ESTADÍSTICA CON PROYECTOS

Carmen Batanero

Carmen Díaz

(Editoras)

ESTADÍSTICA CON PROYECTOS

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN: 978-84-694-9152-2
Depósito Legal: GR 4209-2011

Impresión: ReproDigital. Facultad de Ciencias
Avda. Fuentenueva s/n. 18071 Granada.

Agradecimiento:
Proyecto EDU2010-14947 y becas FPI BES-2011-044684 y FPU AP2009-2807;(MCINN-FEDER), becas FPI BES-2008-003573 y FPU AP2007-03222 (MEC-FEDER) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía)

Introducción

Este libro es resultado de la investigación realizada dentro del Proyecto EDU2010-14947, *Evaluación y desarrollo de competencias matemáticas y didácticas de profesores. Aplicación a los contenidos relacionados con la estadística y probabilidad*, financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

Como parte de dicho proyecto se ha revisado y ampliado el material docente elaborado a lo largo de la experiencia docente de dos de las autoras en varios cursos de Estadística aplicada o Didáctica de la Estadística. La mayor parte han estado dirigidos a profesores en formación en las Facultades de Educación y a estudiantes de Psicología, pero ocasionalmente se han impartido en otras titulaciones. También recoge nuestras ideas y experiencias en la impartición de talleres didácticos a profesores en ejercicio, dentro de congresos dirigidos al profesorado o congresos de estadística.

En todas estas experiencias, así como en el libro que presentamos el objetivo es presentar la estadística como una herramienta en la toma de decisiones y en la investigación o trabajo profesional. Los conceptos y técnicas estadísticas se introducen siempre en el contexto de una investigación, cuyas preguntas motivan la introducción de dichos contenidos.

Se ha tratado de fomentar el razonamiento estadístico, más que el aprendizaje rutinario y descontextualizado de conceptos y propiedades. Puesto que la tecnología hoy día permite aplicar la estadística con gran facilidad, cobra mayor importancia las actividades interpretativas que el cálculo rutinario. Es también muy importante que el estudiante cobre conciencia de la importancia de elegir un método adecuado y adquiera un lenguaje suficiente para consultar a un estadístico en los casos que dude en la elección de dicho método.

En el primer capítulo analizamos algunos puntos importantes de la enseñanza de estadística a través de proyectos, comenzando por la motivación de esta metodología de enseñanza. Argumentamos que el desarrollo del razonamiento estadístico en su sentido más amplio requiere la integración del aprendizaje de esta materia dentro de pequeñas investigaciones o proyectos y analizamos los pasos en la solución de los mismos. Se reseñan también recursos disponibles en Internet, tanto para la elección de conjuntos de datos y temas de los proyectos, como para el cálculo estadístico, la consulta de los temas o la exploración de conceptos.

La segunda parte del libro incluye algunos ejemplos de proyectos desarrollados para trabajar en la clase de estadística, que podrían ser adecuados a diversos niveles de dificultad, bien en un curso de estadística para secundaria o primeros cursos de universidad. Cada proyecto comienza con la exposición de sus objetivos, el tipo de alumnos a los que va dirigido y los datos utilizados. Una primera parte incluye actividades más elementales, seguidas de otras de ampliación para trabajar con alumnos universitarios. Se ha tratado de mostrar que, con el mismo proyecto es posible trabajar en diferentes niveles educativos y en muchos de ellos se podría dar cabida a un contenido amplio de estadística.

Puesto que el libro está orientado principalmente a profesores, se complementa la presentación de los proyectos con sugerencias didácticas sobre posibles dificultades de los estudiantes, fruto del trabajo de síntesis de la literatura sobre educación estadística. Asimismo se hace un breve análisis del contenido trabajado en el proyecto.

El último capítulo sintetiza el contenido de los diferentes proyectos e incluye ideas para otros nuevos.

Esperamos que el libro sea útil para alumnos y profesores y los motive a adentrarse en el campo de la estadística.

1. Enseñanza de la Estadística a través de Proyectos

Carmen Batanero, Carmen Díaz, J. Miguel Contreras y Pedro Arteaga

1.1. Introducción

En una sociedad en continuo cambio, como la que nos ha tocado vivir, hemos dejado de asombrarnos por los avances de la ciencia y la tecnología. La estadística ha jugado un papel primordial en este desarrollo, al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

1.1.1. La estadística como cultura

Según Holmes (2002), la enseñanza de la estadística y probabilidad fue ya introducida en 1961 en el currículo de Inglaterra en forma opcional para los estudiantes de 16 a 19 años que querían especializarse en matemáticas, con el fin de mostrar las aplicaciones de las matemáticas a una amplia variedad de materias. Holmes y su equipo, con el proyecto School Council Project (Holmes, 1980) mostraron que era posible iniciar la enseñanza ya desde la escuela primaria, justificándola por las razones siguientes:

- La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.
- Es útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva.

- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Esta relevancia ha producido un interés creciente por la enseñanza de la estadística, como se refleja en diferentes documentos curriculares, donde se insiste en la necesidad de comenzarla lo antes posible, y, al menos, en la educación secundaria obligatoria. Se habla de proporcionar una *cultura estadística,*

> "*que se refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante*" (Gal, 2002, pp. 2-3).

El término "statistical literacy" ha ido surgiendo de forma espontánea entre los estadísticos y educadores estadísticos en los últimos años, quiere resaltar el hecho de que la estadística se considera hoy día como parte de la herencia cultural necesaria para el ciudadano educado. Como señala Ottaviani (1998):

> "*a nivel internacional la UNESCO implementa políticas de desarrollo económico y cultural para todas las naciones, que incluyen no sólo la alfabetización básica, sino la numérica. Por ello los estadísticos sienten la necesidad de difusión de la estadística, no sólo como una técnica para tratar los datos cuantitativos, sino como una cultura, en términos de capacidad de comprender la abstracción lógica que hace posible el estudio cuantitativo de los fenómenos colectivos*" (p. 1).

Estas recomendaciones se tienen en cuenta en la enseñanza. Por ejemplo, en los recientes Principios y Estándares Curriculares del National Council of Teachers of Mathematic (NCTM, 2000) se recogen los siguientes objetivos para los niños de los niveles de 3º a 5º de primaria:

- Diseñar investigaciones para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de recogida de datos afectan al conjunto de datos.
- Recoger datos de observación, encuestas y experimentos.
- Representar datos en tablas, gráficos de línea, puntos y barras.

- Reconocer las diferencias al representar datos numéricos y categóricos.
- Usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos.
- Comparar distintas representaciones de los mismos datos y evaluar qué aspectos importantes del conjunto de datos se muestran mejor con cada una de ellas.
- Proporcionar y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos y diseñar estudios para mejorar las conclusiones y predicciones.

Objetivos semejantes se incluyen para el resto de la educación primaria y educación secundaria obligatoria, donde o sólo se hace referencia a los conceptos y procedimientos, sino que se enfatiza todo el proceso de razonamiento estadístico, y el sentido de los datos. Sin duda esta es una propuesta curricular avanzada. A una mayor variedad y cantidad de contenidos estadísticos se une también la recomendación sobre un cambio en el enfoque: Se trata de presentar el análisis exploratorio de datos, centrar la estadística sobre las aplicaciones y mostrar su utilidad a partir de áreas diversas.

Estas recomendaciones se recogen y amplían en el proyecto GAISE (Franklin y cols., 2007), para la educación K-12. En estas directrices se indica que la enseñanza de la estadística debe tener como principal objetivo ayudar a los estudiantes a aprender los elementos básicos del pensamiento estadístico, entre otros los siguientes:

- *La necesidad e importancia de los datos*. Reconocer la necesidad de basar las decisiones personales en la evidencia (datos) y los peligros inherentes del que actúa sobre supuestos que no están respaldados por datos. Reconocer que es difícil conseguir datos de buena calidad y que el tiempo ocupado para formular problemas y obtener datos de buena calidad no es tiempo perdido.
- *La omnipresencia de la variabilidad.* Reconocer que la variabilidad es ubicua en muchos fenómenos cotidianos. La variabilidad es la esencia de la estadística como disciplina y no puede ser entendida sólo mediante estudio y lectura, sino que debe ser experimentada.
- *La cuantificación y explicación de la variabilidad.* Reconocer que la variabilidad puede ser medida y explicada, tomando en consideración lo siguiente: (a) aleatoriedad y distribuciones de las variables aleatorias; (b) parámetros de tendencia central y de

dispersión (tendencia y residuo); (c) modelos matemáticos paramétricos; (d) modelos de análisis exploratorio de datos.

Watson (2006) ha llevado a cabo investigaciones sobre la comprensión de los distintos contenidos del currículo de estadística y probabilidad y su relación con el desarrollo de cultura estadística en los alumnos. Según la autora, es importante que los alumnos se enfrenten a problemas estadísticos en los que el contexto juegue un papel importante, ya que es con este tipo de problemas con el que se encontraran cuando acaben la educación secundaria. La autora, teniendo en cuenta los objetivos del currículo de probabilidad y estadística en la escuela primaria y secundaria y relacionándolos con las habilidades que debiera tener una persona adulta estadísticamente culta, define una jerarquía de niveles de cultura estadística útil para evaluar la comprensión de los estudiantes (Watson, 1997). Los niveles propuestos son los siguientes:

- El desarrollo del conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
- La comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo.
- Una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística.

1.1.2. Razonamiento estadístico

Los objetivos anteriores se refieren no sólo a conocimientos conceptuales o procedimentales. El razonamiento estadístico es una componente esencial del aprendizaje. Este tipo de razonamiento, incluye según Wild y Pfannkuch (1999) cinco componentes fundamentales:

- *Reconocer la necesidad de los datos:* La base de la investigación estadística es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos que han sido recogidos en forma adecuada. La experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no es fiable y puede llevar a confusión en los juicios o toma de decisiones.
- *Transnumeración:* Los autores usan esta palabra para indicar la comprensión que puede surgir al cambiar la representación de los datos. Al contemplar un sistema real desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración: (1) a partir de la medida que "captura" las cualidades o características del

mundo real, (2) al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos; (3) al comunicar este significado que surge de los datos, en forma que sea comprensible a otros.

- *Percepción de la variación.* La recogida adecuada de datos y los juicios correctos a partir de los mismos requieren la comprensión de la variación que hay y se transmite en los datos, así como de la incertidumbre originada por la variación no explicada. La estadística permite hacer predicciones, buscar explicaciones y causas de la variación y aprender del contexto.
- *Razonamiento con modelos estadísticos.* Cualquier útil estadístico, incluso un gráfico simple, una línea de regresión o un resumen puede contemplarse como modelo, puesto que es una forma de representar la realidad. Lo importante es diferenciar el modelo de los datos y al mismo tiempo relacionar el modelo con los datos.
- *Integración de la estadística y el contexto:* Es también un componente esencial del razonamiento estadístico.

Pensamos que la mejor forma de seguir estas recomendaciones es introducir en las clases de estadística el trabajo con proyectos, algunos de los cuales son planteados por el profesor y otros escogidos libremente por los alumnos. En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real, se trata de presentar las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado.

Este recurso es ya habitual en muchos países, y cada vez más frecuente en España, donde tanto la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa como algunos institutos de estadística organizan competiciones de proyectos estadísticos en las escuelas y universidades, siguiendo el ejemplo de Inglaterra (Hawkins, 1991; Holmes, 1997). Por ejemplo, Connor, Davies y Payne (2002) indican que cada vez es más frecuente la realización de estos proyectos por los alumnos de secundaria de entre 14 y 16 años en Inglaterra y el País de Gales, debido a que en su currículo de matemáticas se contempla la realización obligatoria de proyectos. Los proyectos varían desde problemas sencillos de representación de datos, hasta la comprobación de hipótesis o el uso de la simulación.

Nosotros hemos aplicado esta filosofía de enseñanza desde hace algunos años, preparando algunos materiales (Batanero y Godino, 2001) para asignaturas de estadística aplicada que hemos impartido a alumnos de primer curso de Universidad. Otros ejemplos pueden encontrarse en Anderson y Loynes (1987) y en Batanero (2001), en donde presentamos un curso de estadística para secundaria basado en cinco proyectos, así como en MacGillivray y Pereira-Mendoza (2011), donde se hace una revisión del interés de los proyectos en las clases de estadística.

1.2. La estadística en las orientaciones curriculares

1.2.1. Educación Primaria

En los currículos españoles observamos un incremento de los contenidos de estadística que se recomiendan en la escuela primaria. Por ejemplo en el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Primaria (MEC, 2006a) se incluyen los siguientes contenidos dentro del Bloque Tratamiento de la información, azar y probabilidad del área de Matemáticas:

- *Primer Ciclo:*
  - Gráficos estadísticos: Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos. Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos.
  - Azar y probabilidad: Carácter aleatorio de algunas experiencias. Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.
- *Segundo Ciclo:*
  - Gráficos y tablas: Tablas de datos. Iniciación al uso de estrategias eficaces de recuento de datos. Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.
  - Azar y probabilidad: Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o

menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. Introducción al lenguaje del azar.

- *Tercer Ciclo:*
  - Gráficos y parámetros estadísticos: Recogida y registro de datos utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. Distintas formas de representar la información. Tipos de gráficos estadísticos. Valoración de la importancia de analizar críticamente las informaciones que se presentan a través de gráficos estadísticos. La media aritmética, la moda y el rango, aplicación a situaciones familiares.
  - Azar y probabilidad: Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso

Encontramos también en este documento los siguientes criterios de evaluación, relacionados con el tema:

- *Primer Ciclo: Realizar interpretaciones elementales de los datos presentados en gráficas de barras. Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos.*

Se trata de valorar la capacidad de interpretar gráficos sencillos de situaciones familiares y verificar la habilidad para reconocer gráficamente informaciones cuantificables. También se pretende evaluar si los niños y las niñas están familiarizados con conceptos y términos básicos sobre el azar: seguro, posible, imposible…

- *Segundo Ciclo: Recoger datos sobre hechos y objetos de la vida cotidiana utilizando técnicas sencillas de recuento, ordenar estos datos atendiendo a un criterio de clasificación y expresar el resultado de forma de tabla o gráfica.*

Este criterio trata de valorar la capacidad para realizar un efectivo recuento de datos y representar el resultado utilizando los gráficos estadísticos más adecuados a la situación. Es asimismo motivo de evaluación la capacidad para describir e interpretar gráficos sencillos relativos a situaciones familiares.

- *Tercer Ciclo: Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado.*

Se evalúa la capacidad de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica: tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales... y comprender y comunicar la información así expresada. Además, se comprobará que se empieza a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición.

1.2.2. Enseñanza Secundaria Obligatoria

Respecto a la Enseñanza Secundaria Obligatoria el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria (MEC, 2006 b) incluye, entre otros, los siguientes contenidos dentro del Bloque 6, *Estadística y probabilidad*:

- *Primer Curso.*
  - Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
  - Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Frecuencias absolutas y relativas. Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.
- *Segundo curso:*
  - Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas. Diagramas estadísticos. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos
  - Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo. Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas. Utilización de la media, la mediana y la moda para realizar comparaciones y valoraciones. Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.
- *Tercer Curso.*
  - Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales.
  - Atributos y variables discretas y continuas. Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias.

Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.

- Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística.
- Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas. Experiencias aleatorias.
- Sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

• *Cuarto curso. Opción A*

- Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumnado. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas. Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Uso de la hoja de cálculo. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.
- Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.

• *Cuarto curso. Opción B*

- Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas. Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.
- Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos. Utilización de las medidas de centralización y

dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.

- Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad condicionada.

Entre otros criterios de evaluación encontramos los siguientes:

- *Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población, así como recoger, organizar y presentar los datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas.*

Se trata de verificar, en casos sencillos y relacionados con su entorno, la capacidad de desarrollar las distintas fases de un estudio estadístico: formular la pregunta o preguntas que darán lugar al estudio, recoger la información, organizarla en tablas y gráficas, hallar valores relevantes (media, moda, valores máximo y mínimo, rango) y obtener conclusiones razonables a partir de los datos obtenidos.

- *Valorar la capacidad para utilizar la hoja de cálculo, para organizar y generar las gráficas más adecuadas a la situación estudiada, teniendo en cuenta la adecuación de las tablas y gráficas empleadas, y analizar si los parámetros son más o menos significativos.*

Se trata de valorar la capacidad de organizar, en tablas de frecuencias y gráficas, información de naturaleza estadística, atendiendo a sus aspectos técnicos, funcionales y estéticos (elección de la tabla o gráfica que mejor presenta la información), y calcular, utilizando si es necesario la calculadora o la hoja de cálculo, los parámetros centrales (media, mediana y moda) y de dispersión (recorrido y desviación típica) de una distribución.

- *Valorar la capacidad de interpretar información estadística dada en forma de tablas y gráficas y de obtener conclusiones pertinentes de una población a partir del conocimiento de sus parámetros más representativos.*

1.2.3. Bachillerato

En relación al Bachillerato, el Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas (MEC, 2007) fija los siguientes contenidos:

- *Matemáticas I, modalidad de Ciencias y Tecnología:*
    - Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables

estadísticas. Regresión lineal.

- Estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori.
- Distribuciones binomial y normal como herramienta para asignar probabilidades a sucesos.

* *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, modalidad Humanidades y Ciencias Sociales*
  - Estadística descriptiva unidimensional. Tipos de variables.
  - Métodos estadísticos. Tablas y gráficos. Parámetros estadísticos de localización, de dispersión y de posición.
  - Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados.
  - Asignación de probabilidades a sucesos. Distribuciones de probabilidad binomial y normal.
* *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, modalidad Humanidades y Ciencias Sociales*
  - Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.
  - Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números.
  - Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población. Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales.
  - Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida.
  - Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

Otro aspecto a resaltar de los Decretos, son los criterios de evaluación que se contemplan, entre otros:

- *Comprobar la capacidad de apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables, a partir de la información gráfica aportada por una nube de puntos; así como la competencia para extraer conclusiones apropiadas, asociando los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden*.
- Finalmente se pretende evaluar si, *mediante el uso de las tablas de las distribuciones normal y binomial, los alumnos son capaces de determinar la probabilidad de un suceso, analizar una situación y decidir la opción más adecuada*.
- *Valorar tanto la competencia para estimar y calcular probabilidades asociadas a diferentes tipos de sucesos como la riqueza de procedimientos a la hora de asignar probabilidades a priori y a posteriori, compuestas o condicionadas.* Con este criterio se evalúa también la capacidad, en el ámbito de las Ciencias Sociales, para tomar decisiones de tipo probabilístico que no requieran la utilización de cálculos complicados.
- Se pretende también *comprobar la capacidad para identificar si la población de estudio es normal y medir la competencia para determinar el tipo y tamaño muestral, establecer un intervalo de confianza para μ y p, según que la población sea Normal o Binomial, y determinar si la diferencia de medias o proporciones entre dos poblaciones o respecto de un valor determinado, es significativa.* Este criterio lleva implícita la valoración de la destreza para utilizar distribuciones de probabilidad y la capacidad para inferir conclusiones a partir de los datos obtenidos.

1.2.4. Conclusiones

Estos documentos se concentran en el desarrollo del razonamiento estadístico, que va más allá del conocimiento matemático y de la comprensión de los conceptos y procedimientos. La modelización, la valoración de la bondad del ajuste de los modelos a la realidad, la formulación de cuestiones, la interpretación y síntesis de los resultados, la elaboración de informes son también componentes esenciales de las capacidades que queremos desarrollar en nuestros alumnos.

Hacemos notar que, además de las referencias a ideas elementales sobre muestreo, se contempla un razonamiento inferencial intuitivo en el trabajo con análisis exploratorio de datos, al realizar predicciones o tomar decisiones. Del mismo modo se puede deducir el interés de introducir algunas ideas intuitivas sobre asociación entre variables y elementos del diseño experimental, pues sin estas ideas –al menos implícitas- será difícil trabajar realmente la filosofía del análisis exploratorio de datos.

Por otra parte, se valora el nivel de autonomía, rigor y sentido crítico alcanzado al analizar la fiabilidad del tratamiento de la información estadística que hacen los medios de comunicación y los mensajes publicitarios, especialmente a través de informes relacionados con fenómenos de especial relevancia social.

1.3. ¿Por qué una Estadística Basada en Proyectos?

Una vez presentados los contenidos curriculares, desarrollaremos las principales razones que aconsejan la inclusión de proyectos en las clases de estadística. La primera es que, como señalan Anderson y Loynes (1987), la estadística es inseparable de sus aplicaciones, y su justificación final es su utilidad en la resolución de problemas externos a la propia estadística. La historia de la estadística muestra también como ésta recibe ideas y aportes desde áreas muy diversas, donde, al tratar de resolver problemas diversos (transmisión de caracteres hereditarios, medida de la inteligencia, etc.) se han creado conceptos y métodos estadísticos de uso general (correlación, análisis factorial).

Por otro lado, hay que diferenciar entre conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La habilidad para aplicar los conocimientos matemáticos es frecuentemente mucho más difícil de lo que se supone, porque requiere no sólo conocimientos técnicos (tales como preparar un gráfico o calcular un promedio), sino también conocimientos estratégicos (saber cuándo hay que usar un concepto o gráfico dado). Los problemas y ejercicios de los libros de texto sólo suelen concentrarse en los conocimientos técnicos. Al trabajar con proyectos se coloca a los alumnos en la posición de tener que pensar en preguntas como las siguientes (Graham, 1987): ¿Cuál es mi problema? ¿Necesito datos? ¿Cuáles? ¿Cómo puedo obtenerlos? ¿Qué significa este resultado en la práctica?

Los proyectos estadísticos aumentan la motivación de los estudiantes. No hay nada que haga más odiosa la estadística que la resolución de ejercicios descontextualizados, donde se pida al alumno calcular la media o ajustar una recta de regresión a un conjunto de números. No hay que olvidar que la estadística es la ciencia de los datos y los datos no son números, sino números en un contexto. La principal característica de un curso basado en proyectos es que el énfasis se da a las tareas, que, al menos aproximadamente, deben ser realistas. Como sugiere Holmes (1997) si los estudiantes trabajan la estadística por medio de proyectos se consiguen varios puntos positivos:

- Los proyectos permiten contextualizar la estadística y hacerla más relevante. Si los datos surgen de un problema, son datos con significado y tienen que ser interpretados.
- Los proyectos refuerzan el interés, sobre todo si es el alumno el que elige el tema. El alumno quiere resolver el problema, no es impuesto por el profesor.
- Se aprende mejor qué son los datos reales, y se introducen ideas que no aparecen con los "datos inventados por el profesor": precisión, variabilidad, fiabilidad, posibilidad de medición, sesgo.
- Se muestra que la estadística no se reduce a contenidos matemáticos.

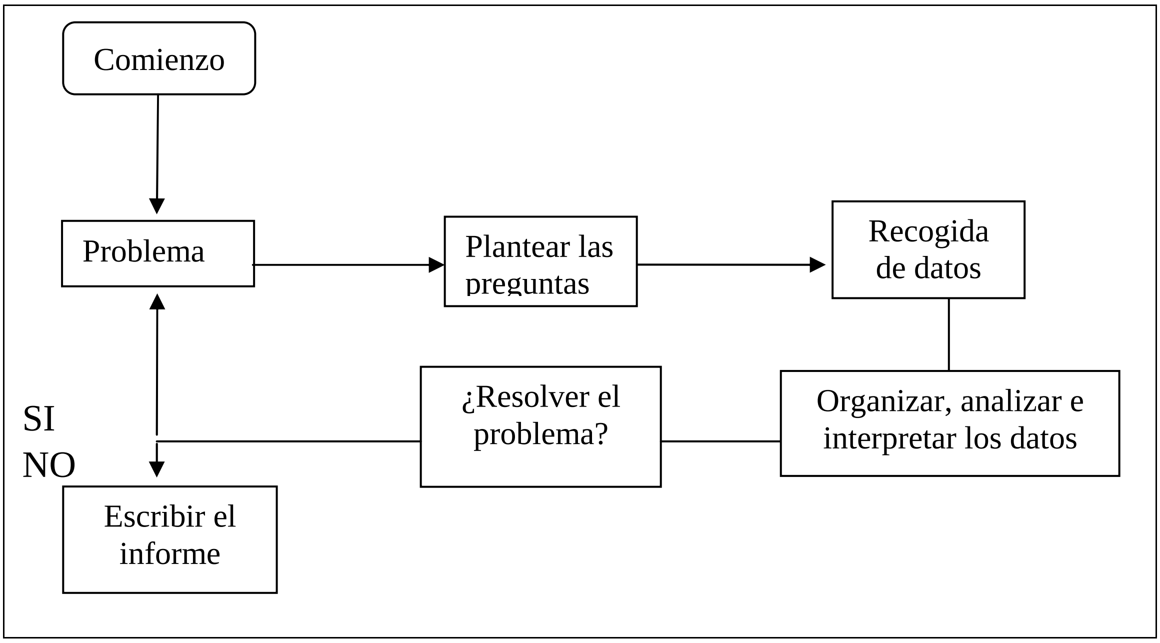
1.4. ¿Cómo elegir un proyecto y trabajar con él?

Los proyectos se conciben como verdaderas investigaciones, donde tratamos de integrar la estadística dentro del proceso más general de investigación. Deben escogerse con cuidado, ser realistas (incluso cuando sean versiones simplificadas de un problema dado) abiertos y apropiados al nivel del alumno.

Se comienza planteando un problema práctico y se usa luego la estadística para resolverlo. El razonamiento estadístico es una herramienta de resolución de problemas y no un fin en sí mismo. La Figura 1.1. contiene el esquema de la forma de trabajo en la que vemos que la parte puramente "matemática" de la estadística (la reducción, análisis e interpretación de los datos) es sólo una de las fases, y aún la interpretación ha de hacerse en función del contexto del problema planteado.

La fase de planteamiento de preguntas es una de las más difíciles. Los alumnos rara vez comienzan con un problema claramente formulado. Generalmente podrían comenzar sin preguntas claramente definidas y el papel del profesor es ayudarles a pasar de un tema general (deportes) a una pregunta que pueda contestarse (en la pasada temporada, ¿los equipos de fútbol que jugaron en su propio campo, lo hicieron mejor que los que jugaron en campo contrario?). Nolan y Speed (2002) sugieren que el profesor no debe centrarse en la terminología estadística, sino proporcionar estrategias generales que puedan generalizarse a otros datos y contextos.

Figura 1.1. Esquema del desarrollo de un Proyecto



Una lista de puntos a tener en cuenta al plantear las preguntas de investigación es la siguiente:

- ¿Qué quieres probar? ¿Qué tienes que medir /observar /preguntar?
- ¿Qué datos necesitas? ¿Como encontrarás tus datos? ¿Qué harás con ellos?
- ¿Crees que puedes hacerlo? ¿Encontrarás problemas? ¿Cuáles?
- ¿Podrás contestar tu pregunta? ¿Para qué te servirán los resultados?

El trabajo con proyectos en la clase de estadística plantea el problema de la gestión de la clase, de modo que se oriente a los alumnos hacia el aprendizaje de conceptos y gráficos, la ejercitación de las técnicas de cálculo y la mejora en sus capacidades de argumentación, formulación de conjeturas y creatividad.

Aunque la estadística se suele enseñar separada de la probabilidad, nosotros creemos que esta separación es artificial, puesto que, detrás de cualquier estudio estadístico hay una componente aleatoria. Por ello hemos de tratar de relacionar estos dos campos cuando sea posible, y en particular, en los proyectos.

1.5. Datos, sus tipos, fuentes de datos

Nos enfrentamos a diario a la necesidad de recoger, organizar e interpretar sistemas complejos de datos y esta necesidad aumentará en el futuro, debido al desarrollo de los sistemas de comunicación y las bases de datos. El punto de comienzo de la estadística debería ser el encuentro de los alumnos con sistemas de datos reales: resultados deportivos de sus equipos favoritos, medios de transporte usados para ir a la escuela, temperatura máxima y mínima a lo largo de un mes; color o tipo de vehículo que pasa por delante de la ventana, etc.

Uno de los objetivos que debiera incluirse en un curso de estadística es capacitar al alumno para recoger, organizar, depurar, almacenar, representar y analizar sistemas de datos sencillos. Este objetivo comienza por la comprensión de las ideas básicas sobre organización *de datos: codificación grabación y depuración*.

De este modo podrán ver que construir un sistema de datos propio y analizarlo no es lo mismo que resolver un problema de cálculo rutinario tomado de un libro de texto. Si quieren que el sistema de datos sea real, tendrán que buscar información cuando les falte, comprobar y depurar los errores que cometen al recoger los datos, añadir nueva información a la base de datos cuando se tenga disponible. Aprenderán a comprender y apreciar más el trabajo de los que realizan las estadísticas para el gobierno y los medios de comunicación. Si comprenden la importancia de la información fiable, se mostrarán más dispuestos a colaborar cuando se les solicite colaboración en encuestas y censos.

En la mayor parte de los conjuntos de datos hay al menos tres componentes: la descripción de las variables, los valores de las variable (campos), que es el cuerpo principal de los datos, y los resúmenes estadísticos de cada variable. Los campos pueden ser de longitud fija o variable, y puede haber campos vacíos. Asimismo, clasificamos las variables según diversas tipologías: cualitativas o cuantitativas; discretas, continuas; nominales, ordinales, datos de intervalo, de razón.

Sobre cada una de estas componentes pueden realizarse operaciones o transformaciones internas (clasificación, recodificación, agrupamiento) y externas (insertar, borrar, seleccionar...). Podemos clasificar variables, clasificar los casos dentro de una variable o clasificar los resúmenes estadísticos, por ejemplo, por su magnitud. Podemos seleccionar casos por los valores de una variable, o seleccionar variables porque sus valores coinciden en una serie de casos. También es posible determinar relaciones entre estos componentes, por ejemplo, de dependencia, implicación, similaridad (dependencia entre variables; similaridad de sujetos; similaridad de variables). Estos tipos de operaciones deben ser presentadas para casos sencillos a los estudiantes, de modo que sean comprendidas.

Estos sistemas de datos pueden ser la base de trabajos interdisciplinares en geografía, ciencias sociales, historia, deportes, etc. En el caso de que los datos se tomen de los resultados de experimentos aleatorios realizados en la clase, estaremos integrando el estudio de la estadística y probabilidad. Hemos de animar a los alumnos a ser creativos. No todos los datos serán dados por el profesor. Para completar el proyecto el alumno necesita recoger datos, que, pueden provenir de diversas fuentes, ser obtenidos mediante diferentes técnicas, y corresponder a diversas escalas de medida y tipos de variables estadísticas (Tabla 1.1).

Tabla 1.1. Tipos de datos en los Proyectos

Procedencia de los datos	Anuarios estadísticos, Encuestas, Experimento realizado en la clase, Internet, Prensa, Simulación
Técnica de recogida de datos	Observación, Encuesta, Medida
Naturaleza de la escala de medida	Nominal, Ordinal, Intervalo, Razón
Variables estadísticas incluidas	Cualitativa, Cuantitativa discreta, pocos valores, Cuantitativa discreta, necesidad de agrupar, continua

Es importante que, a lo largo de la educación no universitaria el alumno tenga oportunidad de apreciar esta diversidad de datos estadísticos. Las ventajas de utilizar datos reales, tales como la motivación del alumnado, el poder hacer realidad la interdisciplinariedad o el aprender contenidos que no se adquieren simplemente con problemas tomados de los libros de texto son resaltadas por Hall (2011). Algunas veces los datos se encuentran disponibles, pero hay que saber localizarlos de diferentes fuentes, como libros o anuarios estadísticos. La Internet proporciona en la actualidad datos para cualquier tema por el que los alumnos estén interesados, bien a partir de servidores estadísticos específicos donde los profesores de estadística han puesto sus datos al servicio de la enseñanza, bien recurriendo a organismos oficiales como el INE (Instituto Nacional de Estadística), Eurostat, Unesco u otros. En la Tabla 1.2 mostramos algunos de estos servidores.

Por ejemplo en Connor, Davies y Bradley (2002) se sugieren diversas formas de usar los datos disponibles en el servidor Census at School para trabajar en educación secundaria. En este proyecto participaron niños de 7 a 16 años quienes contribuyeron a recoger información para formar una base de datos nacional sobre los niños en las escuelas que luego pudiera usarse para trabajar en las clases de estadística. El servidor es accesible a las escuelas y contiene materiales didácticos, así como resúmenes y datos que pueden usarse en una variedad de asignaturas, enfatizando así el uso de la Internet y la estadística. Ejemplo del uso del Census at School en la formación de profesores también se presentan en Hall (2011).

Tabla 1.2. Algunas fuentes de datos en Internet

Australian CensusAtSchool	www.abs.gov.au/websitedbs/
Census at School Project	www.censusatschool.org.uk/
Census at School Canada	www.censusatschool.ca/r000-eng.htm
CensusAtSchool International	www.censusatschool.com/
The Data and Story Library	lib.stat.cmu.edu/DASL/
GAISE Reports	www.amstat.org/education/gaise/
IEA Instituto de Estadística de Andalucia	www.juntadeandalucia.es:9002/
INE Instituto Nacional de Estadística	www.ine.es/
INJUVE Instituto de la Juventud	www.injuve.mtas.es/injuve/
Instituto Nacional de Estadística y Geografía de Mexico	www.inegi.org.mx/
Journal of Statistical Education	www.amstat.org/publications/jse/
StatLib---Datasets Archive	lib.stat.cmu.edu/datasets/
UCLA Statistics Case Studies	www.stat.ucla.edu/cases/
UNESCO	www.uis.unesco.org
World Health Organization	www.who.int/

Un recurso interesante es el llamado *"Data sets and stories*", donde se acumulan conjuntos de datos, junto con su descripción y algunas indicaciones de sus posibles usos en la enseñanza. Los datos se pueden recuperar en formato útil para la mayor parte de paquetes estadísticos, hojas de cálculo y calculadoras gráficas. Otra fuente de datos es la revista *Journal of Statistical Education* que contiene una sección fija sobre datos y proyectos. En su servidor pueden encontrarse artículos que describen estos datos y como usarlos en la elaboración de proyectos y actividades prácticas. Las direcciones de éstos y otros servidores útiles para encontrar conjuntos de datos se presenta en la Tabla 1.2.

Ridgway, Nicholson y McCusker (2008) indican que actualmente hay un consenso, conducido, entre otros por la OECD y la Unión Europea, sobre la necesidad de medir el progreso de los distintos países, con un rango de indicadores, tales como la cohesión social o la riqueza (medidas tanto conceptualmente como técnicamente problemáticas). Todo esto requiere nuevas formas de información y por ello la necesidad de que los ciudadanos sean estadísticamente cultos nunca ha sido mayor. Actualmente hay agencias y oficinas estadísticas que ponen a disposición de los ciudadanos toda clase de datos, lo que requiere la necesidad de desarrollar una mejor comunicación entre los productores de estadísticas y los consumidores.

Según los citados autores se espera que cualquier persona sea capaz de comprender las informaciones que provienen de diversas fuentes, como por ejemplo los medios de comunicación e Internet. Una observación que realizan es que los datos estadísticos disponibles y sus representaciones suelen ser multivariantes, con interacciones complejas entre las distintas variables, que en muchas ocasiones no están relacionadas linealmente. Esto podría suponer un problema ya que el currículo de la escuela no prepara a los estudiantes para tratar con este tipo de datos.

En la actualidad hay un considerable aumento de nuevas tecnologías y del uso de de Internet por parte de los ciudadanos, ampliándose los medios de comunicación personal. Por ejemplo es notable el aumento del uso de las redes sociales tales como *Youtube* o *Facebook*, donde las personas tienen oportunidad de presentar información sobre ellos mismos, y de páginas web donde se pueden encontrar y descargar gran variedad de datos estadísticos sobre diversos temas de actualidad. Los institutos nacionales de estadística y organizaciones como la OECD ofrecen tales datos, además de informes en que aparecen representaciones graficas interactivas sobre datos multivariantes, en las que los usuarios pueden elegir que variables representar y que comparaciones realizar. Para aprovechar su potencial, se deberían aprovechar las posibilidades que brindan las nuevas tecnologías, de manera que se innovase en la presentación de los datos estadísticos en páginas públicas de Internet, proporcionándose también foros de debate en los que se pudiesen interpretar y razonar críticamente sobre los distintos conjuntos de datos (Ridgway McCusker y Nicholson, 2008).

En otras ocasiones los datos son recogidos por los alumnos mediante la realización de una encuesta o a través de un experimento. La encuesta requerirá la elaboración de un cuestionario, fijando los objetivos del mismo, eligiendo las variables explicativas y redactando las preguntas que permitan obtener la información deseada de una forma clara y concisa. Si se pretende extender los resultados más allá de la muestra, la selección de una muestra representativa plantea problemas de tipo teórico y práctico, relacionados con la población objetivo y alcanzada, el marco de muestreo, los métodos de selección, la administración del cuestionario y los problemas de no respuesta.

La información que queremos recoger puede corresponder a diversos niveles que se corresponden con diferentes técnicas de obtención de datos:

información consciente y conocida (encuesta), información desconocida, pero que puede deducirse de la observación e información no consciente ni observable (medida). Finalmente es importante considerar la naturaleza de las escalas de medida y tipo de variable estadística, puesto que de ellas depende el método de análisis de datos que se puede aplicar. La elección del conjunto de datos es crítica, pues dependiendo del tipo de datos la gama de técnicas estadísticas será más o menos amplia, ya que no todas las técnicas son aplicables a cualquier tipo de dato. El profesor también puede proporcionar ficheros de datos a los alumnos, para introducir algún tema particular o porque sea difícil de recoger por los propios alumnos.

En principio este tipo de páginas y software tienen un gran potencial para ayudar a desarrollar la cultura estadística de los ciudadanos, pero para ello deben cumplir las siguientes características (Ridgway, Nicholson y McCusker, 2008):

- Alta calidad de los conjuntos de datos disponibles y fiabilidad de las fuentes de información que los proporcionan.
- Alta calidad de las representaciones interactivas y que sean apropiadas para los datos que están siendo representados.
- Comentarios criticos sobre los datos, cuando estos contengan errores de razonamiento.
- Revisión profesional de los errores conceptuales mostrados en los comentarios.
- Facilidades de búsqueda de los distintos conjuntos de datos.

1.6. Calculadoras y ordenadores

Las calculadoras gráficas se consideran en la enseñanza de la estadística, debido a su bajo coste. Entre las posibilidades que ofrecen a la enseñanza de la estadística, citamos:

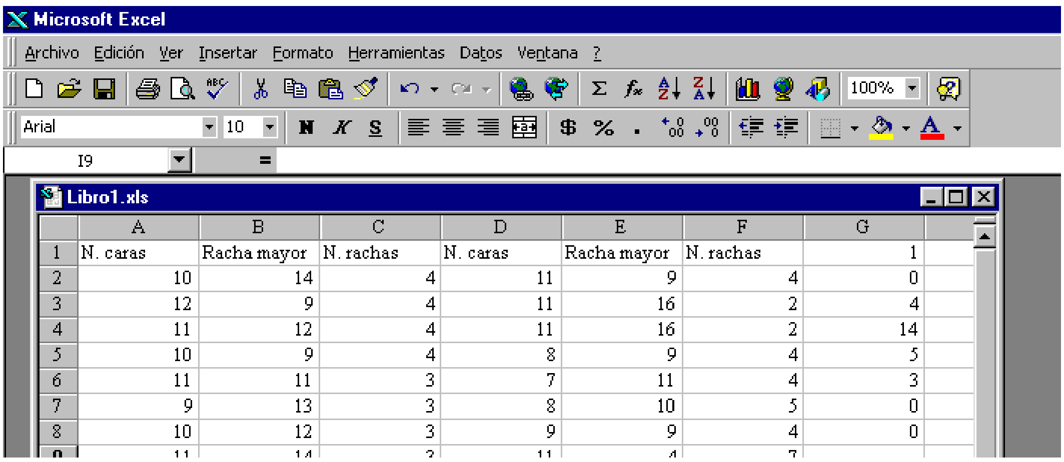
- Transmisión de datos (entre calculadoras o calculadora y ordenador). Es posible, por ejemplo, tomar datos de Internet, sobre un tema de interés y transmitirlo a la calculadora, sin necesidad de tener que grabarlos a mano.
- Opciones de manejo de listas y posibilidad de transformación de los datos.
- Cálculos estadísticos y gráficos básicos para una y varias variables.
- Posibilidad de ser programadas.

- Generador de números aleatorios y tablas estadísticas básicas.

Cuando sea posible, los alumnos pueden usar ordenadores para llevar a cabo sus proyectos, no sólo para el análisis de los datos, sino también para elaborar sus informes. Los procesadores de texto son hoy compatibles con los programas estadísticos. El proyecto es así un pretexto para aprender estas herramientas que son hoy día esenciales. Es por ello que en el caso concreto de la estadística, los ordenadores son, con mucho, preferible a las calculadoras, cuando estén disponibles. Es un hecho de que un número creciente de alumnos cuenta en su casa o en la de algún amigo o familiar con ordenador personal.

Pratt, Davies y Connor (2011) discuten varias formas de uso del ordenador en la enseñanza de la estadística, que suponen una revolución sobre la forma en que se debe enseñar y se debe aprender estadística. Entre ellas, resaltamos el uso de gráficos dinámicos interactivos, almacenamiento y transmisión de datos, exploración de modelos a través de la simulación, y la posibilidad de comunicación y compartir tareas. Además, las clases de estadística proporcionan actividades interesantes para introducir al alumno en el uso de recursos informáticos habituales, como procesadores de texto y hoja de cálculo, así como para el aprendizaje del manejo de la calculadora científica y gráfica. Es interesante animar a los chicos a escribir un informe sobre su análisis, ya que la habilidad para producir informes comprensivos y estructurados donde la información estadística se incorpore y presente adecuadamente para apoyar la argumentación será sin duda útil en su futura vida profesional, sea cual fuere y es un medio también para el aprendizaje de los procesadores de texto.

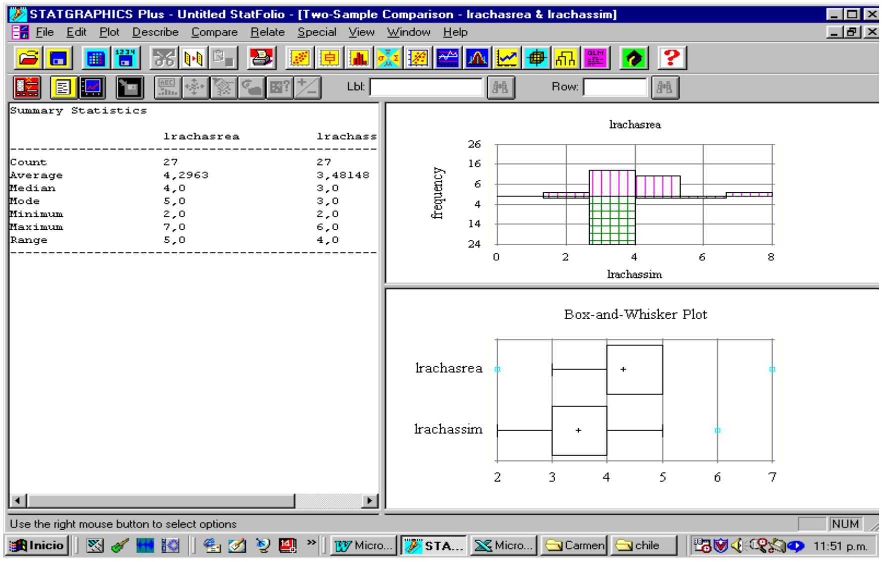
Figura 1.2. Pantalla de una hoja electrónica con datos del Proyecto 1



	A	B	C	D	E	F	G
1	N. caras	Racha mayor	N. rachas	N. caras	Racha mayor	N. rachas	1
2	10	14	4	11	9	4	0
3	12	9	4	11	16	2	4
4	11	12	4	11	16	2	14
5	10	9	4	8	9	4	5
6	11	11	3	7	11	4	3
7	9	13	3	8	10	5	0
8	10	12	3	9	9	4	0

Los ficheros de datos son fácilmente analizables desde una hoja electrónica, que podrían ser utilizadas por los chicos de 14 o 15 años. En la Figura 1.2. mostramos una hoja electrónica, donde hemos introducido los datos del proyecto 1. Este tipo de recurso proporciona una variedad de gráficos y funciones estadísticas. Por ejemplo, podemos usar la función CONTAR.SI, para calcular las frecuencias absolutas con que aparecen los diferentes valores en la tabla de datos.

1.3. Comparación de la longitud de la racha más larga en secuencias reales y simuladas con Statgraphics

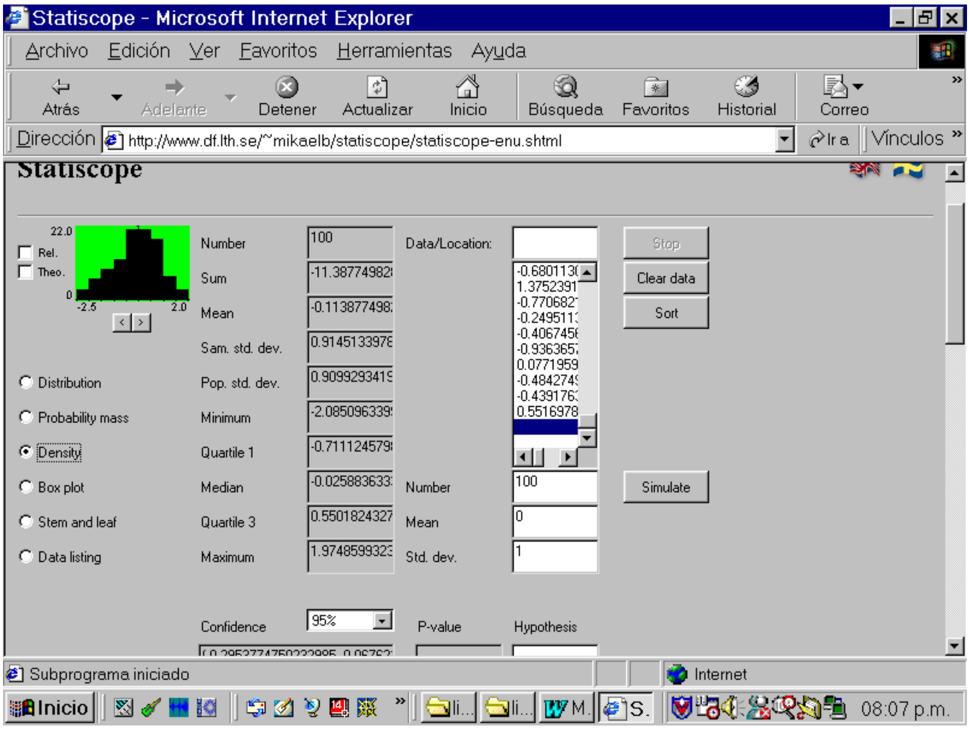


En el caso de disponer de un paquete estadístico sencillo de manejar, y también con los chicos mayores la capacidad de representación gráfica y análisis se enriquece notablemente. Como vemos en la Figura 1.3 para Statgraphics este tipo de software permite tener al mismo tiempo en la pantalla salidas numéricas y gráficas, cuyas opciones pueden ser modificadas fácil y rápidamente y aumenta por tanto las posibilidades exploratorias.

1.6.1. Cálculo y representación gráfica

El ordenador puede y debe usarse en la enseñanza como *instrumento de cálculo y representación gráfica*, para analizar datos recogidos por el alumno o proporcionados por el profesor. Un problema tradicional en la enseñanza de la Estadística ha sido la existencia de un desfase entre la comprensión de los conceptos y los medios técnicos de cálculo para poder aplicarlos. La solución de los problemas dependía en gran medida de la habilidad de cálculo de los usuarios, que con frecuencia no tenían una formación específica en matemáticas. Hoy día la existencia de programas fácilmente manejables permite salvar este desfase y realizar cálculos complejos en pocos segundos sin posibilidad de error. No tiene pues, sentido, hacer perder el tiempo a los alumnos ocupándoles en repetir una y otra vez cálculos tediosos para intentar aumentar su destreza de cálculo, sino que es preferible dedicar ese tiempo a actividades interpretativas y a la resolución de problemas.

Figura 1.4. Statiscope



La capacidad de graficación de los ordenadores permite también incorporar la filosofía del análisis exploratorio de datos, en que los gráficos y el cambio de uno a otro sistema de representación se usa como herramienta de descubrimiento y análisis. El manejo de diversas formas de representación dinámica e interactiva enriquece el significado de los conceptos mostrados a los estudiantes.

Sin embargo, esta mayor facilidad actual de empleo de procedimientos estadísticos, implica, sin embargo, el peligro del uso no adecuado de la estadística. Acostumbremos, pues, a los alumnos a planificar el análisis que quieren realizar incluso antes de finalizar la construcción de su sistema de datos. Si, por ejemplo, quieren hacer un estudio en su escuela para comparar la intención de voto de chicos y chicas en las próximas elecciones al consejo escolar, deben recoger una muestra lo suficientemente representativa de chicos y chicas en los diferentes cursos escolares y deben recoger datos sobre las principales variables que influyan en esta intención de voto. De otro modo, sus conclusiones pudieran estar sesgadas o ser poco explicativas.

Tabla 1.3. Algunos programas de cálculo y exploración estadística en Internet

Cuwe statistics programs	www.stat.uiuc.edu/~stat100/cuwu
Elementary introduction to Bayesian statistics	bayes.bgsu.edu/nsf_web/jscript_progs.htm
Gasp: The Globally Accessible Statistical Procedures,	www.stat.sc.edu/rsrch/gasp
Gráficos Interactivos	nces.ed.gov/nceskids/Graphing
R-web	www.math.montana.edu/Rweb/
Statiscope	www.df.lth.se/~mikaelb/statiscope/statiscope-enu.shtml
Stattucino Applet	www.berrie.dds.nl/
Vista - The Visual Statsistical System	forrest.psych.unc.edu/research/index.html
WebStat	www.statcrunch.com/
Web Pages that Perform Statistical Calculations!	statpages.org/

Respecto a los programas estadísticos (software estadístico) existe hoy día una gran variedad, desde programas profesionales, como SPSS o Statgraphics, las hojas de cálculo como Excel o programas específicos para la enseñanza, algunos de los cuales están disponibles en Internet. Tanto la localización de estos programas como de los datos para los proyectos supone un uso didáctico de la Internet que también justifica el empleo de los ordenadores. Hemos incluido una lista de algunos de estos recursos en la Tabla 1.3.

Si no es posible recurrir a los ordenadores, las calculadoras, en especial las gráficas pueden sustituirlos. El volumen de datos en muchos proyectos (como los presentados como ejemplo) hace posible el trabajo con calculadora. Tanto en este caso, como en el del uso del ordenador, se requiere la codificación de los datos en forma numérica. Es importante que el profesor resalte la diferencia entre el código y el valor de la variable. El hecho de, por ejemplo, poder calcular la media de los códigos numéricos asignados a los valores de una variable cualitativa (como el sexo) no indica que tenga sentido el valor obtenido.

1.6.2. Simulación

Un uso característico del material en estocástica es la simulación. En ocasiones el estudio de un problema de probabilidad es complejo para el alumno. Una pregunta que sin duda se plantea el profesor es si sería disponible realizar un estudio intuitivo de estos temas con ayuda del material concreto, calculadoras u ordenadores. Afortunadamente, contamos con la simulación., que para Heitele (1975) es en estadística algo parecido a lo que constituye el isomorfismo en otras ramas de las matemáticas.

En la simulación ponemos en correspondencia dos experimentos aleatorios diferentes, de modo que a cada suceso elemental del primer experimento le corresponda un suceso elemental del segundo y sólo uno, y los sucesos puestos en correspondencia en ambos experimentos sean equiprobables. Como indica Girard (1997) al trabajar mediante simulación estamos ya modelizando, porque debemos no sólo simplificar la realidad, sino fijar los aspectos de la misma que queremos simular y especificar unas hipótesis matemáticas sobre el fenómeno estudiado. Otras posibilidades de la simulación se discuten en Fernándes, Batanero, Contreras y Díaz (2009).

Por ejemplo, podemos "simular" el experimento aleatorio consistente en observar el sexo de un recién nacido mediante el experimento aleatorio consistente en lanza una moneda al aire. Ahora bien, son muchos los aspectos que podríamos estudiar sobre un recién nacido, como el grupo sanguíneo, su peso o su raza, que no podrían simularse con el lanzamiento de la moneda. También hacemos una hipótesis (matemática) sobre equiprobabilidad para los dos sexos, independientemente de la raza, sexo y antecedentes familiares. Sólo una vez que hemos hecho estos supuestos, podremos comenzar el trabajo con la simulación. Como indican Chaput, Girard y Henry (2011) la simulación constituye una verdadera modelización en probabilidad.

Lo importante de ésta es que podemos operar y observar resultados del segundo experimento y utilizarlos para obtener información del primero. Por ejemplo, si queremos saber cual es la probabilidad que entre 100 recién nacidos hay más de un 60% de varones, podemos lanzar, por ejemplo 1000 veces 100 monedas al aire, estudiar en cada uno de los 1000 experimentos si hubo o no más de un 60% de nacimientos y obtener una estimación para la probabilidad pedida. La ventaja de la simulación es obvia, incluso en este ejemplo tan sencillo, pues permite condensar el experimento en un tiempo y espacio concreto.Vemos además que la simulación es, en si misma un modelo de la realidad simulada, puesto que simplifica la propia realidad y supone un trabajo de abstracción sobre la misma. Es además un modelo material (o bien algorítmico si usamos un simulador de una calculadora u ordenador), que nos permite reproducir físicamente el experimento y observarlo y por tanto, permite un trabajo intuitivo sobre el modelo sin necesidad del aparato matemático.

Entre el *dominio de la realidad* en que se encuentra la situación que queremos analizar y en la que interviene el azar y el *dominio teórico* donde, con ayuda de la matemática construimos un modelo teórico de probabilidad que debe, por un lado, simplificar la realidad y abstraer sólo sus aspectos esenciales y, por otro, ser útil para interpretar los caracteres retenidos en la modelización, Coutinho (2001) sitúa *el dominio pseudo- concreto* en el que podríamos trabajar con los alumnos por medio de la simulación.

Mientras que en el dominio de la realidad se efectúa una acción o experiencia concreta y en el dominio teórico es característica la representación formal o simbólica, en el dominio pseudo concreto se opera mentalmente. En este dominio alumno ya ha salido de la realidad y trabaja con una situación abstracta idealizada. Por ejemplo, se imagina que está trabajando con dados perfectos, prescinde de las condiciones del lanzamiento. Al mismo tiempo conserva la denominación de las caras del dado real para nombrar los resultados del dado idealizado. El papel didáctico del modelo pseudo-concreto es inducir implícitamente el modelo teórico a los alumnos, incluso aunque su formulación matemática formalizada no sea posible (Henry, 1997).

Para presentar un modelo se pueden utilizar diversos tipos de lenguajes o representaciones. Incluso podemos usar palabras de la vida común, a las que atribuimos nuevos significados más precisos (como el caso que hemos descrito), usando la analogía. Un caso muy interesante son los modelos de urna. En el caso de observar el sexo de un recién nacido podríamos simularlo sustituyéndolo por el experimento que consiste en elegir al azar con reemplazamiento una bola de una urna en la que introducimos dos bolas de diferente color para representar los dos sexos. Si queremos simular otro experimento aleatorio con dos sucesos en forma que sus probabilidades sean p y q ($p+q=1$), basta usar una urna en que se mantengan las proporciones p y q para los dos colores de bolas. Simular un experimento con r sucesos diferentes solo requiere usar bolas de r colores distintos, respetando las probabilidades correspondientes.

Cualquier problema probabilístico implica una serie de experimentos aleatorios compuestos de una determinada manera. Cada uno de estos experimentos puede ser “simulado” con un modelo de urnas convenientemente escogido (de una forma algo más compleja y usando una transformación inversa de la función de distribución, incluso los modelos continuos de probabilidad podrían simularse indirectamente, mediante este procedimiento).

Es decir, es posible asignar el experimento consistente en extraer al azar una bola de una urna con una cierta composición de bolas de colores. El experimento compuesto de varios experimentos simples se obtiene componiendo las “urnas” correspondientes a los experimentos simples (obteniendo una hiperurna) y la repetición del experimento global, junto con el análisis de los datos producidos permite una solución aproximada del problema. En este sentido la urna con bolas de colores (fichas, tarjetas) es un “material universal”, válido para estudiar cualquier problema o concepto probabilístico. Por ello la simulación proporciona un método “universal” para obtener una estimación de la solución de los problemas probabilísticos, que no tiene paralelo en otras ramas de la matemática.

Además de la simulación con modelos de urnas y otros materiales manipulativos, las tablas de números aleatorios son también un instrumento de simulación universal, como hemos mostrado con algunos ejemplos presentados en nuestro libro Azar y probabilidad (Godino, Batanero y Cañizares, 1997).

Aunque es importante que los alumnos realicen algunas actividades de simulación con apoyo de material manipulativo, como moneda, dados o ruletas y con tablas de números aleatorios, es realmente el ordenador el que proporciona una mayor potencia de simulación. La mayoría del software estadístico proporciona generadores de números aleatorios, así como de valores de diferentes distribuciones de probabilidad, que pueden, una vez generados, ser analizados con ayuda de los recursos de cálculo y representación.

Otras posibilidades son los módulos de estudio de las diferentes distribuciones de probabilidad con representación gráfica y cálculo de valores críticos y áreas bajo la función de densidad. Unido esto a la posibilidad de extracción de muestras de valores de estas distribuciones de tamaño dado, almacenamiento de las mismas en nuevos ficheros de datos, que pueden ser analizados, proporciona una herramienta muy interesante para la introducción de ideas de inferencia. Finalmente existen programas didácticos específicos para explorar conceptos estocásticos, desde los más elementales a los más avanzados, como, por ejemplo los procesos estocásticos.

1.7. Recursos en Internet

Una nueva dimensión en la enseñanza y la práctica estadística está siendo marcada por Internet. En esta sección realizamos un resumen de los recursos disponibles en la red, continuando el trabajo de Batanero (1998) y Contreras (2009).

1.7.1. Cursos y materiales didácticos

El prototipo de los cambios previsibles con las nuevas tecnologías es el curso Chance, desarrollado en cooperación por varias universidades americanas. Este curso presenta el uso de los conceptos básicos de estadística en la prensa. Un boletín electrónico proporciona trimestralmente resúmenes de artículos de prensa que usan conceptos de estadística. Adicionalmente una base de datos contiene planificación de cursos que han utilizado este material y una guía para el profesor.

Las clases de un curso de este tipo se organizan del modo siguiente: se elige un artículo reciente y se preparan algunas preguntas relacionadas. Los estudiantes, en grupos, leen el artículo e intentan contestar las preguntas formuladas u otras relacionadas que surjan durante la discusión. Todo ello se utiliza como base para introducir un tema de estadística relacionado con el contenido del artículo. Siguiendo este modelo, cada vez son más los profesores que incluyen sus materiales didácticos y libros de texto –desde los más sencillos a los más avanzados- y los ponen libremente en Internet. Algunos ejemplos se presentan en la Tabla 1.4.

1.7.2. Revistas electrónicas y centros de recursos

El profesorado no sólo se actualiza a partir de libros. Las revistas dirigidas a profesores o incluso las revistas de investigación didáctica son una fuente de ideas para el aula y de información sobre las dificultades de los estudiantes. Muchas revistas también se han adaptado y se publican en versión electrónica- acompañada o no de una versión impresa.

*The Journal of Statistics Education e*s una revista publicada desde 1993, electrónicamente, cuyo tema es la enseñanza de la estadística a nivel universitario. La universidad de North Carolina mantiene una base de datos relacionada con esta revista donde se contiene otra serie de recursos para la enseñanza de la estadística. Una diferencia con una revista convencional es que es posible a los lectores mandar comentarios a un artículo o hacer búsquedas automatizadas de artículos sobre un cierto tema. Muchos de estos comentarios serán seleccionados para pasar a ser parte del archivo y, por tanto, del propio artículo. Incluye "teaching bits’ que proporciona resúmenes de artículos de interés para los profesores de estadística.

Tabla 1.4. Cursos y material didáctico

A New View of Statistics	www.sportsci.org/resource/stats
Animated Statistics Demonstrations	faculty.uncfsu.edu/dwallace/
Aula virtual de Bioestadística	e-stadistica.bio.ucm.es/index_modulos.html
CAST	cast.massey.ac.nz/collection_public.html
Concepts & Applications of Inferential Statistics	faculty.vassar.edu/lowry/webtext.html
Curso de Inferencia para Bachillerato	www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2001/estadistica/index2.htm
Electronic Statistics Textbook	www.statsoft.com/textbook/
Engineering Statistics Handbook	www.itl.nist.gov/div898/handbook/
Estadística Económica	www.uv.es/~lejarza/estadistic.htm
Estadística On-line	mem.uab.cat/mqamador/
Exploratory and Graphical Methods of Data Analysis	www.math.yorku.ca/SCS/Courses/eda/
Generalized Linear Models	data.princeton.edu/wws509/
Glossary of Statistical Terms	www.stat.berkeley.edu/users/stark/SticiGui/Text/index.htm
HyperStat	davidmlane.com/hyperstat/index.html
Introductory statistics	www.psychstat.missouristate.edu/sbk00.htm
Material docente Unidad de Bioestadística	www.hrc.es/bioest/M_docente.html
Métodos Estatísticos e Numéricos	centros.edu.xunta.es/iesaslagoas/metodosesta/index.htm
Probability & Statistics Modules	links.math.rpi.edu/webhtml/PSindex.html
Stat 101 Modules; Exploratory Statistics	student.stat.wvu.edu/SRS/Stat101/stat101fr.html
SticiGui: Statistical Tools for Internet and Classroom Instruction	www.stat.berkeley.edu/~stark/SticiGui/index.htm
Statistics at Square One	www.bmj.com/statsbk/
Statistics Every Writer Should Know	www.robertniles.com/stats/
Statistics Tutorials for WINKS	www.texasoft.com/tutindex.html
Statistics UCLA,	wiki.stat.ucla.edu/socr/index.php/EBook
Statnotes: Topics in Multivariate Analysis	faculty.chass.ncsu.edu/garson/PA765/statnote.htm
StatPrimer	www.sjsu.edu/faculty/gerstman/StatPrimer/
STEPS - STatistical Education through Problem Solving,	www.stats.gla.ac.uk/steps/home.html
The Little Handbook of Statistical Practice	www.tufts.edu/~gdallal/LHSP.HTM
Visual Statistics Studio	www.visualstatistics.net/

A pesar de su prestigio, este instrumento se ha visto insuficiente y la necesidad de una revista de investigación específica ha sido cada vez más apremiante, sin dejar de reconocer el importante papel que están llenando otras revistas como *Teaching Statistics*, y *Journal of Statistics Education*, orientadas principalmente a profesores (en los niveles de educación básica y secundaria y universitaria, respectivamente).

Para cubrir esta necesidad, IASE puso en marcha la revista *Statistics Education Research Newsletter* (SERJ) para impulsar y mejorar la investigación específica en educación estadística y al mismo tiempo difundir sus resultados. Una característica específica de esta revista es el aceptar trabajos en tres idiomas diferentes – castellano, inglés y francés- con objeto de ayudar a superar las dificultades lingüísticas que supone para muchos investigadores, especialmente jóvenes- la exigencia de un único idioma posible de publicación de sus trabajos. En la Tabla 1.5 listamos algunas de estas revistas dedicadas específicamente a la educación estadística.

Tabla 1.5. Revistas electrónicas

Chance	www.amstat.org/publications/chance
Journal of Statistical Education	www.amstat.org/publications/jse/
Statistique et Enseignement	www.statistique-et-enseignement.fr/ojs/
Technology Innovations in Statistics Education	escholarship.org/uc/uclastat_cts_tise
Significance	www.wiley.com/bw/journal.asp?ref=1740-9705&site=1
Statistics Education Research Journal	www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/

Servidores con recursos

Algunas páginas web preparan listas de recursos para la enseñanza y aprendizaje de nociones estocásticas. Generalmente contienen varios de los citados anteriormente, artículos de investigación o con sugerencias para el aula, vínculos a otros recursos, applets, etc. Presentamos una lista en la Tabla 1.6. Estos servidores son de una gran utilidad porque, a partir de ellos se puede acceder a otras páginas relacionadas con la educación estadística, ya que también suelen contener listas de vínculos relacionados con el tema.

Un vínculo que incluimos por su importancia a nivel internacional en el campo de la Educación Estadística es el de la International Association for Statistical Education (IASE), que es una de las cinco secciones asociadas al International Statistical Institute (ISI), con lo que queremos conectar, a los interesados en la Educación Estadística y en la investigación en este campo, con esta asociación y con su línea de trabajo.

Tabla. 1.6. Centros de Recursos

ALEA	alea-estp.ine.pt/
ARTIST	https://app.gen.umn.edu/artist/publications.html
ASA, Center for Statistics Education	amstat.org/education/index.cfm
Chance	www.dartmouth.edu/~chance/
CIRDIS	www.stat.unipg.it/CIRDIS/
CTI Statistics (University of Glasgow)	www.gla.ac.uk/departments/statistics/
Descartes	recursostic.educacion.es/descartes/web/
Educación Estadística	www.ugr.es/~batanero/
Emerging Technologies Statistics	www.emtech.net/statistics.htm
Estadística para todos	www.estadisticaparatodos.es/
IASE, International Association for Statistical Education	www.stat.auckland.ac.nz/~iase/
ISTAC	www2.gobiernodecanarias.org/istac/webescolar/
NCTM, National Council of Teachers of Mathematics	www.nctm.org/
Probability web	www.mathcs.carleton.edu/probweb/probweb.html
Recursos Educativos para profesores	www.ucv.cl/web/estadistica
Redemat, Estadística	www.recursosmatematicos.com/estadistica.html
Royal Statistical Society Centre for Statistical Education	www.rsscse.org.uk/
Web Estadística de Navarra	www.pwpamplona.com/wen/
Web Interface for Statistics Education	wise.cgu.edu/index.html
WebStat,	www.stat.sc.edu/webstat/

Esta asociación fue creada en 1991 y está dedicada al desarrollo y mejora de la Educación Estadística. Sus miembros son personas interesadas en la enseñanza de la estadística en cualquiera de los niveles educativos, el desarrollo de software estadístico, la enseñanza de la estadística en empresas o industria, preparación de expertos estadísticos para las unidades estadísticas en el gobierno y el desarrollo curricular, libros de texto y materiales.

La sociedad organiza cada cuatro años el ICOTS (International Conference on Teaching Statistics) y, como conferencia satélite del ICME, las Round Table Conference sobre un tema específico de Educación Estadística. También participa en las reuniones bianuales del ISI con sesiones especiales sobre educación. Además de tener su propia revista y una sección especial en la revista Teaching Statistics, colabora en diversas publicaciones del ISI y en el Statistical Literacy Project. El servidor de IASE es el principal recurso en Internet para la Educación Estadística, proporcionando enlaces a grupos de discusión, software, revistas, congresos, sociedades y recursos educativos de todo tipo.

Destacamos también los recursos ofrecidos por algunas oficinas de estadística. Los organismos responsables de la elaboración de las estadísticas necesitan la colaboración de los ciudadanos en el proceso de recolección de datos para evitar problemas de no respuesta, no veracidad o información faltante. Por ellos están interesados en aumentar la confianza del público en la confidencialidad de la información y en mostrar como su ayuda en el proceso de una encuesta podrá servir para tomar decisiones acertadas que reviertan en su propio beneficio y en el desarrollo global.

Esta preocupación está llevando a estos organismos a implicarse de una forma activa y creciente en el desarrollo y difusión de recursos para la enseñanza. Un buen ejemplo lo tenemos en el Proyecto ALEA que proporciona instrumentos de apoyo para la enseñanza de la estadística para alumnos y profesores de educación primaria y secundaria.

Asimismo se organizan los mini-censos escolares, con la doble finalidad de dar a conocer a los alumnos lo que es un censo, el tipo de información recogida y cómo es procesada, y, por otro, aumentar el interés y colaboración de los padres y en general de los ciudadanos, en la elaboración del censo. Proyectos similares han sido desarrollados en relación con el censo 2001 en otros países; por ejemplo, en el Reino Unido, Italia, Sudáfrica, Australia y Nueva Zelanda, quienes realizan en la escuela actividades de comparación del censo escolar en los países participantes, y preparan materiales didácticos, recursos y actividades para la enseñanza de la estadística, basadas en el proyecto.

1.7.3. Software didáctico en Internet (Applets)

Existe una gran cantidad de software disponible en Internet, especialmente para la exploración y simulación (Ver tabla 1.7). En la figura 1.5. mostramos un ejemplo de simulador del aparato de Galton, que, además de visualizar la trayectoria de la bolas permite un recuento del número que cae en cada posición final y comparar con la distribución teórica.

Figura 1.5. Aparato de Galton

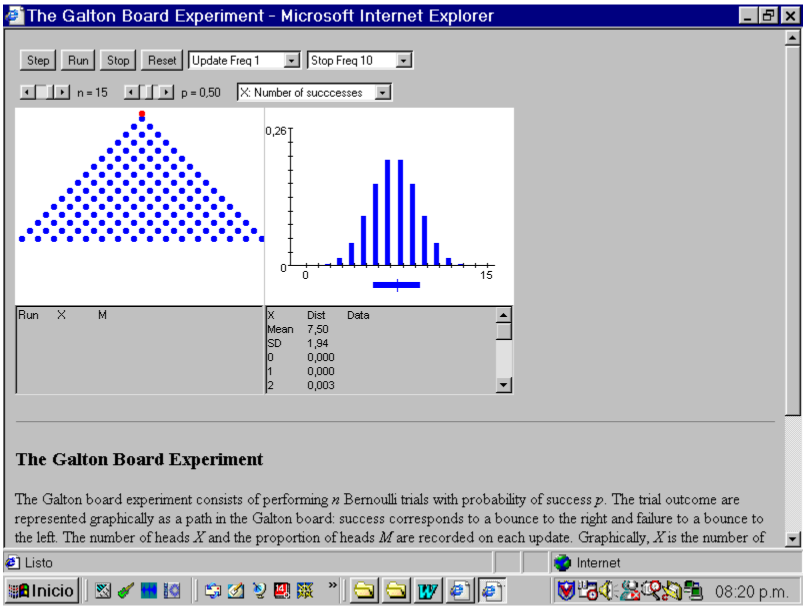


Tabla 1.7. Applets estadísticos

Applets for teaching and research	www.stat.sc.edu/~west/javahtml/
Cybergnostic Project	www.stat.sc.edu/~west/applets/cyberg.html
Duke University	www.stat.duke.edu/sites/java.html
Elementary Statistical Java Applets and Tools,	www.stat.uiuc.edu/~stat100/cuwu/
GASP Initiative - Globally Accessible Statistical Procedures	www.stat.sc.edu/rsrch/gasp
Java Applets for Visualization of Statistical Concepts	lstat.kuleuven.be/java/index.htm
Probability by Surprise	www-stat.stanford.edu/~susan/surprise/
Rice Virtual Lab in Statistics	onlinestatbook.com/rvls.html
Simulation	www-sop.inria.fr/mefisto/java/tutorial1/tutorial1.html
Statistics applets	www.bbn-school.org/us/math/ap_stats/applets/applets.html
Virtual Laboratories in Probability and Statistics,	www.math.uah.edu/stat/
Visualizing Statistical Concepts	www.du.edu/psychology/methods/concepts/

1.8. Escritura del informe

Es importante que los alumnos preparen un informe de la investigación llevada a cabo de una forma clara y lógica. Los apartados que podría tener este informe, corresponden a las fases de la investigación: Problema, datos, análisis e interpretación. El informe puede irse realizando según se avanza el trabajo, ayudará a los alumnos a pensar, planificar y llevar a cabo el proyecto, y proporciona un resumen del trabajo realizado. Refuerza, además, el proceso de razonamiento estadístico al tener que relatar para otra persona sus decisiones, acciones e interpretaciones.

