del parámetro?, la respuesta es la distribución final, puesto que esta distribución sintetiza toda la información sobre el parámetro, recogido los datos y contiene todas las inferencias que puedan hacerse del mismo (O'Hagan y Forster, 2004). El estimador puntual óptimo del parámetro será su valor esperado (promedio) en la distribución final, puesto que minimiza el error cuadrático esperado. La distribución final también permitirá calcular probabilidades de que los parámetros se encuentren en intervalos de valores dados (intervalos de credibilidad), así como calcular probabilidades de que ciertas hipótesis sean verdaderas o falsas.

## 4. Recursos didácticos para la enseñanza de la probabilidad subjetiva

Como vemos, la visión subjetiva de la probabilidad amplía notablemente el campo de aplicaciones. A pesar de ello, no se hace suficiente énfasis en la enseñanza de este tipo de razonamiento, incluso cuando las investigaciones recientes sugieren problemas en la comprensión y aplicación del teorema de Bayes (Díaz y de la Fuente, en prensa). La competencia en resolución de problemas bayesianos ha sido investigada, ampliamente por psicólogos (e.g., Tversky y Kahneman, 1982; Falk, 1986). La conclusión es que estos problemas son difíciles y contraintuitivos y que los sujetos no tienen en cuenta las probabilidades iniciales en el cálculo de la probabilidad inversa (falacia de las tasas bases). También los educadores matemáticos (e.g., Gras y Totohasina, 1995; Ojeda, 1995) analizan los procedimientos de los estudiantes, sugiriendo la dificultad en construir correctamente un diagrama en árbol (similar al de la Figura 1) o en identificar los datos del problema. Junto a esto se presentan algunas concepciones erróneas, como por ejemplo, pensar que no se puede condicionar un suceso por otro que ha ocurrido con posterioridad a aquél cuya probabilidad calculamos (falacia del eje de tiempos).

Por otro lado, ciertas teorías recientes (ver resumen en Sedlemeier, 1999) sugieren que se puede facilitar la resolución de los problemas bayesianos y llegar a una enseñanza efectiva si los datos del problema se presentan en frecuencias absolutas, en lugar de en porcentajes o por medio de probabilidades. Todo ello nos indica la necesidad de replantear la enseñanza y nos ha sugerido el uso de algunos recursos que analizamos a continuación.

**Tablas de doble entrada**

Permiten visualizar mejor los datos de los problemas. Por ejemplo, otro modo de resolver el problema 1 es imaginar que tenemos 100.000 personas elegidas al azar y usar la Tabla 1 para representar los datos que conocemos en la situación:

Tabla 1. Representación de datos en un problema Bayes

| | Test + | Test - | Total |
|---|---|---|---|
| Sufren narcolepsia | 99 | 1 | 100 |
| No sufren narcolepsia | 1998 | 97902 | 99900 |
| Total | 2097 | 97903 | 100.000 |

De la tabla 1 se deducen las siguientes probabilidades:

- *P(N)=0,001:* probabilidad inicial de sufrir narcolepsia en una persona tomada al azar de la población.
- *P(+/N):0,99* probabilidad de que el test sea positivo si se tiene narcolepsia (verosimilitud de que el test sea positivo si se tiene narcolepsia).
- *P(N/+):* probabilidad final de sufrir narcolepsia si el test es positivo. Aplicando simplemente la regla de Laplace, como cociente de casos favorables y posibles, obtenemos $P(N/+) = \frac{99}{99+1998} = 0{,}0472$

**Organización de los cálculos**

El teorema de Bayes se puede también expresar simplificadamente en la forma (3) donde la constante de proporcionalidad *K* es la inversa del denominador de la fórmula (1). La expresión (3) lleva fácilmente a los estudiantes a comprender la organización de los cálculos en una tabla Bayes como la tabla 2, en la que es sencillo generaliza a un número cualquiera de sucesos. Identificadas las probabilidades iniciales y verosimilitudes (segunda y tercera columnas), sólo se necesita multiplicar dichas columnas y dividir cada fila de la misma por la suma.

