INVESTIGACIONES ACTUALES EN EDUCACIÓN ESTADÍSTICA Y FORMACIÓN DE PROFESORES

Edita: Juan J. Ortiz

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Educación y Humanidades. Melilla
Universidad de Granada

ISBN: 978-84-694-4597-6

Depósito Legal:

Imprime:

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

En la actualidad, la enseñanza de la estadística y la probabilidad está adquiriendo cada vez mayor importancia en los currículos de la mayoría de los países, incluso desde los primeros niveles educativos. Por ejemplo, en España, la propuesta oficial para la Educación Primaria sugiere iniciar cuanto antes el estudio de los conceptos estadísticos y probabilísticos, cambiando no sólo los contenidos sino la metodología, mediante una enseñanza activa basada en situaciones contextualizadas, que sean representativas del significado de dichos conceptos.

Para cumplir con estos objetivos, la investigación en educación estadística debe tratar de responder a los nuevos problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad y contribuir a la mejora de la formación de los profesores que han de llevar a cabo dicha enseñanza.

Con esta finalidad se presenta en este libro una muestra de investigaciones actuales focalizadas en la educación estadística y en la formación de profesores. Tratan diferentes aspectos, como el análisis de los procesos de estudio, los conocimientos necesarios para la enseñanza de la estadística, los sesgos y heurísticas sobre conceptos probabilísticos que presentan los futuros profesores de educación primaria o sobre las actitudes de los mismos ante estos contenidos. Otros trabajos son sobre el desarrollo del pensamiento estadístico de profesores de educación secundaria, los conocimientos de conceptos y gráficos estadísticos que poseen los profesores en formación así como la importancia del uso de las paradojas en la formación de profesores.

Esperamos que estos trabajos sean del interés de los profesores, los formadores de profesores y los interesados en la investigación en educación estadística, lo que redundará en beneficio de la enseñanza que reciben los estudiantes de los diferentes niveles educativos.

Expresamos nuestro agradecimiento al Vicerrectorado de Política Científica e Investigación de la Universidad de Granada, que ha financiado esta publicación a través del *Contrato-Programa de Investigación. Plan 20,* suscrito con la Facultad de Educación y Humanidades de Melilla.

Juan Jesús Ortiz

Capítulo 1

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE UN PROCESO DE ESTUDIO DE LA LEY EMPÍRICA DE LOS GRANDES NÚMEROS[1]

DIDACTICAL ANALYSIS OF A TEACHING AND LEARNING PROCESS FOR THE EMPIRICAL LAW OF LARGE NUMBERS

Juan D. Godino (1), Rafael Roa (1), Ángel M. Recio (2),

Francisco Ruiz (1) y Juan L. Pareja (1)

(1)Universidad de Granada

(2)Universidad de Córdoba

Resumen. Se analiza una aproximación intuitiva al estudio de la ley empírica de los grandes números, realizado por una pareja de maestros en formación, mediante el uso de un software de simulación de experiencias aleatorias y con la asistencia de un profesor. El análisis se realiza aplicando algunas herramientas del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. En particular se valora la idoneidad epistémica, cognitiva e instruccional del proceso de estudio. Se concluye con algunas implicaciones sobre las características del dispositivo de simulación y del papel del profesor para incrementar la idoneidad del proceso de estudio.

Palabras clave: Enseñanza, aprendizaje, simulación probabilística, estudio de casos, idoneidad didáctica.

Abstract. In this paper we analyse an intuitive approach to the study by a pair of student teachers of the empirical law of large numbers. The learning is based on the use of a random experiment simulation applet with feedback by a lecturer. The analysis is based on some theoretical tools taken from the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction. In particular we assess the epistemic, cognitive and instructional suitability of the study process. We deduce some requirements of the simulation device characteristics and the lecturer's role to increase the suitability of the teaching and learning process.

Keywords: Teaching, learning, probabilistic simulation, case study, didactical suitability.

[1] Versión ampliada y revisada de la Ponencia Invitada al *7th International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS 7). Brasil, Julio, 2006.

1. CONTEXTO Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el contexto de la formación matemática y didáctica de profesores de educación primaria mediante el uso de recursos informáticos (Proyecto Edumat-Maestros, Godino y cola., 2004) hemos realizado experiencias de enseñanza de contenidos matemáticos específicos a diversos grupos de estudiantes en tres escenarios complementarios:

- Escenario 1: Clase habitual (salón de clase con pizarra, texto y cañón de proyección).
- Escenario 2: Clase de informática; manejo individual (o por parejas) de los programas, con el apoyo del formador.
- Escenario 3: Seguimiento clínico de parejas de estudiantes interactuando con programas informáticos con el apoyo de un profesor.

En este trabajo usaremos la información recogida en el escenario 3 correspondiente al estudio realizado por una pareja de alumnos del tema “ley del azar”(o ley empírica de los grandes números) mediante el programa de simulación “box-model” del NCTM, disponible en: http://illuminations.nctm.org/imath/6-8/BoxModel/index.html.

Los datos que usaremos para apoyar nuestras reflexiones corresponden a parte de una sesión de una hora de duración que fue audio-videograbada y transcrita, permitiéndonos describir las trayectorias epistémica, instruccional (particularmente el uso del recurso informático) y algunos aspectos de las configuraciones cognitivas de los estudiantes (Godino, Contreras y Font, 2006).

Las cuestiones de investigación planteadas fueron las siguientes:

- ¿Qué aprenden los estudiantes que han seguido este proceso de estudio?
- ¿Qué factores han condicionado su aprendizaje?
- ¿Cómo se podría mejorar la idoneidad del proceso de estudio?

Aunque se trata de una experiencia particular, los hechos observados y su interpretación con ayuda del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) permiten identificar fenómenos cognitivos e instruccionales de mayor alcance. Usaremos este caso, además, para ejemplificar la metodología de análisis didáctico basada en dicho marco teórico.

La evaluación de los resultados se basa en el análisis de las transcripciones de la grabación en video de las interacciones de la pareja de estudiantes guiados por un profesor. A partir de esta transcripción describiremos el proceso de estudio como un proceso estocástico compuesto de diferentes trayectorias (Godino, Contreras y Font, 2006): epistémica (conocimientos institucionales implementados), docente (papeles del profesor), discentes (papeles de los estudiantes), mediacional (uso de los recursos tecnológicos) y cognitivas (conocimientos de los estudiantes).

El análisis se centrará en identificar, las competencias logradas y los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales puestos de manifiesto en la trayectoria de estudio implementada. Previamente será necesario explicitar la configuración epistémica de referencia sobre la ley de los grandes números y nociones asociadas. Como resultado mostraremos el papel crucial del profesor en la optimización del proceso de estudio, así como el de la selección de unos recursos técnicos adecuados.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE ESTUDIO

Para la realización de las actividades prácticas en el aula de informática los estudiantes usaron una “guía de prácticas” en la que se describía el recurso a utilizar y las tareas propuestas. El software utilizado era el simulador “box-model” del NCTM disponible en el sitio web indicado anteriormente.

Los objetivos de la práctica eran:

a) Simular situaciones aleatorias en un entorno informático.

b) Estudiar y analizar los resultados obtenidos en esas simulaciones.

c) Contrastar los resultados esperados con los finalmente obtenidos.

d) Familiarizar al estudiante con el lenguaje y los conceptos probabilísticos elementales.

El programa tiene dos módulos. El primero permite la simulación de series de experimentos simples, tales como el lanzamiento de monedas, dados, etc., representar las distribuciones de frecuencias relativas y compararlas con las probabilidades de los sucesos. El segundo permite simular series de experimentos de lanzamiento de varios “dados” y estudiar la distribución de la suma y la media de puntos obtenidos. Aunque en la experiencia realizada los estudiantes utilizaron los dos módulos, en este trabajo sólo vamos a considerar el primero, por razones de espacio.

En el primer módulo se dispone de un “modelo de urnas” que permite explorar las relaciones entre las frecuencias relativas y las probabilidades de sucesos aleatorios. Un modelo de urnas es un dispositivo estadístico que se puede usar para simular experimentos probabilísticos, tales como el lanzamiento de una moneda, un dado, etc., sustituyendo el experimento original por otro equivalente consistente en la extracción de bolas de una urna. Para ello hay que decidir qué “ficha” sustituye a cada suceso elemental en el experimento original.

Descripción del uso del “*applet*” (Figura 1):

- Entrada de datos: Marcar las fichas numeradas que deseamos entrar en la urna. Por ejemplo, 0, “cara”, 1, “cruz”. Si se quiere que la moneda sea sesgada, por ejemplo, que obtener 0 tenga doble probabilidad que obtener 1 bastará incluir en la urna dos 0.

- Extracción aleatoria de fichas: Pulsar el botón Start (comienzo) para extraer al azar (con reemplazamiento) fichas de la caja y observar, en tiempo real, las frecuencias relativas de obtener una ficha dada a medida que se incrementa el número de extracciones. El dispositivo sólo permite extracciones con reemplazamiento, por lo que sólo se consideran experimentos aleatorios independientes.

- Parada de la extracción: Pulsar el botón de Pause (pausa). Marcando en cada barra del diagrama se muestra la frecuencia relativa del suceso correspondiente. En el modo de pausa se puede deslizar una barra para observar los números obtenidos.

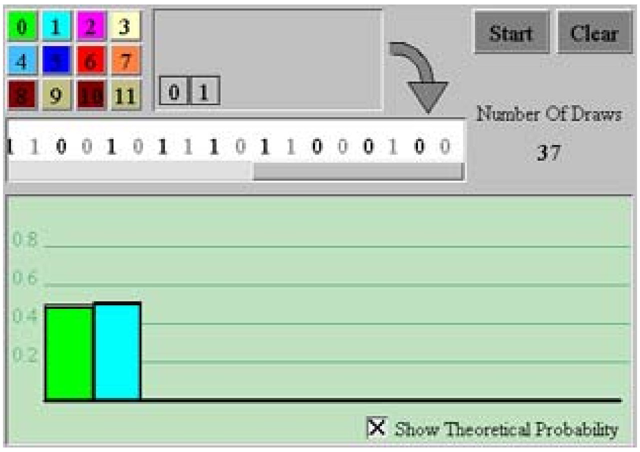


Figura 1. Simulación del lanzamiento de una moneda con “box-model”

Sobre este módulo las cuestiones solicitadas en la “guía de prácticas” fueron las siguientes:

Simula el lanzamiento de una moneda 10 veces (introduce los números 0 (cara) y 1 (cruz) en la caja y pulsa Pause cuando se hayan hecho 10 extracciones). Observa el comportamiento de las frecuencias relativas de cada suceso respecto de la distribución de probabilidad teórica.

a) ¿Cuál es la frecuencia relativa de obtener cara cuando se han hecho 10 lanzamientos?

b) ¿Por qué es diferente de la probabilidad? Continúa la simulación hasta 50 lanzamientos.

c) ¿Hay ahora menores diferencias entre las frecuencias relativas y las probabilidades de obtener cara o cruz? Explica por qué.

Estas consignas son una versión abreviada de las dadas en la “lección” descrita en:

http://illuminations.nctm.org/index_d.aspx?id=448

En este documento se incluían además las siguientes cuestiones:

- Haz una predicción del número de extracciones que consideres darían lugar a que los valores (de las frecuencias relativas y la probabilidad) estuvieran muy próximos entre sí.

- Prueba tu conjetura comenzando de nuevo la extracción y deteniendo la simulación cuando se llegue al número que hayas previsto. Repite la experiencia si fuera necesario hasta que consigas que los dos valores estén muy próximos.

- ¿Qué hipótesis puedes hacer en este momento sobre el número de extracciones necesario para asegurar que las frecuencias relativas y las probabilidades sean iguales?

En nuestro caso, se evitó el uso de la expresión “experimental probability”, que no es nada oportuna ya que provoca una confusión entre frecuencia relativa y probabilidad. También se cambió el valor de 20 para el número de replicaciones en la primera simulación por 50, que sigue siendo excesivamente pequeño para mostrar una cierta estabilidad de las frecuencias relativas. Sin embargo, en la “lección” inglesa se plantean cuestiones que llevan al estudiante a repetir el experimento un número grande de veces, lo que no ocurre con la versión de la “guía de prácticas” que usamos en la experiencia.

Esta diferencia en las consignas dadas tiene importantes efectos en la idoneidad didáctica del proceso de estudio implementado, ya que si no se crean condiciones para que el número de repeticiones sea elevado, y se fije la atención en las rachas y fluctuaciones del proceso estocástico generado, se puede reforzar un sesgo bien caracterizado en la literatura de investigación conocido como “creencia en la ley de los pequeños números” (Tversky y Kahneman, 1982).

3. ANÁLISIS DE LOS CONOCIMIENTOS PRETENDIDOS

El dispositivo de simulación “box model” permite abordar el estudio de la ley de los grandes números de una manera no formal, mediante la elaboración de secuencias de frecuencias relativas calculadas a medida que se incrementa el número de experimentos.

> “La progresiva estabilización de las frecuencias relativas de un resultado dado en un número grande de experimentos, que ha sido observada durante siglos y fue expresada por Bernoulli como un teorema matemático, sirvió como justificación para la definición frecuencial de la probabilidad”. ... “Esta idea no está libre de dificultades, debido a que la naturaleza específica de la convergencia aleatoria es difícil de comprender y la aparición de largas rachas, coincidencias y patrones inesperados son contra-intuitivos” (Batanero et. al., 2005, p. 30)

La situación-problema que da origen a este fenómeno se puede describir así. ¿Qué ocurre a las frecuencias relativas de un suceso cuando se incrementa indefinidamente el número de experimentos? Al lanzar una vez una moneda, por ejemplo, no podemos prever si saldrá cara o cruz; si la lanzamos 10 veces, la frecuencia relativa puede ser 0.5, pero no necesariamente. Sin embargo, se conoce que la frecuencia relativa de obtener cara, al lanzar n veces una moneda perfecta, fn, se aproxima a ½ cuando *n* crece indefinidamente. Pero la “convergencia” de esta sucesión de valores no es del mismo tipo que la convergencia analítica de sucesiones de números reales; se trata de una convergencia “en probabilidad”, lo que significa que la desviación entre las fn y p, para un valor de n fijado, puede no ser menor que un valor prefijado. “La probabilidad de tener una desviación dada tras n lanzamientos disminuye a medida que *n* aumenta, esto es, Pr (fn - p > ε) tiende a 0 cuando n tiende a infinito”

Además, esta convergencia estocástica puede ser lenta, mostrar fluctuaciones y rachas relativamente grandes. Estas son características que pueden ser exploradas mediante simulaciones de fenómenos aleatorios, a fin de construir intuiciones apropiadas sobre los mismos.

En la figura 2 mostramos una síntesis de los objetos y relaciones que se ponen en juego en el estudio de la ley de los grandes números agrupados en dos configuraciones: *inicial*, que indica los objetos conocidos de los cuales se parte, y *pretendida* o emergente como consecuencia del proceso de estudio programado. El diagrama muestra los objetos matemáticos que se ponen en juego clasificados en las seis categorías de entidades primarias propuestas en el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (Godino, 2002). Es una adaptación del denominado diagrama Ishikawa (o de causa y efecto). En este caso se quiere expresar que la ley de los grandes números es el efecto de la articulación de la red de objetos indicados.

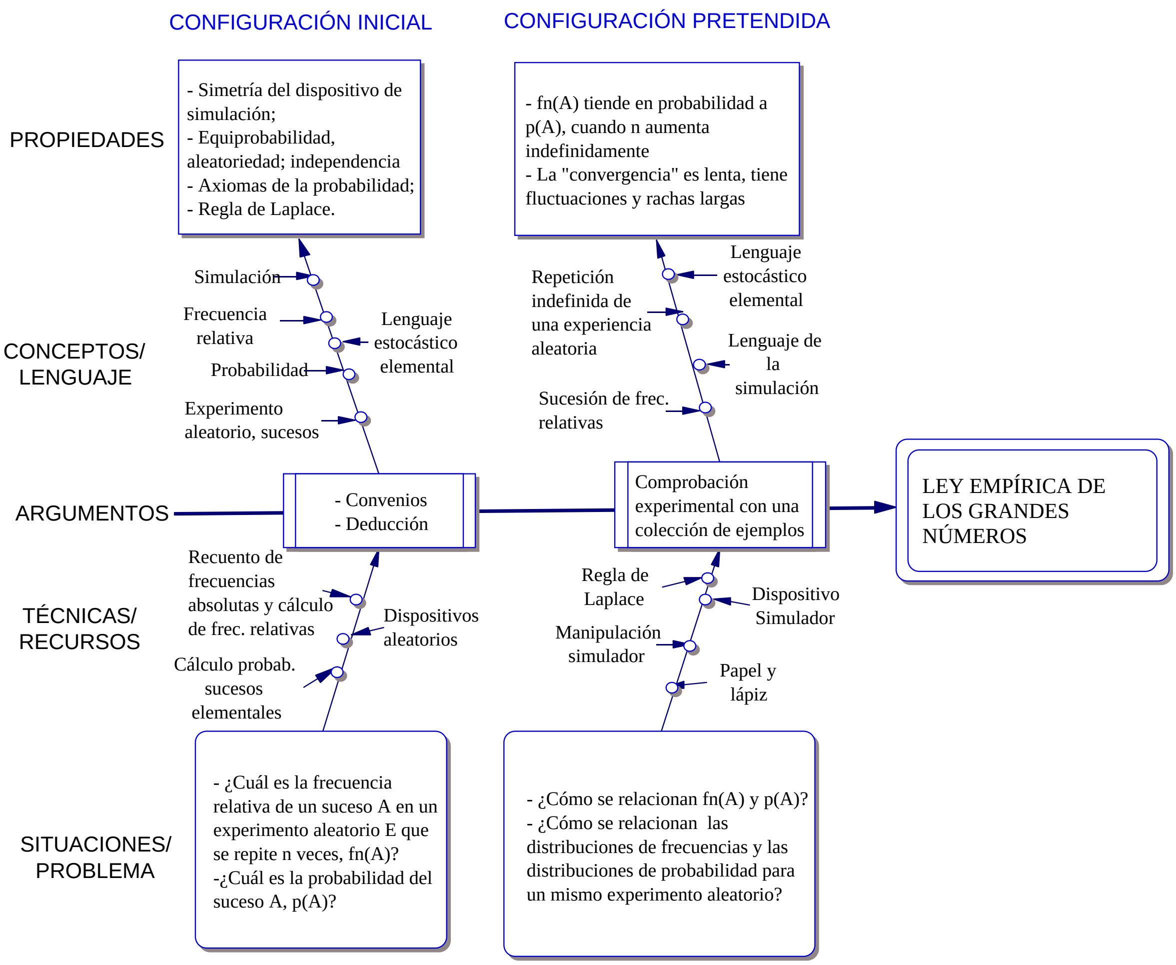


Figura 2. Conocimientos asociados a la “ley empírica de los grandes números”

El dispositivo de simulación “box model” permite estudiar también un caso elemental del teorema central del límite mediante el 2º módulo, el cual simula la replicación del lanzamiento de dos o más dados y representa la distribución de frecuencias de la suma de puntos o la media de los puntos obtenidos. Las distribuciones de probabilidad subyacentes a las secuencias de experimentos son la distribución triangular (caso de la suma o media de puntos al lanzar dos dados), y la distribución normal a medida que se incrementa el número de replicaciones. Para hacer patentes estos modelos probabilísticos será necesario ir incrementando el número de experimentos hasta alcanzar el valor máximo que permite el dispositivo (9999).

4. TRAYECTORIA DIDÁCTICA IMPLEMENTADA EN LA EXPERIENCIA

En esta sección describimos el uso que se hizo en la experiencia del dispositivo de simulación, los conocimientos que se pusieron en juego en cada una de las tareas realizadas (secuencia de configuraciones epistémicas implementadas) y algunos aspectos de las trayectorias instruccional y cognitivas.

4.1. Trayectoria epistémica implementada

En los 45 minutos que estuvieron los estudiantes interactuando con el “applet” manejaron los dos módulos y simularon diversos experimentos con monedas y dados. El análisis lo vamos a centrar principalmente en la simulación del lanzamiento de una moneda mediante el primer módulo. En la “clase de teoría” (escenario 1) el profesor había introducido previamente las nociones básicas sobre experiencias aleatorias (sucesos, probabilidad, regla de Laplace, y resuelto algunos problemas sencillos de cálculo de probabilidades)

El formador presentó brevemente el uso del dispositivo de simulación, les instó hacia la reflexión y que manifestaran sus ideas.

Comienzan simulando el lanzamiento de una moneda 50 veces esperando observar “la estabilidad de las frecuencias relativas” alrededor de 0.5, valor de la probabilidad de cada suceso en el supuesto de que el dispositivo no esté sesgado. Esto no se discute. El simulador muestra en el diagrama de barras el valor de la “probabilidad teórica” de cada suceso, que el alumno A1 describe como “*el valor central que tiene que tomar*”. Detienen el experimento después de 50 lanzamientos y observan que las frecuencias relativas son similares a las probabilidades (aproximadamente 0.5)

Después de simular el lanzamiento de varios dados (de 6, 12, 7 y 4 caras, siempre con una serie pequeña de simulaciones) se vuelve a repetir el experimento de lanzar una moneda otras 50 veces. En esta ocasión no obtienen los resultados esperados. Después de 50 lanzamientos las frecuencias relativas son 0.36 y 0.64, bastante diferentes de las probabilidades. No se continúa incrementando el número de replicaciones y se pasa a explorar el segundo módulo del “applet”. Los alumnos se muestran “convencidos” que las frecuencias relativas se van a aproximar a la probabilidad:

A1: Mientras más repeticiones haya más va a tender al valor central, se supone.

Sin embargo, desconocen cómo es esta aproximación, en particular si hay rachas de experiencias en las que las frecuencias relativas son menores (o mayores) que la probabilidad, y cuánto duran tales rachas. Tampoco conocen cómo de rápida es la tendencia hacia “el valor central”.

En la figura 3 resumimos la parte de la trayectoria epistémica implementada relativa a la simulación del lanzamiento de la moneda, indicando los tipos de objetos matemáticos puestos en juego, agrupados en dos configuraciones correspondientes a las dos veces que hicieron la simulación.

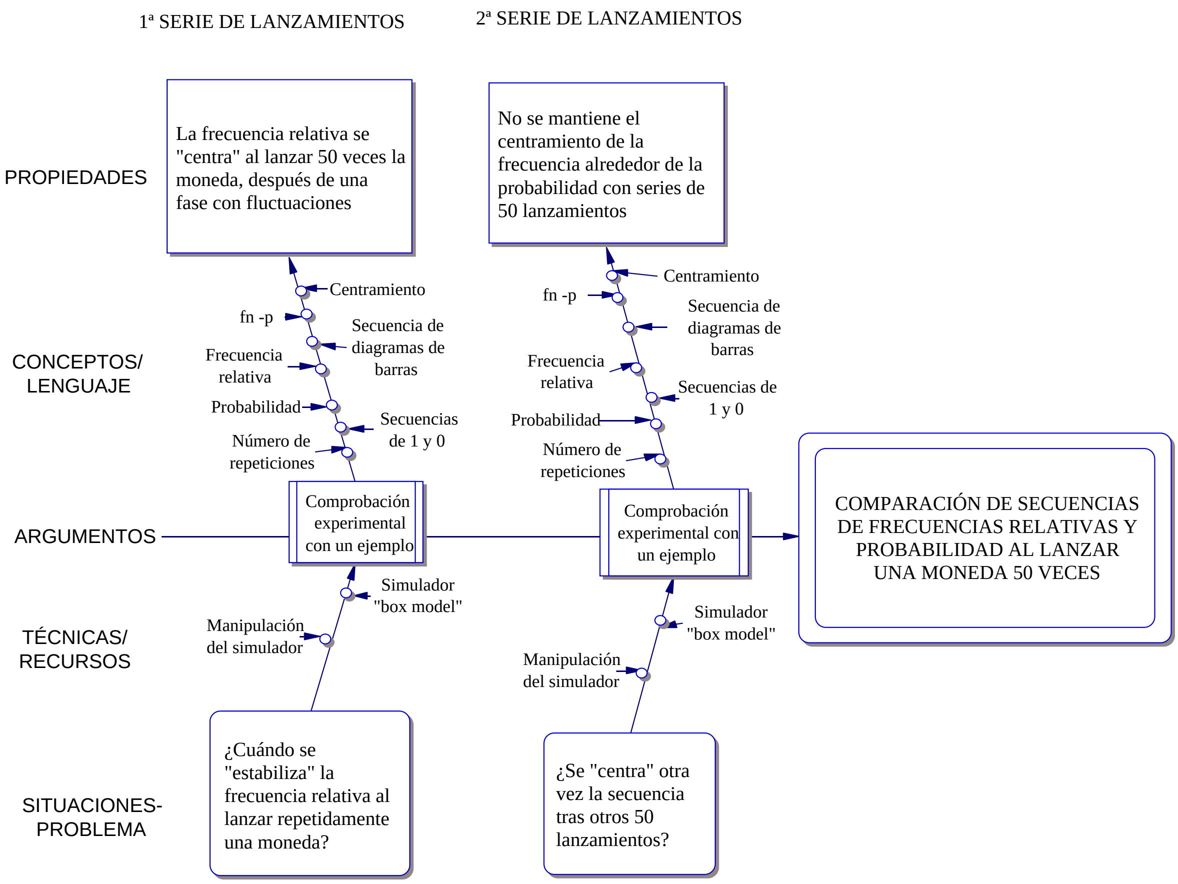


Figura 3. Configuraciones epistémicas implementadas

4.2. Trayectoria mediacional

El uso del simulador “box model” interacciona con cada tipo de entidad que se pone en juego en la configuración epistémica, y por consiguiente cambia el significado de los objetos matemáticos (Tauber, 2001). En efecto, hace posible el planteamiento de la nueva situación de comparación de las frecuencias relativas y la probabilidad cuando el número de experiencias es alto; las posibilidades de cálculo y graficación permiten hacer la exploración en un tiempo breve, siendo imposible hacerla de otro modo. El simulador introduce aspectos nuevos en el lenguaje, como son las secuencias grandes de sucesos, y de secuencias de diagramas de barras representando las distribuciones de frecuencias; algunos convenios de expresión son específicos de este simulador (manera de mostrar los valores numéricos de las frecuencias relativas pulsando sobre los diagramas de barras, selección con reemplazamiento de las fichas a introducir en la urna, ...)

Permite generar ejemplos indicativos del concepto de “secuencia ilimitada de distribuciones de frecuencias”, expresadas mediante los diagramas de barras, así como explorar visualmente las propiedades de las secuencias de frecuencias relativas para valores altos del número de experimentos. En cuanto a la argumentación (justificación) de las propiedades emergentes aporta una mayor convicción en el comportamiento del fenómeno, aunque siempre de una manera empírica-visual, no deductiva.

Visualmente la salida gráfica del programa muestra una cierta “estabilidad y convergencia de las frecuencias relativas” hacia la probabilidad teórica, incluso en pequeñas muestras como n=37, lo que puede reforzar la creencia en la supuesta “ley de los pequeños números”. Esto pone de manifiesto la interacción de la trayectoria mediacional con las trayectorias cognitivas de los estudiantes. La resolución gráfica de la pantalla interfiere en la apreciación visual de la magnitud de las desviaciones entre las frecuencias y las probabilidades de los sucesos. La lentitud del proceso de extracción de cifras de la urna dificulta el ensayo con muestras verdaderamente grandes en un tiempo razonable.

> “Quienes han estudiado el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han observado que la tecnología es mediadora del aprendizaje. Esto es, el aprendizaje es diferente al usar la tecnología” (Heid, 2005, p. 348).

Pero esta influencia es positiva dependiendo del tipo de tecnología y de cómo se utilice. En nuestro caso, el recurso utilizado no permite hacer un seguimiento del desarrollo del proceso estocástico generado. Las frecuencias relativas de obtener cara o cruz van cambiando a medida que se realizan nuevas extracciones; el dispositivo muestra en cada momento el “valor acumulado” de dichas frecuencias, pero no registra las anteriores. Esto tiene importantes consecuencias: la “historia” del proceso se pierde. La figura 4 muestra una salida de un programa (Statmedia) que permite resolver este problema. En este caso las diferencias entre las frecuencias relativas y la probabilidad (desviación final) se muestran también numéricamente. También se ve con claridad la existencia de largas rachas en las que fr < p (o fr > p), y que estos cambios son “lentos”.