1.9. Desarrollo de competencias básicas a través de proyectos

El trabajo con proyectos contribuye a la adquisición de las siguientes competencias básicas recogidas en el Decreto de Enseñanzas Mínimas de Educación Secundaria:

- *Competencia en comunicación lingüística.* Durante el desarrollo del proyecto los alumnos se ejercitan en la construcción y comunicación del conocimiento y la organización y autorregulación del pensamiento. Además adquieren destrezas y actitudes como formarse un juicio crítico, generar ideas y disfrutar expresándose tanto de forma oral (exponiendo las conclusiones obtenidas a sus compañeros) como escrita (redactando el informe del proyecto).
- *Competencia matemática.* Puesto que han de utilizar y relacionar números enteros, fraccionarios y decimales, los alumnos aplican operaciones básicas, símbolos, formas de expresión y razonamiento matemático. Utilizan las proporciones, funciones, elementos geométricos y de medición. También ponen en práctica procesos de reflexión que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información, por medio del reconocimiento de las técnicas apropiadas. Al trabajar con los proyectos, los alumnos integraran el conocimiento matemático con conocimientos de otras disciplinas, ya que la parte “matemática” es sólo una fase del proyecto.
- *Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.* El trabajo con proyectos posibilita la comprensión de sucesos de la actualidad y sus consecuencias y el análisis de fenómenos sociales desde diversos puntos de vista. Hace también posible identificar preguntas o problemas en la vida diaria o en la actualidad y obtener conclusiones basadas en pruebas, con la finalidad de comprender y tomar decisiones. Procura una habilidad progresiva para poner en práctica los procesos y actitudes propios del análisis sistemático de una tarea y de indagación científica, ya que los proyectos se conciben como auténticas investigaciones.

- *Tratamiento de la información y competencia digital.* En las fases de "recogida de datos" y "organización, análisis e interpretación de los datos", se habitúa a los alumnos a buscar, obtener y procesar información para transformarla en conocimiento. Los proyectos contribuyen al aprendizaje del uso de calculadora, ordenadores y software y adquirir destrezas de razonamiento para organizar la información, relacionarla, analizarla, sintetizarla y hacer inferencias y deducciones de distinto nivel de complejidad.
- *Competencia social y ciudadana,* pues se adquieren conocimientos diversos y habilidades complejas que permiten participar, tomar decisiones y responsabilizarse de las elecciones y decisiones adoptadas. Además, se conciencia a los alumnos de la importancia de la estadística en la sociedad actual, implicándose a través de procesos estadísticos en la mejora de la sociedad (participando en los censos, etc.). Por otro lado, los proyectos es aconsejable realizarlos en grupos de 2 o 3 personas, lo cual fomenta la cooperación y la valoración del trabajo de los demás. Finalmente ayuda a tener una actitud crítica y reflexiva en la valoración de la información disponible, contrastándola cuando es necesario, y respetando las normas de conducta acordadas socialmente.
- *Competencia para aprender a aprender*, se ejercita la curiosidad de plantearse preguntas, identificar y manejar las diversas técnicas y estrategias con las que afrontar una misma situación problemática y afrontar la toma de decisiones con la información de la que se dispone. Se ejercitan habilidades para obtener información y para transformar dicha información en conocimientos propios.
- *Autonomía e iniciativa personal.* Es preferible que los proyectos sean planteados por los propios alumnos, fomentando así su capacidad de elegir con criterio propio, de ejercitar su imaginación y de llevar adelante las acciones necesarias para desarrollar las acciones y planes personales. Además en el proyecto el estudiante no depende tanto del profesor, pues tiene libertad para elegir las estrategias de resolución.

1.10. Evaluación de los Proyectos

Un punto que sin duda preocupa, tanto a alumnos como a profesores, es la evaluación. En Webb (1993) se concibe la evaluación como un proceso dinámico y continuo de producción de información sobre el progreso de los alumnos hacia los objetivos de aprendizaje. El principal propósito es mejorar el aprendizaje de los alumnos.

Es necesario reconocer la complejidad de la función evaluadora, debido a que ésta debe atender a las múltiples facetas del conocimiento estadístico (comprensión conceptual y procedimental, actitudes). Precisamos todo un sistema para recoger datos sobre el trabajo y rendimiento del alumno y no es suficiente evaluarlo a partir de las respuestas breves dadas a preguntas rutinarias en una única evaluación (o examen). Por el contrario, en un proyecto se reflejan bien los diversos aspectos del conocimiento matemático, que se deben tener en cuenta en la planificación de la instrucción y en su correspondiente evaluación según los estándares del NCTM (2000), algunos de los cuales incluimos a continuación:

- *Comprensión conceptual:* Dar nombre, verbalizar y definir conceptos; identificar y generar ejemplos válidos y no válidos; utilizar modelos, diagramas y símbolos para representar conceptos; pasar de un modo de representación a otro; reconocer los diversos significados e interpretaciones de los conceptos; identificar propiedades de un concepto determinado y reconocer las condiciones que determinan un concepto en particular; comparar y contrastar conceptos.
- C*onocimiento procedimental*: Reconocer cuándo es adecuado un procedimiento; explicar las razones para los distintos pasos de un procedimiento; llevar a cabo un procedimiento de forma fiable y eficaz; verificar el resultado de un procedimiento empíricamente o analíticamente; reconocer procedimientos correctos e incorrectos; reconocer la naturaleza y el papel que cumplen los procedimientos dentro de las matemáticas.
- *Resolución de problemas*: Formular y resolver problemas; aplicar diversas estrategias para resolver problemas; comprobar e interpretar resultados; generalizar soluciones.
- *Formulación y comunicación matemática*: Expresar ideas matemáticas en forma hablada, escrita o mediante representaciones visuales; interpretar y juzgar ideas matemáticas, presentadas de forma escrita, oral o visual; utilizar el vocabulario matemático, notaciones y estructuras para representar ideas, describir relaciones
- *Razonamiento matemático:* Utilizar el razonamiento inductivo para reconocer patrones y formular conjeturas; utilizar el razonamiento deductivo para verificar una conclusión, juzgar la validez de un argumento y construir argumentos válidos; analizar situaciones para hallar propiedades y estructuras comunes;
- *Actitud o disposición hacia las matemáticas*: Confianza en el uso de las matemáticas para resolver problemas, comunicar ideas y razonar;

flexibilidad al explorar ideas matemáticas y probar métodos alternativos para la resolución de problemas; deseo de continuar hasta el final con una tarea matemática; interés, curiosidad e inventiva al hacer matemáticas; inclinación a revisar y reflexionar sobre su propio pensamiento y su actuación; valorar la aplicación de las matemáticas a situaciones que surjan de otras materias y de la experiencia diaria; reconocer el papel que cumplen las matemáticas en nuestra cultura, y el valor que tienen como herramienta y como lenguaje.

La evaluación del proyecto debe llevarse a cabo en varias etapas (Starkings, 1997), para proporcionar a los estudiantes ayuda en su ejecución. Esta autora sugiere también que la evaluación de los proyectos, y evaluación individual de cada estudiante participante, debe tener en cuenta el interés del proyecto, su completitud, la corrección de las técnicas estadísticas e interpretación, la claridad del informe, así como la integración del estudiante en el equipo, su esfuerzo individual y su contribución al trabajo colectivo.

Puesto que los estudiantes valoran aquello sobre los que los examinamos, debemos examinarlos sobre las habilidades y conocimientos que para nosotros son más importantes. Una buena evaluación debe asegurar que el estudiante aprende y no sólo que aprueba. Algunos puntos que podrían tenerse en cuenta en la evaluación de un proyecto son los siguientes:

- *Pregunta de interés:* Si es la pregunta de investigación es relevante, está claramente enfocada y expuesta. Si es una pregunta que se puede abordar con los conocimientos del estudiante. En este apartado podría tenerse también en cuenta la definición de las variables, la descripción de cómo se pueden medir, la exposición correcta de los objetivos y, en el caso de que sea pertinente, la exposición de las hipótesis.
- *Diseño de la investigación:* Un mismo problema se puede abordar de muchas formas diferentes. Para evaluar el diseño se debe tener en cuenta si se especificó la forma en que el estudiante aborda el problema,, incluyendo la descripción de población y muestra y el modelo en que los estudiantes recogieron datos. Se tendrá en cuenta si los datos permiten resolver la cuestión investigada
- *Análisis de datos:* Se debe valorar si el análisis de datos es adecuado al tipo de variables y a la pregunta de investigación, si se respetan los supuestos de aplicación de los diferentes métodos y si los métodos están correctamente aplicados.
- *Conclusiones:* Las conclusiones han de ser consistentes con el análisis; los datos deben apoyar las conclusiones obtenidas Además han de

relacionarse con las preguntas de investigación, objetivos e hipótesis.

- *Reflexión sobre el proceso:* Es interesante incluir una reflexión sobre las limitaciones del estudio y sugerencias de cómo mejorar el diseño o el análisis.
- *Presentación de resultados.* La presentación, incluyendo claridad y corrección de los gráficos, organización adecuada en secciones y apartados y correcta expresión escrita es también pertinente.
- *Creatividad y originalidad:* El último punto a valorar es la originalidad del trabajo y creatividad del alumno.

1.11. Conclusiones

En este capítulo hemos analizado cómo los proyectos están concebidos para introducir en la clase una filosofía exploratoria y participativa, en concordancia con las recomendaciones recientes sobre enseñanza de la estadística, presentando, tanto un ejemplo propuesto por el profesor, como otro elegido y llevado a cabo por una alumna, como parte de un trabajo en grupo. Lo deseable sería que los propios alumnos eligieran el tema en el que quieren trabajar y elaborasen sus propios proyectos en grupos de dos o tres alumnos, que podrían también conectarse con otras áreas curriculares. Con ello aumentaríamos su interés por la materia.

Como sugieren Murray y Gal (2002) la comprensión, interpretación y reacción frente a la información estadística no sólo requiere conocimiento estadístico o matemático, sino también habilidades lingüísticas, conocimiento del contexto, capacidad para plantear preguntas y una postura crítica que se apoya en un conjunto de creencias y actitudes. Todas estas capacidades se incentivan en el trabajo con proyectos.

Cobb y Hodge (2002) sugieren también que el trabajo en grupos y la perspectiva socio cultural en la clase de estadística centra la atención de los estudiantes en lo que supone la estadística como una parte importante de su aprendizaje. Focaliza su propia identificación como posibles productores de estadísticas con relación a sus propios intereses y problemas.

Finalmente Nolan y Speed (2002) resaltan la importancia de desarrollar la capacidad discursiva de los estudiantes, como medio de ampliar sus habilidades de pensamiento crítico. En la producción de su informe el estudiante debe situar el análisis de sus datos dentro de un argumento coherente y convincente que apoye sus hipótesis. La comunicación de ideas a partir de tablas y gráficos es especialmente importante en el razonamiento estadístico.

2. **Comprueba tus intuiciones sobre el azar**

Carmen Batanero y Pedro Arteaga

2.1. Objetivos

Se trata de realizar un experimento para comprobar si tenemos buenas intuiciones respecto a los experimentos aleatorios. En concreto tratamos de comprobar si somos capaces de simular una secuencia de resultados aleatorios.

Para ello se propone un experimento, donde utilizaremos el dispositivo aleatorio más sencillo posible: una moneda equilibrada, comparando los resultados obtenidos al lanzar realmente una moneda con los simulados.

La finalidad principal es hacer reflexionar al alumno sobre el hecho de que nuestras intuiciones sobre el azar nos engañan con frecuencia. También se les quiere mostrar la utilidad de la estadística en la prueba de nuestras hipótesis o teorías (en este caso la hipótesis de que nuestras intuiciones sobre los fenómenos estocásticos son correctas).

Alumnos

Puesto que las variables a tratar son discretas y las actividades no introducen conceptos estadísticos complejos, el proyecto podría ser adecuado para alumnos a partir de 13-14 años, es decir, desde el comienzo de la educación secundaria. También puede proponerse a alumnos de universidad, utilizando con éstos un análisis más completo de los datos.

2.2. Los datos

Los datos son producidos como resultado del experimento que será realizado por cada uno de los alumnos de la clase. El proyecto es interdisciplinar, como ocurre con muchos proyectos estadísticos y cuyo campo de aplicación es la Psicología, más concretamente el estudio de las intuiciones. Una vez realizados los experimentos individuales se continúa con algunas preguntas a los alumnos sobre si ellos piensan que tienen o no buenas intuiciones, a lo cual diferentes estudiantes dan respuestas variadas.

Una vez conseguido el interés del estudiante, se centra la discusión sobre la aleatoriedad y la intuición sobre los fenómenos aleatorios. Se pide a los estudiantes que den ejemplos de fenómenos aleatorios, respondiendo en la mayoría con juegos de azar tales como la lotería, lanzar un dado o lanzar una moneda. El profesor añade otros ejemplos diferentes en meteorología o en el nacimiento de un niño (género).

Se continúa la sesión con una discusión sobre si las personas tienen o no buena intuición respecto a los fenómenos aleatorios. El profesor pregunta a los alumnos qué interés puede tener el educar la intuición sobre los fenómenos aleatorios; los alumnos no parecen tenerlo claro. El profesor describe problemas como la ludopatía, la interpretación incorrecta de resultados de pruebas médicas, o la valoración incorrecta de la evidencia en juicios u otras situaciones de toma de decisión.

Se sugiere empezar con preguntas similares a las siguientes y realizar en clase una discusión colectiva.

1. *¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda 20 veces seguidas? ¿Serías capaz de escribir 20 resultados de lanzar una moneda (sin lanzarla realmente, sino como tú pienses que debieran salir) de forma que otras personas piensen que has lanzado la moneda en realidad? O, ¿podría otra persona adivinar que estás haciendo trampa?*

El experimento consiste en inventar una secuencia de 20 posibles resultados al lanzar una moneda equilibrada (sin lanzarla realmente) de modo que la secuencia pueda pasar como aleatoria para otra persona y comparar con los resultados de 20 lanzamientos reales de una moneda. Este experimento está adaptado de otros realizados en las investigaciones sobre percepción subjetiva de la aleatoriedad.

2. *Vamos a comprobar qué tal son tus intuiciones respecto a los resultados aleatorios. Abajo tienes dos cuadrículas. En la primera de ellas escribe 20 resultados sin realizar realmente el experimento. En la segunda mitad lanza la moneda 20 veces y escribe los resultados obtenidos. Pon C para cara y + para cruz.*

Se da a los estudiantes una hoja de registro como la reproducida a continuación y se les pide que completen, en primer lugar la parte de arriba, inventando una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda equilibrada, y que traten de repartir las caras y cruces, tal como ellos piensan que podrían salir al azar. Seguidamente cada estudiante lanza 20 veces una moneda y registra los resultados en la segunda parte.

Una vez que los alumnos han realizado el experimento tendrán diferentes resultados. Unos posibles resultados son los siguientes:

C	**C**	+	**C**	+	+	+	**C**	**C**	+	**C**	+	**C**	+	+	**C**	**C**	**C**	+	+

+	**C**	+	**C**	+	+	**C**	+	**C**	**C**	**C**	**C**	+	+	+	+	+	**C**	+	+

2.3. Preguntas, actividades y gestión de la clase

Finalizado el experimento, el profesor inicia la discusión sobre cómo comparar los resultados de la totalidad de la clase en las secuencias reales y simuladas. Pregunta a los estudiantes qué se podría hacer para comparar las secuencias producidas por los estudiantes, haciendo alguna pregunta como la siguiente:

3. *¿Cómo podremos distinguir una secuencia realmente aleatoria de otra que hemos inventado?*

Se dejará algún tiempo para pensar y a continuación se organiza una discusión colectiva. Seguramente algún alumno sugerirá contar el número de caras y cruces que debe ser aproximadamente igual en la secuencia real, ya que hay las mismas posibilidades para la cara que para la cruz. El profesor cuenta las que obtuvo en su experimento, que fue registrado en la pizarra (10 caras en la secuencia simulada y 11 en la real) y pregunta a los estudiantes que han obtenido ellos, con lo cual cada uno cuenta las caras en sus dos secuencias y van dando las respuestas.

4. *Pero, ¿hemos de obtener exactamente 10 caras y 10 cruces? ¿Qué pasa si obtenemos 11 caras y 9 cruces? ¿Y si obtenemos 18 y 2? ¿Qué os parece si comparamos el número de caras en las secuencias real y simulada de todos los alumnos de la clase?*

El profesor pregunta si el hecho de obtener 10 caras en la secuencia simulada indica buena intuición. Algunos alumnos dicen que sí, porque ya que hay 20 lanzamientos y las caras y cruces tienen las mismas posibilidades, se ha de esperar más o menos 10 caras en los 20 lanzamientos. El profesor pide levantar la mano a los que obtuvieron 10 caras en la secuencia simulada, que es la mayoría de la clase, resultado que les produce bastante satisfacción, pues indica buenas intuiciones.

Para sacar conclusiones se recogen los datos de todos los alumnos de la clase, tanto del número de caras en las secuencias simuladas como en las reales, para proceder, primeramente al análisis de cada una de estas dos variables y luego a la comparación de las principales diferencias en su distribución. Para ejemplificar la realización de la actividad utilizaremos los resultados obtenidos en una clase de 27 alumnos, quienes obtuvieron los siguientes números de caras en las secuencias simuladas.

10, 12, 11,10, 11, 9, 10, 11, 9, 10, 10, 10, 7, 10, 10, 10, 10, 12, 11, 10, 9, 10, 10, 9, 10, 12, 11

5. *Hemos recogido el número de caras en las secuencias simuladas por cada alumno de la clase ¿Cómo podríamos organizar y resumir estos datos? ¿Cuáles son el valor mínimo y máximo obtenido? ¿Cómo representar los datos de modo que sepamos cuántas veces aparece cada valor? ¿Cuál es el valor más frecuente?*

Tabla 2.1. Número de caras en las secuencias simuladas

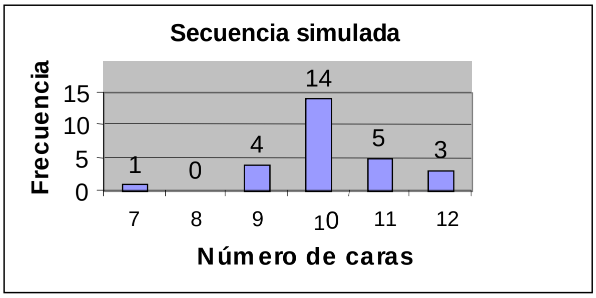
Número de caras	Recuento	Frecuencia
7	x	1
8		0
9	xxxx	4
10	xxxxxxxxxxxxxx	14
11	xxxxx	5
12	xxx	3
Total		27

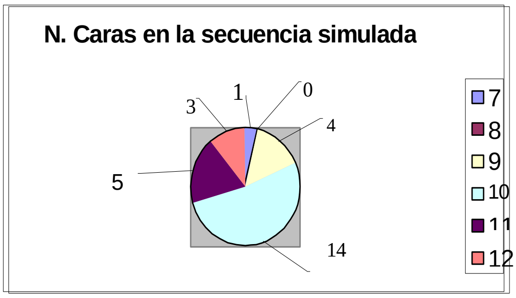
El profesor ayudaría a identificar el valor máximo y mínimo y a organizar un recuento y tabla de frecuencias como la Tabla 2.1. haciéndoles ver su utilidad para resumir la información.

Figura 2.1. Número de caras en secuencias simuladas. Gráfico de puntos

			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x		
			x	x	
		x	x	x	
		x	x	x	x
		x	x	x	x
x		x	x	x	x
7	8	9	10	11	12

Figura 2.2. Gráfico de barras Figura 2.3. Gráfico de sectores





Una vez realizada la tabla de frecuencias el profesor sugiere realizar una representación gráfica. El gráfico de puntos (Figura 2.1) es muy sencillo de construir con ayuda de un papel cuadriculado y puede ser un paso previo a la introducción del gráfico de barras (Figura 2.2) y gráfico de sectores (Figura 2.3). Mientras en los dos primeros se visualiza mejor el carácter numérico de la variable, la moda, la dispersión y la forma de la distribución, en el gráfico de sectores se visualiza mejor la importancia relativa de cada valor respecto al conjunto de datos. Puede mostrarse también como una aplicación en el tema de las fracciones y servir para introducir o repasar los conceptos de sector circular y amplitud del mismo, así como de aplicación en el tema de la proporcionalidad.

De igual modo se realizaría el estudio del número de caras en las secuencias reales, para finalmente comparar las dos distribuciones y analizar si existen algunas diferencias importantes que indiquen que nuestra intuición respecto a la aleatoriedad nos engaña.

11, 11, 11, 8, 7, 8, 9, 11, 10, 9, 9, 9, 9, 14, 7, 10, 9, 10, 11, 13, 11, 8, 8, 11, 12, 9, 8

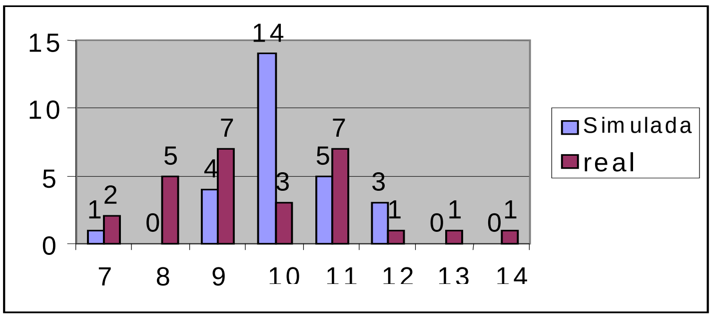
6. *Compara ahora los gráficos del número de caras en las secuencias reales y simuladas. ¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian? ¿Es el valor más frecuente el mismo? ¿Hay el mismo rango de variación de valores? ¿Cuál de las dos variables tiene mayor variabilidad? ¿Piensas que nuestras intuiciones sobre el número de caras que se obtienen al lanzar 20 veces una moneda equilibrada es totalmente correcta? ¿Podrías idear algún tipo de gráfico en que se viesen más claramente las diferencias?*

Una característica del número de caras en una secuencia real es que, en general es más variable de lo que nuestra intuición nos sugiere, mientras que los valores medios coinciden, aproximadamente en ambas distribuciones, ya que, en general, somos muy exactos al reflejar la equiprobabilidad de resultados, incluso más exactos de lo debido, puesto que la secuencia simulada tiene menos dispersión que la real (Figura 2.4).

Figura 2.4. Comparación del número de caras en secuencias reales y simuladas

Secuencia simulada	*N. Caras*	***Secuencia real***
X	*7*	*XX*
	8	*XXXXX*
XXXX	*9*	*XXXXXXX*
XXXXXXXXXXXXXX	*10*	*XXX*
XXXXX	*11*	*XXXXXXX*
XXX	*12*	*X*
	13	*X*
	14	*X*

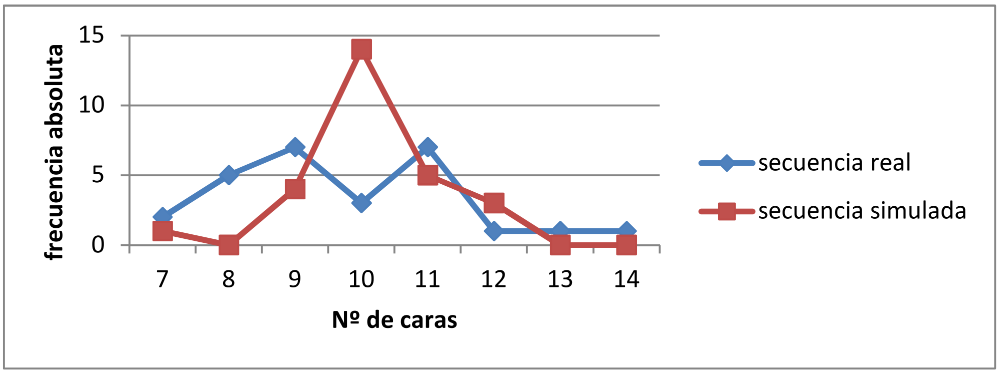
Figura 2.5. Gráficos de barras adosados del número de caras en secuencias reales y simuladas



Al estudiar los diferentes gráficos, se observa que hemos obtenido una distribución bimodal (secuencia real) lo cual sugiere la necesidad de usar la media o la mediana para llevar a cabo la comparación: $\overline{x}$ =10,14 para las secuencias simuladas $\overline{x}$=9,74 para las reales en nuestro ejemplo, donde vemos que los valores son muy parecidos entre sí y casi iguales al valor teórico np=10 de la variable aleatoria número de caras en 20 lanzamientos de una moneda equilibrada, que es una variable aleatoria Binomial. Las medianas son respectivamente iguales a 10 y 9. Por tanto los estudiantes han reproducido intuitivamente los promedios de la variable "número de cara en 20 lanzamientos de una moneda".

También surge en esta actividad la idea de dispersión de una forma sencilla. Bien a través del recorrido o del 50 % de casos centrales se observa mayor dispersión en la secuencia real, donde el 50% de los casos centrales se presentan en el intervalo (9-11) y el recorrido es 7, mientras que en la secuencia simulada el 50% de casos centrales se reduce al valor 10 y el recorrido es 5. Es conveniente llevar a los alumnos a realizar gráficos simultáneos para las dos distribuciones, como el presentado en la Figura 2.4 , el gráfico de barras adosado presentado en la Figura 2.5 o el gráfico de líneas adosado que se muestra en la Figura 2.6.

Figura 2.6. Gráfico de líneas adosado del nº de caras para ambas secuencias



La conclusión respecto a las intuiciones es que los alumnos de los grupos donde se realizó el experimento tienen una buena percepción del valor esperado del número de caras en 20 lanzamientos, puesto que la mayoría produce exactamente 10 caras. Sin embargo, la variabilidad del número de caras no se percibe, suponiendo mayor regularidad que la existente en un proceso aleatorio.

Se continúa el proyecto dando la siguiente pauta a los alumnos y la discusión de la misma en clase:

7. *Recogida de nuevos datos. El número de caras es sólo una de las variables que podemos analizar en una secuencia de resultados aleatorios, en la que aparecen otros muchos modelos probabilísticos. Pensemos otras posibles variables para analizar*.

Una de estas posibles variables es la longitud de las rachas que, intuitivamente esperamos que sean cortas. Es bien conocida la *falacia del jugador* por la que esperamos que, tras una corta racha de, por ejemplo caras, la probabilidad de que aparezca una cruz aumente. En otro plano, si un matrimonio tiene ya dos hijos varones, tendrá una gran seguridad en que el siguiente sea una niña, sin darse cuenta que no es demasiado raro (un caso de cada ocho) los matrimonios con tres varones ni de que, de los matrimonios que ya tienen dos varones, aproximadamente la mitad de los que tengan un nuevo hijo, deben esperar que sea varón, exactamente lo mismo que cuando esperaban a su hijo mayor.

En este proyecto proponemos analizar dos nuevas variables en las secuencias producidas por los alumnos: el número de rachas y la longitud de la racha más larga. Para aclarar el lenguaje llamaremos racha a una secuencia de resultados iguales, de modo que, si después de una cara aparece una cruz (o viceversa) la racha tiene longitud 1. Para clarificar volvemos al ejemplo inicial y coloreamos las rachas que aparecen. Vemos que en la secuencia simulada, la racha más larga es de longitud 3 (una racha de 3 caras y otra de 3 cruces) y que el número de rachas es 12, mientras que en secuencia real hay una racha de 5 cruces y el número de rachas es 11.

C	C	+	C	+	+	+	C	C	+	C	+	C	+	+	C	C	C	+	+

+	C	+	C	+	+	C	C	+	C	C	C	+	+	+	+	+	C	+	+

Para motivar el estudio de estas variables, el profesor puede preguntar si el resultado obtenido en la secuencia real, donde aparecen 5 cruces seguidas, parece razonable. Probablemente algún alumno sugiera que la moneda utilizada no está bien construida y se plantea el estudio de las rachas en las secuencias.

El profesor explicará cómo identificar las rachas y sugerirá a los niños que busquen cuál es la racha más larga en cada una de sus dos secuencias, así como que cuenten el número de rachas, procediendo de nuevo al estudio y comparación de estas variables en las dos secuencias, tal y como se ha hecho con el número de caras y finalizando con una discusión sobre sus diferencias y si nuestras intuiciones sobre las rachas son o no correctas.

Tabla 2.2. Hoja de recogida de datos de la clase con datos recogidos en una clase

Secuencia simulada			Secuencia real		
N. caras	N. rachas	Racha mayor	N. caras	N. rachas	Racha mayor
10	14	4	11	9	4
12	9	4	11	16	2
11	12	4	11	16	2
10	9	4	8	9	4
11	11	3	7	11	4
9	13	3	8	10	5
10	12	3	9	9	4
11	14	3	11	4	7
9	13	3	10	12	3
10	8	5	9	9	5
10	12	3	9	10	5
10	12	3	9	10	5
7	10	6	9	10	5
10	11	3	14	11	5
10	13	4	7	7	5
10	11	3	10	10	3
10	12	4	9	12	3
12	10	4	10	11	4
11	12	4	11	14	3
10	13	3	13	12	4
9	7	3	11	5	4
10	13	3	8	11	5
10	11	4	8	10	7
9	14	3	11	11	4
10	7	2	12	4	4
12	13	3	9	10	5
11	14	3	8	8	5

El profesor puede usar una hoja de registro como la que reproducimos a continuación (Tabla 2.2) donde cada niño anota sus resultados. Luego la hoja se fotocopia y se reparte a los chicos. Si hay poco tiempo, la clase puede dividirse en grupos para que cada uno de ellos se encargue de analizar una de las variables y posteriormente, una vez disponibles los gráficos, se realiza la discusión conjunta.

8. *Analiza ahora la diferencia entre el número de rachas en las secuencias reales y simuladas.*

Para analizar el número de rachas, esperamos que los estudiantes identifiquen el valor máximo y mínimo del número de rachas en las secuencias real y simulada y preparen una tabla de frecuencias como la Tabla 2.3 para resumir la información y otra tabla similar para resumir los datos de la secuencia real. Se espera también que los alumnos calculen resúmenes estadísticos tales como las medidas de posición central: media, mediana y moda y de dispersión (al menos el rango).

Tabla 2.3. Número de rachas en la secuencia simulada

Número de rachas	Frecuencia	F. Acumulada	Porcentaje (%)
4	**2**	**2**	8
5	1	3	11
6			
7	1	4	15
8	1	5	18
9	4	9	33.3
10	7	16	59.3
11			
12	3	24	88,8
14	2	25	92,6
16	2	27	100
Total	27	27	100

Se espera que los alumnos construyan gráficos simultáneos para las dos distribuciones, ya que esto facilitaría la comparación de ambas y como consecuencia la mejor interpretación de la información estadística (Figuras 2.7 y 2.8). En las siguientes figuras se muestran ejemplos de algunos gráficos de este tipo que podrían utilizar los alumnos. También podrían realizar gráficos separados para la distribución de cada secuencia, siempre que se utilice el mismo tipo de gráfico para ambas y la misma escala en los dos gráficos, para que así se facilite la comparación de las distribuciones en estudio.

Figura 2.7. Gráficos de barras adosados para el nº de rachas de ambas secuencias

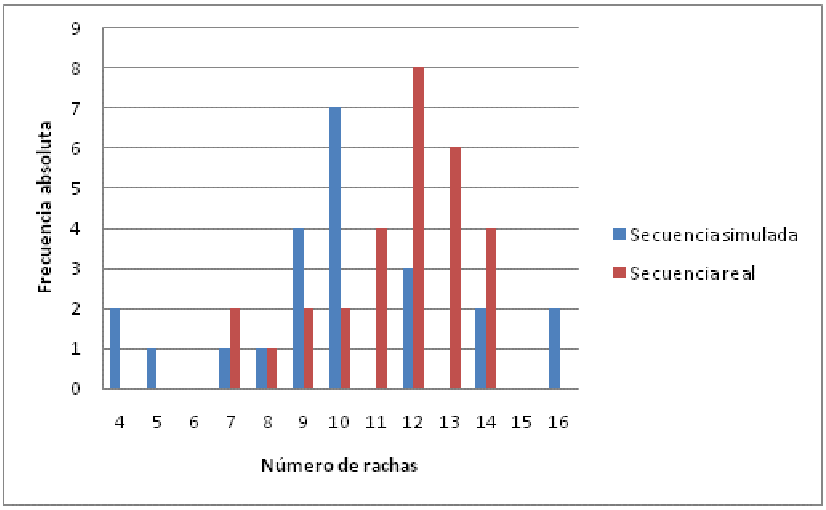
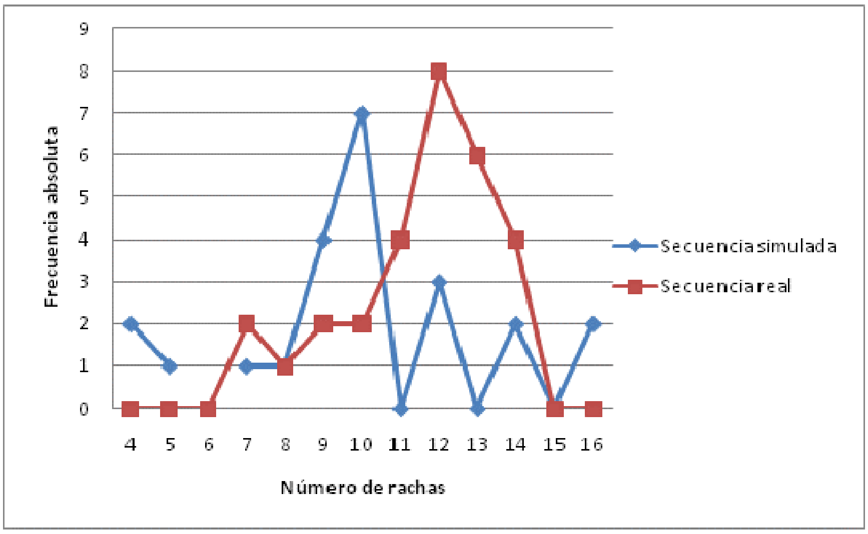


Figura 2.8. Gráfico de líneas adosado del nº de caras para ambas secuencias



9. *¿Qué conclusiones puedes sacar sobre las diferencias en el número de rachas en las dos secuencias? ¿Qué nos dice sobre la intuición de los estudiantes?*

Una característica del número de rachas en una secuencia real es que, en general, es menor de lo que nuestra intuición nos sugiere. Lo podemos ver en los valores medios más elevados, respecto al de las secuencias simuladas. También la dispersión es mayor en las secuencias reales que en las simuladas, lo que se puede ver del valor del rango y desviación típica. Serrano (1996) indica que tenemos tendencia a producir rachas muy cortas, lo que hace aumentar el número de éstas y ello es debido a una percepción incorrecta de la independencia de resultados en lanzamientos sucesivos de la moneda. Los alumnos pueden comprobar estas diferencias analizando los gráficos y las medidas de posición central y dispersión.

La conclusión respecto a las intuiciones es que los alumnos de los grupos donde se realizó el experimento tienen una pobre percepción, tanto del valor esperado del número de rachas en 20 lanzamientos, como de la dispersión de esta variable.

10. *¿Qué conclusiones puedes sacar sobre las diferencias en la racha más larga en las dos secuencias? ¿Qué nos dice sobre la intuición de los estudiantes?*

Para analizar la longitud de la racha mayor, esperamos que los estudiantes identifiquen el valor máximo y mínimo en las secuencias real y simulada y preparen una tabla de frecuencias como la Tabla 2.4 para resumir la información y otra tabla similar para resumir los datos de la secuencia real. Se espera también que los alumnos calculen resúmenes estadísticos tales como las medidas de posición central: media, mediana y moda y de dispersión (al menos el rango).

Tabla 2.4. Número de caras en la secuencia simulada

Longitud	Frecuencia	F. Acumulada	Porcentaje (%)
2	1	1	3,7
3	15	16	59.3
4	9	25	92,6
5	1	26	96,3
6	1	27	100
Total	27	27	100

Se espera que realicen gráficos simultáneos para las dos distribuciones, En las figuras 2.9 y 2.10 se muestran ejemplos de algunos gráficos de este tipo que podrían utilizar los alumnos.

En general las rachas aleatorias son mayores de lo que nuestra intuición nos sugiere como se vio en la investigación de Serrano (1996). Al estudiar los diferentes gráficos y lo resúmenes estadísticos presentados se observan los valores medios mayores y la semejanza de los estadísticos de dispersión. La conclusión respecto a las intuiciones es que los alumnos de los grupos donde se realizó el experimento tienen una mala percepción del valor esperado de la racha más larga, pero, sin embargo, aprecian bien la variabilidad.

Figura 2.9. Gráficos de barras adosados para el nº de rachas de ambas secuencias

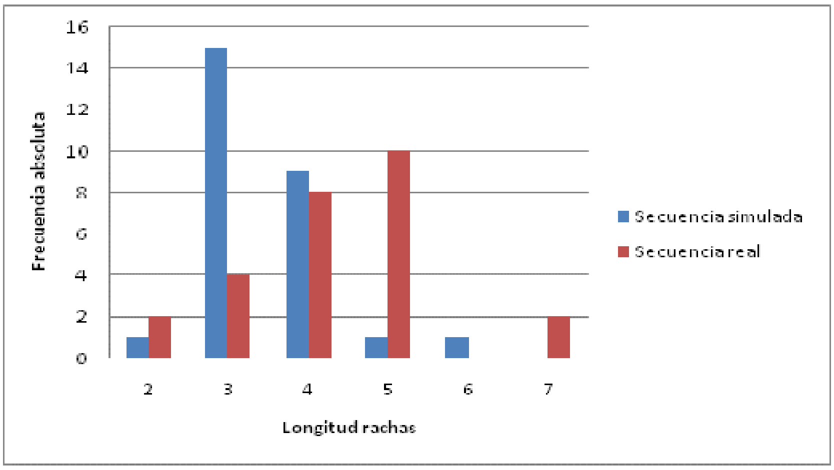
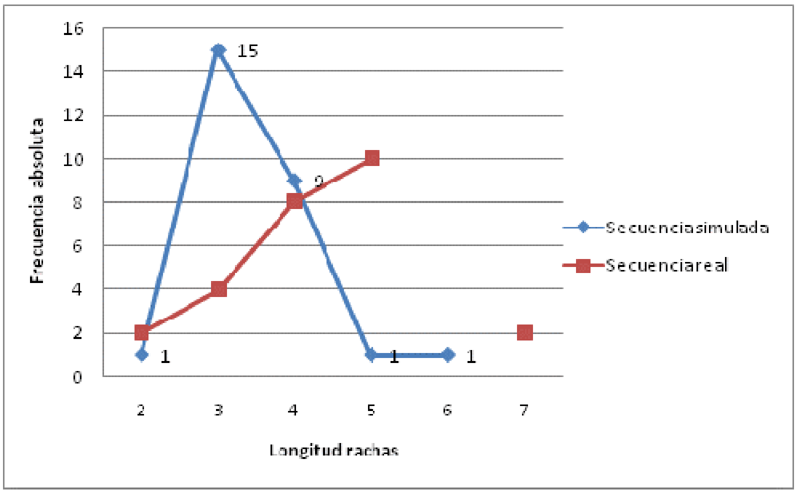


Figura 2.10. Gráfico de líneas adosado del nº de caras para ambas secuencias



2.4. Actividades de ampliación

Se pueden plantear a los estudiantes otros problemas que les permitan mostrar sus intuiciones sobre la aleatoriedad, por ejemplo, el ítem siguiente:

11. *La probabilidad de que un niño nazca varón es aproximadamente 1/2. ¿Cuál de las siguientes secuencias de sexos es más probable que ocurra en tres nacimientos?*

a) MMM; b) VMM; c) las dos son igual de probables.

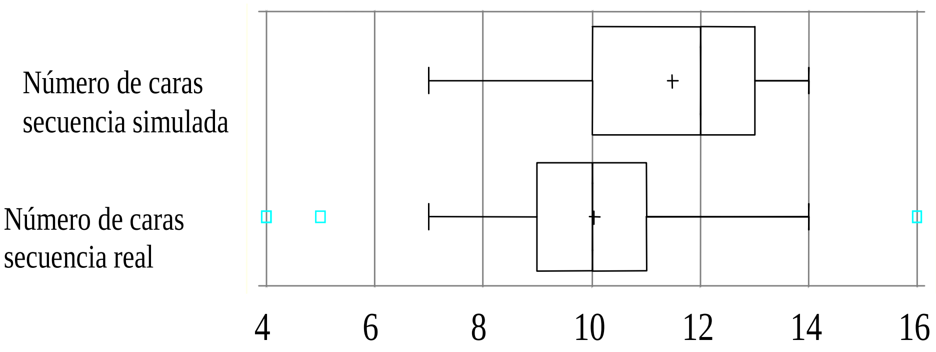
Si el alumno piensa que b) es más probable, pueden organizarse en clase experimentos de simulación con ayuda de tres monedas, donde la cara representa, por ejemplo el varón y la cruz la mujer. También pueden usarse diagramas en árbol para escribir todas las posibilidades en una familia de 3 hijos y enumerar el espacio muestral.

Al introducir la media, se puede hacer ver a los alumnos alguna de sus propiedades sencillas como:

1. La media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución;
2. El valor medio es influenciado por los valores de cada uno de los datos;
3. La media no tiene por qué ser igual a uno de los valores de los datos;
4. El valor obtenido de la media de números enteros puede ser un decimal, como en este ejemplo que no tenga sentido en el contexto de los datos;
5. Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media.

12. *Realiza otros gráficos para representar los datos. Analiza las ventajas relativas de los diferentes gráficos.*

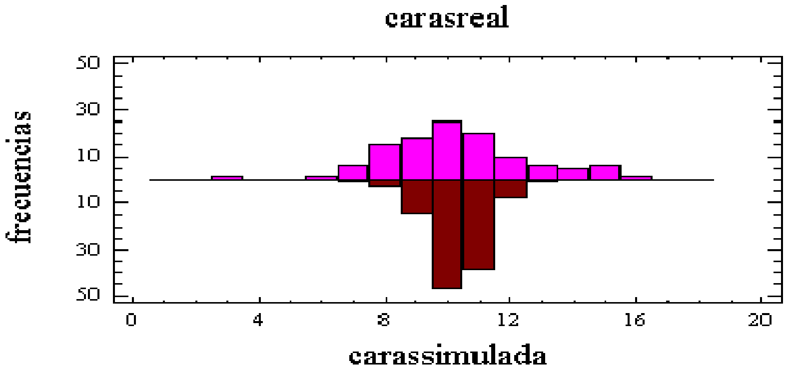
Figura 2.11. Gráficos de cajas paralelos



Con alumnos mayores, puede ampliarse el tipo de gráficos y resúmenes estadísticos utilizables para comparar las distribuciones. Podríamos, por ejemplo, calcular las medianas y cuartiles de las diferentes variables y construir gráficos de cajas paralelos para cada par de variables a comparar.

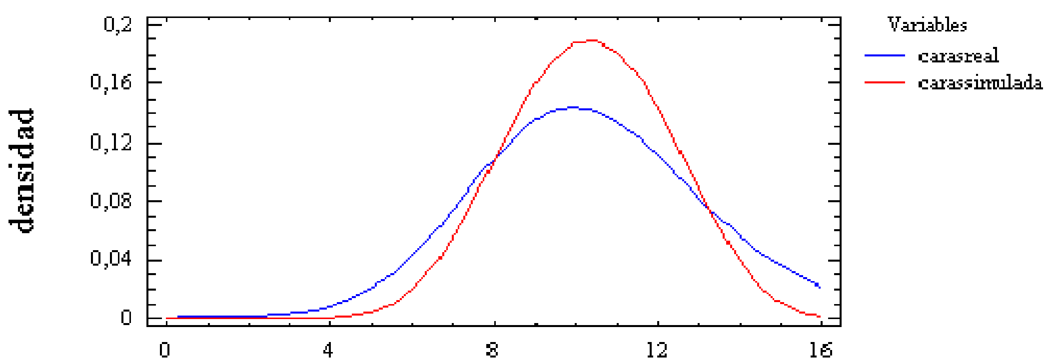
En la Figura 2.11 mostramos los gráficos de caja para el número de rachas en las dos secuencias, donde se observa como la media, mediana y cuartiles de la variable es menor en la secuencia real. Asimismo el 50 % central de valores está por debajo de lo esperado, lo que nos indica que esperamos demasiadas rachas en una secuencia aleatoria. La menor dispersión nos indica que en esto somos menos variables de lo que ocurre en la realidad.

Figura 2.12. Histogramas contrapuestos del número de caras en las secuencias



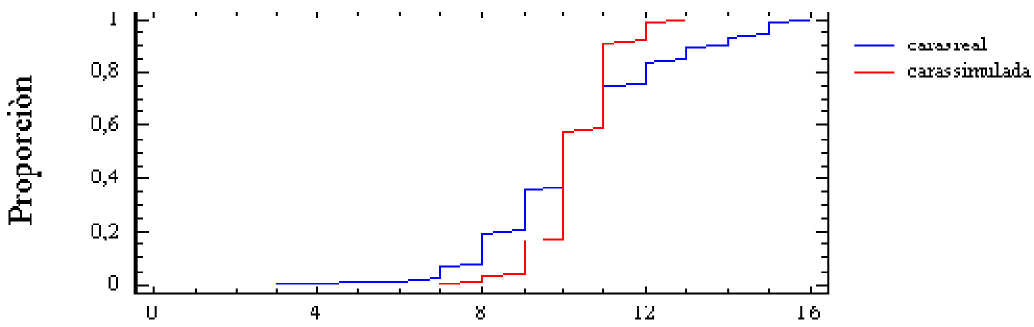
Los histogramas contrapuestos (Figura 2.12) para el número de caras permiten visualizar la similitud de las modas en las dos distribuciones y el menor recorrido del número de caras en las secuencias simuladas. Es importante usar los mismos intervalos y tomar valores menos centrados en números enteros, al ser la variable discreta. Los gráficos de caja (Figura 2.11) las dos secuencias muestran la coincidencia de las medias. Es muy visible la menor dispersión, que nos indica que en esto somos menos variables de lo que ocurre en la realidad. También permite identificar los alumnos que produjeron resultados atípicos.

Figura 2.13. Curvas de densidad ajustadas del número de caras en las secuencias



Las funciones de densidad (ajustadas a la gráfica) muestran de nuevo la semejanza en el valor central y mayor dispersión de la distribución de caras reales (Figura 2.13). Los gráficos de frecuencias acumuladas (Figura 2.14) indican que los percentiles correspondientes son menores en las caras simuladas y mayores en las reales porque los valores mínimos son más altos y los máximos más bajos en el número de caras de las secuencias simuladas.

Figura 2.14. Gráfico de frecuencias acumuladas del número de caras en las secuencias



13. *¿Son las diferencias observadas en las variables estadísticamente significativas? Elige un contraste adecuado para comparar medias y varianzas en los tres pares de variables.*

El contraste de diferencias de medias (Figura 2.15), indica que la probabilidad de obtener la diferencia dada en caso de igualdad en las medias de las poblaciones es 0,9. Por tanto no podemos rechazar la hipótesis de igualdad de medias del número de caras en secuencias reales y simuladas. Los intervalos de confianza de las medias se solapan claramente.

Por el contrario, no hay solape en los intervalos de confianza de las desviaciones típicas del número de caras en las dos distribuciones (Figura 2.16) y la razón entre las dos varianzas (mayor de 5) es muy poco probable en caso de igualdad de varianzas en las poblaciones, por lo que la diferencia de varianzas (y de dispersión) es estadísticamente significativa.

Para el caso del número de rachas, el contraste de diferencias de medias resulta estadísticamente significativo y los intervalos no se solapan. Lo mismo ocurre para las varianzas. Para la racha más larga, los valores medios de la distribución simulada son menores así como la dispersión. Mientras que las diferencias de media son estadísticamente significativas no lo son la de desviación típica.

Figura 2.15. Contraste de diferencia de medias e intervalos de confianza

Comparación de Medias

Intervalo de confianza del 95,0% para la media de carasreal:
9,74074 +/- 0,690364 [9,05038,10,4311]
Intervalo de confianza del 95,0% para la media de carassimu:
10,1481 +/- 0,420712 [9,72744,10,5689]
Intervalo de confianza del 95,0% para la diferencia de medias, con varianzas distintas: -0,407407 +/- 0,78923 [-1,19664,0,381822]

Prueba t para comparar las medias

Hipótesis nula: media1 = media2
Hipótesis alternativa: media1 NE media2
con varianzas distintas: t = -1,03585 valor p = 0,305065

La conclusión es que producimos rachas más cortas que lo esperado en una secuencia aleatoria, aunque no podemos admitir que la dispersión sea diferente de la esperada.

Figura 2.16. Contraste de diferencias de varianzas e intervalos de confianza

Comparación de Desviaciones Típicas
----

	carasreal	carassimu
Desviación Típica	1,74516	1,06351
Varianza	3,04558	1,13105
g.l.	26	26

Razón de Varianzas = 2,6927

Intervalo de confianza del 95,0% para
Desviación Típica carasreal: [1,37434;2,39162]
Desviación Típica carassimu: [0,837532;1,45747]
Razón de Varianzas: [1,22713;5,9086]

Test F para comparar desviaciones típicas

Hipótesis nula: sigma1 = sigma2
Hipótesis alternativa: sigma1 NE sigma2
F = 2,6927 valor p = 0,0141582

Diferencias de comportamiento en diferentes grupos de alumnos

14. *Las intuiciones observadas podrían estar modificadas por la enseñanza recibida por los estudiantes; de hecho el grupo de Carmen es de una especialidad universitaria diferente y tienen mayor*

preparación estadística que los otros dos. A continuación analizamos los datos para estudiar las siguientes preguntas ¿Se comportan los diferentes grupos de alumnos de igual modo? ¿o pueden estar influidos por la enseñanza específica en cada grupo?

Utilizando gráficos de variables múltiples (Figura 2.17 y 2.18) representamos primeramente las medias e intervalo de confianza en los tres grupos, los cuáles se solapan, lo que sugiere que las pequeñas diferencias de medias observadas no son estadísticamente significativas. Más aún los gráficos de cajas muestran una notable coincidencia de mediana y cuartiles, así como del rango recorrido por los casos típicos.

Estos resultados se confirman con la prueba del análisis de varianza de una vía (Tabla 2.5), ya que la varianza entre grupos (de un grupo a otro) es menor que la varianza dentro de cada grupo, el valor F es pequeño y su probabilidad (en caso de igualdad de media en las poblaciones) es muy alta. Podemos aceptar la hipótesis de que los tres grupos de alumnos producen un número de caras similar.

Figura 2.17.

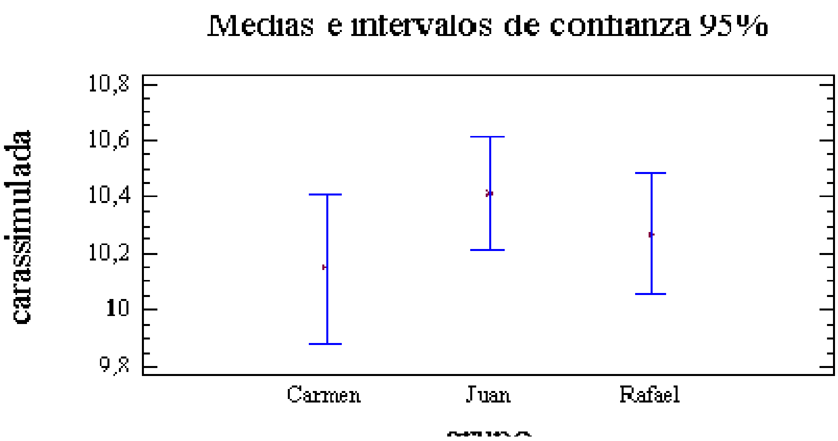
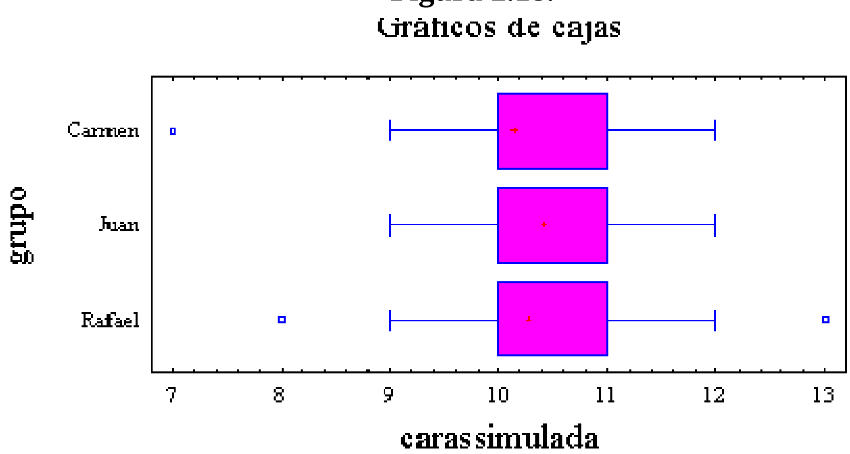


Figura 2.18.



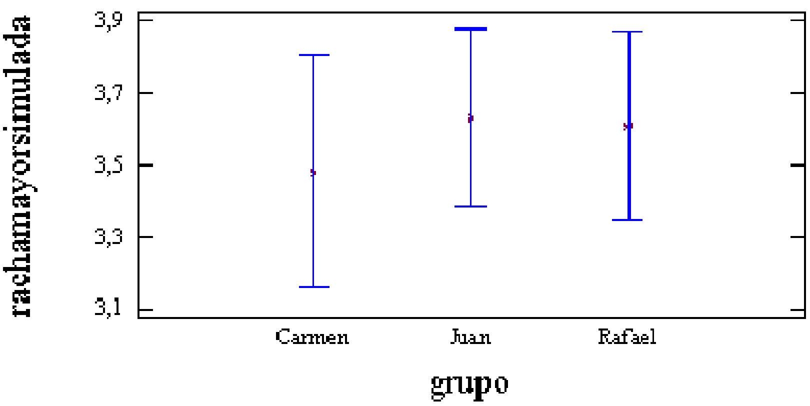
Los resultados se repiten para las otras dos variables (no los comentaremos). Es decir las intuiciones observadas sobre las secuencias aleatorias se repiten en alumnos de grupos diferentes. Los intervalos de confianza (Figura 2.19) de las medias en los distintos grupos, calculados según el método de mínima diferencia significativa (LSD) para ajustar las comparaciones múltiples, confirman los resultados.

Tabla 2.5. Resultados del análisis de varianza

Fuente	Suma de cuadrados	g.l.	Cuadrado medio	Razón F	Valor p
Entre grupos	1.25239	2	0,6256	0,66	0,5169
Dentro de los grupos	104,608	111			
Total	105,86	113	0,9424		

Figura 2.19

Medias e intervalos de confianza 95%



2.5. Algunas dificultades y errores previsibles

2.5.1. Intuición en probabilidad

En este experimento intervienen las intuiciones incorrectas respecto al azar. Las intuiciones son, según Fischbein (1975), procesos cognitivos que intervienen directamente en las acciones prácticas o mentales, y tienen las siguientes características: inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad y auto-evidencia. La inmediatez significa que las intuiciones no son reflexivas, sino que surgen con frecuencia en forma espontánea. El carácter global se opone al analítico o descomposición en partes.

Las intuiciones van más allá de un caso particular, en cierto modo tienen un carácter teórico y por eso sirven para extrapolar o hacer predicciones. Parecen autoevidentes para el sujeto, quien no necesita demostración. Diversas intuiciones de relacionan entre sí, formando estructuras de razonamiento. Fischbein diferencia entre intuiciones primarias y secundarias.

- Las *intuiciones primarias* se adquieren directamente con la experiencia, sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Ejemplo de ellas son las intuiciones espaciales elementales, como el cálculo de distancia y localización de objetos, o el admitir que al lanzar un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.
- Por el contrario, las *intuiciones secundarias* se forman como consecuencia de la educación, principalmente en la escuela.

Una intuición secundaria no se reduce a una simple fórmula aceptada o utilizada automáticamente, sino que se transforma en convicción, en creencia, en un sentimiento de evidencia. Pero una intuición no se forma a partir de la información obtenida de una lectura o de una explicación teórica, sino de una información que el alumno utiliza en sus propias acciones y predicciones a lo largo de gran parte de su desarrollo intelectual. Fischbein sostiene que la distinción entre el azar y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales. Por ello, si no se ha tenido una instrucción en probabilidad tendemos a buscar dependencias causales que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias, siendo influenciados por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas.

2.5.2. Percepción de la aleatoriedad

Piaget e Inhelder (1951) defienden que la comprensión de la aleatoriedad por parte del niño es complementaria a la de la relación causa-efecto. Los niños conciben el azar como resultado de la interferencia de una serie de causas actuando independientemente, que lleva a un resultado inesperado. Ya que, en el período preoperacional, el niño tiene un pensamiento reversible, según Piaget, el niño no puede extender la aleatoriedad hasta la etapa de las operaciones formales, porque no puede diferenciar entre acontecimientos reversibles y los aleatorios, originados por mezclas de causas irreversibles. Además el niño no comprende bien la relación entre causa y efecto.

Muchos otros autores han discutido esta teoría y analizado la percepción de la aleatoriedad en niños y adultos con dos tipos de problemas:

- En el primero (problemas de generación) se pide a los sujetos simular una secuencia de resultados aleatorios. Por ejemplo, se pide escribir puntos al azar en un folio o escribir una sucesión de dígitos aleatorios. Nosotros hemos realizado un experimento de este tipo.
- En las problemas de reconocimiento se pregunta a los participantes si unas ciertas situaciones, secuencias o patrones espaciales son o no aleatorios.

Serrano (1996) indica que los sujetos tienden a encontrar patrones deterministas en las situaciones aleatorias, es decir, tratan de encontrar asociaciones inexistentes, con objeto de reducir la incertidumbre. Por el contrario, hay también una tendencia a inferir aleatoriedad en situaciones en la que no está presente. Hay una tendencia a generar rachas cortas de dos o tres símbolos adyacentes en algún sentido, por ejemplo números consecutivos o letras sucesivas del alfabeto en las tareas de generación. También se produce un exceso de alternancias o "recencia negativa" que consiste en reproducir la frecuencia esperada del suceso con demasiada exactitud, incluso en rachas cortas.

Batanero y Serrano (1999) sugieren que los alumnos atribuyen diferentes significados a la aleatoriedad y algunos de ellos coinciden con los admitidos en diferentes periodos históricos dentro de la estadística, por ejemplo:

- Aleatoriedad como inexistencia de causas o causa desconocida; interpretación ya discutida.
- Aleatoriedad como equiprobabilidad; se consideran aleatorios solo los sucesos equiprobables.
- Aleatoriedad como estabilidad de las frecuencias relativas; en este caso nos aproximamos a la concepción asociada a la visión frecuencial de la probabilidad, donde lo importante para que un fenómeno sea aleatorio es que se pueda repetir indefinidamente en las mismas condiciones.
- Aleatoriedad como impredecibilidad: simplemente no sabemos el resultado del experimento.

Cada una de estas concepciones recoge propiedades parciales del concepto y por ello puede ser válida en unas situaciones e incompleta en otras más complejas. Es importante que en la clase el profesor presente a los alumnos ejemplos variados de situaciones aleatorias, como las que se han mostrado a lo largo de esta sección para ayudar a los alumnos a una construcción progresiva del concepto.

2.5.3. Elaboración de gráficos

El primer paso en el análisis es el estudio de cada variable, la tabulación y representación gráfica. Algunos investigadores han analizado los diferentes niveles de comprensión de las gráficas (Curcio, 1989) y las dificultades de los alumnos en la elaboración de las mismas o la selección de un gráfico adecuado, debido a la diferente información que aportan las diversas gráficas estadísticas (Li y Shen, 1992). Friel, Curcio y Bright (2001) identifican los siguientes elementos estructurales de un gráfico estadístico:

- El *título* y las *etiquetas* indican el contenido contextual del gráfico y cuáles son las variables representadas.
- El *marco* del gráfico incluye los ejes, escalas, y marcas de referencia en cada eje. Dicho marco proporciona información sobre las unidades de medida de las magnitudes representadas. Puede haber diferentes tipos de marcos y sistemas de coordenadas (cartesianas bidimensionales, multidimensionales, polares…).
- Los *especificadores* del gráfico, como los rectángulos (en el histograma) o los puntos (en el diagrama de dispersión) son los elementos usados para visualizar los datos. Los autores nos alertan de que no todos los especificadores son igualmente sencillos de comprender sugiriendo el siguiente orden de dificultad: Posición en una escala homogénea (gráficos de línea, de barras, de puntos, algunos pictogramas e histogramas); posición en una escala no homogénea (gráficos polares, gráficos bivariantes); longitud (gráficos poligonales, árboles); ángulo o pendiente (diagrama de sectores, discos); área (círculos, pictogramas); volumen (cubos, algunos mapas estadísticos); color (mapas estadísticos codificados mediante color).

En relación con los anteriores componentes Friel, Curcio y Bright (2001) describen las siguientes competencias relacionadas con el lenguaje gráfico:

- Reconocer los elementos estructurales del gráfico (ejes, escalas, etiquetas, elementos específicos) y sus relaciones. Distinguir si cada elemento es o no apropiado en el gráfico particular.
- Apreciar el impacto de cada uno de estos componentes sobre la

presentación de la información (por ejemplo, predecir como cambiaría el gráfico al variar la escala de un eje).

- Traducir las relaciones reflejadas en el gráfico a los datos que se representan en el mismo y viceversa.
- Reconocer cuando un gráfico es más útil que otro, en función del juicio requerido y de los datos representados, es decir, saber elegir el gráfico adecuado al tipo de variable y al tipo de problema.

Deberíamos también fomentar en los alumnos un sentido gráfico que les haga ser críticos frente a los posibles gráficos tendenciosos que con frecuencia encontramos en los medios de comunicación.

2.5.4. Otras dificultades

Los alumnos podrían tener dificultades en la realización de los gráficos, construyendo, por ejemplo, unas escalas no homogéneas u omitiendo las escalas o etiquetas que identifiquen claramente el propósito del gráfico. Es importante concienciar a los alumnos de que un gráfico mal construido proporciona una información engañosa. Una actividad complementaria podría ser buscar ejemplos en la prensa de tablas estadísticas o gráficos que presenten errores de construcción o que induzcan a obtener conclusiones equivocadas y posteriormente elaborar una lista de los principales tipos de errores detectados.

Al calcular la media a partir de la tabla de frecuencias, los alumnos podría omitir el ponderar los valores de la variables por las frecuencias, ya que los alumnos tienen con frecuencia dificultad en el cálculo de medias ponderadas. Pueden planteárseles problemas como el siguiente, para hacerles ver la necesidad de ponderación:

15. *Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos y el de los hombres de 80. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?*

Los alumnos tienen a veces dificultades en comprender la idea de mediana; sugerimos el cálculo de la mediana a partir del conjunto de datos ordenados y pasar a los algoritmos de cálculo sólo cuando el alumno ha comprendido bien el significado del concepto.

2.6. Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar, explícita o implícitamente los siguientes contenidos:

1. *Aplicaciones de la estadística:*

- Diseño de un experimento;
- Análisis de datos experimentales; comparación de datos experimentales con patrones teóricos;

2. C*onceptos y propiedades*:

- Aleatoriedad: experimento aleatorio; secuencia de resultados aleatorios, sucesos equiprobables, independencia de ensayos, rachas;
- Variable estadística discreta, frecuencia absoluta; tabla de frecuencias; distribución de frecuencias; frecuencia acumulada;
- Variable aleatoria, distribución binomial, esperanza;
- Posición central, moda, media, mediana;
- Propiedades de la media aritmética;
- Dispersión: rango, casos centrales, 50% de casos centrales;
- Agrupación en intervalos, histograma;
- Contraste de hipótesis, nivel de significación; contraste de diferencia de medias en muestras relacionadas; contraste de diferencia de varianzas;
- Intervalo de confianza, cálculo e interpretación;
- Análisis de varianza. Factores en análisis de varianza; partición de la varianza*;* estadístico F.

3. Notaciones y representaciones:

- Palabras como frecuencia, media, mediana, moda, recorrido, etc.
- Símbolos como $\bar{x}$, Me, Mo;
- Tablas de frecuencia; Gráficos de puntos, barras, barras adosados, líneas, líneas múltiples, sectores, cajas, curvas empíricas de densidad. Gráficos de frecuencias acumuladas.

4. Técnicas y procedimientos:

- Recogida y registro de datos experimentales;
- Elaboración de tablas de frecuencia; recuento y cálculo de frecuencia;
- Elaboración de gráficos de puntos, diagramas de barras, diagramas de barras adosados y gráficos de sectores, líneas, curva empírica de densidad, gráfico de frecuencias acumuladas, gráficos de caja, representación gráfica de intervalos de confianza;
- Interpretación de tablas y gráficos; elaboración de conclusiones a partir del análisis de tablas y gráficos;
- Cálculo e interpretación de intervalos de confianza;
- Contraste de comparación de medias (muestras relacionadas);
- Contraste de comparación de varianzas (muestras relacionadas);
- Análisis de varianza de un factor, efectos fijos; cálculo e interpretación;
- Interpretación de resultados significativos y no significativos en contrastes t, F y Anova;
- Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos obtenidos en un experimento;
- Uso de calculadora gráfica, hojas de cálculo o software estadístico;

5. A*ctitudes:*

- Reflexión sobre las propias intuiciones incorrectas en relación a los experimentos aleatorios;
- Valoración de la utilidad de la estadística para analizar datos obtenidos mediante experimentación;
- Valoración de la estética y la claridad en la construcción de tablas y gráficos estadísticos.

3. ¿Cómo son los alumnos de la clase?

Carmen Batanero y Carmen Díaz

3.1. Objetivos

Se trata de elaborar un perfil de los alumnos, identificando el alumno típico y analizando si hay diferencias entre el chico y la chica típicos, respecto a sus características físicas. Para ello se recogerán datos sobre características físicas de los estudiantes, que se analizarán a lo largo del proyecto.

Cada alumno se situará en su percentil, respecto a las diferentes características. Asimismo, se trata de identificar relaciones entre las variables analizadas.

Se intenta poner al alumno en la situación de realizar un estudio en que los datos se obtienen mediante medida física. Se les quiere concienciar de la importancia de la fiabilidad de los datos, la necesidad y dificultad de la categorización, de la importancia de la claridad en la definición de las variables y de la serie de pasos que van desde la idea inicial de la investigación hasta la obtención de las conclusiones.

Un objetivo importante es introducir al alumno en las diferentes técnicas de recogida de datos, con especial énfasis en la medición, en este caso, de características físicas. Puesto que algunos datos son cualitativos, surge la necesidad de categorización, que siempre supone una simplificación de la realidad, ya que existen diversos modos de modelizar la misma realidad.

Alumnos

El proyecto podría ser adecuado para alumnos a partir de 14-15 años, ya que hacemos una primera introducción a la idea de asociación y estudio de las tablas de contingencia. Para alumnos de Bachillerato o universitarios, el proyecto se puede llevar a cabo con mayor formalización, introduciendo la estimación de algunos parámetros o el ajuste de distribuciones que puedan servir para modelizar los datos.

3. 2. Los datos

Se preparará una lista de las características que queremos incluir en el estudio, analizando las diferentes formas en que podrían obtenerse los datos:

- Por simple observación: como el sexo, color de pelo y ojos, si el alumno usa o no gafas;
- Se requiere una medición: como el peso, talla, perímetro de cintura, anchura de hombros o longitud de brazos extendidos;
- Habría que preguntar a los alumnos; es decir realizar una pequeña encuesta: cuánto deporte practica, número del calzado, cuantas horas duerme, etc.

Los datos serán recogidos por los propios alumnos, mediante las diversas técnicas señaladas. Se requerirá un metro y una báscula, para tomar datos de todos los alumnos con un mismo instrumento.

3. 3. Preguntas, actividades y gestión de la clase

Una vez planteado el proyecto, la actividad comienza con la recogida, codificación y registro de los datos. Algunas características a incluir, y las preguntas relacionadas con la obtención de los datos, se recogen a continuación.

1. *Tomemos datos del sexo de cada alumno. ¿Qué tipo de variable es el sexo? ¿Tendría sentido calcular la media de esta variable? ¿Y la moda? Es importante que nos pongamos de acuerdo, sobre cómo vamos a codificar los chicos y chicas. De lo contrario, alguno de vosotros podría usar "chico/ chica", otros "varón/ mujer" o "hombre /mujer", "V/ M", etc. Un sistema posible de codificar los datos sería 1= "chico"; 2= chica".*

Resaltaremos a los alumnos el hecho de que la codificación es un convenio, puesto que hay más de un modo de codificar los mismos datos. Puesto que cada uno recoge sus propios datos, debemos llegar a un acuerdo y describir el sistema empleado para que otros puedan comprender nuestros datos.

2. *¿Cómo se distribuye el sexo de los alumnos en esta clase? Prepara*

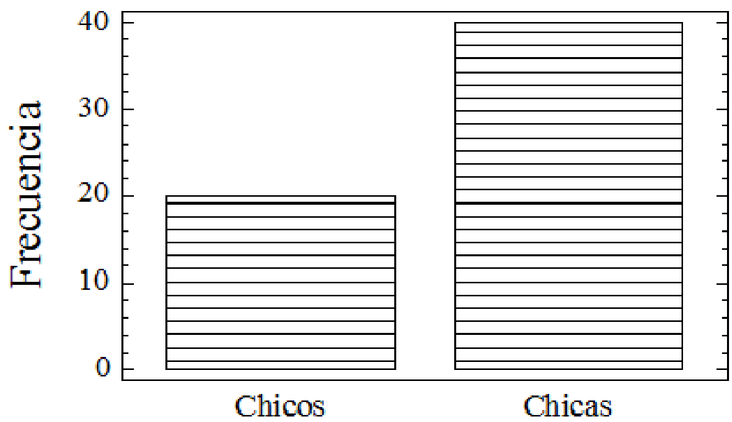
una tabla de frecuencias y un gráfico que describa la distribución. ¿Es el alumno típico un chico o una chica?

Los alumnos prepararán una tabla de frecuencias similar a la 3.1 y elaborarán alguno de los gráficos que ya conocen, como el diagrama de barras (Figura 3.1) o de sectores. El alumno típico de la clase es una chica, puesto que la moda es ser una chica (valor más frecuente).