(3) $$P(A_i / B) = K \times P(A_i) \times P(B / A_i)$$

(4) $$K = \frac{1}{P(A_1) \times P(B / A_1) + P(A_2) \times P(B / A_2) + ... + P(A_n) \times P(B / A_n)}$$

Tabla 2. Organización del cálculo de la probabilidad final

| Sucesos | Probabilidad inicial | Verosimilitud | Producto | Probabilidad final |
|---|---|---|---|---|
| $A_i$ | $P(A_i)$ | $P(B/A_i)$ | $P(A_i)xP(B/A_i)$ | $P(A_i)xP(B/A_i)/S$ |
| $A_2$ | $P(A_2)$ | $P(B/A_2)$ | $P(A_2)xP(B/A_2)$ | $P(A_2)xP(B/A_2)/S$ |
| … | | | | |
| $A_n$ | $P(A_n)$ | $P(B/A_n)$ | $P(A_n)xP(B/A_n)$ | $P(A_n)xP(B/A_n)/S$ |
| Suma | 1 | | S | 1 |

Es también sencillo preparar un programa de cálculo con la hoja excel (Ver Figura 2) para calcular las probabilidades finales $P(A_i/D)$ de un conjunto de sucesos $A_i$, dadas sus probabilidades iniciales P(Ai) y las verosimilitudes $P(D/A_i)$ de unos ciertos datos *D*. Con ello se libera tiempo de cálculo, dedicándolo a la identificación de los datos en los problemas y la interpretación de las soluciones.

Figura 2. Programa Bayes

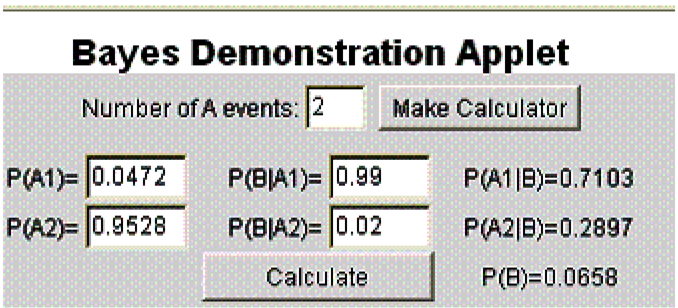
CALCULO DE PROBABILIDADES FINALESI MEDIANTE TEOREMA DE BAYES

| | DATOS | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sucesos | Probabilidad inicial | Verosimilitud | Producto | Probabilidad final |
| A1 | 0,1 | 0,5 | 0,05 | 0,1220 |
| A2 | 0,9 | 0,4 | 0,36 | 0,8780 |
| A3 | | | 0 | 0,0000 |
| A4 | | | 0 | 0,0000 |
| A5 | | | 0 | 0,0000 |
| A6 | | | 0 | 0,0000 |
| A7 | | | 0 | 0,0000 |
| A8 | | | 0 | 0,0000 |
| | 1 | | 0,41 | 1,0000 |

**Recursos en Internet**

En la actualidad encontramos un gran número de recursos en Internet que pueden utilizarse para facilitar la enseñanza del teorema de Bayes (Díaz y de la Fuente, 2005). Por ejemplo, en la figura 3 mostramos un calculador que permite realizar todos los cálculos para aplicar el teorema. En la dirección http://www.stat.sc.edu/~west/applets/bayesdemo.html encontramos un applet que permite explorar este teorema. El recurso muestra un diagrama de rectángulo con cuatro particiones del espacio muestral ($A1$, $A_2$, $A_3$ y $A_4$) y un suceso $B$. Las probabilidades de los sucesos de la partición se pueden modificar moviendo un cursor, modificando también las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$. Este programa calcula automáticamente las probabilidades $PA_i/B)$, aunque no muestra cómo se hace el cálculo sino tan sólo el resultado.