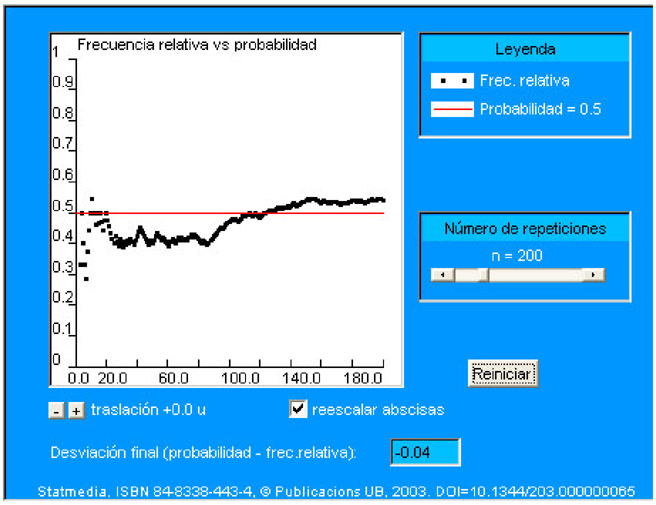


Figura 4. Lanzamiento de una moneda con Statmedia

4.3. Configuraciones cognitivas

La grabación de las interacciones entre los estudiantes, el profesor y el dispositivo nos permite un acceso, al menos parcial, a los conocimientos personales de los sujetos que participan en la experiencia con relación a los fenómenos estocásticos estudiados. En particular podemos observar algunas intuiciones correctas y sesgos probabilísticos, bien identificados en la literatura de investigación sobre este tema, y las reacciones del docente ante los mismos.

Confusión entre suceso y probabilidad

El estudiante A1 confunde los sucesos cara o cruz, con dos probabilidades (posiblemente quisiera decir, posibilidades).

A1: Cogiendo números aleatorios podíamos ver el lanzamiento de una moneda. Como puede salir cara o cruz, *son dos probabilidades*, tomamos 0 y 1 y la lanzamos, pongamos, 10 veces.

Falacia del jugador:

En el siguiente pasaje se manifiesta con claridad el sesgo probabilístico conocido como “falacia del jugador”: la creencia de que incluso en pequeñas secuencias de un experimento aleatorio, las desviaciones de las frecuencias relativas del suceso “obtener cara” respecto de “obtener cruz” deberán equilibrarse.

P: ¿Qué os parece lo que va saliendo?

A2: La tendencia debe ser al 50%, la probabilidad está equilibrada.

P: ¿Qué quiere decir eso?

A2: Que si salen dos unos pues luego salen dos ceros y se van igualando.

...

P: ¿Va ocurriendo lo que esperabais?

A2: Claro, es como si en una ruleta apostamos al rojo y sale negro, apuestas de nuevo al rojo el doble que antes y al final acabas recompensado.

<u>Intuición correcta del comportamiento límite del proceso</u>

Pulsan “*Show theoretical probability*” y aparece marcada de una manera gráfica la probabilidad correspondiente a cada valor.

A1: Este es el valor central que tiene que tomar mientras más repeticiones...

A2: Es 0´5.

A2: Mientras más lanzamientos hagamos más se va a acercar, ¿no?.

A1: Mientras más repeticiones haya más va a tender al valor central, se supone.

<u>Creencia en “la ley de los pequeños números”</u>

[El experimento se detiene después de 54 lanzamientos al observar que las frecuencias obtenidas son similares].

P: En el caso de la moneda, ¿Cuándo se centró, más o menos, os acordáis?

A1: Creo que en unos 50, o por ahí.

A2: No, en el 38

En la segunda simulación del lanzamiento de la moneda, después de 50 lanzamientos, las frecuencias obtenidas son 0.36 y 0.64. Quedan “asombrados” del resultado pero no deciden incrementar el número de lanzamientos.

5. IDONEIDAD DEL PROCESO DE ESTUDIO

La idoneidad didáctica de un proceso de estudio la descomponemos en tres dimensiones: epistémica, cognitiva e instruccional (Godino, Contreras y Font, 2006).

1. *Idoneidad epistémica*: adaptación entre los significados institucionales implementado, pretendido y global, que son usados como referencias.

2. *Idoneidad cognitiva*: el "material de aprendizaje" está en la *zona de desarrollo potencial* de los alumnos.

3. *Idoneidad instruccional*: las configuraciones y trayectorias didácticas posibilitan que el profesor o los alumnos identifiquen conflictos semióticos y resolverlos. También incluye la adecuación de los medios, en particular del tiempo asignado al estudio.

En cuanto a la idoneidad epistémica ya hemos indicado que en el significado pretendido (plasmado de manera parcial y difusa en la guía de prácticas) no se han propuesto situaciones de análisis de las secuencias de frecuencias relativas con valores grandes del número de experimentos. Este es un aspecto clave en el significado global de la ley empírica de los grandes números, por lo que se ha dificultado apreciar la convergencia en probabilidad de las frecuencias relativas hacia la probabilidad.

En cuanto a la idoneidad cognitiva podemos calificarla de baja debido a carencias tanto del dispositivo de simulación (lentitud para simular grandes series de experimentos) como de las intervenciones del profesor. Es cierto que "el contenido" pretendido tiene un grado de complejidad alto si tenemos en cuenta los conocimientos iniciales de los estudiantes. Sin una ayuda adecuada del profesor no es posible que, de manera autónoma, los estudiantes "reconstruyan" la ley de los grandes números y reconozcan sus características. Pero con una serie de tareas mejor planificadas y con explicaciones acertadas en los momentos claves del estudio es posible lograr una adecuada comprensión de los conocimientos pretendidos.

El tipo de formato de interacción entre estudiantes, profesor y medio podemos calificarlo de "dialógico", por lo que en principio es posible identificar los conflictos de significados que se ponen en juego. Pero de nuevo, bien por el "contrato didáctico" establecido (se pretende un trabajo práctico, autónomo y constructivista), o porque el profesor no domina la complejidad de los conocimientos pretendidos, ni es consciente de los sesgos en el razonamiento probabilístico, no ha habido oportunidad de superarlos. Por otra parte, el tiempo asignado es muy escaso para abordar el estudio de los dos módulos del simulador y los conocimientos probabilísticos implicados. Ya hemos indicado las carencias del simulador al no permitir registrar la "historia" de las desviaciones entre las frecuencias y la probabilidad.

En la figura 5 resumimos las principales características de la trayectoria didáctica implementada.

Un fenómeno didáctico que identificamos en estas interacciones podemos describirlo como "*pasividad docente*": en momentos críticos del proceso de estudio en los que se manifiestan conflictos semióticos, el profesor no es consciente de ellos y no interviene introduciendo los cambios necesarios en la trayectoria epistémica y mediacional; no aprovecha el contexto creado para apoyar sus explicaciones. Tampoco la interacción entre los estudiantes, uno de ellos con conocimientos más apropiados desde el punto de vista de los significados pretendidos, es garantía de superar los conflictos.

El análisis de la trayectoria epistémica implementada muestra una cierta "*presión curricular*", por la gran cantidad de tareas y conocimientos cuyo aprendizaje se ha propuesto en una sesión de sólo 45 minutos. Además de la simulación de una moneda, que como hemos visto resultó incompleto, se abordó la simulación del lanzamiento de "dados" de 6, 12, 7 y 3 caras con el primer módulo, y se continuó con la exploración del segundo módulo, donde se entra en contacto con el teorema central del límite (convergencia a la distribución normal de probabilidad de la suma y media de puntos obtenidos al lanzar repetidamente varios dados).

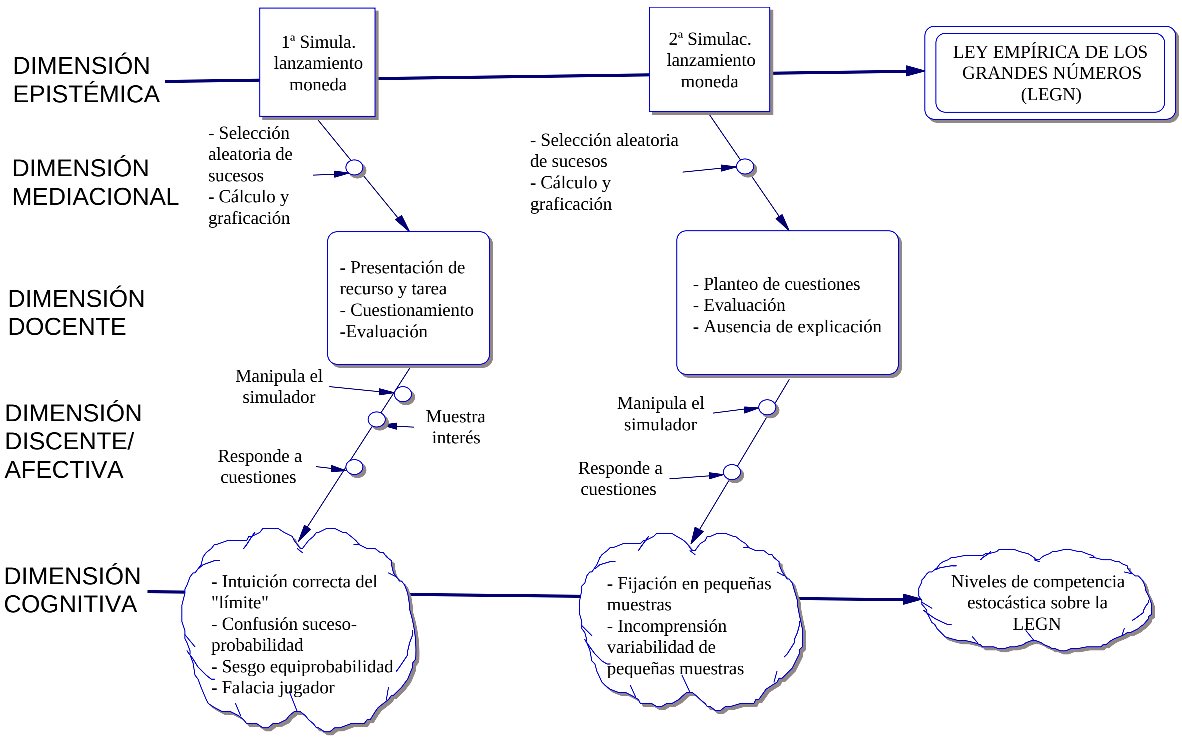


Figura 5. Trayectoria didáctica

El uso de las “nuevas tecnologías de la información” puede favorecer la aparición de este fenómeno de “presión curricular”: la pretensión de abarcar demasiados conocimientos sin tener en cuenta su complejidad y los recursos escasos de que se dispone, principalmente en cuanto al tiempo asignado.

6. SÍNTESIS E IMPLICACIONES

Algunas conclusiones de nuestro estudio son las siguientes:

1. La “guía de prácticas”, donde se diseñaron de manera parcial y difusa los significados pretendidos en el proceso de estudio, no incluyó consignas que llevaran a los estudiantes a observar el comportamiento de series grandes de simulaciones, la observación de las rachas y la rapidez de la convergencia. Desde el punto de vista del significado de referencia de “la ley empírica de los grandes números” esta es una carencia importante ya que los estudiantes tendrán dificultades para observar el comportamiento de las desviaciones de las frecuencias relativas y la probabilidad y la presencia de las rachas de sucesos.

2. El tiempo asignado a la exploración del simulador y al estudio de los conocimientos probabilísticos puestos en juego fue claramente insuficiente.

3. Los alumnos fueron incapaces de encontrar una explicación probabilística de los resultados de las simulaciones y la convergencia. Permanecen en un nivel puramente perceptivo, empírico, sin comprender la naturaleza y justificación de las regularidades o irregularidades que observan en la ocurrencia de sucesos y en las frecuencias relativas.

4. El profesor adoptó una “actitud constructivista”, esperando que los estudiantes por sí mismos construyeran los conocimientos pretendidos. No actuó ante los conflictos

cognitivos que se han presentado, particularmente sobre la convergencia en probabilidad de las frecuencias relativas a la probabilidad, ni aportó información a fin de superar tales conflictos y hacer progresar el aprendizaje.

5. Los momentos de regulación (institucionalización), en los cuales las explicaciones del profesor son potencialmente efectivas y "necesarias", pueden ocurrir en cualquier punto de la trayectoria didáctica. Sin embargo, esta función docente requiere de parte del profesor un dominio en profundidad del significado de referencia de los objetos estadísticos. Así mismo, es necesario que domine los conocimientos didácticos específicos de los contenidos que pretende enseñar, en este caso, conocimiento de los principales sesgos e intuiciones incorrectas sobre el comportamiento de las secuencias aleatorias.

6. Sería conveniente complementar el programa "box model" con otros recursos que permitan representar la secuencia de frecuencias relativas para ayudar en la superación de los conflictos cognitivos observados. Sería necesario estudiar con una tecnología tradicional de "papel y lápiz" las probabilidades a priori de los sucesos asociados a las experiencias aleatorias hacia las cuales se "centran" las frecuencias relativas.

Nuestros datos y reflexiones muestran la complejidad del trabajo del profesor, quien debe tener un conocimiento amplio de las configuraciones epistémicas de referencia, de las configuraciones cognitivas de los estudiantes con relación a los contenidos matemáticos pretendidos, ser capaz de identificar en momentos críticos los conflictos semióticos y tomar decisiones sobre el tipo de actuación que debe adoptar. La gestión de los recursos tecnológicos en cada momento de la trayectoria didáctica también plantea delicadas cuestiones.

El trabajo personal del estudiante, o en equipo, sobre tareas adecuadas, permite contextualizar los conocimientos matemáticos. Pero la progresión de los conocimientos y la optimización de la idoneidad del proceso de estudio requieren una secuencia de configuraciones didácticas de tipo dialógico y magistral que no siguen en principio un patrón regular, sino que su articulación depende de la aparición de conflictos que deben ser resueltos con cambios en las configuraciones didácticas. Como afirma Masalski (2005, p. ix), "encontrar modos efectivos de usar la tecnología en la enseñanza, aprendizaje y evaluación en matemáticas puede todavía ser una tarea desalentadora".

Los conocimientos didácticos del profesor deben abarcar el componente o dimensión epistémica (significados institucionales, sus adaptaciones y cronogénesis), dimensión cognitiva (significados personales, conflictos cognitivos descritos en la literatura), dimensión instruccional (patrones de interacción, tipos de configuraciones didácticas, su articulación, optimización de los recursos tecnológicos y temporales) y dimensión afectiva.

Agradecimientos. Trabajo realizado parcialmente en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MCINN) y Fondos FEDER.

REFERENCIAS

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenge for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22,* (2/3): 237-284.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International *Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26* (1): 39-88.

Godino, J. D., Roa, R., Ruiz, F. y Pareja, J. L. (2005). Mathematical and pedagogical content knowledge for prospective elementary school teachers: The "Edumat-Maestros" project. *15th ICMI Study Conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. Aguas de Lindoia, Brasil. Disponible en URL: http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html

Heid, M.K. (2005). Technology in mathematics education: tapping into visions of the future. En W. J. Masalski y P. C. Elliot (Eds.), *Technology – supported mathematics learning environments. Sixty – Seventh Yearbook* (pp. 35-366). Reston, VA: NCTM.

Masalskin, W. J. (2005). Preface. En W. J. Masalski y P. C. Elliot (Eds.), *Technology – supported mathematics learning environments. Sixty – Seventh Yearbook.* (p. ix). Reston, VA: NCTM.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Tversky, A, y Kahneman, D. (1982). Belief in the law of small numbers. En Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 23-31). New York: Cambridge University Press.

Capítulo 2

CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA DE LA ASOCIACIÓN ESTADÍSTICA

STATISTICAL ASSOCIATION KNOWLEDGE FOR TEACHING

Antonio Estepa Castro y María Magdalena Gea Serrano

Universidad de Jaén

Resumen. Este capítulo está orientado a la formación de profesores de estadística particularizando en la asociación estadística. Comenzamos el capítulo con la problemática de la enseñanza de la estadística, la formación de profesores de matemáticas y de estadística y el conocimiento estadístico para la enseñanza. Centrándonos en la formación de profesores de estadística en el tema de asociación estadística, continuamos con la descripción de la asociación estadística en los curricula no universitarios, las dificultades encontradas en la investigación didáctica sobre la asociación estadística y el conocimiento de la asociación estadística para la enseñanza. Finalizamos con unas reflexiones para la planificación de los procesos de estudio.

Palabras clave: Formación de profesores de estadística, conocimiento para la enseñanza, asociación estadística, pensamiento estadístico, enseñanza de la estadística

Abstract. This chapter is aimed at training teachers of statistics specially focusing on the statistical association. We begin the chapter with the problems of statistical education, training of teachers of mathematics and statistics and statistical knowledge for teaching. Focusing on the statistical training of teachers in the field of statistical association, we continue with the description of the statistical association in non-university curricula, the difficulties encountered in educational research on the statistical association and knowledge of the statistical association for teaching. We conclude with some thoughts for the planning of the study process.

Keywords: Training teachers of statistical, knowledge for teaching, statistical association, statistical thinking, teaching statistics

1. INTRODUCCIÓN

El ser humano, a pesar de su inteligencia y los avances conseguidos a través de la historia, continúa siendo vulnerable a multitud de factores que condicionan sus razonamientos y le conducen a la emisión de juicios sesgados e incluso erróneos en ambiente de incertidumbre (delMas, 2004). Es por ello que el razonamiento estadístico, se hace diferenciar del determinismo del razonamiento propiamente matemático, entre muchos otros factores, por el contexto de los datos al que se ve fuertemente sometido (Wild y Pfannkuch, 1999; delMas, 2004; Gal, 2004; Groth, 2007; Pfannkuch, 2008; Casey, 2010).

Son muchos los investigadores que apoyan la especificidad del razonamiento estadístico, y muestran la necesidad de atender a los elementos que lo caracterizan para un correcto desarrollo en el proceso de instrucción (Moore, 2004; delMas, 2004; Pfannkuch y Wild, 2004; Pfannkuch, 2008; Casey, 2008, 2010). Como indican Pfannkuch y Wild (2004, p. 21): "*El pensamiento estadístico impregna la forma de operar y funcionar en la vida cotidiana*", y es en este sentido donde cabe destacar la importancia del papel del docente en la evolución conceptual y de razonamiento del alumnado. Los resultados relativos a dificultades, errores en el tratamiento de nociones estadísticas básicas, así como los sesgos que cometen en la emisión de juicios en ambiente de incertidumbre avalan la idea de que no cabe esperar un desarrollo espontáneo en el razonamiento estadístico del estudiante sin un adecuado proceso de instrucción.

Desde la Didáctica de la Estadística se reclama, que el esfuerzo por el reconocimiento de la importancia de la inclusión de la Estadística en el aula, tal como se concreta en los currícula de nuestro sistema educativo, conlleve una adecuada y consecuente preparación del profesorado encargado de impartir esta disciplina. La formación del profesorado, adquiere en la actualidad un interés creciente, entre otras razones, por ser el motor de las reformas educativas. En cuanto a esta problemática, podemos distinguir dos grandes posturas de respuesta, por un lado la consideración de la especificidad de esta disciplina, considerada compleja por las nociones que alberga y los razonamientos implicados en la consecución de las diversas tareas implicadas en el proceso estadístico, y por otro lado, la escasa formación didáctica del profesorado encargado de impartir su enseñanza. Al respecto, Pfannkuch (2008) sugiere, concienciar al profesorado del poder que posee en cuanto a la posibilidad de desarrollar la capacidad de razonamiento de sus estudiantes, con la consecuente repercusión en el desarrollo de la comprensión conceptual de las nociones tratadas.

Como se señala en diversas investigaciones, los cursos de formación del profesorado no se centran en lo que verdaderamente importa que es la enseñanza de su disciplina en el aula, (Groth, 2007; Ball, Thames y Phelps, 2008; Casey, 2010). Se sugiere así, que la formación no se centre tanto en profundizar en el conocimiento de la propia disciplina sino en dotarles de conocimientos didácticos en pro de la mejora en el razonamiento de sus estudiantes.

El presente capítulo trata de evidenciar la importancia de la formación del docente en la enseñanza de las nociones estadísticas, ofrece una breve descripción de los resultados más relevantes relativos a la investigación didáctica sobre esta cuestión y pretende ofrecer un marco de referencia en cuanto al conocimiento necesario para la enseñanza de las nociones estadísticas, todo ello será completado con los resultados más relevantes relativos al proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de asociación estadística, presentando así un marco de actuación para el profesor implicado en su enseñanza.

2. LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

El compromiso que el docente sustenta en el desempeño de su función sufre en su día a día la necesidad de abarcar dos de las principales dificultades en la enseñanza de las nociones estadísticas, por un lado enfrentarse a la complejidad que el razonamiento estadístico alberga en la resolución de diferentes tareas, y por otro lado, atender adecuadamente a los aspectos didácticos relativos a su proceso de enseñanza y aprendizaje. Todo ello para logar una cultura estadística adecuada para los futuros ciudadanos.

En la actualidad, es notable la relevancia que la noción de *cultura estadística* (en inglés *statistics literacy*) adquiere en la divulgación referente a la investigación didáctica. Wallman (1993) nos ofrece un enfoque unificado de diversas fuentes y perspectivas indicando que: "*es la capacidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que impregnan nuestra vida cotidiana - junto con la capacidad de apreciar las contribuciones que el pensamiento estadístico puede hacer en las decisiones públicas y privadas, profesionales y personales.*" (Wallman, 1993, pág. 1)

Los investigadores que acuñan esta noción, abogan por la concienciación e implicación del profesorado en torno a su desarrollo en el aula. En este sentido, Batanero (2002) resume el objetivo de la función docente en las siguientes líneas: "*El objetivo principal no es convertir a los futuros ciudadanos en "estadísticos aficionados", puesto que la aplicación razonable y eficiente de la estadística para la resolución de problemas requiere un amplio conocimiento de esta materia y es competencia de los estadísticos profesionales. Tampoco se trata de capacitarlos en el cálculo y la representación gráfica, puesto que los ordenadores hoy día resuelven este problema. Lo que se pretende es proporcionar una cultura estadística*" (Batanero, 2002, p. 2).

El objetivo que se pretende es claro, pero los medios para conseguir la meta aún se encuentran en vías de desarrollo e implementación, entre otras causas, por la falta de consideración de la especificidad que el conocimiento estadístico sustenta en la enseñanza de las Matemáticas. Como señala Casey (2008, p. 137): *"Con el fin de formar a los profesores para la enseñanza de la estadística, el conocimiento de la materia necesaria para la enseñanza de la estadística debe ser definido y descrito en detalle".*

3. EL RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ESTADÍSTICOS

Bajo la consideración de que el pensamiento-razonamiento estadístico es la piedra angular del quehacer estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999; Pfannkuch y Wild, 2004), la función del docente debe, por tanto, caminar bajo la premisa de contribuir al desarrollo de esta capacidad en el alumnado.

En la descripción de las competencias básicas de los curricula no universitarios españoles se hace hincapié en el desarrollo de procesos de pensamiento (inductivo y deductivo); desarrollo y aplicación del pensamiento científico-técnico para interpretar la información que se recibe y para predecir y tomar decisiones con iniciativa y autonomía personal en un mundo en el que los avances que se van produciendo en los ámbitos científico y tecnológico tienen una influencia decisiva en la vida personal, la sociedad y el mundo natural.

Para Franklin et al. (2007), el principal objetivo de la educación estadística es ayudar a los estudiantes a desarrollar su pensamiento estadístico. Una primera caracterización del pensamiento estadístico se la debemos a Moore (1990) quien señala que los elementos fundamentales del pensamiento estadístico son:

- Omnipresencia de la variación, en contraposición a la visión determinista.
- La necesidad de los datos en los procesos. La primera prioridad es buscar en los datos.
- El diseño de la producción de datos, teniendo presente la variación.
- La cuantificación de la variación. La variación aleatoria se describe, matemáticamente, por la probabilidad.
- Explicación de la variación. El análisis estadístico busca efectos sistemáticos detrás de la variación aleatoria.

El modelo presentado por Wild y Pfannkuch (1999) referido al estudio de los procesos que intervienen en el pensamiento del ser humano en la resolución de problemas del mundo real a través de la Estadística, supone una importante contribución. Estos autores sugieren un diseño de instrucción basado en la investigación empírica en la que se de paso a construir el conocimiento. Según estos autores, podemos distinguir cuatro escenarios/dimensiones que integran el marco común en que se desarrolla el pensamiento estadístico en cuanto a una investigación basada en datos:

- dimensión 1: La planificación del *Ciclo de la Investigación*, referida al modo en que el investigador actúa y piensa en el transcurso de la investigación estadística;
- dimensión 2: Los *Tipos de pensamiento* que alberga el tratamiento de la variación de los datos y que constituye la base en la que se desarrolla en pensamiento estadístico. Esta dimensión recoge a su vez dos aspectos diferenciados, por una parte los *tipos fundamentales de pensamiento estadístico* implicados en la investigación y por otra parte los tipos generales de pensamiento aplicados al contexto estadístico;
- dimensión 3: La búsqueda y propuesta de planes alternativos de ataque mediante un *Ciclo de Interrogantes*, que pretende evidenciar el estado de interrogantes al que el investigador continuamente hace frente en la resolución de los problemas que se plantee;
- dimensión 4: La superación de diferentes *Disposiciones* del investigador en cuanto a la actividad desarrollada tales como la curiosidad, la imaginación o el escepticismo, entre otras, que dan paso al investigador a la entrada en las otras dimensiones.

Cabe ahora plantearse, tal como formulaba Moore (1999), la siguiente cuestión: "*¿De qué modo debemos tratar de enseñar a los principiantes (beginners) en un primer curso de estadística?*". Centrándonos en la formación de profesores Pfannkuch (2008), con objeto de concienciar al profesorado en el desempeño de su enseñanza, concreta en tres los elementos fundamentales de pensamiento estadístico a desarrollar en la formación del profesorado perteneciente a la dimensión 2 esbozada anteriormente, que son: la *transnumeración*, el *razonamiento con modelos estadísticos*, y la *consideración de la variación*. A continuación describimos brevemente los aspectos más relevantes que se proponen en cuanto al desarrollo de estos elementos de pensamiento estadístico.

Transnumeración es un término que hace referencia a los elementos de pensamiento implicados en la comprensión de la información relativa a las diferentes representaciones de los datos en sus diversas modalidades (representación tabular, cálculo de estadísticos, representaciones graficas, etc.). Los profesores, en este aspecto, deben conocer las dificultades y errores que cometen sus estudiantes en cuanto a las diferentes representaciones de los datos, así como motivar y potenciar la construcción de diferentes representaciones, que les permitan disponer de un amplio abanico de recursos en cuanto a la obtención de la mayor información posible de los datos recolectados.

Con el razonamiento con modelos estadísticos se hace referencia a la capacidad de decodificar, evaluar, juzgar y expresar verbalmente o por escrito mensajes relativos a los resultados obtenidos en las representaciones relativas a la transnumeración. El dominio del lenguaje estadístico, las argumentaciones, y la comunicación son elementos importantes que deben ser tenidos en cuenta por el profesorado en el desempeño de esta tarea. Pfannkuch (2008) señala que el lenguaje estadístico es crucial en el desarrollo conceptual del estudiante, siendo el vehículo que conduce a su desarrollo.

La consideración de la variación de los datos es uno de los pilares fundamentales a tener en cuenta por el profesorado. Pfannkuch (2008) destaca, entre otros aspectos relativos a la construcción de este conocimiento, el razonamiento muestral, la variabilidad muestral, el razonamiento inferencial, así como la consideración de las fuentes de variación.

Para Franklin et al. (2007), el pensamiento estadístico debe hacer frente a la omnipresencia de la variabilidad; por otro lado, la resolución de problemas estadísticos y la toma de decisiones dependen de la comprensión, explicación y cuantificación de la variabilidad de los datos. Estos autores consideran la resolución de problemas estadísticos como un proceso interrogativo que trae consigo cuatro componentes:

i. *Formular preguntas*: a) Aclarar el problema en cuestión; b) Formular preguntas que puedan ser respondidas con datos

ii. *Recoger datos:* a) Designar un plan para recoger datos adecuados; b) Llevar a cabo el plan de recogida de datos

iii. *Analizar datos:* a) Seleccionar métodos gráficos y numéricos adecuados; b) Usar estos métodos para analizar los datos

iv. *Interpretar resultados:* a) Interpretar el análisis; b) Relacionar los resultados con las preguntas iniciales

El desarrollo de este proceso se realiza bajo el enfoque del análisis exploratorio de datos. Algunas veces este proceso es cíclico, es decir, una vez obtenidas las conclusiones, si no responden adecuadamente a las preguntas planteadas, se reformula el proceso.

4. FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La primera propuesta de categorización del conocimiento necesario para la enseñanza es desarrollada por Shulman (1986) donde se distinguen tres categorías[2] como son: el *conocimiento del contenido* (que comprende el conocimiento de la materia y de su estructura organizativa), el *conocimiento curricular del contenido* (que comprende el conocimiento de los diversos diseños de programación de aula, el material didáctico, el carácter transversal de la materia en el currículum, así como su organización/estructura curricular a lo largo de la etapa - su carácter vertical -) y el *conocimiento pedagógico del contenido* (que comprende el conocimiento de las diferentes representaciones de las nociones tratadas, las concepciones, el proceso de evaluación, la gestión de las tareas, etc.) (Ball, Thames y Phelps, 2008).