Tabla 3.1. Distribución de frecuencia del sexo de los alumnos

Sexo	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje
Chicos	23	0,3833	38.3
Chicas	37	0,6167	61.7
Total	60	1	100

Figura 3.1. Distribución de alumnos por sexo



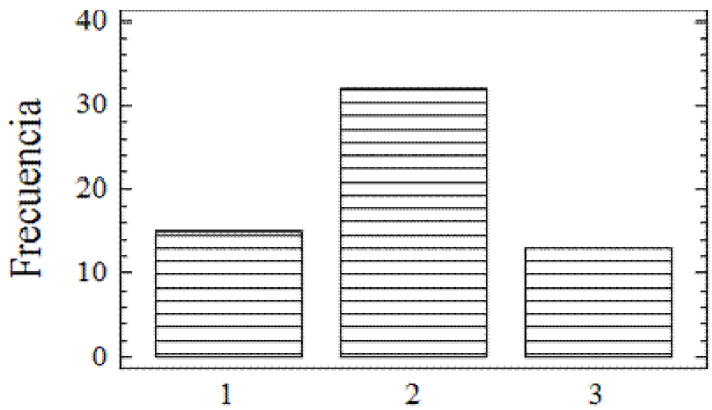
3. *Tratemos, ahora de recoger datos sobre la práctica de deporte. ¿Cómo podemos recoger estos datos? ¿Cómo los podríamos codificar?*

Los alumnos se encuentran ahora con el problema de que la práctica de deporte no es una variable directamente observable, aunque cada uno de los alumnos conoce si practica o no deporte y la frecuencia con que lo practica. Habrá que preguntar a los alumnos sobre su práctica de deporte. Por otro lado, surgirá la discusión de como codificar esta variable: una posibilidad sería preguntar por el número de días a la semana que se practica deporte (con lo cual tendríamos una variable cuantitativa discreta con valores 0 a 7). Pero es posible que no todos los alumnos sean sistemáticos en la práctica de deporte: unas semanas practiquen 3 días y otras ninguno, quizás dependiendo de si es época de exámenes o no.

Nosotros, al realizar este proyecto en clase, decidimos codificar simplemente con tres valores: 1 (poco, sólo de vez en cuando), 2 (con frecuencia, alguna vez cada semana), 3 (sistemáticamente, por ejemplo, 2 o más días en semana). Con este convenio (u otro como una escala 0-10) obtenemos una escala ordinal, porque lo que un alumno considera sistemático puede no coincidir con la opinión de otro y porque 2 no representa el doble que 1.

Una vez llegados a una decisión, se recogerían los datos, se elaboraría una tabla de frecuencias y se buscaría el valor típico. La tabla esta vez puede tener frecuencias acumuladas y el valor típico preferible sería la mediana, porque es más informativa que la moda y la media no sería muy precisa al ser la escala ordinal. La mediana en los alumnos de nuestra clase fue 2 (que en este caso coincide con la moda), por lo que el alumno típico es una chica que practica deporte con frecuencia. La media, en esta variable sería 1,97, que no tiene sentido en estos datos.

Figura 3.2. Distribución de alumnos, según práctica de deporte

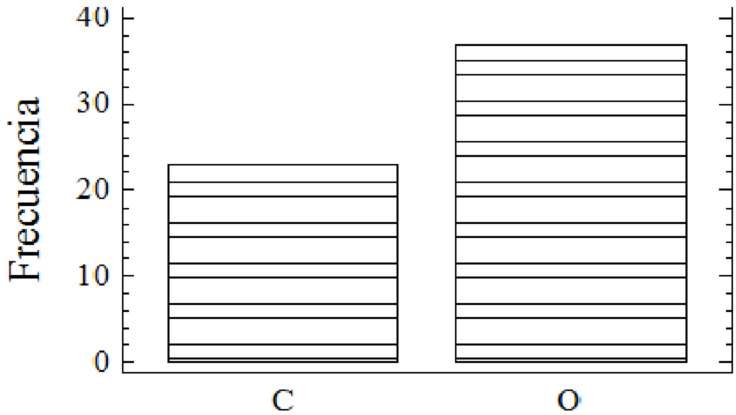


4. *¿Cómo clasificamos a los alumnos según el color de pelo? ¿Y según el color de ojos?*

Esta vez se trata de variables cualitativas que pueden observarse directamente, sin necesidad de preguntar. Sin embargo, se plantea el problema de la clasificación. Para los ojos, por ejemplo, podríamos considerar ojos verdes, azules, grises, castaños y negros, e incluso diferenciar entre castaños y dorados. Incluso así, para algunos alumnos podría ser difícil decidir si sus ojos son azules o verdes y al final habría que tomar una decisión sobre como categorizar al alumno.

Estas variables dan lugar a reflexiones interesantes sobre el hecho de que, al categorizar, siempre simplificamos la realidad y que los mismos datos podrían categorizarse en forma diferente. En estadística no hay una única solución a cada problema, y tan importante o más que los cálculos son las decisiones que se toman sobre cómo recoger y categorizar los datos. En nuestro caso, nos decidimos por clasificar simplemente a los alumnos por ojos claros/ oscuros y pelo claro/ oscuro. El 61 % (37 alumnos tenía los ojos oscuros) y el 58% tenía los ojos oscuros; luego el alumno típico es una chica de pelo y ojos oscuros que practica deporte en forma moderada.

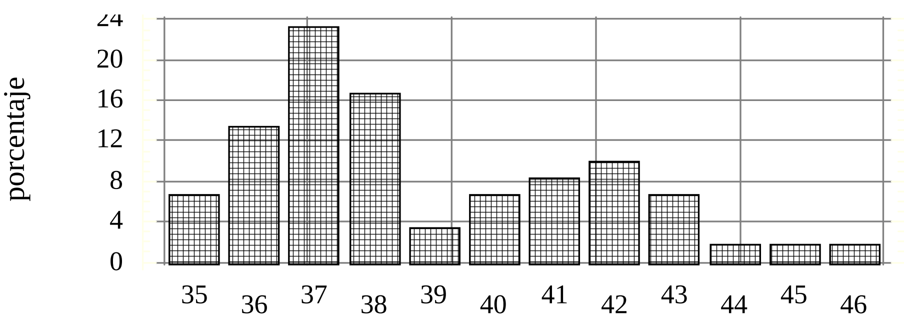
Figura 3.3. Distribución de alumnos según el color de los ojos



5. *¿Cuál es el número de calzado típico?*

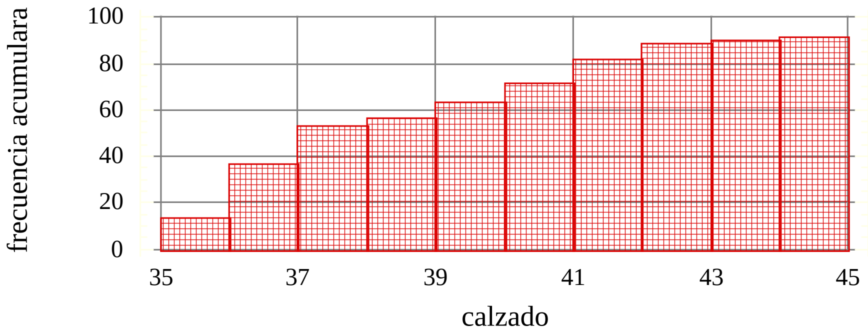
Los alumnos analizarán la distribución del número de calzado (Figura 3.4.), cuya moda es el 37 (el calzado más frecuente). Puesto que la variable se mide ahora en escala de razón, se podría plantear el cálculo de la media, cuyo valor es igual 38.8. Se puede plantear al alumno la pregunta de ¿Qué significa que el número promedio de calzado es 38.8?, cuando tal número realmente no existe y también, por qué hay tanta diferencia entre la media y la moda en este caso.

Figura 3.4. Distribución del número de calzado



Observamos que unos pocos alumnos tienen un pie muy grande y hacen subir artificialmente el valor de la media, que es muy sensible a los casos atípicos. La mediana es un estadístico más robusto, y sugerimos a los alumnos calcular la mediana a partir del diagrama de frecuencias acumuladas (Figura 3.5)

Figura 3.5. Diagrama de frecuencias acumuladas



Vemos de este diagrama que el 50 % de los alumnos tienen un número de calzado igual o menor a 37 y el resto igual o mayor (puesto que en 37 la frecuencia acumulada salta del 43% al 60%. El valor mediano del número de calzado es 37 y coincide con la moda. Tenemos que añadir, como característica del alumno típico, el número de calzado 37.

6. *¿Cuáles son el peso, la talla y la longitud típica de brazos?*

Al trabajar con variables continuas o variables en que el número de valores diferentes es grande, se hace necesaria la agrupación. Como paso previo a la construcción de una tabla de frecuencias o un gráfico, se puede pedir a los alumnos que construyan un diagrama de tallo y hojas (Figura 3.6). En este diagrama se visualiza la frecuencia en intervalos de amplitud 10 o 5 y se conservan los valores numéricos de los datos. Es sencillo de construir con una hoja de papel cuadriculado.

A partir de este gráfico los alumnos prepararán tablas de frecuencia para las variables, similares a la tabla 3.2. Un punto importante es que no hay una regla fija respecto a la elección de los intervalos de clase y el número y límite de intervalos determinará la forma del histograma (Figuras 3.7 y 3.8). Mientras que con 9 intervalos se visualiza un valor atípico, este aparece oculto con 7 intervalos. Un criterio a seguir es que los extremos de los intervalos sean números enteros y también que el número de intervalos sea, aproximadamente, la raíz cuadrada del número de datos (aunque no exacta; en nuestro caso, con 60 datos, un número razonable de intervalos sería 7, pero hemos tomado nueve, para que los extremos sean múltiplos de cinco.

Figura 3.6. Gráfico de tallo y hojas. Altura de los alumnos

15|55689

16|0000111122222333444

16|555566777899

17|000222344

17|55556889

18|0344

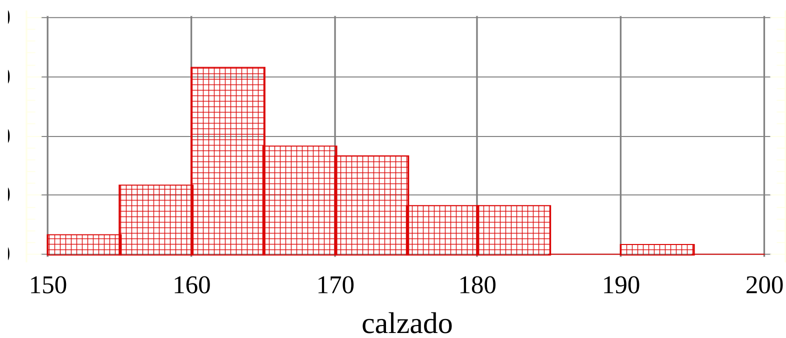
18|55

19|1

Tabla 3.2. Distribución de la talla (cm.) de los alumnos

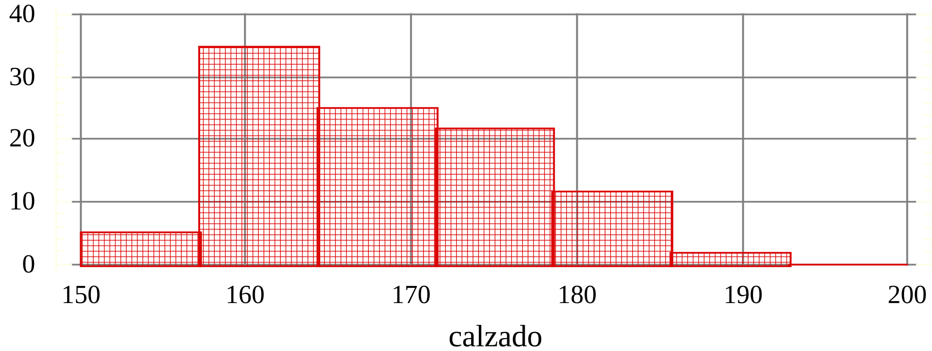
Intervalo	Marca de clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Acumulada relativa
150-155	152.5	2	0.0333	2	0.033
155-160	157.5	7	0.2267	9	0-1500
160-165	162.5	19	0.3167	28	0.4667
165-170	167.5	11	0.1833	39	0.6500
170-175	172.5	10	0.1677	49	0.8167
175-180	177.5	5	0.0833	54	0.9000
180-185	182.5	5	0.0833	59	0.9833
185-190	187.5	0	0.0000	59	0.9833
190-195	192.5	1	0.0167	60	1.0000

Figura 3.7. Distribución de la talla de los alumnos (9 intervalos)



La agrupación en intervalos introduce una reducción en los datos; por ejemplo, si calculamos la media y otros estadísticos directamente de la tabla, los valores obtenidos son aproximados, por eso también el número de intervalos afectará a estos estadísticos. Este problema no se presenta al calcular directamente los datos con la calculadora o el ordenador.

Figura 3.8. Distribución de la talla de los alumnos (7 intervalos)



Tomando la mediana como medida de posición central llegamos a la conclusión de que el alumno típico es una chica de pelo y ojos oscuros que practica deporte moderadamente, calza el 37, mide 166,5 cm., pesa 62 kilos y la longitud de sus brazos es 165 cm. También llegaremos a la conclusión de que esta chica realmente no existe: ¡Ninguna de las alumnas corresponde exactamente a esta descripción!

Este proyecto puede ser más o menos complejo, en función del número y tipo de variables incluías. En la Tabla 3.3. incluimos datos obtenidos sobre características físicas y práctica de deporte en una clase de 60 estudiantes. Dependiendo de la edad de los alumnos y el tiempo disponible estas variables podrían reducirse o ampliarse. Por ejemplo, el estudio podría llevarse a cabo sólo con las variables cualitativas (sexo, deporte, ojos, pelo, y número de calzado) o añadir otras como perímetro de cintura, anchura de hombros, etc. Para relacionar posteriormente las variables será bueno elaborar una hoja de recogida de datos como la que se muestra en la Tabla 3.3

Tabla 3.3. Datos obtenidos en el estudio sobre el alumno típico en 60 estudiantes

Sexo	Deporte	Ojos	Pelo	N. calzado	Peso (Kg.)	Talla (cm.)	L. brazos (cm.)
M	2	C	C	37	59	161	160
V	1	O	O	41	62	178	181
M	2	O	O	36	50	159	153
V	2	O	O	42	69	176	179
V	2	O	O	43	74	175	179
M	3	C	C	37	62	169	165
M	2	O	O	36	56	162	158
M	2	O	O	37	58	162	163

M	1	O	O	38	52	170	171
V	1	O	O	42	68	170	172
V	3	O	O	43	72	184	185
V	2	C	C	42	74	180	182
V	2	C	C	41	66	175	177
M	2	O	O	38	60	170	168
M	1	C	C	38	60	165	161
M	3	O	O	36	55	163	160
M	2	O	O	37	60	167	165
M	2	C	O	37	50	167	165
M	2	C	C	35	52	160	157
M	1	O	O	37	53	164	160
M	2	O	C	38	58	163	166
M	2	O	O	40	74	175	178
M	2	O	O	39	63	173	180
M	2	O	C	38	60	161	164
M	2	O	O	37	53	162	162
V	3	C	C	41	82	174	180
V	2	O	C	42	68	178	180
M	1	0	C	37	64	172	175
M	2	O	O	40	65	165	165
M	1	O	O	37	46	160	158
M	2	C	C	38	58	164	166
M	3	C	O	46	86	191	180
M	1	O	O	44	70	161	185
M	1	O	C	40	64	166	171
M	3	O	O	38	64	166	155
M	1	O	O	35	70	156	152
M	2	C	C	37	51	165	160
M	2	C	O	38	62	167	159
M	2	O	C	37	58	160	160
V	3	C	C	43	71	185	187
V	3	C	C	42	68	175	172
V	3	O	C	45	74	183	178
M	3	O	O	37	55	160	154
V	3	O	O	42	68	185	185
M	1	O	O	37	57	161	155
M	3	C	O	38	57	169	164
M	1	O	O	36	68	158	150
V	2	O	O	41	69	172	172
M	3	C	O	37	50	155	155

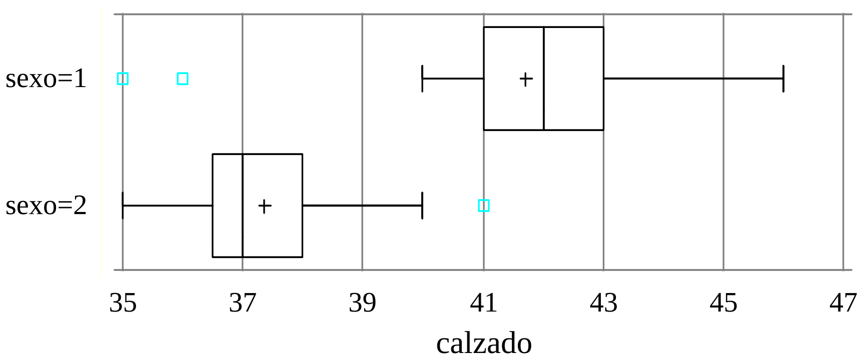
M	1	O	O	38	58	163	162
M	1	C	O	39	66	168	168
M	2	C	C	36	50	163	161
V	2	O	O	43	81	184	188
M	1	C	C	36	60	165	160
M	2	C	C	35	50	155	155
V	2	C	C	35	65	179	171
V	2	O	O	36	65	164	158
M	2	C	C	40	62	174	179
M	2	O	C	36	58	162	160
M	2	C	C	41	63	172	171

7. *¿Cuáles son las principales diferencias entre sexos?¿Cómo sería el chico/ chica típico?*

En este fichero hemos mezclado datos de dos poblaciones diferenciadas en cuanto a sus características físicas. Ello podría explicar el hecho de que no hubiésemos encontrado en la clase un representante del alumno típico. El análisis de los datos puede continuar analizando las características que diferencian al alumno/ alumna típicos. Para ello los alumnos pueden comparar las distribuciones de las variables en las dos muestras (muestras independientes). Por ejemplo, en las figuras 3.9 a 3.12 incluimos algunas de las gráficas que se podrían usar para comparar las variables en chicos y chicas. Mientras el chico típico calzaría el 42, pesaría 69 kilos, mediría 177 cm., y tendría una longitud de brazos de 179.5 cm. la chica típica calzaría el 37, pesaría 58 kilos, mediría 163 cm y tendría una longitud de brazos de 161 cm.

Figura 3.9. Número de calzado de chicos y chicas

Los gráficos de caja visualizan las medias y medianas, cuartiles,



recorrido intercuartílico y, en caso de haberlos, los valores atípicos.

Observamos que estos valores son siempre menores en las chicas, así como la dispersión de los datos. Los histogramas, por su lado resaltan las modas y la frecuencia de casos en cada intervalo.

Los gráficos de cuantiles ponen de relieve, que, para cualquier rango de percentil (por ejemplo el 30 o 60 % la altura de las chicas es siempre menor que la de los chicos. Por último las curvas empíricas de distribución, obtenidas de la suavización del polígono de frecuencias, indican que las distribuciones son más o menos simétricas, concentradas en el centro del rango de valores. Si el número de datos hubiese sido mayor, observaríamos la forma característica de la distribución normal.

Estas actividades de comparación servirían para analizar las ventajas relativas de los diferentes tipos de gráficos. Mientras que los gráficos de caja destacan los estadísticos de orden (mediana, cuartiles, recorrido intercuartílico), el histograma permita visualizar mejor las modas. El gráfico de cuantiles permite comparar los diferentes percentiles para las dos variables y la curva de densidad empírica nos permite decidir sobre qué tipo de distribución sería adecuada para aproximar estos datos.

Figura 3.10. Histogramas. Longitud de brazos de chicos y chicas

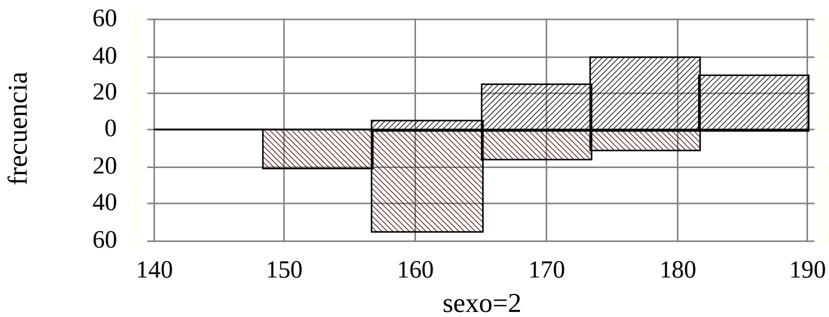


Figura 3.11. Gráfico de cuantiles. Alturas de chicos y chicas

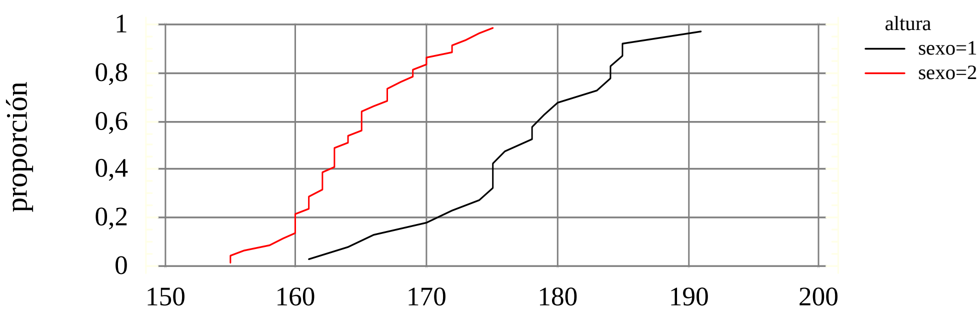
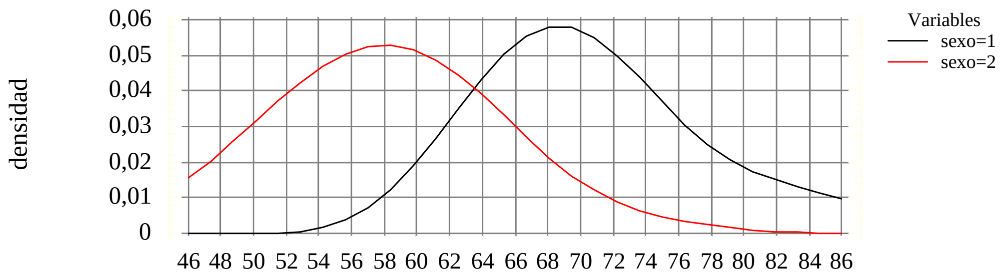


Figura 3.12. Curvas de densidad empíricas. Alturas de chicos y chicas



3.4. Actividades de ampliación

En este proyecto puede introducirse en forma muy intuitiva el análisis de tablas de contingencia y de la asociación entre las variables de la misma, ya que tratamos de determinar si existen también diferencias en el color de pelo, ojos y práctica de deporte entre chicos y chicas. La idea de asociación puede introducirse usando el mismo tipo de tarea empleado en las investigaciones de Piaget e Inhelder: el estudio de la asociación entre el color de ojos y pelo. Para ello, la primera actividad será pedir a los alumnos que clasifiquen los datos respecto al color de pelo y ojos, obteniendo la tabla 3.4

Tabla 3.4. Clasificación cruzada de alumnos según color de pelo y ojos

	Ojos claros	Ojos oscuros	Total
Pelo claro	16	11	27
Pelo oscuro	5	28	33
Total	21	39	60

A partir de ella se les puede plantear preguntas para ver si los alumnos identifican las frecuencias absolutas y relativas dobles, marginales y condicionales, tales como:

8. *¿Cuántos alumnos tienen pelo claro? ¿Ojos oscuros? ¿Cuál es la proporción de alumnos con ojos claros entre los que tienen pelo claro? ¿Y de alumnos con pelo claro entre los que tienen ojos claros?¿Hay la misma proporción de alumnos con ojos claros si se tiene el pelo claro que si se tiene oscuro?¿Piensas que hay relación entre el color de pelo y ojos?*

Las últimas preguntas no pueden responderse a partir de las frecuencias absolutas pues no hay el mismo número de alumnos con el pelo claro y oscuro. Será necesario calcular la distribución condicional de color de pelo para cada color de ojos.

Tabla 3.5. Distribución condicional de color de ojos según color de pelo

	Ojos claros	Ojos oscuros	Total
Pelo claro	16	11	27
	59 %	41%	
Pelo oscuro	5	28	33
	15%	85%	
Total	21	39	60
	35%	65%	

En la tabla 3.5 podemos observar que mientras el 35% de los alumnos tiene ojos claros y el 65 % azules; estas proporciones son el 58% y 41% en alumnos rubios y el 15% y 85% en morenos. Dicho de otro modo, hay doble número de alumnos con ojos negros si se es moreno y casi cuatro veces más alumnos con ojos azules si se es rubio. Por tanto, el color de ojos y pelo parecen estar asociados.

Tabla 3.6. Distribución condicional de color de pelo según color de ojos

	Ojos claros	Ojos oscuros	Total
Pelo claro	16	11	27
	76%	28%	45%
Pelo oscuro	5	28	33
	24%	72%	55%
Total	21	39	60

En la tabla 3.6 podemos observar que, mientras la proporción de alumnos con pelo claro y oscuro es casi la misma (45% y 55%), 3 de cada 4 alumnos con ojos claros son rubios y 3 de cada 4 alumnos con ojos oscuros es moreno. Si una variable *X* está asociada con otra variable *Y*, la variable *Y* está asociada a su vez con *Y* como vemos en el ejemplo.

El estudio de este proyecto sólo se ha realizado en forma elemental, sin introducir conceptos de inferencia. Pero si el proyecto se lleva a cabo con alumnos de último curso de Bachillerato o universidad, podrían plantearse preguntas de inferencia. Por ejemplo, al calcular el estadístico Chi-cuadrado para la tabla de contingencia 3.4 obtenemos un valor Chi=15,96 que, con 1 grado de libertad corresponde a un valor p<0.0001. Por tanto los resultados son estadísticamente significativos, ya que este alto valor de Chi cuadrado sería muy improbable en caso de independencia de las variables.

9. *¿Qué modelo de distribución sería adecuado para representar la variable peso? ¿Podríamos describirla mediante una distribución normal?*

Con alumnos universitarios, se podría plantear el problema de bondad de ajuste a una distribución normal. En este fichero podemos encontrar ejemplos de variables que se ajustan y no a una distribución normal. Por ejemplo, la variable peso se ajusta aproximadamente a una normal, como vemos en la Figura 3.12, obtenida mediante Statgraphics (ajuste de distribuciones). Este programa realiza una serie de contrastes de ajuste. En este caso, ninguno de ellos es estadísticamente significativo. Por tanto no puede rechazarse la hipótesis de normalidad en los datos, o lo que es lo mismo, se puede aceptar la normalidad aproximada.

Figura 3.12. Resultados del ajuste de distribuciones

Valor calculado del estadístico Chi-cuadrado de bondad de ajuste=20,6667

Valor p= 0,241556

Estadístico W de Shapiro-Wilks: 0,969878

Valor p=0,300727

Puntuación Z de asimetría=1,04955

Valor p=0,293925

Puntuación Z de Curtosis= 0,390192

Valor p= 0,696391

Tabla 3.7. Resultados del contraste chi-cuadrado

Límite inferior	Limite superior	Frecuencia observada	Frecuencia esperada	Chi cuadrado
51,4018	55,1715	6	6,00	0,00
55,1715	57,8898	3	6,00	1,50
57,8898	60,2124	12	6,00	6,00
60,2124	62,3833	4	6,00	0,67
62,3833	64,5543	5	6,00	0,17
64,5543	66,8769	5	6,00	0,17
66,8769	69,5952	7	6,00	0,17
69,5952	73,3649	4	6,00	0,67

Chi-Cuadrado = 9,6669 con 7 g.l. p 0,208249

A la misma conclusión llegaríamos con el test Chi-cuadrado (ver tabla 3.7) donde observamos que la diferencia entre las frecuencias esperadas en caso de normalidad en cada intervalo y las observadas son pequeñas. Por ello el estadístico chi cuadrado no llega a ser estadísticamente significativo y no podemos rechazar la idea de normalidad.

10. ¿Podríamos dar una estimación del valor medio para la altura de chicos y chicas? ¿Cómo analizar la variabilidad de esta estimación?

Es también factible en este proyecto introducir el cálculo y significado de los intervalos de confianza para la diferencia de medias o varianzas en muestras independientes. Por ejemplo, las podemos calcular para alturas o para cualquiera de las otras variables:

- El intervalo de confianza para la altura media de los chicos sería [173,167,180,333]
- El intervalo de confianza para la altura media de las chicas sería [162,708,165,942]
- El intervalo de confianza para la diferencia de medias (supuestas varianzas distintas sería [9,11814,15,7319]
- Al contrastar la hipótesis de igualdad de medias para un test bilateral, mediante el contraste *t* de diferencia de medias independientes obtenemos: *t*=7,52115 con un valor *p*= 3,89998E-10. Por tanto la diferencia es estadísticamente muy significativa

Igualmente es factible en este proyecto introducir el cálculo y significado de los intervalos de confianza para el cociente de varianzas

- El intervalo de confianza para la varianza de la altura de los chicos sería [5,82252;11,1825]
- El intervalo de confianza para la varianza de la altura de los chicos sería [4,14129;6,49147]
- El intervalo de confianza del 95% para la razón de varianzas sería: [1,09425;5,36152]
- Al contrastar la hipótesis de igualdad de varianzas para un test bilateral, mediante el contraste *F* de razón de varianzas obtenemos: *F*=2,29352 *P*-value=0,027935. Por tanto la diferencia es estadísticamente significativa

Estas diferencias se observan gráficamente en las figuras 3.13 y 3.14. El gráfico de la caja permite ver la diferencia de medias y varianzas, mucho mayor en las medias que en las varianzas. El gráfico de cuantiles permite ver que cualquier percentil de alturas es inferior en las chicas que en los chicos.

Figura 3.13. Comparación de alturas de chicos y chicas

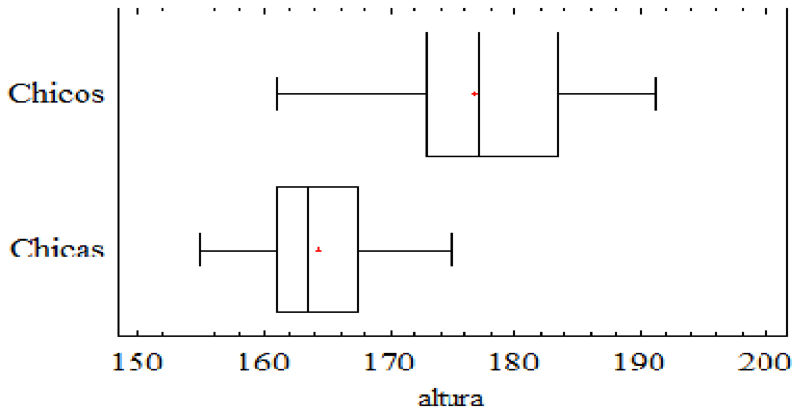
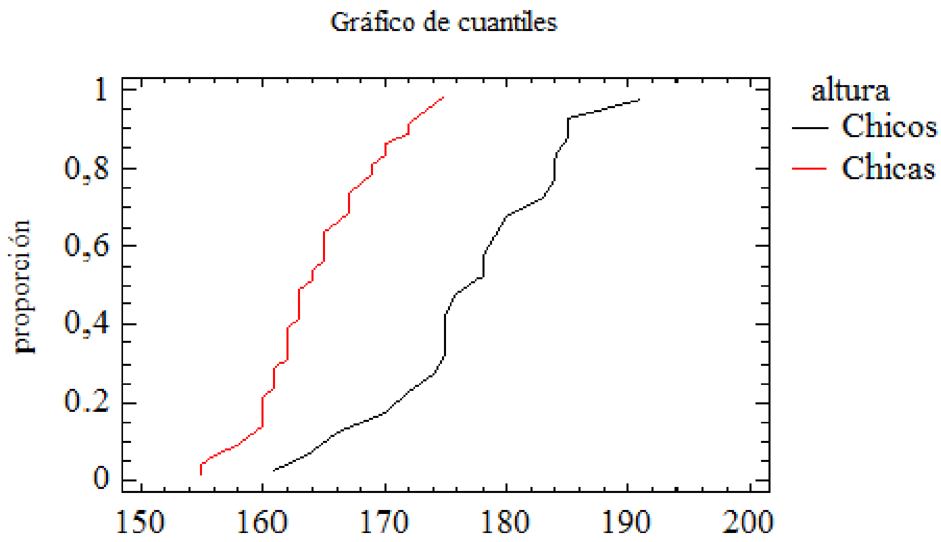


Figura 3.14. Comparación de alturas de chicos y chicas



150 160 170 180 190 200

altura

3.5. Algunas dificultades y errores previsibles

3.5.1. Lectura de gráficos

Algunos autores definen niveles en la lectura crítica de datos y muestran que no todos los alumnos alcanzan el nivel más alto. Un resumen se expone en Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras (2009). A continuación resumimos las teorías de diversos autores al respecto.

Bertin (1967) sugiere que la lectura de un gráfico comienza con una *identificación externa* del tema al que se refiere, a través de la comprensión del significado del título y las etiquetas. A continuación se requiere una *identificación interna,* de las dimensiones relevantes de variación en el gráfico, es decir, las variables representadas y sus escalas. Finalmente se produce una *percepción de la correspondencia* entre los niveles particulares de cada dimensión visual para obtener conclusiones sobre los niveles particulares de cada variable y sus relaciones en la realidad representada. A partir de estos supuestos, define diversos niveles de lectura de un gráfico:

- *Extracción de datos*, que consiste en poner en relación un elemento de un eje con el de otro eje. Por ejemplo, en un diagrama de barras leer la frecuencia asociada a un valor de la variable.
- *Extracción de tendencias*, cuando se es capaz de percibir en el gráfico una relación entre dos subconjuntos de datos que pueden ser definidos a priori o visualmente. Un caso particular es determinar visualmente la moda de una distribución en un diagrama de barras, ya que se clasifica los datos en subconjuntos (que tienen un mismo valor para la variable) y se comparan entre si estos subconjuntos para ver cuál tiene mayor frecuencia.
- *Análisis de la estructura* de los datos, comparando tendencias o agrupamientos y efectuando predicciones. Un ejemplo ocurre cuando se representa en un diagrama de barras adosadas dos distribuciones y se analizan sus diferencias en promedios y dispersión.

Otra clasificación muy similar a la anterior que ha tenido un gran impacto en educación estadística se debe a Curcio (1989), quien mostró que las principales dificultades aparecen en los niveles superiores y que el nivel progresa con la edad de los estudiantes. Denomina a los tres niveles definidos por Bertin "*leer entre los datos*" (lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo), *"leer dentro de los datos"* (interpretación e integración de los datos en el gráfico y "*leer más allá de los datos*" (predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico). Friel, Curcio y Bright (2001) amplían la clasificación definiendo un nuevo nivel *"leer detrás de los datos"* consistente en valorar críticamente el método de recogida de datos su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones.

Un modelo algo más complejo es debido a Gerber, Boulton-Lewis y Bruce (1995), quienes diferencian siete niveles de comprensión de gráficos, en función de las competencias de los estudiantes para interpretarlos:

- *Nivel 1*. Los estudiantes no se centran en los datos, sino que asocian algunas características de los mismos a su conocimiento del mundo, generalmente impreciso. Al hacer una pregunta sobre edades de niños representados en un gráfico, los alumnos situados en este nivel pueden responder dando su edad.
- *Niveles 2 y 3*. En estos niveles los sujetos se centran en los datos representados, pero de forma incompleta. En el nivel 2 no llegan a apreciar el propósito del gráfico e interpretan sólo aspectos parciales de los datos, tales como una de las barras del diagrama de barras. En el nivel 3 los estudiantes aprecian el propósito del gráfico y analizan todos los elementos uno a uno, pero no llegan a una síntesis global, al no comprender algún elemento específico que es clave en la representación. Un estudiante en este nivel podría interpretar los grupos de edad (que se refieren a un conjunto de personas) en una pirámide de población como edades de sujetos individuales.
- *Niveles 4, 5 y 6*. Una vez que el estudiante llega a una síntesis global, puede todavía tener una interpretación estática de los gráficos, y podemos diferenciar tres niveles diferentes. En el nivel 4 los estudiantes son capaces de analizar una a una las variables representadas en el mismo gráfico, pero no conjuntamente. Por ejemplo, si representamos la esperanza de vida de hombre y mujeres en diversos países en un gráfico de líneas, los alumnos interpretan por un lado la esperanza de vida de los hombres y por otro los de las mujeres. En el nivel 5 se comparan varias variables representadas en el mismo gráfico; en el ejemplo anterior podrían deducir que la esperanza de vida en las mujeres es superior a la de los hombres en la mayoría de países. En el nivel 6 los estudiantes usan los gráficos para apoyar o refutar sus teorías. No sólo comparan varias variables en el mismo gráfico, sino sacan conclusiones generales respecto a una hipótesis; en el caso analizado podrían usar el gráfico para refutar la idea de que la mujer es más débil que el hombre.
- *Nivel 7*. En el último nivel los estudiantes son capaces de hacer extrapolaciones, y hacer predicciones para otros datos no representados en el gráfico; en el ejemplo anterior, el estudiante podría estimar la esperanza de vida del hombre, conocida la esperanza de vida de la mujer, para un país no representado en el gráfico.

3.5.2. Tablas de frecuencias

Los alumnos pueden tener dificultad al construir las tablas de datos agrupados, si no se especifica con claridad el convenio de agrupación. Por ejemplo, se puede tener duda si el valor 150 se incluye en el intervalo (140-150) o (150-160). Una costumbre es usar intervalos semiabiertos por la derecha, pero este tipo de intervalo puede ser poco familiar a los alumnos. El profesor puede discutir con los alumnos el convenio de agrupación y llegar con ellos a un acuerdo acerca de la forma de construir los intervalos. La tabla de frecuencias es una estructura matemática compleja y muchos alumnos confunden conceptos como: clases, marcas de clase, frecuencias relativas y absolutas, acumuladas y ordinarias, provocando errores en la interpretación y en el cálculo de los estadísticos. Estas dificultades a veces no son percibidas por los profesores y no se dedica un tiempo suficiente a la lectura de las tablas de frecuencias (Carvalho, 2001).

3.5.3. Promedios

El cálculo de promedios y medidas de dispersión es bastante complicado a partir de datos agrupados. Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que una proporción importante de alumnos, incluyendo a los universitarios, no ponderan adecuadamente los valores cuando se les plantea un problema de media ponderada, utilizando en su lugar el cálculo de la media simple. Dadas las medias de dos conjuntos diferentes de datos, los estudiantes simplemente las suman y dividen por dos para calcular la media total, incluso si los conjuntos de datos tienen tamaños muy diferentes. Esto lleva a una pobre estimación de la solución, y además, se observan que los estudiantes no son conscientes del error cometido.

Los alumnos también tienen dificultad en el cálculo de medidas de tendencia central a partir de tablas de frecuencia cuando los datos se presentan agrupados en intervalos de clase. Mevarech (1983) sugiere que estas dificultades se deben a la creencia de los estudiantes de que la media aritmética es una operación sobre el conjunto de datos, que satisface los axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso. Sugerimos obviar este punto recurriendo a las calculadoras que dan directamente estos estadísticos, sin más que introducir los datos originales.

Cai (1995) comprobó que mientras la mayoría de alumnos de 12-13 años son capaces de calcular correctamente la media, sólo algunos saben invertir el procedimiento, esto es, determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado. Reading y Pegg (1996), estudiaron la forma en que los alumnos de 12-18 años reducen los conjuntos de datos, observando que algunos eran capaces de dar un resumen de datos presentados en forma numérica, pero fracasaron en la tarea cuando los datos se presentaban por medio de un gráfico.

3.5.4.Tablas de contingencia

El análisis de una tabla de contingencia es un punto difícil porque de una sola frecuencia absoluta (número de alumnos con pelo y ojos claros) se pueden deducir diferentes frecuencias relativas:

- Frecuencia relativa doble respecto al total de datos: frecuencia relativa de alumnos con pelo y ojos claros en la muestra;
- Frecuencia relativa condicional respecto a su fila: frecuencia de alumnos con ojos claros si se tiene el pelo claro;
- Frecuencia relativa condicional respecto a su columna: frecuencia de alumnos con pelo claro si se tiene el pelo claro;
- Además aparecen las dos frecuencias relativas marginales (frecuencias relativas de alumnos con pelo claro y ojos claros) y las relaciones entre todas estas frecuencias.

El problema de la búsqueda de asociación en una tabla de contingencia 2x2 se reduce, a este nivel intuitivo, a un problema de comparación de proporciones:

- Comparar las frecuencias condicionales por filas: proporción de color de ojos según color de pelo;
- Comparar las frecuencias condicionales por columnas: proporción de color de pelo, según color de ojos;
- Comparar alguna de estas con sus correspondientes frecuencias marginales.

Sin embargo, en el estudio de Inhelder y Piaget (1955) con chicos a partir de 13 -14 años y en trabajos posteriores con adultos se ha visto que la interpretación de las tablas de contingencia no es intuitiva y algunos alumnos tienden a usar frecuencias absolutas o usar sólo una parte de la información en la tabla para resolver este tipo de problemas. Los sujetos al alcanzar la adolescencia comienzan usando sólo una celda (presente-presente) a para juzgar la asociación; entre los 12-15 años, solamente comparan celdas dos a dos (por ejemplo comparan los casos donde se presenta y no se presenta A cuando se presenta B). Otro nivel posterior sería comprender cuales son los casos favorables (presencia-presencia y ausencia-ausencia) y desfavorables (resto) de la asociación, sin compararlos.

La estrategia correcta implicaría usar todas las celdas de la tabla, comparando la diferencia entre las probabilidades *P(B/A)* y *P(B/noA)*. Otros autores han estudiado la influencia de las teorías previas en el contexto del problema en los juicios de asociación. En términos generales se puede decir, que cuando los datos no reflejan los resultados esperados por estas teorías, aparece en los sujetos un conflicto cognitivo y se guían más por sus teorías que por los datos estadísticos.

5.3.6. Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar, explícita o implícitamente los siguientes contenidos:

1. *Aplicaciones de la estadística:*

- Análisis de características de un grupo; medidas físicas, fisiología;
- Determinación de valores típicos;
- Estudio elemental de la asociación entre variables
- Ajuste de modelos a distribuciones de datos

2. C*onceptos y propiedades*:

- Datos: codificación de datos: diferentes escalas de medida; diferentes técnicas de obtención de datos (medida, observación, encuesta); dificultad de la categorización;
- Variable estadística: Variable nominal, discreta y continua, frecuencia absoluta, relativa y acumulada; tabla de frecuencias; distribución de frecuencias, agrupación; intervalos, extremos y marcas de clase;
- Posición central: moda, media, mediana, percentiles, rangos de percentiles
- Dispersión: rango, máximo, mínimo, cuartiles; recorrido intercuartílico,
- Asociación: tablas de contingencia; variable estadística bidimensional; frecuencias dobles, marginales y condicionadas; asociación en tablas de contingencia
- Muestras relacionadas e independientes
- Intervalo de confianza: concepto e interpretación. Intervalo de confianza para medias y para varianzas
- Contraste de hipótesis; contraste Chi-cuadrado de asociación; valor *p*

en un contraste, regla de decisión.

- Variable aleatoria normal; Ajuste de datos empíricos a la distribución normal.

3. Notaciones y representaciones:

- Palabras como extremos de clase, marcas de clase, cuartiles, recorrido intercuartílico, etc.
- Símbolos correspondientes a las frecuencias acumuladas, marginales y condicionadas;
- Tablas de frecuencia; gráficos de tallo y hoja. caja, histograma, curvas empíricas de distribución, gráfico de cuantiles, tablas de contingencia;

4. *Técnicas y procedimientos:*

- Elaboración de un cuestionario; observación, medida, codificación de datos
- Elaboración de tablas de frecuencia simples y cruzadas; recuento y cálculo de frecuencias agrupadas y frecuencias marginales y condicionadas en tablas de contingencia
- Elaboración de gráficos de tallo y hoja., caja, histograma, curvas empírica de distribución, gráfico de cuantiles;
- Interpretación de tablas y gráficos; elaboración de conclusiones a partir del análisis de tablas y gráficos; estudio de asociación en tablas de contingencia;
- Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos obtenidos en observación, encuesta y medida
- Contraste de bondad de ajuste
- Cálculo de intervalos de confianza para la diferencia de medias y cociente de varianzas en muestras independientes
- Contraste de diferencias de medias en muestras independientes
- Uso de calculadora gráfica, hojas de cálculo o software estadístico

5. A*ctitudes:*

- Reflexión sobre la dificultad de codificación y cómo ésta introduce siempre una simplificación en la realidad;
- Valoración de la utilidad de la estadística para analizar datos obtenidos mediante encuesta, observación y medida;
- Valoración de la utilidad de la estadística para identificar relaciones de asociación entre variables;
- Valoración de la estética y la claridad en la construcción de tablas y gráficos estadísticos;
- Valoración de los modelos matemáticos para describir en forma simplificada la realidad; valoración de la diferencia entre datos y modelos;
- Reflexión sobre las tendencias y dispersiones en los datos; sobre el excesivo énfasis en los prototipos y el hecho de que éstos con frecuencia son modelos que no se dan en la realidad.

4. Las estadísticas de pobreza y desigualdad

Carmen Batanero, Carmen Díaz y M. Magdalena Gea

4.1. Objetivos

Se trata de analizar una serie de variables demográficas, entender su utilidad y el motivo por el cual son recogidas, analizar las relaciones entre las diferentes variables y estudiar las diferencias en sus distribuciones entre países, según su nivel de desarrollo.

Un objetivo importante es mostrar la utilidad de la estadística en el estudio de interrelaciones entre variables. Los alumnos, alternativamente, podrían tomar otros ficheros de datos de Internet o de anuarios estadísticos y desarrollar proyectos sobre otros temas en diferentes áreas de aplicación. El análisis es descriptivo, con finalidad exploratoria y no se plantean problemas de inferencia.

Rouncenfield (1995) presenta este proyecto sobre el cual los alumnos pueden trabajar en grupos, comparando las variables en los diferentes grupos de países y formulando por si mismos preguntas de su interés. Mostraremos algunos ejemplos de las posibles actividades a desarrollar con los estudiantes.

Alumnos

Este proyecto podría ser desarrollado con alumnos de Bachillerato o en un primer curso de estadística en la Universidad. En este último caso, se podrían plantear preguntas de tipo inferencial, lo que requeriría el uso de procedimientos estadísticos más avanzados.

4.2. Los datos

La actividad se desarrolla en torno a un proyecto a partir de un fichero que contiene datos de 97 países y que ha sido adaptado del preparado por Rouncenfield (1995), quien usó como fuentes Day (1992) y U.N.E.S.C.O.

(1990). Este fichero ha sido tomado de *Journal of Statistical Education* (www.amstat.org/publications/jse/). Contiene las siguientes variables, que se refieren a 1990:

- *Tasa de natalidad*: Niños nacidos vivos en el año por cada 1000 habitantes;
- *Tasa de mortalidad*: Número de muertes en el año por cada 1000 habitantes;
- *Mortalidad infantil*: Número de muertes en el año por cada 1000 niños de menos de 1 año;
- *Esperanza de vida* al nacer para hombres y mujeres;
- *PNB*. Producto Nacional Bruto per cápita en dólares (USA);
- *Grupo*: Clasificación de países en función de la zona geográfica y situación económica, en las siguientes categorías: 1 = Europa Oriental, 2 = Iberoamérica, 3 = Europa Occidental, Norte América, Japón, Australia, Nueva Zelanda, 4 = Oriente Medio, 5 = Asia, 6 = Africa.

Hemos añadido el número de habitantes en 1990 en miles de personas (*Población*), tomado del anuario publicado por el periódico español "El País". En la Tabla 4.1. listamos los datos del proyecto.

Tabla 4.1. Fichero de datos del proyecto "Análisis demográfico"

País	Grupo	Tasa natalidad	Tasa mortalidad	Mortalidad infantil	Esperanza vida hombre	Esperanza vida mujer	PNB	Población (miles)
Afganistán	5	40.4	18.7	181.6	41.0	42.0	168	16000
Albania	1	24.7	5.7	30.8	69.6	75.5	600	3204
Alemania (Oeste)	3	11.4	11.2	7.4	71.8	78.4	22320	16691
Alemania Este	1	12.0	12.4	7.6	69.8	75.9	.	61337
Argelia	6	35.5	8.3	74.0	61.6	63.3	2060	24453
Angola	6	47.2	20.2	137.0	42.9	46.1	610	9694
Arabia Saudí	4	42.1	7.6	71.0	61.7	65.2	7050	13562
Argentina	2	20.7	8.4	25.7	65.5	72.7	2370	31883
Austria	3	14.9	7.4	8.0	73.3	79.6	17000	7598
Bahréin	4	28.4	3.8	16.0	66.8	69.4	6340	459
Bangladesh	5	42.2	15.5	119.0	56.9	56.0	210	111590

Bélgica	3	12.0	10.6	7.9	70.0	76.8	15540	9886
Bielorrusia	1	15.2	9.	13.1	66.4	75.9	1880	.
Bolivia	2	46.6	18.0	111.0	51.0	55.4	630	7110
Botswana	6	48.5	11.6	67.0	52.3	59.7	2040	1217
Brasil	2	28.6	7.9	63.0	62.3	67.6	2680	147294
Bulgaria	1	12.5	11.9	14.4	68.3	74.7	2250	9001
Camboya	5	41.4	16.6	130.0	47.0	49.9	.	8250
Canadá	3	14.5	7.3	7.2	73.0	79.8	20470	26302
Colombia	2	27.4	6.1	40.0	63.4	69.2	1260	32335
Congo	6	46.1	14.6	73.0	50.1	55.3	1010	2208
Corea (Norte)	.5	23.5	18.1	25.0	66.2	72.7	400	21143
Checoslovaquia	1	13.4	11.7	11.3	71.8	77.7	2980	15641
Chile	2	23.4	5.8	17.1	68.1	75.1	1940	12980
China	5	21.2	6.7	32.0	68.0	70.9	380	1105067
Dinamarca	3	12.4	11.9	7.5	71.8	77.7	22080	5132
Ecuador	2	32.9	7.4	63.0	63.4	67.6	980	10329
Egipto	6	38.8	9.5	49.4	57.8	60.3	600	51390
Emiratos Árabes	4	22.8	3.8	26.0	68.6	72.9	19860	1544
España	3	10.7	8.2	8.1	72.5	78.6	11020	39161
Etiopía	6	48.6	20.7	137.0	42.4	45.6	120	48861
Filipinas	5	33.2	7.7	45.0	62.5	66.1	730	61224
Finlandia	3	13.2	10.1	5.8	70.7	78.7	26040	4974
Francia	3	13.6	9.4	7.4	72.3	80.5	19490	56119
Gabón	6	39.4	16.8	103.0	49.9	53.2	390	1105
Gambia	6	47.4	21.4	143.0	41.4	44.6	260	848
Ghana	6	44.4	13.1	90.0	52.2	55.8	390	14425
Grecia	3	10.1	9.2	11.0	65.4	74.0	5990	10039
Guayana	2	28.3	7.3	56.0	60.4	66.1	330	95
Holanda	3	13.2	8.6	7.10	73.3	79.9	17320	14828
Hong-Kong	5	11.7	4.9	6.10	74.3	80.1	14210	5735
Hungría	1	11.6	13.4	14.8	65.4	73.8	2780	10587
India	5	30.5	10.2	91.0	52.5	52.1	350	832535
Indonesia	5	28.6	9.4	75.0	58.5	62.0	570	178211
Irán	4	42.5	11.5	108.1	55.8	55.0	2490	50204
Iraq	4	42.6	7.8	69.0	63.0	64.8	3020	18271
Irlanda	3	15.1	9.1	7.5	71.0	76.7	9550	3537
Israel	4	22.3	6.3	9.7	73.9	77.4	10920	4525
Italia	3	9.7	9.1	8.8	72.0	78.6	16830	57537
Japón	3	9.9	6.7	4.0	75.9	81.8	25430	123045
Jordania	4	38.9	6.4	44.0	64.2	67.8	1240	4041

Kenia	6	47.0	11.3	72.0	56.5	60.5	370	23277
Kuwait	4	26.8	2.	15.6	71.2	75.4	16150	2020
Líbano	4	31.7	8.7	48.0	63.1	67.0	.	2900
Libia	6	44.0	9.4	82.0	59.1	62.5	5310	4395
Malasia	5	31.6	5.6	24.0	67.5	71.6	2320	17340
Malawi	6	48.3	25.0	130.0	38.1	41.2	200	8230
Marruecos	6	35.5	9.8	82.0	59.1	62.5	960	24567
México	2	29.0	23.2	43.0	62.1	66.0	2490	85440
Mongolia	5	36.1	8.8	68.0	60.0	62.5	110	2128
Mozambique	6	45.0	18.5	141.0	44.9	48.1	80	15357
Namibia	6	44.0	12.1	135.0	55.0	57.5	1030	1300
Nepal	5	39.6	14.8	128.0	50.9	48.1	170	18431
Nigeria	6	48.5	15.6	105.0	48.8	52.2	360	113665
Noruega	3	14.3	10.7	7.8	67.2	75.7	23120	4215
Omán	4	45.6	7.8	40.0	62.2	65.8	5220	1486
Pakistán	5	30.3	8.1	107.7	59.0	59.2	380	109950
Paraguay	2	34.8	6.6	42.0	64.4	68.5	1110	4161
Perú	2	32.9	8.3	109.9	56.8	66.5	1160	21142
Polonia	1	14.3	10.2	16.0	67.2	75.7	1690	38061
Portugal	3	11.9	9.5	13.1	66.5	72.4	7600	10333
Rumania	1	13.6	10.7	26.9	66.5	72.4	1640	23148
Sierra Leona	6	48.2	23.4	154.0	39.4	42.6	240	4040
Singapur	5	17.8	5.2	7.5	68.7	74.0	11160	2664
Somalia	6	50.1	20.2	132.0	43.4	46.6	120	6089
Sri-Lanka	5	21.3	6.2	19.4	67.8	71.7	470	16779
Sudáfrica	6	32.1	9.9	72.0	57.5	63.5	2530	34925
Sudán	6	44.6	15.8	108.0	48.6	51.0	480	24423
Suecia	3	14.5	11.1	5.6	74.2	80.0	23660	8485
Suiza	3	12.5	9.5	7.1	73.9	80.0	34064	6541
Suazilandia	6	46.8	12.5	118.0	42.9	49.5	810	761
Tailandia	5	22.3	7.7	28.0	63.8	68.9	1420	55200
Tanzania	6	50.5	14.0	106.0	51.3	54.7	110	25627
Túnez	6	31.1	7.3	52.0	64.9	66.4	1440	7988
Turquía	4	29.2	8.4	76.0	62.5	65.8	1630	54899
U.K.	3	13.6	11.5	8.4	72.2	77.9	16100	57270
U.S.A.	3	16.7	8.1	9.1	71.5	78.3	21790	248243
Ucrania	1	13.4	11.6	13.0	66.4	74.8	1320	.
Uganda	6	52.2	15.6	103.0	49.9	52.7	220	16722
Uruguay	2	18.0	9.6	21.9	68.4	74.9	2560	3067
URSS	1	17.7	10.0	23.0	64.6	74.0	2242	287664

Venezuela	2	27.5	4.4	23.3	66.7	72.8	2560	19244
Vietnam	5	31.8	9.5	64.0	63.7	67.9	.	65758
Yugoslavia	1	14.0	9.0	20.2	68.6	74.5	.	23707
Zaire	6	45.6	14.2	83.0	50.3	53.7	220	34442
Zambia	6	51.1	13.7	80.0	50.4	52.5	420	7837
Zimbabue	6	41.7	10.3	66.0	56.5	60.1	640	9567

4.3. Preguntas, actividades y gestión de la clase

La actividad inicial consiste en discutir el significado de las variables de este fichero y analizar cómo se han calculado las diferentes tasas: natalidad, mortalidad, esperanza de vida, PNB. Los alumnos podrían investigar qué otros indicadores alternativos se emplean para obtener un indicador demográfico o económico de la riqueza de un país. El profesor podría pedir a los alumnos que busquen artículos en la prensa en que se hable de alguno de estos indicadores y que expliquen con sus propias palabras la utilidad que pueden tener y que averigüen quién y cómo los calcula.

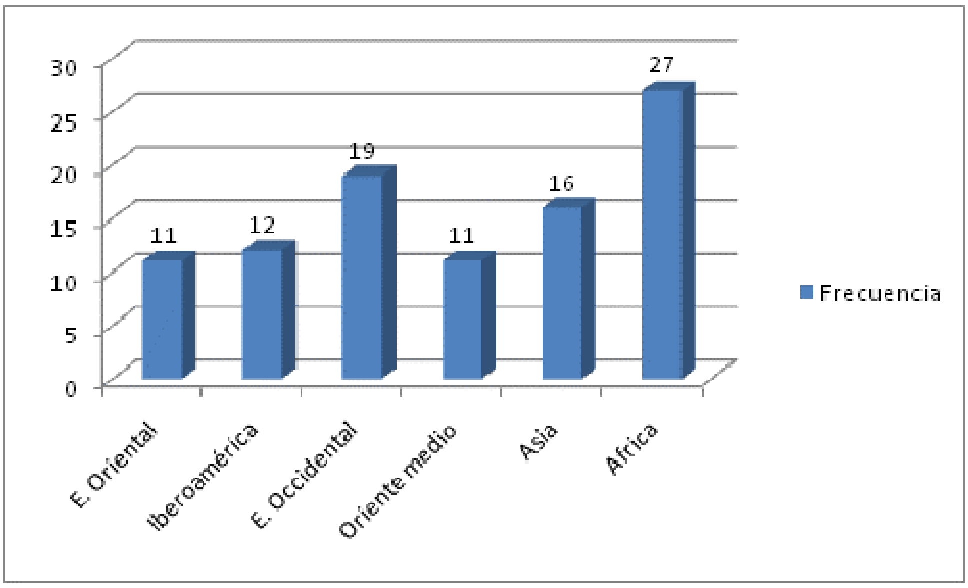
1. *¿Podrías explicar qué significa cada una de las variables del fichero? ¿Quién y cómo las calcula? ¿Cómo se recogen los datos? ¿Habría otro modo de calcular el índice de natalidad? ¿Para qué sirve? ¿Podrías encontrar alguna noticia en la prensa relacionada con estas variables?*

Un punto muy importante es la discusión de las variables y el problema de la medición. Es preciso concienciar a los alumnos de la dificultad que reviste el proceso de categorización o de medición, porque la realidad es siempre más compleja que nuestros métodos para estudiarla. La toma de conciencia sobre la complejidad del proceso de elaboración de las estadísticas demográficas o económicas es un paso importante para valorar el trabajo del estadístico y fomentar la cooperación en censos y encuestas.

En este fichero se ha usado un código para agrupar los países en función de la zona geográfica y desarrollo económico. Los alumnos podrían sugerir otras variables de clasificación de los países o añadir otras variables o países al fichero. El trabajo con un fichero completo, en lugar de centrarse en variables aisladas supone el inicio de una filosofía multivariante donde cada variable cobra su importancia o bien es explicada en función del resto y donde el alumno puede tratar de comprobar sus conjeturas con la incorporación de nuevas variables al estudio.

La Figura 4.1 muestra un diagrama de barras donde representamos el número de países en los diferentes grupos de países. A partir del mismo es fácil construir una tabla de frecuencias y discutir el significado de las frecuencias absolutas, relativas y porcentajes. Los alumnos pueden analizar las ventajas que el diagrama de barras tiene frente a la tabla para visualizar el grupo que tiene mayor /menor número de países. Asimismo pueden elaborar otros gráficos adecuados para representar esta variable.

Figura 4.1. Número de países por Grupo



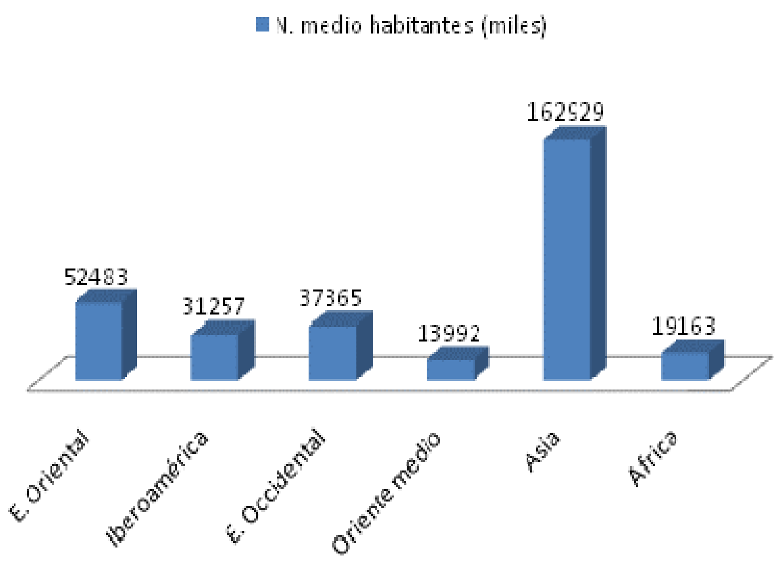
2. *En las Figuras 4.2 y 4.3 hemos representado el número promedio de habitantes en cada país, según grupo, usando dos promedios diferentes: media y mediana. ¿Por qué las dos gráficas son tan diferentes? ¿Elegirías la media o la mediana para representar el número típico de habitantes en los países, según la zona geográfica?*

La elaboración de una tabla o un gráfico ya supone una primera reducción de los datos, pero a veces queremos hallar un único valor representativo de la distribución. Esta actividad puede realizarse a partir de las gráficas ya elaboradas o también pedir a los alumnos que las construyan previamente.

En el segundo caso la clase puede dividirse en grupos para calcular estos promedios, así como la moda, y para explicar lo que representa cada uno de estos promedios y elegir en cada grupo el que mejor lo representa, argumentando la elección. Se puede pedir a los alumnos que señalen las principales diferencias entre los dos gráficos y que decidan cuál de los dos promedios acentúa más las diferencias explicando la razón.

Mientras la media puede, en este ejemplo, interpretarse como el reparto equitativo (número de habitantes) entre todos los países de los habitantes de cada zona geográfica, la mediana indica simplemente el número de habitantes del país que tuviese tantos países con menos habitantes que él, como países con más habitantes. La diferencia más importante se observa en Asia, porque como China e India tienen una población tan grande, al calcular la media, los valores de la variable en estos dos países hacen subir mucho el resultado. Los estudiantes pueden comprobarlo, haciendo ellos mismos el cálculo de media y mediana en los países asiáticos.

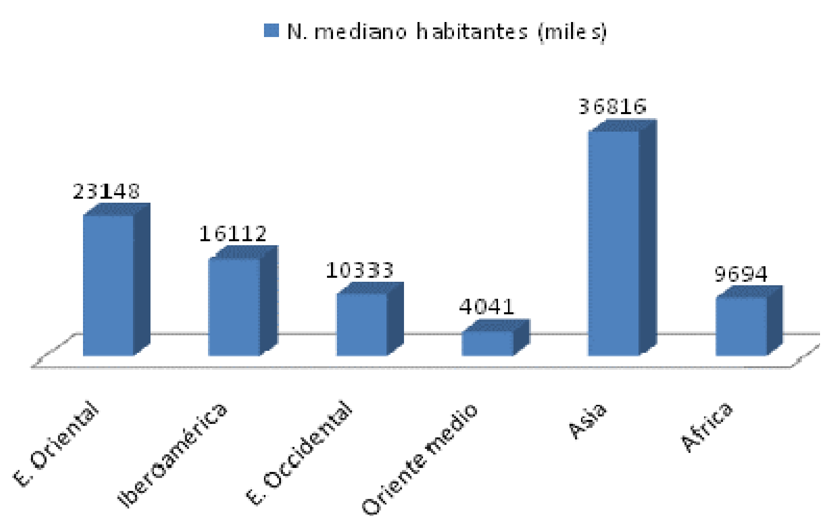
Figura 4.2. Media del número de habitantes en diferentes zonas



La actividad servirá para analizar algunas propiedades de la media aritmética y mediana. Mientras que la media es muy sensible a los valores extremos, pues todos los valores intervienen en el cálculo, la mediana es "robusta" pues en su cálculo no intervienen los valores, sino sólo el orden relativo de los mismos.

El profesor puede recordar el significado de un valor atípico. China e India tendrían valores atípicos de la población en este ejemplo. Finalmente será importante hacer ver a los estudiantes la importancia de decidir adecuadamente la medida de tendencia central para representar los datos. ¡La media no sería en este caso un buen representante, pues pocos países asiáticos se verían representados si se dice que el número promedio de habitantes es 162 millones!

Figura 4.3. Mediana del número de habitantes en diferentes zonas



3. *¿Qué representa el valor obtenido al calcular la media de la esperanza media de vida al nacer en estos 97 países? ¿Cómo habría que hacer para calcular la esperanza media de vida al nacer en hombres y mujeres, si no tenemos en cuenta el país de nacimiento?*

En este fichero las unidades estadísticas son agregados, lo que tiene repercusión en la interpretación de los promedios de las variables; por ejemplo la media (simple) de todas las esperanzas de vida al nacer en los distintos países no es igual a la esperanza global de vida, sino que ésta tiene que ser calculada como una media ponderada en función del número de hombres / mujeres de cada país.

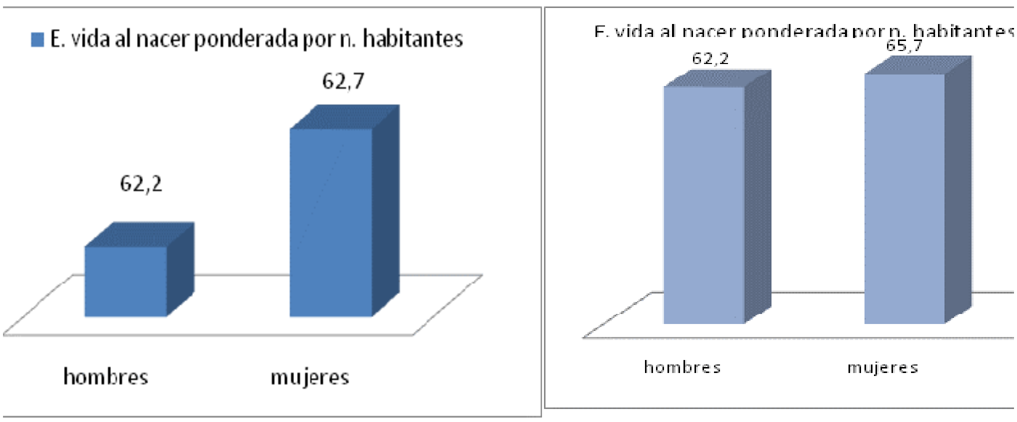
Esto puede servir de reflexión sobre las diferentes unidades estadísticas que pueden usarse en un estudio, la necesidad que a veces tenemos de trabajar con valores aproximados y la forma de combinar estudios parciales para obtener índices globales, así como para reflexionar sobre las propiedades de los promedios y la comprensión de las mismas por parte de los estudiantes (Tormo, 1995; Batanero, 2000). Esta misma observación debe hacerse en la interpretación de otros estadísticos, como los de dispersión o los coeficientes de correlación.

El profesor podría animar a los estudiantes a consultar otros datos estadísticos sobre agregados producidos por el Instituto Nacional de Estadística y ver la dificultad que a veces tiene, decidir los agregados. En nuestro ejemplo, Europa se ha dividido en dos partes; Oriental y Occidental, y algunos países como Estados Unidos o Japón se han añadido a Europa Occidental. Con ejemplos sencillos se podría conducir a los alumnos a la idea de media ponderada y hacerles ver la necesidad de tener en cuenta el número de hombres y mujeres de cada país, para calcular el promedio.

4. *Nosotros hemos calculado la esperanza media de vida global en hombres y mujeres, ponderando los datos de cada país por su número de habitantes (suponiendo un número aproximadamente igual de hombres y mujeres). En la Figura 4.4 hemos representado la esperanza media de vida en hombres y mujeres con dos escalas diferentes. Compara estos dos gráficos e indica si te parecen o no adecuados para representar la diferencia entre la esperanza media de vida de mujeres y hombres. Uno de los dos gráficos ha sido obtenido directamente del ordenador, mientras que el otro ha sido manipulado. Averigua cuál ha sido manipulado.*

La finalidad de esta pregunta es concienciar a los estudiantes sobre la posibilidad de que una gráfica sea manipulada para distorsionar la información y también de la importancia de las escalas adecuadas en una gráfica. Una persona culta debiera poder leer críticamente los gráficos estadísticos que encuentra en la prensa, Internet, medios de comunicación, y trabajo profesional. Esto supone no sólo la lectura literal del gráfico, sino identificar las tendencias y variabilidad de los datos, así como detectar los posibles errores conscientes o inconscientes que puedan distorsionar la información representada (Schield, 2006). Asimismo debiera conocer los convenios de construcción de los diferentes tipos de gráficos y ser capaz de construir correctamente un gráfico sencillo.

Figura 4.4. Esperanza de vida media en hombres y mujeres



Monteiro y Ainley (2007) indican que la lectura de gráficos en el contexto escolar es una tarea más limitada que la posible interpretación de dichos gráficos en otras actividades de la vida diaria. La razón dada por los autores es que, mientras en la escuela sólo pedimos a los estudiantes una respuesta correcta desde el punto de vista matemático, en contextos extraescolares intervienen también otros conocimientos no matemáticos. En esta actividad tratamos de que los estudiantes sean críticos en la lectura de gráficos similares a los que puedan encontrar en la vida diaria y también con el uso de las opciones por defecto del software estadístico, que no son siempre las más adecuadas.

5. *Construye ahora una tabla de frecuencias que muestre la distribución de las tasas de natalidad. ¿Por qué en este caso conviene agrupar en intervalos? ¿Qué representa la frecuencia dentro de un intervalo? ¿Cuántos intervalos conviene usar en la tabla de frecuencias? ¿Cómo representarías gráficamente estos datos? ¿Es simétrica la distribución? ¿Cómo cambia la representación gráfica al variar el número de intervalos? ¿Y si usamos intervalos de distinta amplitud? ¿Qué significa y cómo representarías la frecuencia acumulada? ¿Qué posición ocupa tu país respecto a la tasa de natalidad? ¿Hay algunos países atípicos respecto a la tasa de natalidad? Para contestar esta y otras preguntas similares puedes usar el gráfico del tallo y hojas (Figura 4.5).*

Cuando la variable presenta un número grande de valores, surge la necesidad de agrupación. Ahora bien, no existe una regla fija sobre la forma de construir los intervalos de clase, aunque se recomienda un número de intervalos aproximadamente igual a la raíz cuadrada del número de datos. En esta actividad se muestra un ejemplo de cómo en estadística es posible tener más de una solución correcta al mismo problema y también cómo la forma del histograma varía en función de la elección de los intervalos.

Junto con las representaciones gráficas tradicionales, como diagramas de barras o histogramas, en análisis exploratorio de datos aparecen nuevas representaciones como el diagrama de tallo y hojas o los gráficos de cajas, cuya potencia exploratoria se acentúa con el paso de una a otra representación, así como la selección de partes del fichero para realizar estudios comparativos, por ejemplo al comparar las variables en los distintos grupos de países, que es el tema de la siguiente actividad.

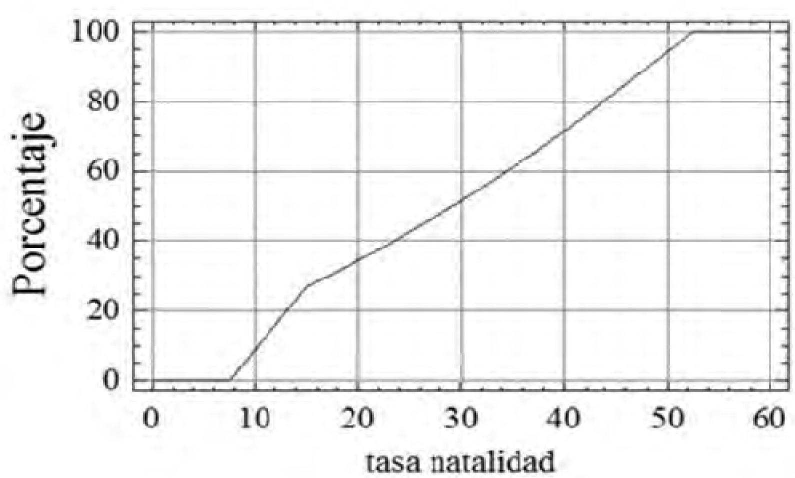
El interés no sólo se centra en las tendencias, sino en la variabilidad, así como el estudio de los valores atípicos. Vemos también como la idea de distribución siempre es relativa a un colectivo; por eso un valor puede ser atípico dentro de un subconjunto de datos y no serlo en el global.