Figura 3. Calculador Bayes




Ya hemos indicado que el diagrama en árbol facilita la resolución de estros problemas. Bayes tree (http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Tree/Tree.html) está pensado para facilitar la construcción de los mismos. Presenta un diagrama de árbol y unas casillas donde se pueden introducir las probabilidades iniciales $P(A)$ y las probabilidades condicionales $P(C/A)$ y $P(C/B)$. Una vez introducidos los datos, el programa calcula las probabilidades conjuntas $P(A\cap C)$, $P(A\cap D)$, etc. El applet también incluye el árbol inverso que permite calcular la probabilidad condicional inversa $P(A/C)$. Otro enlace donde se incluye applets para la construcción de diagramas de árbol es: http://www.stat.sc.edu/~west/applets/tree.html. Tras introducir los datos en una tabla de contingencia, el programa muestra el diagrama de árbol correspondiente y calcula las probabilidades conjuntas.

## 5. Conclusiones

El estudio histórico muestra los múltiples significados de la probabilidad y sugiere que la enseñanza no debe olvidar estas diferentes perspectivas porque están ligadas, tanto dialécticamente, como en la experiencia cotidiana. La probabilidad puede verse como proporción de casos favorables /posibles, como límite al que tienen las frecuencias y modelo matemático. Pero también como grado personal de creencia que nos guía en la toma de decisiones. Reconocer este punto de vista es también reconocer el alcance (y limitaciones) de la matemática y que la solución de los problemas no es siempre única o inmediata.

Afortunadamente la variedad de recursos didácticos disponibles permite introducir este punto de vista sobre la probabilidad ya desde la educación secundaria. Con ello podremos también conseguir el paso de los estudiantes desde la modelización implícita (cuando no son conscientes del proceso de modelización que llevan a cabo) a la modelización explícita e incluso desarrollar sus competencias para la modelización crítica, en que el estudiante somete a juicio el alcance de la modelización en matemáticas y sociedad y que incluye la meta- reflexión sobre la modelización (Greer y Verschaffel, 2007).

## REFERENCIAS

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime,* 8(3), 247-264.

Batanero, C. y Díaz, C. (En prensa). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P Van Bendegen y K. François (Eds), *Philosophical Dimensions in Mathematics Education.* New York: Springer.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Borel, E. (1991). *Valeur pratique et philosophie des probabilités*. Paris: Jacques Gabay (Trabajo original publicado en 1930).

De Finetti, B. (1974). *Theory of probability.* London: John Wiley.

Díaz, C. (2005). *Apuntes sobre inferencia bayesiana. Material didáctico.* Granada: La autora.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Recursos para la enseñaza del razonamiento condicional en Internet. Trabajo presentado en el Congreso Internacional *El Profesorado ante el reto de las Nuevas Tecnologías en la Sociedad del Conocimiento.* Universidad de Granada.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (En prensa). Dificultades en la resolución de problemas Bayesianos: un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática.*

Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Gigerenzer, G. (2002). Reckoning with risk. Londres: Penguin Books.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15(1), 49-95.

Greer, B. y Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies. Overview. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y Mogens Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education.The 14th ICMI Study* (pp. 219-224). New York: Springer.

Henry, M. (1997). L'enseignement des statistiques et des probabilities. En P. Legrand (Coord.), *Profession enseignant: Les maths en collège et en lycée* (pp. 254-273). Paris: Hachette-Éducation,

Keynes, J. M. (1921). *A treatise on probability*. London: Macmillan.

Lee, P. M. (2004). *Bayesian statistics. An introduction.* York, UK: Arnold.

O'Hagan, A. y Forster, J. (2004). *Bayesian inference.* Vol. 2B en Kendall's Advanced Theory of Statistics. London: Arnold.

Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO,* 5, 37-55.

Ramsey, F. (1931). Truth and probability. In R. B. Braithwaite (Ed.), *The foundations of mathematics and other logical essays* (pp 156-198). London: Kegan Paul.

Rouanet, H. (1998). Statistical practice revisited. En H. Rouanet et al. (Eds.), *New ways in statistical methodology* (pp. 29 – 64). Berna: Peter Lang.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.