[2] Estas tres categorías son refinadas por Shulman en otro trabajo posterior (véase Shulman, 1987).

Esta categorización del conocimiento necesario para la enseñanza presentada por Shulman ha sido ampliamente adaptada en diversas disciplinas; en el caso de las Matemáticas, destacamos entre diversos estudios[3], la caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por Ball, Thames y Phelps, (2008). Estos autores, sirviéndose de la investigación precedente, distinguen seis dominios albergados en dos grandes categorías denominadas *conocimiento del contenido* y *conocimiento pedagógico del contenido.* La primera categoría se compone del *conocimiento común del contenido (CCK)* (que se corresponde con la capacidad de resolución de tareas matemáticas convencionales que no es exclusivo de la enseñanza), el *conocimiento especializado del contenido (SCK)* (que se refiere al dominio de la materia en cuanto al diseño de secuencias de contenidos específicos que atienden cuidadosamente a las posibles dificultades y errores que se pueden suceder en el contexto de su enseñanza), y el *conocimiento en el horizonte matemático,* es decir, la toma de conciencia de cómo los tópicos matemáticos se relacionan a lo ancho del saber matemático incluyendo al curriculum. La segunda categoría (*conocimiento pedagógico del contenido*) se compone del *conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS)* (donde se integra el dominio del contenido matemático y el conocimiento de cómo los estudiantes lo aprenden, les motiva o piensan sobre dicho contenido matemático; *conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT)* (que integra contenido matemático y el repertorio de conocimientos sobre la enseñanza y su gestión del profesor) y el *conocimiento del contenido y currículum* (orientado a los materiales y programas que sirven como herramientas del oficio a los profesores, Shulman, 1987).

5. CONOCIMIENTO ESTADÍSTICO PARA LA ENSEÑANZA

El conocimiento del profesor para la enseñanza ha tenido bastante atención en general y en Educación Matemática en particular, sin embargo, existen pocos trabajos sobre el conocimiento estadístico para la enseñanza, a continuación resumimos las ideas al respecto de uno de estos trabajos.

Partiendo de la idea (tomada de David S. Moore) de que la Estadística es una disciplina en su propio derecho y no una rama de las Matemáticas y, en consecuencia, el conocimiento que se necesita para enseñar Estadística difiere del necesario para enseñar Matemáticas, Groth (2007) conceptualiza un marco teórico sobre del conocimiento estadístico para la enseñanza. Distingue dos tipos de conocimiento estadístico para la enseñanza: *conocimiento común* relacionado con las competencias adquiridas en los cursos de matemáticas convencionales y *conocimiento especializado* desarrollado al tratar los temas matemáticos y dilemas que surgen en la enseñanza. Adopta el marco teórico de resolución de problemas del proyecto GAISE (Frankiln et al., 2007). Distingue también entre el conocimiento matemático y no matemático utilizado en cada una de las fases del modelo de resolución de problemas de GAISE. Una ejemplificación se da en la figura 1.

[3] Cabe señalar al respecto, el análisis desarrollado por Godino (2009) en torno al modelo de conocimiento del profesor propuesto por Shulman y a las adaptaciones realizadas por diversos autores al campo de la educación matemática. Con objeto de ofrecer a los profesores herramientas de análisis y reflexión sobre su práctica docente, evidencia las limitaciones de los modelos referidos y presenta el modelo del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) como "*sistema teórico para la investigación en educación matemática, cuyas categorías de análisis se pueden usar como herramientas para identificar y clasificar los conocimientos requeridos para la enseñanza de las matemáticas, y por tanto, para analizar los conocimientos puestos en juego por el profesor.*" (Godino, 2009, p.14)

Componentes del marco teórico GAISE	Tipo de conocimiento	Ejemplos de tipos de tareas que requieren fundamentalmente conocimientos matemáticos	Ejemplos de tipos de tareas que requieren fundamentalmente conocimientos NO matemáticos
Formulación de cuestiones	Común	Leer con precisión un gráfico de la caja con el fin de plantear cuestiones a partir de los datos	Comprender la diferencia entre fenómenos deterministas y aleatorios
	Especializado	Comprender la diferencia de cómo los estudiantes leen un gráfico de la caja y un gráfico de puntos	Evaluar la capacidad de los estudiantes en la formulación de cuestiones estadísticas
Recogida de datos	Común	Construir algoritmos precisos de simulación y medir cantidades correctamente	Construir preguntad de encuesta y diseñar experimentos
	Especializado	Identificar las dificultades que los estudiantes puedan tener en la construcción de los algoritmos de simulación y comprender las estrategias de medida de los estudiantes	Anticipar la dificultades de los estudiantes en la distinción de la función y propósito del muestreo aleatorio y de la asignación aleatoria
Analizar datos	Común	Cálculo de estadísticos descriptivos como la media, mediana y moda	Controlar los “valores típicos” y los de “señal-ruido” en contextos estadísticos
	Especializado	Identifica la propiedades de la media que pueden ser difíciles de comprender por los estudiantes	Tener presente que los estudiantes pueden calcular la media aritmética de un conjunto de datos sin relacionarla con el contexto
Interpretar los resultados	Común	Interpretar correctamente el significado matemático del concepto de *p* valor	Juzgar la idoneidad de un nivel de significación elegido por un investigador
	Especializado	Comprender la interpretación de los estudiantes del concepto de *p* valor	Prever la sobre-generalización de los estudiantes del término *significación*

Figura 1. Aspectos hipotéticos del Conocimiento Estadístico para la Enseñanza. (Groth, 2007, p. 450)

6. LA NOCIÓN DE ASOCIACIÓN ESTADÍSTICA EN LA EDUCACIÓN NO UNIVERSITARIA

La noción de asociación posee gran relevancia en el dominio de la Estadística. En un primer nivel, constituye una herramienta de interpretación muy útil en el esquema descriptivo del proceso de investigación estadístico (en este estudio se encuentran implicadas las nociones de regresión y correlación), donde el conocimiento sobre la relación causa-efecto que pueda existir entre las variables implicadas ofrece información suficiente como para la pertinencia de matematizar tal relación (análisis de regresión) en el diseño de un modelo con fines predictivos; y en un segundo nivel, sirve de base para entender otros muchos conceptos y procedimientos estadísticos más avanzados.

A pesar de la relevancia que el razonamiento covariacional posee dentro del desempeño del proceso estadístico[4] (Batanero et al. 1996), la noción de asociación estadística es tratada propiamente, en el sistema educativo español, en la enseñanza postobligatoria de Bachillerato, concretamente en las materias de *Matemáticas I* (“*Distribuciones*

[4] La noción de asociación estadística ocupa un lugar privilegiado en el nivel de enseñanza no universitaria, por ejemplo, en las concreciones curriculares del NCTM (2000). Podemos destacar las expectativas para los grados 6-8, donde se propone formular preguntas sobre características diferentes dentro de una población y seleccionar, crear y usar adecuadamente representaciones gráficas como el diagrama de dispersión. En cuanto a los grados 9-12 desatacamos las expectativas de comprender el significado de los datos bivariados y los diagramas de dispersión.

bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas. Regresión lineal", perteneciente al bloque 4 "*Estadística y Probabilidad*") (M.E.C., 2007b, p.45449) y *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I* ("*Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación grafica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados*", perteneciente al bloque 3 "*Probabilidad y estadística*") (M.E.C., 2007b, p.45475). Debemos señalar al respecto, que la concreción curricular de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), fija la introducción de esta noción en cuarto curso de la ESO (en sus dos opcionalidades A y B en que la materia de Matemáticas se organiza en el cuarto curso) en los bloques de contenido de Estadística y Probabilidad, concretada del siguiente modo: "*Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.*" (M.E.C., 2007a, p. 758 y p. 759).

Un aspecto importante referido a la formación del profesorado en cuanto a la enseñanza de la noción de asociación estadística consiste en el dominio del conocimiento necesario que esta noción implica, así como el conocimiento de las posibles dificultades y errores de tipo filosófico, epistemológico y didáctico, que ligadas a la interpretación y aplicación del concepto de asociación estadística en situaciones prácticas puedan presentarse en los estudiantes. Al respecto, ofrecemos a continuación, diferentes elementos a considerar para una completa formación del profesorado.

7. DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE ASOCIACIÓN ESTADÍSTICA

Como señala Moore (2004, ix): "*los profesores también deben entender cómo aprenden los estudiantes, ser conscientes de las dificultades específicas, y considerar los medios para guiar a los estudiantes hacia la comprensión*", este autor comienza su reflexión evidenciando la tendencia generalizada del profesor de estadística de comenzar su enseñanza sentando las bases de conocimiento estadístico, algo nada discutible, pero descuidando su formación didáctica dejándola en manos de su intuición o la observación de su experiencia; como más adelante señala Moore: "[el profesor debe] *estar preparado para ayudar a los estudiantes a aprender a pensar estadísticamente*" (Moore, 2004, x).

Partiendo del hándicap[5] expresado en líneas precedentes de la generalización que sufre la Estadística en cuanto a su enseñanza, en relación a la concepción determinista que caracteriza a las Matemáticas, existen dificultades, intuiciones sesgadas, concepciones y errores intrínsecos a la propia noción de asociación estadística y para el desempeño de la función docente, es indispensable tener conocimiento de éstas.

En relación a la investigación[6] relativa a los errores y dificultades que sufren los estudiantes en la resolución de una tarea covariacional[7] (Estepa, 1994, 2007, 2008; Batanero,

[5] Reid y Pecotz (2002) muestran cómo estudiantes del grado de matemáticas (Universidad de Sydney), con una supuesta especialización en Estadística, Economía o Investigación Operativa; perciben la Estadística como estructura lógicamente organizada secuenciada para un propósito de investigación y casi sin entidad propia, como ciencia de apoyo a diversas disciplinas. Todo esto se extiende a la profesión del estadístico.

[6] La investigación más relevante, relativa a la adquisición de la noción de asociación estadística, se desarrolla principalmente con estudiantes de bachillerato y primeros cursos universitarios debido en gran parte, al lugar que ha ocupado la enseñanza de la Estadística en la etapa escolar, hasta estos últimos años.

[7] Asociación en tablas de contingencia, en diagramas de dispersión o comparación de muestras.

Estepa y Godino, 1997; Estepa y Batanero, 1996; Batanero et al. 1996; Sánchez, 1999; Moritz, 2004; Zieffler, 2006), se destacan los siguientes resultados:

- no distinción entre distribución bidimensional y dos conjuntos de datos cualesquiera;
- el tamaño de la tabla de doble entrada: se observa unos resultados más estables sobre tablas de doble entrada 2x2 frente a los estudios de tablas 3x3;
- no utilizar todas las celdas para emitir un juicio de asociación en tablas de contingencia;
- la prevalencia de la presencia conjunta de las variables de estudio en el juicio de asociación frente a la ausencia conjunta de éstas (celda *a* frente a celda *d* de la tabla de contingencia de variables dicotómicas);
- la utilización de la correspondencia de datos bidimensionales aislados frente a la consideración de la tendencia global de estos;
- la ausencia de correspondencia de las nociones de distribución bivariada y distribuciones marginales;
- la ausencia de un adecuado razonamiento proporcional, donde prevalece el uso de los datos frente al uso de un conveniente razonamiento proporcional de éstos;
- dificultades en la interpretación de los diagramas de dispersión en relación al tipo de dependencia, signo, y ajuste de una línea de regresión
- algunos estudiantes suelen tener dificultades al relacionar el signo del coeficiente de correlación y el tipo de asociación (directa, inversa, independencia). Igual ocurre con el signo de la covarianza;
- el razonamiento sobre la asociación negativa suele tener un mayor índice de dificultad que la positiva;
- cuando la asociación es fuerte aparecen menos dificultades;
- la oposición entre el razonamiento numérico covariacional y el razonamiento gráfico covariacional: prevalece la estrategia de razonamiento gráfico en la estimación del coeficiente de correlación ante una descripción verbal de la situación;
- el empleo de argumentaciones conjuntistas (numéricas, gráficas y teorías previas) en situaciones cercanas al estudiante, donde tan sólo se requiere un argumento gráfico;
- la presencia de dificultades en la comprensión del crecimiento/decrecimiento no uniforme de las dos variables mostradas mediante una tabla de doble entrada y el crecimiento/decrecimiento de la dependencia funcional. En este caso el estudiante tiende a responder según sus teorías previas o utilizando argumentos incorrectos;
- el razonamiento covariacional negativo en relación a una concepción unidireccional de la asociación de este modo se percibe la dependencia sólo cuando ésta es positiva, y se asigna independencia al caso de asociación inversa;
- la relación de causalidad entre las variables de estudio con motivo de la existencia de una correlación significativa;

En cuanto a las concepciones e intuiciones erróneas de nuestros estudiantes cabe señalar la reflexión de McKenzie y Mikkelsen (2007) en cuanto a la importancia e interés que encierran en sí mismas dado que cuestionan cómo debiese ser la relación de dichas teorías y el proceso de instrucción, concebidas éstas no como un error, sino como un útil de enseñanza. Los estímulos que recibe el individuo en ambiente de incertidumbre, conllevan a la emisión de juicios sesgados (Crocker, 1981; Alloy y Tabachnik, 1984) donde el razonamiento covariacional implicado se somete a la existencia de expectativas o esquemas explicativos referidos a las variables de estudio, un caso particular es el conocido como *correlación ilusoria*[8] (Chapman y Chapman, 1967).

El estudio de las concepciones previas de los estudiantes sobre la asociación estadística así como su evolución después de la enseñanza (Estepa, 1994; Estepa y Batanero, 1995, 1996; Batanero, Estepa y Godino, 1997; Estepa, Batanero y Sánchez, 1999) presenta los siguientes resultados:

- la concepción causalista, donde los estudiantes sólo consideran asociación entre variables si puede ser atribuida la existencia de una relación causal entre éstas;
- la concepción determinista de la asociación, donde los estudiantes tienden a asignar un único valor de la variable independiente a cada uno de los valores considerados de la variable dependiente. Esto es, la relación de las variables sólo es considerada desde un punto de vista funcional o determinista;
- La concepción local de la asociación, donde los estudiantes se limitan a confirmar la asociación según un subconjunto de datos del estudio que, de algún modo, justifique algún tipo de patrón, obviando la tendencia global de los datos. A menudo la información parcial utilizada corresponde a una distribución condicional e incluso a una celda de la tabla de doble entrada.
- concepción unidireccional de la asociación, donde los estudiantes tan sólo consideran asociación entre variables si ésta es directa siendo considerada incluso una asociación inversa como independencia entre variables.

8. EL CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE ASOCIACIÓN ESTADÍSTICA

En la investigación llevada a cabo por Casey (2008; 2010) encontramos un marco de referencia en cuanto al conocimiento que el profesor de secundaria necesita para la enseñanza de la asociación estadística. En referencia al estudio del conocimiento necesario para la enseñanza[9] de la asociación estadística, Casey utiliza la conceptualización del conocimiento para la enseñanza descrito en la sección anterior y parte del carácter específico que la Estadística sustenta como disciplina diferenciada de las Matemáticas.

Realiza un trabajo previo sobre las concepciones de los profesores de secundaria sobre la noción de asociación estadística así como sus ideas acerca de la relevancia en el currículum y su tratamiento en el aula. Encuentra algunas de las dificultades que habían encontrado otros investigadores previamente con estudiantes en general. Entre las que encontró destacamos: que los profesores tienen un conocimiento moderado de cómo resolver problemas de

[8] La noción de *correlación ilusoria* hace referencia a errores sistemáticos que se cometen en la emisión de juicios de asociación donde las variables de estudio se encuentran influenciadas por el vínculo que se establece entre el sujeto, el contexto y las variables de estudio, de este modo se puede atribuir una correlación inexistente, infravalorar la correlación existente y hasta incluso cambiar el sentido de la correlación (Chapman y Chapman, 1967).

[9] Su estudio se llevó a cabo durante tres semanas (20 sesiones de clase) en nivel de enseñanza secundaria donde el profesor de matemáticas ubicaba el tema en una sección avanzada de muestreo estadístico y diseño de experimentos. A partir del estudio de cómo tres docentes impartían la noción de asociación estadística desde un enfoque analítico (dada la demanda que la práctica de enseñanza de esta noción implica) sus entrevistas se centraban en la planificación, la enseñanza y la evaluación de la lección. El profesorado impartía docencia en cursos diferentes, con manuales de texto distintos y mediante diferentes currícula.

asociación estadística; utilizan sus teorías previas en la resolución de los problemas; para detectar la asociación esta debe ser bastante fuerte; encuentra la concepción causalista; no entienden la necesidad de mostrar a los estudiantes problemas donde no exista asociación; por último también encuentra que la mayoría de los profesores de la muestra no se sentían cómodos resolviendo problemas de asociación o no tenían confianza en sus respuestas.

Estos trabajos sobre concepciones de los profesores sobre la asociación estadística supusieron el impulso y la motivación del desarrollo de su investigación dado que le permitieron apreciar las dificultades que muchos profesores presentaban en cuanto a los aspectos analíticos[10] que esta noción implica, la consideración del contexto en algunos de los razonamientos o incluso la prevalencia de sus creencias en cuanto a la relación efectiva de las variables de estudio (Casey, 2008).

Con su diseño de investigación no trata de documentar el conocimiento que sobre la noción de asociación estadística posee el profesorado participante sino más bien considerar el conocimiento que se emplea en el desempeño de la planificación, la implementación y la gestión del profesor en el tratamiento de la noción de asociación estadística en el proceso de instrucción.

Los resultados de su investigación presentan una categorización del conocimiento necesario para la enseñanza de la asociación estadística junto con el número de cuestiones de enseñanza acaecidas tales como cuestiones/reflexiones del estudiante, explicaciones proporcionadas por el profesor, acciones determinadas de los estudiantes en torno a problemas planteados, o cuestiones explícitas de los cuestionarios (véase figura 4).

En total se distinguen veintinueve categorías (figura 4), de las cuales, la noción de mejor línea de ajuste ocupa un lugar destacado (116 incidencias) seguida de la noción de coeficiente de correlación (100), y entre las nociones referidas a datos categóricos se destacan las nociones de estadístico Chi-cuadrado y Test Chi-cuadrado en general (96) y Test Chi-cuadrado para el estudio de la independencia (64). Tres de estas categorías están presentes tanto en datos categóricos como en datos cuantitativos y sirven de base para el desarrollo de dos resultados principales en este estudio, por una parte se utilizan como eje para la elaboración de un mapa conceptual (figura 5) en que se reflejen cada una de las categorías (figura 4) y por otra parte sirven como principios para concretar los requisitos esenciales para la enseñanza de la noción de asociación estadística.

Con la idea de diseñar un mapa conceptual útil y que pudiese ser interpretado fácilmente, estableció las categorías de modo secuencial, donde su lectura -de óvalos superiores a cualesquiera óvalos consecuentes- permite interconectar visualmente las relaciones que se establecen entre cada uno de los elementos que lo componen, (así como las relaciones horizontales que se deseen establecer). La figura 5 corresponde al mapa descrito por Casey en su investigación.

[10] En cuanto al tratamiento de datos categóricos donde se debía utilizar un razonamiento de tipo proporcional

Categoría	**Nº de cuestiones de enseñanza observadas**	**Categoría**	**Nº de cuestiones de enseñanza observadas**
Mejor ajuste lineal (incluyendo el ajuste lineal por mínimos cuadrados)	116	Contexto	35
Coeficiente de correlación	100	*Test de hipótesis (en general)*	35
Contraste y estadístico Chi-cuadrado	96	*Pendiente*	34
Modelización matemática (excluyendo el mejor ajuste lineal)	83	*Recta*	27
Contraste de independencia Chi-cuadrado	64	Terminología	26
Gráfico de residuos	61	*Razonamiento proporcional*	25
Calculadora	60	Datos	21
Residual	54	Ordenador	19
Predicción	52	*Probabilidad*	18
Coeficiente de determinación	46	Tabla de doble entrada	15
Álgebra (excluyendo las rectas y la pendiente)	43	Intervalos de confianza para la pendiente y la regresión lineal	10
Contraste T para la pendiente de la Regresión lineal	38	*Puntos Outliers y puntos influyentes*	8
Asociación	37	*Grafico de datos (excluyendo el diagrama de dispersión, la tabla de doble entreda y el gráfico de barras)*	7
Diagrama de dispersión	36	*Promedios (incluida la media)*	6

Figura 4. Categorías[11] de los descriptores del conocimiento. (Casey, 2008, p. 89)

Los requisitos fundamentales, que en relación a la formación del profesorado se destacan en esta investigación, se resumen a continuación:

- conocer el significado global de asociación estadística como la correspondencia de la variación de dos variables estadísticas, lo que implica una clara distinción entre asociación y causación.

[11] En cursiva se codifican las categorías de conocimiento previas requeridas para la noción de asociación estadística.

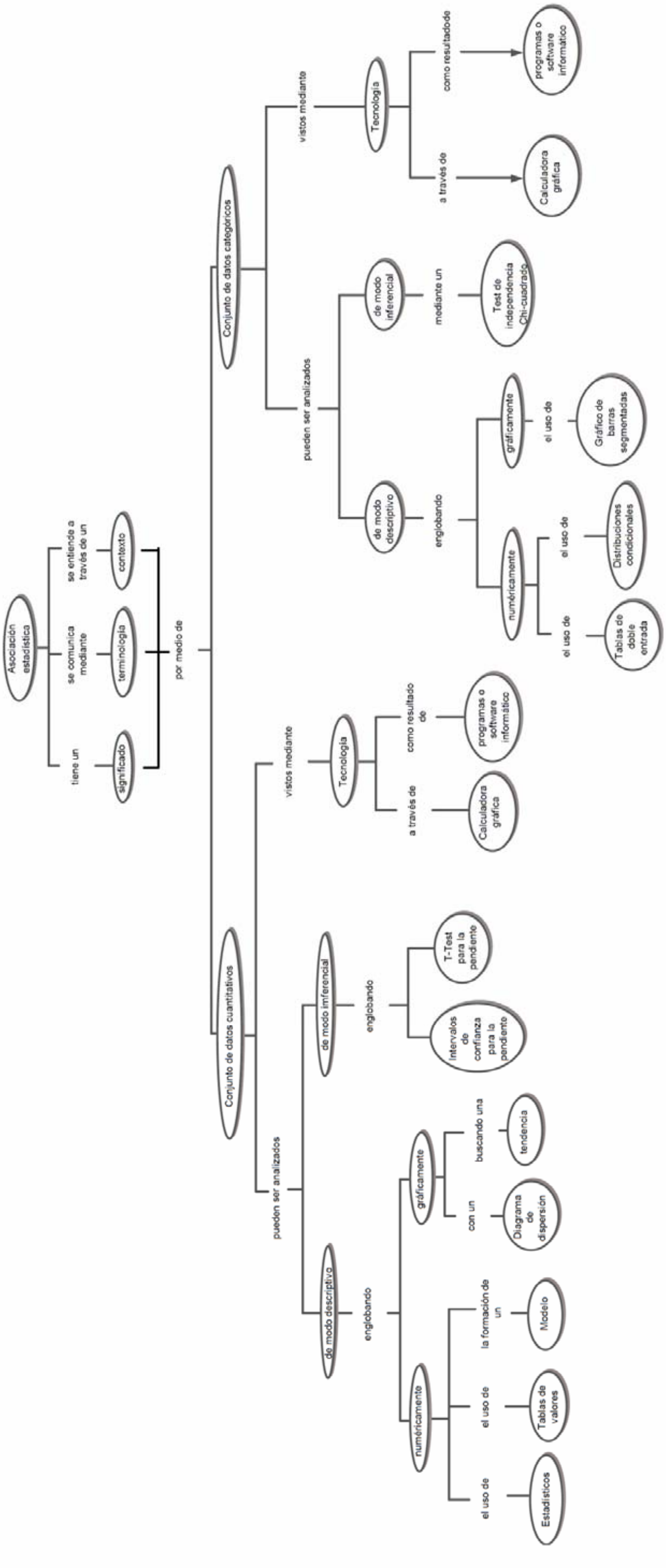


Figura 5. Mapa conceptual de la noción de Asociación estadística (Casey, 2008, p.94)

- la fluencia y precisión en el lenguaje estadístico es crucial para enseñar asociación estadística
- el conocimiento del contexto o conocimiento del mundo es otra componente del conocimiento esencial para enseñar asociación, coincide con Franklin et al. (2007).
- una vez conocido de manera adecuada el contexto los profesores deben conocer los datos con los que están trabajando, es decir, los diferentes tipos de datos que podemos encontrar en el trabajo estadístico, siempre acompañados de la omnipresente variabilidad. En el estudio de la asociación estadística encontramos fundamentalmente datos cualitativos y cuantitativos.
- poseer un lenguaje estadístico fluido, y un dominio del vocabulario específico del tema en cuestión;
- disponer de un conocimiento del contexto de los datos apropiado en cuanto a las conclusiones e inferencias que se deriven de éstos;
- comprender las diferencias que en cuanto al tratamiento de datos (cuantitativos y categóricos) se suceden en la investigación estadística tales como las diferencias en cuanto a la tabla de doble entrada, a la modelización matemática, y al análisis de datos;
- disponer de un sólido sentido del razonamiento proporcional en cuanto al análisis de la comparación de distribuciones condicionales, esto conlleva el dominio de nociones de probabilidad básicas como por ejemplo la noción de distribución de probabilidad o probabilidad condicional;
- la distinción entre el coeficiente de correlación y el coeficiente de determinación;
- comprender el sentido global de la recta como sus propiedades, representación, relaciones entre rectas, los elementos que la constituyen y la definen como la pendiente, etc.;
- conocer la familia de funciones susceptibles de modelizar los datos tratados tales como modelos exponenciales, logarítmicos, cuadráticos, etc. siendo capaces de distinguir sus características desde la tabla de doble entrada o el diagrama de dispersión;
- conceptualizar adecuadamente (cálculo, propiedades, uso, limitaciones, representación, sentido, etc.) nociones elementales de la estadística descriptiva tales como la media;
- representar, analizar e interpretar correctamente (escala, razón, ejes, etc.), entre otros, el diagrama de dispersión, histograma, diagrama de caja bigote, así como determinar su adecuación al contexto de los datos;
- conocer la utilidad y el uso de los intervalos de confianza y los test de hipótesis tanto en datos cuantitativos como categóricos, para ello, es importante conocer las propiedades y características de la distribución normal;
- conocer herramientas tecnológicas como la calculadora gráfica o programas informáticos en cuanto al análisis de la asociación estadística, esto implica conocer su funcionamiento (mensajes de error, limitaciones, etc.) e interpretar sus resultados.

La investigación desarrollada por Casey (2008), puede servir como revisión del modelo propuesto por Gal (2004), así como dotar de ejemplos en cuanto al tratamiento de la noción de asociación estadística a tres de las categorías en que éste se define. Este modelo, en referencia al desarrollo de la cultura estadística, considera tres componentes fundamentales de conocimiento como son: el *conocimiento matemático*, el *conocimiento estadístico* y el *conocimiento del contexto*, con el siguiente sentido:

- el conocimiento matemático se hace corresponder con el conocimiento que subyace a cada procedimiento estadístico, así como las habilidades numéricas que permiten la correcta interpretación de los resultados referidos en los informes estadísticos;
- el conocimiento estadístico está constituido por cinco elementos diferenciados: la necesidad de disponer de datos y cómo poder obtenerlos; el dominio de nociones estadísticas básicas así como de razonamientos implicados en la estadística descriptiva; el dominio de la terminología básica e ideas relacionadas con la representación gráfica y tabular; la comprensión de nociones básicas de probabilidad y la capacidad para realizar conclusiones o inferencias sobre la investigación realizada; y
- el conocimiento del contexto se hace corresponder con la necesidad de relativizar los datos al contexto del que se han obtenido con objeto de producir apropiados razonamientos y conclusiones de los análisis y resultados obtenidos.

9. PARA FINALIZAR

El objetivo que se ha pretendido en la revisión de la investigación didáctica presente en este capítulo es doble, por una parte describimos algunos de los ejes fundamentales que la investigación didáctica ha desarrollado, en cuanto a la formación necesaria del profesorado encargado de impartir Estadística, particularizando en la asociación estadística, por otra parte ofrecemos resultados que permitirán al profesorado disponer de un soporte que le facilite la planificación y el diseño de procesos de estudio estadístico, al tiempo que le aporte una seguridad y confianza en cuanto a la eficiencia de estos procesos, particularizando en la asociación estadística.