Figura 4.5. Gráfico de tallo y hojas: Tasa de natalidad

0|99
1|0011112222233333333444444
1|556778
2|011222334
2|677888899
3|00111122234
3|5568899
4|011122224444
4|55566677788888
5|0012

Este diagrama conserva los valores originales de los datos y a la vez muestra la frecuencia de valores, así como la moda. Es muy sencillo de construir y de determinar, a partir de él, la mediana y los cuartiles. Puede ser un paso previo a la construcción de una tabla de frecuencias o un histograma o bien al diagrama de frecuencias acumuladas (Figura 4.6). El diagrama de frecuencias acumuladas servirá para determinar la mediana gráficamente y para introducir la idea de percentiles de la distribución. Será interesante para cada alumno analizar en qué percentil se encuentra su país de origen respecto a cada una de las variables.

Figura 4.6. Gráfico de frecuencias acumuladas



6. *Diferencias en la tasa de natalidad. Una vez estudiada globalmente la tasa de natalidad dividiremos la clase en grupos para estudiar si la tasa de natalidad es la misma en los diferentes grupos de países. Investigaremos qué grupos de países tienen valores atípicos para la tasa de natalidad y qué países tienen una tasa de natalidad atípica respecto a su grupo así como por qué al realizar un gráfico global en todo el fichero no aparecen valores atípicos y sí aparecen dentro de los grupos. Se pide listar todas las diferencias observadas en los diversos grupos de países.*

Figura 4.7. Tasa de natalidad en los diferentes grupos de países

```
Paises del Grupo 1

   1|1
   1|22333
   1|445
   1|7

  HI|24.7
```

```
Paises del Grupo 2

   1|8
   2|03
   2|77889
   3|224

  HI|46.6
```

```
Paises del Grupo 3

   0|99
   1|1111
   1|222
   1|3333
   1|4444
   1|5
   1|6
```

```
Paises del Grupo 4

   2|22
   2|689
   3|1
   3|8
   4|222
   4|5
```

```
Paises del Grupo 5

   1|1
   1|7
   2|1123
   2|8
   3|00113
   3|69
   4|012
   3|89
```

```
Paises del Grupo 6

  LO|31.1

   3|
   3|
   3|2
   3|55
   3|
   4|1
   4|444455
   4|66777
   4|88888
   5|001
   5|2
```

Los alumnos elaborarán gráficos como los presentados en las figuras 4.7, 4.8 y 4.9. El gráfico de tallo y hojas ha sido útil para analizar las diferencias en la tasa de natalidad, pero también podemos usar otras representaciones, como diagramas de puntos y gráficos de caja. Divididos en grupos, los alumnos pueden tratar de hallar representaciones alternativas que pongan de manifiesto las diferencias en la tasa de natalidad. Por ejemplo, podemos observar las Figuras 4.8 y 4.9 y comparar con los gráficos del tronco, señalando las ventajas que tiene cada una de las representaciones gráficas y cómo podríamos cambiar cada gráfica para resaltar más (menos) las diferencias.

Figura 4.8. Gráfico de puntos

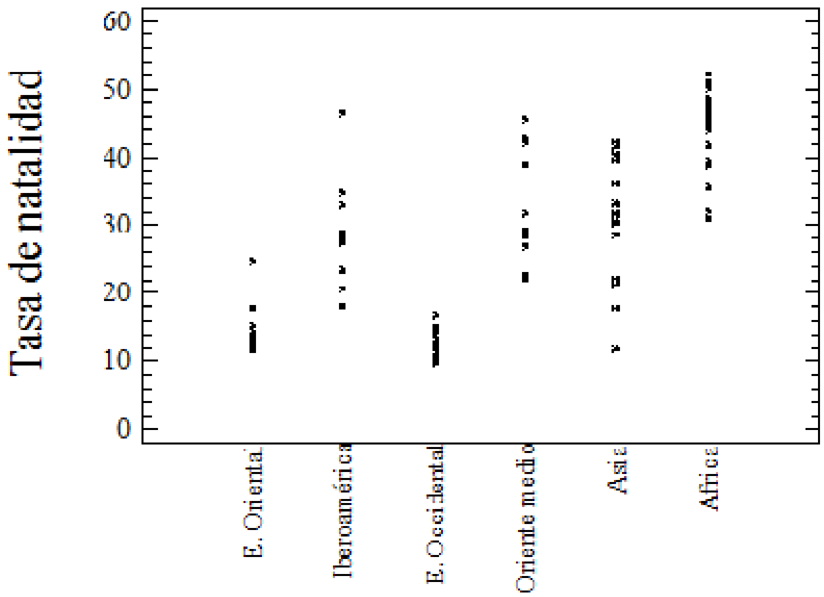
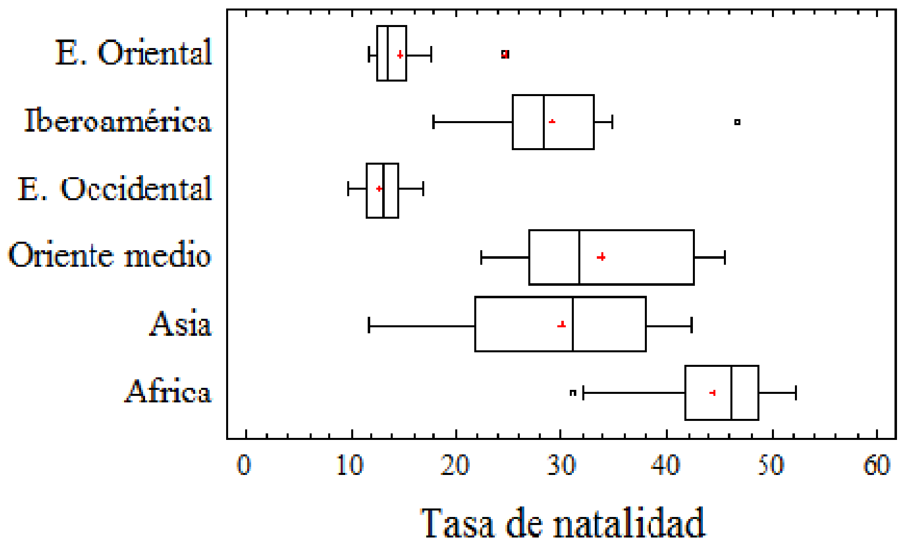


Figura 4.9. Gráficos de caja



7. ***Esperanza de vida en hombres y mujeres.*** *Se dice, por ejemplo, que*

las mujeres forman el sexo débil. Sin embargo muchas chicas estarían en contra de esta opinión cuando comparen en algunos países la esperanza de vida al nacer en hombres y mujeres. ¿Hay mayor variabilidad entre países en la esperanza de vida en hombres o en mujeres? ¿En qué porcentaje de países la esperanza de vida de hombres (mujeres) es mayor de 58 años? ¿y de 68 años? ¿Cuál es el valor de la esperanza de vida de modo que el 70 por ciento de países tiene una esperanza de vida mayor? ¿Es igual en hombres y mujeres? ¿Cómo podrías disimular la diferencia de esperanzas de vida en hombres y mujeres en cada gráfico?

En la actividad anterior hemos comparado una variable en distintos subconjuntos de países, pero a veces tiene también sentido comparar dos variables diferentes en el total de los datos. Podríamos investigar si la distribución de la esperanza de vida en el total de países es igual en hombres y mujeres analizando para ello los gráficos de las figuras 4.10 a 4.12 y contestar las preguntas anteriores.

Figura 4.10. Gráficos de caja. Esperanza de vida en hombres y mujeres

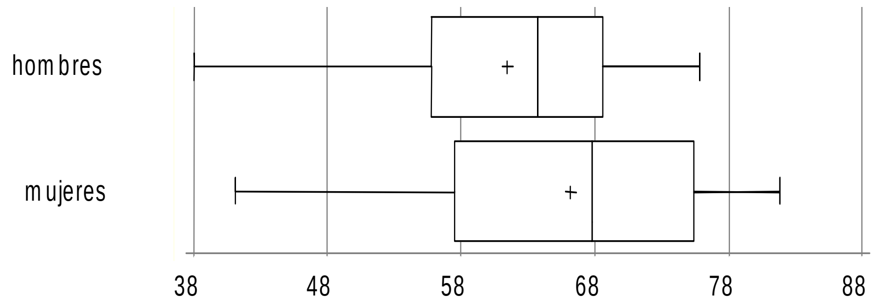
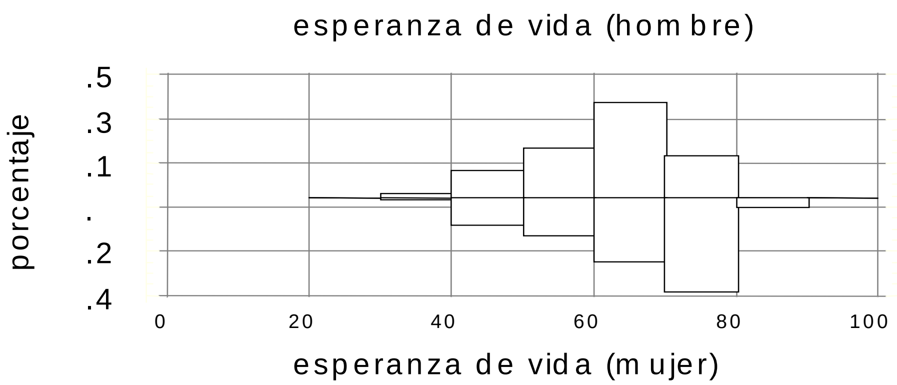
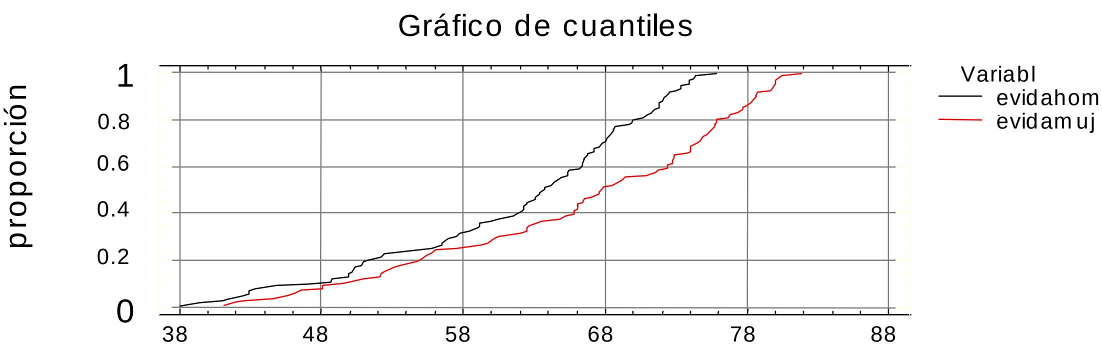


Figura 4.11. Histogramas. Esperanza de vida en hombres y mujeres



En esta actividad se vuelven a aplicar los conceptos aprendidos al estudio de las diferencias de dos variables en una misma muestra. Se aplica también el estudio de las frecuencias acumuladas, percentiles y sus rangos. Hacemos notar que el cálculo de percentiles y sus rangos puede hacerse directamente a partir de la gráfica sin tener que recurrir a las fórmulas de cálculo que son complejas y para las que existe una variedad de casos, según las variables estén o no agrupadas en intervalos.

Figura 4.12. Distribución acumulativa de la esperanza de vida en hombres y



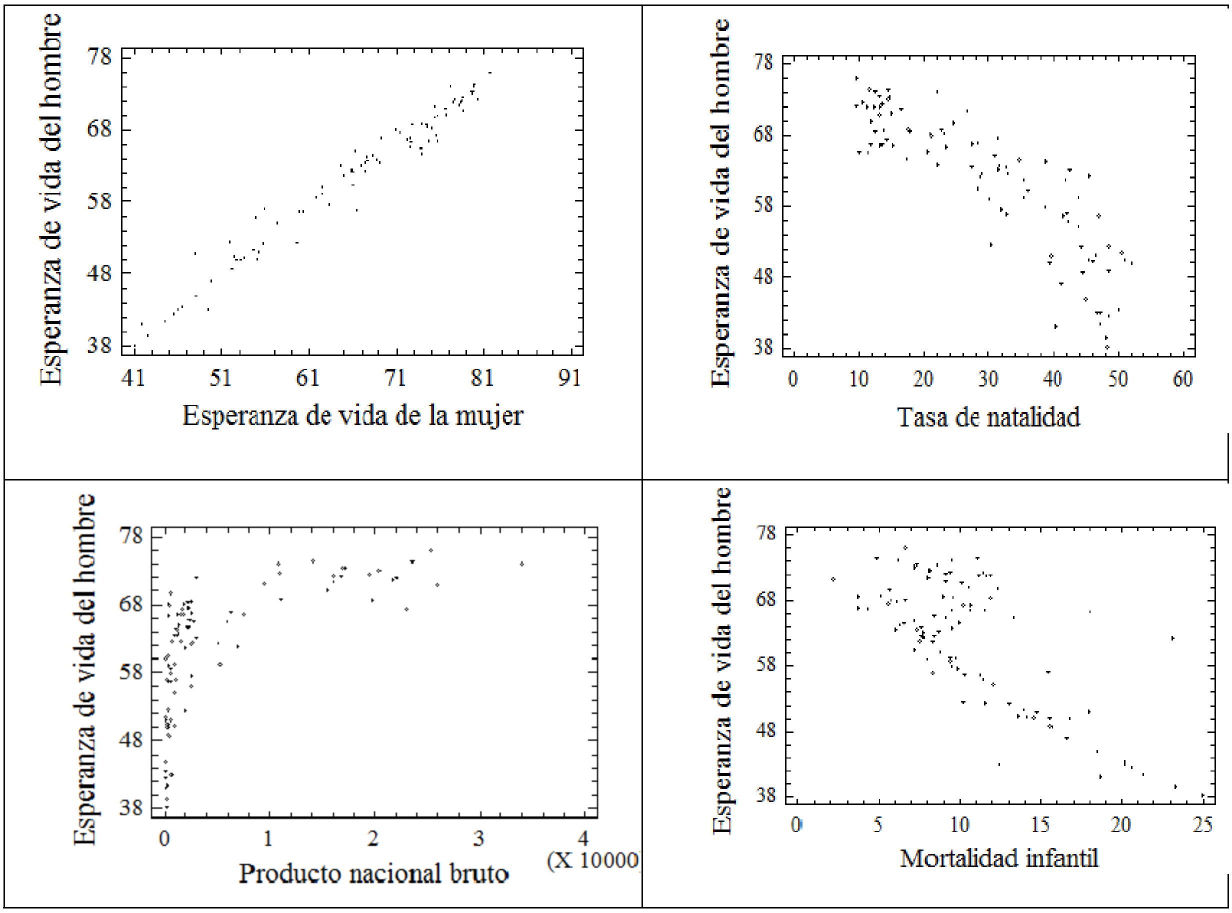
mujeres

4.4. Actividades de ampliación

8. *Relación de la esperanza de vida con otras variables. En la Figura 4.13 hemos representado los diagramas de dispersión de la esperanza de vida del hombre en cada país, en función de diversas variables. ¿Qué variables están relacionada con la esperanza de vida del hombre? ¿En cuál es la relación directa o inversa? ¿Cuáles influyen o son influidas por la esperanza de vida del hombre? ¿Cuál sirve mejor para predecir la esperanza de vida? ¿En qué casos la relación podría ser debida a otras variables? ¿Podríamos en alguno de los casos hallar una función matemática para predecir, aproximadamente, la esperanza de vida del hombre a partir de la otra variable? ¿Qué tipo de función?*

Al analizar las relaciones entre dos variables numéricas los alumnos deben de extender la idea de dependencia funcional a dependencia aleatoria y diferenciar sus tipos (lineal o no; directa e inversa) así como graduar, al menos intuitivamente, la intensidad de la relación. Es importante también diferenciar correlación y causalidad y analizar los distintos tipos de relaciones que pueden llevar a la existencia de correlación: dependencia causal; interdependencia, dependencia indirecta, concordancia y correlación espuria (Estepa, 1995). Una vez detectada la correlación, el interés se centra en la búsqueda de modelos que puedan predecir las variables explicadas en función de las variables explicativas, lo que de nuevo conecta con otro contenido del currículo de matemáticas: las funciones.

Figura 4.13. Relación de la esperanza de vida del hombre con otras variables



9. *Regresión. Estudiemos con más detalle la tasa de natalidad en función del PNB. ¿Cuál es el valor del coeficiente de correlación? ¿Qué te indica? Si utilizamos una recta para predecir la tasa de natalidad en función del PNB, ¿Sería un buen modelo de predicción? ¿Podríamos mejorar la predicción cambiando el tipo de función?*

Con alumnos universitarios se puede proceder al estudio más formal de la regresión, comenzando calculando el coeficiente de correlación, que en este caso (Tabla 4.2) es alto y negativo.

No obstante el alto valor de coeficiente, por si solo no es indicativo de una relación lineal entre las variables, por lo que conviene representar gráficamente los datos en un diagrama de dispersión (Figura 4.14). En el diagrama de dispersión y el coeficiente de correlación se observa una relación inversa ya que a mayor tasa de natalidad menor PNB, pero no lineal.

Tabla 4.2. Resumen del modelo

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	-,629(a)	,396	,389	10,70878

a Variables predictoras: (Constante), Producto nacional bruto en millones de dólares

Figura 4.14. Diagrama de dispersión

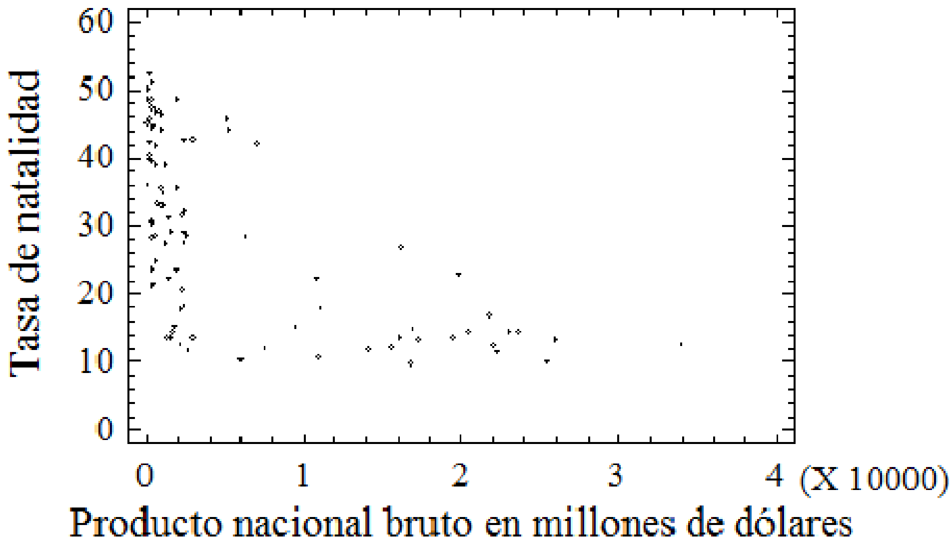


Tabla 4.3. Resumen del modelo y estimaciones de los parámetros

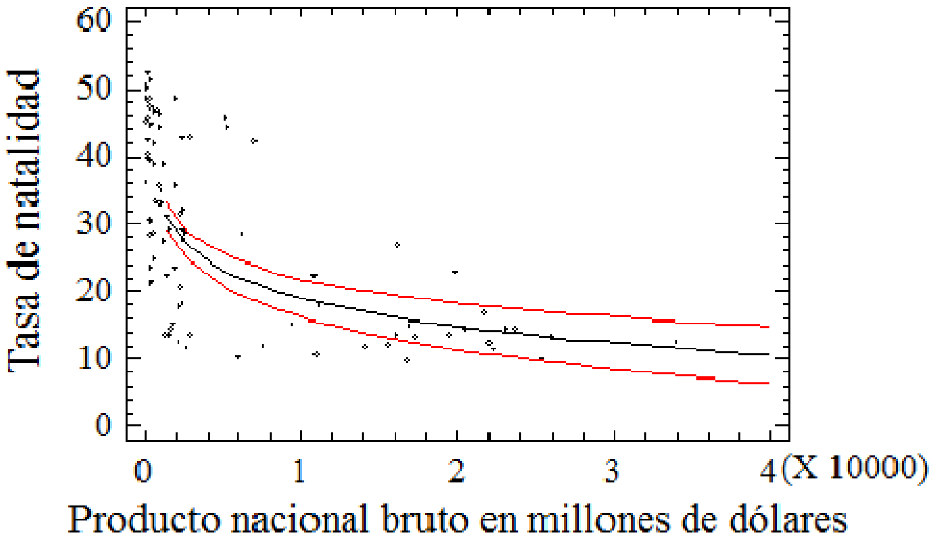
	Resumen del modelo					Estimaciones de los parámetros			
Ecuación	R^2	F	gl1	gl2	Sig.	Constante	b1	b2	b3
Lineal	,396	58,282	1	89	,000	35,573	-,001		
Logarítmica	,542	105,278	1	89	,000	75,521	-6,132		
Cuadrático	,454	36,645	2	88	,000	37,737	-,002	5,49E-8	
Cúbico	,481	26,898	3	87	,000	39,644	-,004	2,19E-3	-3,62E-12
Potencia	,553	110,165	1	89	,000	157,069	-,240		
Exponencial	,446	71,554	1	89	,000	33,352	-4,37E-05		

La variable independiente es Producto nacional bruto en millones de dólares.

La proporción de la varianza de la tasa de natalidad explicada por el

PNB con un modelo lineal es 38.90 %. Luego se puede tratar de comparar otros posibles modelos, es decir, otras posibles curvas que se ajusten mejor a los datos que un modelo lineal (recta). Estudiando otros modelos diferentes (Tabla 4.3) el que mayor porcentaje de varianza explica ofrece es el de potencia o el logarítmico. En el cuadro anterior obtenemos las estimaciones de los parámetros. Gráficamente vemos que el ajuste es mejor que el caso lineal (Figura 4.15).

Figura 4.15. Ajuste de un modelo



10.Estudiemos ahora qué otras variables se relacionan linealmente con la tasa de natalidad y tratemos de encontrar una función que prediga la tasa de natalidad en función de estas variables.

Estudiando las correlaciones (Tabla 4.4) vemos que todas son significativas, siendo la más alta las esperanzas de vida (inversa) y a continuación la mortalidad infantil. La natalidad aumenta si hay mucha mortalidad infantil y poca esperanza de vida. Se puede intentar ajustar una ecuación con más de una variable dependiente, introduciendo paso a paso aquellas que tienen más correlación con la dependiente.

En la regresión por pasos (tabla 4.5) solo se incluyen dos variables en la ecuación, que ya explican el 83% de la varianza (esperanza de vida de la mujer y tasa de mortalidad).

El resto de las variables se excluye porque no hacen mejorar el modelo. Los coeficientes permiten escribir la ecuación de regresión que aparece en la Tabla 4.6. Prediciendo la esperanza de vida del hombre en función de la esperanza de vida de la mujer y tasa de natalidad se obtiene un modelo suficientemente explicativo.

Tabla 4.4. Resumen del modelo y estimaciones de los parámetros

		tasa de natalidad
tasa de mortalidad	Correlación de Pearson	,486(**)
	Sig. (bilateral)	,000
mortalidad infantil	Correlación de Pearson	,858(**)
	Sig. (bilateral)	,000
esperanza de vida al nacer en el hombre	Correlación de Pearson	-,867(**)
	Sig. (bilateral)	,000
esperanza de vida al nacer en la mujer	Correlación de Pearson	-,894(**)
	Sig. (bilateral)	,000
Producto nacional bruto en millones de dólares	Correlación de Pearson	-,629(**)
	Sig. (bilateral)	,000

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Tabla 4.5. Resumen del modelo

					Estadísticos de cambio				
Modelo	R	R^2	R^2 corregida	Error típ. estimación	Cambio R^2	Cambio en F	gl1	gl2	Sig. del cambio F
1	,894(a)	,800	,798	6,16040	,800	356,051	1	89	,000
2	,915(b)	,837	,833	5,60090	,037	19,669	1	88	,000

a Variables predictoras: (Constante), esperanza de vida al nacer en la mujer
b Variables predictoras: (Constante), esperanza de vida al nacer en la mujer, tasa de mortalidad

Tabla 4.6. Coeficientes(a)

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
2	(Constante)	126,602	6,558		19,304	,000
	esperanza de vida al nacer en la mujer	-1,341	,076	-1,090	-17,685	,000
	tasa de mortalidad	-,799	,180	-,273	-4,435	,000

a Variable dependiente: tasa de natalidad

Se podría completar el estudio con contrastes de diferencias de medias. La diferencia de esperanzas de vida en hombres y mujeres se podría estudiar mediante la prueba t de muestras relacionadas (Tablas 4.7 y 4.8). La diferencia de cualquiera de las variables en las diferentes zonas, también se podría estudiar mediante análisis de varianza de una vía (Tablas 4.9 y 4.10).

Tabla 4.7. Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	N	Desviación típica	Error típ. media
Par 1	esperanza de vida hombre	61,4856	97	9,61597	,97635
	esperanza de vida mujer	66,1511	97	11,00539	1,11743

Tabla 4.8. Prueba de muestras relacionadas

Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia				
-4,665	2,37112	,24075	-5,14345	-4,18768	-19,379	96	,000

Tabla 4.9. Descriptivos (Tasa de natalidad)

		Media	Desviación típica	Error típico	I. confianza media 95%		Mínimo	Máximo
Europa Oriental	11	14,76	3,69	1,11	12,28	17,24	11,60	24,70
Sudamérica	12	29,17	7,38	2,13	24,48	33,86	18,00	46,60
Europa Occidental, Japón, U	19	12,85	1,94	,44547	11,91	13,78	9,70	16,70
Oriente medio	11	33,90	8,62	2,60	28,10	39,69	22,30	45,60
Asia	16	30,00	9,05	2,26	25,1731	34,82	11,70	42,20
Africa	27	44,52	5,68	1,09	42,2767	46,77	31,10	52,20
Total	96	29,28	13,60	1,38	26,5330	32,04	9,70	52,20

Tabla 4.10. ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	13964,322	5	2792,864	69,441	,000
Intra-grupos	3619,747	90	40,219		
Total	17584,070	95			

4.5. Algunas dificultades y errores previsibles

4.5.1. Lectura de gráficos

En proyectos anteriores hemos analizado algunos niveles de lectura de los gráficos. Cuando los niveles de lectura de gráficos descritos se aplican no sólo a la interpretación de los gráficos, sino a su valoración crítica, los niveles superiores descritos anteriormente se modifican ligeramente (Aoyama y Stephen, 2003; Aoyama, 2007).

Supongamos, por ejemplo, que se da a los estudiantes un gráfico que presenta datos sobre el número de horas que los adolescentes dedican a jugar con la videoconsola y el número de episodios de violencia escolar en que se ven implicados. Dicha gráfica muestra claramente un crecimiento del número de episodios de violencia cuando aumenta el tiempo dedicado a este tipo de juegos. Se pregunta a los estudiantes si piensan que la violencia escolar disminuiría si se prohibiesen las videoconsolas. Una vez que los estudiantes llegan a la fase superior en la clasificación de Friel, Curcio y Bright, todavía podríamos diferenciar tres grupos, en función de su capacidad de crítica de la información representada:

- *Nivel Racional/Literal.* Los estudiantes leen correctamente el gráfico, incluyendo la interpolación, detección de tendencias y predicción. Para responder la pregunta planteada, usan las características del gráfico, pero no cuestionan la información, ni dan explicaciones alternativas. Una respuesta típica a la pregunta planteada sería “Sí, ya que el grupo de chicos que jugó juegos durante mucho tiempo también tuvo muchos episodios de violencia”
- *Nivel Crítico*. Los estudiantes leen los gráficos, comprenden el contexto y evalúan la fiabilidad de la información, cuestionándola a veces, pero no son capaces de buscar otras hipótesis: “Pienso que no, pues aunque los que más juegan aparecen como más violentos en el gráfico, podría haber otras causas, aunque no me imagino cuáles”
- *Nivel Hipotético:* Los estudiantes leen los gráficos los interpretan y evalúan la información, formando sus propias hipótesis y modelos: “No estoy de acuerdo en que la causa de la violencia sea el juego; quizás la falta de atención de los padres puede llevar a la vez a que el chico sea violento y que dedique más horas a jugar con la consola”.

4.5.2. Medidas de posición central

En este proyecto los datos originales son medias ponderadas, tema en que los estudiantes tienen dificultades. Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que incluso alumnos universitarios no ponderan adecuadamente los valores y en ocasiones usan la media simple, en lugar de la media ponderada. Li y Shen (1992) indican que cuando se pide a los estudiantes calcular la media a partir de una tabla de frecuencias donde los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debe ponderarse de modo distinto al calcular la media.

En otros casos el algoritmo se aplica de forma mecánica sin comprender su significado. Cai (1995) encontró que mientras la mayoría de alumnos de 12-13 años en su investigación eran capaces de aplicar adecuadamente el algoritmo para calcular la media, sólo algunos alumnos eran capaces de determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado. Incluso encontrando el valor desconocido, fueron pocos los que lo hicieron a partir de un uso comprensivo del algoritmo, multiplicando el valor medio por el número de valores para hallar la suma total. La mayoría simplemente usó el ensayo y error.

Otros errores de cálculo en media, mediana y moda descritos por Carvalho (1998) al analizar las producciones escritas de los alumnos al resolver tareas estadísticas son los siguientes:

- Moda: Tomar la mayor frecuencia absoluta;
- Mediana: No ordenar los datos, para calcular la mediana; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; equivocarse al calcular el valor central;
- Media: Hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media.

En realidad, el cálculo de la mediana es complejo, porque el algoritmo de cálculo es diferente, según tengamos un número par o impar de datos, y según los datos se presenten en tablas de valores agrupados o sin agrupar (Cobo y Batanero, 2000) y también el valor obtenido es diferente, según se aplique uno u otro algoritmo. Esto puede resultar difícil para los alumnos que están acostumbrados a un único método de cálculo y una única solución para los problemas matemáticos.

Gattuso y Mary (1998, 2002) analizan la evolución de la comprensión del algoritmo de cálculo de la media ponderada de los alumnos durante la enseñanza secundaria, usando problemas con diferentes contextos y forma de representación. Las tareas presentadas fueron: cálculo de medias ponderadas, efecto que el cambio de un dato produce sobre la media y hallar un valor faltante en un conjunto de datos para obtener un promedio dado. Identifican las siguientes variables didácticas que afectan a la dificultad de las tareas: formato (tabla, serie de números, gráfico), si los valores de las variables son o no mucho mayores que los de las frecuencias (lo que influye en que el niño discrimine los dos conceptos); si una de las frecuencias es mucho mayor que las otras (de modo que se fuerce al niño a tener en cuenta las frecuencias). Observaron el efecto de estas variables y también la mejora con la instrucción, aunque no fue muy persistente en el tiempo.

4.5.3. Correlación y regresión

La asociación estadística extiende la idea de dependencia funcional, y es relevante en muchos métodos de gran variedad de ciencias. Mientras que en una dependencia de tipo funcional a cada valor de una variable independiente *X* corresponde un solo valor de otra variable dependiente *Y*, en el caso de asociación a cada valor de *X* corresponde una distribución de valores de *Y*. Además se puede definir una medida de la intensidad de la asociación, que varía entre 0 (independencia total) y 1 (asociación perfecta), utilizando coeficientes como el de correlación (para variables cuantitativas) o el coeficiente de contingencia (para variables cualitativas).

Las dificultades y errores en torno a estas nociones, descritas por la investigación psicológica están ligadas a las ideas de condicionamiento y causalidad aunque estos conceptos son diferentes. Díaz y de la Fuente (2005) analizan las relaciones entre causalidad y condicionamiento, que son inherentes a un problema de asociación, puesto que las personas ya que construimos nuestro conocimiento del mundo sobre la base de relaciones de causa y efecto entre diferentes sucesos.

Desde el punto de vista de la probabilidad, si un suceso *A* es la causa estricta de un suceso *B*, siempre que suceda *A*, sucederá *B*, por lo que $P(B/A)=1$ y habrá una asociación entre *A* y *B*. Las autoras indican que una relación causal determinista es menos frecuente que una aleatoria, donde, cuando sucede *A* cambia la probabilidad de que ocurra *B*. Una relación de causalidad implica una asociación, pero no al contrario, pues dos sucesos o variables pueden estar asociados sin que uno de ellos sea causa del otro. Una asociación estadística entre variables puede ser debida a otras variables intervinientes o incluso ser espúrea y no implica relación causal.

Otros sesgos descritos relacionados con la comprensión de la idea de correlación citados por Engel y Sedlmeier (2011) son los siguientes:

- *Influencia de las creencias previas* o *correlación ilusoria,* que consiste en formarse teorías propias sobre la relación que existe entre dos variables, que no se apoya en los datos empíricos.
- *Desestimar el efecto de regresión,* por el cual, después de que aparece un caso atípico, suele haber una vuelta a los valores más comunes. Así, los hijos de padres muy altos, suelen ser altos pero no tanto como sus padres.
- *No tener en cuenta* el efecto de terceras variables que pueden hacer creer en la existencia de una correlación cuando esta no existe.

En la investigación en didáctica de la matemática se han encontrado las siguientes dificultades adicionales:

- *Distinguir* si las dos variables presentadas en la tarea conforman una distribución bidimensional (Estepa, 2007).
- La mayoría de los alumnos *relaciona el signo de la covarianza* con el tipo de correlación directa o inversa, y se tiene dificultad en relacionar su magnitud con la intensidad o relacionar los coeficientes de regresión con el signo de la correlación (Sánchez-Cobo 1999; Estepa, 2007).
- Considerar tan sólo la correspondencia de datos bidimensionales aislados, en lugar de considerar la tendencia global de éstos (Moritz, 2004).
- *Estimar el coeficiente de correlación* desde otras representaciones (verbal tabular, etc.) distintas de la representación gráfica (diagrama de dispersión). En este sentido, destacar la importancia del trabajo con distintos objetos matemáticos cuya comprensión y dominio permitirán llevar a cabo procesos de traducción entre diferentes representaciones de la asociación estadística (verbal, tabular, gráfica, o numérica) (Sánchez Cobo, 1999; Moritz, 2004).
- *Ordenar adecuadamente* diferentes valores del coeficiente de correlación distintos de: -1, 0 y 1. Aunque tienen presente que la intensidad de la dependencia se obtiene a partir del coeficiente de correlación, presentan dificultades en estas comparaciones, debido a que usan indebidamente sus conocimientos sobre el orden en números enteros (Sánchez- Cobo, 1999).
- *Dificultad de diferenciar la variable explicativa de la explicada* en el cálculo de la recta de regresión. En la investigación de Sánchez-Cobo, dos de cada cinco estudiantes, aproximadamente, relacionan que ambas rectas de regresión son perpendiculares cuando el

coeficiente de correlación es nulo, evidenciándose que se considera casi en exclusiva, la modelización de ajuste lineal. En concreto, casi la mitad de los sujetos del estudio consideran que si existe correlación positiva, ésta se deduce en una dependencia lineal.

- *Transitividad de la correlación.* Se piensa que si una variable A está correlacionada con otra B y esta está correlacionada con una variable C, las variables A y C debieran estar correlacionadas, pero en general, la correlación no es transitiva. Esto se debe a una extrapolación de propiedades que se cumplen en otras relaciones (como la de orden). Esta creencia es denominada *concepción transitiva de la asociación* (Sotos, Vanhoof, Van Den Noortgate, y Onghena, 2009).

Por otra parte el estudio de la regresión ofrece al alumno una buena ocasión de aplicar sus conocimientos previos sobre la función lineal y otras funciones sencillas. El profesor debe advertir sobre el uso inadecuado del razonamiento proporcional en el trabajo con la recta de regresión (Estepa, 2008) y recordar que, en general no se puede despejar la variable independiente para encontrar la línea de regresión de X sobre Y, porque el criterio de ajuste es diferente del seguido en la construcción de la recta de regresión de Y sobre X.

4.5.4. Otras dificultades

En este fichero las unidades estadísticas son agregados, lo que tiene repercusión en la interpretación de los promedios de las variables; por ejemplo la media (simple) de todas las esperanzas de vida al nacer en los distintos países no es igual a la esperanza global de vida, sino que esta tiene que ser calculada como una media ponderada en función del número de hombres / mujeres de cada país. Esto puede servir de reflexión sobre las diferentes unidades estadísticas que pueden usarse en un estudio, la necesidad que a veces tenemos de trabajar con valores aproximados y la forma de combinar estudios parciales para obtener índices globales, así como para reflexionar sobre las propiedades de los promedios y la comprensión de las mismas por parte de los estudiantes (Tormo, 1995; Batanero, 2000). Esta misma observación debe hacerse en la interpretación de otros estadísticos, como los de dispersión o los coeficientes de correlación.

El trabajo con análisis exploratorio de datos refuerza algunos objetivos sugeridos para la educación matemática en los nuevos currículos de secundaria, como el trabajo con problemas abiertos, el uso de sistemas múltiples de representación, la introducción al trabajo con ordenadores o calculadoras gráficas y la conexión de las matemáticas con otras áreas del currículo (Shaughnessy, Garfield y Greer, 1997).

Pero el razonamiento estadístico va más allá del conocimiento matemático y de la comprensión de los conceptos y procedimientos. La modelización, la valoración de la bondad del ajuste de los modelos a la realidad, la formulación de cuestiones, la interpretación y síntesis de los resultados, la elaboración de informes son también componentes esenciales de las capacidades que queremos desarrollar en nuestros alumnos. Los alumnos, acostumbrados a que en la clase de matemáticas cada problema tenga una única solución, podrían encontrar complejo el trabajo con los proyectos y la existencia de diferentes procedimientos y soluciones correctas. Es labor del profesor acostumbrarles al método y razonamiento estadístico.

Los estadísticos de orden pueden plantear problemas, ya que la función de distribución de la variable discreta tiene discontinuidades de salto y los alumnos no están acostumbrados a este tipo de funciones. Asimismo, alguno de ellos pudiera tener deficiencias en el razonamiento proporcional.

4.6. Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar, explícita o implícitamente los siguientes contenidos:

1. *Aplicaciones de la estadística:*

- Estudios demográficos y socioeconómicos;
- Estadísticas oficiales; organismos y procedimientos en la elaboración de estadísticas oficiales;
- Fuentes de datos estadísticos: anuarios estadísticos; fuentes de datos en Internet;
- Ajuste de modelos a datos.

2. C*onceptos y propiedades*:

- Agrupación de variables en intervalos; efectos de la agrupación;
- Medidas de posición central: medias ponderadas, percentiles, rangos

de percentiles;

- Valores atípicos y su efecto sobre los promedios;
- Asociación y sus tipos: directa/ inversa; lineal/ no lineal; asociación y causalidad;
- Correlación. Interpretación del signo y la intensidad; proporción de varianza explicada;
- Modelos; ajuste de modelos sencillos a datos bivariantes; uso de modelos en la predicción. Función lineal, cuadrática, logarítmica, exponencial;
- Contraste de hipótesis: contraste de diferencia de medias en muestras relacionadas;
- Intervalo de confianza para la diferencia de medias en muestras relacionadas;
- Análisis de varianza de un factor, efectos fijos. Variable dependiente y factor.

3. Notaciones y representaciones:

- Palabras como, intervalos, extremos y marcas de clase, percentiles y sus rangos, cuartiles, valores atípicos, asociación, correlación, regresión, etc.
- Símbolos usados para los diferentes estadísticos y otros como el sumatorio;
- Gráficos de barras; diagramas acumulativos, diagrama de tallo y hojas, gráficos de caja, gráficos de cuantiles, diagramas de dispersión.

4. *Técnicas y procedimientos:*

- Búsqueda de datos a partir de anuarios estadísticos o de la Internet;
- Elaboración de tablas de frecuencia con datos agrupados;
- Elaboración de gráficos de tallo y hojas, gráficos de caja, gráficos de cuantiles y diagramas de dispersión;
- Interpretación de tablas y gráficos; elaboración de conclusiones a partir del análisis de tablas y gráficos;
- Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos;

- Estimación de parámetros en modelos de regresión;
- Uso de calculadora gráfica, hojas de cálculo o software estadístico;
- Comparación de muestras relacionadas. Contrastes e intervalos de confianza.
- Análisis de varianza. Cálculo e interpretación.

5. A*ctitudes:*

- Valorar la utilidad y complejidad de la elaboración de las estadísticas oficiales y concienciarse de la importancia de su colaboración en encuestas y censos para obtener datos fiables;
- Concienciar al alumno sobre la importancia de las representaciones gráficas y la posibilidad de que se transmita información sesgada en una gráfica mal construida;
- Fomentar un espíritu crítico en el uso de paquetes estadísticos y sus opciones por defecto.

5. Pruebas médicas

Carmen Díaz

5.1. Objetivos

En este proyecto se utiliza el contexto de las pruebas médicas y el diagnóstico de enfermedades para trabajar ideas de probabilidad, incluyendo la probabilidad simple, probabilidad compuesta y probabilidad condicionada, así como el teorema de Bayes.

Se hará ver a los alumnos cómo el teorema de Bayes permite la actualización de probabilidades cuando se dispone de información nueva. En este sentido, formaliza la idea de “aprender de la experiencia”.

Otro objetivo importante es enfrentar a los alumnos con algunas de sus intuiciones incorrectas sobre la probabilidad condicional, que puede llevar a decisiones incorrectas, en situaciones frecuentes en la vida cotidiana, como es la interpretación de una prueba médica.

El enfoque seguido permite, en alumnos universitarios, completarlo con una introducción intuitiva a algunas ideas elementales de inferencia bayesiana.

Los objetivos que se plantean con este proyecto son:

- Diferenciar entre probabilidades iniciales, finales y verosimilitudes. Relacionar estos conceptos con los de probabilidad simple, condicional y compuesta.
- Identificar los sucesos de interés en un experimento aleatorio, sus probabilidades iniciales y verosimilitudes a partir del enunciado del problema.
- Uso del teorema de Laplace para calcular probabilidades simples y condicionales.
- Analizar el teorema de Bayes como herramienta para transformar

probabilidades iniciales en finales

- Organizar los datos en una tabla de forma que se facilite el cálculo, bien manual o con recursos informáticos (hoja Excel, applet) para calcular las probabilidades finales a partir de las probabilidades iniciales y de las verosimilitudes.

Alumnos

El proyecto puede ser utilizado con alumnos de Bachillerato y alumnos universitarios dentro del tema de probabilidad. No necesita mucha formalización, pues los cálculos son sencillos. Para estudiantes universitarios, el tema puede ampliarse con una introducción intuitiva a la inferencia bayesiana para la proporción de una población, en el caso discreto.

5.2. Los datos

En este proyecto se trabajarán con datos de pruebas médicas. Se pueden trabajar con datos hipotéticos, inventados por el profesor, o bien obtener los datos reales sobre una cierta enfermedad, obtenidos a través de Internet. Se pedirá a los alumnos que realicen por grupos una búsqueda de estos datos: prevalencia, falsos positivos, falsos negativos, sensibilidad de una prueba, y especificidad.

5.3. Preguntas, actividades y gestión de la clase

Se comenzará el proyecto realizando una discusión sobre la importancia que puede tener la probabilidad en el diagnóstico médico, no sólo para el profesional médico que lo realiza, sino también para el enfermo que recibe el diagnóstico. Se preguntará a los estudiantes si piensan que la probabilidad es útil en estas situaciones; para motivarlos se les puede pedir buscar en Internet páginas en que se presente la aplicación de la probabilidad en el diagnóstico médico.

Una vez que han expresado sus opiniones o compartido sus experiencias, se continúa presentando la sintomatología de una enfermedad o trastorno, como sería por ejemplo la narcolepsia:

1. *La narcolepsia es un trastorno primario del sueño, cuya sintomatología principal es la aparición recurrente e irresistible de ataques de sueño. Las personas que tienen este trastorno no*

descansan bien; por tanto se vuelven irritables y no rinden lo que quisieran. ¿Crees que este trastorno es frecuente? ¿Cuántas personas crees que lo sufren?

Si los alumnos no conocen la enfermedad, se les daría alguna información o bien se les pediría que leyeran algo sobre la misma en Internet. Una vez interesados en el tema de las pruebas médicas, se presenta el concepto de *prevalencia* como el número total de los individuos que presentan un atributo o enfermedad en un momento dividido por el total de habitantes del área.

La prevalencia de una enfermedad siempre será un número entre 0 y 1, o bien un número expresado como porcentaje. En este punto se pedirá a los alumnos que busquen la prevalencia de dicho trastorno y de otras enfermedades. Se podría hablar sobre enfermedades raras y frecuentes. Se continuaría la actividad con el caso de la narcolepsia.

2. *Supongamos que una de cada 1000 personas sufre narcolepsia. Si escogiéramos al azar una persona en una gran ciudad ¿Cuál es la probabilidad de que tenga narcolepsia?*

Se recuerda a los estudiantes los conceptos de experimento aleatorio y suceso. Se pregunta por los casos favorables y posibles a tener la enfermedad en la muestra dada. Los alumnos recordarán la regla de Laplace, que se puede aplicar en esta situación, pues, al no tener ninguna información, todos los sujetos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

Observamos que en este caso, se puede aplicar tanto la asignación clásica de probabilidad (regla de Laplace) como la frecuencial (probabilidad como límite de la frecuencia relativa). Si realizáramos muchas veces el experimento de extraer al azar una persona de una muestra de 1000 con reemplazamiento, la probabilidad de que la persona sufriese narcolepsia sería 1/1000.

Puesto que la finalizad del proyecto es introducir algunas ideas bayesianas, se define ahora el concepto de *probabilidad inicial*: probabilidad inicial de sufrir narcolepsia en una persona tomada al azar de la población sería la probabilidad que asignaríamos en ausencia de datos sobre el experimento. Por tanto, $P(N)$= 1/1000. Este valor coincide con el de prevalencia en una prueba médica.

Se hará ver a los alumnos que la probabilidad inicial en este caso tiene un carácter subjetivo. Si ahora estudiásemos la prevalencia (o bien la probabilidad inicial) de narcolepsia en otro país, o cambiando la edad o rasgos de las personas, posiblemente el valor cambiaría. De modo que diferentes personas podrían asignar una probabilidad inicial diferente, dependiendo de su información sobre el suceso de interés.

3. *Supón que tenemos una prueba que diagnostica la narcolepsia. Como sabes las pruebas médicas no son infalibles. ¿Sabes qué es un falso positivo? ¿Sabes qué es un falso negativo?*

Los alumnos definirán estos conceptos. Se discute con los estudiantes el carácter aleatorio que siempre tiene una prueba médica o de otro tipo. Se discuten los avances de la medicina y los esfuerzos de la investigación por conseguir pruebas seguras. Se reflexionará sobre las situaciones en las que un test diagnóstico da positivo, cuando la persona no tiene esa enfermedad (falso positivo) y las situaciones en las que, aun teniendo la enfermedad, el test no la detecta (falso negativo). Se hará ver que estos conceptos en realidad son probabilidades condicionales.

Un falso positivo en realidad corresponde a la probabilidad condicional de que el test da positivo, dado que la persona está sana *P(+/sana)*. El falso negativo corresponde con la probabilidad condicional de que el test de negativo, dado que la persona esté enferma *P(-/enferma)*. Estos dos casos son situaciones en las que las pruebas médicas cometen errores, por diferentes motivos, tales como confusión de resultados, o bien que por un problema de alergia u otro paralelo a la prueba aparezca el falso positivo.

También se pueden definir los conceptos de sensibilidad y especificidad de una prueba. La *sensibilidad* corresponde a la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma *P(+/enferma)* y la *especificidad* sería la probabilidad de que de negativo si la persona está sana *P(-/sana)*. Resumiendo, hay cuatro conceptos importantes a recordar en la prueba médica

- Sensibilidad= *P(+/enferma)*
- Falso positivo =*P(+/sana)*
- Falso negativo= *P(-/enferma)*
- Especificidad= *P(-/sana)*

Lo que interesará para considerar que una prueba diagnóstica es buena, es que tenga alta sensibilidad y especificidad y que de pocos falsos negativos y positivos.

4. *Supón que el test para la narcolepsia es positivo en 99 de cada 100*

personas enfermas y también en 2 de cada 100 personas sanas. ¿Cuál es la proporción de fallos?

Como hemos visto siempre puede haber una pequeña probabilidad de fallo, bien por error humano en la aplicación, bien por defecto del material u otra causa. Es por ello que generalmente se hace más de una prueba al paciente, antes de recomendar una intervención quirúrgica o un tratamiento, sobre todo si es agresivo.

Aunque para un paciente lo que importa es su propio caso, para un médico o para las autoridades sanitarias, además de tratar de dar un diagnóstico correcto cada vez, les interesa minimizar la proporción de fallos en la aplicación cotidiana de una prueba, ya que algunos fallos son inevitables. Ello requiere algunos cálculos de probabilidad. Para resolver esta necesidad se define ahora el concepto de verosimilitud que es equivalente a la sensibilidad: probabilidad de que el test sea positivo si se tiene narcolepsia *P(+/N)= 99/100.*

5. *Vamos a completar en la tabla 5.1. los datos que conocemos de la situación.*

Se motiva a los estudiantes del interés de calcular de un total de enfermos, cuantos daría resultado positivo o negativo si se tiene o no la enfermedad. Los resultados de los cálculos deben arrojar los valores presentados en la tabla 5.2.

Tabla 5.1. Tabla Bayes para un test diagnóstico

	Test +	Test -	Total
Sufren narcolepsia			
No sufren narcolepsia			
Total			

Tabla 5.2. Tabla Bayes para la nacolepsia

	Test +	Test -	Total
Sufren narcolepsia	99	1	100
No sufren narcolepsia	1998	97902	99.900
Total	2097	97903	100.000

6. *En realidad, lo que nos interesa, es saber, si el test da positivo ¿Qué probabilidad hay de tener narcolepsia?*

Esto es lo que se define como *probabilidad final:* probabilidad final de sufrir narcolepsia si el test ha dado positivo *P(N/+).* Para calcular la probabilidad final, habrá que calcular:

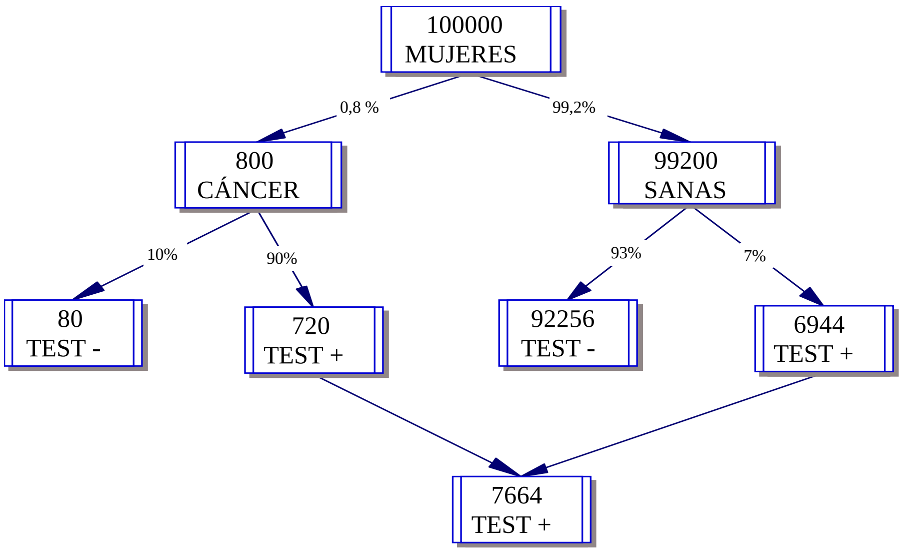
$$P(N/+) = \frac{99}{99+1998} = 0,0472$$

En este punto surgirá una discusión, porque el resultado es sorprendente: puede parecer que las pruebas médicas son poco fiables. Lo que pasa es que el número de personas que tienen la enfermedad, en el total de la población es muy pequeño.

- La probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma es muy alta. Casi todas ellas son detectadas en el test (el test tiene mucha *sensibilidad).*
- Por otro lado, la probabilidad de un resultado positivo si se está sano (*falso positivo)* es muy pequeña.

Pero un suceso con probabilidad pequeña no es un suceso *imposible* y puede ocurrir. Más aún, si el número de personas que pasan la prueba es muy grande, pueden aparecer más falsos positivos que positivos reales (como en el ejemplo). Supongamos, por ejemplo una prueba médica que se efectúa regularmente como screening masivo para prevenir una cierta enfermedad, como es el caso de las pruebas de mamografía realizadas anualmente a las mujeres a partir de los 40-50 años.

Figura 5.1. Resultados positivos en un screening masivo



En la Figura 5.1 hemos representado los resultados (aproximados) esperados en una muestra de 100000 mujeres, suponiendo 8 de cada 1000 mujeres tuvieran cáncer y que la prueba da positivo en el 90% de las enfermas y el 7% de las sanas. Si observamos el número total de resultados positivos, la mayoría corresponde a personas sanas, por lo que la probabilidad de tener cáncer, sólo con esta prueba es pequeña. Una prueba positiva puede ser debida a muchas otras razones y aunque la probabilidad es pequeña, al pasarla a tantos casos, habrá bastantes falsos positivos por esta razón. Conviene que las personas entiendan el funcionamiento de las probabilidades condicionales al interpretar un diagnóstico en casos como los de screening masivo, para que exijan una segunda prueba antes de someterse a una terapia agresiva.

7. *¿Qué ocurriría si, en lugar de narcolepsia, el test da positivo en insomnio? Busca la prevalencia del insomnio*

A continuación se analiza con los estudiantes el efecto de cambiar las probabilidades iniciales sobre las finales. La prevalencia del insomnio en la población es bastante mayor que la de la narcolepsia (un 15%), es decir, la probabilidad inicial de insomnio es *P(I)=5/100*. Por este motivo la probabilidad de un falso positivo será mucho menor que en el caso de narcolepsia o cáncer de pecho, como veremos a continuación.

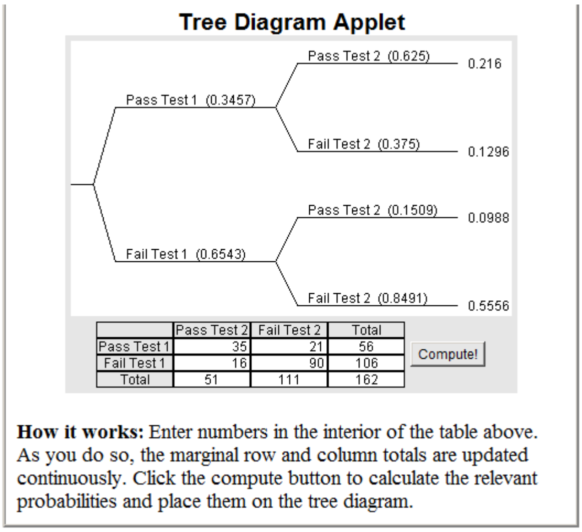
8. *La probabilidad de que el test de positivo en una persona con insomnio es de 0,99 y la probabilidad de que de positivo en una persona sana es de 0,02. Calculemos ahora la probabilidad final de sufrir insomnio si la prueba es positiva, es decir la probabilidad de tener insomnio si el test da positivo.*

$$P(I/+) = \frac{P(I \cap +)}{P(+)} = 0{,}8973$$

Vemos que el resultado de la prueba de insomnio es mucho más fiable, porque la prevalencia de insomnio en la población es mucho mayor que la narcolepsia. Esta y otras situaciones se pueden explorar con ayuda de un applet que calcula las probabilidades y representa la situación mediantes un diagrama en árbol (ver Figura 5.2 y la página www.stat.tamu.edu/~west/applets/tree.html).

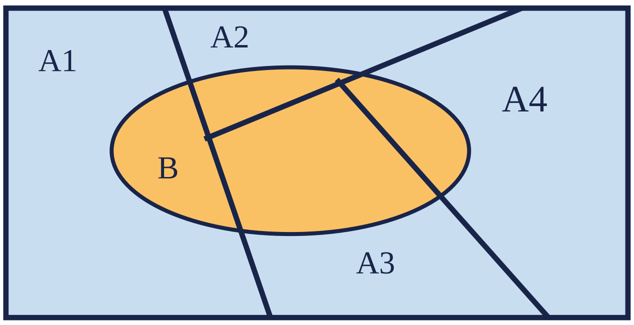
Motivados los alumnos por los ejemplos introducidos y la importancia de una buena interpretación de probabilidades condicionales, a continuación se presenta a los alumnos el *teorema de Bayes*, que permite pasar de la probabilidad inicial *P(Enfermo)* a la probabilidad final *P(Enfermo/+)*, cuando se conocen las verosimilitudes *P(+/Enfermo)*.

Figura 5.2. Applet que representa las pruebas médicas en un diagrama en árbol



Consideremos un experimento aleatorio y supongamos que su espacio muestral asociado es *E*. Sean los sucesos A_1, A_2, A_n una partición de *E*, cuyas probabilidades se conocen. Sea *B* un suceso cualquiera del espacio muestral, del que conocemos las probabilidades *P(B/Ai)*. El esquema 5.2. representa esta situación.

Figura 5.2. Partición del espacio muestral



El teorema de Bayes permite calcular las probabilidades $P(A_i/B)$, mediante la siguiente fórmula:

(5.1) $$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)\times P(B/A_i)}{P(A_1)\times P(B/A_1)+P(A_2)\times P(B/A_2)+...+P(A_n)\times P(B/A_n)}$$

Las probabilidades $P(A_i)$ se denominan *probabilidades iniciales*, y $P(A_i/B)$ *probabilidades finales*, que se calcularán conocida la información $P(B/A_i)$, las *verosimilitudes*. Este teorema se puede también expresar simplificadamente en la forma siguiente:

(5.2) $$P(A_i / B) = K \times P(A_i) \times P(B / A_i)$$

El Teorema de Bayes (fórmula 5.3) nos indica que la probabilidad final de A_i dado B es proporcional al producto de la probabilidad inicial de A_i por la verosimilitud de los datos dado A_i. La constante de proporcionalidad K es la inversa de la probabilidad de B que se calcula en (5.3).

(5.3) $$K = \frac{1}{P(A_1) \times P(B / A_1) + P(A_2) \times P(B / A_2) + ... + P(A_n) \times P(B / A_n)}$$

9. *El Teorema de Bayes permite calcular cómo se modifican las probabilidades de determinados sucesos, cuando se conoce alguna información adicional. Este teorema es de gran utilidad para diagnosticar diferentes trastornos a partir de pruebas. Nosotros podemos pensar que la probabilidad de que tengamos una enfermedad es P(Enfermo), pero una vez que la prueba ha salido positiva, esa probabilidad cambia P(Enfermo/+). El teorema de Bayes nos permite calcular esta última, conocida la primera, pero también puede aplicarse en muchas otras ocasiones, donde se incorpora nueva información.*

Se reflexiona con los alumnos el papel del teorema de Bayes para actualizar probabilidades en función de la recogida de nuevos datos, es decir. El teorema de Bayes permite realizar esta revisión de la probabilidad a la luz de nuevos datos.

Continuamos con otro ejemplo, el de la depresión post-parto, para ver como se puede organizar los cálculos con una tabla.

10. *Alrededor del 15% de las madres primerizas sienten ansiedad en los días posteriores al parto. En el 90% de los casos esta ansiedad disminuye y en pocos días desaparece, pero en los casos restantes puede aparecer una depresión que necesite tratamiento. Un 2% de madres primerizas que no sufrieron ansiedad en los primeros días desarrolla una depresión tras las primeras semanas del nacimiento. Si una madre primeriza tuvo una depresión post-parto. Identifica la probabilidad a priori de tener ansiedad después del parto. ¿Cómo*

cambia esa probabilidad cuando sabemos que la mujer tuvo depresión post-parto? ¿Aumenta o disminuye?

Tabla 5.3. Organización de cálculos de probabilidad final

(1) Sucesos de interés	(2) Probabilidad inicial	(3) Verosimilitud de depresión	(4) Producto	(5) Probabilidad final
Ansiedad inicial	0,15	0,1	0,015	0,4688
No ansiedad	0,85	0,02	0,017	0,5313
Suma			0,032	1

Para resolver el ejercicio, se enseñará a los alumnos a identificar los datos y lo que se pide. Los datos son los siguientes:

- *P*(ansiedad en las primeras semanas)=0,15; es una probabilidad inicial.
- *P*(no sufrir ansiedad en las primeras semanas)=0,85; es una probabilidad inicial.
- *P*(depresión /si hubo ansiedad inicial)=0,10; es una verosimilitud.
- *P*(depresión /si no hubo ansiedad inicial)=0,02; es una verosimilitud.

Lo que pide el ejercicio es *P*(ansiedad inicial/ depresión) es una probabilidad final. Una forma sencilla de organizar los cálculos para pasar de la probabilidades iniciales *P(A), P(B), P(C)* a las probabilidades finales *P(A/D), P(B/D), P(C/D),* es utilizando una tabla similar a la 5.3**:**

- En la columna (1) ponemos los sucesos de interés, en este caso las tener o no ansiedad en los primeros días.
- En la columna (2) ponemos las probabilidades iniciales y en la (3) las verosimilitudes, que son los datos del problema.
- Calculamos ahora los numeradores de la fórmula de Bayes (producto (2)x(3) en la columna (4).
- Sumamos la columna (4) para obtener el denominador de la fórmula de Bayes.
- En la columna (5) obtenemos las probabilidades finales, dividiendo cada celda en la columna (4) por la suma anterior.

Vemos con los resultados de la tabla que casi la mitad de las depresiones post-parto no se previeron en las primeras semanas.

11. *Explora ahora cuál sería la sensibilidad y especificidad de una prueba médica, dependiendo de la incidencia de la enfermedad en la población. Puedes utilizar algunos recursos en Internet.*

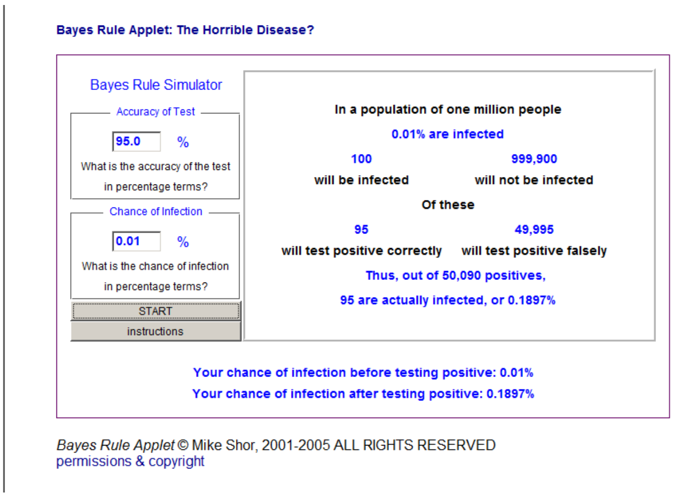
Se puede planificar actividades de ampliación a través de la exploración de applets disponibles en Internet como el Bayes rule simulator: (www.gametheory.net/Mike/applets/Bayes/Bayes.html). Este Applet (Figura 5.3) plantea la situación en que alguien es sometido a una prueba para detectar una enfermedad rara y resulta positivo, y pide reflexionar sobre si debería preocuparse esta persona. Hay que definir la precisión de la prueba y la probabilidad de infección.

Cuando presionamos el botón "start", el programa calcula la probabilidad de tener la enfermedad si la prueba da positivo. En la parte inferior, el applet incluye la probabilidad a priori y a posteriori de tener la enfermedad, para poder compararlas.

Este mismo autor ha diseñado otro Applet muy similar, aunque en otro contexto. En este caso, trata de una empresa que quiere recompensar a los buenos empleados y calcula la probabilidad de que la recompensa haya ido a parar a un mal empleado. Podemos encontrarlo en

http://www.gametheory.net/Mike/applets/Bayes/WhoReward.html

Figura 5.3. Exploración de probabilidades



5.4. Actividades de ampliación

Con alumnos universitarios, este tema se puede usar para introducir a los alumnos en el tema de la inferencia bayesiana, aplicada a la estimación de una proporción. Veamos un ejemplo, siguiendo a Díaz (2005).

12. *Hemos visto que para el diagnóstico de enfermedades, juega un papel muy importante la prevalencia de una enfermedad, ya que ésta determina las probabilidades iniciales. Pero ¿cómo se sabe cuántas personas sufren una enfermedad en una determinada zona? Por ejemplo ¿cómo se estima la proporción de personas que sufren alergia y las que por el contrario no la sufren?*

Para resolver el problema, se precisa estimar la proporción de personas que tienen una dolencia, lo que requiere discriminar entre los conceptos de población y muestra, aplicándolos al contexto del problema:

- *Población*: es el conjunto de todas las posibles observaciones que nos gustaría estudiar. En este caso el conjunto de todos los ciudadanos de una zona.
- *Muestra*: Es la parte de la población que podemos estudiar. El estudio completo de la población es, con frecuencia, costoso, lento o imposible. Es difícil que conozcamos la población, pero podríamos hacer un estudio con una muestra para intentar inferir algo acerca de la población.

La población queda caracterizada por un parámetro, que es *p* la "proporción p de casos que cumplen *A*", que desconocemos. Como hemos dicho, tomaremos una muestra para estimar dicha proporción teórica en la población, es decir, averiguar cuantos ciudadanos tienen una enfermedad.

13. *La proporción de personas con alergia puede variar de una ciudad a otra o incluso de un año a otro, dependiendo de muchos factores, como la cantidad de lluvia ese año, incremento de la temperatura, contaminación de la zona, etc. Por tanto, sería razonable considerar que el parámetro p es una variable aleatoria. Sería también razonable admitir que diferentes personas pueden asignar diferentes valores iniciales a p, en función de sus conocimientos.*

En este punto conviene discutir con los estudiantes algunas diferencias entre la inferencia clásica y la bayesiana: En la *inferencia clásica,* suponemos que *p* es un valor constante. Para estimar su valor, calculamos la proporción en la muestra y a partir de él calculamos un intervalo de confianza para los valores de *p*. En *inferencia bayesiana* admitimos las *probabilidades subjetivas*, es decir, la asignación de probabilidades puede ser diferente según los conocimientos de la persona que la asigna. Una distinción importante en inferencia bayesiana, es, por tanto:

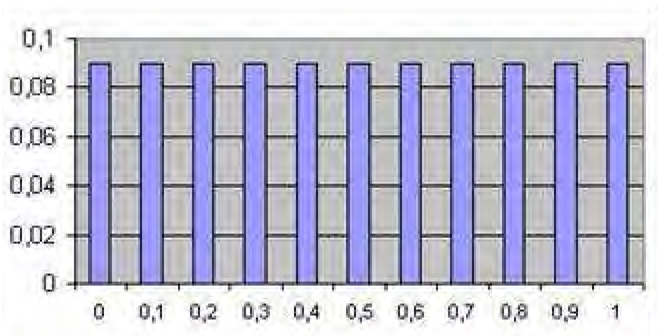
- *Distribución de probabilidad inicial*: distribución asumida por la persona antes de llevar a cabo el experimento (o recoger los datos).
- *Distribución de probabilidad final*: distribución de probabilidad que resulta cuando actualizamos la información usando los datos recogidos. Recoge todo el conocimiento de la persona, una vez analizados los datos y sirve para hacer inferencias.

A continuación se analiza con los alumnos la forma como se lleva a cabo el proceso de inferencia de un parámetro como es *p*, desde el punto de vista bayesiano.

14. *Supongamos que no sabemos nada del valor p. Podemos suponer que es igual de posible que la proporción de personas alérgicas en una zona es bien p=0, p=0,1, p=0,2 ... así hasta p=1. ¿Cuál sería la probabilidad de cada uno de estos sucesos?*

La distribución inicial plausible para reflejar esta información es la siguiente: asignar una probabilidad igual a 1/11 a cada uno de los valores de *p* =0, 0,1, 0,2, ..., 0,9, 1. Para que los alumnos lo vean más claramente se puede representar gráficamente de esta forma, quedando una distribución uniforme (Figura 5.4). Es lo que se llama *distribución inicial no informativa.*

Figura 5.4. Distribución inicial no informativa



En el eje horizontal se muestran los valores de proporción posibles y en el eje vertical se muestra la probabilidad. Como se ve, en una distribución inicial no informativa, todos los valores de proporción tienen la misma probabilidad de ocurrencia, es por tanto una distribución uniforme.

15. *Imagina que hacemos una encuesta a diez personas. Podemos preguntar a diez compañeros de esta misma aula. Imagina que dentro de esta clase hay tres alérgicos. Esta es la proporción dentro de esta muestra. Ahora, vamos a revisar nuestra opinión, sobre la probabilidad de que la proporción en la población sea igual a p=0,5, aplicando la regla de Bayes.*

Para llevar a cabo la revisión de las probabilidades iniciales, basta aplicar la regla de Bayes. Para el suceso p=0,5, quedaría:

P(p =0,5 / datos) = K x P(p = 0,5) x P(datos/ p = 0,5), donde:

- P(p=0,5) es nuestra probabilidad inicial, que es igual a 1/11
- P(datos / p = 0,5) es la verosimilitud de obtener nuestros datos para el valor obtenido de la proporción muestral p=0,3 (3 personas alérgicas de 10) si la proporción real de alérgicos en la población fuese igual a 0,5. Aplicando la fórmula binomial esta probabilidad es:

$$\binom{10}{3} 0,5^3 (1-0,5)^{10-3} = 0,1172$$

- *K* es la inversa del denominador de la fórmula de Bayes, es decir, de la suma de los productos de las verosimilitudes por las probabilidades a priori

Aplicando el teorema de Bayes, podríamos obtener la probabilidad a posteriori de que la proporción en la población sea igual a 0,5:

$$\text{P(p} = 0{,}5 \text{ / datos)} = \text{K} \times \text{P}\left(\text{p} = 0{,}5\right) \times \text{P(p} = 0{,}5 \text{ / datos)} = \text{K} \times \frac{1}{11} \times 0{,}1172$$

En general, la probabilidad a posteriori de que la proporción poblacional *p* sea exactamente igual a p_0 (sabiendo que en la clase hay tres alérgicos) es:

$$\text{P (p} = \text{p}_0 \text{ / datos)} = \text{K x } \frac{1}{11} x \binom{10}{3} p_0^{\,3} (1-p_0)^{10-3}$$

Es decir, la probabilidad final es igual a la inicial multiplicada por la verosimilitud y por K (una constante que es el denominador de la fórmula de Bayes).

16. *Vamos a calcular las nuevas probabilidades finales para el resto de los valores de la proporción poblacional p = 0, 0,1,... 1, organizando los datos con una tabla.*

Las columnas (1) y (2) de dicha tabla (5.4) son los posibles valores de la proporción poblacional y sus probabilidades iniciales, definidas por el investigador. La columna (3) son las verosimilitudes de los datos, para cada valor posible de $p = p_0$ y se calculan aplicando la fórmula:

$$P(datos / p = p_0) = \binom{e+f}{e} p_0^{\,e} (1 - p_0)^f$$

Siendo *p* el valor de la proporción, y *e* y *f* el número de éxitos y fracasos en los datos.