En concreto, creemos que puede ser de utilidad, el resumen realizado sobre las dificultades en relación a la asociación estadística de los estudiantes en general y de los profesores en particular. Por otra parte los resultados presentados sobre la formación de profesores en asociación estadística, pueden ser de interés en la planificación de la formación de profesores, ya que, coincidimos con Pfannkuch (2008, p. 5) en que *“El reto para el formador de profesores es encontrar formas de mejorar el conocimiento pedagógico y el conocimiento del contenido estadístico del futuro profesor”*. Es decir, proporcionar al futuro maestro un conocimiento del contenido para la enseñanza (Ball y Phelps, 2008) que le haga competente para desarrollar los nociones estadísticas que aparecen en los curricula.

REFERENCIAS

Alloy, L.B. y Tabachnik, N. (1984). Assessment of Covariation by Humans and Animals: The Joint Influence of Prior Expectations and Current Situational Information. *Psychological Review, 91* (1), 112-149.

Ball, D. L. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407. Disponible en http://jte.sagepub.com/content/59/5/389.full.pdf+html (Visitado 28/4/2011 a 0:42h)

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de*

Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires. Conferencia inaugural. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf. Visitado 29/1/11 a 19:38h.

Batanero, C.; Estepa, A. y Godino, J. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J.B. Garfield y G. Burrill, (eds). *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. IASE Round Table Conference Papers* (pp. 191-205). Voorburg: Internacional Statistical Institute.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J.D., & Green, D. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. Journal for Research in Mathematics Education, *27*, 151-69.

Casey, S.A. (2008). *Subject matter knowledge for teaching statistical association*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Illinois. PhD.

Casey, S.A. (2010). Subject matter knowledge for teaching statistical association. *Statistics Education Research Journal*. *9*(2), 50-68. Disponible en: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ9(2)_Casey.pdf (visitado 8/3/2011 a 13:08h.)

Chapman, L.J. y Chapman, J.P. (1967). Genesis of popular but erroneous Psychodiagnostic observations. *Journal of Abnormal Psychology*, *72* (3), 193-204.

Crocker, J. (1981). Judgment of Covariation by Social Perceivers. *Psychological Bulletin, 90*(2), 272-292.

delMas, R.C. (2004). A Comparison of Mathematical snd statistical Reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 221-255). (Eds. Ben-Zvi y J. Garfield). Dordrecht (The Nederlands): Kluwer Academic Publishers.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Estepa, A. (2007). Caracterización del significado de la correlación y regresión en estudiantes de Educación Secundaria. "*Zetetiké*" *15*(28), 119-151.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. Revista: "*Enseñanza de las Ciencias*", *26*(2), 257-270.

Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, *13*(2), 155-170.

Estepa, A. y Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatter plots: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *4*, 25-41.

Estepa, A., Batanero, C. y Sánchez, F.T. (1999). Students' Intuitive Strategies in Judging Association When Comparing Two Sampling. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *7*, 17-30.

Franklin, C. Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A preK-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association. Disponible en http://www.amstat.org/

Gal, I. (2004). Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsabilities. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 47-78). Dordrecht (The Nederlands): Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Groth, R.E. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 427 – 437.

McKenzie, C. R. M., y Mikkelsen, L. A. (2007). A Bayesian view of covariation assessment. *Cognitive Psychology, 54* (1), 33-61.

M.E.C. (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE 5/1/2007).

M.E.C. (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. (BOE 6/11/2007).

Moore, D. S. (1999). Discussion: What Shall We Teach Beginers? Papers presented to discussion on the paper by Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-248.

Moore, D. S. (2004). Foreword. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, pp. ix-x. Dordrecht (The Nederlands): Kluwer Academic Publishers.

Moritz, J. (2004). Reasoning about Covariation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, 221-255. Dordrecht (The Nederlands): Kluwer Academic Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston: VA.

Pfannkuch, M. (2008). Training Teachers to develop Statistical Thinking. Actas al ICMI/IASE 2008. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*.

Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, 17-46. (Eds. Ben-Zvi y J. Garfield). Dordrecht (The Nederlands): Kluwer Academic Publishers.

Reid, A. y Pecotz, P. (2002). Students' Conceptions of Statistics:A Phenomenographic Study. *Journal of Statistics Education,* 10(2), Disponible en: http://www.amstat.org/publications/jse/v10n2/reid.html. Visitado el 15/10/2010.

Sánchez , F.T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association, 88*(421), 1-8.

Zieffler, A.S. (2006). *A Longitudinal Investigation of the Development of College Students' Reasoning About Bivariate Data During an Introductory Statistics Course*. Universidad de Minnesota. PhD.

Capítulo 3

SESGOS PSICOLÓGICOS Y CONOCIMIENTO FORMAL EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO CONDICIONAL EN FUTUROS PROFESORES

PSYCHOLOGICAL BIASES AND FORMAL KNOWLEDGE IN CONDITIONAL PROBABILITY REASONING IN FUTURE TEACHERS

Carmen Díaz

Universidad de Huelva

J. Miguel Contreras y Carmen Batanero

Universidad de Granada

Resumen. En este trabajo presentamos un estudio dirigido a evaluar los sesgos presentes en el razonamiento probabilístico condicional y su posible relación con el conocimiento formal matemático sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria y Bachillerato. Se analiza la presencia de diferentes sesgos en 196 alumnos de matemáticas de último curso y alumnos del Master de Secundaria, encontrando una alta incidencia en ambos grupos. El análisis factorial llevado a cabo en las respuestas a una parte del cuestionario RPC sugiere que los sesgos considerados no están relacionados con la capacidad matemática de resolución de problemas, resultados acordes con los encontrados en las investigaciones realizadas con estudiantes de psicología (Diaz, 2007).

Palabras clave: Sesgos, probabilidad condicional, conocimiento formal, profesores de secundaria, evaluación.

Abstract. In this paper we present a study aimed to assess biases in conditional probability reasoning and its relationships with formal knowledge in prospective secondary school mathematics teachers. We analyze the existence of different biases in 196 last year mathematics students and postgraduate students, finding a high incidence in both groups. Factor analysis made with the responses of part of RPC questionnaire suggests that psychological biases considered were unrelated to conditional probability problem solving performance in these students, according to the research made with psychology students (Diaz, 2007).

Keywords: Mean, biases, conditional probability, formal knowledge, secondary teachers, assessment.

1. INTRODUCCIÓN

El razonamiento probabilístico condicional es un componente importante en la enseñanza de la estadística, dado que interviene en la comprensión de conceptos clave en inferencia clásica y bayesiana; correlación y regresión lineal; análisis multivariante y otros procedimientos estadísticos que se usan con frecuencia tanto en el campo profesional como en la investigación empírica (Shaughnessy, 2006). Este tipo de razonamiento es también crítico en la cultura estadística, ya que ayuda a realizar una toma de decisiones mas precisa en la vida cotidiana (Sedlmeier, 1999). A pesar de esto, diversos estudios han mostrado un amplio abanico de sesgos relacionados con este tipo de razonamiento. En nuestra investigación exploramos la presencia de estos sesgos en futuros profesores de secundaria y las posibles relaciones de los mismos con su conocimiento formal sobre el tema. Comenzamos con un breve resumen de los antecedentes, seguimos con la descripción del método y finalizamos exponiendo nuestros resultados.

2. INVESTIGACIONES SOBRE RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO CONDICIONAL

Las investigaciones sobre razonamiento probabilístico condicional se han realizado tanto en estudiantes de primaria y secundaria como universitarios. El primer estudio conocido es el de Fischbein y Gazit (1984), quienes desarrollaron un experimento de enseñanza con niños de entre 10-12 años y compararon su ejecución en dos tipos de problemas (muestreo con y sin reposición). Encontraron que los problemas de probabilidad condicional resultaban más difíciles para los niños en situaciones “sin reposición”.

Continuando esta investigación, Tarr y Jones, (1997) identificaron cuatro niveles en el razonamiento probabilístico condicional en estudiantes de educación primaria (9-13 años). En el último nivel, lo estudiantes son capaces de enunciar las condiciones necesarias para que dos sucesos estén relacionados, asignar correctamente probabilidades numéricas y distinguir entre sucesos dependientes e independientes en situaciones “con” y “sin reposición”. Sin embargo, incluso cuando los estudiantes progresan hasta el nivel superior de esta clasificación, algunas dificultades permanecen en educación secundaria y universitaria (Tarr y Lanning, 2005). Esto se desprende de diversos estudios que resumimos a continuación.

Situaciones causales y diagnósticas: Desde el punto de vista psicológico, una persona que evalúe una probabilidad condicional P(A/B) puede percibir diferentes tipos de relaciones entre A y B en función del contexto (Tversky y Kahneman, 1982). Si B se considera como una causa de *A, P(A/B)* se verá como una relación causal, y si A es percibida como una posible causa de *B, P(A/B)* se concibe como una relación diagnóstica. Aunque matemáticamente las dos situaciones son equivalentes, desde un punto de vista psicológico éstas no son evaluadas como idénticas, ya que la creencia en las relaciones causales es más fuerte que en las relaciones diagnósticas. Además, algunas personas confunden *P(A/B)* con *P(B/A)*, confusión que recibe el nombre de *falacia de la condicional traspuesta* (Falk, 1986).

Falacia del eje temporal: Falk (1989) encontró que en ocasiones los estudiantes creen que un suceso no puede condicionar otro que ocurra anteriormente. Creencias similares se describen en Gras y Totohasina (1995) y Totohasina (1992), quienes denominan *concepción cronológica* la de un estudiante que interprete la probabilidad condicional *P(A/B)* como una relación temporal y que, por tanto, piense que el suceso condicionante *B* debe siempre preceder al suceso *A*.

Falacia de las tasas base: Los problemas que involucran el teorema de Bayes proporcionan información probabilística sobre la población completa, así como para una parte concreta de la misma; ambos datos deben ser tenidos en cuenta en la resolución del problema. Sin embargo, se tiende a ignorar las probabilidades a priori referentes a la población y dar las soluciones en base sólo a la información sobre la parte concreta de la población (Tversky y Kahneman, 1982; Bar-Hillel, 1983; Koehler, 1996).

Situaciones sincrónicas y diacrónicas: En las situaciones diacrónicas el problema se formula como una serie de experimentos secuenciales que se llevan a cabo a lo largo del tiempo. Por el contrario, las situaciones sincrónicas son estáticas y no incorporan una secuencia de experimentos subyacentes. Formalmente las dos situaciones son matemáticamente equivalentes, sin embargo Sánchez y Hernández (2003) comprobaron en su investigación con estudiantes de entre 17 y 18 años que estas situaciones no siempre se perciben de forma similar. Hay una tendencia a sumar probabilidades en lugar de usar la regla del producto al calcular probabilidades conjuntas en situaciones sincrónicas, mientras que los mismos problemas de resuelven correctamente en situaciones diacrónicas.

Otra dificultad, ésta relacionada con las probabilidades conjuntas es la *falacia de la conjunción* (Tversky y Kahneman, 1982) o falta de conciencia de que una probabilidad conjunta no puede ser mayor que la probabilidad de cada suceso simple. Finalmente, algunos estudiantes confunden *sucesos independientes con sucesos mutuamente excluyentes* (Sánchez, 1996; Truran y Truran, 1997).

Formato frecuencial vs. probabilístico: Investigaciones recientes sugieren que los problemas de probabilidad condicional son más sencillos cuando la información se proporciona en frecuencias absolutas, en lugar de usar probabilidades, porcentajes o frecuencias relativas (Gigerenzer, 1994; Gigerenzer y Hoffrage, 1995; Sedlmeier, 1999; Martignon y Wassner, 2002). Sin embargo, nuestro trabajo previo en un pequeño estudio cuasi-experimental (Díaz y Batanero, 2007; n=75 estudiantes de psicología) indicó que la mayoría de los estudiantes participantes fueron capaces de resolver problemas enunciados en formato probabilístico cuando se les enseña el uso de tablas de doble entrada para resolver problemas relacionados con el teorema de Bayes. Teniendo en cuenta estos resultados, defendemos que es posible enseñar a los estudiantes métodos más productivos y generalizables de resolver problemas de probabilidad condicional con datos en formato probabilístico. Consideramos esta aproximación necesaria en la enseñanza de muchos profesionales que deberán manejar probabilidades en diversas situaciones.

Clasificación de problemas simples de probabilidad condicional y efecto de diversas variables: Huerta y sus colaboradores (Lonjedo y Huerta, 2005; Huerta, 2008) centran su investigación en el análisis de los problemas simples de probabilidad condicional. Clasifican estos problemas, analizan las variables que les afectan y describen las estrategias y tasas de éxito de los estudiantes, en función de dichas variables y estrategias con un método muy minucioso. Nuestro enfoque será diferente pues en lugar de centrarnos en tipos específicos de problemas de probabilidad condicional simple, queremos centrarnos en los sesgos implicados en el razonamiento condicional.

3. MÉTODO

A pesar de la cantidad de investigaciones previas relacionadas con el razonamiento probabilístico condicional, no encontramos en los antecedentes evaluaciones realizadas con futuros profesores de secundaria. Por ello, nuestro trabajo se dirige a completar la información sobre los conocimientos y sesgos de estos profesores.

Instrumento

El cuestionario utilizado, que se incluye como anexo fue una adaptación del cuestionario RPC (Razonamiento Probabilístico Condicional), elaborado por Díaz (Batanero y Díaz, 2007, Díaz y de la Fuente 2007a) y validado por su autora con un riguroso proceso metodológico (Díaz y de la Fuente, 2007b). Los ítems del cuestionario fueron adaptados de investigaciones previas y seleccionados a partir de juicio de expertos. Sus características psicométricas se evaluaron en pruebas pilotos con muestras de entre 45 y 90 estudiantes cada ítem. La autora informa de la validación de contenido, criterio y constructo, así como sobre diversos coeficientes de fiabilidad. En nuestro estudio, se suprimieron cuatro de los ítems por resultar demasiado sencillos para futuros profesores de educación secundaria.

Participantes

Los sujetos participantes en el estudio fueron 196 futuros profesores de educación secundaria de varias universidades españolas (95 alumnos de la licenciatura de Matemáticas de las Universidades de Granada, La Laguna y Salamanca y 101 alumnos del máster de secundaria, de las Universidades de Alicante, Barcelona, Cádiz, Extremadura, Granada, Salamanca, Santiago de Compostela, Pública de Navarra y Valladolid). La recogida de datos se realizó durante el segundo cuatrimestre del curso 2009-2010 en las distintas universidades que forman parte de la muestra, siendo las instrucciones y tiempo disponible iguales en todos los grupos de estudiantes. Para la recogida de datos se contactó con algunos profesores del último curso de la Licenciatura de Matemáticas y en la especialidad de matemáticas del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, a quienes agradecemos su colaboración en este trabajo.

4. RESULTADOS

Sesgos observados

En la tabla 1 presentamos la frecuencia y porcentaje de las diferentes falacias o sesgos en cada grupo (alumnos de licenciatura y alumnos de máster), y en la tabla 2 el número de sesgos observado en cada estudiante. Notamos una fuerte incidencia de los sesgos analizados, destacando la falacia del eje de tiempos, que se dio en alrededor de dos de cada tres participantes en nuestro estudio en el ítem 6 y uno de cada tres en el ítem 7b, siempre en mayor proporción que en la muestra de Díaz. En menor medida, aunque también con alto porcentaje, aparece la falacia de las tasas base, que en nuestra muestra se dio en 39,8% de los participantes, pero que en la muestra de Díaz sólo alcanzó el 15%. El siguiente sesgo por orden de frecuencia fue la confusión entre probabilidad conjunta y condicional, con uno de cada tres encuestados. El resto de sesgos, falacia de la conjunción y de la condicional transpuesta, se dieron en un porcentaje menor, alrededor del 10% en nuestra muestra y en menor porcentaje en la de Díaz.

Tabla 1. Síntesis de sesgos (Matemáticas y Máster de Secundaria)

	Matemáticas (n=95)		Master (n=101)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Ítem 1 - Falacia tasas base	30	31,6	48	47,5
Ítem 2 - Confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes	39	41,1	24	23,8
Ítem 3 - Confusión entre probabilidad conjunta y condicional	25	26,3	37	36,6
Ítem 4 – Falacia de la conjunción	13	13,7	10	9,9
Ítem 5 – Falacia de la condicional transpuesta	14	14,7	13	12,9
Ítem 6 – Falacia del eje de tiempos	64	67,4	70	69,3
Ítem 7b- Falacia eje de tiempos	32	33,7	32	31,7

Por otro lado, sólo 13 de los profesores participantes no presentan sesgos, siendo lo más habitual presentar entre 1 y 3 sesgos. Deducimos que la formación matemática recibida por los futuros profesores no es suficiente para hacerles conscientes de la existencia de estos sesgos y que, por lo tanto, los podrían transmitir a sus estudiantes. Aunque los ítems propuestos estaban diseñados para mostrar distintas falacias comunes en la población, esto no justifica su presencia tan extendida en la muestra. Por otro lado, los resultados en algunos de los ítems han sido peores que los obtenidos por Díaz (2007) en estudiantes de Psicología, a pesar de la mayor preparación matemática de los participantes de nuestra muestra.

Tabla 2. Número de sesgos por alumno

	Lic. Matemáticas		Máster Secundaria	
Sesgos por profesor	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
0 sesgos	3	3,2	10	9,9
1 sesgo	19	20,0	16	15,8
2 sesgos	36	37,9	28	27,7
3 sesgos	24	25,3	31	30,7
4 sesgos	11	11,5	11	10,9
5 sesgos	2	2,1	5	5,0
Total	95	100,0	101	100,0

Para comprobar si existe relación entre la frecuencia de aparición de los diferentes sesgos estudiados y el tipo de estudiante, hemos realizado un test Chi-cuadrado, obteniendo resultados no estadísticamente significativos (Chi-cuadrado= 10,12; g.l.= 6; p-valor= 0,1198). En consecuencia, no observamos diferencias en la presencia de los diferentes sesgos en los dos grupos que componen nuestra muestra. Será por tanto necesario que los formadores de profesores, tanto en la Licenciatura de Matemáticas, como en el Máster tengan en cuenta estos resultados y se organicen actividades formativas que ayuden a superar estos errores, ya que, como indican Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006), éstos podrían incidir en la confianza que muestren en la enseñanza de este tema en el futuro.

Relación entre sesgos y conocimiento formal

Para responder nuestras preguntas sobre si los sesgos relacionados con el razonamiento probabilístico condicional están o no vinculados con la ejecución matemática en estas tareas, llevamos a cabo un análisis factorial sobre la matriz de correlaciones del conjunto de respuestas de la muestra global, codificando las respuestas a los ítems como 0 y 1 (correcto /incorrecto). Se utilizó el cuestionario completo de Díaz (2007), donde los 7 primeros ítems miden los diferentes sesgos y los últimos el conocimiento formal sobre el tema. Usamos el método de extracción de factores más conservador (componentes principales) y la rotación ortogonal (varimax) con el objetivo de no distorsionar la estructura de los datos.

En la tabla 3 presentamos la cargas factoriales de los ítems después de la rotación (solo se muestran valores superiores a 0.25). Obtuvimos 6 factores con autovalor mayor que 1 que explican el 58% de la varianza. Este resultado muestra el carácter multidimensional del razonamiento probabilístico condicional. Sombreamos en gris los ítems correspondientes a sesgos. Los factores se interpretan a continuación.

Tabla 3. Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser

	Componente					
	1	2	3	4	5	6
11. Independencia	0,776					
14. Probabilidad compuesta, independencia	0,597					
12. Probabilidad compuesta, dependencia	0,461		0,309	0,381		
13. Bayes	0,407		0,334			
1. Tasas base		0,786				
6. Eje temporal/canales		0,781				
2. Independencia/ exclusividad		0,261	0,719			
7b. Eje temporal			0,700			
10. P. total	0,290		0,507			
9. Probabilidad condicional				0,732		
4. Falacia conjunción				0,683		
8. Definición					0,747	
3. Confundir probabilidades		0,298			0,716	
5. Condicional transpuesta						0,690
7a. Muestreo con Reposición	0,346					0,672

Factor 1. Resolución de problemas. El primer factor explica el 11,2% de la varianza. Este alto porcentaje de varianza explicado refleja la importancia del primer factor, al cual contribuyen la mayoría de los ítems de respuesta abierta. En particular, el problema relacionado con la independencia, que presenta la contribución mayor, seguido de los

problemas de probabilidad compuesta y el teorema de Bayes. También contribuye el problema de cálculo de probabilidad condicional en situación de muestreo con reposición y el problema de probabilidad total. Todos estos problemas (excepto el 7) requieren un proceso de resolución con al menos dos pasos, por lo que interpretamos el factor como la *habilidad de resolver problemas de probabilidad condicional complejos*. Estos resultados replican los de Díaz (2007) cuyo primer factor también incluyó estos ítems, aunque con diferente peso y orden de importancia.

Factor 2. Sesgos en el razonamiento condicional. El segundo factor explica el 10,2% de la varianza, e incluye los ítems de la falacia de las tasas base, falacia del eje temporal, confusión entre independencia y mutua exclusividad y confusión entre diferentes probabilidades; los dos primeros con mucha mayor saturación. Como se observa, este conjunto de sesgos aparecen separados de los ítems relacionados con la resolución de problemas, lo que confirma nuestra hipótesis de que un estudiante con altos conocimientos matemáticos, todavía podría incurrir en sesgos, resultado que coincide de nuevo con los de Díaz (2007), aunque en su estudio la relación entre diferentes sesgos no se mostró tan clara.

Factor 3. Sesgos que afectan la resolución de algunos problemas. Los ítems que más contribuyen a este factor (que explica un 10% de inercia) son la falacia del eje temporal y la confusión entre independencia y mutua exclusividad. Por otro lado, aparece una contribución moderada de algunos ítems relacionados con la resolución de problemas: Probabilidad total, Bayes y probabilidad compuesta para caso de sucesos dependientes. Es claro que, tanto el problema de probabilidad total como de Bayes, requiere comprender bien las particiones sucesivas del espacio muestral y, en consecuencia, no confundir la mutua exclusividad de los conjuntos de la partición con independencia. Por otro lado, la correcta solución del problema de Bayes requiere superar la falacia del eje de tiempos. La probabilidad compuesta para sucesos dependientes es necesaria para resolver tanto el problema de probabilidad total, como el de Bayes; posiblemente esto explica su presencia en este factor.

Factor 4. Falacia de la conjunción. (9,3% de varianza explicada) Los dos ítems que más contribuyen a este factor son la falacia de la conjunción y el cálculo de la probabilidad condicional a partir de la definición, que requiere el uso de probabilidades conjuntas y simples; este factor reproduce casi exactamente el quinto factor en el trabajo de Díaz.

Factor 5. Definición de la probabilidad condicional. (8,5% de varianza explicada) Únicamente dos ítems contribuyen a este factor: La definición de la probabilidad condicional y la confusión entre diferentes probabilidades. Puesto que en el ítem de definición se pregunta a los participantes por la diferencia entre probabilidad simple y compuesta, es razonable que estos dos ítems aparezcan asociados. Por otro lado, al ser los únicos en este factor indica la especificidad de la competencia necesaria para dar una definición correcta, no relacionada ni con la capacidad de resolver problemas ni con la superación de los sesgos de razonamiento. En el trabajo de Díaz, la definición también apareció separada de la resolución de problemas y de los ítems relacionados con sesgos, aunque en su caso se relacionaba con otros ítems no incluidos en nuestro estudio.

Factor 6. Falacia de la condicional transpuesta (7,7% de varianza explicada). El último factor sólo agrupa dos ítems: La falacia de la condicional transpuesta se asocia al cálculo de la probabilidad condicional en un muestreo con reposición. Ambos ítems resultaron sencillos para los participantes de nuestra investigación, y esto explica la posible asociación. También en este caso, este factor reproduce exactamente el factor 6 en el estudio de Díaz (2007). alumnos.

5. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Los resultados del estudio confirman nuestra hipótesis sobre la existencia de los sesgos más reportados en la investigación previa en los futuros profesores de matemáticas. Estos resultados son motivo de preocupación, ya que los futuros profesores de nuestra muestra tenderán a fallar en la enseñanza de la probabilidad así como en algunas actividades profesionales que requieren del razonamiento probabilístico, tales como "*averiguar lo que los estudiantes saben, la elección y la gestión de las representaciones de las ideas matemáticas, la selección y modificación de los libros de texto, decidir entre los cursos alternativos de acción*" (Ball, Lubienski, y Mewborn, 2001, p. 453). En consecuencia, se sugiere la necesidad de mejorar la educación sobre probabilidad que estos futuros maestros reciben durante su formación

Por otro lado, la compleja relación entre los conceptos probabilísticos y la intuición (Borovcnik, Bentz y Kapadia, 1991; Borovcnik y Peard, 1996) se muestran también en los resultados del análisis factorial donde los ítems que evalúan sesgos aparecen separados del conocimiento formal. Al igual que en otras investigaciones (Aguilar, Navarro, López y Alcalde, 2002; Díaz, 2007), los resultados sugieren la influencia de la enseñanza heurística en la resolución de problemas matemáticos y la importancia que en la resolución de los problemas matemáticos tienen los procesos psicológicos.

Como apunta Fernández (1990), la función principal del proceso de diagnóstico pedagógico es la toma de decisiones sobre los cambios que requiere el modelo de enseñanza para ayudar al alumno en su adquisición de habilidades y competencias. Nuestra investigación no solo sugiere la necesidad de reforzar la formación sobre probabilidad condicional en los futuros profesores, sino también un cambio en la aproximación de este aprendizaje haciendo más hincapié en aquellos razonamientos sesgados que están presentes en los futuros profesores. Una enseñanza basada en el uso de la simulación, y la reflexión en pequeños grupos sobre estas dificultades podrían ayudar a superar estos sesgos. En palabras de Feller (1973, p. 114) “*la noción de la probabilidad condicional es una herramienta básica de la teoría de la probabilidad, y es desafortunado que su simplicidad esté de alguna manera obscurecida por una terminología confusa*”. Siguiendo las recomendaciones de Nisbett y Ross (1980), los profesores deberían recibir una “*mayor motivación para prestar atención a la naturaleza de las tareas inferenciales que realizan y a la calidad de su ejecución*” (p. 280) y consecuentemente “*la estadística debería enseñarse conjuntamente con material basado en estrategias intuitivas y errores inferenciales*” (p. 281).

Agradecimientos. Este trabajo forma parte del proyecto: EDU2010-14947, MICINN-FEDER y de la beca FPI BES-2008-003573, MEC-FEDER.

REFERENCIAS

Aguilar, M., Navarro, J.I., López, J.M y Alcalde, C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema, 14* (2), 382-386.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers’ mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American

Educational Research Association.

Bar-Hillel, M. (1983). The base rate fallacy controversy. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 39 – 61). Amsterdam: North Holland.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. *Educação Matemática e Pesquisa, 8*(2), 197-223.

Borovcnik, M., Bentz, H. J., y Kapadia, R. (1991). A probabilistic perspective. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 27-73). Dordrecht: Kluwer.

Borovcnik, M., y Peard, R. (1996), Probability. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 239-288) Dordrecht: Kluwer.

Diaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología.* Tesis doctoral. Universidad de Granada

Díaz, C., y Batanero, C. (2007), Una aproximación al teorema de Bayes con apoyo de Excel. En J. Sagula (Ed.), *Memorias del 9º Simposio de Educación Matemática* (CD-ROM). Chivilcoy, Argentina.

Díaz, C., y de la Fuente, I. (2007a), Assessing psychology students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2* (2), 128-148.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2007b). Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. *REMA, 12*(1), 1-15.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. Ein R. Davidson, & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292–297). Victoria: International Statistical Institute.

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. En R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education.* Vol.7. The teaching of statistics (pp. 175-184). Paris: UNESCO.

Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*. Méjico: Limusa.

Fernández, S. (1990). Diagnostico curricular y dificultades de aprendizaje. *Psicothema 2*(1), 37-56.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 1-24.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology? En G. Wright, & P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129 – 161). Chichester: Wiley.

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102,* 684 – 704.

Gras, R., y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(1), 49–95.

Huerta, P. (2008). *On conditional probability problem solving research – Structures and contexts.* Trabajo presentado en ICME 11, Monterrey, México.

Koehler, J. J. (1996). The base rate fallacy reconsidered: Descriptive, normative, and methodological challenges. *Behaviour and Brain Sciences, 19*, 1-54.

Lonjedo, M. A. y Huerta M. P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 203-212). Córdoba: SEIEM.

Martignon, L., y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies, in B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town, South Africa: ISI and IASE. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase.

Nisbett, R., y Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgments*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 389 – 404). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Sánchez, E., y Hernández, R. (2003). Variables de tarea en problemas asociados a la regla del producto en probabilidad. En E. Filloy (Coord.), *Matemática educativa, aspectos de la investigación actual* (pp. 295 –313). México: Fondo de Cultura Económica.

Shaughnessy, J. M. (2006). Research on students' understanding of some big concepts in statistics. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 77-95). Reston, VA: NCTM.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Tarr, J. E., y Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal, 9*, 39-59.