Finalmente, las probabilidades finales (columna 5) se calculan con la fórmula de Bayes:

$$P(p = p_0 / datos) = \frac{\mathrm{P(datos / p = p_0) \times P(p = p_0)}}{\sum \mathrm{P(datos / p) \times P(p)}}$$

Tabla 5.4. Transformación de distribución inicial en distribución final

(1) Posibles valores de p	(2) Probabilidad inicial	(3) Verosimilitud	(4) Producto	(5) Probabilidad final
0,00	0,09			
0,10	0,09			
0,20	0,09			
0,30	0,09			
0,40	0,09			
0,50	0,09			
0,60	0,09			
0,70	0,09			
0,80	0,09			
0,90	0,09			
1,00	0,09			
Suma				

Tabla 5.5. Transformación de distribución inicial en distribución final

(1) Posibles valores de p	(2) Probabilidad inicial	(3) Verosimilitud	(4) Producto	(5) Probabilidad final
0,00	0,09	0,0000	0,0000	0,0000
0,10	0,09	0,0000	0,0000	0,0000
0,20	0,09	0,0008	0,0001	0,0009
0,30	0,09	0,0090	0,0008	0,0099
0,40	0,09	0,0425	0,0039	0,0467
0,50	0,09	0,1172	0,0107	0,1288
0,60	0,09	0,2150	0,0195	0,2363
0,70	0,09	0,2668	0,0243	0,2932
0,80	0,09	0,2013	0,0183	0,2212
0,90	0,09	0,0574	0,0052	0,0631
1,00	0,09	0,0000	0,0000	0,0000
Suma			0,0827	

Llamando K al inverso del denominador de la fórmula de Bayes:

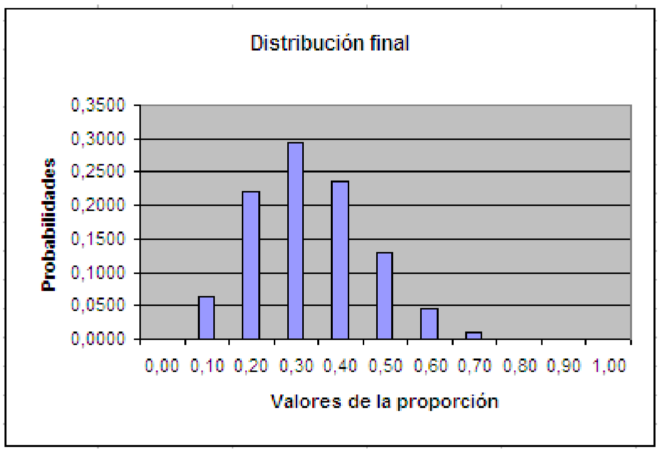
$$P(p = p_0 / datos) = k \times \mathrm{P(datos / p = p_0)} \times \mathrm{P(p = p_0)}$$

Es decir, multiplicamos la probabilidad inicial (columna 2) por la verosimilitud (columna 3) y por k (es como dividir por la suma de los productos, columna 4). La tabla quedaría de la forma 5.5.

17. *Vamos a representar gráficamente la distribución final y compárala con la que teníamos al principio.*

La gráfica de la distribución final se presenta en la figura 5.5. Esta nueva distribución representa nuestra información sobre el parámetro, después de recoger los datos.

Figura 5.5. Distribución final



18. *El objetivo de todos estos cálculos es realizar inferencias sobre los valores del parámetro, es decir, para predecir la proporción de personas que son alérgicas en una determinada zona. ¿Qué podemos decir al ver esta gráfica? ¿Cuál es el valor de p más probable? ¿Cuál es la probabilidad de que en la zona la proporción de alérgicos esté entre 0,2 y 0,5?*

Con estas preguntas se trabajará con los alumnos el concepto de mejor estimador, probabilidad de un intervalo, etc.

19. *La distribución de probabilidad final representa nuestra nueva creencia sobre la proporción. Pero, si ahora vamos a la clase de al lado y preguntamos a otras 10 personas y vemos ahora que en la otra clase hay 5 personas alérgicas, ¿Cómo cambia la distribución?*

Reflexionamos sobre el papel de actualizador de información que tiene el teorema de Bayes. Si hacemos un nuevo experimento y obtenemos en una nueva muestra de *e'* éxitos y *f'* fracasos, podemos tomar como nueva distribución inicial, las distribución final obtenida en el primer experimento, porque no sería ahora razonable suponer que todos los valores de la proporción son equiprobables. Aplicando de nuevo el teorema de Bayes obtenemos una nueva distribución final.

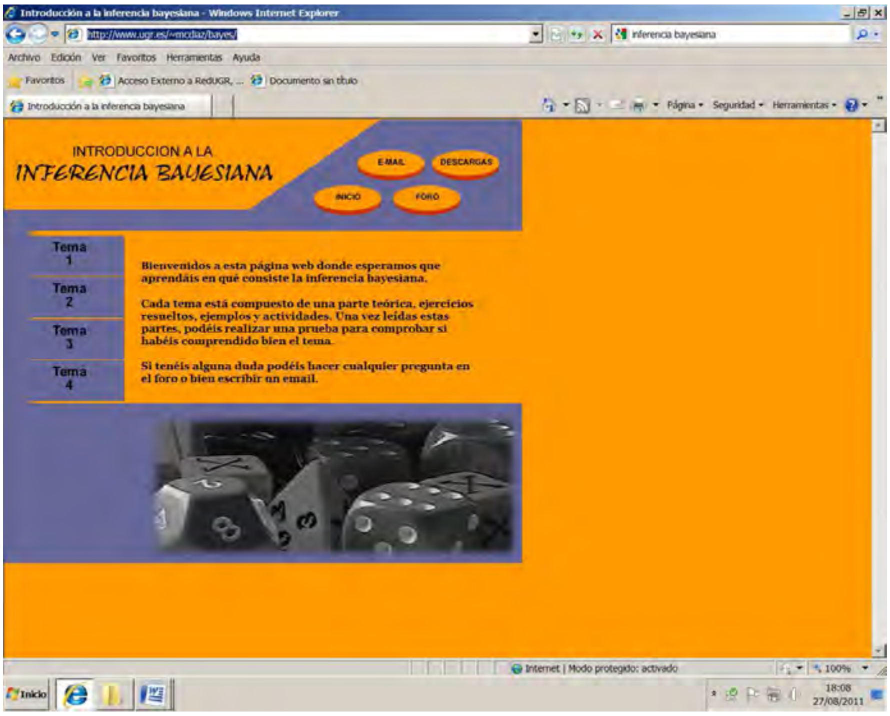
Es decir, al comenzar una serie de experimentos no tenemos ninguna información y usamos una distribución no informativa, asignando igual probabilidad a todos los valores. Después de obtener *e* resultados favorables a *A*, nuestra creencia cambia y la distribución final obtenida en el paso 1 es la que refleja mejor nuestra información. Luego la usaremos como distribución inicial en un segundo experimento.

En general, en inferencia Bayesiana podemos usar cualquier distribución inicial que refleje nuestra experiencia, ya que sería absurdo suponer que no sabemos nada sobre la proporción si tenemos datos anteriores. Es decir, aplicamos el principio de aprender de la experiencia y de asignar probabilidades inicial, teniendo en cuenta la información disponible.

20. Ampliación sobre inferencia bayesiana.

Las ideas anteriores se han adaptado de Díaz (2005), quien preparó un material disponible en Internet en http://www.ugr.es/~mcdiaz/bayes/ para introducir la inferencia bayesiana sin excesiva formalidad. Se compone de cuatro módulos: (a) Teorema de Bayes; (b) Inferencia para una proporción, caso discreto; (c) Inferencia para una proporción, caso continuo; y (d) Inferencia para la media. Cada módulo contiene objetivos, teoría, ejercicios resueltos, actividades y autoevaluación, así como programas Excel que facilitan los cálculos. La pantalla principal se presenta en la Figura 5.6

Figura 5.6. Material sobre inferencia bayesiana



5.5. Algunas dificultades y errores previsibles

5.5.1. Probabilidad condicional

La probabilidad condicional es fundamental en las aplicaciones de la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información. Es también un concepto teórico básico requerido en la construcción del espacio muestral producto. Por ello, su correcta comprensión y el razonamiento sobre la misma son requisitos en el estudio de la inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana, así como en el estudio de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales. En el terreno profesional e incluso en la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional.

Sin embargo, la Psicología del razonamiento, así como algunas investigaciones recientes en didáctica de la probabilidad muestran la existencia de intuiciones incorrectas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión y aplicación de este concepto (Díaz y de la Fuente, 2005; Díaz, Batanero y Contreras, 2010). Una de estas dificultades se relaciona con la confusión entre causalidad y condicionamiento.

Desde el punto de vista psicológico, la persona que evalúa una probabilidad condicional *P(A/B)* va a percibir dos relaciones muy diferentes entre *A* (suceso evaluado) y *B* (suceso condicionante) dependiendo del contexto.

- Si dentro del contexto se percibe que B (suceso condicionante) es una causa de A, la persona establecerá entre A y B una *relación causal*. En este caso el estudiante tendrá que realizar un razonamiento causal, estimando el efecto dado cierto conocimiento de las causas.
- Si dentro del contexto se percibe A como una causa de B, la persona establecerá entre A y B una *relación diagnóstica*. En este caso se realizaría un razonamiento diagnóstico, estimando la causa dado el conocimiento del efecto.

Aunque matemáticamente los dos enunciados son equivalentes, desde un punto de vista psicológico no son percibidos como idénticos por las personas. Un efecto muy estudiado es la creencia que las relaciones causales son más fuertes que las relaciones diagnósticas. Tversky y Kahneman (1982) encontraron que las personas encontraban más probable que “una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules” que “una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules”, aunque la casi la mitad de los sujetos de su estudio respondieron correctamente “ambos sucesos son igual de probables”. Tversky y Kahneman explican este hallazgo con la existencia de un sesgo causal cuando las personas se enfrentan con tareas relacionadas con la probabilidad condicional.

También hay problemas cuando el suceso condicionante ocurre después del condicionado. Gras y Totohasina (1995) identifican dos concepciones erróneas sobre la probabilidad condicional en estudiantes:

- En la *concepción cronológica* los estudiantes interpretan la probabilidad condicional *P(A/B)* como una relación temporal, donde el evento condicionante *B* siempre precede al suceso *A*.

- En la *concepción causal*, los estudiantes interpretan la probabilidad condicional *P(A/B)* como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante B es la causa y A la consecuencia.

Otra confusión frecuente, según Falk (1986a), es no discriminar adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional *P(A/B)* y *P(B/A) (falacia de la condicional transpuesta).* Este error se ha observado en problemas de contextos médicos, donde se confunde la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positivo el test de diagnóstico con la probabilidad de un resultado positivo en el test de diagnóstico, dado que se tiene la enfermedad. La prevalencia de este error puede tener consecuencias importantes; por ejemplo la confusión entre la probabilidad de que un niño afectado con síndrome de Down dé una amniocentesis prenatal positiva, que es alta y el hecho de que, siendo la prueba positiva el niño realmente tenga síndrome de Down, que es mucho menor.

5.5.2. Teorema de Bayes

La competencia en resolución de problemas bayesianos ha sido investigada, ampliamente por psicólogos (e.g., Tversky y Kahneman, 1982; Falk, 1986a). Estos problemas son difíciles y contraintuitivos y los alumnos en su mayor parte no tienen en cuenta las probabilidades a priori en el cálculo de la probabilidad inversa (falacia de las tasas bases).

Teorías recientes (ver resumen en Sedlemeier, 1999) sugieren que se puede facilitar la resolución de los problemas bayesianos y llegar a una enseñanza efectiva si los datos del problema se presentan en frecuencias absolutas, en lugar de en porcentajes o por medio de probabilidades. También indican la conveniencia de usar una representación adecuada, como el diagrama en árbol para enseñar a resolver estos problemas.

Totohasina (1992) analiza los procedimientos que los alumnos siguen para resolver los problemas relacionados con el teorema de bayes. El autor supone que los alumnos pueden encontrarse con dificultades en función del tipo de representación elegida para resolver el problema, que les es dado en formato verbal.

Al pasar, por ejemplo, a una tabla de doble entrada, se dificulta la percepción de la naturaleza secuencial de algunos problemas, porque lo que queda más visible es la intersección de los dos sucesos y puede llevar a los alumnos a confundir la probabilidad condicional y la conjunta. Otra dificultad es la necesidad de invertir condición y condicionado en los problemas tipo Bayes, ya que los alumnos con frecuencia confunden el papel de estos dos sucesos en una probabilidad condicional y por tanto confunden una probabilidad condicional con su inversa. Totohasina sugiere que este obstáculo de "reversibilidad" también aparece en el aprendizaje de otras nociones matemáticas, por ejemplo al aprender el concepto de primitiva de una función, partiendo del de derivada.

Indica que el diagrama en árbol es el recurso más efectivo para resolver problemas de probabilidad condicional, pero puede reforzar las concepciones causal o cronológica en los alumnos que las manifiestan.

Díaz y de la Fuente (2007) realizaron un estudio sobre resolución de problemas bayesianos por parte de estudiantes de Psicología, antes y después de la enseñanza de la probabilidad condicional. La gran proporción de respuestas en blanco en los ítems antes de la enseñanza sugiere que estos estudiantes habían olvidado el teorema de Bayes, estudiado en secundaria o que no reconocieron que tenían que aplicar este teorema yel formato frecuencial no ayudó a los alumnos a resolver el problema. Para analizar los resultados después de la enseñanza las autoras distinguieron los siguientes pasos en la solución del problema

- *Identificar los datos del problema*: El estudiante debe discriminar entre probabilidad simple y compuesta, para poder realizar correctamente las sucesivas particiones del espacio muestral, e identificar que datos se refieren a cada uno de los conceptos del enunciado del problema.
- *Construir una representación adecuada*: El segundo paso es construir un diagrama de árbol adecuado para representar el experimento secuencial y la partición secuencial de la población. Esta representación debe servir al estudiante para reconocer el conjunto de sucesos posibles.
- *Identificar la probabilidad condicional*: Para continuar, los estudiantes deben identificar qué probabilidad se pide en el problema y que ésta es una probabilidad condicional inversa. Las autoras encuentran errores del tipo de que los estudiantes confundan la fórmula la probabilidad condicional con su inversa, con una probabilidad simple o con una probabilidad conjunta.
- *Calcular el denominador de la fórmula de Bayes*: Después de identificar el problema como el cálculo de una probabilidad condicional y recordar la fórmula de Bayes, el estudiante debe calcular el numerador y denominador, este último debe ser calculado con la regla de la probabilidad total, esto es, multiplicando las probabilidades del cada rama del árbol y sumando cada una de esas probabilidades conjuntas. El alumno debe entender que se trata de

sucesos dependientes, para aplicar correctamente la regla del producto en este caso.

- *Calcular la probabilidad inversa (teorema de Bayes)*: Finalmente, el estudiante debe sintetizar todos los pasos anteriores y calcular el numerador (probabilidad conjunta) y denominador (probabilidad total) para obtener la probabilidad inversa, es decir, aplicar el teorema de Bayes.

Para complementar el estudio, se realizó un análisis de los errores. La mayoría de los obstáculos fueron la identificación incorrecta de los datos, la realización incorrecta del diagrama de árbol o de una tabla de doble entrada, la partición incorrecta del espacio muestral, la confusión entre diversas probabilidades (simple, conjunta condicional) y entre una probabilidad condicional y su inversa y errores en la fórmula de Bayes, invirtiendo denominador y numerador u omitiendo algún término. Finalmente algunos alumnos operan conjuntamente probabilidades y valores esperados o confunden estos dos términos, obteniendo como consecuencia, valores mayores que la unidad para la probabilidad de un suceso, sin ser conscientes del error que esto supone. En Díaz y de la Fuente (2006) experimentan una enseñanza basada en la organización de los datos en una tabla Bayes con ayuda de Excel, tal como se ha desarrollado en este proyecto, obteniendo muy buenos resultados en el aprendizaje.

5.6. Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar, explícita o implícitamente, los siguientes contenidos:

1. *Aplicaciones de la Estadística*
   - Análisis de probabilidades;
   - Revisión de probabilidades con información nueva;
   - Diagnóstico médico;
   - Sensibilidad y especificidad de una prueba;
   - Inferencia sobre la proporción; caso discreto.

2. *Conceptos y propiedades*
   - Experimento aleatorio y suceso. Casos favorables y posibles;
   - Asignación de probabilidades mediante regla de Laplace;

- Asignación frecuencial de probabilidades;
- Asignación subjetiva de probabilidades. Probabilidad inicial de un suceso;
- Probabilidad simple, condicional y compuesta;
- Probabilidad final de un suceso, a la luz de un nuevo dato;
- Verosimilitud;
- Teorema de Bayes. Revisión de probabilidades iniciales. Aplicación secuencial del teorema;
- Parámetro como variable aleatoria;
- Distribución de la proporción en caso discreto;
- Distribución inicial y final;
- Distribuciones iniciales informativas y no informativas;
- Revisión de la distribución inicial de un parámetro;
- Estimación de un parámetro; mejor estimador.

3. *Notaciones y representaciones*
   - Palabras como probabilidad, verosimilitud;
   - Símbolos como *P(A), P(A/B);*
   - Tablas de contingencia y tabla de Bayes;
   - Applets;
   - Diagramas en árbol;
   - Representacion gráfica de la distribución inicial y final.

4. *Técnicas y procedimientos*
   - Búsqueda de datos médicos;
   - Elaboración de tablas de doble entrada;
   - Interpretación de tablas; elaboración de conclusiones a partir del análisis de tablas;
   - Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos obtenidos;
   - Cálculo de probabilidades simples, compuestas y condicionales;

- Cálculo de especificidad y sensibilidad en una prueba;
- Uso de la tabla de Bayes;
- Asignación de distribuciones iniciales informativas y no informativas para la proporción, caso discreto;
- Transformación de la distribución inicial en final;
- Estimación de la proporción;
- Cálculo de probabilidades asociadas a la proporción; caso discreto.

5. *Actitudes*
   - Reflexión sobre la fiabilidad de las pruebas médicas, los falsos positivos y falsos negativos;
   - Actitud crítica y responsable en la interpretación de datos de diagnóstico;
   - Reflexión sobre las intuiciones engañosas en el caso de la probabilidad condicional;
   - Valoración de la utilidad de la probabilidad para la toma de decisiones;
   - Reflexión sobre la posibilidad de actualización de las probabilidades cuando disponemos de nuevos datos.

6. Las matemáticas de la catadora de té

Carmen Batanero

6.1. Objetivos

Este proyecto está basado en un artículo de Sir Ronald Fisher reproducido en Sigma: El mundo de las matemáticas (Fisher, 1956) donde describe intuitivamente los pasos necesarios para establecer un contraste de hipótesis.

El propósito es plantear a los estudiantes una situación que lleve a formular una hipótesis y estudiar la forma en que se podría organizar un experimento, recoger los datos y analizarlos, para llegar a una decisión acerca de si aceptamos o no la hipótesis como provisionalmente cierta. Se analiza el razonamiento en un contraste (en la metodología de los tests de significación de Fisher), así como la posibilidad de error. Se complementa el proyecto con algunas ideas sobre muestreo y distribución muestral.

Mediante el proyecto se trata de introducir algunos conceptos básicos de inferencia y mostrar a los alumnos la utilidad de la inferencia estadística para poner a prueba hipótesis experimentales. Se desea visualizar las diferentes distribuciones que aparecen en un proceso de inferencia: distribución de datos, distribución de probabilidad, distribución muestral del estadístico.

Asimismo se pretende analizar el razonamiento de las pruebas de significación estadística introducidas por Fisher y comparar con los razonamientos deductivos que empleamos en otras ramas de las matemáticas.

También se quiere concienciar a los alumnos sobre posibles interpretaciones erróneas de los resultados de las pruebas estadísticas de hipótesis, ya que, a pesar de su utilidad en la investigación y la toma de decisiones, el contraste de hipótesis es uno de los temas estadísticos peor comprendido y aplicado (Batanero, 2000b; de la Fuente y Diaz, 2004).

Alumnos

El proyecto está pensado para alumnos de Bachillerato, en la modalidad de Ciencias Sociales, donde se incluyen los contenidos tratados en el proyecto. Podría ser también útil en la formación universitaria para alumnos de ciencias sociales o humanas.

En general, puede ser útil para cualquier curso universitario, como actividad introductoria al estudio formal del tema y para que los alumnos alcancen una mejor comprensión de la naturaleza del razonamiento que subyace en el contraste de hipótesis. Para alumnos de nivel más avanzado se puede completar con un estudio más formalizado de los contrastes de hipótesis.

6.2. Los datos

Se utilizan dos tipos de datos:

- Datos hipotéticos sobre posibles resultados de un experimento;
- Datos obtenidos mediante simulación de experimentos aleatorios, con la finalidad de obtener en forma empírica las distribución en el muestreo de una proporción; Las simulaciones se realizarán con material manipulativo, tablas de números aleatorios y calculadoras u ordenadores.

6.3. Preguntas, actividades y gestión de la clase

Se comienza la clase relatando al alumno el episodio de la catadora de te descrito por Fischer o bien se da a los alumnos el día anterior al comienzo de la actividad la fotocopia del artículo reproducido en la enciclopedia de las matemáticas (Fisher, 1956). Se plantea la siguiente pregunta:

1. *Una señora afirma que al probar una taza de te con leche puede distinguir qué fue lo primero que se echó en la taza: el té o la leche. ¿Cómo podríamos hacer un experimento para comprobar si la señora tiene razón?*

Se recogen sugerencias de la clase, discutiendo con los alumnos si el hecho de acertar una sola vez significaría que la señora tiene razón. Se buscan ejemplos de situaciones en que podemos adivinar un resultado, simplemente por azar o de ejemplos en que se produzcan coincidencias por azar, por ejemplo, la paradoja del cumpleaños. Se continúa con la siguiente discusión:

2. *Se organiza el siguiente experimento: Preparamos ocho tazas de te con leche. Antes de preparar cada una, y sin que lo vea la señora lanzamos una moneda: si sale cara echamos primero el té y en caso contrario la leche. Supongamos que la señora acierta el orden en las tres primeras tazas. ¿Piensas que tiene razón, cuando dice que puede distinguir lo primero que se puso en la taza? ¿O podría haber acertado, justo por azar?*

Pedimos a los alumnos calcular la probabilidad de que la señora acierte una, dos y tres tazas por azar. Puesto que sólo hay dos posibilidades en cada taza, sólo puede producirse un acierto o un fallo. Las diferentes posibilidades que pueden presentarse con una, dos y tres tazas se presentan en la Tabla 6.1. Se animará a los estudiantes a que ellos mismos construyan el espacio muestral del experimento.

En el caso que la señora mienta, podemos considerar que tiene las mismas posibilidades de acertar o fallar en cada taza, esto es la probabilidades de acierto y fallo son igual a 1/2. Para dos tazas, al haber cuatro sucesos posibles en el espacio muestral producto {AA, FF, AF, FA} la probabilidad de acertar en los dos casos es ¼. Del mismo modo se razona sobre los diferentes sucesos posibles en el espacio producto resultante de tres ensayos y se comprueba que la probabilidad de acertar en tres tazas 1/8.

Tabla 6.1. Diferentes posibilidades de acierto en una, dos y tres tazas si la señora miente

A	F						
AA	AF	FA	FF				
AAA	AAF	AFA	AFF	FAA	FAF	FFA	FFF

Puesto que un suceso que ocurre una vez cada ocho veces no es demasiado raro, el caso de que la señora acertara el orden de colocación del te y la leche en las tres primeras tazas, en el experimento descrito, pues podría darse por puro azar. Se pueden encontrar ejemplos semejantes en la vida real, por ejemplo, matrimonios con tres hijas o tres hijos.

Sin embargo, a medida que aumentamos el número de tazas, la probabilidad de acertarlas todas o de acertar la mayoría es cada vez más pequeña, *en el caso de que la señora mienta.* Planteemos la siguiente actividad para calcular la probabilidad de acertar 1, 2,...8 tazas en caso de que la señora mienta.

3. *Supongamos que la señora miente y trata de adivinar al azar el orden en que se puso el te y la leche en 8 tazas de te con leche. Podemos sustituir el experimento original por el de lanzar 8 monedas al aire (cada moneda representa una taza). Si sale cara, suponemos que hemos acertado el orden en que se puso el te y la leche en la taza (cuya probabilidad es 1/2) y si sale cruz hemos fallado. Supongamos que hago la prueba y obtengo los siguientes resultados: AAAFAFFA*

   Esto significa que la señora ha acertado cinco veces de las ocho. Anoto un punto el número de aciertos igual a cinco. ¿Quiere decir esto que la señora miente? ¿Y si hubiera acertado todas, significa que dice la verdad? Realiza el experimento 10 veces y representa en el siguiente diagrama de puntos (Figura 6.1) el número de aciertos obtenidos.

Figura 6.1. Número de aciertos por azar en 8 tazas de te (datos del alumno)

0 1 2 3 4 5 6 7 0

El profesor deja un cierto tiempo a los alumnos para que realicen los experimentos y recojan los datos. A continuación pregunta a los chicos los datos que han obtenido y si les parece fácil o difícil acertar 8 tazas por azar. Finalmente se resumen los datos de toda la clase con un gráfico de puntos (Figura 6.2).

En una clase de 25-30 alumnos se obtendrá una distribución acampanada, con la máxima frecuencia en los valores centrales (3-5 tazas) y con una frecuencia muy baja en los extremos (1-2 o 7-8). A partir de la distribución obtenida se pueden plantear las siguientes preguntas:

Figura 6.2. Número de aciertos por azar en 8 tazas de te (datos de la clase)

0 1 2 3 4 5 6 7 0

4. *¿Cuál es el número más probable de aciertos por azar en 8 tazas? ¿Cuál es la probabilidad de acertar 5 tazas o más? ¿Y de acertar 7 o más? ¿A partir de qué número de tazas admitirías que la señora tiene razón?*

Se estudia la distribución empírica obtenida, calculando la probabilidad de cada valor y decidiendo cuáles valores son probables o improbables, para dar una respuesta a la pregunta planteada. Se puede aumentar el número de experimentos si cada chico usa 8 monedas y las lanza simultáneamente sobre la mesa, representando las caras los aciertos y las cruces los fallos. Si cada chico repite 10 veces el lanzamiento de las 9 monedas podría obtenerse 300 experimentos rápidamente en una clase de 30 alumnos.

A continuación se inicia una discusión sobre todo el razonamiento y actividad en la clase, en términos parecidos a los siguientes:

En la actividad planteada hemos tomados datos experimentales para poner a prueba la hipótesis de que una señora adivina el orden en que se pone la leche y el té en una taza de te por puro azar. Hemos seguido el procedimiento de contraste de hipótesis:

- *Hemos considerado nuestra hipótesis H_0: "la señora hace sus apuestas sobre el orden del te y la leche al azar". Puesto que se trata de un fenómeno aleatorio no podemos probar deductivamente nuestra hipótesis en el mismo modo que hacemos una demostración, por ejemplo, en Geometría.*

- *Hemos recogido unos datos para poner a prueba nuestra hipótesis H_0 (que llamaremos hipótesis nula): la serie de resultados ha sido (por ejemplo) AAAFAFFA. Esta serie es una muestra de todos los posibles resultados aleatorios que podría obtener si la señora hace sus apuestas al azar en una serie de ocho tazas de te.*

- *Puedo tomar muestras más o menos grandes (series más o menos largas de ensayos). Cuanto mayor sea la muestra más seguro estaré de la prueba de mi hipótesis. Por ejemplo, estoy más seguro si hago la prueba con 8 tazas que con 3 y estaría más seguro si hiciera la* *prueba con 20 o 30 tazas.*

- *Hemos supuesto que nuestra hipótesis H_0 (que llamaremos hipótesis nula) es cierta. Es decir, suponemos que la señora miente y hace sus apuestas al azar. Por tanto tiene las mismas posibilidades de acertar o no cada una de las tazas. A continuación calculamos la probabilidad que tienen los datos que he obtenido (cinco aciertos en ocho tazas) si la hipótesis nula fuese cierta. También hemos calculado la probabilidad de 7 u 8 aciertos en 8 tazas*
- *He visto que mis datos serían muy poco probables si la hipótesis nula fuese cierta. De hecho teóricamente podemos probar que la probabilidad de obtener 7 u 8 aciertos en 8 ensayos, si fuese cierta la hipótesis nula, sería igual a 0.035. Como consecuencia, debo tomar la siguiente decisión :*
  - *O admito que mi hipótesis H_0 es correcta (la señora miente y dice los resultados al azar) y que, por buena suerte ha obtenido un suceso muy poco probable.*
  - *Mi hipótesis era falsa; la señora efectivamente es capaz de distinguir en qué orden se pone el te y la leche en la taza. Como consecuencia la rechazo, porque los datos experimentales contradicen la hipótesis nula.*

5. *Simula el experimento y estudia la distribución de aciertos, en caso de que la hipótesis nula fuese cierta.*

Podemos realizar nuevos estudios de la distribución del número de aciertos en *n* tazas variando *n*, usando los programas de simulación. Por ejemplo, en Statgraphics el programa Distribuciones de probabilidad permite simular y obtener valores de las tablas de una serie de distribuciones, incluyendo la binomial y cambiar los parámetros de las mismas (Figura 6.3.)

Cambiando los parámetros por defecto, podemos simular y grabar en una variable de un fichero de datos una muestra aleatoria de valores de la distribución binomial *B(8, 0.5)* y representar gráficamente sus resultados en un diagrama de barras mediante la opción DESCRIBE, como hemos hecho nosotros y cuyos resultados se presentan en la Figura 6.6.

Figura 6.3. Opciones de simulación y tablas de distribuciones en Statgraphics

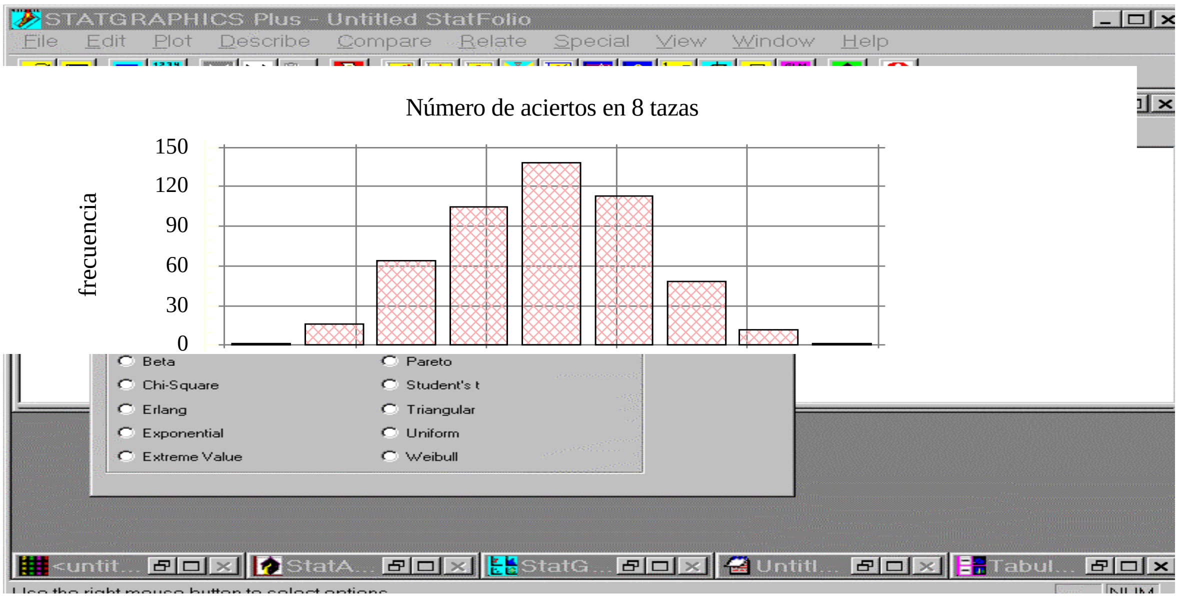
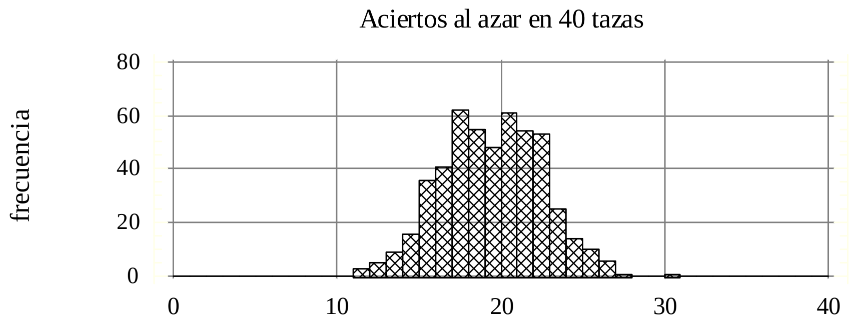


Figura 6.4. Resultados de 500 simulaciones de aciertos al azar en 8 tazas de te

Los alumnos pueden experimentar con las opciones del programa cambiando por ejemplo, el número de tazas (ensayos en la distribución binomial) y conservando la probabilidad de acierto igual a a1/2. Como se muestra en la figura 6.5. el tamaño de la muestra reduce la dispersión relativa de los resultados. Mientras que acertar 2 de las 8 tazas (la cuarta parte de resultados) era relativamente fácil acertar por azar la misma proporción con 40 tazas es prácticamente imposible.

Figura 6.5. Resultados de 500 simulaciones de aciertos al azar en 40 tazas de te



Podemos discutir con los alumnos la influencia de la hipótesis sobre la forma de la distribución obtenida en el muestreo. Si suponemos que la señora tiene una mayor probabilidad de acertar que de fallar (por ejemplo si la probabilidad de acierto fuese 0.8) y repetimos la simulación, observamos como ahora los valores centrales se aproximan al valor esperado.

Aunque las muestras que tomamos de una población de valores son aleatorias, y, por tanto sus resultados varían de una a otra muestra, en un conjunto muy grande de muestras la proporción muestral se distribuye alrededor del valor verdadero de la proporción en la población. Por otro lado, a mayor tamaño de muestra es menor la dispersión de los diferentes valores de las proporciones muestrales. Estas dos propiedades son las que nos permiten extraer conclusiones sobre toda una población a partir de los datos de la muestra.

Figura 6.6. Resultados de 500 simulaciones de aciertos en 8 tazas de te cuando la probabilidad de acierto es 0.8

Finalmente se hace un resumen de lo analizado en la clase:

6. *En las actividades anteriores hemos descrito el procedimiento que, generalmente, se sigue en estadística para poner a prueba una hipótesis. También hemos visto que nunca tenemos total seguridad en nuestra decisión. Existe una probabilidad 0.0035 de obtener siete u ocho aciertos al azar en una serie de 8 tazas de te, aunque no sepamos distinguir si se puso primero el te o la leche, es decir si admitimos como cierta la hipótesis nula. Esta probabilidad la asumo como riesgo sobre mi decisión al decidir que la hipótesis es falsa.*

   Hemos decidido rechazar la hipótesis. Volvamos a las tres primeras tazas. Hagamos la prueba de la hipótesis sólo con estas tres tazas acertadas. La probabilidad de obtener tres aciertos seguidos simplemente por azar es 1/8= 0.125. Esto quiere decir que no sería demasiado raro nuestro resultado, pues ocurre 1 de cada ocho veces. Como consecuencia vemos que con una muestra demasiado pequeña es difícil llegar a ninguna conclusión.

7. *Distribución binomial de probabilidades. La variable aleatoria "número de aciertos en 8 tazas de té" utilizada en el proyecto es un*

ejemplo de la distribución binomial. Busca otros ejemplos de esta distribución y analiza sus propiedades.

Se puede en este punto presentar o repasar la distribución binomial. Consideremos un experimento aleatorio cualquiera, y en relación a él, estudiemos un suceso *A*, de probabilidad *p* y su contrario $\bar{A}$ de probabilidad *q=1-p.* Diremos que hemos tenido un éxito, si al realizar el experimento obtenemos el suceso *A*, y que hemos obtenido un fracaso en caso contrario.

Si, en lugar de realizar únicamente una vez el experimento, efectuamos una serie de repeticiones independientes del mismo, el número total de éxitos obtenido en las *n* realizaciones constituye una variable aleatoria Γ, que puede tomar los valores enteros comprendidos entre 0 y *n*. Calcularemos la distribución y características de dicha variable aleatoria con un ejemplo.

Los tubos electrónicos producidos en una fábrica, pueden ser clasificados en correctos (suceso *A*) y defectuosos (suceso $\bar{A}$). Si estos tubos se venden en cajas de 3 elementos, el número de tubos defectuosos en cada caja puede ser 0, 1, 2 o 3. Si los tubos han sido colocados al azar en las cajas, esta variable aleatoria sigue la distribución binomial.

Supongamos que la proporción total de defectos es el 2 %. El espacio muestral correspondiente al experimento que consiste en probar los tubos de una caja consecutivamente, para verificar su funcionamiento es:

$$E=\{AAA\ \bar{A}AA\ A\bar{A}A\ AA\bar{A}\ \bar{A}\bar{A}A\ \bar{A}A\bar{A}\ A\bar{A}\bar{A}\ \bar{A}\bar{A}\bar{A}\}$$

Teniendo en cuenta la independencia de los ensayos, y aplicando simplemente la regla del producto de probabilidades podemos calcular la distribución de la variable aleatoria, que viene dada en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2. Distribución del número de tubos defectuosos por caja

	$\Gamma=x$	$P(\Gamma=x)$
AAA	0	$0{,}98^3$
AA, AĀA, AAĀ	1	$3*0{,}98^2*0{,}02$
ĀĀA, ĀAĀ, AĀĀ	2	$3*0{,}98*0{,}02^2$
ĀĀĀ	3	$0{,}02^3$

Supongamos ahora que en una repetición sucesiva de *n* ensayos independientes, hemos obtenido la sucesión $AAAAA\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}$, que contiene *r* veces el suceso *A* y *n-r* veces el suceso $\bar{A}$. La probabilidad de ocurrencia de esta sucesión es $p^r q^{n-r}$. Ahora bien, todos los casos en que la variable toma el valor *r* vienen dados por las permutaciones de la anterior sucesión. Por tanto, al realizar *n* veces un experimento, la probabilidad de obtener *r* veces el suceso *A* viene dada por:

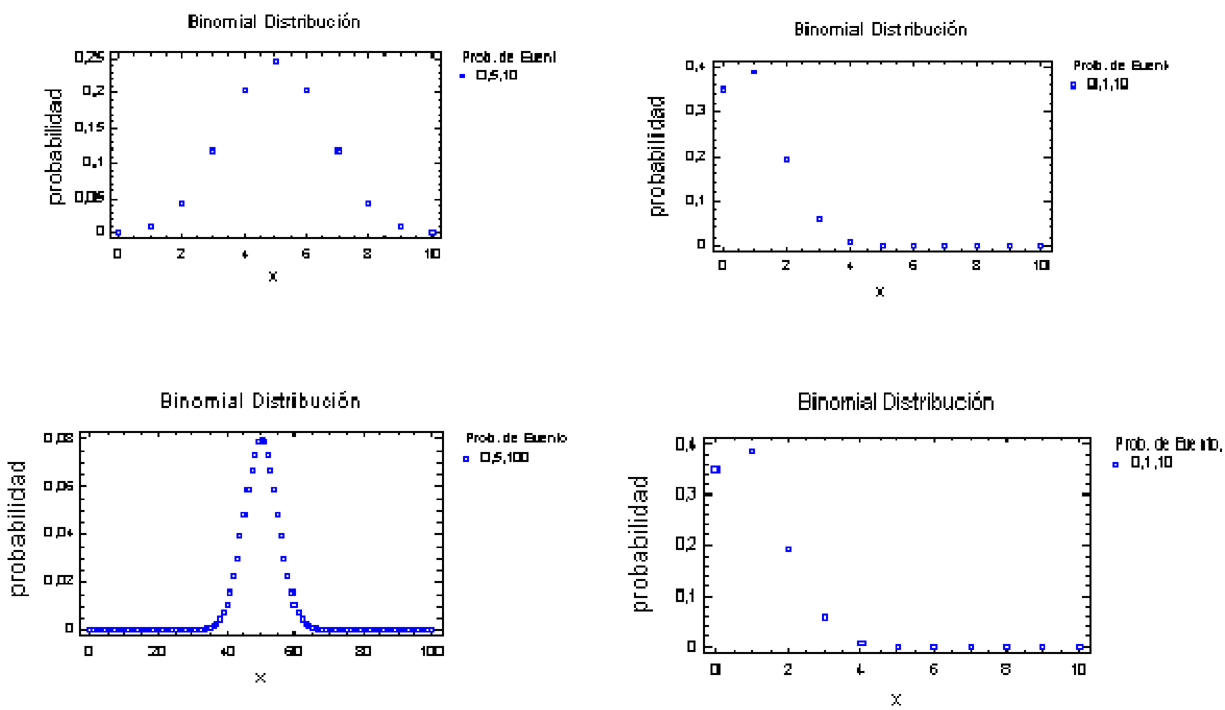
$$P(\Gamma = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

Esta es la distribución de probabilidades binomial, cuyo nombre proviene del hecho de que las probabilidades dadas en la expresión anterior son los términos del desarrollo del binomio $(p+q)^n$. De esta expresión se deduce también que la distribución queda perfectamente determinada cuando se conocen los valores de *p* y *n*, que serán llamados parámetros de la distribución. Puede demostrarse que la media y varianza de dicha variable aleatoria se calculan mediante:

$$\mu = np$$

$$Var\,(\Gamma) = npq$$

Figura 6.7. Distribución binomial

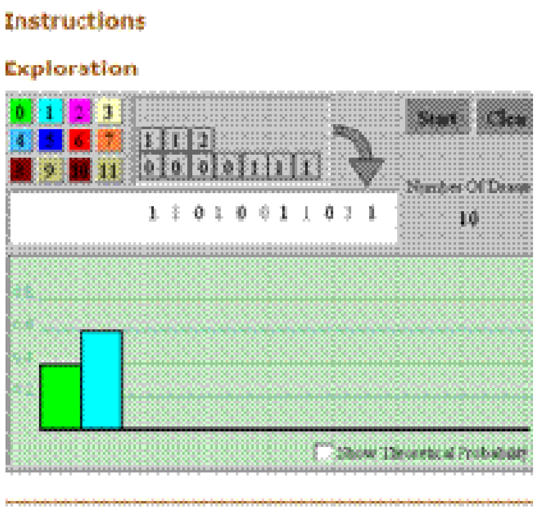


En la figura 6.7. se muestra la distribución de probabilidades de la distribución binomial variando *p* y *n*. Obsérvese como cambia la forma de la distribución con el valor de los parámetros Para *p=05* o valores próximos se obtiene una distribución simétrica, que cambia a asimetría positiva o negativa, según *p* se aproxima a 0 o 1, respectivamente. Asimismo, para un mismo valor de *p*, la media y varianza de la distribución crecen con el valor de *n*.

6.4. Actividades de ampliación

8. Supongamos que se obtuvieron los siguientes resultados en las pasadas elecciones: El 40% del total de los votantes, votaron al PP, el 50% votó al PSOE y el 10% a Izquierda Unida. Si en esta ciudad tomamos una muestra aleatoria de 100 votantes y les preguntamos a quien votaron (imaginamos que las personas a las que preguntamos son sinceras): ¿Podemos decir que necesariamente de estos 100 votantes, 40 votaron al PP, 50 al PSOE y 10 a IU?

Figura 6.8. Simulador del NCTM



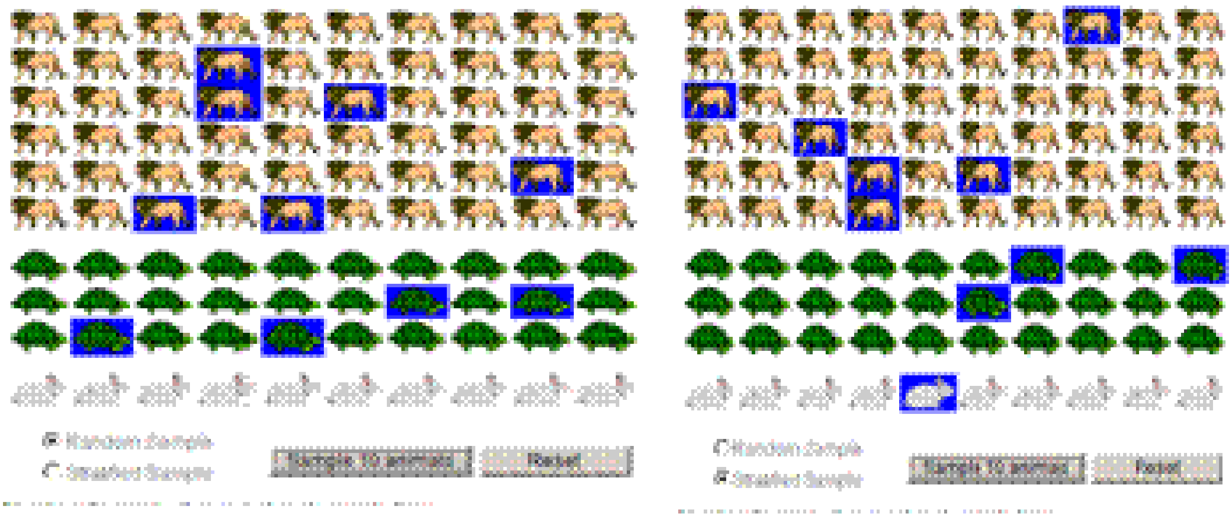
Se pueden realizar experimentos con tres sucesos de probabilidad dada, por ejemplo, usando el simulador incluido en Illuminations del National Council of Teachers of Mathematics (http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=67). Nosotros hemos realizado una simulación, en que se obtuvo 30% de casos favorables al primer suceso y 70% al segundo (ninguno al tercero). Los resultados variarán bastante muestra a muestra porque el tamaño que hemos tomado de la muestra es pequeño (Ver figura 6.7).

9. *Supongamos que tomamos varias muestras aleatorias de 100 votantes. ¿Encontraremos siempre la misma proporción de votantes a cada partido en cada muestra? ¿Podrías adivinar, aproximadamente el porcentaje aproximado de personas que en cada muestra habrían votado al PP? Supongamos ahora que tomamos una muestra de 100 votantes en el País Vasco. ¿Crees que variarían los resultados?*

En esta pregunta se trata de que los alumnos vean el interés que, en ciertos estudios tiene de tomar muestra estratificadas. En las encuestas de intención de voto es claro que conviene respetar en las muestras las proporciones de alguna variables importantes que intervienen en dicho voto, como género, edad, clase social o comunidad autónoma de origen.

En la página de David Lane (http://cnx.org/content/m11188/1.3/) encontramos un simulador interesante que permite ver la diferencia entre muestreo simple y estratificado. Tres tipos de animales se muestrean aleatoriamente. Se puede elegir el número de animales en la muestra y el tipo de muestreo y observar la variabilidad en la representatividad de la muestra, para mismo tamaño de muestra, entre muestreo simple y estratificado (ver Figura 6.8).

Figura 6.9. Muestreo simple y estratificado



Una vez explorado el simulador, se puede explicar a los estudiantes de forma elemental, la forma en que se organizan los muestreos electorales, por ejemplo, para ver la intención de voto y las ventajas de estratificar la población. Se puede también buscar informes elaborados por el INE u otros organismos sobre las características técnicas de algunas encuestas y discutir la ventaja del método adoptado, frente a un muestreo aleatorio simple.

10. *Quieres comprar un coche nuevo y quieres decidir entre la marca A y B. En una revista de automóviles encuentras una estudio estadístico sobre reparaciones efectuadas el último año, que muestra que la marca A tiene menos averías que la B. Sin embargo, te encuentras un amigo tuyo que te dice que compró el año pasado un coche B y no ha tenido más que problemas: primero se le estropeó la inyección de gasolina y gastó 2.000 euros, luego tuvo que cambiar el eje trasero y al final, ha vendido el coche porque se le fue la transmisión. ¿Que decisión tomarías, comprar un coche A o B?*

Es usual que, al tomar la decisión de comprar un coche u otro artículo de precio relativamente alto, nos dejemos influir, bien por opiniones subjetivas o por experiencias puntuales, que, sin embargo, tienen un alto impacto sobre nuestras creencias. En la heurística de la disponibilidad evaluamos la probabilidad de los sucesos por la facilidad con que los recordamos. Por otro lado, una revista especializada recoge datos de grandes muestras de usuario. En principio los resultados de estos estudios debieran ser más fiables que las opiniones personales.

11. *Discute en cuál de los siguientes estudios por muestreo habrá más variabilidad y en cuál habrá más representatividad: a)Tomar al azar muestras de 10 votantes para estimar la proporción de personas que votaron al PSOE ; b)Tomar al azar muestras de 1000 votantes para estimar la proporción de personas que votaron al PSOE; c)Tomar al azar muestras de 1000 votantes para estimar la proporción de personas que votaron a IU; d) Tomar al azar muestras de 10 votantes para estimar la proporción de personas que votaron a IU; e) Tomar muestras de 1000 jubilados para estimar la proporción de personas que votaron al PSOE; f)Tomar muestras de 10 personas al azar para estimar la proporción de mujeres.*

En estas situaciones estamos tratando con una distribución binomial $B(n, p)$. El valor esperado y la desviación típica de la misma varía en función de estos parámetros. En general disminuye la variabilidad al aumentar el tamaño de la muestra, pero también depende de los valores de p. Se puede simular estas situaciones con alguno de los simuladores utilizados anteriormente para ayudar a los alumnos a descubrir estas propiedades.

12. *La siguiente ficha técnica apareció publicada en un artículo de EL PAIS (26 de Abril de 1998) refiriéndose a una encuesta efectuada por Demoscopia:*

    FICHA TECNICA: Encuesta realizada por Demoscopia SA. Ámbito: nacional. Universo: población de 18 años y más. Tamaño de la muestra: 1200 entrevistas afijadas mediante muestreo estratificado por región y tamaño de habitat proporcional a la distribución de la población y con aplicación de cuotas de sexo y edad. Error de muestreo: asumiendo los criterios de muestreo simple, para un nivel de confianza del 95,5% (dos sigmas) y para la hipótesis más desfavorable (p=q=50) el error para el total de la muestra sería de 62.9%. Método de recogida de la información: entrevista telefónica asistida por ordenador.

    Elabora una lista de todos los términos que no comprendes de esta ficha técnica y busca su definición en un libro de estadística o preguntando a tu profesor. Elabora una lista de los posibles factores que pueden influir sobre la fiabilidad de esta encuesta.

A partir de esta, o cualquier otra ficha técnica de alguna encuesta publicada en los medios de comunicación se puede pedir a los estudiantes que hagan una lista de los términos o frases que no comprendan y, con ayuda del profesor, llegar a clarificarlos. Se puede enjuiciar el método seguido y analizar la posibilidad de extensión de los resultados, así como la mejora en la fiabilidad de algunos cambios en los tamaños de muestra, coeficiente de confianza u otros parámetros.

13. *Distribución muestral de la media. El coeficiente de inteligencia es una variable aleatoria que se distribuye con distribución normal media 100 y desviación típica 15, esto es N (100, 15). Utilizando un programa de simulación, simula la extracción de 30 muestras del coeficiente de inteligencia y calcula para cada una su media. Analiza la distribución de las medias obtenidas, ¿qué conclusiones obtienes?*

Como hemos indicado, el conocimiento de la distribución de los estadísticos en el muestreo es imprescindible para la aplicación de las distintas técnicas de inferencia. Como otros estadísticos, la media de la muestra de valores de una misma población varía de una muestra a otra. Para tratar de estudiar los valores posibles de las medias de todas las muestras de cuatro valores del coeficiente de inteligencia hemos simulado 30 muestras cada una de 4 valores, cuyos resultados se presentan en la tabla

6.3.

Obtenemos los siguientes valores: 108, 94.5, 97.5, 110, 95, 97.25, 97.5, 92.5, 104.5, 98.75, 96.25, 101.75, 110.25, 101.25, 104, 103.25, 101, 102.25, 101.25, 95.75, 106.75, 98.75, 100, 95.75, 86.5, 90, 96.75, 98.25, 104.5, 88.25. Observamos que no todas las medias son iguales, varían de muestra a muestra: La media muestral es una variable aleatoria.

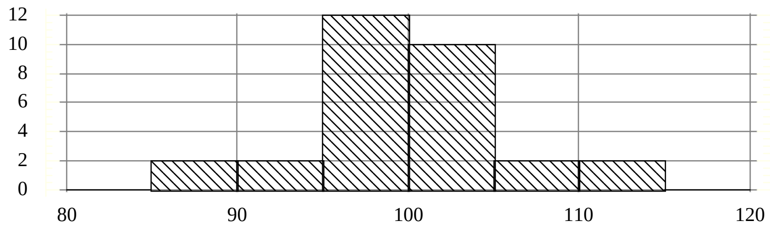
Tabla 6.3. Simulación de 30 muestras del coeficiente de inteligencia

M. 1	M. 2	M. 3	M. 4	M. 5	M. 6	M. 7	M. 8	M. 9	M. 10
118	88	128	105	109	90	97	113	114	91
116	115	81	102	89	103	64	86	83	84
78	89	82	113	106	94	109	70	115	119
120	86	99	120	76	102	120	101	106	101
M. 11	M. 12	M. 13	M. 14	M. 15	M. 16	M. 17	M. 18	M. 19	M. 20
91	97	103	113	104	105	79	102	93	83
102	94	107	95	118	79	112	93	112	81
104	100	115	85	92	109	120	106	92	116
88	116	116	112	102	120	93	108	108	103
M. 21	M. 22	M. 23	M. 24	M. 25	M. 26	M. 27	M. 28	M. 29	M. 30
112	101	105	66	70	116	90	101	109	66
106	101	106	96	74	74	78	94	77	81
100	95	77	99	115	82	115	100	110	92
109	98	112	122	87	88	104	98	122	114

14. *¿Cuántos valores del estadístico (media de la muestra) del ejemplo anterior están por encima y por debajo del valor del parámetro (media de la población)? ¿Cuál es el valor máximo y mínimo de todas las medias de las muestras obtenidas? ¿Cuáles son los valores más frecuentes?*

Hemos grabado los valores de todas estas medias en una nueva columna y hemos representado gráficamente su distribución (Figura 6.10). En el histograma producido observamos que la mayoría de los valores (moda) se acercan a la media de la población y los valores lejanos a ella son poco frecuentes. Además, la distribución es aproximadamente simétrica y nos recuerda aproximadamente a una distribución normal. Ello se debe a que la población de partida era normal.

Figura 6.10. Distribución de la media muestral en 30 muestras de tamaño 4



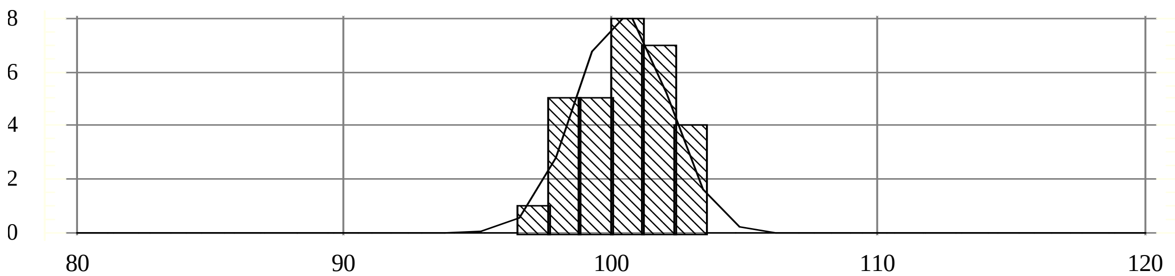
Dos características importantes de las muestras son su representatividad y variabilidad. Controlamos la representatividad procurando que no haya sesgos en la selección y eligiendo la muestra aleatoriamente, además de tomar un número suficiente de elementos en la muestra. Podemos controlar la variabilidad aumentando el tamaño de la muestra.

Veremos esto si tomamos ahora muestras aleatorias de 100 valores del coeficiente de inteligencia. Nosotros hemos usado el programa Statgraphics para simular 30 muestras, cada una con 100 valores del coeficiente de inteligencia y hemos calculado las medias de cada una de las 30 muestras. Estos son los valores obtenidos:

98.5, 98, 101.72, 98.29, 100.51, 99.75, 102.01, 100.05, 102.28, 98.53, 102.75, 99.52, 99.06, 100.75, 101.85, 101.28, 102, 98.57, 100.25, 103.12, 96.77, 98.78, 102.75, 101.01, 101.75, 101.23, 100.25, 101.84, 97.80, 100.65

En la figura 6.11 hemos representado estas medias. Además hemos ajustado una curva normal; como vemos se ajusta muy bien al histograma. Observamos también que la variabilidad es mucho menor, apenas aparecen los valores mayores que 105 o menores que 95 que aparecían con una cierta frecuencia en las muestras de tamaño 4.

Figura 6.11. Distribución de la media muestral en 30 muestras de tamaño 100



En el ejemplo hemos visto que cuando la distribución de una variable es normal, y tomamos una gran cantidad de nuestras de valores de dicha variable, las medias de estas muestras también parecen que pueden ser descritas apropiadamente por una distribución normal. Hemos visto también que, para estimar el valor de la media de una población, utilizamos la media muestral. Se verifica que $E[\bar{x}] = \mu$ y que $Var[\bar{x}] = \sigma^2/n$.

Si la población de partida no es normal, el *Teorema Central del Limite* indica que con cualquier distribución siendo μ su media y σ su desviación típica valores finitos. Entonces, si tomamos una muestra aleatoria de n elementos de esta población la media de la muestra $\bar{x}$ sigue, cuando n es suficientemente grande (en general, 30 o más elementos) , una distribución normal

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Hay que tener en cuenta que, en la aproximación anterior, se supone conocida la desviación típica de la población. Si no es este el caso, es preciso efectuar una aproximación doble: en primer lugar por la distribución normal, y en segundo sustituir σ por S, lo que nos conduce a la distribución T de Student. Esta utilización de la distribución T se ha basado en la aproximación normal previa, y por tanto no puede ser usada con muestras pequeñas, a menos que la distribución de partida fuese normal.

15. *Exploración de la distribución muestral y el teorema central del límite.*

Se puede descargar el programa Sampling simulator del proyecto realizado por Joan Garfield y Bob del Mass, de la página http://www.tc.umn.edu/~delma001/stat_tools/. Además de objetivos para la enseñanza de la inferencia e ítems de evaluación, la página contiene este programa que tiene amplias posibilidades.

Es posible elegir entre una variedad de distribuciones poblacionales, tanto normal, bi o trimodal, uniforme, en forma de U o incluso construirla uno mismo. Distintas ventanas permiten extraer y visualizar muestras y sus estadísticos, visualizar la distribución muestral del estadístico y los intervalos de confianza. Cada una de estas ventanas tiene diversas opciones; por ejemplo, se puede elegir el tamaño de la muestra y número de muestras a elegir, así como características de los gráficos producidos.

Figura 6.12. Simulaciones con muestras de tamaño 5

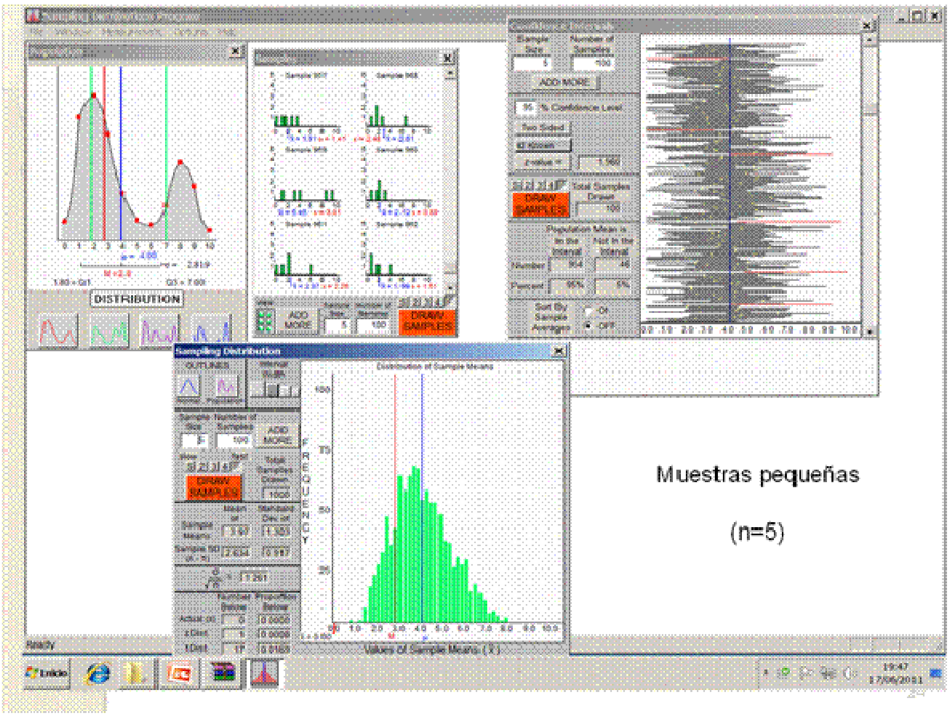
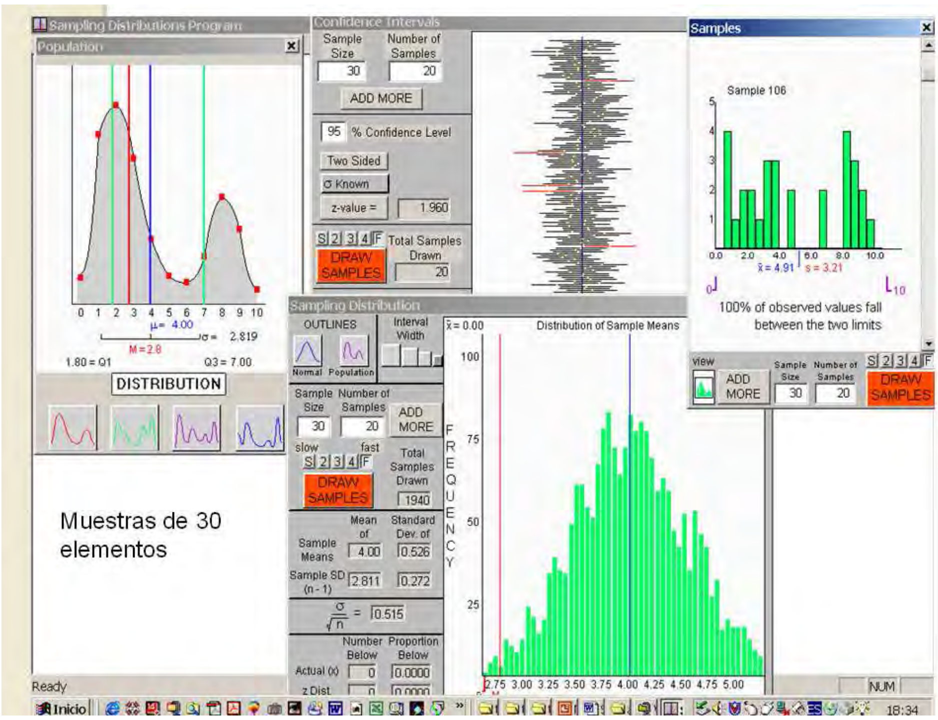


Figura 6.13. Simulaciones con muestras de tamaño 30



En las figuras 6.12 y 6.13 mostramos dos ejemplos del uso del simulador, habiendo construido una distribución completamente irregular. La distribución muestral se suaviza, incluso con muestras pequeñas, perdiéndose la bimodalidad, pero conservándose la asimetría. Esta desaparece al tomar muestras de 30 elementos, para las cuáles la distribución normal es ya una buena aproximación. Es interesante también comparar la diferente variabilidad de las dos distribuciones y del ancho de los intervalos de confianza. Con actividades como la sugerida los estudiantes pueden adquirir una comprensión intuitiva del significado del teorema central del límite.

6.5. Algunas dificultades y errores previsibles

En este proyecto tratamos de introducir algunas ideas informales sobre inferencia, las más importantes de las cuales es que una muestra proporciona "alguna" información sobre la población y de este modo aumenta nuestro conocimiento sobre la misma y que la estadística proporciona una colección de métodos para aprender de la experiencia.

6.5.1. Variabilidad y representatividad muestral

La comprensión de esta noción básica implica el equilibrio adecuado entre dos ideas aparentemente antagónicas: la representatividad muestral y la variabilidad muestral. La primera de estas ideas nos sugiere que la muestra tendrá a menudo características similares a las de la población, si ha sido elegida con las precauciones adecuadas. La segunda, el hecho de que no todas las muestras son iguales entre sí.

Las investigaciones psicológicas han mostrado, sin embargo que ponemos un énfasis excesivo en la *representatividad,* olvidando la variabilidad y el efecto del tamaño de la muestra sobre la misma (Serrano y Díaz, 2005). Las personas, en general, no tienen un razonamiento estadístico correcto cuando hacen inferencias intuitivas sobre acontecimientos inciertos, bien porque no han aprendido nunca estas leyes, bien porque superan sus capacidades de cálculo mental.

En lugar de esto, confían en reglas relativamente simples llamadas *heurísticas* que son las que guían sus juicios. Estas reglas tienen aparente validez, puede parecer razonable seguirlas, pero a menudo llevan a sesgos predecibles (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982).

En la *heurística de representatividad* se juzgan las probabilidades teniendo sólo en cuanta el grado de correspondencia o similitud entre una muestra y una población, un ejemplar y una categoría, un acto y un actor o, más generalmente, un resultado y un modelo. Con el uso de este heurístico se producen, generalmente, buenas respuestas, ya que las muestras y los resultados más representativos tienen una mayor probabilidad de ocurrencia. Sin embargo, el hecho de fijarnos sólo en la similaridad de la muestra con la población de origen puede llevarnos a ignorar otros elementos esenciales de la información, ocasionando algunos errores como los siguientes:

- *Insensibilidad al tamaño de la muestra:* Consiste en pensar que la probabilidad estimada del estadístico de una muestra será independiente del tamaño de la muestra.
- *Concepciones erróneas sobre el azar:* En un experimento aleatorio, se espera que una secuencia pequeña de resultados represente fielmente sus características. Por ello, secuencias relativamente ordenadas no parecen el resultado de un proceso aleatorio.
- *Creencia en la replicación:* Se espera que los resultados de un muestreo o de un experimento aleatorio se repitan en la siguiente ocasión que se realicen.

6.5.2. Diferentes niveles del mismo concepto

Una dificultad importante al iniciar el estudio de las distribuciones en el muestreo es que se presentan diferentes niveles para los mismos conceptos (Harradine, Batanero y Rossman, 2011). En este tema particular estamos manejando dos tipos de proporciones: la proporción en la población (probabilidad de acierto) y la proporción en cada muestra (proporción de aciertos en la muestra particular). Mientras que la primera es una constante desconocida (no sabemos cuál es la verdadera proporción de aciertos de la señora) la segunda es una variable aleatoria, porque varía de una muestra a otra.

El principal fin de este proyecto es observar esta variabilidad y la distribución de la proporción y la media muestral, así como sus características. La capacidad de simulación y representación gráfica de los ordenadores se pone al servicio de la visualización de estos conceptos. No obstante, pensamos que es necesario realizar algunas actividades de simulación con dispositivos concretos, como monedas.

6.5.3. Contraste de hipótesis

El contraste de hipótesis es un procedimiento muy complejo, ya que lleva asociado una serie de conceptos que el alumno debe diferenciar. En contra de lo que se cree, existen varias escuelas estadísticas sobre el contraste de hipótesis. Nosotros en este proyecto hemos seguido el enfoque de Fisher, quien no introduce formalmente (aunque usa implícitamente) la idea de hipótesis alternativa. Hemos evitado también algunos conceptos que no son necesarios a este nivel intuitivo como nivel de significación y regiones críticas/ de aceptación. Será importante prestar atención a los siguientes aspectos:

1. La determinación de la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1
2. La distinción entre los errores Tipo I y Tipo II;
3. La comprensión de la terminología empleada al establecer la decisión

Uno de los aspectos claves en la correcta aplicación de un contraste de hipótesis es la comprensión del concepto de *nivel de significación*, que se define como "la probabilidad de rechazar una hipótesis nula, en el caso de ser cierta", definición que se expresa en la igualdad siguiente:

$$(1) \quad \alpha = P(Rechazar\ H_0 \ / H_0\ cierta)$$

Falk (1986b) señala la confusión corrientemente encontrada entre los investigadores que consiste en intercambiar los sucesos condición y condicionado en la definición anterior, esto es, interpretar el nivel de significación en la forma siguiente:

$$(2) \quad \alpha = P(H_0\ cierta \ / se\ ha\ rechazado\ H_0)$$

Falk sugiere como posible causa de este error el lenguaje empleado en la definición del nivel de significación, esto es la "probabilidad de error Tipo I". En esta expresión no se indica explícitamente que estamos tratando con una probabilidad condicional, lo que lleva al estudiante a suponer que es posible definir un "suceso condicional". En consecuencia, no se diferencia entre las dos probabilidades condicionales (1) y (2). La definición correcta vendría dada por el siguiente enunciado:

- Un nivel de significación del 5% supone que, en promedio, 5 de cada 100 veces que la hipótesis nula es cierta, la rechazaremos.

La investigación de Birnbaum (1982) muestra que algunos estudiantes consideran correcta la siguiente definición (incorrecta) de α:

- Un nivel de significación del 5% implica que, en promedio, *5* de cada 100 veces que rechacemos la hipótesis nula, estaremos equivocados.

Estas definiciones fueron propuestas por Vallecillos (1994) a estudiantes de universidad, a los que se preguntó para cada una de ellas si era cierta o falsa, analizando el razonamiento de los estudiantes. Vallecillos analizó también el concepto de nivel de significación y su relación con el resto de conceptos que intervienen en un contraste de hipótesis. Distinguió cuatro aspectos diferenciados para la comprensión de este concepto e identifica errores relacionados con cada uno de estos aspectos:

a) *El contraste de hipótesis como problema de decisión:* El contraste de hipótesis es un problema de decisión entre dos hipótesis complementarias y excluyentes, con la posible consecuencia de cometer dos tipos de error, incompatibles pero no complementarios. Respecto a este apartado, algunos alumnos interpretan los errores tipo I y II como sucesos complementarios, por lo que la probabilidad de cometer alguno de los errores sería 1.

b) *Las probabilidades de error y relación entre las mismas:* Los dos tipos de error tienen probabilidades α (Tipo I) y β (Tipo II). Es necesario la comprensión de las probabilidades condicionales que intervienen en la definición de α y β, así como de la dependencia de β del parámetro desconocido y de las relaciones entre α y β. Aparte del error señalado por Falk (1986b) del cambio en los condicionales se han encontrado otras interpretaciones erróneas de la probabilidad condicional que define el nivel de significación: suprimir la condición en la probabilidad condicionada que se emplea para definir α; interpretar a como probabilidad de error (tanto tipo I como tipo II) en la decisión tomada.

c) *Nivel de significación como riesgo del decisor* Los valores de α y β, determinan los riesgos que el decisor está dispuesto a asumir y servirán, junto con las hipótesis, para adoptar un criterio de decisión. Se han hallado alumnos que creen que el cambio del nivel de significación no afecta al riesgo de error en la decisión.

d) *Interpretación de un resultado significativo.* La obtención de un resultado estadísticamente significativo lleva al rechazo de la hipótesis nula, aunque no implica necesariamente ninguna relevancia desde el punto de vista práctico. Por ejemplo, una pequeña diferencia entre la media en dos poblaciones puede dar un resultado significativo si se toma una muestra de gran tamaño. Algunos estudiantes confunden la significación estadística y práctica o bien asocian un resultado significativo como uno que corrobora la hipótesis nula.

Otro error relacionado con la comprensión del nivel de significación es el problema de las *comparaciones múltiples*. Este problema se produce cuando se aplican muchos test de significación al mismo conjunto de datos. Por ejemplo, en una investigación epidemiológica, podrían medirse 150 variables en cada persona de un grupo de gente con buena salud y también medir las mismas variables en un grupo de personas con una cierta enfermedad. Si escogiéramos un nivel de significación de 0.05, entonces, puesto que 150x0.05=7.5, cabe esperar 7.5 resultados "estadísticamente significativos" en promedio, incluso si ninguna de las variables medidas está relacionada con la enfermedad estudiada (Moses, 1990)

6.5.4. Probabilidad condicional

Otra dificultad importante del tema es el uso de la probabilidad condicional. Todos nuestros cálculos, razonamientos y simulaciones se apoyan en una condición (si la señora miente). Pero, a veces, los alumnos confunden los dos términos de una probabilidad condicional. El profesor tendrá que insistir en la diferencia entre las preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que la señora acierte 8 tazas si hace sus apuestas al azar? Esta probabilidad es $1/2^8$
- ¿Cuál es la probabilidad de que la señora apueste al azar si ha acertado 8 tazas? La estadística clásica no nos da una respuesta a esta pregunta; tendríamos que ir a la inferencia bayesiana para poder responderla.

Muchos estudiantes no discriminan adecuadamente entre las dos direcciones de la probabilidad condicional *P(A/B) y P(B/A),* error que Falk (1986) denomina *falacia de la condicional transpuesta* y que se ha observado principalmente en problemas de contextos médicos. En este contexto se confunde la probabilidad de tener una enfermedad cuando ha sido positiva una cierta prueba, con la probabilidad de un resultado positivo en la prueba, sabiendo que se tiene la enfermedad (Eddy, 1982). Por ejemplo, la probabilidad de tener una mamografía positiva si se tiene cáncer de pecho (que es muy alta), se confunde con la de tener cáncer de pecho si se tiene la mamografía positiva (que es muy pequeña).

Una posible explicación dada por Falk (1986a) a la confusión entre los dos sentidos de la probabilidad condicional es la imprecisión del lenguaje cotidiano. Cuando escribimos una probabilidad condicional usando la notación matemática es claro cuál es el suceso condicionante y cuál el condicionado, pero en el lenguaje ordinario la probabilidad condicional (tener cáncer si se es fumador) y su inversa (ser fumador si se tiene cáncer) no siempre se distinguen claramente entre sí. Lo mismo sucede con la probabilidad conjunta (ser fumador y tener cáncer).

Maury (1986) indica que parte de la dificultad de los problemas de probabilidad condicional se debe a que los alumnos no son capaces de identificar y restringir correctamente el espacio muestral en la probabilidad condicional. Totohasina (1992) por su parte sugiere el interés de las representaciones como el diagrama en árbol, la tabla de doble entrada o la representación rectangular para ayudar a representar estos problemas.

Es claro que cualquiera de estos recursos, así como los múltiples instrumentos de exploración, cálculo y visualización disponibles en Internet pueden contribuir a que los estudiantes adquieran progresivamente ideas intuitivas sobre la probabilidad condicional. Aunque difícil (por su carácter contra intuitivo) merece la pena que el profesor dedique un esfuerzo al tema, al ser base de muchos otros conceptos estadísticos, en particular de muchos conceptos inferenciales.

6.6. Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar explícita o implícitamente los siguientes contenidos:

1. Aplicaciones de la estadística:

- Prueba de una hipótesis;
- Diseño de experimentos;
- Votaciones, resultados de elecciones; encuestas de intención de voto;
- Consumo; orientación al consumidor;
- Medida de la inteligencia, coeficiente de inteligencia.

2. Conceptos y propiedades:

- Experimento aleatorio; secuencia de resultados aleatorios, sucesos equiprobables, independencia de ensayos;
- Probabilidad simple, probabilidad condicional; condición y condicionado en una probabilidad condicional;
- Variable estadística y variable aleatoria, dstribución de frecuencias y distribución de probabilidad;
- Distribución binomial y distribución normal, parámetros, efecto sobre la variabilidad;

- Moda, mediana en una distribución de frecuencias y una distribución de probabilidad, rangos de percentiles;
- Dispersión, rango, máximo, mínimo, casos centrales;
- Población, censo, muestra, representatividad y sesgo en el muestreo, variabilidad en las muestras; efecto del tamaño sobre la variabilidad;
- Muestreo aleatorio simple; muestreo estratificado;
- Estadístico y parámetro; distribución muestral, dependencia del valor del parámetro;
- Hipótesis; contraste de una hipótesis, uso de modelos en el contraste de una hipótesis;
- Errores en contraste de hipótesis. Nivel de significación; riesgo en una decisión.

3. Notaciones y representaciones:

- Palabras como hipótesis, contraste de hipótesis, riesgo, representatividad y variabilidad muestral;
- Diagrama de puntos, diagrama de barras, histogramas;
- Representación de experimentos aleatorios mediante simulación con materiales concretos y con ordenador.

4. Técnicas y procedimientos:

- Recogida y registro de datos experimentales;
- Recuento y cálculo de frecuencias;
- Representación gráfica de datos e interpretación de tablas y gráficos;
- Uso de ordenadores para simulación y representación gráfica;
- Cálculo de probabilidades mediante regla de Laplace y mediante simulación;
- Procedimiento de contraste de hipótesis; toma de decisión en un contraste.

5. Actitudes:

- Reflexión sobre las propias intuiciones incorrectas respecto al muestreo y la inferencia;

- Valoración de la utilidad de la estadística para poner a prueba hipótesis, organizar experimentos y analizar los datos de los mismos;
- Valoración de la utilidad de la estadística en el análisis de datos del consumo, las votaciones y la medición de la inteligencia;
- Interés por los estudios estadísticos publicados en los medios de comunicación y por sus características técnicas;
- Valoración de la estética y claridad en la elaboración de tablas y gráficos;
- Concienciación de sesgos comunes en la interpretación de resultados de inferencia.

7. Coincidencias

Carmen Batanero

7.1. Objetivos

En este proyecto también tratamos de realizar otro experimento para comprobar si tenemos buenas intuiciones respecto a los fenómenos aleatorios. Pero esta vez analizamos las distribuciones aleatorias de puntos en el espacio. En concreto tratamos de comprobar si somos capaces de simular una distribución espacial aleatoria.

La idea está tomada de los experimentos habituales en las investigaciones sobre percepción de la aleatoriedad, por ejemplo, algunos estudios realizados por Piaget e Inhelder (1951), quienes investigaron la comprensión de los niños sobre lo que ellos llamaron "distribuciones uniformes", que en realidad eran distribuciones de Poisson en el plano.

Los niños tienen experiencia de observar la distribución de las gotas de lluvia sobre un embaldosado. Estas gotas caen al azar sobre el pavimento; por tanto, la distribución que forman en el embaldosado es aleatoria. Basándose en esta experiencia de los niños y para estudiar cómo conciben una distribución aleatoria.

Piaget e Inhelder usan la siguiente técnica experimental: una hoja de papel blanco es dividida en cuadrados de 2 o 3 cm, y algunas fichas se lanzan sobre la hoja de papel al azar, simulando gotas de lluvia (o bien se les dan fichas para colocar sobre el embaldosado del patio o de una habitación).

Se pide al niño que prevea donde caerán las gotas de lluvia sucesivas y cómo se efectuará la distribución, cuando aumentamos el número de gotas. Este tipo de experimento también se ha realizado con sujetos adultos. Nosotros usaremos el mismo experimento con nuestros estudiantes.

La finalidad principal es hacer reflexionar al alumno sobre las intuiciones incorrectas respecto al azar; en concreto sobre las coincidencias de resultados aleatorios y sobre la idea de independencia. También se les quiere mostrar la utilidad de la estadística en la prueba de nuestras hipótesis o teorías (en este caso la hipótesis de que nuestras intuiciones sobre los fenómenos estocásticos son correctas).

Otro objetivo sería que los alumnos analicen las propiedades de las variables aleatorias que siguen la distribución de Poisson y el comportamiento empírico de los procesos de Poisson, así como analizar ejemplos de sus posibles aplicaciones.

Alumnos

Esta actividad puede hacerse con alumnos de Bachillerato, una vez que están estudiando las variables aleatorias y la distribución binomial, tema que aparece en el programa de matemáticas en este nivel.

Puede servir para introducirles a la distribución de Poisson, que surge cuando en la distribución binomial la probabilidad de éxito es relativamente pequeña. No necesita mucha formalización, pues se puede trabajar con simulación y Applets en Internet para realizar los cálculos y experimentalmente se podrían observar fenómenos que siguen esta distribución. También es adecuado para alumnos universitarios, tanto en el tema de la distribución de Poisson, como en el estudio de los contrastes de bondad de ajuste.

7.2. Los datos

Los datos se tomarán en clase, a partir de un experimento clásico de percepción de aleatoriedad. Cada alumno realizará un experimento y tomará sus propios datos, con objeto de comprobar sus intuiciones. Estos datos empíricos se compararán con los patrones esperados en una distribución espacial aleatoria. Es decir, se compararán con el modelo matemático de distribución de Poisson.

Se sugiere empezar con preguntas similares a las siguientes y realizar en clase una discusión colectiva.

1. *¿Has observado alguna distribución aleatoria de objetos en un espacio? ¿Podrías poner algún ejemplo?*

Se espera que los alumnos puedan recordar algunos procesos aleatorios espaciales, como, por ejemplo, árboles que crecen en un parque; nidos o guaridas de animales en un territorio; estrellas en una región del espacio; distribución de erratas en páginas de un material escrito; nidos o guaridas de animales en una extensión geográfica; conchas en un cuadrado de arena de la playa, número de pasa que tocan en una porción de un pastel; etc.

A continuación se les indica que se va a hacer un experimento para comprobar sus intuiciones al respecto. Se les hace alguna pregunta como las siguientes:

2. *¿Serías capaz de simular uno de estos procesos? ¿Podrías hacerlo como si realmente fuera aleatorio, de modo que engañaras a otra persona? ¿o podrían adivinar que lo has inventado?*

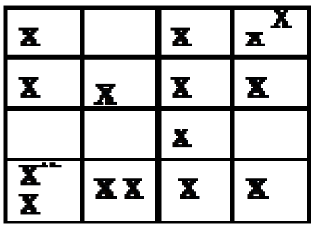
Un ejemplo de un proceso de Poisson que puede estudiarse en el aula, es el lanzamiento de monedas sobre una superficie como una loseta del salón de clase. Se pueden hacer ensayos con los alumnos para que observen cómo se van distribuyendo poco a poco. Pero hacer la prueba para cada alumno sería lento. Es más rápido y silencioso proporcionar a cada estudiante un folio en blanco y pedirles que construyan un cuadrado (lo cual es sencillo, tomado el folio por un pico y doblándolo hasta que la base superior del rectángulo coincida con el lado, y luego cortando la parte que sobra.

A continuación se pide al alumno que dibuje al azar 16 puntos en el cuadrado construido, procurando obtener una distribución de puntos aleatoria, dándoles las siguientes consignas:

3. *Vamos a comprobar qué tal son tus intuiciones respecto a los resultados aleatorios. Sigue las siguientes instrucciones:*
   - *a.* *Construye un cuadrado, lo más perfecto posible con este folio en blanco.*
   - *b.* *Dibuja sobre el cuadrado 16 puntos, tratando de que se distribuyan lo más aleatoriamente posible por toda la superficie del cuadrado. Dibújalos como esperarías en una distribución aleatoria, por ejemplo, si el folio fuese una baldosa y los puntos gotas de lluvia cuando ha comenzado a llover o como si el folio fuese un campo cuadrado y los puntos nidos de pájaros o árboles colocados dentro del campo.*
   - *c.* *Toma la pieza de papel y dóblala por la mitad cuatro veces en sentido vertical. Luego otra vez doblala otras cuatro veces en sentido horizontal. Dentro del cuadrado grande donde has dibujado los puntos se te habrán marcado 16 cuadrados.*

El profesor también construirá un cuadrado con el folio y dibujará el mismo los 16 puntos mostrando a los estudiantes la forma de hacerlo. A continuación doblará el cuadrado con el procedimiento indicado y mostrará a la clase los puntos dibujados y cómo se sitúan dentro de la retícula. Un resultado posible es como el que se muestra en la siguiente figura 7.1.

Figura 7.1. Resultados del profesor al realizar el experimento

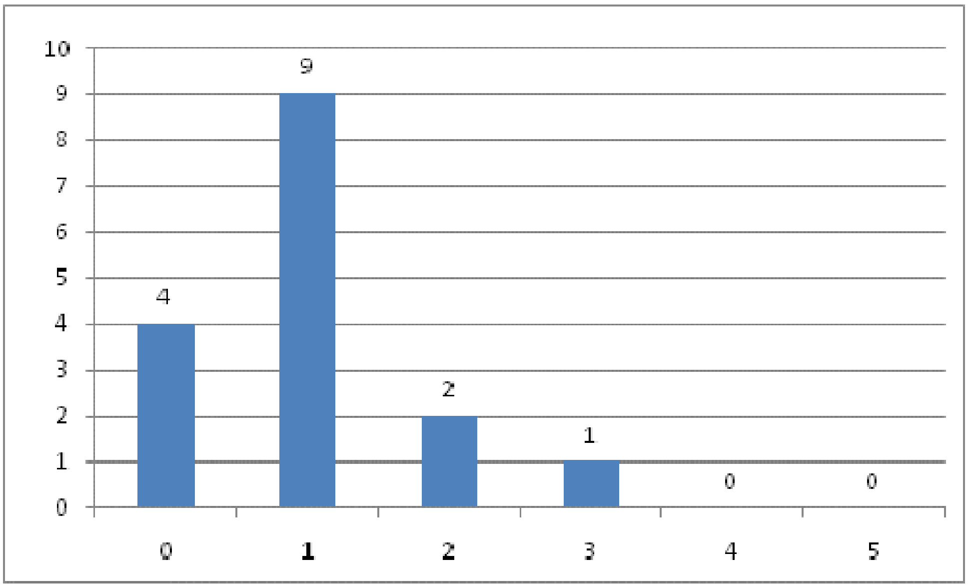


En la figura 7.1 observamos que el número de puntos en cada cuadro es diferente; hay cuatro cuadros vacíos y dos con dos puntos y uno con tres puntos. Los datos que nos interesan en este experimento es el número de puntos en cada cuadrado. Podemos representar estos resultados en un diagrama de barra (Figura 7.2), donde observamos que la moda es 1; es decir el mayor número de cuadros es los que tienen un solo punto. Aparecen algunos vacíos o con más de un punto. ¿Será esto lo que ocurriría en un proceso aleatorio? ¿Serán los resultados del profesor similar a los resultados de los alumnos?

Hacemos notar que en la Figura 7.2 hemos representado la distribución de frecuencias correspondiente a una variable estadística (número de puntos por cuadros en una muestra de 16 puntos), pero estamos interesados en una variable aleatoria. ¿Qué ocurriría si se repitiese el experimento muchas veces? ¿Cuál sería la probabilidad de que un cuadro quedase vacío? ¿Tuviese 1, 2, 3 o más puntos? Es decir, estamos interesados en la distribución de probabilidad de una variable aleatoria. Si nuestra intuición fuese buena, la distribución de la variable estadística representada en la Figura 7.2 sería aproximada a la correspondiente distribución de la variable aleatoria.

Para estudiar estas cuestiones se pide a los alumnos que cuenten y anoten cuantos cuadrados tienen cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, etc. puntos, se les pregunta los resultados y se comparan entre sí.

Figura 7.2. Distribución de frecuencias (Puntos por cuadrado)



4. *Cuenta el número de cuadrados en los que hiciste 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. marcas. Anota tus resultados en una tabla, la primera columna es para registrar el número de puntos y la segunda columna es para el número de cuadrados con ese número de puntos.Representa los datos en una gráfica.*

Al finalizar esta fase, cada alumno habrá recogido sus propios datos y dispondrá de una gráfica parecida a la figura 7.2, aunque las gráficas de unos y otros alumnos serán diferente, pues cada alumno ha realizado una muestra de 16 ensayos. Sabemos que las muestras se parecen entre si, pero varían unas respecto a otras. Además, las muestras no son aleatorias pues hemos inventado los resultados. Los alumnos que tengan buenas intuiciones producirán una gráfica parecida a la distribución de probabilidad teórica: Ahora se trata de averiguar cuál es esta distribución.

7.3. Preguntas, actividades y gestión de la clase

Cuando todos los alumnos han finalizado la realización del experimento se puede plantear preguntas similares a las que reproducimos a continuación.

5. *¿Alguno de vosotros obtuvo un cuadrado vacío? ¿Alguno obtuvo exactamente un punto por cuadrado ¿Tenéis algún cuadrado con varios puntos? ¿Cuántos? ¿Cuántos cuadrados vacíos tenéis? ¿Os parece que vuestros resultados se aproximan a los aleatorios? ¿o en*

qué se diferencian?

La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que tiene múltiples aplicaciones. De hecho, muchas variables discretas se obtienen mediante un proceso de Poisson. Un proceso de Poisson se observa cuando eventos discretos ocurren en un espacio de oportunidad, como un intervalo de tiempo, de longitud, de área o de volumen, entre otros, de tal manera que si ese espacio de oportunidad se redujera suficientemente entonces se tendría que:

a. La probabilidad de observar exactamente una ocurrencia del evento en ese espacio sería un valor fijo,

b. La probabilidad de observar más de una ocurrencia del evento en ese espacio es cero y

c. La ocurrencia de un evento en cualquier intervalo es estadísticamente independiente de que ocurra en otro intervalo.

Se sugiere iniciar el estudio del tema con la discusión sobre preguntas como la siguiente:

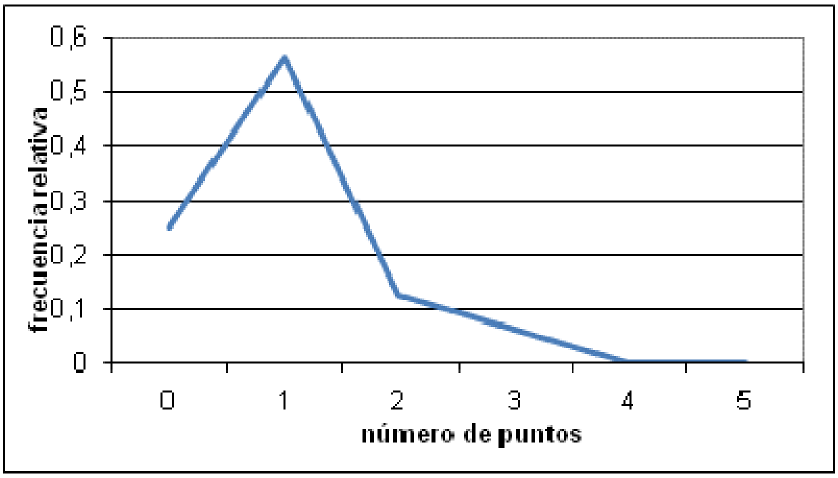
6. *Calcula las frecuencias relativas para cada valor de la variable "número de puntos por cuadro". Representa en un gráfico las frecuencias relativas.*

Los alumnos realizarían una tabla de frecuencias similar a la Tabla 7.1, calculando las frecuencias absolutas y relativas y prepararían un gráfico de líneas (Figura 7.3). Podrían comparar los gráficos de barras y líneas y estudiar las ventajas de usar uno u otro tipo de gráfico, o de usar frecuencias absolutas y relativas.

Tabla 7.1. Distribución de frecuencias de la variable estadística

Número de puntos	Número decuadrados	Frecuencia relativa
0	4	0.25
1	9	0.5625
2	2	0.125
3	1	0.0625
4	0	0
5	0	0
	0	0

Figura 7.3. Gráfico de líneas



7. *Vemos que diferentes alumnos obtienen diferentes datos pues estamos haciendo una serie muy limitada (16 ensayos cada uno) del experimento aleatorio. ¿Cuál sería la probabilidad de que un punto caiga en un cuadrado dado, por ejemplo en el cuadrado de la esquina izquierda superior? ¿Es esta probabilidad la misma para todos los cuadrados? ¿Cuál será la probabilidad de que el segundo punto caiga en el mismo cuadrado? ¿Cuál la de que ninguno de los dos primeros puntos caiga en ese cuadrado?*

Los alumnos pueden rápidamente deducir que la probabilidad de que el primer punto caiga en el cuadrado mencionado es 1/16 puesto que hay 16 cuadrados y todos tienen la misma probabilidad. La probabilidad de que el cuadrado reciba los dos primeros puntos será:

$$\frac{1}{16\times 16}=\frac{1}{256}$$

La probabilidad de que el cuadrado quede vacío después de marcar dos puntos sería la contraria, es decir

$$\frac{255}{256}$$

Aunque parece una probabilidad muy grande, esto no quiere decir que la probabilidad de que queden cuadrados vacíos es grande, porque hay 16 cuadrados. A continuación se puede pedir a los estudiantes la probabilidad de que al marcar 16 puntos algún cuadrado tenga más de un punto (en este caso, algún cuadrado tiene que quedar vacío).

8. *Si marcamos ahora exactamente 16 puntos, ¿Cuál es la probabilidad de que algún cuadrado tenga más de un punto?*

Los casos posibles en este experimento son 16^{16} puesto que en cada ensayo tenemos 16 posibilidades y los resultados de cada ensayo son independientes de los anteriores. Esto parece un número muy grande y aparentemente, la posibilidad de tener un cuadro vacío sería grande.Podemos resolver el problema por pasos:

- La probabilidad de que los dos primeros puntos será $\frac{15}{16}$, puesto que el punto puede caer en cualquier cuadro (casos favorables), menos en el ya ocupado (casos posibles, 15)
- La probabilidad de que los tres primeros puntos caigan en cuadros diferentes será $\frac{15}{16} \times \frac{14}{16}$
- …

La probabilidad de que todos los cuadros estén ocupados será:

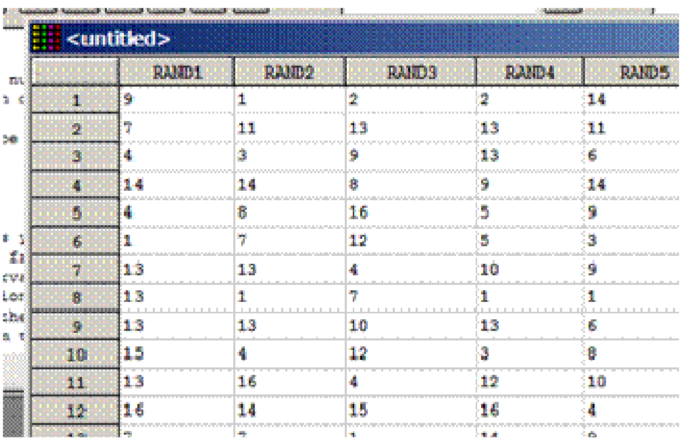
$$\frac{15}{16} \times \frac{14}{16} \times \ldots\ldots \frac{1}{16} = \frac{20922789888000}{18446744073709552000} = \frac{20922789888}{18446744073709552}.$$

Este número es muy pequeño!

9. *Vamos ahora a hacer una simulación usando números del 1 al 16 para representar los 16 cuadrados. Obtendremos números al azar, del 1 al 16. Nos hace falta obtener 16 de estos números.*

Para analizar la probabilidad de que un cuadro contenga 0, 1, 2 puntos podemos utilizar un simulador, por ejemplo con Statgraphics (ver figura 7.4). Se puede simular la extracción de 16 números cada uno de ellos del 1 al 16 con reemplazamiento.

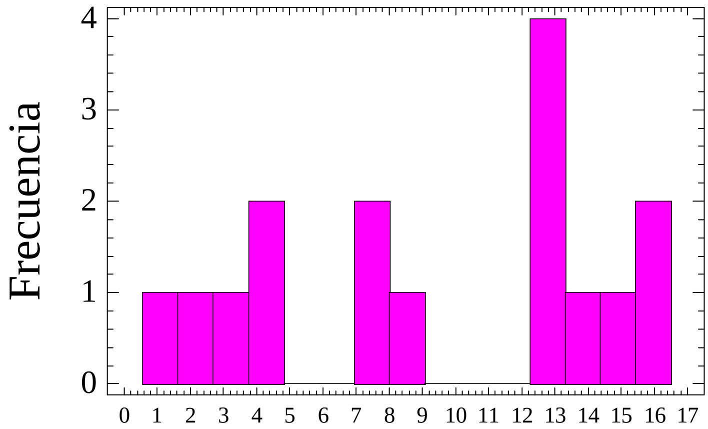
Figura 7.4. Cinco simulaciones con Statgraphics


<untitled>

	RAND1	RAND2	RAND3	RAND4	RAND5
1	9	1	2	2	14
2	7	11	13	13	11
3	4	3	9	13	6
4	14	14	8	9	14
5	4	6	16	5	9
6	1	7	12	5	3
7	13	13	4	10	9
8	13	1	7	1	1
9	13	13	10	13	6
10	15	4	12	3	8
11	13	16	4	12	10
12	16	14	15	16	4

Cada número representará un cuadro del cuadrado, que previamente habremos numerado del 1 al 16. En la Figura 4 hemos realizado 5 veces la simulación (que se haría igualmente con Excel).

Figura 7.5. Resultados de la primera simulación



Cada columna es una simulación. Observamos que hay números que se repiten y otros no aparecen. En la primera simulación (Random1) el 13 aparece 4 veces, mientras que faltan el 5, 6, 9, 10,11, 12 (Ver Figura 7.5.).

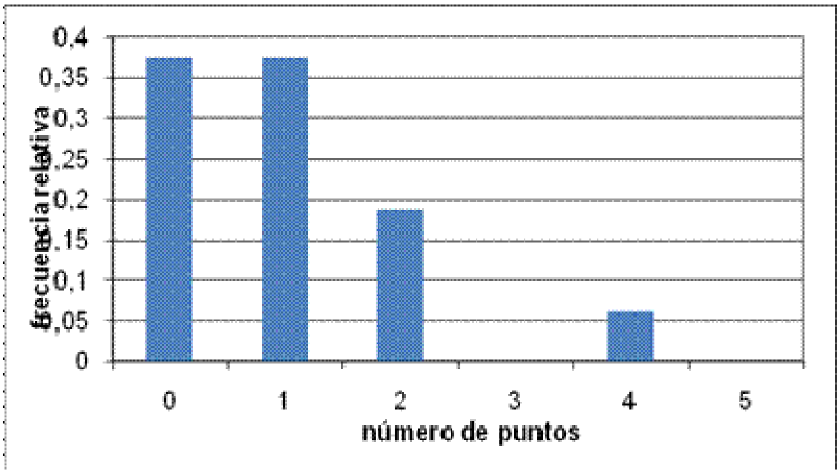
Si ahora contamos las la frecuencia de números que no aparecen, aparecen 1, 2, 3, 4, veces obtenemos la tabla 7.2 y la Figura 7.6.

Tabla 7.2. Distribución de frecuencias del número de repeticiones en la primera simulación

Número de puntos	Número de cuadrados	Frecuencia relativa
0	6	0.25
1	6	0.5625
2	3	0.125
3	0	0
4	1	0.0625
5	0	0
	0	0

Se puede repetir las gráficas y la tabla con las otras simulaciones. Aunque varía una a otra, lo que es claro al comparar estas gráficas con la que obtuvimos a partir del experimento de dibujar puntos en el cuadrado es que se ven algunas diferencias. La más notable de todas es que estimamos a la baja el número de cuadros con múltiples puntos (coincidencias). No esperamos que se produzcan coincidencias por azar. Tampoco esperamos que haya tantos cuadros vacíos.

Figura 7.6. Número de veces que aparece cada resultado en la primera simulación



10. *Estudiemos ahora la distribución de Poisson. Esta distribución también se llama de "los sucesos raros" y nos sirve para explicar algunas coincidencias que aparecen en fenómenos aleatorios y que no sabemos por qué.*

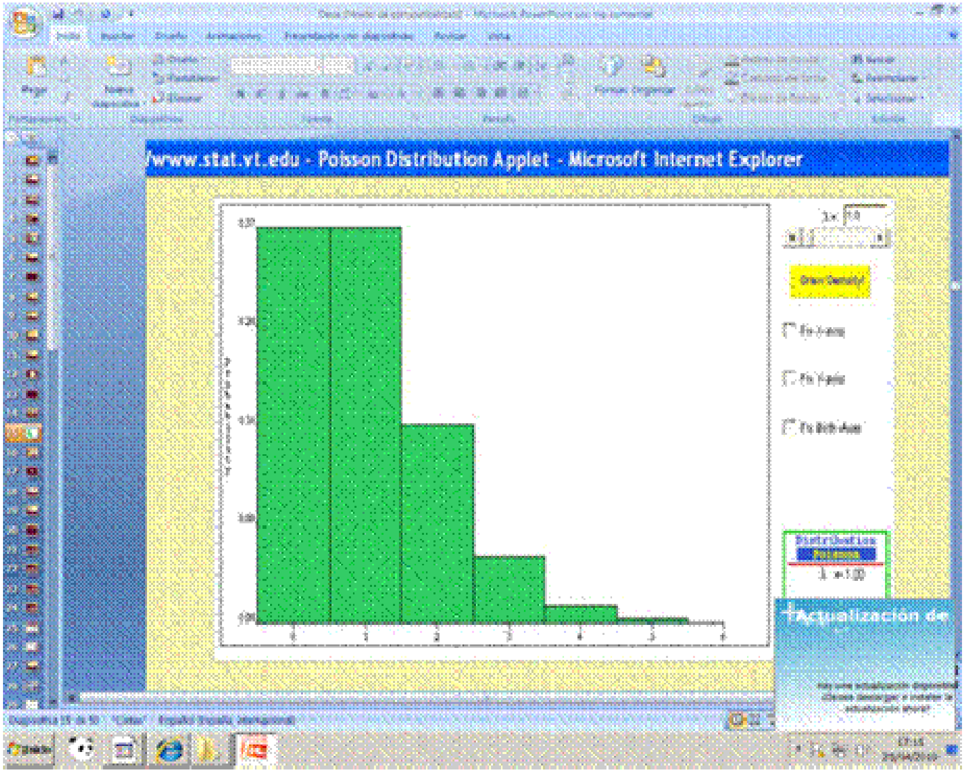
Llegados a este punto se puede utilizar algunos de los Applets disponibles en Internet (ver por ejemplo, el representado en la Figura 7.7 disponible en www.causeweb.org/).

Se puede en este momento introducir la distribución de Poisson, que toma varlores enteros: 0. 1, 2,… y la probabilidad de que ocurran X número de confetis en un cuadrado se calcula con la fómrula

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}$$

λ es la media de esta distribución y representa el número esperado de sucesos en cada región (que en este caso es 1). Se puede experimentar con el Applet con otros valores de λ y ver como varia la forma y las probabilidades.

Figura 7.7. Applet de la distribución de Poisson

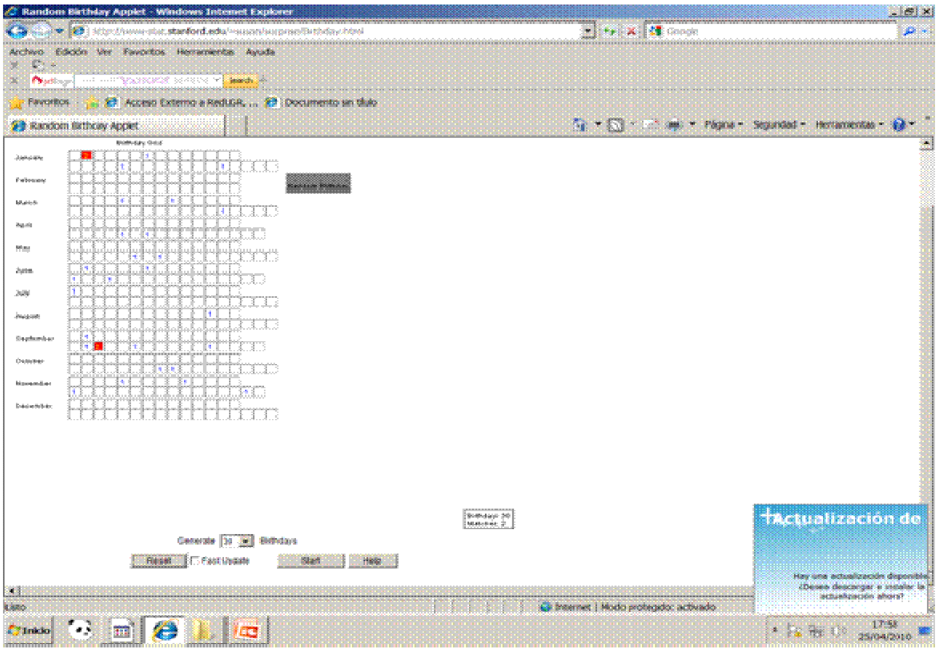


11. *Veamos algunos otros ejemplos de aplicación. Por ejemplo, en los cumpleaños. Adivinar el cumpleaños de una persona es como poner un cuadro en un día del calendario. Es decir, usar ahora una hoja con 365 cuadraditos. Está claro de lo que hemos estudiado que si cogemos 365 personas, habrá días del año en que ninguna de ellas tenga su cumpleaños en este día. También habrá personas que tengan el mismo cumpleaños. ¿Cuántas personas piensas que hará falta para que la probabilidad de que dos al menos tengan el mismo cumpleaños sea mayor que 1/2?*

Otra vez nuestra intuición nos engaña en este problema, pues sólo se necesitan 30 personas! Los alumnos pueden volver a razonar que este caso es semejante al anterior. También pueden experimentar con algún applet como el presentado en la figura 7.8.

Finalmente, usando el applet de la distribución de Poisson (Figura 7.7) pueden calcular la probabilidad con diferente número de cumpleaños, calculando el valor correspondiente de λ que sería el número de personas considerado dividido por 365.

Figura 7.8. Simulador del cumpleaños

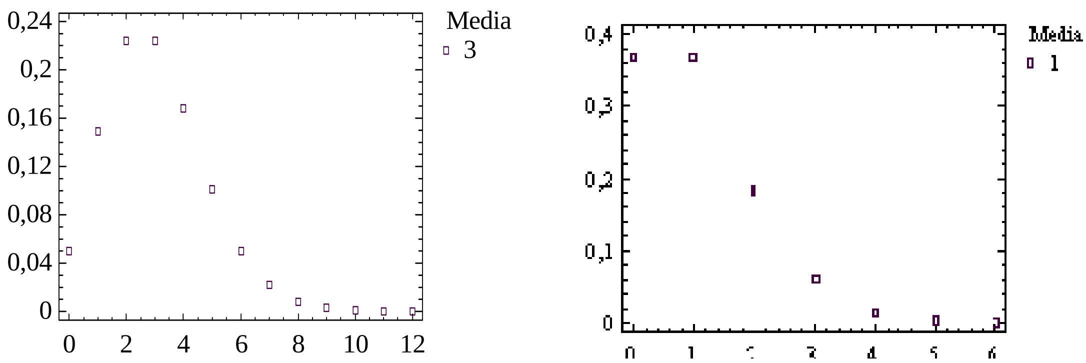


7.4. Algunas actividades de ampliación

Los alumnos de Bachillerato pueden trabajar formalmente con el modelo de Poisson. Se les puede indicar que una variable aleatoria discreta sigue la distribución de Poisson si toma los valores enteros 0, 1, 2 y su distribución de probabilidades es la dada por:

$$p(\Gamma=r)=e^{-\lambda}\,\lambda^{r}\,/\,r!$$

Figura 7.9. Distribución de Poisson



El valor λ es el único parámetro de esta distribución, que notaremos por $P(\lambda)$, y es igual a la media y varianza de la misma. Utilizando el applet o bien los programas como Statgraphics pueden variar el parámetro y analizar cómo cambia la forma de la distribución. En la figura 7.9 aparecen la gráficas de las variables P(1) y P(3). Nótese cómo aumentan la media y la varianza de la distribución, en función de λ.

La distribución de Poisson tiene muchas aplicaciones. Se puede mostrar a los alumnos las de mayor utilización La primera de ellas es la de aproximación de la distribución binomial, cuando *n* es grande y *p* pequeña Supongamos que manteniendo el producto $np=\lambda$ constante hacemos tender *n* a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} P(\Gamma = r) = \lim_{n\to\infty} p^r q^{n-r} \binom{n}{r} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-r} \binom{n}{r} = e^{-\lambda}\lambda^r / r!$$

Al igual que en la distribución binomial, pueden utilizarse tablas o bien programas para simplificar los cálculos. Los alumnos podrían tratar de resolver otros problemas como los siguientes:

12. *Una compañía de seguros sabe que la probabilidad de tener que indemnizar en caso de robo, cada año de la póliza es 00001. Si la compañía tiene 30000 asegurados ¿Cual es el número máximo de primas que habrá de pagar durante el año en curso, con probabilidad 099?*

En este ejemplo, nos hallamos ante una distribución binomial B(30000, 00001), pues cada cliente tiene igual probabilidad de sufrir un robo, independientemente de los demás. Aproximaremos esta distribución por la de Poisson de parámetro =30000*00001=3.

Analizando la tabla de esta distribución, podemos observar que la probabilidad de que aparezcan 8 o menos robos es 09962 y la de que aparezcan 7 o menos 09881. De estos datos se puede afirmar que 8 es la solución buscada.

13. *La tabla de mortalidad de un país indica que 1 de cada 1000 habitantes llega a centenario. Si una pequeña aldea tiene 1830 habitantes, ¿Cual es la probabilidad de que de ellos 0, 1, 2 lleguen a centenarios?*

Resolveremos este segundo ejemplo con la ayuda de la tabla. En este caso, si *X* es el número de habitantes que llega a los cien años, X tiene distribución *B(1830, 0001)*. Aproximaremos esta distribución por la de Poisson de parámetro =1830*0001=183.

Este valor del parámetro no viene incluido en las tablas. Si no disponemos de un programa de cálculo, podemos utilizar un procedimiento análogo al seguido en el caso binomial. Por ello:

$$Pr(X\text{-}0)= 01496+(01653\text{-}01496)*7/10= 016059$$

El resto de las probabilidades se calcula de modo similar.

14. *A una ventanilla de la oficina de Correos llega, en promedio, un cliente cada 5 minutos ¿Cual es la distribución del número de personas que acude a esta ventanilla cada hora? ¿Cual es la probabilidad de que en el próximo cuarto de hora lleguen más de 5 clientes a al ventanilla?*

Otra aplicación de gran interés es la de recuento del numero de sucesos, cuando estos se producen a intervalos aleatorios de tiempo. Consideremos un cierto suceso aleatorio como mutación en un determinado gen, llegada de un cliente a una cola, etc que se produce a intervalos irregulares de tiempo. El número de estos sucesos ocurridos durante un intervalo de tiempo de longitud t es una variable aleatoria discreta. Estamos interesados en el cálculo de la probabilidad $p_k(t)$, de que este número sea exactamente k. Haremos las hipótesis siguientes:

1. *Independencia*. El número de sucesos ocurridos en dos intervalos de tiempo que no se solapan son variables aleatorias independientes.
2. *Homogeneidad en el tiempo*. Las probabilidades $p_k(t)$, solo dependen de k y de t , y no del instante que se toma como origen de tiempos.
3. *Regularidad*. La probabilidad de que en un intervalo de longitud infinitesimal h se produzca un suceso es:

$$p_1(h)= \lambda h+o(h),$$

donde $o(h)$ representa un infinitésimo respecto a h. La probabilidad de que en un intervalo h de longitud infinitesimal se produzcan dos o más sucesos es un infinitésimo respecto a h.

En estas condiciones, puede comprobarse que la variable aleatoria Γ sigue una distribución de Poisson de parámetro t. En realidad debe notarse que para cada valor de t obtenemos una variable aleatoria diferente. Una colección de variables aleatorias $\{N(t)/t>0\}$ se conoce como proceso estocástico. Si, en particular, para cada *t la* variable aleatoria $N(t)$ tiene distribución de Poisson, obtenemos el proceso de Poisson que tiene gran interés teórico y práctico.

En el ejemplo dado, se cumplen, de forma aproximada, las condiciones del proceso de Poisson. Por ello, si cada 5 minutos llega una persona, es de suponer que en una hora lleguen 12. Por tanto, el número de clientes en una hora es una variable aleatoria con distribución de Poisson *P(12)*.

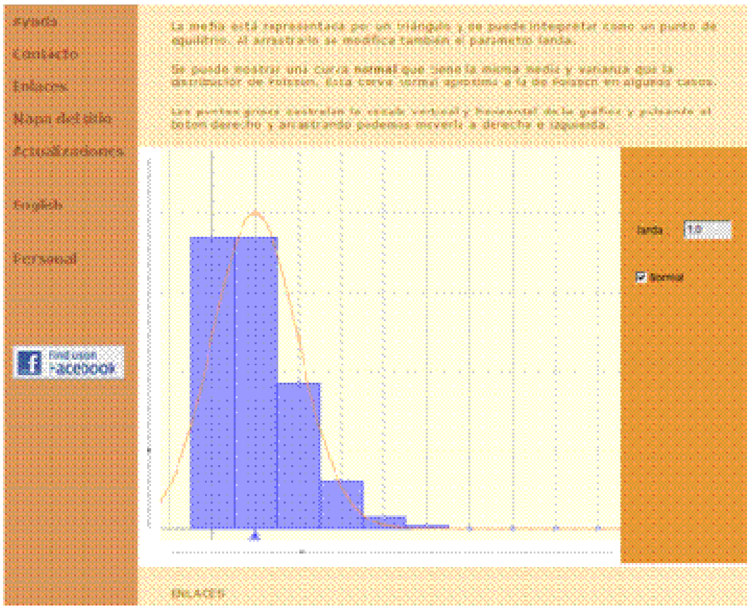
Análogamente, en un cuarto de hora, el número de personas sigue una distribución *P(3)*. Utilizando de nuevo la tabla de la distribución obtenemos:

$$P(x>5) = 1 - F(5) = 1 - 09161 = 00839$$

15. Aproximación normal.

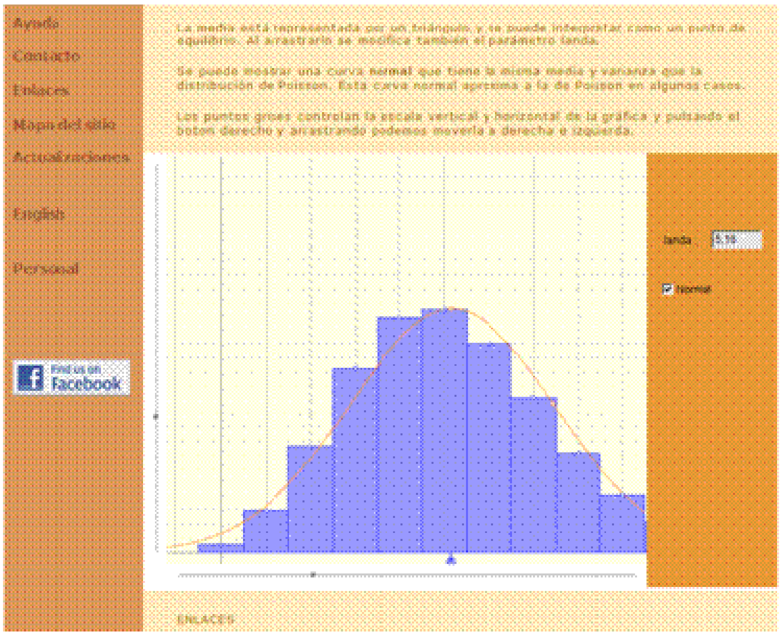
Cuando el valor del parámetro λ aumenta, se puede aproximar la distribución de Poisson por una distribución normal. Los alumnos podrían analizar intuitivamente esta aproximación utilizando el applet disponible en la página web de matemáticas visuales, donde se incluyen varias distribuciones: http://www.matematicasvisuales.com/html/probabilidad/varaleat/poisson.html.

Figura 7.10. Distribución de Poisson con $\lambda=1$



Deslizando con el ratón el valor de λ se observa visualmente la mejora de la aproximación, según dicho valor aumenta y, en particular a partir de 5. También se pueden cambiar las escalas para mejorar la visualización (ver figuras 7.10 y 7.11

Figura 7.10. Distribución de Poisson con λ>5



7.5. Algunas dificultades y errores previsibles

7.5.1. Percepción de la aleatoriedad

Las investigaciones sobre percepción de la aleatoriedad se han llevado a cabo tanto con niños como con sujetos adultos. Piaget e Inhelder (1951) vieron el desarrollo de la idea de azar en el niño como complementaria a la de la relación causa-efecto. Para ellos, sin esta comprensión de la causación, no hay un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios. En consecuencia, hasta la etapa de las operaciones concretas en la que hay cierta apreciación de los factores que caracterizan los fenómenos causados, el niño y la niña no pueden comprender la idea de azar.

Según este autor, el azar se concibe como debido a la interferencia de una serie de causas independientes y la «no presencia» de todas las combinaciones posibles, salvo en el caso en que hubiera un gran número de repeticiones del experimento. Cada caso aislado es indeterminado o imprevisible, pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Esta es la vía por la que aparece la idea de probabilidad, como razón entre las posibilidades de un caso y el conjunto de posibilidades. Por tanto, la idea de azar, para Piaget, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente comprendida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las operaciones formales (12- 14 años).

Para analizar su teoría los autores preguntan a los niños como caerán las gotas de lluvia al comenzar a llover sobre un embaldosado. Los niños de *preescolar* saben que, cuando cae la lluvia, habrá gotas por todas partes, aunque ello no implica que comprendan que la distribución es, a la vez, aleatoria y cada vez más regular. En el primer estadio de desarrollo de la idea de aleatoriedad, el niño está convencido de la distribución regular de la lluvia. Cuando trata de reproducirla, distribuye las gotas sistemáticamente, de modo que van rellenando uno a uno todos los cuadrados, antes de repetir uno de ellos. Si la retícula tiene todos los cuadros con alguna gota, excepto un cuadro vacío, los niños colocan la gota en el cuadro vacío, de modo que se lograse un patrón uniforme. El deseo de regularidad domina las predicciones de los niños.

Al proponer a los niños del *periodo de las operaciones concretas* el problema, aceptan la irregularidad de la distribución, aunque si todos los cuadrados, menos uno tienen al menos un punto, el cuadrado "seco" se considera todavía como el más probable para recibir la siguiente gota. Es más difícil ya encontrar niños que colocan las gotas en una posición fija (por ejemplo el centro) todos los cuadrados. La comprensión de la ley de los grandes números es sólo intuitiva y empírica,

Con el *periodo de las operaciones formales* se comprende, finalmente, el mecanismo de la convergencia progresiva. En función del número cada vez mayor de gotas, la diferencia en el número de gotas en las baldosas cada vez disminuye más, no en forma absoluta, sino en forma relativa. La ley de los grandes números se comprende por su doble aspecto combinatorio y proporcional. En este estadio (12 años o más) aparece el razonamiento proporcional y Piaget e Inhelder creen que los niños comprenden la ley de los grandes números.

Green (1989) realiza una investigación sobre este tipo de tarea. En una muestra restringida pidió alos niños que rellenasen una cuadrícula con gotas de lluvia, en la forma que piensan que ocurriría en la realidad. Clasificó las distribuciones obtenidas en los tipos siguientes:

- Una gota en cada cuadrado de la retícula.
- Distribución de las gotas por los bordes de la retícula, dejando vacío el interior.
- Distribución aleatoria.

Utilizó este tipo de respuestas como opciones en una pregunta similar con formato de opciones múltiples, con 320 niños de 11 a 16 años. Quedó sorprendido al ver un mejor comportamiento en los más jóvenes, de los que casi la mitad seleccionó el patrón aleatorio. En general encontró que los niños más inteligentes seleccionaban con mayor frecuencia que sus compañeros el patrón regular. Estos dos hechos le plantearon serias dudas sobre la relevancia de los estadios de desarrollo cognitivo sugeridos por la teoría de Piaget.

Resultados similares se han obtenido en las investigaciones con sujetos adultos en los que se observa, en general, que no se reconoce suficientemente la irregularidad propia de las sucesiones aleatorias. Respecto a los experimentos aleatorios Konold y cols. (1991) caracterizan las concepciones de los sujetos en la siguientes categorías:

- Sujetos para los que un experimento es aleatorio sólo si los posibles resultados son igualmente probables; si las probabilidades de los sucesos implicados son muy diferentes -como el caso de que llueva un día para el que se predice un 80% de posibilidades de lluvia- no sería considerado aleatorio.
- Aleatoriedad como contrapuesta a la causalidad, o como un tipo especial de causa.
- Aleatoriedad como incertidumbre; existencia de múltiples posibilidades en las mismas condiciones.
- Aleatoriedad como modelo para representar ciertos fenómenos, dependiente de nuestra información sobre el mismo.

Todos estos resultados son replicados y completados por Batanero y Serrano (1999), quienes sugieren que los alumnos atribuyen diferentes significados a la aleatoriedad y algunos de ellos coinciden con los admitidos en diferentes periodos históricos dentro de la estadística, por ejemplo:

- Aleatoriedad como inexistencia de causas o causa desconocida; interpretación que fue común hasta comienzos de la Edad Media, según los autores;
- Aleatoriedad como equiprobabilidad, ligada a la concepción clásica de la probabilidad, sostenida por ejemplo, por Laplace;
- Aleatoriedad como estabilidad de las frecuencias relativas; en este caso nos aproximamos a la concepción asociada a la visión frecuencial de la probabilidad, donde lo importante para que un fenómeno sea aleatorio es que se pueda repetir indefinidamente en las mismas condiciones.

- Aleatoriedad como impredecibilidad: simplemente no sabemos el resultado del experimento.
- Aleatoriedad, dependiendo del conocimiento previo, y con carácter subjetivo. Es la persona la que decide si los modelos probabilísticos son adaptables a la situación. Sería la postura común en la estadística bayesiana.

Cada una de estas concepciones recoge propiedades parciales del concepto y por ello puede ser válida en unas situaciones e incompleta en otras más complejas. Es importante que en la clase el profesor presente a los alumnos ejemplos variados de situaciones aleatorias, para ayudar a los alumnos a una construcción progresiva del concepto.

7.5.2. Variable aleatoria

Un requisito para comprender la distribución es la idea de variabilidad, que está siempre presente en los datos y tiene múltiples significados en estadística (Reading y Shaughnessy, 2004), entre otros los siguientes: variabilidad de resultados posibles en un experimento aleatorio; variabilidad en los datos recogidos; variabilidad en una variable aleatoria; variabilidad en las muestras o la distribución muestral. Es por ello importante que los estudiantes perciban la variabilidad y manejen modelos que permitan controlarla y predecirla.

Una de las tareas fundamentales en el análisis de datos es la realización de inferencias, lo que implica el uso coordinado de las variables estadística (distribución de datos) y aleatoria (distribución de probabilidad). Mientras que la variable estadística es un primer modelo matemático que representa los datos obtenidos en una muestra, la variable aleatoria supone un segundo nivel de modelización, al imaginar que la toma de datos se extiende al total de la población de donde se tomó la muestra.

La importancia de la variable aleatoria fue resaltada por Heitele (1975), quien la incluyó en su lista de diez ideas fundamentales en la enseñanza de la estadística. Su comprensión incide en la de otras nociones estadísticas, como las distribuciones de probabilidad, el modelo de regresión o la obtención de estimadores. La comprensión de la relación entre la distribución de frecuencias y la distribución de probabilidad permite la realización de inferencias que, finalmente, han de interpretarse en el contexto donde se tomaron los datos. Esta comprensión y coordinación del carácter dual de la distribución involucra las ideas de aleatoriedad, independencia, tendencia, valor esperado y variabilidad.

Ruiz (2006) indica que, sin embargo, la idea de variable aleatoria tiene dificultades, puesto que los alumnos la asocian a la idea de función que tiene rasgos similares pero también diferentes. Mientras una función asocia a cada valor de la variable independiente un solo valor de la dependiente, en una variable aleatoria la correspondencia no es unívoca. Además, el valor de la variable aleatoria depende del resultado de un experimento, por lo que, en realidad la variable aleatoria no es una función real, sino una función de conjunto. La distribución de la variable aleatoria si es una función real y nos permite operar con ella en forma similar a como hacemos con las funciones. Pero estas diferencias no siempre son comprendidas por los estudiantes.

7.6. Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar, explícita o implícitamente, los siguientes contenidos:

1. *Aplicaciones de la Estadística*
    - Diseño de un experimento;
    - Análisis de datos experimentales; comparación de datos experimentales con patrones teóricos;
    - Coincidencias, intuiciones, seguros;
    - Percepción de la aleatoriedad;
    - Análisis de las intuiciones; psicología,

2. *Conceptos y propiedades*
    - Aleatoriedad: experimento aleatorio; secuencia de resultados aleatorios, sucesos equiprobables, independencia de ensayos;
    - Variable estadística discreta (puntos dibujados en cada cuadro), frecuencia absoluta; tabla de frecuencias; distribución de frecuencias;
    - Posición central: moda, media;
    - Dispersión: rango, desviación típica;
    - Variable aleatoria discreta (puntos esperados en cada cuadro); probabilidad, distribución de probabilidad, valor esperado, dispersión;
    - Distribución de Poisson, supuestos, media;

- Distribución binomial; aproximación mediante la distribución de Poisson;
- Tablas de mortalidad;
- Proceso de Poisson; llegadas a una cola.

3. *Notaciones y representaciones*
   - Palabras como frecuencia, media, moda, recorrido, ocurrencia;
   - Símbolos y expresiones matemáticas;
   - Tablas de frecuencias: gráficos de barras, líneas y puntos, histogramas;
   - Applets.

4. *Técnicas y procedimientos*
   - Recogida de datos experimentales;
   - Elaboración de tablas de frecuencias; recuento y cálculo de frecuencias;
   - Elaboración de gráficos de puntos, diagramas de barras:
   - Interpretación de tablas y gráficos; elaboración de conclusiones a partir del análisis de tablas y gráficos;
   - Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos obtenidos en un experimento;
   - Uso de calculadora gráfica, hojas de cálculo o software estadístico y applets;
   - Cálculo de probabilidades; comparación de probabilidades y frecuencias relativas.

5. *Actitudes*
   - Reflexión sobre las intuiciones incorrectas en relación a los experimentos aleatorios;
   - Valoración de la utilidad de la estadística para analizar datos obtenidos mediante experimentación;
   - Valoración de la estética y la claridad en la construcción de tablas y gráficos estadísticos;

- Valoración de los modelos matemáticos para describir datos empíricos;
- Valoración de los modelos matemáticos para contrastar nuestras propias intuiciones;
- Valoración del modelo de Poisson para describir la ocurrencia de sucesos raros; observación de coincidencias en procesos de Poisson;
- Valoración del modelo de Poisson para describir procesos temporales;
- Valoración de la distribución normal, para aproximar la distribución de Poisson en ciertas condiciones.

8. La estadística como herramienta de clasificación

Carmen Batanero

8.1. Objetivos

Se trata de buscar criterios de clasificación de sujetos en función de los valores de ciertas variables (en este caso sus atributos físicos) para poder asignar en el futuro a un sujeto al grupo respecto al cual tiene un mayor parecido global.

En concreto utilizaremos cuatro medidas de las hojas de tres especies diferentes de Iris (Setosa, Virgínica y Versicolor) para tratar de determinar una función de estas cuatro medidas o función discriminante que permita a una persona sin conocimientos de botánica clasificar una planta Iris en función de estas medidas en una de las tres especies dadas, de modo que se minimice el número de errores cometidos.

La finalidad principal del proyecto es mostrar la utilidad de la estadística en la construcción de modelos predictivos y clasificatorios que tienen una gran aplicabilidad tanto en la taxonomía en ciencias como botánica o zoología, el diagnóstico médico, psicología y otras disciplinas.

Un último objetivo es una iniciación intuitiva a las técnicas estadísticas multivariantes. Como actividades de ampliación en cursos avanzados, estos datos son un buen ejemplo, para introducción al Manova.

Alumnos

Este tema está pensado para trabajar con alumnos de Bachillerato o primeros cursos de Universidad, preferentemente con algunos conocimientos de paquetes estadísticos, aunque el tema puede usarse para introducirlos al uso de software estadístico.

8.2. Los datos

Los datos provienen del trabajo original de Fisher sobre análisis discriminante y fueron publicados en Fisher, R. A. (1936). The use of multiple measurements in axonomic problems. *Annals of Eugenics 7*, 179-188. Nosotros lo hemos tomado del servidor de *Journal of Statistics*

Education en Internet y, en lugar de usar el fichero completo (50 observaciones de cada especie) lo hemos limitado a 30 observaciones de cada especie. En la Tabla 8.1. se presentan los datos y variables recogidas.

Tabla 8.1. Medidas de cuatro características en tres especies de Iris

	Código	Especie	Ancho pétalo	Longitud Pétalo	Ancho Sépalo	Longitud Sépalo
1	1	I. Setosa	02	14	33	50
2	1	I. Setosa	02	10	36	46
3	1	I. Setosa	02	16	31	48
4	1	I. Setosa	01	14	36	49
5	1	I. Setosa	02	13	32	44
6	1	I. Setosa	02	16	38	51
7	1	I. Setosa	02	16	30	50
8	1	I. Setosa	04	19	38	51
9	1	I. Setosa	02	14	30	49
10	1	I. Setosa	02	14	36	50
11	3	I. Verginica	24	56	31	67
12	3	I. Virginica	23	51	31	69
13	3	I. Virginica	20	52	30	65
14	3	I. Virginica	19	51	27	58
15	3	I. Virginica	17	45	25	49
16	3	I. Virginica	19	50	25	63
17	3	I. Virginica	18	49	27	63
18	3	I. Virginica	21	56	28	64
19	3	I. Virginica	19	51	27	58
20	3	I. Virginica	18	55	31	64
21	2	I.Versicolor	13	45	28	57
22	2	I.Versicolor	16	47	33	63
23	2	I.Versicolor	14	47	32	70
24	2	I.Versicolor	12	40	26	58
25	2	I.Versicolor	10	33	23	50
26	2	I.Versicolor	10	41	27	58
27	2	I.Versicolor	15	45	29	60
28	2	I.Versicolor	10	33	24	49
29	2	I.Versicolor	14	39	27	52
30	2	I.Versicolor	12	39	27	58

8.3. Preguntas, actividades y gestión de la clase

Una vez que los alumnos tienen la hoja de recogida de datos, el profesor les relata la investigación de Fisher sobre análisis discriminante, en donde el autor buscaba la manera de clasificar individuos en función de sus características físicas.

Este tipo de técnica sería útil para predecir, por ejemplo, si un niño nacerá con peso por debajo del normal, en función de las constantes físicas de la madre en el embarazo; para diagnosticar una cierta enfermedad, en función de una serie de síntomas, para seleccionar un deportista de élite, en función de su rendimiento en una serie de pruebas, etc.

Este proyecto requiere de un mayor número de cálculos y gráficos. Por ello, o bien los alumnos trabajan en parejas con un ordenador, o se requiere un ordenador en la clase, cuyas salidas sean proyectables en una pantalla. Otra alternativa sería proporcionar a los alumnos fotocopias de las salidas de ordenador, a medida que se preparan.

Una vez descritas las variables, la primera actividad será preparar representaciones gráficas de cada una de las cuatro variables, clasificadas según especie. Los alumnos analizan las diferencias observables en cada variable para cada una de las especies. Por ejemplo, respecto al ancho del pétalo:

1.

simil
varia
8.2.

de la
solap
subje
para
horiz
dos y

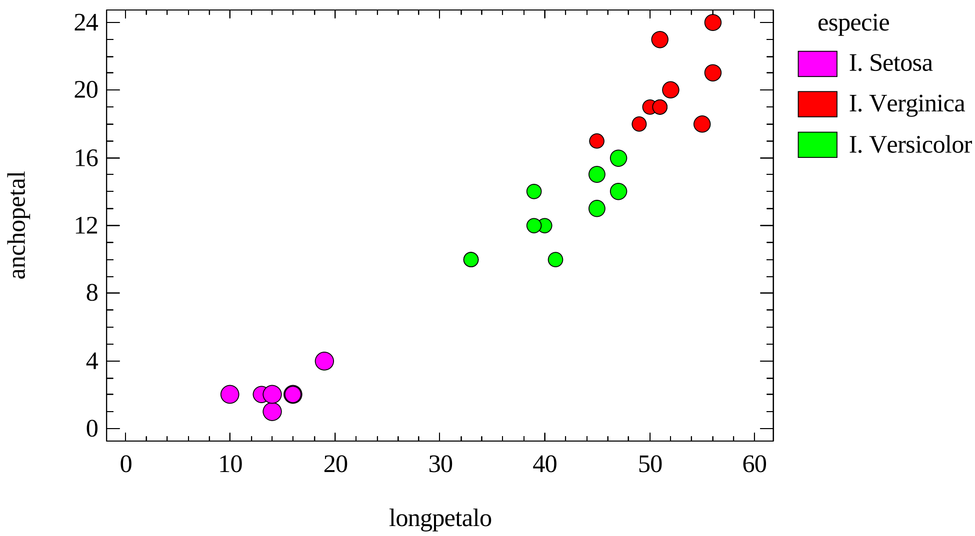


Figura 8.1. Diagrama de puntos de anchura pétalo en tres especies de Iris

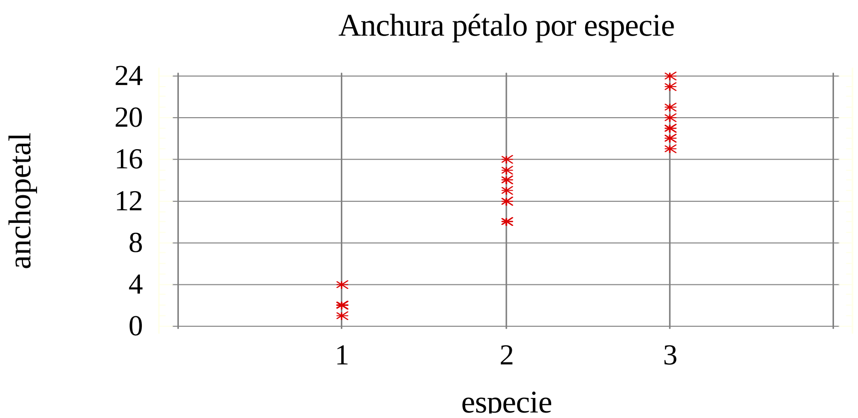


Tabla 8.2. Resúmenes estadísticos de la anchura de pétalo en tres especies de Iris

	Setosa (1)	Virgínica (2)	Versicolor (3)
Media	2.1	12.6	19.8
D. Típica	.74	2.17	2.25
Mínimo	1	10	17
Máximo	4	16	24

2. *Supongamos una nueva planta con anchura de pétalo 7 cm. ¿Dónde la clasificarías?*

Es claro que esta planta se parece más a la especie Setosa que a las demás, porque el valor absoluto de la diferencia de su anchura de pétalos con la anchura media en esta especie (4.9 cm.) es menor que respecto a Virgínica (5.6) o Versicolor (12.8). Asignamos la nueva planta a Setosa porque la *similaridad* con esta especie es mayor, de modo que tratamos de aumentar la similaridad de individuos de la misma especie y también las *diferencias* entre especies.

Matemáticamente el criterio se reduce a calcular la *distancia* del sujeto a clasificar respecto a la media o *sujeto típico* en cada especie o lo que es lo mismo, respecto al *centro de gravedad* de todos los datos correspondientes a los sujetos de la especie, que podemos expresar como:

$$d\,(7,\ \overline{x_S}) = 4.9;\ \ d\,(7,\ \overline{x_{Ve}}) = 5.6;\ \ d\,(7,\ \overline{x_{Vi}}) = 12.8$$

3. *Sólo tenemos una muestra de 10 plantas en cada especie y la diferencia entre Virgínica y Versicolor no es muy grande. Si apareciera, por ejemplo una planta con anchura de pétalo igual a 16.5 ¿Dónde la clasificaríamos? Supongamos que las medidas de esta planta son P(16.5, 45, 27, 57) para la anchura y longitud de*

pétalo y anchura y longitud de sépalo. Designemos la planta como P.

Una idea sería usar el resto de las variables. Si consideramos la distancia a las especies Virgínica y Versicolor, teniendo sólo en cuenta la anchura del pétalo, obtenemos:

$$d\,(P,\ \overline{x_S}) = 14.4;\ \ d\,(P,\ \overline{x_{Ve}}) = 3.9,\ d\,(P,\ \overline{x_{Vi}}) = 3.3.$$

Parece que el mejor criterio es clasificar la planta como pertenecente a la especie Versicolor, pero no hay mucha diferencia con Virgínica.

4. *¿Cómo puedes extender la distancia que hemos definido anteriormente al caso de dos variables? ¿Dónde clasificarías la planta en función de las dos primeras variables?*

Trataremos de tener en cuenta, en primer lugar la longitud del pétalo (Figura 8.2 y Tabla 8.3). De nuevo la diferencia es mínima. Podemos tratar de representar los dos datos para cada una de las plantas en un diagrama bidimensional y ver si se aprecia algún tipo de relación con la especie (Figura 8.3).

Vemos en la gráfica que los individuos de las tres especies diferentes aparecen en regiones casi separadas del plano, de forma que podríamos dividir el plano en tres regiones por medio de dos líneas rectas y la separación sería casi perfecta. Podemos pedir a los alumnos que dibujen dos rectas que aproximadamente dividan el plano en tres regiones, de modo que la mayoría de los sujetos de cada especie estén en la misma región. Estas son las *funciones discriminantes.* Se necesitan dos funciones discriminantes para separar tres grupos

Tabla 8.3. Resúmenes estadísticos de la longitud de pétalo en tres especies de Iris

	Setosa (1)	Virgínica (2)	Versicolor (3)
Media	14.6	40.9	51.6
D. Típica	2.36	5.17	3,4
Mínimo	10	33	45
Máximo	19	47	56

Figura 8.2. Diagrama de cajas de longitud de pétalo en tres especies de Iris

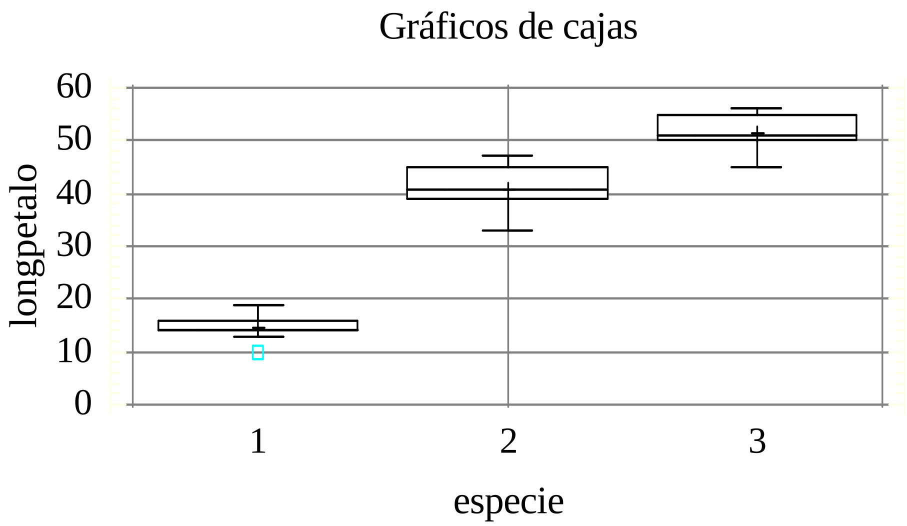
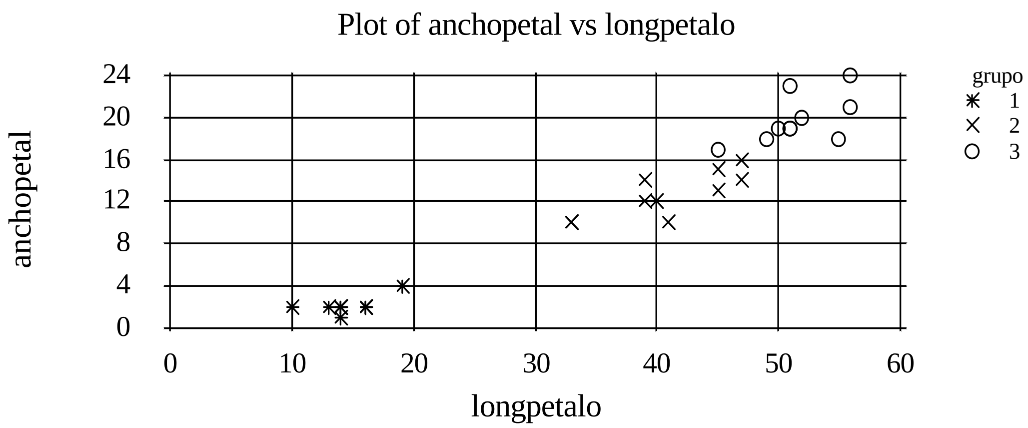


Figura 8.3. Representación conjunta de longitud y ancho de pétalo en tres especies de Iris



Para clasificar la planta *P* podemos ver en qué región del plano queda. Alternativamente, podemos estudiar si la distancia al centro de gravedad (individuo típico) es mayor en Versicolor o Virgínica. Usaremos como distancia la suma del valor absoluto de las diferencias a las medias de las dos variables: $d(P, \bar{x}_{Ve}) = 3.9 + 4.1 = 8$, $d(P, \bar{x}_{Vi}) = 3.3 + 6.6 = 9.9$; la planta P se aproxima más a Versicolor que a Virgínica, pero la diferencia no es muy grande.

5. *¿Cómo puedes mejorar la clasificación usando todas las variables? ¿Dónde clasificarías la planta en función de las cuatro variables?*

Podemos representar gráficamente las otras dos variables (Figura 8.4 y 8.5) para analizar cuál es la que nos conviene tomar a continuación. Utilizaremos dos tipos de gráficos: (a) El gráfico de cajas que permite visualizar las diferencias entre las medianas, cuartiles y valores extremos, y (b) el gráfico de puntos que permite visualizar cada uno de los datos.