Tarr, J. E., y Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 216-238). Nueva York: Springer.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de concetpions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*, Ph.D. University of Rennes I.

Truran, J. M., y Truran, K. M. (1997). Statistical independence: One concept or two? En B. Phillips (Ed.), *Papers from Statistical Education Presented at Topic Group 9, ICME 8* (pp. 87–100), Victoria: Swinburne University of Technology.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1982). Judgements of and by representativeness. En D. Kahneman P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 84-98). Nueva York: Cambridge University Press.

Apéndice: Cuestionario

Ítem 1. Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules. Un testigo identificó el taxi como Azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?

☐ a. 80 %
☐ b. 15%
☐ c. (15/100) x (80/100)
☐ d. 41 %

Ítem 2. Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas con números del 1 al 7, sota caballo y rey). Sea A el suceso "se extrae una carta de oros " y B el suceso "se extrae un rey" ¿Los sucesos A y B son independientes?

☐ a. No son independientes porque en la baraja hay un rey de oros.
☐ b. Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda carta para mirar si es oros.
☐ c. No, porque P(rey de oros)= P(rey) x P(oros)
☐ d. Sí, en todos los casos

Ítem 3. La probabilidad de que una mujer de 40 años tenga una mamografía positiva es el 10,3%. La probabilidad de que una mujer de 40 años tenga cáncer de pecho y una mamografía positiva es de 0,8%. Una mujer de 40 años se realiza una mamografía y resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?

☐ a. $\frac{0,8}{10,3} = 0,0776$, probabilidad de 7’76%
☐ b. $10,3 \times 0,8 = 8,24$, probabilidad del 8’24%
☐ c. 0,8 %

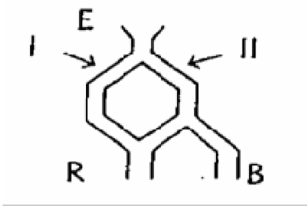
Ítem 4. Supón que Rafa Nadal alcanza la final de Roland Garros en 2010. Para ganar el partido hay que ganar tres sets. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable?

☐ a. Rafa Nadal pierde el primer set.
☐ b. Rafa Nadal pierde el primer set pero gana el partido.
☐ c. Los dos sucesos son iguales de probables.

Ítem 5. Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿En cuál de las siguientes predicciones tienes más confianza?

☐ a. Predecir que una persona tiene cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.
☐ b. Predecir un resultado positivo en el test de diagnóstico si la persona tiene cáncer.
☐ c. Tengo la misma confianza en ambas predicciones.

Ítem 6. Una bola se suelta por la entrada E. Si sale por R,
¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal 1?



- [ ] a. 0,50
- [ ] b. 0,33
- [ ] c. 0,66
- [ ] d. No se puede calcular

Ítem 7. Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? P (N_2/ N_1).

- [ ] a. 1/ 2
- [ ] b. 1/ 6
- [ ] c. 1/ 3
- [ ] d. 1/ 4

¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? P (N_1/ N_2).

- [ ] a. 1/ 3
- [ ] b. 1/4
- [ ] c. 1/ 6
- [ ] d. 1/ 2

Ítem 8. Explica con tus propias palabras la diferencia entre una probabilidad simple y una probabilidad condicional.

Ítem 9. Hemos lanzado dos dados y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12 ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos números sea un 6?

Ítem 10. En una ciudad hay 60 hombres y 40 mujeres por cada 100 habitantes. 50 de cada 100 hombres y 25 de cada 100 mujeres fuman. Si cogemos 200 personas al azar, ¿cuántas de estas 200 personas fumarán?

Ítem 11. Una persona lanza un dado y anota si saca un número par o impar. Estos son los resultados al lanzarlo 15 veces:
“par, impar, impar, par, par, impar, par, par, par, par, impar, impar, par, par, par”
Lanza el dado de nuevo ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par en esta nueva tirada? ¿Por qué?

Ítem 12. En una encuesta publicada en un periódico se informa que el 91% de los habitantes de una ciudad mienten usualmente y de ellos el 36% mienten sobre cosas importantes. Si elegimos al azar a una persona de esta ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que mienta sobre cosas importantes?

Ítem 13. Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?

Ítem 14. Un grupo de alumnos de un colegio se examina de Matemáticas e inglés. La proporción de alumnos que aprueban Matemáticas es del 80% y la proporción de alumnos que aprueba inglés es del 70%. Suponiendo que las notas en cada una de las asignaturas es independiente, ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar haya aprobado ambas asignaturas?

Capítulo 4

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO DE PROFESORES DE SECUNDARIA EN SERVICIO

THE DEVELOPMENT OF STATISTICAL THINKING OF SECONDARY IN-SERVICE TEACHERS

Ernesto Sánchez y Ana Luisa Gómez-Blancarte

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México

Resumen. En el contexto de un proyecto de desarrollo profesional se preparó a cinco profesores de nivel secundaria (estudiantes de 12-15 años) para desarrollar su pensamiento estadístico por medio de la implementación de dos ciclos de 'planificación, enseñanza y análisis de la enseñanza de una lección'. El modelo del pensamiento estadístico propuesto por Wild y Pfannkuch sirvió como base para entender el significado de pensamiento estadístico y guiar el diseño de las lecciones. Durante estos ciclos los profesores aprendieron acerca de la importancia del problema estadístico como punto de referencia en torno al cual organizar el contenido de estadística y diseñar actividades de instrucción para favorecer el pensamiento estadístico de los estudiantes.

Palabras clave: Actualización de profesores, pensamiento estadístico, problema estadístico.

Abstract. In the context of a professional development project five secondary in-service teachers were trained to develop their statistical thinking by implementing two cycles of planning, teaching and analyzing teaching of a lesson. The statistical thinking model of Wild and Pfannkuch was used to understand the meaning of statistical thinking and to design the lessons. During these cycles the teachers learn about the relevance of statistical problem as a point of reference around which it is possible to organize the statistical content and design instructional activities to promote students' statistical thinking.

Keywords: Teachers training, statistical thinking, statistical problem.

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace más de 20 años las propuestas de reforma curricular de diferentes países ponen el acento en la necesidad de llevar a cabo cambios en la enseñanza y no sólo en la actualización de los contenidos. Por ejemplo, en los programas actuales de matemáticas de secundaria en México, se sugiere "llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver problemas y a formular argumentos que validen sus resultados" (SEP, 2006, p. 11). Se espera que sean los profesores de matemáticas quienes generen dentro de sus salones de clase esas actividades y traduzcan esas recomendaciones en una práctica constante.

En estadística, las recomendaciones curriculares actuales implican abandonar un modelo de enseñanza centrado en el objetivo de que los estudiantes dominen fórmulas, técnicas y procedimientos a favor de una enseñanza que propicie el desarrollo de la competencia, el razonamiento y/o el pensamiento estadístico (Garfield y Ben-Zvi, 2008a). Para volver operativas estas propuestas de desarrollo se debe avanzar en dos ejes de forma paralela, por un lado, elaborar actividades de enseñanza, problemas e instrumentos de evaluación para promover el aprendizaje de la estadística y, por otro, formar y actualizar a los profesores para que sean capaces de implementarlos en el aula.

El presente informe es parte de una investigación que emergió en el contexto de un proyecto de desarrollo para actualizar a cinco profesores de nivel secundaria (alumnos de 12 a 15 años) en el área de la estadística y cuyo objetivo principal fue darles una formación que les permita propiciar en su aula el desarrollo del pensamiento estadístico de los estudiantes (Gómez-Blancarte, 2011). Más específicamente, en este informe se describen momentos importantes del aprendizaje de algunos elementos del pensamiento estadístico por parte de los profesores durante el proceso de planificación, enseñanza y análisis de la enseñanza de una lección cuyo objetivo de aprendizaje fue promover el pensamiento estadístico de sus estudiantes a traves de dos grandes ideas: el promedio y las gráficas.

2. ANTECEDENTES

En los últimos años la educación de profesores en el campo específico de la estadística ha llamado el interés de los investigadores. En el estudio ICMI/IASE celebrado recientemente en Monterrey (Batanero, Burril, Reading y Rossman, 2008) se presentaron algunos trabajos que proponen preparar a los profesores para que enseñen estadística mediante la realización de investigaciones estadísticas en sus aulas. Los métodos que se usan en la preparación de los profesores varían, pero coinciden directa o indirectamente con algunos elementos del modelo del pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999).

Garfield y Ben-Zvi (2008b) condujeron dos cursos, uno para futuros profesores y otro para profesores en servicio, cuyo objetivo principal fue ayudar a los estudiantes a pensar y razonar estadísticamente y a que los profesores lograran un entendimiento significativo de estadística. Los los autores diseñaron ambientes de aprendizaje en el que los participantes se comprometieron en: 1) aprender las ideas estadísticas centrales, 2) Examinar conjuntos de datos reales para realizar y probar conjeturas; 3) diseñar e implementar actividades de clase para apoyar el desarrollo del razonamiento estadístico de los estudiantes, 4) integrar el uso de herramientas tecnológicas para explorar y examinar datos, probar conjeturas, y desarrollar conceptos abstractos; 5) promover el discurso en el salón de clases y 6) usar la evaluación para aprender lo que los estudiantes conocen y monitorear el desarrollo de su aprendizaje estadístico así como evaluar los planes y progresos de instrucción.

Basadas en el modelo PCAI, Lee y Mojica (2008) reportan un estudio acerca de cómo profesores de primaria usan experimentos probabilísticos y simulaciones para apoyar a los estudiantes en un proceso de investigación estadística. El método fue seguir una secuencia de planificación de una lección, su enseñanza y reflexiones. Los autores señalan que, en general, las lecciones ilustraron un uso de experimentos predominantemente controlados por el profesor, donde los estudiantes toman muy pocas decisiones por sí mismos; también no se promueve la discusión acerca de la recolección y organización de datos y de la representación de los resultados. También indican que aunque los profesores comprometen a los estudiantes en investigaciones estadísticas a través de experimentos probabilísticos, ellos a menudo pierden oportunidades para que sus estudiantes razonen. En particular, las oportunidades perdidas ocurrieron durante las etapas de análisis e interpretación.

Con el objetivo de que los profesores aprendan a enseñar investigaciones estadísticas que sigan las cinco etapas del ciclo PPDAC del modelo de pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch, Makar (2008) propuso un modelo de aprendizaje que consiste en un proceso de cuatro ciclos: un ciclo de orientación, un ciclo de exploración, un ciclo de consolidación y un ciclo de compromiso. Este modelo fue usado con cinco profesores de primaria en un proyecto de cuatro años. Con base en entrevistas y las observaciones de clase, la autora reporta un progreso en el compromiso de los profesores por incluir investigaciones estadísticas como parte de su enseñanza común. Dicho progreso se dio conforme los profesores se fueron familiarizando con el proceso de investigación.

Pfannkuch y Horring (2005) describen el diseño y desarrollo de un plan de estudios para secundaria con base en el ciclo investigativo del modelo de Wild y Pfannkuch (1999) sobre el pensamiento estadístico. El plan de estudios se diseñó en colaboración con profesores, estudiantes, investigadores y estadísticos. En una primera etapa, se identificó como principal obstáculo para promover el pensamiento estadístico la falta de una investigación empírica coherente. Luego de diseñar una unidad de enseñanza de estadística, en una segunda etapa, los profesores la implementaron en sus aulas y reflexionaron sobre la enseñanza. Se reportan dos cambios en el enfoque de la enseñanza de los profesores que fueron evidentes durante la implementación de la unidad: 1) que las partes del ciclo investigativo no fueron enseñadas de manera aislada sino juntas como un proceso conectado y 2) que fueron usados conjuntos de datos multivariados.

3. EL PENSAMIENTO ESTADÍSTICO COMO UN OBJETIVO CURRICULAR

En los últimos años, los investigadores y educadores estadísticos (Garfield y Ben-Zvi, 2008a) han propugnado por un cambio en la enseñanza de la estadística que permita transitar de una enseñanza basada en el aprendizaje de fórmulas, técnicas y procedimientos hacia una que propicie el desarrollo de la competencia, el razonamiento y/o el pensamiento estadísticos. La *competencia estadística* consiste en los conocimientos, habilidades y disposiciones estadísticos que todo ciudadano debe tener para funcionar adecuadamente en una sociedad caracterizada por la circulación de grandes cantidades de información. Involucra la comprensión y el uso del lenguaje y las herramientas básicas de la estadística (Watson, 2006; Gal, 2004).

El *razonamiento estadístico* es la manera de razonar con ideas estadísticas, es decir, consiste en realizar inferencias o deducciones (cuyas premisas y/o conclusiones son enunciados estadísticos) y utilizarlas en la solución de problemas propios del campo. Implica conectar conceptos estadísticos y probabilísticos, entender y explicar procesos estadísticos e interpretar los resultados (Garfield y Ben-Zvi, 2008a). El *pensamiento estadístico* consiste en la forma en que piensa un estadístico profesional. Implica saber cómo, dónde y por qué llevar a cabo una investigación estadística, así como utilizar un método, aplicar un modelo o idear un diseño estadístico; para hacerlo se requiere una comprensión profunda de las teorías que subyacen a los métodos y procesos estadísticos (Wild y Pfannkuch, 1999).

El desarrollo del pensamiento estadístico como objetivo de la enseñanza de la estadística puede cubrir una parte de la competencia y el razonamiento estadísticos, pero debe incluir otros contenidos diferentes, en particular, los conocimientos y habilidades para llevar a cabo efectivamente investigaciones estadísticas. En el pasado, estos conocimientos y habilidades estaban reservadas sólo para la enseñanza superior en estadística, sin embargo, en la actualidad se ha abierto la posibilidad de que alguna versión de ellos forme parte de los objetivos curriculares de los niveles básicos.

El modelo de Wild y Pfannkuch (1999) organiza los rasgos del pensamiento estadístico en cuatro dimensiones: el ciclo investigativo, los tipos de pensamiento, el ciclo interrogativo y las disposiciones. Cada dimensión a su vez está formada por varios componentes que la definen y precisan. La dimensión 1 es el ciclo investigativo PPDAC: Problema-Plan-Datos-Análisis-Conclusión. La dimensión 2 la constituyen los tipos de pensamiento, a saber: necesidad de los datos, trasnumeración, consideración de la variación, razonamiento con modelos estadísticos e integración de lo estadístico con el contexto. La dimensión 3, el ciclo interrogativo, lo constituyen las acciones de generar, buscar, interpretar, criticar, juzgar. El conjunto de disposiciones, dimensión 4, son cualidades personales que afectan o inician la entrada de uno de los elementos de las dimensiones anteriores.

La forma concreta en que el propósito de fomentar el pensamiento estadístico en la educación básica se puede y debe traducir en objetivos, problemas y actividades para realizar en el aula es un problema de la didáctica de la estadística que aún es objeto de estudio. Chance (2002), por ejemplo, sugiere el desarrollo de un conjunto de ‘hábitos mentales’ que pueden expresar un pensamiento estadístico y cuya inducción a los estudiantes puede ser un objetivo de la enseñanza.

Para el presente trabajo, como primer paso, cada dimensión del modelo de Wild y Pfannkuch (1999) se ha traducido a un objetivo general para una enseñanza de la estadística basada en actividades, como se muestra en el siguiente cuadro:

Cuadro 1. Proposiciones que ligan elementos de diferentes dimensiones del modelo

- Las actividades deben basarse en proyectos (Batanero y Díaz, 2004) que puedan ser realizados por los estudiantes y que les permita recorrer el ciclo PPDAC (Dimensión 1).
- Durante las actividades, se les ayudará a los estudiantes a tener en cuenta el mayor número de tipos de pensamiento que sean pertinentes a la actividad (Dimensión 2).
- Se debe propiciar y dar oportunidad a los estudiantes de que actúen de acuerdo a elementos del ciclo interrogativo, es decir, generen y busquen ideas, interpreten, critiquen y/o juzguen los datos, los procedimiento y los resultados (Dimensión 3).
- El tipo de actividades elegidas debe tener un potencial para la formación de buenas disposiciones hacia la estadística (Dimensión 4).

El segundo paso consistió en formular las proposiciones expuestas en el cuadro 2, las cuales relacionan entre sí algunos elementos de diferentes dimensiones del modelo y algunos de estos con el contenido curricular propio de los temas del currículo de secundaria (medidas de tendencia central y gráficas).

Cuadro 2. Proposiciones que ligan elementos de diferentes dimensiones del modelo

- La propuesta de considerar un problema estadístico lleva a reconocer la necesidad de datos reales; en particular, desestima el trabajo con datos inventados.
- La transnumeración se liga con la fase de Datos del ciclo PPDAC (registro de los datos en tablas de frecuencia, cálculo de la media, elaboración de gráficas para presentar los datos).
- Interpretar la media y los datos de las gráficas se relaciona con el razonamiento con modelos y, eventualmente, con la variación.
- La integración de lo estadístico con lo contextual se liga con la comprensión del problema y las conclusiones (del ciclo PPDAC) y la reflexión sobre cómo los resultados y conclusiones de la actividad contribuyen en la solución del problema.
- Los elementos del ciclo interrogativo emergen en las discusiones grupales cuando los estudiantes dan sus opiniones acerca de la experiencia o cuando formulan preguntas.
- Apoyar las discusiones grupales para generar el ciclo interrogativo influye en el desarrollo de conductas de disposición necesarias para realizar las actividades (e. g., interés, imaginación, curiosidad, escepticismo, etc.)

El objetivo general de cada dimensión y las proposiciones que expresan la relación entre sus elementos ayudaron a los participantes a entender de qué manera las actividades fomentarían el pensamiento estadístico, además de ser utilizados como guías para dirigir el diseño de tales actividades. En particular, entender que las etapas del ciclo investigativo deben ir más allá de los procedimientos, deben favorecer un conocimiento más cognitivo como los son los tipos fundamentales del pensamiento estadístico. Esto se traduce en la especificación de objetivos de aprendizaje más conceptuales que procedimentales.

4. METODOLOGIA

4.1. El contexto de observación

El estudio se llevó a cabo en el contexto de una Maestría en Educación ofrecida a profesores en servicio de educación básica (primaria y secundaria) en México. El programa de estudios de la maestría (Figueras y Rigo, 2005) se desarrollaba a lo largo de dos ejes; un eje consistía en un conjunto de asignaturas que cubrían las distintas áreas de la didáctica de la matemática; el otro de un *Proyecto de desarrollo* que cubría un tema específico de la didáctica y cuyo objetivo era profundizar en ese tema y preparar y guiar a los profesores para que realizaran un trabajo de tesis para obtener su grado. En cada proyecto de desarrollo participaba un grupo de 5 o 6 profesores de los 60 profesores inscritos en la Maestría, 1 o 2 auxiliares y 2 responsables. Los proyectos se impartían a lo largo de los tres años que duró la Maestría con sesiones de 4 horas en periodos de 15 a 21 días. Conviene aclarar que los profesores de la Maestría siguieron estando a cargo de sus grupos en sus escuelas durante las mañanas, utilizando las tardes y fines de semana en sus estudios de maestría. El presente artículo está basado en la actividad llevada a cabo en el proyecto de desarrollo que tenía como tema central la estadística.

En este proyecto participaron 5 profesores, 2 auxiliares y dos responsables (los autores); los participantes Álvaro, María, Lucio, Germán y Juan son profesores de matemáticas de nivel secundaria de escuelas públicas de los suburbios de la ciudad de México. Todos tienen varios años de experiencia en dictar la clase de matemáticas (entre 3 y 14 años). Excepto por

Álvaro, quien tiene conocimiento de un primer curso de probabilidad y estadística, los demás tenían conocimientos muy parciales y escasos de la materia. Durante el primer año del proyecto, los profesores realizaron sesiones de trabajo en las que se introdujeron aspectos de contenido estadístico, en algunos casos con apoyo de herramientas tecnológicas, y se estudiaron algunas lecturas de didáctica de la estadística. Además, los profesores realizaron una investigación en sus aulas para identificar las nociones y dificultades de sus estudiantes en temas de estadística y probabilidad. Dicha investigación preparó el camino para el Estudio de Lecciones.

4.2. Estudio de Lecciones en Grupo

El *Estudio de Lecciones en Grupo* (por sus siglas en ingles, LSG) es una metodología de trabajo que consiste de un proceso en el cual los profesores planifican conjuntamente, enseñan y analizan lecciones de clase (Lewis, 2000):

1) *Planificación*. En esta fase el grupo de profesores de manera conjunta adapta, elabora o mejora una lección para desarrollar un tema en la clase.
2) *Enseñanza*. En esta fase se pone en práctica la lección por cada profesor en su aula y se asegura la presencia de un testigo (quizá otro profesor) durante el desarrollo de la clase para que lleve un registro de lo ocurrido.
3) *Análisis de la enseñanza*. En esta fase, con apoyo de los registros obtenidos, el grupo reconstruye y analiza momentos de lo ocurrido en la clase para evaluar aciertos y desaciertos de la enseñanza llevada a cabo y proponer mejoras para un segundo ciclo.

Con esta metodología, en dos ciclos sucesivos, los profesores planificaron, enseñaron y analizaron su enseñanza de 3 lecciones (cada lección consiste de una serie de actividades relacionadas entre sí). El presente informe sólo toma elementos de una de esas lecciones, llamada ‘el peso de las mochilas’. Ésta surgió a partir de una tarea consistente en pedir a los profesores que en grupo (con la participación de colaboradores y responsables) diseñaran una lección de estadística que cubriera los temas de gráficas y medidas de tendencia central y que contribuyera al desarrollo del pensamiento estadístico de los estudiantes.

Enseguida se presenta una formulación del problema de las mochilas:

> Cuatro de cada 10 niños y la mitad de los adolescentes manifiestan algún tipo de daño que con la peor complicación puede convertirse en dolor crónico e inclusive desviaciones de la columna vertebral en la edad adulta. Según estudios de la organización mundial de la salud (OMS), un niño comúnmente lleva un peso promedio entre 7.5 y 12.5 kilos, cuando el peso que carga no debe exceder el 10% del peso corporal. ¿Cómo se podría comprobar si en tu grupo hay alumnos cuya mochila pese más del 10% de su peso corporal? ¿Quiénes cargan relativamente más peso en sus mochilas, hombres o mujeres?

Este problema no fue previsto desde el comienzo de la investigación, sino que emergió durante la planificación, como se verá más adelante. La característica fundamental es que se puede ver cómo un problema genuino, que sigue las fases del ciclo PPDAC y cuya solución implica la adquisición de un nuevo conocimiento cercano al contexto de los estudiantes y significativo para ellos.

5. RESULTADOS

5.1. El papel del currículo como punto de partida en la planificación

Las prescripciones y sugerencias curriculares sobre el tema que se quiere enseñar y los materiales didácticos con que cuentan los profesores proporcionan un punto de referencia fundamental en la planificación de una lección, sin embargo, en ocasiones representan una limitación en lugar de un apoyo. Por ejemplo, en las actividades previas a la planificación se les pidió a los profesores que propusieran actividades para incluir en la lección. Lucio, María y Juan diseñaron actividades para comparar conjuntos de datos. Las tareas consistían en la lectura de un gráfico poligonal, para responder preguntas con la intención de que los estudiantes identifiquen y calculen el promedio, la moda y la mediana. Es muy probable que se hayan basado en la actividad que se sugiere en los programas de estudio de secundaria (SEP, 2006, p. 61), donde se muestra un par de gráficos poligonales de supuestos datos sobre 'precipitación pluvial mensual' y se pide entre otras preguntas *¿Cuál es el promedio de precipitación pluvial en cada estado?* En general, las actividades propuestas se enfocaron en tareas de procedimientos aislados, carentes de un problema de investigación que generara el ciclo PPDAC. La demanda de las tareas requería conocimientos limitados como cálculos algorítmicos y una lectura literal de datos exhibidos en tablas y gráficas.

Desafortunadamente, el profesor rara vez cuenta con buenos materiales de estadística y el currículo no siempre es una guía adecuada. El programa de estudio de secundaria en lo que concierne a los temas de estadística no enuncia o hace suficiente énfasis en proposiciones que son muy importante para el desarrollo del pensamiento estadístico; incluso envía mensajes que no están acordes con él. Un ejemplo de esto es que se utilizan datos inventados que no tienen la intención de informar sobre la situación real (SEP, 2006, p. 61); la costumbre de no utilizar datos reales (y no solo realistas) es contrario a las consecuencias didácticas que se derivan del objetivo de desarrollar un pensamiento estadístico. Tampoco se intenta en el programa de estudio de secundaria sugerir que toda investigación parte de, y tiene la intención de resolver, un problema estadístico.

5.2. El uso del ciclo PPDAC para orientar el diseño de la lección

Para ofrecer a los profesores la posibilidad de adoptar una nueva perspectiva de la estadística y de su enseñanza, diferente a la que ellos tenían y a la que filtra el programa de estudio, los responsables se apoyaron, como se ha dicho, en una interpretación de las ideas del modelo de Wild y Pfannkuch (1999) sobre el pensamiento estadístico. Es decir, se les pidió a los profesores diseñar, de manera conjunta, una única lección que tomara en cuenta la recolección de datos reales para resolver un problema de investigación. Durante la planificación de la lección, los profesores, incluyeron ciertas características del ciclo PPDAC y de los 'Tipos de pensamiento'. Un ejemplo de ello se observa en la forma en que los profesores interpretaron el tipo de pensamiento 'la necesidad de los datos' y la noción de 'problema' del ciclo PPDAC. Para ellos 'considerar la necesidad de los datos' significó trabajar con datos reales de situaciones reales, más aún, que los datos sean obtenidos por los estudiantes. De esta manera, propusieron introducir en los temas de la lección el de 'recopilación de datos'; lo mencionaron desde el comienzo de la planificación:

Álvaro:	*No sé si podríamos empezar desde la recopilación de datos.*
Juan:	*Exactamente.*
Álvaro:	*La presentación de datos.*
Colaborador 1:	*Primero la recopilación de datos.*
María:	*La recopilación, organización y presentación.*
Juan:	*[…] y analizarlos […]*

Conviene observar que en los planes y programas de estudio (SEP, 2006) no se prescribe que los profesores organicen situaciones para recopilar datos, de manera que la intención de incluirlo en su lección ya es un efecto de las actividades realizadas en el proyecto de desarrollo consistentes en leer y discutir el documento de Wild y Pfannkuch (1999).

5.3. El papel del problema como elemento crucial de la planificación

A diferencia de la rápida aceptación por parte de los profesores de la 'recolección de datos' como actividad integrante de la lección, les tomó más tiempo la consideración y comprensión del papel del *problema estadístico* como un elemento imprescindible para poder diseñar la lección y como primer elemento del ciclo PPDAC. Como se ha mostrado en el episodio de arriba, cuando los profesores comenzaron a planificar la lección sugirieron que sería para recopilar, organizar y presentar datos (Datos y Análisis en el ciclo PPDAC). Una discusión alrededor de estos elementos les tomaría 50 minutos, al cabo de los cuales no habrían logrado obtener enunciados que prescribieran las acciones que harían los estudiantes durante la lección; es decir, aparentemente no avanzaban en el objetivo. Cabe señalar que durante la discusión los profesores dejaron de relacionar directamente lo que estaban haciendo con el ciclo PPDAC y, por lo tanto, no hicieron consciente que se estaban centrando sólo en la parte DA del ciclo y que faltaba PP (el Problema y el Plan) y C (Conclusiones).

Los colaboradores y responsables teníamos la expectativa de que la lección diseñada fuera pensada y guiada por un proyecto que incluyera todos los elementos del ciclo investigativo, en consonancia con el primer objetivo señalado arriba (Cuadro 1). Es por esto que los colaboradores intervinieron para destrabar el estancamiento en que los profesores habían caído en su discusión sobre los temas de la lección. En la intervención de un colaborador se llamó la atención de los profesores para que reflexionaran sobre la naturaleza de los datos que se quería que los estudiantes recogieran:

Colaborador 2:	*Pero, a ver ¿a qué te refieres con recolección de datos?*
Álvaro:	*Mira, por decir, […] "que en equipo se investiguen las edades de sus compañeros de grupo, completen la tabla con los datos obtenidos y construyan la gráfica de barras correspondiente", […]*
María:	*Bueno, a reserva de ver qué información es la que vamos a recolectar […]*
Germán:	*El problema que les vas a presentar a ellos […] para poder recolectar los datos.*
María:	*Entonces hay que ver qué tipo de información, para que se pueda ver ahí mismo dentro de la clase, […] que sea familiar para ellos (los estudiantes) […]*

En el segmento anterior, puede notarse que Germán menciona 'el problema', sin embargo, la discusión no se detuvo en este tema, fue sólo más tarde, en la intervención de otro colaborador quien sugirió directamente un problema estadístico, a saber, el llamado 'problema de las mochilas'. Dicha intervención permitió la organización y diseño la lección.