Figura 8.4. Diagrama de puntos de longitud sépalo en tres especies de Iris

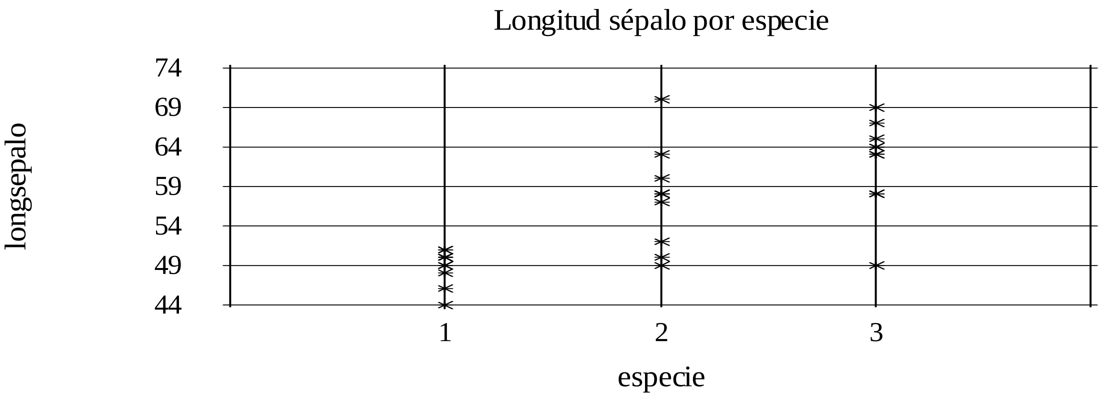
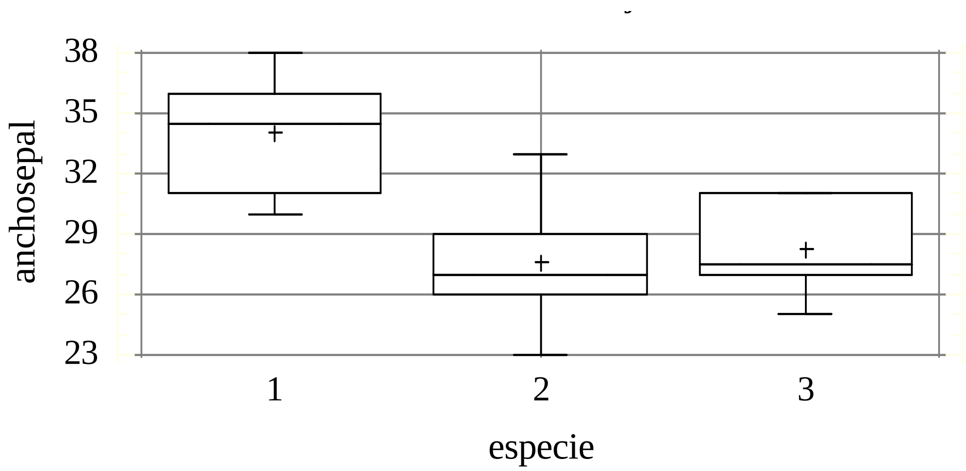


Figura 8.4. Diagrama de cajas de ancho sépalo en tres especies de Iris



Observamos que tampoco las diferencias son grandes. Calculando los valores medios de la anchura sépalo para cada especie $\bar{x}_{Ve}$= 27.6 y $\bar{x}_{Vir}$=28.2 y de la longitud del sépalo $\bar{x}_{Ve}$= 57.5 y $\bar{x}_{Vir}$=62, podemos extender la distancia usada para dos variables al caso de cuatro, simplemente añadiendo nuevos sumandos y tenemos:

$$d\,(P,\ \bar{x}_{Ve}) = 3.9 + 4.1 + 0.6 + 0.5 = 9.1$$

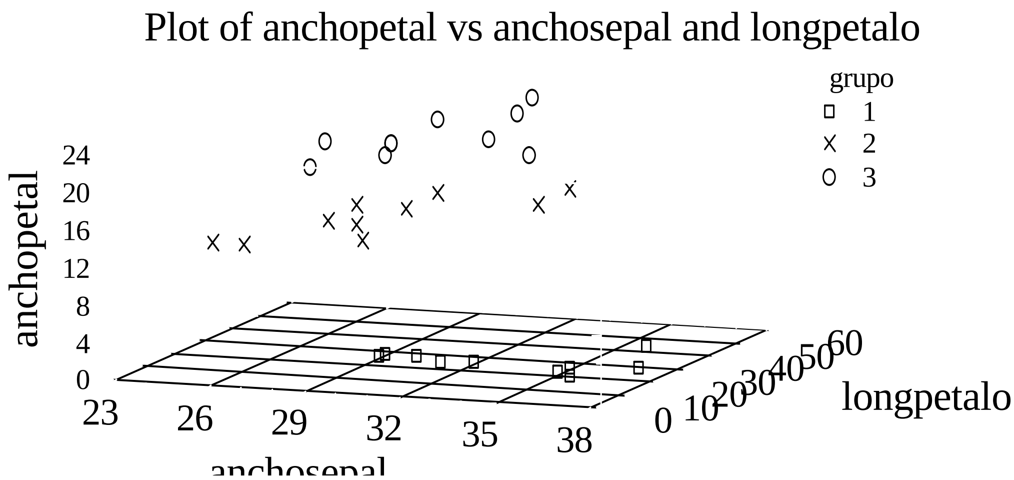
$$d\,(P,\ \bar{x}_{Vi}) = 3.3 + 6.6 + 1.2 + 5 = 16$$

Vemos ahora más claramente que la planta pertenece a la especie Iris Versicolor. Observamos también como al incluir nuevas variables hemos mejorado la clasificación debido a la nueva información.

Los valores de las cuatro variables para cada unas de las plantas de la muestra pueden considerarse como las coordenadas de un punto. Un conjunto de datos puede asemejarse, por tanto a un conjunto de puntos en un espacio:

- Cuando tenemos sólo dos variables, estamos en un plano de coordenadas (siendo las variables *X* e *Y* las dos variables), como se muestra en la Figura 8.3. para los datos de nuestra muestra.
- Con tres variables estaríamos en el espacio de tres dimensiones. Por ejemplo, en la Figura 8.6. hemos representado conjuntamente tres de las variables de nuestra muestra. No podemos representar un espacio de cuatro o más dimensiones, pero nos lo podemos imaginar.
- Cuando tenemos un conjunto de puntos en un espacio, puede ser que, como en las Figuras 8.3 y 8.6 aparezcan agrupaciones. Entonces podemos clasificar los puntos en grupos o categorías (en esta caso las especies) usando las funciones discriminantes.

Figura 8.6. Representación conjunta de longitud y ancho de pétalo y ancho de sépalo en tres especies de Iris



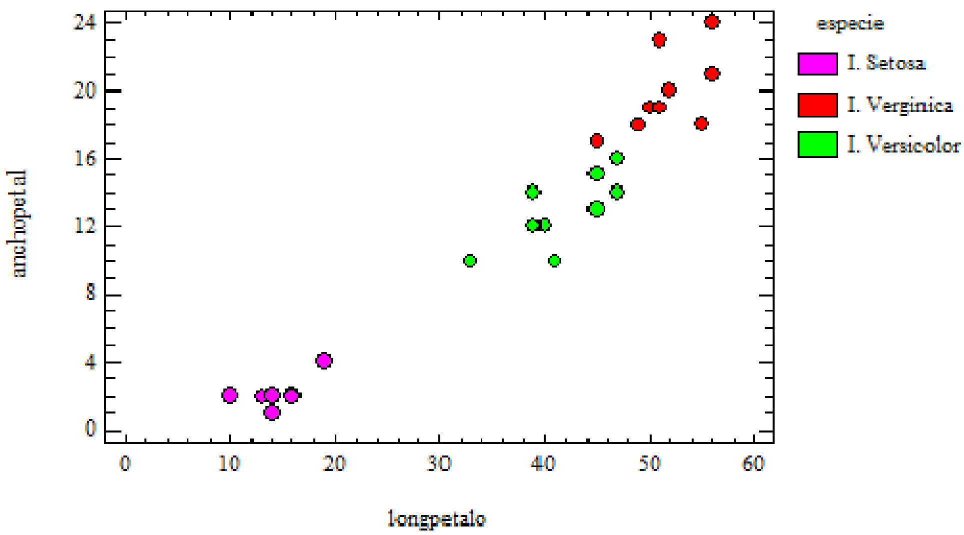
En el caso del plano, las funciones discriminantes son rectas (funciones de una sola variable). Para separar puntos en un espacio de tres dimensiones, necesitamos planos (funciones de dos variables). Para cuatro, cinco o *n* variables las funciones discriminantes son funciones lineales con *n*-1 variables. Para clasificar un individuo en un grupo, calculamos las distancias a los centros de gravedad de los diferentes grupos y lo asignamos al grupo con el que tiene menor distancia. Esta clasificación no siempre es perfecta, pero funciona en la mayoría de los casos.

6. *¿Qué podemos deducir de la relación entre las variables en cada especie?*

Una representación plana de cuatro dimensiones se obtiene con el gráfico de burbujas (Figura 8.7) en que los ejes X e Y sirven para representar el ancho y la longitud del pétalo. El tamaño de la burbuja en este caso viene dado por el ancho de sépalo y los colores indican la especie. Se observa una separación clara de las especies, pero no aparece clara la relación clara del ancho del sépalo con las otras variables.

Observamos que en general hay relación entre ancho y longitud del péalo y que la especie Setosa es la que los tiene más pequeños y la Virgínica la más grande. Para estudiar con más detalle estas relaciones introduciremos los coeficientes de correlación.

Figura 8.7. Gráfico de burbujas. Características de tres especies de Iris



7. *¿Cuáles de las variables están más y menos relacionadas? ¿Es la relación directa o inversa?*

Para responder esta pregunta, será necesario calcular las correlaciones entre los pares de variables, que presentamos en la tabla 8.4.

Observamos una relación directa entre el ancho del pétalo, la longitud del pétalo y la longitud del sépalo, pero inversa con el ancho del sépalo. Esta variable tiene correlación inversa con todas las demás.

Tabla 8.4. Matriz de correlaciones

	anchopetal	anchosepal	Longpetalo	longsepalo
anchopetal	1,0000	-0,516047	0,974889	0,827445
anchosepal	-0,516047	1,0000	-0,553689	-0,189652
longpetalo	0,974889	-0,553689	1,0000	0,8476
longsepalo	0,827445	-0,189652	0,8476	1,0000

8.4. Actividades de ampliación

Partiendo de la idea de que los valores de las variables para una unidad estadística son las coordenadas de un punto en el espacio, podemos tratar ver si somos capaces de identificar puntos cercanos y lejanos y si corresponden a sujetos de la misma o diferente especie. Para ello planteamos la siguiente actividad, para lo cuál se proporciona a los alumnos la matriz de distancias entre sujetos (Tabla 8.5).

8. *Considerando los valores de las cuatro variables como las coordenadas de un punto en un espacio de cuatro dimensiones, ¿Puedes encontrar algunos individuos que se encuentren próximos? ¿que se encuentren lejos?*

Algunos ejemplos de individuos cercanos son el 1 y 4 o el 1 y 10 0 el 7 y 9, todos ellos de la especie Setosa. Ejemplos de individuos lejanos son el 4 con el 11 o el 7 con el 22 (de diferentes especies).

9. *Considerando los valores de las cuatro variables como las coordenadas de un punto en un espacio de cuatro dimensiones, ¿Puedes encontrar algunos individuos que se encuentren próximos? ¿que se encuentren lejos?*

Los alumnos examinarán la tabla de distancias para tratar de localizar individuos cercanos (cuya distancia relativa sea pequeña) y lejanos (cuya distancia relativa sea grande).

Algunos ejemplos de individuos cercanos son el 1 y 4 o el 1 y 10 0 el 7 y 9, todos ellos de la especie Setosa. Ejemplos de individuos lejanos son el 4 con el 11 o el 7 con el 22 (de diferentes especies).

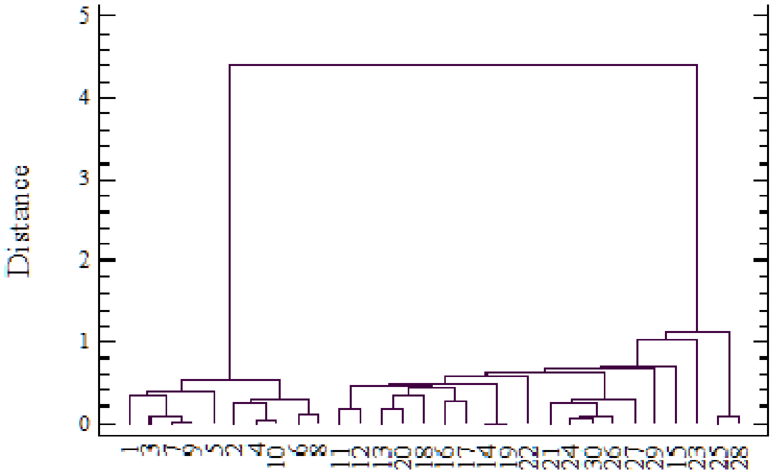
El profesor puede, a continuación, comentar la importancia del modelo geométrico en estadística, donde cada sujeto se considera un punto en un espacio multivariante. Una vez aceptada esta "metáfora" se pueden usar conceptos geométricos, como el de distancia, para analizar los datos.

También puede discutir el interés de la interpretación en el contexto: acá la distancia indica diferencia física entre plantas y la cercanía similaridad.

Tabla 8.5. Distancias entre individuos en especies Iris

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.
1.																													
2.	41																												
3.	12	65																											
4.	11	26	31																										
5.	38	29	26	43																									
6.	30	65	58	13	94																								
7.	13	88	5	42	49	65																							
8.	55	114	71	42	125	13	78																						
9.	10	61	6	37	30	72	5	97																					
10.	9	32	33	2	53	9	40	34	37																				
11.	1156	1531	1052	1233	1330	1098	1015	893	1150	1195																			
12.	1454	1863	1386	1519	1714	1326	1335	1097	1490	1463	74																		
13.	1634	2105	1590	1715	1976	1502	1509	1281	1678	1649	190	54																	
14.	889	1244	801	978	1061	869	756	698	873	940	31	139	233																
15.	525	778	421	612	581	579	402	458	475	594	227	501	693	126															
16.	893	1250	805	972	1069	859	762	690	883	938	27	133	221	6	144														
17.	1246	1639	1158	1327	1458	1172	1111	959	1252	1279	14	30	114	47	305	49													
18.	507	746	403	586	553	553	390	432	461	570	233	509	717	138	2	154	315												
19.	809	1102	705	884	909	795	686	622	787	854	63	225	413	42	72	56	105	70											
20.	825	1166	745	908	997	799	702	634	815	870	39	141	237	2	120	8	53	130	40										
21.	2541	3066	2445	2642	2863	2389	2374	2074	2573	2562	351	1165	191	506	1078	518	255	1098	630	530									
22.	2175	2676	2107	2278	2511	2039	2028	1758	2211	2196	289	105	99	388	918	406	185	942	530	402	30								
23.	2002	2485	1910	2097	2290	1880	1845	1605	2024	2029	166	54	90	273	735	279	100	753	383	291	37	27							
24.	1758	2195	1630	1855	1954	1684	1587	1419	1748	1803	74	86	210	171	485	181	60	495	205	193	147	153	60						
25.	1251	1580	1103	1338	1323	1239	1092	1018	1211	1308	89	265	503	132	198	150	141	194	58	146	530	508	339	125					
26.	1818	2299	1706	1937	2068	1758	1639	1499	1806	1875	106	82	132	175	543	191	66	567	271	199	113	89	34	30	225				
27.	1686	2147	1586	1791	1938	1610	1523	1361	1686	1731	78	44	94	143	505	153	38	525	237	161	117	81	26	30	217	6			
28.	2346	2865	2226	2453	2626	2230	2161	1927	2354	2385	234	132	182	377	871	383	174	891	483	407	27	63	22	66	371	50	60		
29.	1758	2195	1630	1855	1954	1684	1587	1419	1748	1803	74	86	210	171	485	181	60	495	205	193	147	153	60		125	30	30	66	
30.	2137	2630	2033	2220	2421	1995	1974	1710	2163	2158	183	73	117	322	808	312	129	822	432	344	46	66	15	69	362	63	53	19	69

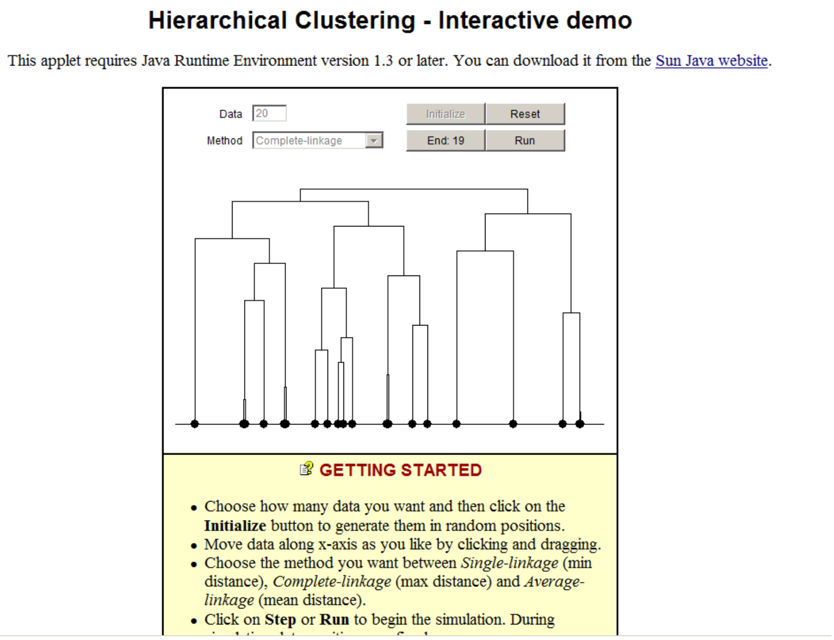
Figura 8.8. Clasificación automática de individuos en especies Iris



10. Explora el modo en que se forman los grupos en el análisis cluster utilizando el applet disponible en el siguiente enlace /home.dei.polimi.it/matteucc/Clustering/tutorial_html/AppletH.html.

En este applet (ver Figura 8.9) es posible elegir un número de datos y método de aglomeración. Los datos son generados por el programa y tienen una sola variable, pero puede cambiarse los valores pinchando sobre cada punto y arrastrando con el ratón. Se puede hacer formar el árbol paso a paso observando la elección del dato que se unirá en cada paso, dependiendo del método de aglomeración elegido.

Figura 8.9. Tutorial sobre clasificación automática



11.*Estudio de diferencias entre variables. Es claro de los gráficos que estas tres especies tienen rasgos físicos diferenciados. ¿Serían las diferencias de medias estadísticamente significativas?*

En un curso avanzado de estadística, estos datos proporcionan una buena oportunidad para introducir el modelo lineal general. En particular, el análisis multivariante de varianza (Manova) para un vector de variables dependientes formado por las cuatro variables analizadas y un único factor fijo (la especie). La tabla de análisis de varianza (tabla 8.6) nos da un valor *F* muy significativo. Por tanto, podemos rechazar la hipótesis de igualdad del vector formado por las medias de las diferentes variables en las tres especies. También se obtienen resultados estadísticamente significativos para cada una de las variables por separado. En la tabla 8.6 hemos presentado el primero de estos análisis. El resto podría ser obtenido fácilmente por el estudiante sin más que cambiar la variable de entrada en el software.

Tabla 8.6. Resultados del análisis multivariante de varianza

Analysis of Variance for anchopetal

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	1584,6	2	792,3	230,27	0,0000
Residual	92,9	27	3,44074		
Total (Corr.)	1677,5	29			

R-Squared = 94,462 percent;
R-Squared (adjusted for d.f.) = 94,0518 percent
Standard Error of Est. = 1,85492

Analysis of Variance for anchosepal

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	249,867	2	124,933	14,67	0,0000
Residual	230,0	27	8,51852		
Total (Corr.)	479,867	29			

R-Squared = 52,07 percent
R-Squared (adjusted for d.f.) = 48,5197 percent
Standard Error of Est. = 2,91865

12. *¿Sería posible completar el estudio con la estimación de los valores medios de las variables en cada grupo?*

En la tabla 8.6 hemos presentado el primero de estos análisis. El resto podría ser obtenido fácilmente por el estudiante sin más que cambiar la variable de entrada en el software.

Además en la tabla 8.7 se presentan los intervalos de confianza para el ancho del pétalo calculados con el método LSD, que se han obtenido automáticamente con el software. Igualmente podrían obtenerse dichos intervalos para el resto de la variable.

Tabla 8.7. Resultados del cálculo de intervalo de confianzas para ancho del pétalo

Grupo	n	Media	D. Típica	Límite inferior	Límite superior
1	10	2, 1	0,5865	1,2489	2,9510
2	10	12, 6	0,5865	11,749	13,451
3	10	19,8	0,5865	18,749	20,651
Total	30	11,5			

13. *Significado del intervalo de confianza. Se propone a los estudiantes que respondan los siguientes ítems tomados de Olivo (2008) y discutan los resultados.*

Ítem 1. El intervalo de confianza del 50% para la media de una población μ es:

a. El rango dentro del cuál caen el 50% de los valores de la media de la muestra $\bar{x}$.
b. Un intervalo más ancho que el intervalo de confianza del 95%.
c. **Un intervalo de valores calculado a partir de los datos de la muestra. En el 50% de las muestras de una población, el intervalo calculado contiene a la media de la población.**
d. Dos veces más ancho que el intervalo de confianza del 100%.

Ítem 2. Comparado a los intervalos de confianza calculados en muestras de tamaño n=4 en una población normal, el ancho de los intervalos de confianza de la media de la población calculado en muestras de tamaño n = 50:

a. Variará más que los anchos de los intervalos para muestras de tamaño n =4
b. **Variará, pero no tanto como lo hicieron los anchos de los intervalos para muestras de tamaño n =4**
c. Tomarán valores parecidos

Ítem 3. Si, manteniendo todos los demás datos fijos, el nivel de confianza se reduce (por ejemplo de 90% a 80%):

a. El intervalo de confianza no cambia.
b. El intervalo de confianza será más ancho
c. **El intervalo de confianza será más angosto**
d. El cambio en el intervalo de confianza no es predecible

Ítem 4. En un intervalo de confianza del 95% para la media:

a. Si se toman muchas muestras y con cada una se construye el intervalo, la media muestral $\bar{x}$ caerá dentro del intervalo de confianza el 95% de las veces.
b. La probabilidad de que $\bar{X}$ caiga dentro de un intervalo de confianza calculado de una muestra específica es 0.95.
c. **Si se toman muchas muestras de igual tamaño, el 95% de los intervalos de confianza calculado contendrían a μ.**

14.*Exploración gráfica de datos multivariantes.*

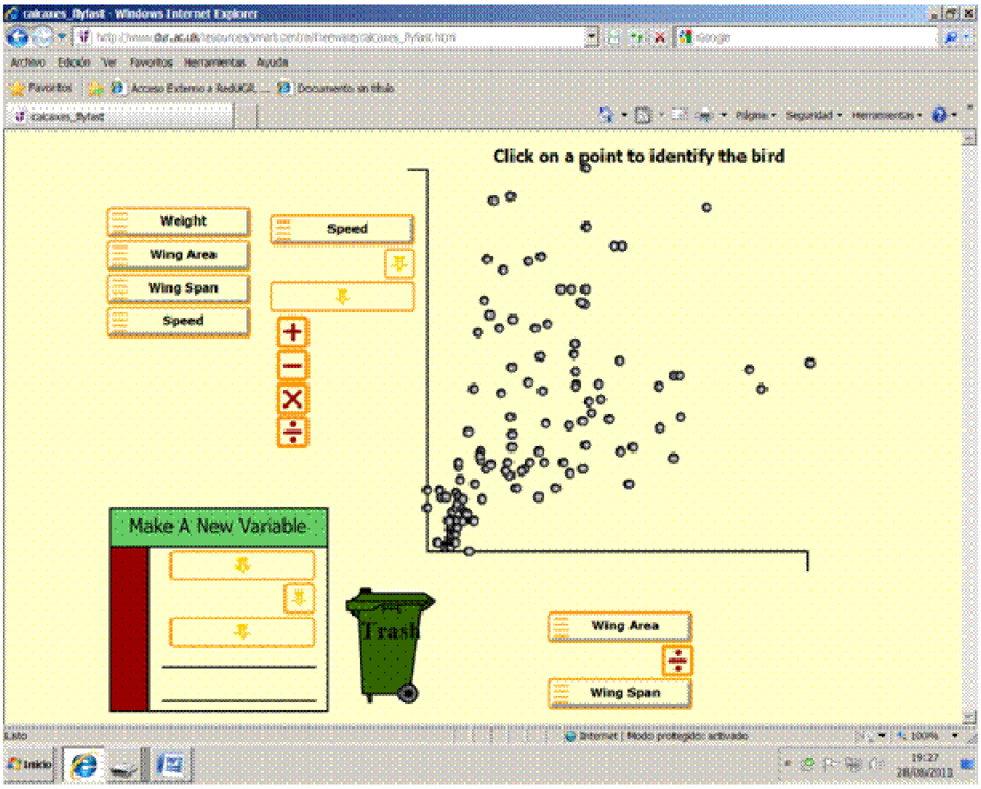
Una posible dificultad del tema es la visualización de datos de más de tres dimensiones. Sin embargo, este tipo de datos es cada vez más frecuente en Internet. Por ejemplo en las redes sociales o numerosas páginas web donde se pueden encontrar y descargar gran variedad de datos estadísticos sobre diversos temas de actualidad.

Actualmente hay agencias y oficinas estadísticas (por ejemplo el INE) que ponen a disposición de los ciudadanos toda clase de datos, lo que requiere la necesidad de desarrollar una mejor comunicación entre los productores de estadísticas y los consumidores. Además en estos informes aparecen representaciones gráficas interactivas sobre datos multivariantes, en las que los usuarios pueden elegir que variables representar y que comparaciones realizar.

Para aprovechar su potencial, se deberían aprovechar las posibilidades que brindan las nuevas tecnologías, de manera que se innovase en la presentación de los datos estadísticos en páginas públicas de Internet, proporcionándose también foros de debate en los que se pudiesen interpretar y razonar críticamente sobre los distintos conjuntos de datos, Ridgway McCusker y Nicholson (2006) describen la forma de trabajar con dichos datos. Los autores han preparado visualizaciones interactivas que pueden ayudar a los estudiantes a dotar de sentido a este tipo de datos y comprender sus interacciones.

En la página http://www.dur.ac.uk/smart.centre/freeware/ pueden encontrarse estos recursos, uno de los cuales se presenta en la Figura 8.10.

Figura 8. 10. Actividades de exploración gráficas del Smart Center



8.5. Algunas dificultades y errores previsibles

8.5.1. Comparaciones múltiples en inferencia

Los métodos de análisis de varianza simple y multivariantes tratan de evitar el llamado problema de las comparaciones múltiples. Moses (1992) advierte de este error, muy arraigado entre investigdores, que consiste en creer en la conservación del valor del nivel de significación cuando se realizan contrastes consecutivos en el mismo conjunto de datos. Es una práctica usual, una vez recogido los datos realizar cuantos más contrastes se pueda, sin ajustar convenientemente el valor del nivel de significación.

El significado de un nivel de significación del 5% es que, si llevamos a cabo 100 comparaciones sobre el mismo conjunto de datos y usamos en todos ellos el nivel de significación habrá que esperar que 5 de las 100 pruebas sean significativas por azar, incluso cuando la hipótesis nula en cada una sea cierta. Esto dificulta la interpretación de los resultados significativos en el caso que se hayan hecho muchas comparaciones.

White (1980) cita como ejemplos de casos en que aparece el problema de comparaciones múltiples: comparar todos los pares de medias con el test de la t (en lugar de emplear el análisis de varianza) y usar repetidamente el análisis de varianza de un factor para estimar el efecto de un conjunto de factores (en vez del análisis factorial de varianza).

8.5.2. Interpretación de intervalos de confianza

Los intervalos de confianza también tienen interpretaciones erróneas entre estudiantes e investigadores. Cumming, William y Fidler (2004) estudian los errores de interpretación de intervalos de confianza, para el caso particular de la media. La mayoría de sujetos en su estudio esperaban (erróneamente) una alta probabilidad de replicación, esperando que en una nueva muestra la media caiga de nuevo en el intervalo de confianza original.

Otra creencia errónea muy común es creer que los intervalos de confianza de dos medias de muestras independientes son sólo significativamente diferentes cuando se tocan justo extremo con extremo. También se confunde el cálculo de intervalos de confianza para medias independientes y relacionadas.

Behar (2001) realiza un estudio con estudiantes universitarios para valorar la comprensión del intervalo de confianza. Entre otras dificultades señala falta de comprensión de la manera como se relacionan el ancho del intervalo y el nivel de confianza. Otro error básico fue pensar que los valores que constituyen un intervalo de confianza, se refiere a la variable aleatoria o al estadístico que se usa como estimador y no al parámetro en estudio. Se supone también que el coeficiente de confianza, pues suponen que da la probabilidad de que el parámetro se encuentre en el intervalo, mientras que la verdadera definición es el porcentaje de intervalos calculados a partir de muestras de igual tamaño en la población que contiene al parámetro.

Olivo (2008) encuentra los siguientes errores relacionados con el intervalo de confianza:

- No se comprende que el coeficiente de confianza da un porcentaje de intervalos tomados en las mismas condiciones que contienen al parámetro. El alumno confunde estadístico con parámetro; del mismo modo que confunde varianza poblacional y muestral. Tampoco asocian correctamente el ancho del intervalo con el nivel de confianza.
- El alumno confunde la distribución de muestreo apropiada, y también confunden los parámetros en las distribuciones muestrales, por ejemplo el número de grados de libertad. Tiene también dificultad en

determinas correctamente un valor crítico a partir de la tabla de la distribución.

- Los alumnos hacen una interpretación incorrecta del intervalo de confianza a partir de una salida de ordenador, confunden los símbolos de varianza poblacional con desviación típica y observa una gran cantidad de conflictos con la notación.

8.5.3. Modelización en estadística

En este proyecto presentamos a los estudiantes un modelo geométrico muy potente, el análisis multivariante, donde se representa una unidad estadística (por ejemplo, un alumno al que hemos dado un cuestionario) por un punto de un espacio vectorial, cuyas coordenadas son los valores de las diferentes variables incluidas en el estudio (las respuestas dadas a los diferentes ítems del cuestionario). Considerados los sujetos como "puntos" y las variables como "ejes" en dicho espacio vectorial, esta "metáfora" nos permite definir distancias para estudiar la proximidad entre dos puntos (análisis de aglomerados), discriminar entre subjconjuntos (análisis discriminante) o analizar la dimensión del espacio vectorial, tratando de reducirla (análisis factorial).

Es importante hacer ver a los estudiantes que un modelo “es una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real, de un sistema de relaciones o de un proceso evolutivo que surge de una descripción de la realidad” (Henry, 1997, pg. 78). Por tanto, un modelo no es “verdadero” o “falso”, sino simplemente útil y la matemática es, en su mayor parte actividad de modelización.

Dantal (1997) señala los siguientes pasos para la enseñanza de la modelización:

1. Observación de la realidad
2. Descripción simplificada de la realidad
3. Construcción de un modelo
4. Trabajo matemático con el modelo
5. Interpretación de resultados en la realidad

Indica también que los profesores solemos tener prisa por llegar a los pasos 3 y 4 (los que podrían parecer “verdaderas matemáticas”), puesto que son los más sencillos de enseñar a nuestros alumnos. Sin embargo todas las etapas son igualmente importantes en el aprendizaje si queremos que realmente los alumnos lleguen a comprender la utilidad y la razón de ser de las matemáticas.

Una ayuda en la enseñanza de la modelización es la simulación. En ella ponemos en correspondencia dos experimentos aleatorios diferentes, de modo que a cada suceso elemental del primer experimento le corresponda un suceso elemental del segundo y sólo uno, y los sucesos puestos en correspondencia en ambos experimentos sean equiprobables. Al trabajar mediante simulación estamos ya modelizando, porque debemos no sólo simplificar la realidad, sino fijar los aspectos de la misma que queremos simular y especificar unas hipótesis matemáticas sobre el fenómeno estudiado.

Lo importante de ésta es que podemos operar y observar resultados del segundo experimento y utilizarlos para obtener información del primero. Entre el *dominio de la realidad* en que se encuentra la situación que queremos analizar y en la que interviene el azar y el *dominio teórico* donde, con ayuda de la matemática construimos un modelo teórico de probabilidad que debe, por un lado, simplificar la realidad y abstraer sólo sus aspectos esenciales y, por otro, ser útil para interpretar los caracteres retenidos en la modelización, Coutinho (2001) sitúa el *domio pseudo-concreto* en el que podríamos trabajar con los alumnos por medio de la simulación. Sin embargo, conviene tener en cuanta algunas dificultades citadas Countinho cuando los alumnos trabajan con simulaciones:

- Dificultades de manejo del software si el alumno no está familiarizado, por lo que se recomienda usar programas fácilmente manipulables que no añadan complejidad innecesaria a la actividad de simulación;
- Resistencia a usar la simulación y la aproximación experimental para resolver un problema de probabilidad en los casos en que es posible resolver el problema mediante cálculo directo;
- Dificultad en aceptar datos de simulaciones que no han llevado a cabo personalmente para obtener estimaciones de la probabilidad;
- Dificultad en diferenciar la estimación de la probabilidad que proporciona la simulación del verdadero valor teórico de la probabilidad (que solo es accesible por cálculo en los casos que sea posible).

8.6. Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar explícita o implícitamente los siguientes contenidos:

1. Aplicaciones de la estadística:

- Botánica, taxonomía;
- Clasificación automática;
- Discriminación de grupos u objetos;
- Determinación de factores.

2. Conceptos y propiedades:

- Distancia, similaridad y disimilaridad; centro de gravedad, distancia al centro de gravedad;
- Modelización; pasos en el proceso de modelización;
- Representación geométrica de datos; coordenadas; las unidades estadísticas como puntos;
- Discriminación; variables independientes y dependiente; función discriminante; bondad de la clasificación;
- Clasificación; criterios de clasificación;
- Análisis de varianza. Factor fijo. Interpretación de la prueba *F*.
- Análisis multivariante de varianza. Variables dependientes y factores;
- Contraste de hipótesis, errores en un contraste de hipótesis. Interpretación de resultados significativos;
- Intervalo de confianza. Cálculo e interpretación de intervalos de confianza.

3. Notaciones y representaciones:

- Tablas; listado de datos; tabla de distancias;
- Gráficos de puntos; gráficos de cajas; diagramas de dispersión en dos y tres dimensiones;
- Dendograma; Gráfico de burbujas;
- Gráficos dinámicos interactivo;
- Applets.

4. Técnicas y procedimientos:

- Cálculo de distancias;

- Representación de datos;
- Cálculo de intervalos de confianza;
- Uso del software para análisis multivariante;
- Clasificación automática;
- Discriminación; búsqueda de criterios;
- Exploración de gráficos y conjuntos de datos multivariantes.

5. Actitudes:

- Valoración de la actividad matemática de modelización;
- Comprensión de la diferencia entre modelo y realidad;
- Valoración del modelo lineal, para el estudio de datos multivariantes;
- Valoración de la claridad y estética en los gráficos;
- Precaución con errores comunes en el uso de la estadística. Precaución con el problema de comparaciones múltiples;
- Valoración de los métodos de Manova e intervalos de confianza LSD para evitar el problema de comparaciones múltiples;
- Valoración del software de visualización dinámica, como ayuda a la interpretación de datos complejos.

9. Supervivencia en el Titanic

Carmen Díaz, Gustavo R. Cañadas y Carmen Batanero

9.1. Objetivos

En este proyecto se trabajará con el contexto de los datos de los supervivientes durante la tragedia del Titanic. Estos datos servirán para trabajar el tema de tablas de contingencia, distribuciones conjuntas de datos, distribuciones marginales y distribuciones condicionales. También se podrán trabajar el uso de determinadas representaciones gráficas para describir relaciones entre variables categóricas.

Por último se verán pruebas de contraste de asociación entre dos variables categóricas como el test de Chi-cuadrado y medidas de asociación, como el coeficiente Phi o la *V* de Cramer. Se podrá trabajar estos conceptos desde el punto de vista de cálculo manual y desde el uso de software estadístico como SPSS. Se manejan también algunos applets disponibles en Internet.

El principal fin del proyecto es dar a conocer algunos procedimientos para analizar la asociación entre dos variables cualitativas. Nos parece importante este punto en un momento en que los métodos de investigación cualitativos cobran gran importancia y en que algunos investigadores pudieran equiparar estos métodos a “no uso de la estadística”. Los métodos de análisis de datos cualitativos son muy numerosos en estadística y, en particular, en casi cualquier investigación es muy posible obtener una tabla de contingencia, incluso hay investigaciones que se basan únicamente en este tipo de análisis.

Por otro lado, las tablas de contingencia constituyen un método usual de presentar la información estadística en la prensa o Internet, por lo que algunos autores (por ejemplo, Schield, 2006) incluyen la interpretación correcta de éstas como un componente de la cultura estadística. Sin embargo, dichas tablas reciben poca atención en la enseñanza universitaria, pues se supone que su lectura e interpretación son habilidades adquiridas por los estudiantes.

Más concretamente, en este proyecto se persiguen los siguientes objetivos:

- Saber interpretar una tabla de contingencia. Comprender los conceptos de distribución conjunta de frecuencias, distribución marginal y distribución condicional.
- Saber calcular probabilidades a partir de datos representados en una tabla de contingencia: probabilidad simple, compuesta y probabilidad condicionada.
- Saber representar gráficamente datos de variables cualitativas, mediante el diagrama de barras adosadas y gráfico de mosaicos.
- Trabajar el concepto de asociación con variables cualitativas; diferenciar la asociación de la independencia y comprender las propiedades de la independencia.
- Saber realizar un contraste de Chi-cuadrado, para estudiar la asociación entre variables.
- Saber calcular algunas medidas de asociación, diferenciando las que son adecuadas para tablas 2x2 o tablas rxc y las que son simétricas o no simétricas.
- Saber interpretar los resultados numéricos de dichas medidas de asociación.

Alumnos

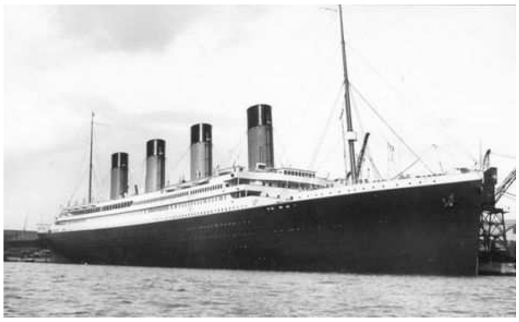
El proyecto puede ser utilizado con alumnos de Bachillerato y alumnos universitarios dentro del tema de estadística descriptiva bivariable, contraste Chi- cuadrado y medidas de asociación. No necesita mucha formalización, pues los cálculos son sencillos, sobre todo si se dispone de software adecuado.

9.2. Los datos

En este proyecto se trabajarán con los datos de los pasajeros del Titanic. Estos datos están disponibles en Internet (por ejemplo, en www.statsci.org/data/general/titanic.txt). Se puede pedir a los alumnos que busquen estos datos, o se puede dar preparada la matriz de datos. Se puede iniciar el tema dando los datos resumen (en forma de tablas de contingencia, o incluso para que ellos mismos construyan la tabla) o bien se puede iniciar el proyecto directamente con el fichero en formato .sav para trabajar con SPSS.

9.3. Preguntas, actividades y gestión de la clase

Se comenzará el proyecto hablando de la tragedia del Titanic, que seguramente la mayor parte de los alumnos conocen. Los alumnos pueden buscar información en Internet, traer leído algunos de los artículos, e incluso podrían ver alguna de las películas recientes sobre el tema. Podemos comenzar con la siguiente introducción:



1. *El 10 de abril de 1912, el Titanic zarpaba con 1317 pasajeros a bordo, ante la admiración de una muchedumbre de curiosos que contemplaban atónitos como aquella mole de acero se alejaba majestuosamente del puerto.*

   Cinco días después los medios de comunicación de todo el mundo se hicieron eco de la increíble noticia: el barco más grande jamás construido yacía a casi cuatro mil metros de profundidad.

   Sólo 451 pasajeros, lanzados a los escasos 20 botes de madera se salvaron. Otros 862 se congelaban antes de que el Carpathia, el buque más cercano, llegara al rescate. El naufragio de ese mítico buque dejó tras de sí una larga lista de preguntas sin respuesta. ¿Qué porcentaje de pasajeros sobrevivió y que porcentaje murió?

Los estudiantes prepararían una tabla de frecuencias simple (Tabla 9.1) para la variable sobrevive, con las frecuencias absolutas y el porcentaje. Podrían a partir de ella calcular la probabilidad simple de supervivencia.

Tabla 9.1. Distribución de pasajeros según supervivencia

	Frecuencia	Porcentaje
Sobrevive	451	34,3
No sobrevive	862	65,6
Total	1313	100,0

2. *Las convenciones sociales y los comportamientos individuales hicieron que esta terrible desgracia no se cebará en todos por igual. En este proyecto vamos a estudiar si la tasa de supervivencia del pasaje estaba asociada al precio de la travesía (1ª, 2ª, 3ª clase).*

En primer lugar vamos obtener datos sobre cuántos pasajeros viajaron en cada una de las clases. Se inicia este estudio simplemente construyendo la distribución de frecuencias simple para la variable clase. Se pide a los alumnos que calculen la frecuencia absoluta y el porcentaje de pasajeros en cada una de las clases.

Tabla 9.2. Distribución de pasajeros según clase social

	Frecuencia	Porcentaje
Primera clase	322	24,5
Segunda clase	280	21,3
Tercera clase	711	54,2
Total	1313	100,0

3. *Hasta ahora hemos tratado con variables de una en una, es decir, hemos visto cuantos han sobrevivido, y cuántos había en cada clase, pero como hemos dicho, queremos analizar si el precio de la travesía estuvo relacionado con el hecho de haberse salvado. Es decir, queremos estudiar la relación que hay entre estas dos variables. Para empezar, vamos a rellenar la tabla 9.3 (usaremos sólo las frecuencias absolutas).*

Se presenta a los alumnos la estructura de la tabla de contingencia, y se rellena con los datos conocidos hasta el momento, el total de pasajeros que sobrevivió y el total de pasajeros dentro de cada clase. Se pide a los alumnos que completen la tabla con los datos disponibles, quedando de la forma que aparece en la Tabla 9.4. Se puede hacer observar que la suma de los totales por filas y por columnas coinciden con el total de pasajeros.

Tabla 9.3. Distribución de pasajeros según supervivencia y clase social

	Sobrevive	No sobrevive	Total
Primera clase			322
Segunda clase			280
Tercera clase			711
Total	451	862	1313

Tabla 9.4. Distribución de pasajeros según supervivencia y clase social

	Sobrevive	No sobrevive	Total
Primera clase	194	128	322
Segunda clase	119	161	280
Tercera clase	138	573	711
Total	451	862	1313

4. *La tabla 9.4 representa al mismo tiempo la frecuencia absoluta de las dos variables y se denomina distribución conjunta de variables o tabla de contingencia. Aprenderemos a obtener otras distribuciones de una sóla variable a partir de la tabla.*

En la tabla 9.5 presentamos las variable X, con j valores, $x_1, x_2, \ldots, x_j$ y la variable Y, con k valores, $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Se define la distribución conjunta de frecuencias de X e Y como la distribución de frecuencias de todos los pares de valores (x,y). Cada celda contiene la frecuencia absoluta que corresponde a los valores de la variable que aparecen en su fila y su columna.

Tabla 9.5. Distribución conjunta de una variable

	x_1	x_2	x_2	…	x_j	*Total*
y_1	f_{11}	f_{21}	f_{31}	…	f_{j1}	$f_{.1}$
y_2	f_{12}	f_{22}	f_{32}	…	f_{j2}	$f_{.2}$
y_3	f_{13}	f_{23}	f_{33}	…	f_{j3}	$f_{.3}$
…	…	…	…		…	…
y_k	f_{1k}	f_{2k}	f_{3k}	…	f_{jk}	$f_{.k}$
Total	$f_{1.}$	$f_{2.}$	$f_{3.}$	…	$f_{j.}$	n

Una vez comprendido el concepto de frecuencia doble, se explica a los alumnos los conceptos de *distribuciones marginales,* que en este ejemplo corresponden al total de pasajeros en cada clase y el total de pasajeros que sobrevivieron (ya representadas por los alumnos). A partir de una distribución conjunta de frecuencias se puede definir la distribución marginal de X como la distribución de los valores de X independientemente de los valores de Y. Igualmente se puede definir la distribución marginal de Y como la distribución de los valores de Y independientemente de los valores de X.

Se sigue con el concepto de distribución condicional: A partir de una distribución conjunta de frecuencias se puede definir la *distribución condicional* de X dado Y_i como la distribución de los valores de X cuando Y toma el valor Y_i. Habrá tantas distribuciones condicionales de X como valores tenga *Y*. Igualmente se podrían definir las distribuciones condicionales de *Y*. En nuestro caso se pueden definir cinco distribuciones condicionales:

- La distribución condicional de “sobrevive” para los pasajeros en primera; la distribución condicional de “sobrevive” para los pasajeros en segunda y la distribución condicional de “sobrevive” para los pasajeros en tercera.
- La distribución condicional de “clase” para los pasajeros que sobrevivieron y la distribución condicional de “clase” para los pasajeros que no sobrevivieron.

A continuación, como ejemplo, se muestra la distribución condicional de “sobrevive” para los pasajeros en “tercera clase” (Tabla 9.6). Del mismo modo se calcularían el resto.

Tabla 9.6. Distribución condicional

	Sobrevive	No sobrevive	Total
Tercera clase	138	573	711

5. *En los puntos anteriores hemos trabajado con valores absolutos, comprendiendo los distintos tipos existentes. Podemos estar interesados en el calculo de las distintas probabilidades que conocemos, como son: probabilidad de un suceso (probabilidad de “sobrevive”), probabilidad de que ocurran los dos sucesos (probabilidad de “sobrevive” y ser de “segunda clase”), e incluso probabilidades condicionadas (probabilidad de “sobrevive”, sabiendo que es de “primera clase”). Obtengamos estas probabilidades.*

Se explica, o recuerda, a los alumnos estas probabilidades basándonos en la regla de Laplace, donde la probabilidad se calcula como cociente de casos favorables dividido por casos totales. De esta manera se trata de que los alumnos busquen el numerador y denominado de la regla de Laplace en la tabla de contingencia. Se pide a los alumnos que obtengan la probabilidad de cada suceso, haciéndoles ver que hay cinco probabilidades 862

$$P(sobrevive) = \frac{451}{1313} = 0{,}34 \quad P(no\_sobrevive) = \frac{862}{1313} = 0{,}66$$

$$P(1^{a}\,clase) = \frac{322}{1313} = 0{,}25\,;\, P(2^{a}\,clase) = \frac{280}{1313} = 0{,}21\,;\, P(3^{a}\,clase) = \frac{711}{1313} = 0{,}54$$

Mediante estas probabilidades se pueden observar que la probabilidad, de sobrevivir fue menor que la de no sobrevivir y su suma es la unidad por ser sucesos complementarios. Observamos como estas probabilidades se calculan utilizando en el numerador las frecuencias marginales absolutas, y en el denominador el total de personas de la tabla de contingencia.

Posteriormente, se pide a los alumnos que calculen las probabilidades de que ocurran simultáneamente dos sucesos, haciéndoles ver que hay seis probabilidades de este tipo en nuestro ejemplo y la suma de todas ellas sería la unidad. Estas probabilidades se calculan utilizando en el numerador las frecuencias absolutas dobles, y en el denominador el total de personas.

$$P(sobrevive \cap 1^a\, clase) = \frac{194}{1313} = 0{,}15\,;\; P(sobrevive \cap 2^a\, clase) = \frac{119}{1313} = 0{,}09$$

$$P(sobrevive \cap 3^a\, clase) = \frac{138}{1313} = 0{,}11\,;\; P(no\_sobrevive \cap 1^a\, clase) = \frac{128}{1313} = 0{,}10$$

$$P(no\_sobrevive \cap 2^a\, clase) = \frac{161}{1313} = 0{,}12\,;\; P(no\_sobrevive \cap 3^a\, clase) = \frac{573}{1313} = 0{,}44$$

Por último, se pide a los alumnos que calculen las probabilidades condicionadas, haciéndoles ver que hay seis probabilidades de este tipo en nuestro ejemplo si se condiciona por filas, y otras seis si se condiciona por columnas. La suma de cada columna (en la tabla 9.7) y cada fila (en la tabla 9.8) ha de ser igual a la unidad.

Estas probabilidades se pueden utilizar para estudiar, por ejemplo, que la tasa de supervivencia fue distinta en las diferentes clases sociales. Se resalta su cálculo, utilizando en el numerador las frecuencias absolutas dobles, y en el denominador las frecuencias marginales por las que se condiciona en la tabla de contingencia.

Tabla 9.7. Probabilidades condicionadas por columnas

	Sobrevive	No sobrevive
Primera clase	194/451=0,4302	128/862=0,1485
Segunda clase	119/451=0,2638	161/862=0,1868
Tercera clase	138/451=0,306	573/862=0,6647
Total	1	1

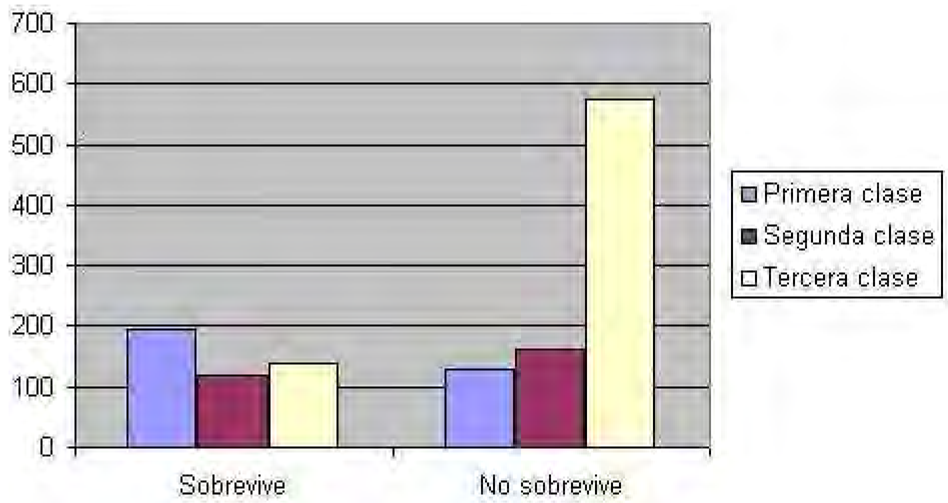
Tabla 9.8. Probabilidades condicionadas por filas

	Sobrevive	No sobrevive	Total
Primera clase	194/322=0,6025	128/322=0,3975	1
Segunda clase	119/280=0,425	161/280=0,575	1
Tercera clase	138/711=0,1941	573/711=0,8059	1

6. *Hasta aquí hemos sido capaces de resumir la información a través de una tabla. Vamos a representar ahora gráficamente estos datos.*

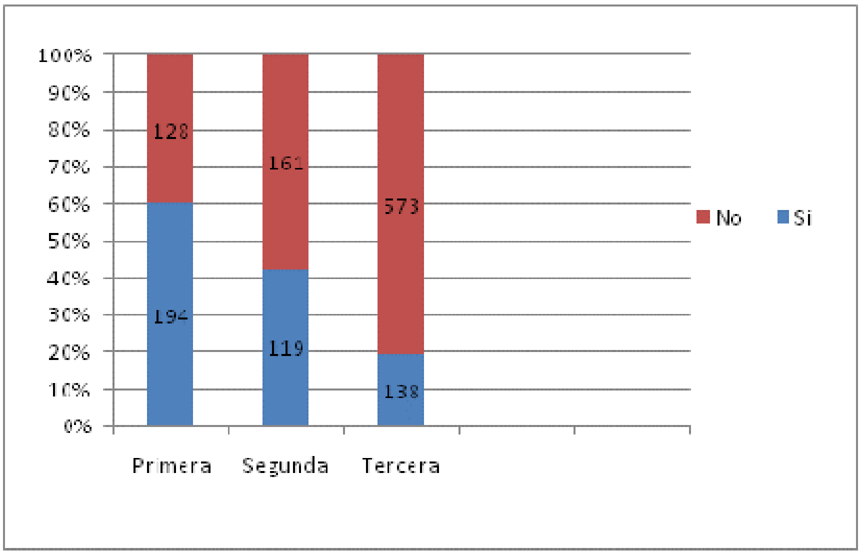
Se explica a los alumnos el diagrama de barras adosadas, resaltando el hecho de que se puede realizar utilizando las frecuencias o los porcentajes. Se pide a los alumnos que lo realicen, quedando un gráfico como la Figura 9.1. En dicha figura se observa mucho mayor número de ahogados en tercera clase. Pero la figura muestra sólo las frecuencias absolutas.

Figura 9.1. Diagrama de barras adosadas



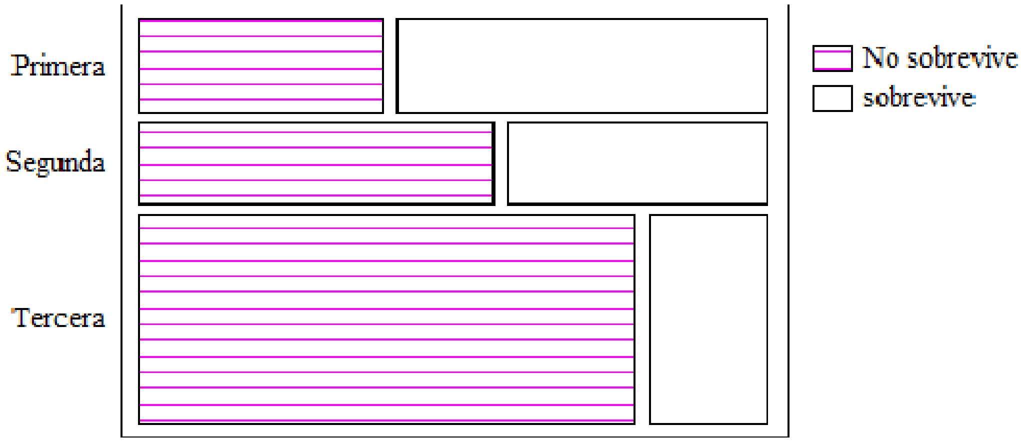
El diagrama de barras apiladas (Figura 9.2) y el gráfico de mosaicos (Figura 9.3) dan una mejor información. En el gráfico de barras apiladas se muestra una barra por cada valor que tome la variable *Y*, las cuales a su vez, se dividen en distintos colores que representa a cada valor de la variable *X*. Representa la frecuencia con la que aparece cada valor de X en cada valor de Y, comparando entre categorías, el aporte de cada valor al total. En el ejemplo se da el diagrama de barras en porcentajes. De este modo se visualizan mejor las frecuencias condicionales que en el diagrama de barras adosado

Figura 9.2. Diagrama de barras adosadas



Respecto al gráfico de mosaicos, por un lado la altura de las bandas verticales indica el número total de pasajeros de cada clase (mayor número en tercera, y en primera y segunda clase con un número parecido. Dentro de cada banda la anchura de la categoría muestra la proporción (frecuencia relativa condicional) de supervivientes y ahogados en cada una. La proporción de supervivientes disminuye notablemente de primera a tercera clase.

Figura 9.3. Gráfico de mosaicos



7. *Para saber si dos variables están relacionadas, la estrategia correcta más utilizada será comparar las distribuciones condicionales. Es decir, lo que nos interesa, es comparar la distribución condicional de "clase" para los sujetos que sobrevivieron con la distribución condicional de "clase" para los sujetos que no sobrevivieron. El problema que tiene esta comparación es que al no haber el mismo número de personas que*

sobrevivieron y que no sobrevivieron, resulta difícil hacer esta comparación con las frecuencias absolutas.

Estudiando los gráficos y tablas anteriores, podemos discutir con los alumnos cómo tendrían que distribuirse las personas que sobrevivieron y no sobrevivieron en las diferentes clases. A continuación intentamos llevar a la idea de frecuencia esperada en caso de independencia.

8. *En realidad, si sabemos que si en el total del pasaje un 34,3 sobrevivió, esta proporción se debería contemplar en cada una de las clases. ¿Cuántas personas tendrían que sobrevivir en cada clase para "respetar" este 34.4%?*

Pedimos a los alumnos que estimen la proporción de supervivientes en cada clase. Quedaría una tabla como la 9.9 (redondeamos al número entero más próximo). Si la tabla 9.9 muestra la cantidad de personas que debería sobrevivir, pedimos que completen la tabla con los que no sobrevivirían, si se distribuyeran los supervivientes por igual entre las diferentes clases.

Tabla 9.9. Frecuencias esperadas en caso de independencia

	Sobrevive	No sobrevive	Total
Primera clase	110		322
Segunda clase	96		280
Tercera clase	244		711
Total	451	862	1313

Tabla 9.10. Frecuencias esperadas en caso de independencia

	Sobrevive	No sobrevive	Total
Primera clase	110	212	322
Segunda clase	96	184	280
Tercera clase	244	467	711
Total	451	862	1313

9. *Se ha construido una tabla que refleja la cantidad de personas de cada clase que hubiesen sobrevivido si la tasa de supervivencia hubiera sido igual entre las clases. Estos números se denominan "frecuencia esperada en caso de independencia".*

Se introduce a los alumnos el concepto de frecuencia esperada en caso de independencia, esto es la frecuencia que se esperaría si no hubiera relación entre las variables, si las variables fueran independientes. La fórmula para calcular las frecuencias esperadas es la siguiente:

$$f_{e_{ij}} = \frac{f_{i.} \times f_{.j}}{n}$$

Se puede comprobar con los alumnos que el resultado aplicando dicha fórmula es igual que el obtenido anteriormente (salvo redondeo de los decimales).

10.Ahora podemos comparar ambas tablas, la tabla de contingencia con los datos reales y la tabla que hemos construido con las frecuencias esperadas en caso de independencia. ¿Qué diferencias observas?

Se discute con los alumnos las diferencias entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas. En este caso, se ve que hay más supervivientes de los esperados en la primera y segunda clase y más personas que no sobrevivieron de las esperadas en la tercera clase.

11.¿Qué pueden significar estas diferencias? ¿Crees que estas diferencias son suficientes para afirmar que hubo prejuicios sociales a la hora de planificar la evacuación de los pasajeros del barco?

Se discute con los alumnos si esas diferencias son importantes o no. En este momento se introduce el estadístico de Chi-cuadrado. Puesto que las frecuencias comparadas pueden diferir en todas las categorías, o sólo en algunas, y estas diferencias pueden ser mayores o menores, necesitamos un indicador global de la intensidad de la relación entre variables cualitativas. El estadístico más usual para evaluar la relación entre dos variables cualitativas es el *Chi-cuadrado (χ^2).*

$$\chi^2_{\exp} = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

Para cada celda de la tabla tendremos que calcular la diferencia entre la frecuencia observada y la frecuencia esperada, elevarla al cuadrado, y finalmente dividir por la frecuencia esperada. Chi cuadrado es la suma de los resultados obtenidos en todas las celdas. Se pediría a los alumnos realizar los cálculos, usando las fórmulas de la Tabla 9.11 y obteniendo como resultados la Tabla 9.12.

Tabla 9.11. Cálculos para determinar χ^2

	Sobrevive	No sobrevive	Total
Primera clase	$\frac{(194-110)^2}{110}$	$\frac{(128-212)^2}{212}$	322
Segunda clase	$\frac{(119-96)^2}{96}$	$\frac{(161-184)^2}{184}$	280
Tercera clase	$\frac{(138-244)^2}{244}$	$\frac{(573-467)^2}{467}$	711
Total	451	862	1313

Tabla 9.12. Cálculos para determinar χ^2

	Sobrevive	No sobrevive	Total
Primera clase	64,14	33,28	322
Segunda clase	5,51	2,87	280
Tercera clase	46,04	24,05	711
Total	451	862	1313

$$\chi^2 = 64{,}14+33{,}28+5{,}51+2{,}87+46{,}04+24{,}05 = 175{,}89$$

Con el estadístico Chi-cuadrado se obtiene una medida de diferencia entre las frecuencias esperadas y las frecuencias observadas. Observamos las siguientes propiedades de este estadístico:

- Si todas las frecuencias observadas son iguales a la correspondiente frecuencia esperada, entonces $\chi^2_{\exp} = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}} = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij}-f_{ij})^2}{e_{ij}} = 0$.
- Esto ocurre sólo cuando las dos variables de la tabla son independientes; Por tanto, si hay independencia entre las dos variables de la tabla, $\chi^2_{\exp} = 0$
- Cuanto mayor sea la diferencia entre las frecuencias observadas y esperadas en la tabla, el valor de Chi cuadrado será mayor. Es decir, a mayor intensidad de la asociación entre las variables, Chi-cuadrado será mayor.
- El valor de Chi-cuadrado siempre es positivo o cero (pues es suma de números positivos, ya que los denominadores de la suma son todos positivos al ser suma de números elevados al cuadrado.
- En general, a mayor número de sumandos, se obtendrá un valor mayor. Por ello diremos que depende del *número de grados de libertad*

Los grados de libertad de un estadístico calculado sobre un conjunto datos se refieren al número de cantidades independientes que se necesitan en su cálculo, menos el número de restricciones que ligan a las observaciones y el estadístico. El número de grados de libertad del estadístico Chi-cuadrado se calcula de la siguiente forma:

- Se calcula, en primer lugar el número de sumandos, es decir *m* x *n*, siendo *n* y *m* el número de filas y número de columnas en la tabla.
- A esta cantidad se debe restar el número de restricciones impuestas a las frecuencias observadas. Observamos que podemos cambiar todas las frecuencias de la tabla sin cambiar los totales por filas y columnas, excepto los datos en la última fila y la última columna de la tabla, pues una vez que fijemos todos los valores excepto estos, quedan automáticamente fijados. Por tanto, si la tabla tiene *m* filas y *n* columnas, *el número de grados de libertad* es *(m-1) x (n-1)*. Expresamos esta dependencia en la siguiente forma:

$$\chi^2_{\text{exp}} = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \rightarrow \chi^2_{(n-1)(m-1)}$$

Los grados de libertad, en este caso son *k*= (3-1)x(2-1)=2. Llegados a este punto, con alumnos universitarios podría introducirse la distribución Chi- cuadrado. En la figura 9.4 mostramos la forma que toma el estadístico Chi-cuadrado, para diversos grados de libertad. Así, para 2 grados de libertad la moda (valor más probable) se sitúa cerca del valor 0, mientras que para 32 grados de libertad se sitúa cerca de 39.

Figura 9.4. Distribución Chi-cuadrado para distintos grados de libertad

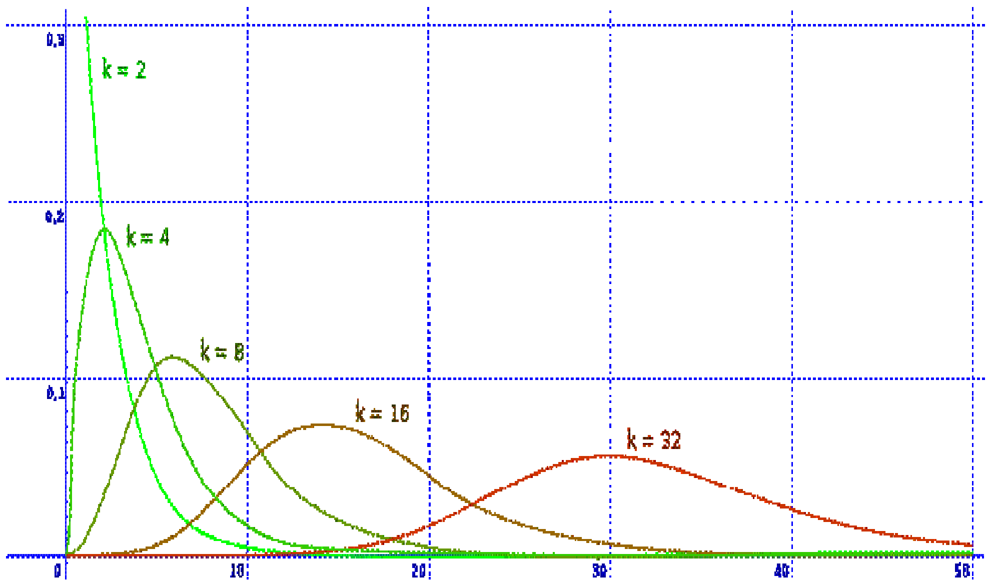


Tabla 9.13. Percentiles de la distribución Chi-cuadrado

	Probabilidad de un valor superior - *Alfa* (α)				
Grados libertad	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
28	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67

El valor obtenido 175,89 es muy poco probable en caso de independencia, pues observamos que para 2 grados de libertad los valores mayores que 10 apenas aparece. De hecho la probabilidad de obtener un valor mayor que 10,6 es sólo 0,005. Deducimos que el salvamento de los viajeros en el Titanic no fue independiente de su clase social.

12. *El valor que se obtiene de χ^2 (Chi-cuadrado) es difícil de interpretar, ya que este valor tiene un mínimo (0, en caso de independencia absoluta) pero no un máximo, por lo general cuanto más se aleje este valor del 0, hay una mayor dependencia. Una de las propiedades de este valor es que cuantas más celdas haya en la tabla, este valor aumenta, pero también influyen los valores de la diferencia.*

Para solucionar esto se han propuesto otros estadísticos, basados en χ^2, que permiten estudiar la asociación y son más fácilmente interpretables.

Hay dos clases de estadísticos de este tipo, los utilizados en tablas 2x2, y los estadísticos que se utilizan en tablas *rxc,* siendo el número de filas o de columnas mayor que dos. En este caso estamos trabajando con una tabla *rxc* y usaremos el coeficiente *V* de Cramer, que se calcula en la forma siguiente:

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(L-1)}}$$

Siendo *n* el tamaño de la muestra y *L* = mínimo (filas, columnas). Para el ejemplo que estamos tratando, quedaría de la siguiente forma

$$V = \sqrt{\frac{175,89}{1313(2-1)}} = 0,36$$

Para interpretar el valor de la *V* de Cramer debemos tener en cuenta que un valor *V*=0 es indicativo de asociación nula y *V*=1 indica una asociación perfecta entre las variables analizadas. Para interpretar los valores intermedios de *V*, podemos seguir las recomendaciones de Cohen (1988), donde sugiere que un valor de 0,1 representa una intensidad de la relación débil; un valor de 0,3 representa una intensidad media; y un valor de 0,5 nos informa de una intensidad alta. En nuestro caso podemos afirmar que hay una asociación de intensidad media entre el precio pagado por el pasaje y el hecho de haber sobrevivido a la tragedia.

Otro estadístico que se podría aplicar en tablas de este tipo (tablas rxc), es el coeficiente de contingencia de Pearson, el cual se calcula mediante la siguiente formula:

$$C = \sqrt{\chi^2 / (\chi^2 + n)}$$

Este coeficiente cuando vale 0 indica independencia absoluta, pero el máximo, cuando la tabla tiene c columnas y r filas es:

$$Max\,\{C\} = \sqrt{\frac{Min\{r-1, c-1\}}{1 + Min\{r-1, c-1\}}}$$

Para el ejemplo que estamos tratando, estos valores (el del estadístico *C* y el valor de su máximo), quedaría de la siguiente forma:

$$C = 0,3437$$

$$Max\{C\} = 0,7071$$

Por tanto, en el ejemplo, alcanza la mitad del valor máximo, y de nuevo indica una intensidad de asociación moderada.

13. *Como sabes, una de las "normas" a la hora de realizar una operación de rescate es "salvar primero a mujeres y niños". Vamos a analizar también si siguieron esta norma con las mujeres en el salvamento organizado en el Titanic. Para ello, utilizamos el fichero de datos disponible en Internet y el programa SPSS.*

Se iniciaría el análisis abriendo el fichero Titanic.sav y pidiendo la tabla de contingencia de la variable genero*sobrevive. Con ayuda del menú Analizar – Estadísticos descriptivos - Tablas de contingencia, tomando la variable "Sobrevive" en columnas y la variable "genero" en filas, obtendríamos la Tabla 9.14.

Tabla 9.14. Distribución de género entre supervivientes y ahogados

	sobrevive		
Mujer	Si	No	Total
Si	308	154	462
No	143	708	851
Total	451	862	1313

14. *Igual que hemos hecho anteriormente, en lugar de comparar las frecuencias absolutas, vamos a analizar los porcentajes.*

Se obtendría la Tabla 9.15, en la que se presentan las distribuciones condicionadas por filas e igualmente se obtendrían las distribuciones condicionales por columna, analizando con los alumnos las diferencias entre ambas tablas. Se discute cuál de las dos opciones resulta más informativa para la pregunta que nos estamos haciendo.

Tabla 9.15. Distribución de género entre supervivientes y ahogados

		sobrevive		
Mujer		si	no	Total
Si	Recuento	308	154	462
	% de genero	66,7%	33,3%	100,0%
No	Recuento	143	708	851
	% de genero	16,8%	83,2%	100,0%
Total	Recuento	451	862	1313
	% de genero	34,3%	65,7%	100,0%

15. *Vamos a representar gráficamente esta información a través de un diagrama de barras agrupado y un diagrama de mosaicos. ¿Qué observas en estos gráficos?*

Se realizarían el gráfico de barras apilado y mosaicos (Figuras 9.5 y 9.6). En ambos gráficos observamos mucha mayor proporción de mujeres salvadas; en el gráfico de mosaicos observamos también la mayor frecuencia de hombres en el pasaje. Por ello concluimos que se dio prioridad a las mujeres en el salvamento.

Figura 9.5. Gráfico de barras apilado

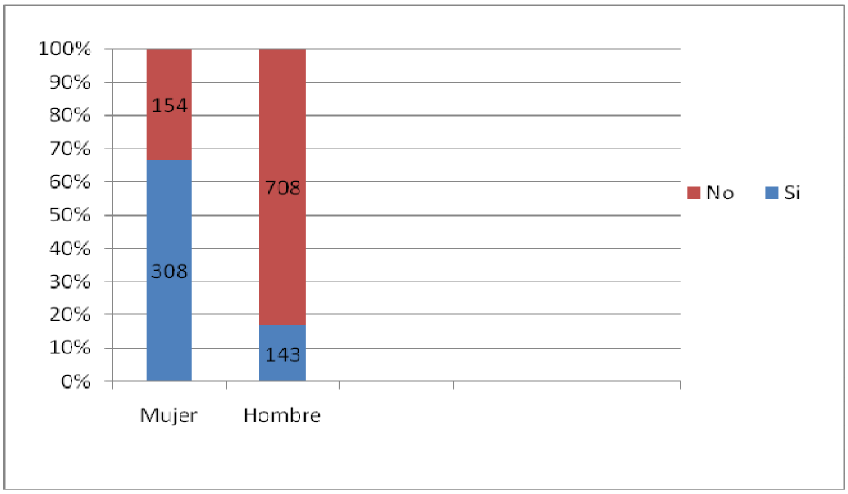
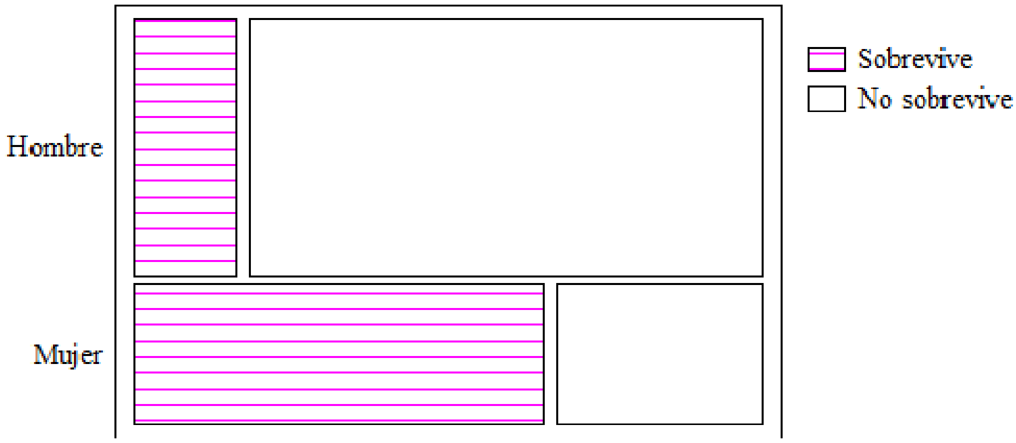


Figura 9.7. Gráficos de mosaicos



16. *Quedaría por calcular los estadísticos de asociación para analizar la intensidad de esta relación. Calcula el estadístico Chi-cuadrado, así como las medidas de asociación adecuadas a las tablas 2x2. ¿Qué conclusiones extraes?*

En este caso estamos en una tabla de contingencia 2x2, donde, además de la intensidad de la asociación se puede definir el signo. Para este tipo de tabla podemos diferenciar dos tipos de asociación: directa e inversa. La asociación directa se da cuando la gran mayoría de las frecuencias se concentran en las celdas f_{11} (presencia de los dos caracteres) y f_{22} (ausencia de los dos caracteres). Por el contrario, la asociación inversa se da cuando la gran mayoría de las frecuencias se concentran en las celdas f_{12} y f_{21} (presencia de un carácter, y ausencia del otro carácter). En nuestro ejemplo (Tabla 9.15), podemos observar como hay diez veces más sujetos en las celdas f_{11} y f_{22} que en las celdas f_{12} y f_{21}, por lo que podríamos concluir que hay una dependencia directa entre ser mujer y la supervivencia.