Colaborador 1:	*Yo vi una actividad, bueno unos datos que proponen en Tinker Plots[12] que me parece muy interesante: se ha observado que muchos niños cargan muchos útiles en sus mochilas y que eso les puede provocar problemas en la columna, entonces se diseñó un experimento en el cual se llevó una báscula y se pesó las mochilas de los alumnos, entonces qué tan pesadas están las mochilas de los alumnos, […]*
Juan:	*Entonces nos tendríamos que meter a ver cuál es el peso que consideran los médicos para que se deforme o les haga daño en la columna.*
Lucio:	*[…] yo no la creo tan factible porque tendríamos que meternos en muchas cosas en cuanto a datos y a médicos, checar no simplemente el peso de la mochila, sino el peso del alumno, la estatura del alumno, […]*
Germán:	*No, no, o sea él [señala al colaborador] se refiere al puro peso de la mochila, puede ser una comparación inclusive con un grupo de segundo con un grupo de tercero […] O igual hombres y mujeres […]*
Álvaro:	*Y con esos mismos datos podemos continuar al siguiente tema, las medidas de tendencia central porque ya tenemos los datos.*

Hay que notar que el problema no fue creación del colaborador, sino que fue tomado de una guía para el uso de un software. Nuevamente se manifiesta la importancia de contar con materiales ya elaborados en otros ambientes y que pueden ser adaptados y trasladados a la situación actual.

En una primera impresión el problema no les pareció apropiado a los profesores, pues la alusión a una situación de medicina los hizo pensar que el problema era muy complejo y que tendrían que tener más conocimientos al respecto. Pero con la formulación de sus dudas y las aclaraciones respectivas entendieron más la idea del problema y se dieron cuenta que era viable para realizar en el aula:

Colaborador 1:	*Ah, ya me acordé de otra cosa, es que un alumno puede cargar 10% o 15% de su peso y se puede pesar la mochila.*
Juan:	*¿Y la estatura del alumno?*
Colaborador 1:	*No importa su estatura lo que importa es el peso […]*
María:	*Es que suena interesante la actividad, aunque también sería bueno escuchar por qué él [se refiere a Lucio] opinaba que no.*
Lucio:	*[…] decía que si nos íbamos a meter con esos términos médicos pues tendríamos que meter peso, estatura, si es hombre, mujer, considero que eso es lo que limitaría, nos quitaría un poquito de tiempo, pero ya delimitando, decimos que nada más vamos a pesar alumnos y a sus mochilas […], sería suficiente para poder aplicar la actividad.*

[12] Programa Estadístico diseñado por Konold & Miller (2005).

Una vez que aceptaron el problema, comenzaron a hacer propuestas concretas para darle forma a la lección, por ejemplo, previeron lo siguiente: llevar básculas a la clase, organizar a los niños para obtener el peso de cada uno, mostrar el cálculo que se les pediría con los datos, vaciar los datos en tablas, transmitir las instrucciones mediante hojas de trabajo, etc. En fin, este episodio fue revelador, pues mostró el papel fundamental que juega en el proceso de planificación de la lección el contar con un problema estadístico como parte de un proyecto que los participantes vieran viable para ser llevado a la clase.

Jones y Smith (1997) han señalado que los profesores con experiencia al diseñar sus lecciones parten de los problemas que conocen referentes al tema que tienen que impartir, en lugar de hacerlo, como se esperaría, desde los objetivos que supuestamente tendrían que cubrir. El sentido común sugiere comenzar la elaboración de una lección revisando los objetivos y luego determinar el problema que ayudaría a cubrir dichos objetivos; no obstante, al parecer, para los profesores es más práctico e inmediato organizar su clase en función de los problemas con que cuentan, aunque sean otros los objetivos que cubran.

En consecuencia, conviene destacar que el haber tomado al ciclo PPDAC como una guía para organizar la lección, ayudó a descubrir la dificultad y la importancia que conlleva determinar ‘el problema’ estadístico de la lección. Una vez superada esa dificultad se puede avanzar en otros aspectos concretos como el tipo de contenidos de estadística que se deben abordar para llevar a cabo el análisis de los datos (e. g., cálculo de frecuencias, elaboración de gráficas, resúmenes estadísticos). Así como el diseño de instrumentos para mostrar a los estudiantes en formas accesibles tales contenidos.

5.4. El papel de las hojas de trabajo en la planificación

Una vez que fue acordado el problema del proyecto de investigación que se desarrollaría en el aula, los profesores lograron imaginar y prever acciones para ser realizadas por sus alumnos. En este proceso se dieron cuenta que era necesario concretar sus ideas al respecto en formas susceptibles de llevarse a la clase. En efecto, los profesores avanzaron propiamente cuando sus discusiones, acuerdos, previsiones y predicciones fueron traducidos en enunciados, tablas, fórmulas o advertencias en las hojas de trabajo. La necesidad de concretar las discusiones para llevarlas al aula se refleja en momentos como el que se presenta adelante, en el que Juan se refiera a formatos o tablas para que los estudiantes viertan los datos obtenidos:

Juan: *Si hacemos un formatito, una tablita, ¿qué datos les gustaría? […]*
Germán: *Nombre del niño, luego género o sea sexo, masculino, femenino, luego edad.*
Álvaro: *Luego peso: peso del alumno, peso de la mochila […]*

El resultado fueron el diseño de actividades en hojas de trabajo. Éstas, aparte de lograr ejercer un control sobre la forma en que cada uno de ellos organizaría el trabajo en el aula, se utilizaron para transmitir a los alumnos procedimientos y conceptos; además, reflejan los conocimientos que tienen los profesores de las dificultades de sus estudiantes y la manera en que proponen ‘resolverlas’.

Otro ejemplo en el que se puede observar cómo en las hojas de trabajo los profesores vierten su concepción acerca de cómo afrontar las dificultades de los estudiantes es el relacionado con la inclusión de un cuadro para que se grafiquen los datos. En el siguiente extracto de interacción de los profesores, discuten el problema de la dificultad de los estudiantes para elaborar un histograma:

Germán: *Yo digo que se van a tardar más de una sesión en hacer el histograma porque no todos los niños saben hacer histogramas […]*

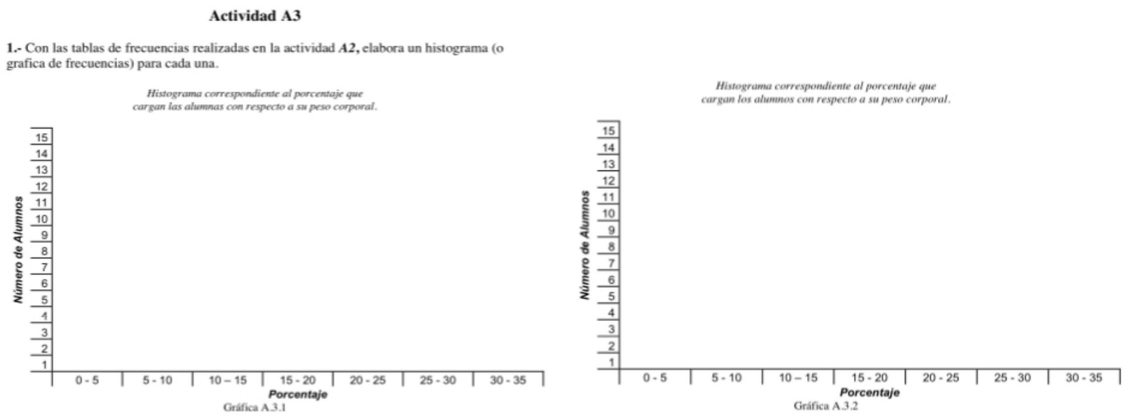
Álvaro: *Si le pones en la parte de abajo la indicación de dónde va el intervalo y la frecuencia, yo creo que sí saben.*

Colaborador 3: *[…] podríamos evitar ese problema con ponerles un ejemplo.*

María: *Uno o dos, por cuestión de tiempo, y que hagan ellos uno, el chiste es que aprendan.*

Estas preocupaciones y el reconocimiento de la dificultad de los estudiantes para definir las escalas en la gráfica los llevó a incluir los cuadros que se presentan a continuación en los que los estudiantes deben elaborar la gráfica. Con tales cuadros (Figura 1) los profesores evitan la dificultad prevista e impide que los estudiantes se entretengan demasiado en la elaboración de las gráficas.

Figura 1



En la manera en que los profesores traducen sus prevenciones sobre las dificultades de sus estudiantes se filtran también sus limitaciones de conocimiento estadístico y didáctico. Por ejemplo, en los cuadros que proporcionaron para la elaboración de la gráfica, de hecho indujeron a utilizar el eje X como un lugar para poner etiquetas y no como una recta numérica. También es defectuosa la manera en que graduaron al eje Y.

En resumen, las hojas de trabajo concretan la negociación de los profesores tanto en los aspectos operativos de la organización de la clase, como en sus previsiones acerca del conocimiento y dificultades de los estudiantes. Aunque las decisiones tomadas para evitar las dificultades de sus estudiantes no son las más adecuadas, es importante notar que las hojas de trabajo son útiles para anticipar dichas dificultades y orientar las decisiones cuando se presenten.

5.5. Dificultades detectadas en la fase de enseñanza

Del análisis de los segmentos del video de la enseñanza del profesor Germán se hicieron observaciones en cinco puntos referidos al aprendizaje de los estudiantes: 1) el problema de investigación, 2) el porcentaje, 3) el promedio, 4) la construcción de histogramas, y 5) el papel del profesor. Enseguida se describen los puntos 1 y 5.

La manera en que los profesores atendieron la componente del 'problema de investigación' durante la enseñanza reflejó una concepción de problema en la que no le daban importancia al resultado real de la recopilación de datos, análisis y conclusiones, sino sólo resaltaban que el problema había permitido que los estudiantes aprendieran a procesar datos. Uno de los episodios que se analizaron durante la sesión de análisis de la enseñanza, mostró la idea que los profesores tenían acerca del problema de investigación. El episodio muestra la observación de un estudiante que durante el desarrollo de la actividad manifestó que el día de la actividad no llevaban el mismo peso de las mochilas que solía llevar, se les preguntó a los profesores si la observación del estudiante era o no relevante para la experiencia. El siguiente comentario de Álvaro refleja su idea de que el problema sólo era un pretexto, idea que fue compartida por María:

Álvaro: *[…] el pretexto de la actividad fue llevarles un contexto donde ellos [los estudiantes] se pudieran involucrar, que les llame la atención, entonces, el pretexto fue buscar el peso de las mochilas […], pero para la actividad en sí, lo que nos interesa es de matemáticas, que hagan la actividad, realmente no nos interesa el peso que estén cargando, sino que estén realizando la actividad*

María: *Sí, yo también soy de esa opinión, que en realidad el propósito de esta actividad sí es que el niño aprenda a hacer la recolección de datos y con datos reales que era nuestra intención que ellos aprendieran a llevar a cabo la recolección de datos y finalmente el objetivo creo que sí se logró, […]*

La idea de que el problema estadístico o de investigación no es relevante hizo que los profesores se centraran en los prodecimeintos en sí mismos, ocultando así sus signficados. Por ejemplo, el proceso de recolección de datos implica la necesidad de obtener datos reales para solucionar un problema o juzgar una situación.

Más adelante, durante la discusión, los profesores modulan su comentario, aceptando que 'no está de más' si el resultado del análisis ofrece información 'verídica'; pero no lo consideran fundamental. Insistiendo en este punto, los responsables trataron de hacer reflexionar a los profesores sobre la integración de 'lo estadístico con lo contextual', elemento de la Dimensión 2 de modelo del pensamiento estadístico, con intervenciones como la del co-responsable:

Co-responsable:	*Estadísticamente hablando, este tipo de cosas [el que los pesos de las mochilas sean diferentes a la de todos los días], cuando se recogen datos, ¿afecta los resultados?*
María:	*Si el objetivo es precisamente identificar ese problema, o sea el peso, sí nos afecta*
Co-responsable:	*¿En qué forma?*
María:	*Pues porque entonces a lo mejor la información que estamos dando al final, al tomar una conclusión final, no vamos a llegar a dar una*

conclusión verídica, ¿no?, siempre y cuando el objetivo sea que tengamos que encontrar una solución a un problema que estuviéramos investigando, ¿no?

María reconoce que la observación señalada por el estudiante afecta la calidad del resultado. El co-responsable aprovecha para hacer reflexionar a los profesores sobre la consideración de este hecho en el aula:

Co-responsable:	*¿Y consideras que esto [la veracidad o calidad de los resultados] no lo deben de saber los estudiantes?*
María:	*Sí, yo creo que sí, sí es importante porque finalmente el objetivo es que ellos tengan bien comprendido lo que es el objetivo de la estadística, que es parte del conocimiento que ellos deben de tener, aunque en realidad ahora, a lo mejor, el error está en que nosotros pensamos nada más en el objetivo de la actividad de ese día*
Juan:	*O tal vez, nosotros nada más estamos viendo la parte matemática, de checar el objetivo, y no llevarla más allá, o sea, relacionar esa actividad con otra materia que podría ser, no sé, medicina, ¿no?, para la salud del niño*

Los comentarios de María y Juan reflejan que los profesores comienzan a ser conscientes de la importancia de concebir las actividades como procesos para ofrecer a los estudiantes la posibilidad de aprender además de procedimientos, conocimientos estadísticos e información genuina sobre el contexto y el problema.

La participación de los profesores en el aula durante la fase de enseñanza en el primer ciclo no fue óptima para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. El problema detectado en la fase de análisis es que los profesores se limitaron a suministrar las hojas de trabajo y a dar a los estudiantes algunas indicaciones de cómo llenarlas, sin promover la discusión de los estudiantes para que ellos compartieran sus ideas, dudas y dificultades; con ello hacer intervenciones que abrieran la posibilidad de mejorar la comprensión. Los siguientes comentarios surgieron del cuestionamiento de los responsables hacia los profesores acerca del papel que adoptaron durante la enseñanza:

Germán: *[…] cuando íbamos a iniciar la actividad decidimos no darles ninguna indicación para ver cómo se comportaban ellos […]*

María manifiesta que no se llegó a un acuerdo de cómo iban a comportarse en el salón de clase:

María: *[…] cuando nosotros pensamos en hacer las actividades, yo siento que nos faltó ponernos más de acuerdo entre nosotros mismos, […] porque cuando yo las iba a aplicar me surgían dudas de ¿voy a dar mi clase?, ¿lo van a hacer ellos solos?, […]*

Una posible conjetura para explicar esta conducta es que los profesores hayan interpretado que las hojas de trabajo debían funcionar por sí mismas independientemente del profesor, como un material para estudio *autodidáctico*. Con esta idea, la fase de enseñanza proporcionaría la prueba de que las lecciones cumplían su objetivo siempre que los resultados no dependieran de intervenciones no previstas de los profesores. Esta idea se corrigió en el segundo ciclo.

No es posible extenderse en los puntos 2, 3 y 4 referentes a las discusiones en torno a los contenidos de *porcentajes, promedio y construcción de histogramas.* Basta decir que los profesores observaron, entendieron y reflexionaron sobre las dificultades de los estudiantes que se manifestaron durante la enseñanza, muchas de ellas imprevistas. En algunas ocasiones realizaron acciones para ayudar a sus alumnos a superar las dificultades, en otras, perdieron oportunidades valiosas para fomentar el aprendizaje de sus estudiantes (Gómez-Blancarte, 2011).

5.6. Superación de algunas dificultades

Gracias al análisis de la enseñanza, los profesores fueron dotando de un significado más amplio a la componente 'problema' del ciclo PPDAC. Durante la planificación del segundo ciclo previeron acciones dirigidas a que los estudiantes comprendieran mejor el problema y su importancia, además de que discutieran sobre cómo dar respuesta a las preguntas que de él se derivan. El siguiente episodio refleja la preocupación por parte de los profesores acerca de la enseñanza y aprendizaje del problema, en este caso, el de las mochilas:

Germán: *Bueno, […] la ocasión pasada no presentábamos el problema, o sea nada más les pedíamos a los niños que nos dieran ciertos datos y más adelante les decíamos para qué, en este caso el problema dice:* [se presenta un enunciado similar al expuesto en la sección 4 del presente artículo]

Aquí lo que queremos es primero plantear un problema con los chicos y decirles: ¡miren! esto pasa, sí, esta es una investigación que se ha hecho y bueno, que queremos ver si esto se relaciona, o sea, como compararla con la información que ellos nos den […]

Lucio: *[…] lo primero que pensamos hacer, como bien dice Germán, es indicarles en un inicio la problemática que se presenta al cargar un peso excesivo.*

En esta segunda planificación, los profesores dedicaron buen tiempo al refinamiento de las preguntas, a analizar sus interpretaciones y a prever sus posibles intervenciones. Uno de los cambios fundamentales de la lección fue diseñar las tareas de las actividades de manera que éstas demandaran un conocimiento más conceptual que procedimental. Para ello, fue necesario prever la participación de los estudiantes para que aportaran sus ideas para realizar la investigación del problema, las juzgaran y criticaran; es decir, promover el ciclo interrogativo. Por ejemplo, los profesores aceptaron dejar que fueran los estudiantes quienes propusieran el uso de gráficas para presentar y analizar los datos, en lugar de indicárselos y darles las gráficas bosquejadas. Sin embargo, Germán manifestó cierta resistencia a dejar que los estudiantes construyeran por completo los histogramas.

Germán: *[...] nosotros tenemos un conflicto, si no le damos ni siquiera los ejes no lo van a lograr, aún teniendo los ejes no lo logran.*

Lucio: *Pocos.*

Responsable: *[…] Ustedes pueden sugerir que hagan una recta numérica y discutir la construcción de intervalos, no se trata de que no les digan absolutamente nada, pero tampoco el inverso, de darle todo diferido, sino encontrar un equilibrio.*

El responsable trató de ubicar el papel que ellos podían tener para apoyar a los estudiantes en la construcción de los histogramas. Luego los profesores sugirieron que debían explicar el por qué construir un histograma; así como proporcionar un ejemplo sobre tal representación. En particular acordaron la siguiente indicación:

Presentar a los alumnos un ejemplo gráfico de lo que es un histograma. Explicar que en el uso de intervalos es conveniente representar la información por medio de este tipo de gráficos. El ejemplo puede ser las calificaciones de los estudiantes.

La estrategia de proporcionar a los estudiantes el bosquejo de la gráfica para evitar que ellos cometieran errores al graficar fue, entre otras cosas, para que la lectura de la gráfica no se viera afectada por tales errores. Sin embargo, era necesario que los profesores permitieran que los estudiantes enfrentaran la construcción completa de los histogrmas, ya que para leer la información directamente de una gráfica se deben entender las convenciones de su diseño (Friel, Curcio y Bright, 2001).

En la enseñanza del segundo ciclo la participación de los profesores fue mucho más activa que en la primera, esta vez las hojas de trabajo representaron un apoyo para su actividad docente y no un sustituto. Los profesores encontraron momentos para aportar información necesaria para la comprensión de algún concepto sin obstruir el pensamiento autónomo de los estudiantes. Por ejemplo, en lo que se refiere a la construcción de histogramas, María, Lucio, Juan y Álvaro explicaron distintas características tanto de diseño (componentes estructurales: ejes, escalas, encabezados) como de utilidad en cuanto al tipo de datos que se desea graficar (variables continuas).

En el análisis de la enseñanza, cada profesores expuso segmentos de video de su enseñanza. Los episodios que mostraron fueron analizados en términos del aprendizaje de sus estudiantes. En particular, los profesores fueron más sensibles a las respuestas y acciones de los estudiantes en el entendimiento de los resultados estadísticos en términos del problema de las mochilas. Además, ellos mismos juzgaron las oportunidades perdidas para fomentar el aprendizaje de sus estudiantes.

6. CONCLUSIONES

Para que los profesores fueran capaces de desarrollar el pensamiento estadístico de sus estudiantes, por una parte, tuvieron que ampliar su concepción de problema estadístico; entendiendo por este una pregunta o carencia de conocimiento que debe ser respondida o subsanada mediante la realización de un proyecto que pase por las etapas PPDAC. Por otra, entendieron la necesidad de contar con problemas estadísticos adecuados para llevar a clase y sensibilizar a los estudiantes respecto a la importancia del problema y de obtener su solución.

La forma en que trataron el problema estadístico en la fase de enseñanza del segundo ciclo consistió en proponer a los estudiantes una discusión para que entendieran el problema y sugirieran que para resolverlo necesitaban datos. Lo que hicieron en la enseñanza del segundo ciclo contrasta enormemente con lo que hicieron en el primero, en el que no hubo una estrategia de enseñanza para la fase del ‘el problema’ y no dieron tiempo a los estudiantes para que lo pensaran.

Análogamente, en la enseñanza del segundo ciclo, los profesores concibieron y utilizaron las hojas de trabajo como instrumentos auxiliares de su enseñanza, permitiendo la participación de los estudiantes y, sobre todo, tomando ellos parte activa, promoviendo la discusión, resolviendo dudas e improvisando formas de participación. Esta disposición de los profesores se vio reforzada por el hecho de que en las hojas de trabajo de esta segunda fase se presentaron problemas más abiertos, como el de dejar el espacio en blanco para que los estudiantes elaboraran las gráficas, en lugar de darles ejes coordenados e intervalos definidos como se hizo en el primer ciclo.

La adaptación de la metodología de ‘estudio de lecciones’ y su ejecución en dos ciclos hizo posible que los profesores aprendieran de su práctica, pues tuvieron la oportunidad de ver cómo funcionaban las previsiones que hicieron en la planificación mediante la puesta en escena de la lección y el análisis a posteriori de lo ocurrido. Esto permitió que aprendieran algunos elementos del pensamiento estadístico para la enseñanza, es decir, que adquirieran conocimientos sobre el pensamiento estadístico y, además, conocimientos de cómo desarrollarlo en el aula.

Aunque fue muy especial el contexto en el que se realizó el estudio, del cual aquí se informa sólo una parte, los conocimientos adquiridos pueden ser pertinentes para cualquier programa de actualización de profesores en-servicio o formación de futuros profesores en educación estadística. Tales conocimientos se resumen en los siguientes puntos:

- Preparar a los profesores para que aprendan nociones de estadística de manera que ellos sean capaces de aplicar ese aprendizaje en el aula. Una propuesta para lograrlo es implementar la metodología de ‘Estudio de lecciones’.
- Tener como objetivo el desarrollo del pensamiento estadístico y para lograrlo promover en el aula actividades que tengan en cuenta las cuatro dimensiones del modelo de Wild y Pfannkuch (1999).
- Poner especial énfasis en el elemento ‘problema estadístico’ como catalizador del proceso de planificación de una lección, como detonador de un ciclo PPDAC. Para ello, propiciar que los profesores amplíen su concepción de problema estadístico, así como que elaboren un catálogo de problemas que puedan generar proyectos de enseñanza de la estadística en el aula.

REFERENCIAS

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-164). Zaragoza: ICE.

Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. & Rossman, A. (Eds.). (2008). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Recuperado en julio de 2008, de: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/Proceedings.htm

Chance, B. (2002). Components of statistical thinking and implications for instrucion and assessment. *Journal of Statistics Educación, 10*(3). Recuperado en junio de 2009 de: http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html.

Figueras, O. y Rigo, M. (2005). *Maestría en Educación, Especialidad Matemáticas. Plan y programas de estudio.* Distrito Federal, México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.

Friel, S.N., Curcio, F.R. & Bright, G.W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gal, I. (2004). Statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 47-78). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Garfield, J.B., & Ben-Zvi, D. (2008a). *Developing students' statistical reasoning. Connecting research and teaching practice.* New York, NY, USA: Springer.

Garfield, J.B., & Ben-Zvi, D. (2008b). Preparing school teachers to develop studentes' statistical reasoning. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study and IASE Round Table Conference*, (En CD-ROM), Monterrey, Mexico. Recuperado en enero de 2010, de: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/Files/Topic4.htm

Gómez-Blancarte, A. L. (2011). *Un Estudio sobre el Aprendizaje de Profesores de Secundaria en Servicio: El Caso de un Proyecto de Desarrollo Profesional en Estadística.* Distrito Federal, México: Departamento de Matemática Educativa. [Tesis de doctorado no publicada].

Jones, K. y Smith, K. (1997). Student teachers learning to plan mathematics lessons. Paper presented at the *1997 Annual Conference of the Association of Mathematics Education Teachers* (*15-17).* Leicester. UK.

Lee, H.S. & Mojica, G.F. (2008). Examining how teachers' practices support statistical investigations. In C. Batanero, G. Burril, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study and IASE Round Table Conference*, (En CD-ROM), Monterrey, Mexico. Recuperado en enero de 2010, de: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/Files/Topic2.htm

Lewis, C. (2000). *Lesson Study: The core of Japanese professional development*. Invited presentation to the Special Interest Group on Research in Mathematics Education at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, L. A. Recuperado en julio de 2008, de: http://www.lessonresearch.net/aera2000.pdf

Makar, K. (2008). A model of learning to teach statistical inquiry. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study and IASE Round Table Conference,* (En CD-ROM), Monterrey, Mexico. Recuperado en enero de 2010, de: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/Files/Topic4.htm

Pfannkuch, M. & Horring, J. (2005). Developing statistical thinking in a secondary school: a collaborative curriculum development. En G. Burrill & M. Camden (Eds.), *Curricular development in statistics education: International Associations for Statistical Educations 2004 Roundtable* (pp. 204-218). Voorbug, The Netherlands: International Statistical Institiute. Recuperado en enero de 2010, de: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?sho=rt04

SEP (2006). *Programas de Estudio. Educación básica. Secundaria.* México D.F.: Secretaría de Educación Pública. En línea: http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/programa.html

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: growth and goals*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-262.

Capítulo 5

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS EN LA FORMACION DE PROFESORES

STATISTICAL GRAPHS IN TEACHER EDUCATION

Pedro Arteaga, Carmen Batanero y Gustavo Cañadas

Universidad de Granada.

Resumen. La interpretación y construcción de gráficos estadísticos forma parte de la cultura que un ciudadano culto ha de tener para enfrentarse críticamente a la sociedad de la información. Sin embargo, la investigación didáctica nos alerta sobre el hecho de que esta capacidad no es alcanzada, ni por los alumnos, ni por los futuros profesores de Educación Primaria. En este trabajo sintetizamos la investigación existente sobre este tema con estudiantes y futuros profesores con la finalidad de proporcionar información de utilidad en la formación matemática y didáctica de los profesores.

Palabras clave: Gráficos estadísticos, comprensión gráfica, formación de profesores.

Abstract. Reading and building statistical graphs is part of statistics literacy that well informed citizens need to critically face the information society. However, didactic research suggests that this competence is neither reached by the primary school students nor for future primary school teachers. In this paper we summarize research on this topic carried out with students and pre-service teachers with the aim of provide information that can be used in the mathematical and didactical education of teachers.

Keywords. Statistical graphs, graphical understanding, teachers´ training.

1. INTRODUCCIÓN

Una novedad en las nuevas directrices curriculares (MEC, 2006; Consejería de Educación, 2007) es que introducen el trabajo con gráficos estadísticos en todos los ciclos de la educación primaria. Además la construcción e interpretación de gráficos estadísticos forma parte importante de la cultura estadística que cualquier ciudadano debiera tener (Watson, 2006). A pesar de esta importancia, la investigación didáctica nos alerta que la competencia relacionada con el lenguaje de las gráficas estadísticas no se alcanza en los alumnos (Cazorla, 2002) ni tampoco en la preparación de los futuros profesores de educación primaria (Espinel, 2007).

El objetivo de este trabajo es sintetizar los resultados de la investigación sobre el tema, para hacerlos accesibles a los profesores de educación primaria, quienes son los encargados de iniciar a los niños en el trabajo con gráficos estadísticos y quienes podrían compartir algunas de las dificultades descritas en este trabajo. Asimismo se desea motivar a los formadores de profesores, ya que pueden contribuir a mejorar la competencia gráfica de los profesores.

2. ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE LOS GRÁFICOS Y SU CARÁCTER SEMIÓTICO

Un primer paso para comprender la información expresada en los gráficos estadísticos, es conocer sus elementos estructurales, que según Kosslyn, (1985) son los siguientes:

- *Plano de fondo*, que sirve de soporte al gráfico y que en la mayoría de los gráficos es blanco, pero que podría variar dependiendo del gráfico y tratarse de una fotografía o dibujo.
- *Estructura del gráfico,* que nos da información sobre las entidades que están siendo representadas y que se relacionan entre sí. En muchos de los gráficos dicha estructura está constituida por los ejes cartesianos, pero no siempre; por ejemplo en los gráficos de sectores.
- *Contenido pictórico*, que consiste en la forma en la que los datos son representados y transmitidos a través del gráfico, como líneas en el gráfico de líneas, barras para los histogramas y gráficos de barras, círculos y sectores circulares en los gráficos de sectores.
- *Rótulos*, que proporcionan información necesaria a la hora de interpretarlos. Están formados por letras, palabras, frases y números, dentro de título y ejes del gráfico.