Para obtener las medidas de asociación se utiliza SPSS u otro programa similar, como Statgraphics. El Coeficiente Phi de Pearson para tablas 2x2, se define de la forma siguiente:

$$\Phi = \sqrt{\chi^2 / n} = \sqrt{\frac{((f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})^2 n)/(f_{1\cdot}f_{2\cdot}f_{\cdot 1}f_{\cdot 2})}{n}} = \sqrt{\frac{(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})^2}{f_{1\cdot}f_{2\cdot}f_{\cdot 1}f_{\cdot 2}}}$$

Este coeficiente toma valores entre -1 y 1:

- El valor máximo (1) se obtiene cuando la dependencia es directa y perfecta, todos los casos están en las celdas f_{11} *y* f_{22}. Si el coeficiente es positivo, la dependencia es directa y más alta cuanto más se acerque a 1.
- El valor mínimo (-1) se obtiene cuando la dependencia es inversa y perfecta, todos los casos están en las celdas f_{12} *y* f_{21}. Si el coeficiente es negativo, la dependencia es inversa y más alta cuanto más se acerque a -1
- El valor 0 se obtiene cuando hay independencia.

Los resultados obtenidos para los datos de la tabla 9.15 se muestran en la tabla 9.16. El valor Chi cuadrado es muy improbable para 1 g.l., por lo cual podemos rechazar la independencia entre las variables. Se observa un valor Phi de Pearson intermedio (intensidad de la relación media) y positivo (lo que informa de dependencia directa).

Tabla 9.16. Coeficientes para tablas 2x2 (ser mujer-supervivencia)

	Valor
Chi-cuadrado	330,15
Phi de Pearson	0,501
Riesgo Relativo (columnas)	2,5904
Riesgo Relativo (filas)	2,4959
Razón de productos cruzados	9,9021

Otro coeficiente para tablas 2x2 es el *riesgo relativo*, que se puede calcular por filas y por columnas.

- El *riesgo relativo por columnas* indica cuanto más probable es la presencia de *A* en los sujetos que muestran *B* que entre aquellos que no poseen *B*. Se calcula mediante la siguiente formula (columnas):

$$RR_{columnas} = \frac{P(A/B)}{P(A/\overline{B})} = \frac{f_{11}/f_{.1}}{f_{12}/f_{.2}} = \frac{f_{11}f_{.2}}{f_{.1}f_{12}}$$

- El *riesgo relativo por filas* indica cuanto más probable es la presencia de *B* con *A* que entre aquellos que no poseen *A*. Este coeficiente se calcula mediante la siguiente formula para filas:

$$RR_{filas} = \frac{P(B/A)}{P(B/\overline{A})} = \frac{f_{11}/f_{1.}}{f_{21}/f_{2.}} = \frac{f_{11}f_{2.}}{f_{21}f_{1.}}$$

Estos dos valores puede que coincidan, pero esto no pasa siempre. El valor del Riesgo relativo cambia según el tipo de asociación que tengan las variables:

- El RR = 1, informa que no hay asociación entre las variables.
- El RR > 1, nos dice que existe asociación positiva.
- El RR < 1, indica que existe una asociación negativa.

En nuestro ejemplo $RR_{\text{columnas}} > 1$, nos dice que existe asociación positiva. Nos dice que fue 2,59 veces más fácil salvarse si se era mujer que si se era hombre. El $RR_{\text{filas}} > 1$, también nos dice que existe asociación positiva. Nos dice que hubo 2,49 mujeres por cada hombre entre los que se salvaron.

Finalmente, la *razón de productos cruzados* es una razón de dos cocientes:

$$RC = \frac{f_{11}f_{22}}{f_{12}f_{21}} = \frac{f_{11}/f_{21}}{f_{12}/f_{22}} = \frac{C_1}{C_2}$$

- C_1 es la razón de casos en que se presenta *A* y los que no se presenta *A* cuando está presente *B*.
- C_2 es la razón de casos *A* y no *A* cuando no está presente el factor *B*.

Podemos interpretarlo en la forma siguiente:

- El RC = 1, implica que hay la misma razón de casos que aparece *A* y $\overline{A}$, cuando está *B*, que cuando no está presente B,

- El RC < 1, implica que la razón entre los casos que aparecen *A* y $\overline{A}$ es menor cuando está presente *B.*
- El RC > 1, implica que la razón entre los casos que aparecen *A* y $\overline{A}$ es mayor cuando está presente *B*. Este es nuestro caso, la razón entre mujeres salvadas y ahogadas fue 9,9 veces más que la razón entre hombres salvados y ahogados.

9.4. Actividades de ampliación

17.Contraste de independencia. Por medio de este ejemplo, aunque de manera informal, hemos llevado a cabo un contraste de independencia Chi-cuadrado, que nos permite determinar si existe una relación entre dos variables categóricas. Con alumnos universitarios sería conveniente introducir formalmente este tipo de contraste.

Para ello se les recuerda que un *contraste de hipótesis* es un procedimiento estadístico, con una serie de pasos que lleva a la aceptación o rechazo de una hipótesis estadística. Los pasos a realizar en un contraste de hipótesis son los siguientes:

1. Fijar las hipótesis que se quieren contrastar: La hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_1. Estas hipótesis son complementarias una de otra.
2. Fijar el nivel de significación, o probabilidad máxima de rechazar la hipótesis nula H_0, en caso de que sea cierta. Se recordaría que el nivel de significación α es la probabilidad de Error Tipo I (probabilidad de rechazar la hipótesis nula, cuando de hecho es cierta).
3. Elegir un estadístico de contraste, que tenga alguna relación con la hipótesis. Formación a partir del estadístico de una regla de decisión, dividiendo los posibles valores del estadístico en dos regiones: (a) Si el estadístico cae en la región crítica (o de rechazo), se rechaza la hipótesis nula; (b) si el estadístico cae en la región de aceptación, no se puede rechazar la hipótesis nula.
4. Se comprueba el valor del estadístico y se toma la decisión de rechazar o no la hipótesis.

En el contraste de independencia, se desea decidir si las dos variables en una tabla de contingencia están o no asociadas. Siguiendo los pasos anteriores, se tendría

1. Fijar las hipótesis que se quieren contrastar. Estas hipótesis son las siguientes:

   H_0: Las variables en filas y columnas de la tabla son independientes

   H_1: Hay asociación entre las filas y columnas de la tabla

2. Fijamos el nivel de significación; lo más usual es elegir un valor α=0,05. Esto quiere decir que la probabilidad máxima que fijamos para el error tipo I (rechazar la hipótesis de independencia cuando sea falsa) es 0,05.

3. Elegir un estadístico de contraste, que tenga alguna relación con la hipótesis. En este caso, elegimos el estadístico Chi cuadrado, $\chi^2_{\exp} = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \to \chi^2_{(n-1)(m-1)}$, que tiene relación con la hipótesis nula, pues se basa en la comparación de frecuencias observadas y frecuencias esperadas en caso de independencia.

4. Si la hipótesis nula *H_0* es cierta (hay independencia entre filas y columnas) es de esperar un valor del Chi cuadrado será pequeño y si, por el contrario es falsa, será grande. Formaremos una regla decisión, dividiendo los posibles valores de Chi- cuadrado en dos regiones:

   - Si el valor calculado $\chi^2_{\exp}$ tiene una probabilidad menor que α (nivel de significación) rechazamos la hipótesis nula H_0 (hay independencia entre filas y columnas), pues el valor obtenido es improbable para una tabla con filas y columnas independientes. En este caso, suponemos que las variables están asociadas.
   - Si el valor calculado $\chi^2_{\exp}$ tiene una probabilidad igual o mayor que α (nivel de significación) no podemos rechazar la hipótesis nula *H_0*. En este caso no tomamos ninguna decisión.

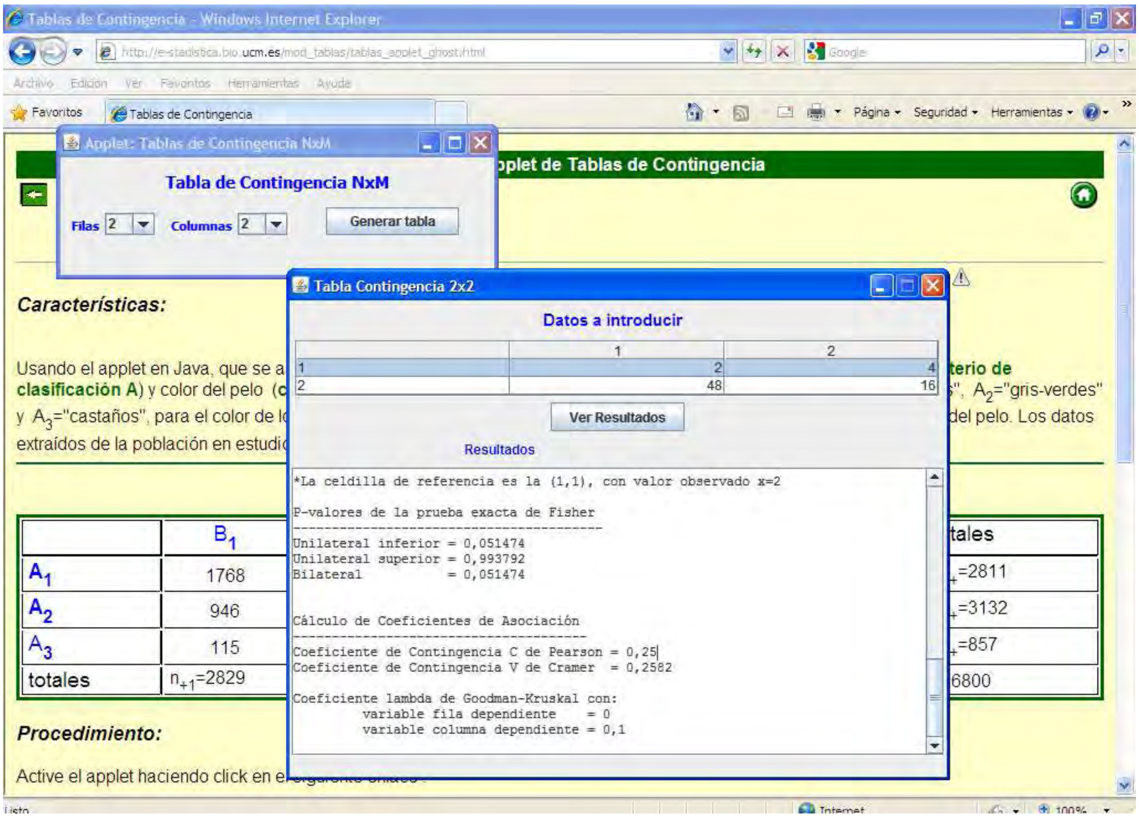
18.Se pueden explorar el uso de algunos applets, como por ejemplo:

//e-stadistica.bio.ucm.es/mod_tablas/tablas_applet_ghost.html

Este applet permite generar cualquier tabla de contingencia, introduciendo el número de filas y de columnas en primer lugar.

Una vez generada la tabla, se abre una ventana emergente donde se puede introducir los datos en cada celda. Los alumnos pueden meter los datos de problemas propuestos por el profesor, donde varíe el tipo de asociación (independencia, asociación) y la intensidad. Una vez introducidos los datos, si pulsamos en el botón “ver resultados” el applet calcula el test de Chi cuadrado y otros estadísticos de asociación: C de Pearson, V de Cramer, Lambda de Goodman-Kruskal.

Figura 9.8. Applet Tablas de contingencia



19. *Se pueden introducir otras medidas de asociación para variables ordinales o basadas en la reducción proporcional del error* (Ver Tabla 9.17, en que calculamos algunos de estos coeficientes para la asociación entre ser mujer y salvamento. También se incluye el coeficiente de correlación, válido para variables cuantitativas y para tablas 2x2). Dicho coeficiente al ser positivo indica una relación directa y al ser en torno a 0,5 moderada.

Tabla 9.17. Otras medidas de asociación

Estadístico	Simétrico	Con fila dependiente	Con columna dependiente
Lambda	0,3494	0,3571	0,3415
Estadístico	Valor	p-valor	Df
Gamma Condicional	0,8165		
R de Pearson	0,5014	0,00000	1311
tau de Kendall	0,5014	0,0000	

Puesto que los coeficientes como V o C a veces no tienen una interpretación sencilla, algunos autores consideran medidas de asociación basadas en la cuantificación de la reducción del error que se comete al predecir el valor de una variable, cuando se conoce el valor de la otra.

La construcción de estas medidas está basada en un razonamiento del tipo siguiente: Supongamos que quiero predecir el valor de la característica X (variable en filas) en un individuo tomado al azar en la población. Si no tuviera ninguna información sobre el mismo, y lo asignara a la clase x_i la probabilidad de cometer un error en la clasificación sería:

$$P(Error\ regla\ 1)=(n-f_i)/n$$

Cuando dispongo de información del valor de la variable $Y=y_j$, en general no asignaré el valor X al azar, sino siguiendo una cierta regla (regla 2) que tenga en cuenta cual es el valor más probable de X para $Y=y_j$. Llamaremos medida de la reducción proporcional del error (PRE) al cociente:

$$\text{Medida PRE} = \frac{\text{P(error regla 1)-P(error regla 2)}}{\text{P(error regla 1)}}$$

Es decir, una medida PRE indica cual es el porcentaje de error que se ve reducido al predecir el valor de la variable dependiente *(X),* conocido el valor de la variable independiente *(Y)*, en lugar de asignar al azar el valor de X. Una de estas medidas es la lambda de Goodman y Kruskal, dada por:

$$\lambda_x = \frac{(\sum f_{mj}) - f_{m+}}{N - f_{m+}}$$

En esta expresión f_{m+} es la mayor frecuencia marginal en filas y f_{mj} es la mayor frecuencia en la columna j-ésima. Estas medidas pueden calcularse bien cuando la variable en filas es dependiente o cuando lo es la variable en columnas o sin diferenciar variables (forma simétrica). En nuestro ejemplo se obtienen valores muy similares tanto por filas como columnas, como simétrico, es decir la probabilidad de predicción es parecida en todos los casos y el error se reduce alrededor del 35%.

Algunas veces las diferentes categorías de las variables están ordenadas, cuando los datos no puedan ser medidos en escala de intervalo o razón. Para estos casos puede ampliarse el análisis de la tabla. En particular, se definen medidas de asociación que miden cuando la dirección de las ordenaciones coincide o no en sentido. En nuestro ejemplo, si codificamos los datos como 0 (ser mujer) y 1 (no serlo) y 0 (salvarse) , 1 (no salvarse) se analizaría hasta que punto coinciden los códigos, es decir ser mujer-salvarse y no serlo-ahogarse. Podemos considerar, entre otros los siguientes coeficientes:

- *Tau de Kendall.* Para calcular este coeficiente, calculamos en primer lugar los valores P, Q y S definidos en la forma siguiente:

  P= nº de sujetos que tienen el mismo orden en las clasificaciones *X* e *Y*; Q= nº de pares para los cuales los órdenes no concuerdan.

$$S=P-Q$$

$$\tau = \frac{2S}{n^2(n-1)}$$

- *Gamma de Goodman y Kruskal:* El coeficiente Gamma da la diferencia de las probabilidades de tener o no el mismo rango en las dos ordenaciones:

$$\Gamma = \frac{S}{P+Q}$$

Para ambos coeficientes se obtiene un valor relativamente alto, más en el segundo caso y ambos positivos dando nueva confirmación a la asociación positiva entre las variables.

9.5. Algunas dificultades y errores previsibles

Como hemos comentado en proyectos anteriores las investigaciones sobre estrategias intuitivas de los estudiantes para la detección de la asociación indica que, con frecuencia, algunas de dichas estrategias son improductivas para la detección de la asociación,

9.5.1. Estrategias intuitivas en el estudio de las tablas de contingencia

En la investigación de Estepa (1993) se analizaron con detalle las estrategias usadas intuitivamente por los estudiantes pre universitarios en el análisis de tablas de contingencia, encontrando las siguientes;

Estrategias correctas

- ST.1. *Comparar todas las distribuciones de frecuencias relativas condicionales de una variable para los distintos valores de la otra variable.* Se puede intercambiar el papel de filas y columnas.

- ST.2. *Comparar todas las frecuencias relativas condicionadas de una variable para un único valor con la marginal correspondiente de la otra variable.* Pues si las variables son independientes estas distribuciones han de coincidir.
- ST.3. *Comparación de posibilidades, comparando las frecuencias de casos a favor y en contra de B en cada valor de A.* Esta estrategia es correcta porque la razón de posibilidades es formalmente equivalente a la probabilidad.

Estrategias parcialmente correctas, generalmente porque se usa frecuencias absolutas en lugar de relativas:

- ST.4. *Comparar la distribución de frecuencias absolutas condicionales con la frecuencia absoluta marginal correspondiente.*
- ST.5. *Comparar las frecuencias absolutas condicionadas la una con la otra*.
- ST.6. *Comparar la suma de frecuencias en las diagonales*. En este caso el alumno usa la estrategia descrita por Piaget, siendo correcta, sólo en el caso de que la tabla tenga igual las frecuencias marginales para la variable independiente.

Estrategias incorrectas: Cuando el estudiantes usa sólo una parte de los datos o usa una estrategia que no tiene que ver con la asociación.

- ST.7. *El uso único de la celda de mayor frecuencia*. En este caso el alumno no utiliza toda la información presente en el problema, tan sólo la celda más sobresaliente.
- ST.8. *El uso de sólo una distribución condicional*. En este caso el alumno no ve el problema como un problema de comparación de probabilidades.
- ST.9. *Comparar frecuencias dobles con el número total de observaciones* o bien frecuencias marginales entre si.
- ST.10. *Otros procedimientos incorrectos*. En casos esporádicos se usan procedimientos, o no relacionados con las frecuencias de la tabla, por ejemplo plantear una ecuación.

9.5.2. Sesgos en el razonamiento covariacional

En las últimas décadas se han realizado diversos estudios que indican algunos sesgos al detectar la covariación. Chapman y Chapman (1969) denominan *correlación ilusoria* la creencia en la asociación entre eventos que no están correlacionados. Estas personas se forman teorías sobre la relación entre variables que impide evaluar correctamente las contingencias empíricas. Este fenómeno ha lleva a la percepción de una relación donde no existe ninguna, o bien a la percepción de una relación más fuerte de la que existe en realidad.

En algunas ocasiones el cerebro tiende a interpretar la realidad de manera sesgada, creyendo detectar relaciones que en realidad son inexistentes. Por ejemplo, si dos eventos van frecuentemente juntos, es probable que se concluya que existe algún tipo de relación entre ellos, incluso cuando esto sea falso. La experiencia vital y el entorno cultural son los responsables de estas teorías, porque dichas variables llaman la atención de las personas. Un ejemplo sería el encontrar una falsa asociación entre la pertenencia a un grupo minoritario y los comportamientos del grupo.

Muchos otros autores han estudiado la influencia de las teorías previas en el contexto del problema en los juicios de asociación. En términos generales se puede decir, que cuando los datos no reflejan los resultados esperados por estas teorías, aparece en los sujetos un conflicto cognitivo. Algunos de estos sesgos han sido atribuidos a la *heurística de la disponibilidad*, que consiste en estimar la probabilidad de ocurrencia de determinados acontecimientos basándose en la mayor o menor facilidad con que puede construir ejemplos del mismo (Tversky y Kahneman, 1974). Esta heurística, generalmente asociada a experiencias personales, puede llevar a sesgos en el razonamiento probabilístico, incluido la estimación de la asociación.

9.5.3. Concepciones sobre la asociación estadística

Estepa (1993) cree que las estrategias usadas por los estudiantes en los juicios de asociación dependen de algunas concepciones que poseen los alumnos sobre la misma, describiendo las siguientes concepciones erróneas:

- *Concepción causal:* Cuando el sujeto sólo considera la dependencia entre variables si puede adjudicarse a la presencia de una relación causal entre las mismas. Es decir, se produce una confusión entre *asociación y causalidad.*
- *Concepción determinista:* Cuando los sujetos no admiten el caso de excepciones, implicando esto que a cada valor de la variable independiente le corresponde un solo valor de la variable dependiente. Es decir, se confunde la dependencia funcional y la asociación.

- *Concepción unidireccional:* En este caso el estudiante no admite la asociación inversa, considerándola como independencia.
- *Concepción local*: Esta concepción se presenta cuando los sujetos, dan su solución mirando únicamente algunos casos aislados, es decir, piensan que se puede deducir la asociación usando sólo parte de los datos, por ejemplo, la celda de mayor frecuencia.

9.6. Análisis del contenido estadístico

En este proyecto podemos identificar, explícita o implícitamente, los siguientes contenidos:

1. *Aplicaciones de la Estadística*
   - Análisis de variables cualitativas;
   - Estudio de asociación entre variables;
   - Tasas de supervivencia; determinación de factores de riesgo;
   - Pruebas de hipótesis sobre la asociación estadística.
2. *Conceptos y propiedades*
   - Tabla de contingencia. Distribuciones dobles y marginales, distribuciones condicionales;
   - Probabilidades simples, compuestas y condicionales;
   - Frecuencias absolutas y porcentajes; frecuencias relativas dobles, marginales y condicionales;
   - Frecuencias esperadas y observadas;
   - Asociación e independencia. Propiedades relacionadas con la independencia;
   - Cálculo del estadístico Chi-cuadrado; distribución y grados de libertad;
   - Medidas de asociación para tablas rxc. estadísticos C de contingencia y V de Cramer. Valores posibles e interpretación;
   - Asociación en tablas 2x2, Signo de la asociación. Medidas de asociación para tablas 2x2, Coeficiente Phi, Riesgo relativo. Razón de productos cruzados. Valores posibles e interpretación;
   - Medidas de asociación basadas en la reducción proporcional del error. Lambda de Goodman y Kruskal; Valores posibles e interpretación;

- Medidas de asociación para variables ordinales. Tau de Kendall. Gamma de Goodman y Kruskal. Valores posibles e interpretación;
- Coeficiente de correlación.

3. *Notaciones y representaciones*
   - Palabras como frecuencia esperada, observada.
   - Símbolos como X^2. Expresiones y fórmulas usadas en los cálculos de los diferentes coeficientes;
   - Tablas de contingencia:
   - Applets;
   - Diagrama de barras adosado y apilado; gráfico de mosaico.
4. *Técnicas y procedimientos*
   - Elaboración de tablas de doble entrada;
   - Interpretación de tablas; elaboración de conclusiones a partir del análisis de tablas;
   - Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos obtenidos;
   - Cálculo de estadísticos de asociación para variables cualitativas e interpretación de sus resultados;
   - Realización de contraste Chi- cuadrado.
5. *Actitudes*
   - Reflexión sobre los prejuicios sociales;
   - Valoración de la estadística para la comprobación de hipótesis;
   - Valoración de la estadística en el uso de datos cualitativos;
   - Diferenciación entre asociación y causalidad;
   - Concienciación de sesgos en el estudio de la asociación.

Análisis de los Proyectos Presentados

Carmen Batanero y Carmen Díaz

10.1. Introducción

En este libro hemos presentamos algunos ejemplos de proyectos que pueden ser desarrollados en la clase de estadística, describiendo los datos y la forma en que han sido recogido y sugiriendo algunas posibles actividades que propicien la reflexión sobre los conceptos estadísticos y permitan la ejercitación de las diversas representaciones, técnicas y tipos de argumentación. Dependiendo de la edad y conocimientos previos de sus alumnos, de sus intereses, tiempo disponible, el profesor puede suprimir o añadir otras actividades o proyectos.

Los proyectos están concebidos para introducir en la clase una filosofía exploratoria y participativa, en tendencias con las recomendaciones recientes sobre metodología de enseñanza de la estadística. Tienen una estructura común y pretenden, en su conjunto, dar una visión del contenido que podría abordarse entre la enseñanza secundaria y la universidad.

Para finalizar analizamos la estructura de los proyectos y se sugieren temáticas para otros posibles proyectos. Lo deseable sería que los propios alumnos eligieran el tema en el que quieren trabajar y elaborasen sus propios proyectos en grupos de dos o tres alumnos. Para ser realistas, hemos de reconocer que son pocos los alumnos que se interesan por la estadística y que ésta es una materia aburrida para ellos. Por el contrario, los alumnos pueden interesarse en muchos temas diferentes y llegar a valorar la estadística como instrumento de investigación de los problemas que les gustaría resolver.

En algunos países es ya tradicional el celebrar en las escuelas competiciones de proyectos estadísticos. Entre otros ejemplos citamos los concursos organizados por el Instituto Canario de Estadística (ISTAC) y la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas (ver www2.gobiernodecanarias.org/istac/webescolar/concurso.php).

10.2. Estructura de los proyectos y análisis de su contenido

Los proyectos que hemos presentado se conciben como verdaderas investigaciones asequibles al nivel del alumno, donde tratamos de integrar la estadística dentro del proceso más general de investigación. Mientras que en los problemas y ejercicios “tradicionales” nos concentramos cada vez en un sólo concepto, propiedad o capacidad, en un proyecto se suelen trabajar bastantes contenidos. Nosotros hemos presentado una posible secuenciación de cada proyecto, que, por su carácter abierto, podría haber tenido una resolución diferente por algunos de los alumnos. Sin embargo, es interesante analizar los contenidos que los alumnos trabajan implícita o implícitamente desarrollando el trabajo en la forma descrita, que son los siguientes:

1. *Aplicaciones de la estadística:* Diseño de un experimento; análisis de datos experimentales u observaciones; comparación de datos experimentales con patrones teóricos, dentro de las áreas temáticas presentadas en la Tabla 10.2.
2. C*onceptos y propiedades*: Entre otros, aleatoriedad: experimento aleatorio; secuencia de resultados aleatorios, sucesos equiprobables, independencia de ensayos, rachas; variable estadística discreta, frecuencia absoluta; tabla de frecuencias; distribución de frecuencias; posición central, moda, media, mediana; dispersión: rango, casos centrales, 50% de casos centrales, estadística bivariante y multivariante, correlación, asociación y regresión, intervalo de confianza y contraste de hipótesis, análisis de varianza, análisis discriminante y análisis cluster, estadística bayesiana elemental. Hemos tratado de presentar en estos proyectos una panorámica de estos diferentes componentes. En la tabla 10.3 presentamos el contenido conceptual que podría ser abordado en cada uno de los proyectos.
3. *Notaciones y representaciones:* Palabras como frecuencia, media, mediana, moda, recorrido, etc. Símbolos como $\overline{x}$, *Me, Mo*; tablas de frecuencia; gráficos de puntos, barras, barras adosados, sectores, cajas, histogramas, gráficos de dispersión o de burbujas, dendogramas, entre otros. En la tabla 10.4 presentamos las utilizadas en los proyectos.
4. *Técnicas y procedimientos* (Tabla 10.5)*:* Diseño de un experimento; generación de hipótesis y conjeturas; recogida y registro de datos experimentales; elaboración de tablas de frecuencias; recuento y cálculo de frecuencia, elaboración de gráficos de puntos, diagramas

de barras, diagramas de barras adosados y gráficos de sectores; Interpretación de tablas y gráficos; elaboración de conclusiones a partir del análisis de tablas y gráficos; elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos obtenidos en un experimento; uso de calculadora gráfica, hojas de cálculo o software estadístico.

5. A*ctitudes:* Reflexión sobre las propias intuiciones incorrectas en relación a los experimentos aleatorios; valoración de la utilidad de la estadística para analizar datos obtenidos mediante experimentación, encueste y medida; valoración de la estética y la claridad en la construcción de tablas y gráficos estadísticos; precaución frente los usos incorrectos de la estadística.

A continuación analizamos los contenidos pretendidos de aprendizaje

10.2.1. Datos y campos de aplicación

En el proyecto planteamos unos objetivos y preguntas que el alumno debe tratar de contestar. Para ello el alumno necesita recoger datos, que, pueden provenir de diversas fuentes, ser obtenidos mediantes diferentes técnicas, y corresponder a diversas escalas de medida y tipos de variables estadísticas (Tabla 10.1).

Consideramos importante que, a lo largo de la educación secundaria y posteriormente en la universidad el alumno tenga oportunidad de apreciar esta diversidad de datos estadísticos. Algunas veces los datos se encuentran disponibles, pero hay que saber localizarlos de diferentes fuentes, como libros o anuarios estadísticos. La internet proporciona en la actualidad datos para cualquier tema por el que los alumnos estén interesados, bien a partir de servidores estadísticos específicos como Data Sets and Stories library donde los profesores de estadística han puesto sus datos al servicio de la enseñanza, bien recurriendo a organismos oficiales como el INE, Eurostat, Unesco u otros. Algunos de estos servidores se listaron en el Capítulo 1.

En otras ocasiones los datos son recogidos por los alumnos mediante la realización de una encuesta o a través de un experimento. La encuesta requerirá la elaboración de un cuestionario, fijando los objetivos del mismo, eligiendo las variables explicativas y redactando las preguntas que permitan obtener la información deseada de una forma clara y concisa. La selección de una muestra representativa plantea problemas de tipo teórico y práctico, relacionados con la población objetivo y alcanzada, el marco de muestro, los métodos de selección, la administración del cuestionario y los problemas de no respuesta.

Tabla 10.1. Tipos de datos en los Proyectos

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
Procedencia de los datos								
Anuarios estadísticos			x	x				
Encuestas		x						
Experimento realizado en la clase	x							
Internet			x	x			x	x
Prensa								
Simulación	x			x				
Técnica de recogida de datos								
Observación	x	x	x	x				x
Encuesta		x						
Medida		x	x				x	
Naturaleza de la escala de medida								
Nominal		x	x	x				x
Ordinal		x						
Intervalo o Razón	x	x	x				x	
Variables estadísticas incluídas								
Dicotómica		x	x	x				x
Cuantitativa discreta, pocos valores	x	x						x
Cuantitativa discreta, necesidad de agrupar								
Continua		x	x				x	

La información que queremos recoger puede corresponder a diversos niveles que se corresponden con diferentes técnicas de obtención de datos: información consciente y conocida (encuesta), información desconocida, pero que puede deducirse de la observación e información no consciente ni observable (medida).

Finalmente es importante considerar la naturaleza de las escalas de medida y tipo de variable estadística, puesto que de ellas depende el método de análisis de datos que se puede aplicar. Puesto que el software estadístico requiere la codificación de los datos en forma numérica, con frecuencia los usuarios que no tienen unos conocimientos estadísticos sólidos aplican métodos de inferencia (por ejemplo un test *t* de student) a variables para la que este tipo de métodos no son aconsejados.

Los proyectos estadísticos permiten mostrar a los alumnos los campos de aplicacion de la estadística y su utilidad en muchas facetas de la actividad humana. No hay nada que haga más odiosa la estadística que la resolución de ejercicios descontextualizados, donde se pida al alumno calcular la media o ajustar una recta re regresión a un conjunto de números.

No hay que olvidar que la estadística es la ciencia de los datos y los datos no son números, sino números en un contexto. En la tabla 10.2 mostramos los campos de aplicación que hemos elegido para estos proyectos. En los proyectos complementarios descritos brevemente en la sección 10.8 presentamos otros proyectos en temas de psicología, relaciones laborales, producción, deportes, educación, salud, comunidad europea y elecciones.

Tabla 10.2. Campo de aplicación en los Proyectos

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**
Aleatoriedad, Probabilidad	x			x	x	x		
Accidentes, Seguros								x
Ajuste de modelos a datos		x	x			x		
Botánica							x	
Búsqueda de sujetos típicos		x						
Clasificación de objetos							x	
Coincidencias						x		
Consumo								
Demografía			x					
Detección de relaciones entre variables		x	x				X	x
Diseño de experimentos; prueba de hipótesis	x				x			
Economía			x					
Elecciones, votaciones								
Estadísticas oficiales; agencias de estadística			x					
Medicina, diagnóstico				x				
Fisiología, medidas físicas		x						
Revisión de probabilidades				x				
Pruebas de hipótesis, inferencia	x	x	x	x	x			
Psicología	x					x	x	
Sociología		x	x					x

10.2.2. Conceptos y propiedades

Aunque la estadística se suele enseñar separada de la probabilidad, nosotros creemos que esta separación es artificial, puesto que, detrás de cualquier estudio estadístico hay una componente aleatoria. Sin tratar de analizar completamente el tema de probabilidad, hemos tratado de relacionar estos dos campos cuando ha sido posible, y en particular, en los proyectos 1, 4 y 6.

Tabla 10.3. Conceptos y propiedades estadísticas en los Proyectos

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
Aleatoriedad y probabilidad								
Experimento aleatorio; secuencias aleatorias	x			x	x	x		
Sucesos equiprobables y no equiprobables	x			x	x			
Independencia de ensayos, rachas	x					x		
Variable aleatoria discreta	x				x	x		
Variable aleatoria continua		x	x		x			
Distribución binomial	x			x	x	x		
Distribución de Poisson						x		
Distribución normal	x	x			x			
Esperanza y varianza de una v. aleatoria			x	x	x			
Probabilidad simple				x	x			x
Probabilidad compuesta				x				x
Probabilidad condicional				x	x			x
Teorema de Bayes				x				
Probabilidad inicial, final, verosimilitud				x				
Codificación	x	x	x				x	
Variable estadística								
Variable discreta	x	x	x	x	x	x	x	x
Variable continua		x	x				x	
Frecuencia absoluta; tabla de frecuencias;	x	x	x			x		
Distribución de frecuencias	x	x	x	x	x			
Frecuencias acumuladas	x	x	x					
Agrupación; intervalos, extremos y marcas de clase	x	x	x					
Posición central								
moda, media,	x	x	x		x	x	x	
mediana	x	x	x					
medias ponderadas**,** percentiles, rangos de		x	x					
percentiles		x	x					
Valores atípicos y su efecto sobre los promedios		x	x					
Dispersión								
rango, máximo, mínimo	x	x	x		x	x	x	
Casos centrales, 50% de casos centrales;	x	x	x				x	
Cuartiles; recorrido intercuartílico	x	x	x				x	
Asociación y correlación								
Tablas de contingencia; frecuencias dobles,								x
marginales y condicionadas		x						x
Asociación en tablas de contingencia		x						x
Correlación, proporción varianza explicada			x				x	

Correlación directa/ inversa; lineal no lineal;			x				x	
Correlación y causalidad			x					
Proporción de varianza explicada			x				x	
Medidas de asociación para variables nominales								x
Medidas de asociación para variables ordinales								x
Modelización								
Ajuste de modelos teóricos a datos		**x**	x		**x**		**x**	
Bondad de ajuste		**x**	x					
Ajuste de modelos a datos bivariantes;			x				**x**	
Uso de modelos en la predicción			x	x	**x**		**x**	
Comparación del modelo lineal con otros			x					
Regresión múltiple, regresión por pasos			x					
Inferencia								
Población, censo, muestra	**x**				**x**	**x**		
Muestras relacionadas e independientes		**x**						
Representatividad y sesgo en el muestreo					**x**			
Variabilidad en las muestras; efecto del tamaño sobre la variabilidad	**x**				**x**			
Parámetro y estadístico	**x**	**x**		x	**x**			
Intervalos de confianza	**x**	**x**		x	**x**			
Hipótesis; contraste de una hipótesis	**x**	**x**	**x**	x	**x**			
Riesgo en una decisión	**x**		**x**	x	**x**			
Contraste de diferencia de medias relacionadas			**x**					
Contraste de diferencias: medias independientes		**x**					**x**	
Contraste de homogeneidad de varianzas, muestras relacionadas	**x**	**x**	**x**					
Contraste homogeneidad varianzas muestras independientes		**x**						
Contraste de bondad de ajuste	**x**	**x**						
Contraste chi-cuadrado		**x**						
Análisis de varianza, un factor, efectos fijos			**x**				**x**	
Parámetro como variable aleatoria				**x**				
Distribución inicial y final, verosimilitud				**x**				
Estimación bayesiana de la proporcion				**x**				
Estadística multivariante								
Clasificación							x	
Coordenadas, centro de gravedad							x	
Distancia, simetría de una distancia							x	
Error en la clasificación							x	
Discriminación, Función discriminante							x	

Similaridad, disimilaridad							x	
Análisis de varianza multivariante							x	
Intervalos de confianza LSD							x	

Introducimos también unas nociones básicas de inferencia, cuya inclusión se recomienda en el currículo de Bachillerato y que son comunes en todos los cursos de estadística universitarios. Somos contrarios a dar una excesiva formalización al tema en la educación secundaria, debido a la complejidad y cantidad de conceptos estadísticos que el alumno debiera conocer para poder introducir, por ejemplo, el test de hipótesis en la teoría de Neyman y Pearson y aplicarlo al caso de comparación de las medias de las muestras.

Por ello, en el proyecto 5 nos limitamos a plantear situaciones de estimación sencillas y las ideas del test de significación debidas a Fisher, quien no llega a considerar la idea de hipótesis alternativa, ni estudia el error Tipo II. Trataremos sólo de introducir algunos conceptos básicos y principios lógicos de inferencia que serán útiles a los alumnos para un estudio posterior formalizado del tema. Las simulaciones, cálculos probabilísticos sencillos, tablas de números aleatorios y ordenadores serán herramientas suficientes para la resolución de las actividades de inferencia, que no precisarán del estudio previo de las distribuciones en el muestreo. En otros proyectos se hace sugerencia de actividades de ampliación más formalizadas de inferencia.

Hemos introducido, también de forma intuitiva, las técnicas multivariante de clasificación, donde se presenta una buena oportunidad de aplicar los conocimientos de los alumnos sobre algebra lineal y geometría y relacionar, por tanto, estas ramas de la matemática, con la estadística. Puesto que los ordenadores facilitan hoy día la aplicación de estas técnicas, no hay razón para que no puedan ser introducidas desde la educación secundaria.

10.2.3. Lenguaje y representaciones

Una parte importante de la estadística es la reducción y presentación de los datos en una variedad de formatos, desde tablas y listados hasta gráficos de tipo diverso (Tabla 10.4). Los gráficos estadísticos son, en general sofisticados y el manejo de un gráfico no supone simplemente el cambio de un tipo de representación a otra de un concepto dado. Por el contrario, en cada gráfico estadístico se representa, además de la distribución una serie de conceptos que varían de un gráfico a otro: frecuencias en el diagrama de barras, densidad de frecuencias y moda en el histograma, mediana y cuartiles, valores atípicos en el gráfico de la caja, etc.

Tabla 10.4. Notaciones y representaciones en los Proyectos

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**
Términos estadísticos	x	x	x	x	x	x	x	x
Símbolos	x	x	x	x	x	x	x	x
Tablas								
Tablas de frecuencias, datos no agrupados	x		x			x		
Tablas de frecuencias, datos agrupados, efecto de la agrupación		x	x					
Hojas de recogida de datos	x	x	x		x	x		
Tablas de contingencia		x						
Tablas Bayes				x				
Listado del fichero de datos	x	x	x				x	
Gráficos								
Diagrama en árbol				x				
Gráficos de puntos	x		x			x	x	
Gráficos de barras, simples adosados o apilados	x	x	x	x				
Gráfico de sectores	x							
Gráficos de líneas						x		
Histogramas	x	x	x		x			
Polígonos de frecuencias	x							
Diagramas acumulativos	x	x	x					
Polígono de frecuencias acumuladas	x		x					
Gráficos de tallo y hojas		x	x					
Gráficos de cajas	x	x	x				x	
Diagramas de dispersión bivariantes			x				x	
Diagramas de dispersión espaciales							x	
Curva empírica de distribución		x						
Gráfico cuantiles		x	x					
Dendograma							x	
Gráfico de mosaicos								x
Gráfico de burbujas							x	x
Simulación								
Con material manipulativo	x				x	x		
Con ordenador				x	x	x		
Applets				x	x	x	x	X

Los gráficos estadísticos presentan convenios de construcción que el alumno debe reconocer y recordar. Es también relativamente fácil producir un gráfico inadecuado o interpretar incorrectamente un gráfico, con lo que se produce una distorsión de la información, sea intencionada o no. Un último tipo de representación es la simulación, en cuanto sirve para representar experimentos aleatorios difícilmente reproducibles, como hemos ya señalado anteriormente.

10.2.4. Procedimientos

En la tabla 10.5. incluimos las técnicas que se ejercitan en los diferentes proyectos, que van más allá del cálculo y representación gráfica.

Tabla 10.5. Técnicas y procedimientos estadísticos en los Proyectos

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**
Recogida y registro de datos experimentales	x				x	x		
Búsqueda de datos a partir de anuarios estadísticos o de la Internet			x	x			x	x
Recogida de datos de observación		x						
Elaboración de un cuestionario		x						
Realización de una encuesta y recogida de datos		x						
Obtención de datos mediante medida		x			x		x	
Codificación de datos	x	x						
Elaboración de tablas de frecuencia; recuento y cálculo de frecuencia	x	x	x					
Elaboración de tablas de doble entrada y cálculo de frecuencias condicionadas y marginales		x		x				x
Elaboración de gráficos	x	x	x	x	x	x	x	x
Interpretación de tablas y gráficos	x	x	x	x	x	x	x	x
Elaboración de argumentos y conclusiones a partir del análisis de datos	x	x	x	x	x	x	x	x
Estudio de asociación entre variables		x	x				x	x
Uso de calculadora gráfica, hojas de cálculo o software estadístico	x	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo e interpretación de intervalos de confianza	x	x	x	x	x		x	
Comprobación de hipótesis a partir de experimentos	x				x	x		x
Contraste de hipótesis en muestras relacionadas	x		x					
Contraste de hipótesis en muestras independientes		x						
Análisis de varianza	x		x				x	
Estimación bayesiana de la proporción				x				

10.2.5. Actitudes

Otro punto a considerar es la educación en actitudes y valores (Tabla 10.6). Puesto que la estadística es una ciencia cambiante a una gran velocidad, es difícil saber cuáles de los contenidos que hoy impartimos serán últiles a nuestros alumnos.

Existen diversas concepciones respecto al significado del término "actitud". McLeod (1992) al conceptualizar el dominio afectivo de la Educación Matemática distingue entre "emociones", "actitudes" y "creencias". Las emociones son respuestas inmediatas, positivas o negativas, producidas mientras se estudia Matemáticas o Estadística, mientras que las actitudes son respuestas relativamente más estables, o sentimientos más intensos que se desarrollan por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo. Los pensamientos o creencias, en cambio, son las ideas individuales mantenidas en el tiempo que se tienen sobre la materia, sobre uno mismo como estudiante o sobre el contexto social en el que se realiza el aprendizaje.

Gómez Chacón (2000) entiende "la actitud" como uno de los descriptores básicos del dominio afectivo, junto con "los sentimientos" y "las creencias", y las define como una predisposición positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. Respecto a la matemática o estadística incluye pensamientos y sentimientos de varios tipos:

- Respecto a la materia (fácil o difícil, agrado, desagrado, interés,…).
- Sobre si son una parte de las Matemáticas o si simplemente requieren habilidades matemáticas ("la Estadística es todo cálculo") o si tienen su propia especificidad.
- Sobre el clima del aula y la práctica docente (los ejemplos son extraídos del mundo real, no de libro; el profesor ayuda al estudiante,…).
- Sobre uno mismo, sobre cómo se aprende Estadística o Matemáticas ("no sé nada de la materia", "soy bueno en esto").
- Sobre la utilidad o valor de la estadística y su importancia en su futuro profesional ("nunca utilizaré esta materia", "no sirve para nada").

Gal, Ginsburg y Schau, (1997) definen las actitudes como una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio. Son bastante estables, se expresan positiva o negativamente (agrado/desagrado, gusto/disgusto) y pueden referirse a elementos vinculados externamente a la materia (profesor, actividad, libro, método de enseñanza etc,). Según Gal y Ginsburg (1994) las actitudes y creencias y especialmente las negativas, pueden tener un impacto directo en el clima de la clase y llegar a constituir un auténtico bloqueo del aprendizaje si no se controlan.

Tabla 10.6. Actitudes que se destacan en los Proyectos

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**
Reflexión sobre las propias intuiciones incorrectas en relación a los experimentos aleatorios	x			x	x	x		x
Valoración de la utilidad de la estadística para analizar datos obtenidos mediante experimentación, observación, encuesta o medida	x	x	x	x	x	x	x	x
Valorar la utilidad y complejidad de la elaboración de las estadísticas oficiales y la importancia de colaborar en encuestas y censos para obtener datos fiables.			x	x				
Valoración de la estética y la claridad en la construcción de tablas y gráficos estadísticos	x	x	x		x	x	x	
Concienciar al alumno sobre la posibilidad de que se transmita información sesgada en una gráfica mal construida			x					
Reflexión sobre la dificultad de codificación y cómo ésta introduce siempre una simplificación en la realidad;		x	x				x	
Valoración de la utilidad de la estadística para identificar relaciones de asociación entre variables;		x	x				x	x
Valoración de la utilidad de la estadística para valorar la sensibilidad y especificidad de una prueba				x				
Reflexión sobre las tendencias y dispersiones en los datos; sobre el excesivo énfasis en los prototipos y el hecho de que éstos con frecuencia son modelos que no se dan en la realidad.		x	x					
Valoración de los modelos matemáticos para describir en forma simplificada la realidad; valoración de la diferencia entre datos y modelos.		x	x		x	x	x	
Fomentar un espíritu crítico en el uso de paquetes estadísticos y sus opciones por defecto			x				x	
Precaución contra errores comunes en el uso de la estadística							x	

La cultura no es solamente conocimiento y capacidad. La parte emocional –sentimientos, valores, actitudes es también un componente importante de la educación. Una persona puede ser, por ejemplo, brillante en la resolución de problemas estadísticos y poseer un vasto conocimiento de conceptos y desconocer las aplicaciones de la estadística y el papel que juega en la sociedad. Podría conocer todo esto, y, sin embargo, odiar la materia, menospreciar su valor o estar convencido que la mayor utilidad de la estadística es la posibilidad de usarla para manipular la verdad.

Más importante que el aprendizaje de un concepto o una técnica es enseñar a los alumnos a valorar la estadística, el papel que tiene en el desarrollo científico y económico y la importancia de su colaboración para la obtención de datos estadísticos fiables. Otras actitudes igualmente importante son poseer un espíritu crítico frente a la información estadística y concienciarse sobre sus propias intuiciones incorrectas.

10.2.6. Razonamiento

Además de todos estos contenidos, todos los proyectos tratan de promover el razonamiento estadístico, que incluye, según Wild y Pfannkuch (1999) cinco componentes fundamentales:

- *Reconocer la necesidad de los datos:* La base de la investigación estadística es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos que han sido recogidos en forma adecuada. La experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no es fiable y puede llevar a confusión en los juicios o toma de decisiones.
- *Transnumeración:* Los autores usan esta palabra para indicar la comprensión que puede surgir al cambiar la representación de los datos. Al contemplar un sistema real desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración: (1) a partir de la medida que "captura" las cualidades o características del mundo real, (2) al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos; (3) al comunicar este significado que surge de los datos, en forma que sea comprensible a otros.
- *Percepción de la variabilidad.* La recogida adecuada de datos y los juicios correctos a partir de los mismos requieren la comprensión de la variabilidad que hay y se transmite en los datos, así como de la incertidumbre originada por la variabilidad no explicada. El razonamiento estadístico comienza al percibir la variabilidad de la situación y permite adoptar estrategias en cada paso de la

investigación. La estadística permite hacer predicciones, buscar explicaciones, hallar causas y aprender del contexto. Se buscan y caracterizan los patrones en los datos para comprenderlos.

- *Razonamiento con modelos estadísticos.* Cualquier útil estadístico, incluso un gráfico simple, una línea de regresión o un resumen puede contemplarse como modelo, puesto que es una forma de representar la realidad. Lo importante es diferenciar el modelo de los datos y al mismo tiempo relacionar el modelo con los datos.
- *Integración de la estadística y el contexto:* Es también un componente esencial del razonamiento estadístico.

10.3. Ideas para nuevos proyectos

Son muchas las ideas posibles para desarrollar nuevos proyectos. Aunque lo ideal es que los alumnos elijan e inventen el tema, incluimos a continuación algunas posibles sugerencias.

10.3.1. Actitudes hacia la estadística

Un punto destacado a lo largo del libro es la necesidad de desarrollar unas actitudes positivas hacia la estadística en los estudiantes. Una ayuda para conseguir este objetivo es que los alumnos participen en la evaluación y control de sus propias actitudes.

Tabla 10.7. Cuestionario de actitudes

1. - Me gusta la Estadística.
2. - Me siento inseguro cuando hago problemas de Estadística.
3. - No entiendo mucho la Estadística debido a mi manera de pensar.
4. - Las formulas estadísticas son fáciles de entender
5. - La Estadística no sirve para nada
6. - La Estadística es una asignatura complicada.
7. –La Estadística es un requisito en mi formación como profesional.
8. - Mis habilidades estadísticas me facilitarán el acceso al mundo laboral.
9. - No tengo ni idea de que va la Estadística.
10. - La Estadística no es útil para el profesional de “a pie”.
11. - Me siento frustrado al hacer pruebas de estadística.

12. - Los conceptos estadísticos no se aplican fuera del trabajo.
13. - Utilizo la Estadística en la vida cotidiana.
14. - En las clases de Estadística estoy en tensión.
15. - Disfruto en clase de Estadística.
16. - Las conclusiones estadísticas raramente se dan en la vida.
17. - La mayoría de la gente aprende Estadística rápidamente.
18. -Aprender Estadística requiere mucha disciplina.
19. - En mi profesión no usare Estadística.
20. Cometo muchos errores matemáticos cuando hago Estadística.
21. - Me da miedo la Estadística.
22. - La Estadística implica mucho cálculo.
23. - Puedo aprender Estadística.
24. - Entiendo las formulas estadísticas.
25. - La Estadística no es importante en mi vida.
26. - La Estadística es muy técnica.
27. -Me resulta difícil comprender los conceptos estadísticos.
28. -La mayoría de la gente debe cambiar su manera de pensar para hacer Estadística

En este proyecto se pide a los estudiantes que completen el cuestionario sobre actitudes que hemos incluído en la Tabla 10.7 y que ha sido tomado de Estrada (2002). El alumno ha de puntuar cada pregunta de 1 a 5 donde 1= completamente en desacuerdo y 5= completamente de acuerdo.

A continuación se recogen datos de los alumnos de la clase, se codifican y se introducen en el ordenador, pues el número de variables haría tedioso realizar los cálculos a mano o con calculadora. Nótese que algunas frases están expresadas en forma negativa para evitar el problema de la aquiescencia (que los alumnos, por tratar de contentar al profesor den siempre valores positivos). Al codificar estas variables, hay que invertir la puntuación, transformando el 1 en 5 y así sucesivamente.

Se puede repetir la toma de datos al comenzar y finalizar la asignatura. Se trata de analizar los puntos siguientes:

- ¿Cómo eran las actitudes iniciales de los alumnos?
- ¿Qué componentes se pueden diferenciar y en cuáles de ellos tenía la clase una actitud positiva/negativa?

- ¿Han cambiado las actitudes al finalizar el curso? ¿Qué componente ha cambiado más/menos? ¿En qué sentido?
- ¿Depende la actitud final de la inicial?

10.3.2.¿Existe discriminación laboral respecto a la mujer?

Los alumnos recopilarán datos de la prensa y de anuarios estadísticos que reflejen la situación laboral de hombres y mujeres en España durante el pasado año y hace 10 años. La clase se puede dividir para localizar los datos y contestar preguntas como las siguientes:

- ¿Qué proporción hay de mujeres activas?
- ¿Cuál es la proporción de paro entre la población activa femenina?
- ¿Cual es esta proporción según nivel de educación (básica, media, superior)?
- ¿Qué proporción de mujeres universitarias ocupan cargos ejecutivos o de dirección?
- ¿Cuál es la tasa de paro femenino por comunidades autónomas?
- ¿Cómo se comparan estos datos con los correspondientes a hombres?
- ¿Cómo ha cambiado la situación en los últimos diez años?

10.3.3. España en la comunidad Europea

Los alumnos recopilarán datos de Internet, accediendo al servidor de Eurostat, la agencia estadística de la comunidad europea y recopilarán indicadores socioeconómicos de los países miembros de la comunidad europea. Se trata de describir la distribución de las diferentes variables entre los países miembros y estudiar el lugar que España ocupa en cada una de las variables. Los alumnos pueden elegir variables de su interés. Algunas sugerencias son:

- Indicadores económicos: Renta per cápita en euros; Producto Nacional Bruto, consumo, tasa de empleo y paro;
- Datos socio-demográficos: Población, densidad de población, población joven (hasta 25 años); tasa de natalidad y mortalidad; esperanza de vida;
- Transporte: Kms de autopista/ extensión; distribución del transporte en autopistas, ferrocarril y otros;
- Consumo de energía; % de energía importada;

- Turismo: número de visitantes; salidas al extranjero; ingresos por turismo
- Educación: % población escolarizada, % con estudios universitarios

10.3.4. Intención de voto en las próximas elecciones al consejo escolar

Se propone diseñar, llevar a cabo y analizar los datos de una encuesta en el centro para estudiar la intención de voto en el próximo consejo escolar, una vez que se conocen los candidatos a representantes de los alumnos. Los alumnos deben diseñar el cuestionario, seleccionar una muestra representativa de alumnos del centro, distribuir el cuestionario y analizar los datos. Algunas cuestiones relacionadas son:

- ¿Qué preguntas debemos incluir en el cuestionario? ¿Están claras las preguntas? ¿Qué variables identificativas del alumno podrían influir en su intención de voto?
- ¿Cómo elegimos la muestra de alumnos? ¿Cuál es la población objetivo? ¿Cuál es la población que podemos alcanzar?
- ¿Sería la encuesta fiable si hay un porcentaje alto de no respuesta? ¿Cómo podemos motivar la participación y disminuir la no respuesta? ¿Cómo y cúando distribuímos el cuestionario y recogemos los datos?
- ¿Cómo extendemos las conclusiones de la muestra a todo el centro? ¿Entre qué límites cabe esperar que varíe la proporción de alumnos que votarán a uno u otro candidato? ¿Cómo puedo usar el cálculo de probabilidades para poder calcular estos límites con un cierto margen de confianza?
- ¿Serán diferentes los resultados de la votación en los distintos cursos? ¿En chicos y chicas?

10.3.5. ¿Tiene ventaja el equipo que juega en su propio campo?

Los alumnos recogerán de una hemeroteca los datos referentes a todos los equipos de futbol que han jugado en la liga del año anterior para cada semana. Estos datos se recogen habitualmente en las revistas deportivas y también podrían recogerse de Internet. Los alumnos tratarán de ver si es cierta la creencia de que el jugar en su propio campo favorece al equipo, analizando, para cada uno de los equipos y semanas los siguientes datos:

- ¿Jugó el equipo en su campo?
- Resultado del partido: ganó, perdió o empató;

- Número de goles marcados;
- Número de goles que le marcaron;
- Puntos conseguidos;
- ¿Qué diferencias se observan en los partidos jugados en su propio campo y en campo contrario? ¿Cuáles variables tienen mayores diferencias?
- ¿Estás de acuerdo o no en que tiene ventaja jugar en el propio campo?

10.3.6. Entrenamiento deportivo: ¿Se mejora con la práctica?

Durante la clase de gimnasia se recogen datos de cada alumno el primer día de clase y una vez transcurrido 5 meses. Podrían analizarse, entre otras las siguientes variables, para ver si la práctica ayuda a mejorar, qué alumno mejoró más globalmente y si mejoran más las chicas o los chicos:

- Tiempo en segundos para recorrer 50 metros;
- Pulsaciones por minuto antes y después de correr los 50 metros;
- Altura máxima que se puede saltar;
- Longitud máxima que se puede saltar;
- Número de abdominales seguidos hasta cansarse;
- Número de canastas encestadas en 10 intentos.

10.3.7. ¿Cuántas lentejas tiene un kilo de lentejas?

Se trata de estimar el número aproximado de lentejas en un kilo, sin tener que contarlas todas. Puesto que el proceso de llenado de un paquete de lentejas tiene un componente aleatorio, este número variará de uno a otro paquete. Se plantea así un problema de estimación que es común a otros muchos contextos, por ejemplo, cuando se estima el número medio de glóbulos rojos en sangre de individuos adultos.

Los alumnos por equipos podrían tratar de estimar el número de lentejas en paquetes seleccionados de varias marcas comerciales. Se presentaría el problema de que hay que especificar con claridad la variedad, pues existen diversos tamaños. Una vez fijada una variedad y comprados paquetes de diversas marcas cada equipo trataría de estimar el número de lentejas de su paquete.

Para ello se pueden tomar datos del número de lentejas en varias muestras de unidades de capacidad pequeñas, como el centímetro cúbico y resolver primero el problema de la estimación del número de lentejas en un cm^3. Los alumnos recogerán datos de las muestras de cm^3 representándolos gráficamente, y estudiando su distribución que será, aproximadamente normal, determinando su media y desviación típica.

Calculado el volumen de los paquetes de kilo de lentejas, para calcular la distribución del número de lentejas en un paquete de kilo, se trata de hacer un cambio de variable en una distribución normal. Por tanto, la media y desviación típicas quedarán afectadas por el cambio de escala que pasa del cm^3 al volumen del paquete.

Referencias

American Statistical Association. (2002). *What is a statistical project?* Online: www.amstat.org/education/statproject.html.

Anderson, C. W. y Loynes, R. M. (1987). *The teaching of practical statistics.* New York: Wiley.

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education 2*(3). Online: www.iejme/.

Aoyama, K. y Stephens, M. (2003). Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective, *Mathematics Education Research Journal 15*(3), 3-22.

Arteaga, P. (2008). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos.* Trabajo fin de Master. Universidad de Granada.

Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. M. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *UNION, 18,* 93-104.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales, *Números 76,* 55-67.

Arteaga, P., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2011). Gráficos estadísticos en la educación primaria y la formación de profesores. Indivisa 12, 123-135. ISSN: 1579-3141

Arteaga, P., Batanero, C., Ortiz, J. y Contreras, J. M. (2011). Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Publicaciones, 41,* 33-49.

Batanero, C. (1998). Recursos en Internet para la educación estadística. *UNO, 15*, 13-25.

Batanero, C. (2000a). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO,* 25, 41-58.

Batanero, C. (2000b). Controversies around significance tests. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1-2), 75-98.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística.

Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Educación y Pedagogía, 35,* 37-64.

Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2011). El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO*, 59, 9-17.

Batanero, C., Cañadas, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2012). ¿Es sencilla la interpretación de las tablas de contingencia? *Gamma, 12,* 27-34.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM-TEIA. Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana*, 2(2). http://emteia.gente.eti.br/

Batanero, C., Contreras, J. M., Cañadas, C., y Gea, M. M. (2012). Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. *Novedades educativas 261*, 78-84.

Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza *Revista digital Matemática, Educación e Internet 12(2).* http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/

Batanero, C. y Godino, J. D. (2001). *Análisis de datos y su didáctica.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, 5, 15-28.

Batanero, C. y Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary students. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 558-567.

Batanero, C., Vera, O. y Díaz, C. (2012). Dificultades de estudiantes de Psicología en la comprensión del contraste de hipótesis. *Números, 80,* 91-101

Bertin (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

Birnbaum, L. (1982). Interpreting statistical significance. *Teaching Statistics,* 4 (1), 24-27.

Borassi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Leaming of Mathematics, 7*(3), 2-8.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' unsderstanding of the arithmetic average concept. En L. Meira (Ed.), *Proceedings of the 19th PME Conference* (Vol. 3, pp. 144-151). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brazil.

Cañadas, G., Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2012). Estimación de la asociación en tablas de contingencia por estudiantes de psicología. *UNO 60*, 87-94.

Cañadas, G., Batanero, C., Díaz, C. y Roa, R. (2012). Psychology students' understanding of the Chi-squared test. *Statistique et Enseignement 3* (1), 3-18.

Castro-Sotos, A. E., Van Hoof, S., Van den Noortgate, W. y Onghena, P. (2009). The transitivity misconception of Pearson's correlation coefficient. *Statistics Education Research Journal*, *8*(2), 33-55.

Carvalho, C. (1998). Tarefas estadísticas e estratégias de resposta. Trabajo presentado en el *VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación.* Castelo de Vide, Portugal.

Carvalho, C. (2001), *Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade.* Tesis doctoral. Universidad de Lisboa.

Chapman, L. J. y Chapman, J.P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid Psychodiagnostic signs. *Journal of Abnormal Psychology*, *74*, 271-280.

Chaput, B., Girard, J. C., y Henry, M. (2011). Frequentist approach: modelling and simulation in statistics and probability teaching. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 85-95). New York: Springer.

Cobo, B. y Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿Un concepto sencillo? *UNO* 23, 85-96.

Cobb, P. y Hodge, L. (2002). Learning, identity, and statistical data analysis. En B. Phillips (Ed.). *ICOTS-6 papers for school teachers*. [CD-ROM]. Cape Town: International Association for Statistics Education.

Connor, D., Davies, N. y Payne, B. (2002). Web-based project and key skill work. *Teaching Statistics*, *24*(2), 62-65.

Contreras, J. M. (2009). *Recursos en Internet para la enseñanza de la probabilidad condicionada.* Departamento de Didáctica de la

Matemática.

Contreras, J. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2011). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Epsilon, 28*(2), 7-17.

Contreras, J. M. Batanero, C., Cañadas, G. y Gea, M. (2012). La paradoja de Simpson. *SUMA, 71,* 27-34.

Contreras, J. M., Díaz, C., Arteaga, P., Gonzato, M., Cañadas, G. (2011). Probabilidad condicional: Exploración y visualización mediante recursos en Internet. *Epsilon 79,* 93-102

Coutinho, C. (2001). *Introduction aus situations aléatoires dés le Collége: de la modélisation à la simulation d'experiences de Bernoulli dans l'environment informatique Cabri-géomètre-II.* Tesis Doctoral. Universidad de Grénoble.

Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication, and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, *3*, 299-311.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Dantal, B. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité. En *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 57-59). Reims: Commission Inter-IREM.

Day, A. (Ed.) (1992), *The annual register 1992,* 234, London: Longmans.

De la Fuente, E. I. y Díaz, C. (2004). Controversias en el uso de la inferencia en la investigación experimental. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento, Volumen especial 2004,* 161-167

Díaz, C. (2005). *Apuntes sobre inferencia bayesiana*. Granada: La autora.

Díaz, C., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 26* (2), 149-162.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2004). Controversias en el uso de la inferencia en la investigación experimental. *Metodología de las Ciencias del Comportamiento,* Volumen especial 2004, 161-167.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon,* 59, 245-260.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Enseñanza del teorema de Bayes con apoyo tecnológico. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. [CD-ROM]. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2007). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática, 18(2), 75-94.*

Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Estepa, A. (1995). Las tablas de contingencia y su enseñanza. ¿Qué podemos aprender de las investigaciones realizadas? *UNO*, 3. 89-100.

Estepa, A. (1995). Consideraciones sobre la enseñanza de la asociación estadística. *UNO, 5, 69-79.*

Estepa, A. (2007). Caracterización del significado de la correlación y regresión en estudiantes de Educación Secundaria. *Zetetiké 15* (28), 119-151.

Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias, 13*(2), 155-170.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona

Estrada, A. y Díaz, A. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO* 44, 48-58.

Falk, R. (1986a). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292 – 297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Falk, R. (1986b). Misconceptions of statistical significance. *Journal of Structural Learning, 9*(8), 3-96.

Fernández, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante, XVIII* (1 y 2), 161-183.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Fisher, R. A. (1956). Mathematics of a lady testing tea, En J. Newman (Ed.), *The world of mathematics.* Simon and Schuster. Traducido como Las matemáticas de la catadora de té. En J. R. Newman (Ed.), *El mundo de las matemáticas* (Vol. 3, pp. 194 – 203). Barcelona: Grijalbo, 1979.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M, & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Online: www.amstat.org/Education/gaise/.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education 32*, 124-158.

Gal, I (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Gal I. y Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: towards an assesment framework. *Journal of Statistics Education, 2*(2) Online: /www.amstat.org/publications/jse.

Gal, I., Ginsburg, L. y Schau, C. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment chanllenge in statistics education* (pp. 37-54). Amsterdam: IOS Press.

Gattuso, L. (2006). Statistics and mathematics. Is it possible to create fruitful links? En A. Rossman, & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* [CD-ROM]. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education.

Gattuso, L. y Mary, C. (1996). Development of concepts of the arithmetic average from high school to University. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. I, pp. 401-408). Universidad de Valencia.

Gattuso, L. y Mary, C. (2002). Development of the concept of weighted average among high-school children. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* [CD-ROM]. Cape Town: International Association for Statistical Education.

Gerber, R., Boulton-Lewis, G y Bruce, C. (1995). Children’s understanding of graphic representation of quantitative data. *Learning and Instruction 5*, 70-100.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161). Chichester: Wiley.

Girard, J. C. (1997). Modélisation, simulation et expérience aléatoire. In *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 73-76). Reims: Commission Inter-IREM.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1997). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis.

Gómez Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

Graham, A. (1987). *Statistical investigations in the secondary school.* Cambridge: The Open University Centre for Mathematics Education.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d’obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 49-95.

Green, D. R. (1989). School pupils' understanding of randomness. En R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education* (Vol. 7, pp. 27-39). París: Unesco.

Hall, J. (2011). Engaging teachers and students with real data: benefits and challenges. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 335-346). New York: Springer.

Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers’ knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*. *A joint ICMI and IASE study* (pp. 235-246). New York: Springer.

Hawkins, A. (1991). Student’s project work and the UK applied statistics competition. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 209-213).Voorburg: International Statistical Institute.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 187-205.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélization en l'enseignement. En *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 77-84). Reims: Commission Inter-IREM.

Holmes, P. (1980). *Teaching Statistics 11-16.* Sloug: Foulsham Educational.

Holmes, P. (1997). Assessing project work by external examiners. En I. Gal y J. B: Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 153-164). Voorburg: IOS Press.

Holmes, P. (2002). Some lessons to be learnt from curriculum developments in statistics. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* [CD-ROM]. Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent.* Paris: Presses Universitaires de France.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

Konold, C., Lohmeier, J., Pollatsek, A., Well, A. D., Falk, R. y Lipson, A. (1991). Novice views on randomness. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 167-173). Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University.

Li, D. Y. y Shen, S. M. (1992). Students'weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics 14* (1), 2-8.

MacGillivray, H. y Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 109-120). New York: Springer.

Mayén, S., Batanero, C. y Díaz, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12(2).* 151-178.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grows (Ed.), *Hanbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: Macmillam N.C.T.M..

MEC (2006a). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*.

MEC (2006b). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.*

Maury, S. (1985). Influence de la question dans une épreuve relative á la notion d'independance. *Educational Studies in Mathematics, 16,* 283-301.

Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students'statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *14,* 415-429.

Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education 2*(3),188-207. Online: http://www.iejme/.

Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 221-255). Dordrecht: Kluwer.

Moses, L. E. (1992). The reasoning of statistical inference. En D. C. Hoaglin y D. S. Moore (Eds.), *Perspectives on contemporary statistics* (pp. 107–122). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Murray, S. y Gal, I. (2002). Preparing for diversity in statistics literacy: Institutional and educational implications. En B. Phillips (Ed.). *ICOTS-6 papers for school teachers*. [CD-ROM]. Cape Town: International Association for Statistics Education.

N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA; N.C.T.M. http://standards.nctm.org/

Nolan, D., & Speed, T.P. (1999). Teaching statistics theory through applications. *American Statistician*, *5*3, 370-375.

Ottaviani, M. G. (1998). Developments and perspectives in statistical education. *Proceedings of the Joint IASS/IAOS Conference. Statistics* *for Economic and Social Development*. [CD-ROM]. Aguascalientes, México: IASS.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, A.D. (1981). Concept or computation: Students'understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 191-204.

Pratt, D., Davies, N. y Connor, D. (2011). The role of technology in teaching and learning statistics, En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 97-107). New York: Springer.

Reading, C. y Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 187-194). Universidad de Valencia.

Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2006). Reasoning with evidence – new opportunities in assessment. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2008). Mapping new statistical literacies and iliteracies. Trabajo presentado en el *11th International Congress on Mathematics Educ*ation, Monterrey, Mexico.

Rouncenfield (1995). The statistics of poverty and inequality. *Journal of Statistics Education, 3*(2).

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Máster. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Ruiz, B., Batanero, C., Arteaga, P. (2011). Vinculación de la variable aleatoria y estadística en la realización de inferencias informales por parte de futuros profesores. *Bolema, 24* (39), 413-429.

Sánchez Cobo, F.T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Scheaffer. R. L. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Schield, M. (2006). Statistical literay survey analysis: reading graphs and tables of rates percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town: International Association for Statistical Education. Online: http://www. stat.auckland.ac.nz/~iase.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Serrano, L, Batanero, C., y Cañizares, M. J., (1999). Concepciones sobre distribuciones aleatorias planas en alumnos de secundaria. *Epsilon, 43-44*, 149-162.

Serrano, L. y Díaz, C. (2005). Implicaciones de las heurísticas y sesgos para la enseñanza de la estadística. Actas *de las XI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las matemáticas*. [CD-ROM]. Las Palmas de Gran Canaria: Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.

Starkings, S. (1997). Assessing students' projects. En I. Gal y J. B: Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 139-152). Voorburg: IOS Press.

Tormo, C. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la media aritmética. *UNO*, 5, 29-36.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

U.N.E.S.C.O. (1990*). Demographic year book* 1990. New York: United Nations.

Vallecillos, A. (1994). *Nivel de significacion en un contraste estadístico de hipotesis. Un estudio teorico-experimental de errores en estudiantes universitarios.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Watson, J. (1997). Assessing statistical literacy through the use of media surveys. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.). *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121). Amsterdam: IOS Press.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Webb, N. L. (Ed.) (1993). Assessment in the mathematics classroom, 1993 NCTM yearbook. Reston, VA: NCTM.

White, A. L. (1980). Avoiding errors in educational research. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 47 – 65). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.