Por su parte Curcio (1987) considera los siguientes elementos en un gráfico:

- Las *palabras* que aparecen en el gráfico, como el título del gráfico, las etiquetas de los ejes y de las escalas, y que proporcionan las claves necesarias para comprender el contexto, las variables y las relaciones expresadas en el gráfico.
- El *contenido matemático* subyacente. Por ejemplo, los conjuntos numéricos empleados y otros conceptos matemáticos implícitos en el gráfico, que el estudiante ha de dominar para interpretarlo, como los de área en un gráfico de sectores, longitud en un gráfico de líneas o sistema de coordenadas cartesianas en un diagrama de dispersión.
- Los *convenios específicos* que se usan en cada tipo de gráfico y que se deben conocer para poder realizar una lectura o construcción correcta. Por ejemplo, el alumno ha de conocer que en un diagrama de sectores, la amplitud del sector es proporcional a la frecuencia.

Bertin (1967) asume la premisa de que un gráfico es un objeto semiótico complejo; tanto el gráfico en su conjunto, como los elementos que lo componen, están constituidos por conjuntos de signos que requieren una actividad semiótica por aquellos que los interpretan. El autor indica que, para leer un gráfico, el lector tiene que realizar tres operaciones sucesivas:

• *Identificación externa*, encontrando los referentes conceptuales y del mundo real relativos a la información contenida en el gráfico a través del análisis de los rótulos alfanuméricos del mismo.

• *Identificación interna*, identificando las dimensiones relevantes de variación en el contenido pictórico del gráfico y determinando correspondencias entre las dimensiones visuales y las conceptuales o escalas.

• *Percepción de la correspondencia*, donde se usan los niveles particulares de cada dimensión visual para obtener conclusiones sobre los niveles particulares de cada dimensión conceptual.

En cada uno de dichos pasos se pueden identificar una o varias funciones semióticas, en el sentido de Eco (1977), quien las define como correspondencia establecida por un sujeto entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido). Cada elemento de información que se obtiene de un gráfico implica establecer una correspondencia entre elementos, subconjuntos o conjuntos de dicho gráfico y para cada gráfico se puede hacer un número finito de preguntas para obtener información. Bertin argumenta que en general, siempre son posibles dos tipos de preguntas al leer un gráfico que presenta una función Y=f(X): (a) dada una entrada X encontrar el valor de Y, lo que corresponde a una lectura directa ó (b) para un determinado valor de Y encontrar la entrada o entradas correspondientes X, lo que corresponde a una lectura inversa.

Bertin definió la *imagen* como una forma visual significativa-perceptiva dentro de un instante mínimo de visión. Una imagen se forma a través de la percepción de las correspondencias originadas por una pregunta: (a) primero se define una entrada en X, (b) luego se observa la correspondencia: por ejemplo un punto, (c) y por último una identificación de salida, es decir la respuesta (el valor Y). El autor denominó *selección visual* al proceso de centrarse en una información aislándola de las demás contenidas en el gráfico en un instante mínimo de visión. Hay gráficos que permiten con un solo golpe de vista resaltar todas las correspondencias en una única forma visual. Así Bertin considera que un gráfico es más eficaz cuando cualquier tipo de pregunta, del nivel que sea, puede ser respondida a través de una sola imagen.

Por su parte Cleveland y McGill (1984) estudiaron la percepción gráfica e identificaron una serie de tareas que una persona debía poner en juego al leer un gráfico, para obtener la información cuantitativa presente en éste. Para estos autores, al construir un gráfico, la información es codificada (por ejemplo por medio de la posición o del tamaño) y cuando una persona lee un gráfico debe obtener la información por medio del proceso denominado percepción gráfica que consiste en la "*descodificación visual de la información codificada en un gráfico*" (p. 531).

El objetivo de los autores fue identificar ciertas tareas elementales de percepción gráfica que son ejecutadas durante el proceso de descodificación visual de la información contenida en un gráfico. Los autores eligieron la expresión *tareas elementales de percepción gráfica*, porque una persona realiza una o más de dichas tareas visuales para extraer mentalmente el significado de lo representado en la mayoría de los gráficos. Otro de los objetivos de estos autores fue el de ordenar las anteriores tareas según el grado de precisión que permiten en las conclusiones obtenidas en la lectura de los gráficos. A partir de resultados experimentales, los autores ordenaron las tareas elementales, de mayor a menor precisión, como sigue: (a) Determinar la posición de un punto o elemento a lo largo de una escala común; (b)

Determinar la posición cuando se emplean dos escalas no alineadas, por ejemplo, en el diagrama de dispersión; (c) Determinar longitud, dirección y ángulo; (d) Estimar un área y (e) Estimar un volumen o una curvatura.

3. COMPRENSIÓN GRÁFICA

Otro tema de investigación abordado por varios autores es analizar las definiciones y componentes en la comprensión gráfica.

Kosslyn (1985) construye una teoría de procesos cognitivos basada en modelos de redes computacionales, apoyado en datos que confirman su interpretación de los procesos y estrategias que intervienen en la generación, interpretación y transformación de las imágenes. El autor, definió tres niveles de análisis de la comprensión gráfica:

- *Nivel sintáctico*: En este nivel se consideran las propiedades de los elementos gráficos, como por ejemplo decidir si existen distorsiones visuales, o si los elementos están ordenados o agrupados adecuadamente en relación con las capacidades perceptivas de las personas.
- *Nivel semántico*, en el cual el objetivo es realizar interpretaciones cuantitativas y cualitativas y la valoración del significado del gráfico.
- *Nivel pragmático*, nivel en el que se busca reconocer la intención del gráfico y examinar la finalidad de la información que se transmite.

Friel, Curcio y Bright (2001) definen la comprensión gráfica como "*las habilidades de los lectores de gráficos para entender el significado de gráficos creados por otros o por ellos mismos*" (p. 132). Para estos autores, la comprensión gráfica incluye los siguientes tipos de competencias:

- *Reconocer los elementos estructurales del gráfico* (ejes, escalas, etiquetas, elementos específicos) *y sus relaciones*. Esta competencia se adquiere cuando es posible distinguir cada uno de estos elementos y si cada elemento es o no apropiado en el gráfico particular.
- *Apreciar el impacto de cada uno de estos componentes* sobre la presentación de la información en un gráfico (por ejemplo, ser capaz de predecir como cambiaría el gráfico al variar la escala de un eje).
- *Traducir las relaciones reflejadas en el gráfico a los datos* que se representan en el mismo y viceversa. Por ejemplo, cuando un diagrama de dispersión es creciente, comprender que la relación representada entre las dos variables es directa.
- *Reconocer cuando un gráfico es más útil que otro*, en función del juicio requerido y de los datos representados, es decir, saber elegir el gráfico adecuado al tipo de variable y al tipo de problema.

Wu (2004), se interesa por la comprensión gráfica de alumnos de secundaria, y para ello define un marco conceptual con cuatro componentes sobre la comprensión de los gráficos estadísticos: lectura gráfica, construcción gráfica, interpretación gráfica y evaluación de gráficos estadísticos. El autor justifica la inclusión de la última componente debido al incremento del uso de los gráficos en los medios de comunicación y a la necesidad de ser críticos ante la información que muestran.

Niveles de lectura

Además de las competencias anteriores, se definen niveles de comprensión en la lectura de datos, mostrando las investigaciones que no todos los alumnos alcanzan el nivel más alto durante la educación secundaria. Bertin (1967) define los siguientes:

- *Extracción de datos,* que consiste en una lectura directa de un dato que está en el gráfico. Por ejemplo, en un diagrama de barras leer la frecuencia asociada a un valor de la variable.
- *Extracción de tendencias*, cuando se es capaz de percibir en el gráfico una relación entre dos subconjuntos de datos que pueden ser definidos a priori o visualmente. Por ejemplo, al determinar visualmente la moda de una distribución en un diagrama de barras, se clasifica los datos en subconjuntos (que tienen un mismo valor para la variable) y se comparan entre sí estos subconjuntos para ver cuál tiene mayor frecuencia.
- *Análisis de la estructura de los datos,* comparando tendencias o agrupamientos y efectuando predicciones. Por ejemplo, cuando se representa en un diagrama de barras adosadas dos distribuciones y se analizan las diferencias en promedios y dispersión de las mismas.

Otra clasificación muy similar a la anterior, se debe a Curcio (1989), que denominó a los tres niveles definidos por Bertin como: *leer entre los datos* (lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo), *leer dentro de los datos* (interpretación e integración de los datos en el gráfico) y *leer más allá de los datos* (realizar predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico). Friel, Curcio y Bright (2001) amplían la clasificación anterior definiendo un nuevo nivel *leer detrás de los datos*, consistente en valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones.

Un modelo algo más complejo es debido a Gerber, Boulton-Lewis y Bruce (1995), quienes diferencian siete niveles de comprensión de gráficos, en función de las competencias de los estudiantes para interpretarlos:

- *Nivel 1*. Los estudiantes no se centran en los datos, sino que asocian algunas características de los mismos con su conocimiento del mundo, en forma imprecisa. Por ejemplo, si les hacemos una pregunta sobre edades de niños representados en un gráfico, pueden responder dando su edad.
- *Niveles 2 y 3*. Los estudiantes se centran en los datos representados, pero de forma incompleta. En el nivel 2 no llegan a apreciar el propósito del gráfico e interpretan sólo aspectos parciales de los datos, por ejemplo, sólo leen una de las barras del diagrama de barras. En el nivel 3 los estudiantes aprecian el propósito del gráfico y analizan todos los elementos uno a uno, pero no llegan a una síntesis global, al no comprender algún elemento específico que es clave en la representación. Un caso sería el estudiante que en una pirámide de población interpreta los grupos de edad (que se refieren a un conjunto de personas) como edades de sujetos individuales.
- *Niveles 4, 5 y 6*. Una vez que el estudiante llega a una síntesis global, puede todavía tener una interpretación estática de los gráficos, y podemos diferenciar tres niveles diferentes. En el nivel 4 los estudiantes son capaces de analizar una a una las variables representadas en el mismo gráfico, pero no conjuntamente, por ejemplo, si representamos la esperanza de vida de hombre y mujeres en diversos países en un gráfico, los alumnos interpretan por un lado la esperanza de vida de los hombres y por otro los de las mujeres. En el nivel 5 se comparan varias variables representadas en el

mismo gráfico; en el ejemplo anterior podrían deducir que la esperanza de vida en las mujeres es superior a la de los hombres en la mayoría de países. En el nivel 6 los estudiantes usan los gráficos para apoyar o refutar sus teorías. No sólo comparan varias variables en el mismo gráfico, sino sacan conclusiones generales respecto a una hipótesis, por ejemplo, podrían usar el gráfico anterior para refutar la idea de que la mujer es más débil que el hombre.

- *Nivel 7*. En el último nivel los estudiantes son capaces de hacer extrapolaciones, y hacer predicciones para otros datos no representados en el gráfico; en el ejemplo anterior, podrían deducir la esperanza de vida del hombre, conocida la esperanza de vida de la mujer, para un país no representado en el gráfico.

Comprensión crítica

Cuando en los niveles de lectura, se presta atención no sólo a la interpretación de los gráficos, sino también a su valoración crítica, los niveles superiores se modifican ligeramente (Aoyama y Stephen, 2003, Aoyama, 2007). Supongamos, por ejemplo, que se da a los estudiantes un gráfico que presenta datos sobre el número de horas que los adolescentes dedican a los juegos con videoconsola y el número de episodios de violencia escolar en que se ven implicados. La gráfica muestra claramente un crecimiento del número de episodios de violencia cuando aumenta el tiempo dedicado a este tipo de juegos. Se pregunta a los estudiantes si piensan que la violencia escolar disminuiría si se prohibiesen las videoconsolas. Una vez que los estudiantes llegan a las fases superiores en los niveles de lectura descritos en el apartado anterior, todavía podríamos diferenciar tres grupos, en función de su capacidad crítica, respecto a la información reflejada en el gráfico:

- *Nivel Racional/Literal*. Los estudiantes leen correctamente el gráfico, incluyendo la interpolación, detección de tendencias y predicción. Para responder a la pregunta planteada, usan las características del gráfico, pero no cuestionan la información, ni dan explicaciones alternativas: "*Sí, ya que el grupo de chicos que jugó juegos durante mucho tiempo también tuvo muchos episodios de violencia*".

- *Nivel Crítico*. Los estudiantes leen los gráficos, comprenden el contexto y evalúan la fiabilidad de la información, cuestionándola a veces, pero no son capaces de buscar otras hipótesis: "*Pienso que no, pues aunque los que más juegan aparecen como más violentos en el gráfico, podría haber otras causas, aunque no me imagino cuáles*".

- *Nivel Hipotético*. Los estudiantes leen los gráficos, los interpretan y evalúan la información. Son capaces de formar sus propias hipótesis y modelos: "*No estoy de acuerdo en que la causa de la violencia sea el juego; quizás la falta de atención de los padres puede llevar a la vez a que el chico sea violento y que dedique más horas a jugar con la consola*".

Aoyama y Stephen indican que muchos estudiantes, incluso cuando alcanzan el tercer nivel de lectura en la clasificación de Friel, Curcio y Bright (2001), no alcanzan el nivel hipotético en la lectura de los mismos.

4. ERRORES EN LA LECTURA Y CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS

Algunas investigaciones analizan los errores frecuentes en la lectura o producción de los gráficos. El primer paso a la hora de construir un gráfico, sería elegir uno que fuese adecuado, tanto al tipo de variable, como al problema planteado, pero los estudiantes fallan con frecuencia en esta elección. Li y Shen, (1992) analizaron los gráficos realizados en los proyectos estadísticos de sus estudiantes, encontrado alumnos que utilizan polígonos de frecuencias con variables cualitativas, o diagrama de barras horizontal para representar datos que debieran representarse en un diagrama de dispersión. Otras veces, construyen gráficos sin sentido, por ejemplo se representan variables no relacionadas entre sí en un mismo gráfico.

Respecto a las escalas de los gráficos construidos por los estudiantes Li y Shen (1992) encontraron los siguientes problemas: (a) Elegir una escala inadecuada para el objetivo pretendido (por ejemplo no se cubre todo el campo de variación de la variable representada); (b) Omitir las escalas en alguno de los ejes (horizontal o vertical) o en ambos; (c) No especificar el origen de coordenadas; y (d) No proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes.

Encontramos también investigaciones sobre los errores en la lectura y comprensión de gráficos específicos. En el diagrama de barras, al variar la disposición de los datos (por ejemplo al usar un diagrama de barras horizontal en lugar de vertical) los estudiantes pueden tener errores simples de lectura (Pereira-Mendoza y Mellor, 1990). Lee y Meletiou (2003) nos alertan de cuatro principales categorías de razonamientos erróneos al construir, interpretar y aplicar los histogramas en diferentes contextos de la vida real:

- Percepción de los histogramas como representación de datos aislados, suponiendo que cada rectángulo se refiere a una observación particular y no a un intervalo de valores.
- Tendencia a observar el eje vertical y comparar las diferencias en las alturas de las barras cuando comparan la variación de dos histogramas.
- Interpretación determinista, sin apreciar que los datos representan un fenómeno aleatorio que podría variar al tomar diferentes muestras de la misma población.
- Tendencia a interpretar los histogramas como gráficos de dos variables (es decir, como diagramas de dispersión).

Wu (2004) trató de clasificar los distintos errores que estudiantes de secundaria en Singapur cometían al trabajar con distintos tipos de gráficos estadísticos. Sus resultados muestran que los estudiantes poseían en general habilidades relacionadas con la comprensión gráfica, pero que tuvieron más dificultad en cuestiones relacionadas con la interpretación y evaluación de distintos gráficos, debido a que este tipo de tareas requería de realización de inferencias a informaciones no mostradas directamente en el gráfico. El autor encontró las siguientes categorías de error: (1) errores de comprensión, (2) explicaciones incorrectas, (3) errores de cálculo, (4) errores en las escalas, (5) errores en títulos, etiquetas o especificadores, (6) errores en gráficos de sectores, (7) problemas con el tamaño de los elementos en un pictograma, (8) confusión entre gráficos parecidos pero de naturaleza distinta (por ejemplo, entre histograma y gráfico de barras), (9) confusión entre frecuencia y valor de la variable, (10) errores al manejar información proveniente de los gráficos, (11) problemas en el uso del contexto. Los más comunes fueron los referentes a las escalas y especificadores del gráfico, siendo también frecuentes los errores de comprensión de la información representada.

5. COMPRENSIÓN GRÁFICA DE LOS FUTUROS PROFESORES

Las dificultades con los gráficos estadísticos no son exclusivas de los estudiantes, sino que también se presentan en los futuros profesores de educación primaria. A continuación se examinan las investigaciones relacionadas con los conocimientos matemáticos y didácticos de estos profesores en formación en relación a los gráficos estadísticos.

Construcción de gráficos

Bruno y Espinel (2005) estudian la forma en que futuros profesores construyen un histograma de frecuencias a partir de una lista de datos en una investigación con dos fases. En la primera, estudian la hipótesis de que la habilidad para representar números en la recta numérica condiciona la comprensión y la realización de gráficos estadísticos, a través de las respuestas de 39 futuros profesores a una prueba escrita, donde se pidió construir una tabla de frecuencias absolutas y relativas y un histograma a partir de una serie de datos. Sólo 11 alumnos representan las frecuencias relativas, aunque no tuvieron dificultades en representar números decimales en el eje vertical. Aunque fueron capaces de agrupar los datos en intervalos, tuvieron dificultades en representarlos; por ejemplo colocan todo el intervalo en un punto (diferente de la marca de clase), omitir los intervalos de frecuencia nula o representan los intervalos mediante barras no solapadas, aún siendo conscientes de que están trabajando con variables continuas, y mostrando dominio de la recta numérica. Su investigación resalta errores de carácter técnico, pero también otros de carácter conceptual, como el no diferenciar lo discreto de lo continuo.

En la segunda parte de la investigación, Bruno y Espinel tratan de comparar los errores de los futuros profesores en la construcción del histograma y el polígono de frecuencias, con su evaluación de histogramas producidos por posibles estudiantes. Para ello pide a los mismos participantes de la primera parte del estudio evaluar cinco gráficas realizadas por estudiantes (también futuros profesores de primaria) de las cuales sólo una era correcta. Esta pregunta tenía como objetivo observar si los errores de construcción de los histogramas son persistentes en la lectura reflexiva de los mismos por parte de los futuros profesores. Prácticamente todos los estudiantes cometen algún error al evaluar si los gráficos son o no correctos, pero lo más preocupante es la falta de coherencia entre la forma que los futuros profesores construyen un gráfico y la forma en que lo evalúan. Además, en caso de coherencia se trata de alumnos que cometen errores en la construcción de los gráficos, y también consideran correctos los gráficos incorrectos de sus posibles estudiantes.

Batanero, Arteaga y Ruiz (2010) evalúan la competencia gráfica de 93 futuros profesores de educación primaria al trabajar con un proyecto abierto de análisis de datos. Para ello definen unos niveles de complejidad en la construcción de los gráficos realizados por los futuros profesores al comparar pares de distribuciones en la forma siguiente: En el nivel 1 el futuro profesor realiza una gráfica representando únicamente un valor de la variable (sus propios datos), sin tener en cuenta el conjunto de datos de la clase; en el nivel 2 se representan todos los datos, en el orden en que fueron recogidos, sin llegar a agrupar valores iguales de la variable, es decir sin formar la distribución; en el nivel 3, el futuro profesor forma la distribución de frecuencias para cada par de variables a comparar, representado las mismas en distintos gráficos; finalmente en el nivel 4, el estudiante no sólo forma las dos distribuciones, sino que realiza gráficas multivariantes, representando en un mismo gráfico pares de distribuciones a comparar. Los autores indican que dos tercios de los participantes en su estudio realizan gráficos de complejidad suficiente para resolver el proyecto que se les planteó. Es decir, construyen gráficos de niveles 3 y 4, donde llegan a formar la distribución de frecuencias de las distintas variables que tuvieron que analizar.

Posteriormente Arteaga y Batanero (2010) analizan los errores de los gráficos producidos por 207 futuros profesores en el mismo proyecto utilizado en la anterior investigación. Aproximadamente el 50% de los futuros profesores realizaron gráficos correctos o con pequeños errores como el realizar líneas innecesarias que dificultan la lectura del gráfico. En el resto de los gráficos los autores encuentran muchos errores ya descritos en investigaciones previas, como errores al representar intervalos de frecuencias en la recta real (Bruno y Espinel, 2005); intercambiar frecuencia por valor de la variable (Ruiz, 2006); errores en las escalas (Li y Shen, 1992) y errores debidos al uso acrítico del software (Ben-Zvi y Friedlander, 1997). Aproximadamente el 19,34% de los errores están relacionados con las escalas y rótulos y etiquetas de las mismas y son, por tanto, de menor importancia, pero un 30% aproximadamente de los gráficos tienen errores importantes, como usar un gráfico inadecuado al tipo de variable o comparar variables no relacionadas en el mismo gráfico.

Lectura y traducción de gráficos

Espinel (2007) y Espinel, Bruno y Plasencia (2008) continúan su investigación utilizando un cuestionario sobre cultura y razonamiento estadístico en relación a los gráficos y comparan los resultados obtenidos por 137 futuros profesores de educación primaria españoles con los obtenidos en una investigación con 345 estudiantes norteamericanos.

La pregunta de mayor dificultad en el cuestionario fue la referente al razonamiento estadístico, que pedía en emparejar un gráfico con una descripción verbal. En otra pregunta donde se pedía emparejar un histograma dado con un gráfico de cajas (de tres que les fueron presentados a los alumnos) el resultado fue bueno en estudiantes americanos y españoles. Por último la pregunta en que se pedía los alumnos eligiesen de entre los gráficos que se les presentaba el que mejor caracterizase la forma de la distribución de los datos que se les mostraba en forma de tabla, fue muy difícil. Los autores concluyen que, a pesar de la confusión entre histograma y diagrama de barras, esto parece no impedir la traducción de los datos representados en un histograma a otro gráfico construido con los mismos datos, aunque a los estudiantes españoles les resulta difícil reflexionar sobre la forma de las distribuciones a partir de una descripción verbal.

Carrión y Espinel (2005a y b; 2006) desarrollaron una investigación cuyo objetivo era identificar y analizar qué dificultades y limitaciones tienen los estudiantes con histogramas, gráficos de dispersión, de cajas y de tallos y hojas en el análisis de datos. Otro propósito de su trabajo es indagar la habilidad y capacidad para traducir entre distintas formas de presentar información, esto es, pasar de un gráfico a otro. El cuestionario se pasó a alumnos de educación primaria y futuros profesores de educación primaria pertenecientes a dos grupos diferenciados, el primer grupo (A) realizó el cuestionario con antelación a la instrucción en Estadística, y un segundo grupo (B) después del proceso de instrucción en Estadística.

La tarea más difícil fue pasar de información en forma de texto a un gráfico (gráfico de barras, hojas y tallos y gráfico de cajas); en esta tarea el mayor porcentaje de éxito se da en el gráfico de barras y el menor porcentaje en el gráfico de cajas, que tiene mayor complejidad. Al comparar los dos grupos, se nota una mejoría en las respuestas relacionadas con los gráficos de cajas y tallo-hoja en el grupo B, es decir después de la instrucción. Por otra parte, se compararon los resultados con los de alumnos de Educación Primaria, observándose similitudes entre los errores cometidos de ambos tipos de estudiantes.

En Arteaga y Batanero (2011) se analiza la capacidad de 207 futuros profesores de educación primaria a la hora de interpretar gráficos construidos por ellos mismos y extraer información de utilidad de estos para dar solución al proyecto estadístico que se les planteó en las investigaciones citadas anteriormente. Los resultados muestran que aproximadamente un 30% de los futuros profesores no utilizan los gráficos como instrumento de análisis de datos, no leyendo ni interpretando los gráficos que construyen. Destacamos también que un 11,6% realiza una lectura incorrecta que no les proporciona información de utilidad. Sólo un 13,3% de los futuros profesores fueron capaces de extraer información de los mismos dentro del nivel superior en la clasificación de lectura de gráficos definido por Curcio (1989), *leer más allá de los datos*, donde son capaces de comparar a la vez medidas de posición central y dispersión.

Arteaga y Batanero también relacionan los niveles de construcción de gráficos estadísticos definidos en investigaciones previas (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010) con los niveles de lectura de los gráficos en la clasificación de Curcio (1989). Concluyen que estos niveles están relacionados y a mayor complejidad semiótica del gráfico, mayor competencia en su lectura. En particular, los alumnos que llegan a construir un gráfico de nivel superior de complejidad semiótica (nivel 4) son los que tienen mayor porcentaje de niveles superiores en la clasificación de Curcio; por ejemplo, el nivel *leer más allá de los datos*, crece hasta el 30%. Estos resultados también muestran que la interpretación de gráficos es una actividad compleja para futuros profesores de educación primaria y que no es suficiente con saber los convenios de construcción de los distintos gráficos para realizar una lectura e interpretación de los mismos.

Lectura de gráficos no escolares

Monteiro y Ainley (2006, 2007) sugieren que, para interpretar un gráfico estadístico, es necesario "sentido crítico" para referirse al modo en el cual un lector de gráficos estadísticos necesita poner en juego una variedad de distintos conocimientos y experiencias. En el contexto escolar, la interpretación gráfica se ha centrado sobre todo en conocimientos y procesos estadísticos, prestando poca atención al contexto social del que han sido tomados los datos presentes en el gráfico. Por ello los autores proponen el trabajo con gráficos extraídos de los medios de comunicación como estrategia pedagógica para acortar distancias entre el uso de los gráficos en contextos escolares y contextos fuera de la escuela.

Para obtener los datos de su investigación, se elaboró un cuestionario con gráficos tomados de la prensa, que se eligieron teniendo en cuenta que el nivel de complejidad del gráfico fuese accesible para los alumnos, que el tema del gráfico fuese familiar y además que los gráficos seleccionados no tuviesen errores o información engañosa. Al estudiar la competencia de futuros profesores en la lectura de gráficos tomados de la prensa diaria, los autores encontraron que muchos no tenían conocimientos matemáticos suficientes para llevar a cabo dicha lectura. La mayoría no tuvo formación específica en la lectura de gráficos estadísticos durante sus estudios en la universidad y reconoció la necesidad que tenían de formación al respecto. También se observó como la interpretación de los gráficos moviliza conocimientos y sentimientos que inciden en su comprensión; por ejemplo, se obtuvo mucho mejores resultados al interpretar un gráfico sobre incidencia de cáncer en las mujeres que otro matemáticamente equivalente sobre tiempo de gestación de diferentes especies animales.

Además se observó que la mayoría de los estudiantes mostraron habilidades para pensar críticamente sobre los datos representados en los gráficos y que ponían en juego distintos tipos de conocimientos para realizar la interpretación de los gráficos. Los autores ven esto positivo, porque argumentan que una lectura completa de un gráfico necesita conectar las relaciones cuantitativas expresadas en el gráfico con los conocimientos estadísticos y del contexto social de los datos que aparecen representados en el gráfico. Finalizan indicando que la enseñanza de gráficos estadísticos debería tener en cuenta la variedad de elementos y habilidades necesarias en la interpretación de los gráficos.

6. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

González y Pinto (2008) indican que el profesor necesita conocimiento del contenido, conocimiento didáctico y conocimiento didáctico del contenido. En un estudio cualitativo estos autores analizan la forma en que algunos futuros profesores seleccionan y clasifican gráficos para preparar una unidad didáctica dirigida a la enseñanza del tema en educación secundaria. Los estudiantes de su muestra parecen desconocer todo lo relacionado con las dificultades de los futuros alumnos o los niveles de comprensión de gráficos. Además, a la hora de clasificarlos o seleccionarlos sólo tienen en cuenta los aspectos procedimentales y no la utilidad del gráfico para un problema particular o las posibles actividades interpretativas que pueden llevarse a cabo con ellos.

González y Pinto estudian también dos dimensiones del conocimiento didáctico del contenido (CDC): conocimiento del contenido a enseñar y conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales. Se realizó un estudio cualitativo de cuatro casos (futuros profesores de secundaria) usando la metodología usual en las investigaciones sobre pensamiento del profesor (entrevistas, estudios documentales, observación) y los niveles de lectura de gráfico (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001). Se pidió a los profesores clasificar problemas de representación gráfica tomados de libros de textos de Educación Secundaria sobre varios tipos de gráficos (histogramas, sectores, barras, tallo y hoja). También se preguntó cómo interpretaban cada problema y como enseñarían la representación gráfica a partir de ellos, además de cómo ayudarían a sus estudiantes con sus posibles dificultades.

Entre los resultados se observó que la enseñanza es percibida por estos futuros profesores como transmisión de contenidos, manejo de recursos y comunicación, de forma que el aprendizaje, aunque requiera esfuerzo personal, también está ligado a una buena transmisión por parte del profesor. La investigación de González y Pinto (2008) muestra que algunos estudiantes para profesor tienen escasos conocimientos didácticos en relación a los gráficos estadísticos. Por ejemplo, no son capaces de distinguir los diferentes niveles cognitivos asociados a la lectura de gráficos definidos en investigaciones como la de Friel, Curcio y Bright (2001), ni comprenden los diferentes componentes y procesos ligados a esta interpretación.

Los participantes en el estudio desconocían asimismo varios componentes y procesos en la interpretación de gráficos. Para enseñar los gráficos estadísticos, de acuerdo a su concepción, habría que seguir diferentes fases relacionadas con: la construcción de gráficos y la interpretación de gráficos (que para ellos era simplemente una lectura y la aplicación de algoritmos y fórmulas). Cuando se les pidió clasificar los gráficos de los libros de texto, se centraron sólo en los aspectos procedimentales, mostrando falta de conocimiento sobre el aprendizaje de los gráficos o las dificultades de los estudiantes.

En Pinto y González (2008) se presenta un estudio del CDC de una profesora universitaria de Estadística sobre el tema de la representación gráfica, con diferentes métodos de recogida de datos: (a) entrevista contextual y sobre la planeación de las clases, (b) cuestionario didáctico sobre representación gráfica, (c) entrevista en profundidad respecto de las respuestas al cuestionario, (d) análisis de materiales para la enseñanza. La profesora estudiada mostró una concepción dogmático-conservadora de la matemática que incidía en su manera de enseñar estadística, basada en el enfoque de transmisión de conocimientos, muy rígido y bajo una estructura jerárquica de los contenidos. En cuanto a las representaciones gráficas, se centraba en su construcción y la realización de cálculos estadísticos, y no trataba la interpretación y análisis de los gráficos. Los contenidos no los trabajaba en clase a nivel de razonamiento, sino sólo a un nivel muy básico, y tenía pocos conocimientos sobre las posibles dificultades y errores de sus estudiantes en el tema.

Este estudio es ampliado por Pinto (2010) en su tesis doctoral, donde realiza un estudio comparado de dos casos (dos profesores universitarios; un matemático y un psicólogo que enseñan estadística en educación y psicología, respectivamente). Tras una amplia revisión de la literatura sobre CDC y sobre la investigación en gráficos estadísticos, determina un Sistema de Dimensiones e Indicadores (SDI) del CDC que le permiten analizar tres componentes del CDC: el conocimiento del contenido de la disciplina a enseñar, el conocimiento de estrategias y representaciones instruccionales y el conocimiento del estudiante. Utiliza los mismos instrumentos que hemos descrito para el trabajo anteriormente citado.

Los resultados de este estudio revelan que el CDC de cada profesor está influenciado por su concepción hacia la matemática y la estadística, la formación que recibió como estudiante y su experiencia profesional. Por ejemplo, uno de los profesores, que suele colaborar en el análisis estadístico de datos en psicología, suele usar la enseñanza a través de proyectos e investigaciones y está mucho más interesado en un enfoque constructivista de la enseñanza que su compañero. Se encontró que se utiliza un repertorio reducido de estrategias para la enseñanza de la representación gráfica y que exclusivamente se estudia el nivel de lectura literal de gráficos, es decir no se alcanzan los niveles superiores en la categorización de Curcio (1989). El autor sugiere que es posible que esto sea forzado por los programas de la asignatura que sólo consideran los gráficos como instrumento de presentación de datos y no de análisis.

Otro resultado es que los profesores sostienen una concepción diferente sobre la estadística que sobre la representación gráfica, su aprendizaje y enseñanza. Asimismo, presentan algunas dificultades relacionadas con la adquisición del CDC, por ejemplo, para relacionar el conocimiento del contenido a enseñar con las representaciones instruccionales y el conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante; utilizar una variedad de recursos y materiales para la enseñanza de la representación gráfica; y conocer el contenido y estudio de la representación gráfica, más allá de la construcción de gráficos.

7. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES

La investigación reseñada muestra que la lectura e interpretación del lenguaje gráfico es una habilidad altamente compleja, que no se adquiere espontáneamente. A pesar de la importancia de los gráficos estadísticos, la investigación en didáctica de la matemática nos alerta que la competencia relacionada con el lenguaje de las gráficas estadísticas no se alcanza en la educación obligatoria (Cazorla, 2002) ni tampoco en la preparación de los futuros profesores de Educación Primaria (Espinel, 2007). Para explicar estas dificultades se ha argumentado la influencia de factores como: carencias en el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Berg y Smith, 1994) y / o en sus habilidades para construir e interpretar gráficas y el uso pasivo de estas gráficas en las aulas, que excluye su construcción e interpretación por parte de los estudiantes (Ainley, Nardi y Pratt, 2000).

Otra conclusión que podemos extraer del análisis de estas investigaciones es que la preparación de los profesores para enseñar los gráficos estadísticos es un tema importante y olvidado en la investigación y para los formadores de profesores. La evaluación del conocimiento del profesor sigue siendo un tema relevante, debido a la escasez de investigaciones y las demandas de que los estudiantes sean enseñados por profesores bien cualificados, la necesidad de evidenciar los resultados de los programas de formación de profesores y el debate establecido acerca de cuál es el contenido matemático para la enseñanza que debe poseer el profesor y la necesidad de definirlo (Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007). Esto es especialmente importante en el campo de la estadística, debido a la escasez de investigación previa. Nuestra investigación trata de contribuir a proporcionar más información al respecto con el fin de poder mejorar en el futuro la preparación de los profesores.

Agradecimientos: Este trabajo forma parte de las becas FPU AP2007-03222 (MEC-FEDER) y AP2009-2807; proyecto EDU2010-14947 (MCINN- FEDER) y grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Ainley, J., Nardi H. y Pratt, D. (2000).The construction of meaning for trend in active graphing. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, 85–114.

Arteaga, P. y Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). *XII Simposio de las Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 211-221). Lleida: SEIEM.

Arteaga, P. y Batanero, C. (2011). Relating graph semiotic complexity to graph comprehension in statistical graphs produced by prospective teachers. Trabajo aceptado para presentación en el *Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Rzeszów, Polonia, 2011.

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education 2*(3). Online: www.iejme/.

Aoyama, K. y Stephens, M. (2003). Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective, *Mathematics Education Research Journal 15*(3), 3-22.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Ben-Zvi, D., y Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (pp. 54-64). Voorburgo: International Statistical Institute.

Berg, C. A. y Smith P. (1994). Assesing students´ abilities to construct and interpret line graphs: disparities between multiple - choice and free – response instruments. *Science Education, 78* (6), 527 - 554.

Bertin (1967). *Semiologie graphique*. Paris: Gauthier-Villars.

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas VII*, 57-85.

Carrión, J. C. y Espinel, M. C. (2005a). Aptitudes and difficulties of 10 to 12 years old students when translating information between different types of statistical representations. *Proceedings of the 55th Session of the International Statistical Institute*. Sydney. Australia. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Carrión, J.C. y Espinel, M. C. (2005b). Comprensión gráfica e implicaciones en la enseñanza. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 7*, 183-196.

Carrión, J.C. y Espinel, M. C. (2006). Una investigación sobre la traducción e interpretación de gráficas y tablas estadística por estudiantes de educación primaria. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador, Brazil*:* International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www. stat.auckland.ac.nz/~iase.

Cazorla, I. (2002). *A relaçao entre a habilidades viso-pictóricas e o dominio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.

Cleveland, W. S. y McGill, R. (1984). Graphical perception: theory, experimentation and application to the development of graphical methods. *Journal of the American Statistical Association*, *79* (387), 531-554.

Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía.*

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education 18* (5), 382-393.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Eco, U. (1977). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática 11*, 99-119.

Espinel, C., Bruno, A. y Plasencia, I. (2008). Statistical graphs in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Friel, S., Curcio, F., y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education 32*(2), 124-158.

Gerber, R., Boulton-Lewis, G. y Bruce, C. (1995). Children's understanding of graphic representation of quantitative data. *Learning and Instruction*, *5*, 70-100.

González, M. T. y Pinto, J. (2008). Conceptions of four pre-service teachers on graphical representation. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Online: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Lee, C. y Meletiou, M. (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. *Joint Statistical Meetings- Section on Statistical Education.* Online: http://www.statlit.org/PDF/2003LeeASA.pdf

Li, D. Y. y Shen, S. M. (1992). Students'weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics 14* (1), 2-8.

Kosslyn, S. M. (1985). Graphics and human information processing. *Journal of the American Statistical Association*, *80*(391), 499-512.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria.*

Monteiro, C. y Ainley, J. (2006). *Student teachers interpreting media graphs*. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Brazil:* International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase.

Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 2 (3), 188-207. Online: http://www.iejme/.

Pereira-Mendoza, L. y Mellor, J. (1990). Student's concepts of bar graph: Some preliminary findings. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics.* Voorburg: International Statistical Institute. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

Pinto, J. y González, M. T. (2008, Agosto). Pedagogical content knowledge of a novel teacher: a case from the teaching of graphical representation. Trabajo presentado en el *11th International Congress on Mathematics Education.* Monterrey. Online: http://tsg.icme11.org/ document/get/477.

Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2006). Reasoning with evidence – new opportunities in assessment. En A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Maestría. CICATA. México.

Watson, J.M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wu, Y. (2004, Julio). Singapore secondary school students´understanding of statistical graphs. Trabajo presentado en el *10th International Congress on Mathematics Education*. Copenhagen, Dinamarca.

Capítulo 6

EVALUACIÓN DE ACTITUDES Y CONOCIMIENTOS ESTADÍSTICOS ELEMENTALES DE PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACION

ASSESSING ATTITUDES AND ELEMENTARY STATISTICAL KNOWLEDGE IN PROSPECTIVE PRIMARY TEACHERS

Assumpta Estrada Roca

Universitat de Lleida

Resumen. En este trabajo presentamos un estudio de evaluación de las actitudes hacia la Estadística de una muestra de profesores en formación de Educación Primaria. El objetivo es evaluar la relación de las actitudes con los conocimientos iniciales sobre Estadística de los futuros profesores de Primaria. Como instrumentos de medición de actitudes, elegimos la escala SATS de Schau y cols. (1995), mientras que utilizamos una parte del cuestionario Statistics Reasoning Assessment, elaborado por Konold y Garfield (1993), para valorar los conocimientos estadísticos elementales. Los resultados sugieren la incidencia de la formación previa en las actitudes hacia la Estadística e indican la necesidad de potenciar una mayor formación de los futuros profesores en Estadística.

Palabras clave: Actitudes hacia la Estadística, Evaluación de actitudes, Educación Estadística, Formación de profesores, Conocimientos estadísticos elementales.

Abstract. In this paper/study we present the assessment of attitudes towards Statistics from a sample of prospective primary school teachers. The aim is to evaluate the relationship of attitudes with statistics initial knowledge of future teachers. As instruments measuring attitudes, we chose the scale SATS (Survey Attitudes of Schau et al. (1995), whereas we used a part of the questionnaire Statistics Reasoning Assessment, developed by Konold and Garfield (1993), to assess elementary statistical knowledge. Our results suggest the incidence of previous training on attitudes towards Statistics and suggest the need to promote further training of prospective teachers on statistics.

Keywords*:* Attitudes towards Statistics, Assessment of attitudes Statistical Education, Training teachers, Elementary statistical knowledge.

1. INTRODUCCIÓN

El profesorado vive en la práctica mucho más alejado del dominio afectivo en la enseñanza que de la comprensión de conceptos y procesos y del desarrollo de destrezas en el dominio cognoscitivo. Pero olvidar las propias actitudes preconcebidas del profesorado ante la materia lleva a menudo al fracaso de la educación. Este tema puede tener importancia especial en el caso de la estadística, cuya enseñanza no llega a desarrollarse de acuerdo con las recomendaciones curriculares.

Las actitudes son parte integrante de todas las materias de aprendizaje y ocupan un lugar central en el acto educativo, guiando el proceso perceptivo y cognitivo que comporta el aprendizaje de cualquier contenido educativo. En este sentido, para Manassero i Vázquez (2001) la evaluación de las actitudes no ha de estar centrada en "el qué" (simple conocimiento) como en "el para qué".

En esta línea nuestro estudio está dirigido a analizar las actitudes y conocimientos elementales de los futuros profesores de Primaria y evaluar la relación entre ambas.

Las actitudes son tendencias o predisposiciones hacia el objeto actitudinal, en nuestro caso la Estadística, con componentes cognitivos, conductuales y sobretodo emotivos, positivos o negativos. Resultan difíciles de definir y no hay unanimidad respecto al significado del término actitud. McLeod (1992) al conceptualizar el dominio afectivo de la educación Matemática distingue entre emociones, actitudes y creencias. Las emociones son respuestas inmediatas positivas o negativas producidas mientras se estudia Matemáticas; mientras que las actitudes son respuestas o sentimientos más intensos y estables que se desarrollan por repetición de respuestas emocionales y se automatizan con el tiempo.

Respecto a la Educación Estadística, Gal y Garfield (1997) sugieren que durante mucho tiempo, los términos de actitud y sentimientos han sido utilizados indistintamente. Algunos pensamientos o creencias intensos pueden ser el origen de las actitudes hacia la Estadística que definen como una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio. Las actitudes tienen intensidad moderada y una componente cognitiva menor que los sentimientos o las creencias. Siempre se expresan positivamente o negativamente (agrado/desagrado, gusto/disgusto) y puede representar sentimientos vinculados externamente a la materia (profesor, actividad, libro, etc.).

Además, en la actualidad, las actitudes hacia la Estadística se consideran un concepto pluridimensional y jerárquico, compuesto de diferentes elementos o dimensiones analizables por separado (Gil Flores, 1999). En general, se diferencian tres factores básicos, llamados también componentes pedagógicos (Auzmendi, 1992; Gil Flores, 1999; Gómez Chacón, 2000), que son los siguientes:

- Componente Cognitivo: Es el referido a expresiones de pensamiento, concepciones y creencias acerca del objeto actitudinal. Incluye desde los procesos perceptivos simples, hasta los cognitivos más complejos.
- Componente afectivo: Son expresiones de sentimiento hacia el objeto de referencia. Recogería toda aquellas emociones y sentimientos que despierta la Estadística; por ello son reacciones subjetivas positivas/negativas, acercamiento/huida, placer/dolor.
- Componente conductual o tendencial: Es el componente vinculado a las actuaciones en relación con el objeto de las actitudes. Son expresiones de acción o intención

conductista/conductual y representan la tendencia a resolverse en la acción de una manera determinada.

Pero según Schau y cols. (1995), generalmente, los componentes cognitivo y afectivo, se utilizan para predecir el componente conductual, valorado a partir del rendimiento académico del alumno. También en opinión de Gil Flores (1999) el componente conductual podría ser inferido a partir de "*posicionamientos explícitos del alumno en relación a su predisposición comportamenta*l" (p. 570). Por estas razones, en nuestro trabajo, no consideramos este componente conductual y sin embargo introducimos los componentes de valor y dificultad que, según Schau y cols. (1995) intervienen de manera notable en la configuración de las actitudes hacia la Estadística.

En definitiva, en este estudio, consideramos las actitudes de los profesores en formación hacia la Estadística

"*como un rasgo compuesto de diferentes componentes, analizables por separado y cuya identificación nos permite incidir en su formación y cambio*".
y las estructuramos en los cuatro componentes definidos en Schau y cols. (1995),

- Componente afectivo: sentimientos positivos o negativos hacia el objeto actitudinal, aquí la Estadística.
- Competencia cognitiva: percepción de la propia capacidad sobre conocimientos y habilidades intelectuales en Estadística.
- Valor: utilidad, relevancia y valor percibido de la Estadística en la vida personal y profesional
- Dificultad percibida de la Estadística como asignatura. Aunque un estudiante pueda reconocer el valor de una materia, sentir interés hacia la misma (componente afectivo) y pensar que tiene suficientes conocimientos y habilidades (componente cognitivo), puede considerar la materia como fácil o difícil.

2. INVESTIGACIONES PREVIAS

El análisis de las actitudes hacia la Estadística tiene ya una cierta tradición (Carmona, 2004) y, sobre todo en las dos últimas décadas, se han elaborado un número importante de trabajos. Al analizar los trabajos sobre actitudes hacia la Estadística en los que poder apoyar nuestro estudio, encontramos que muchas de las investigaciones realizadas previamente se han orientado específicamente a alumnos universitarios o, en otros casos, a la construcción de escalas de evaluación. Un análisis detallado de estas investigaciones previas aparece en Estrada (2002), complementado posteriormente por Carmona (2004) con el estudio de las evidencias basadas en la relación de las actitudes con diferentes variables externas y en la tabla 1 mostramos de forma resumida las características de los más relevantes

Tabla 1. Características de los estudios más relevantes de actitudes hacia la Estadística

Estudio	Finalidad	Escala	Sujetos	Variables analizadas
Roberts y Bilderback, (1980)	Creación de una escala	SAS	Estudiantes universitarios	Relación con el rendimiento
Elmore y Vasu (1980, 1986)	Relación con rendimiento	SAS	Estudiantes universitarios	Ansiedad, experiencia matemática previa, expectativas del curso, edad, área académica, años de estudio
Wise (1985)	Creación de una escala	ATS	Estudiantes de Magisterio	Dimensiones (campo y curso)
Roberts y Reese (1987)	Relación con el rendimiento	SAS	Estudiantes universitarios	Notas de Estadística
Harvey, Plake y Wise (1985)	Relación con el rendimiento	ATS	Estudiantes universitarios	Género, habilidad matemática y de razonamiento lógico, ansiedad
Auzmendi (1992)	Creación de una escala, relación con el logro, análisis de componentes	EAE	Estudiantes universitarios	Conocimiento matemático previo, motivación, género, expectativas de éxito, evaluación del curso y del profesor, actitudes y sus componentes
Schau y cols. (1995)	Creación de una escala, análisis de actitudes y sus componentes	SATS	Estudiantes Universitarios	Componentes (afectivo, competencia cognitiva, valor y dificultad)
Onwuegbuzie (1998,2003)	Análisis de ansiedad, actitudes y sus componentes	ATS	Estudiantes universitarios profesores	Ansiedad, años de estudio de Estadística, componentes
Silva y cols. (1999)	Creación de una escala, evaluación de actitudes	EAE	Estudiantes universitarios	Género, concepciones previas, rendimiento en el curso, área de estudio, autopercepción
Gil Flores (1999)	Evaluación de actitudes	ATS	Estudiantes de Pedagogía	Género, tipo de bachillerato, componentes
Mastracci (2000)	Evaluación de actitudes	SATS	Estudiantes universitarios	Tipo de bachillerato, años de estudio de Estadística, calificaciones, componentes
Estrada y cols. (2002, 2004a, 2008,2009, 2010)	Creación de una escala, evaluación de actitudes	EAEE SATS	Profesores en formación y en ejercicio	Relación con conocimientos, genero, experiencia previa, especialidad, años de estudio, componentes
Watson y cols. (2003)	Análisis de ansiedad, actitudes y sus componentes	SATS	Estudiantes universitarios de educación	Ansiedad, componentes, preguntas abiertas , motivación.
Nasser (2004)	Evaluación de actitudes	SATS	Futuros profesores	Relación con rendimiento, ansiedad y la aptitud matemática
Anastasiadou (2005)	Evaluación de actitudes	SATS	Curso preuniversit.	Género, componentes

En nuestra revisión observamos que en general las investigaciones realizadas se han dirigido a estudiantes universitarios y no a los profesores, posiblemente, porque la Estadística no es una materia obligatoria en su formación. Sólo los trabajos de Onwuegbuzie, (1998, 2003), los de Watson y cols. (2003), Nasser (1999,2004) y en España los de Estrada y cols. ((2002, 2004a, 2008,2009, 2010) dedican su atención a este colectivo estudiando sus actitudes juntamente con otras variables.

3. LA FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE LOS PROFESORES DE PRIMARIA

Resulta evidente que el profesor de Primaria necesita estar preparado para impartir los contenidos contemplados en los programas oficiales y formar adecuadamente a sus alumnos. Lógicamente ello implicaría la inclusión de la educación estadística en el curriculum de los profesores en formación con unos objetivos que capaciten a los futuros docentes para asumir las responsabilidades que esta nueva sociedad les encomienda.

Desafortunadamente, Ottaviani (1999) indica que la investigación en la enseñanza de la Estadística ha mostrado que generalmente los profesores de Matemáticas nunca o pocas veces han estado en contacto con la Estadística como asignatura. Esto genera dificultades inherentes a la propia naturaleza de la materia, que se añaden al hecho de que la mayoría de los profesores en formación ya llegan a la universidad con lagunas formativas originadas en la enseñanza Primaria y Secundaria (Batanero, Godino y Navas, 1997).

Además, durante su formación en las Escuelas de Magisterio y Facultades de Educación españolas, no tienen posibilidades de suplir estas necesidades ni de superar estas deficiencias, tanto a nivel específico como a nivel didáctico puesto que la casi totalidad de los planes de estudio actuales (Estrada, 2004b, 2007) no contemplan ninguna asignatura sobre dicha materia. Es por ello que en nuestro trabajo también hemos analizado los conocimientos estadísticos elementales de los participantes en el estudio.

Entre los primeros trabajos que analizan los conocimientos estadísticos de los futuros profesores, podemos citar los de Estepa y Batanero (1994) y Batanero, Godino y Navas (1997), quienes presentan los resultados de un estudio de evaluación de las concepciones de los profesores de Primaria en formación sobre los promedios. Otros trabajos con profesores en formación son el de Biehler (1997), quien analiza conocimiento y competencia al realizar tareas de análisis de datos trabajando con el ordenador, y el de Burgess (2002) también referido a una tarea abierta de análisis de datos .

Se trata de un área que en la ultima década se ha desarrollado muy rápidamente pero ninguno de las investigaciones realizadas los vincula con las actitudes y por ello pensamos que con nuestro trabajo no sólo aportamos información sobre conocimientos y errores de los profesores en formación en relación a la Estadística sino que a la vez proporcionaremos unos primeros resultados de su posible relación con sus actitudes hacia la materia.

4. METODOLOGÍA

En este estudio nos proponemos evaluar la actitud hacia la Estadística de los profesores en formación, globalmente, así como diferenciando sus principales componentes.

Pretendemos también determinar posibles relaciones entre actitudes y conocimientos estadísticos elementales, entendidos éstos últimos como aquellos conocimientos incluidos en la enseñanza Primaria y que el profesor en formación debería tener adquiridos.

La principal variable dependiente considerada en el estudio es la actitud hacia la Estadística de profesores en formación, que será operacionalizada a partir de la puntuación total en la escala de actitudes

Asimismo son variables dependientes los Componentes de las actitudes: competencia cognitiva, afectiva, valor y dificultad, respectivamente, operacionalizadas a partir de las puntuaciones en los diferentes componentes que conforman la escala elegida y los Conocimientos estadísticos elementales: Medidos a partir de las respuestas al cuestionario de Konold y Garfield. Finalmente, de todas las variables asociadas a la actitud, en este estudio experimental tenemos en cuenta el número de cursos previos realizados sobre Estadística.

Cuestionarios

En el caso de las actitudes hacia la Estadística, hemos utilizado el cuestionario SATS (Survey of Attitudes Toward Statistics) de Schau y cols. (1995), instrumento que nos permite analizar las actitudes hacia la Estadística de los profesores en formación a través de una estructura factorial con unos valores de fiabilidad (valores de alfa de Cronbach entre 0.77 y 0.85 en las diferentes muestras a que ha sido aplicado) y validez adecuados (alta correlación con otras escalas y variables predictivas). La elección de esta escala de actitudes se basa en sus ventajas respecto a otros posibles instrumentos de medición, analizados en Estrada (2009). Está formada por 28 ítems, 9 positivos y 19 negativos que se agrupan en torno a los cuatro componentes, según la distribución de la tabla 1. En nuestra muestra el valor del coeficiente de fiabilidad alfa de Cronbach fue 0.89).

Para los conocimientos estadísticos elementales, el instrumento utilizado es la parte referente a Estadística del cuestionario Statistics Reasoning Assessment, elaborado por Konold y Garfield, descrito en Garfield (2003). Este cuestionario ha sido empleado en diversas investigaciones, oscilando el coeficiente de fiabilidad en el intervalo 0.70-0.75, dependiendo del estudio. Se compone de 9 ítems (total de 19 subítems) que hacen referencia a la comprensión de promedios, probabilidad y frecuencia, dispersión, asociación, muestreo y simetría, interpretación de gráficos, y posibilidad de existencia en la muestra de sesgo de equiprobabilidad, “outcome approach”, errores en el cálculo de promedios, efectos de valores atípicos, tamaño de muestra y variabilidad.

Población y muestra

La población objetivo del estudio es la de profesores de Educación Primaria en formación, que se concreta en los alumnos de Magisterio de la Universitat de Lleida (España). El grupo resultante está formado por 367 profesores en formación repartidos entre las especialidades que se imparten en el centro de Lleida. Son alumnos con las características habituales de nuestra Facultad: dominan las mujeres, que constituyen el 77% de la muestra, frente a los hombres; las edades son las correspondientes al curso en que se encuentran entre 19-20 años. Respecto a los estudios previos de Estadística, observamos que la mayor parte estudió un año, generalmente en Bachillerato y muy raramente en la enseñanza Primaria.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Resultados globales

En la tabla 2 presentamos los resultados referentes a cada uno de los 28 ítems, tal como fueron presentados a los sujetos de la muestra, y en ella hacemos constar el número de casos de cada una de las categorías (1 = muy en desacuerdo, 2 = en desacuerdo, 3 = indiferente, 4 = de acuerdo, 5 = muy de acuerdo) para el total de la muestra. Presentamos también las medias y desviaciones típicas de las puntuaciones obtenidas con el criterio anterior. Hacemos notar que los ítems que tienen un enunciado desfavorable a la actitud que tratamos de medir (por ejemplo el ítem 2) fueron puntuados en forma inversa al calcular su media, de forma que todas las medias sean directamente comparables (una media alta indica siempre una actitud positiva). De esta manera, la puntuación total (suma de las puntuaciones de los 28 ítems) representará la actitud de cada encuestado respecto a la Estadística que será tanto más favorable la actitud cuanto más elevada sea la puntuación.

Tabla 2. Resultados en los ítems para el total de la muestra

	Enunciado del ítem	1	2	3	4	5	x	s
1.	Me gusta la Estadística.	37	61	145	105	10	2,97	1,00
2.	Me siento inseguro cuando hago problemas de Estadística.	29	111	119	84	17	2,86	1,02
3.	No entiendo mucho la Estadística debido a mi manera de pensar.	10	51	131	127	42	3,39	0,96
4.	Las fórmulas estadísticas son fáciles de entender.	25	107	108	115	11	2,95	1,00
5.	La Estadística no sirve para nada.	2	24	78	164	96	3,90	0,89
6.	La Estadística es una asignatura complicada.	23	123	109	84	20	2,87	1,02
7.	La Estadística es un requisito en mi formación como profesional.	35	106	136	80	9	2,79	0,97
8.	Mis habilidades estadísticas me facilitarán el acceso al mundo laboral.	35	121	139	62	9	2,70	0,94
9.	No tengo ni idea de qué va la Estadística.	13	38	49	203	63	3,72	0,98
10.	La Estadística no es útil para el profesional de “a pie”.	7	32	137	154	29	3,46	0,84
11.	Me siento frustrado al hacer pruebas de Estadística.	12	53	142	132	27	3,30	0,92
12.	Los conceptos estadísticos no se aplican fuera del trabajo.	9	38	78	189	50	3,64	0,93
13.	Utilizo la Estadística en la vida cotidiana.	55	85	120	97	9	2,78	1,07
14.	En las clases de Estadística estoy en tensión.	8	50	160	106	37	3,32	0,91
15.	Disfruto en clase de Estadística.	39	76	173	64	11	2,81	0,95
16.	Las conclusiones estadísticas raramente se dan en la vida.	2	48	102	168	44	3,56	0,89
17.	La mayoría de la gente aprende Estadística rápidamente.	32	139	152	33	8	2,58	0,86
18.	Aprender Estadística requiere mucha disciplina.	10	55	160	117	22	3,24	0,88
19.	En mi profesión no usaré Estadística.	8	39	118	154	43	3,51	0,92
20.	Cometo muchos errores matemáticos cuando hago Estadística.	19	80	131	122	13	3,08	0,95
21.	Me da miedo la Estadística.	14	59	101	131	59	3,45	1,06
22.	La Estadística implica mucho cálculo.	32	164	100	59	4	2,55	0,91
23.	Puedo aprender Estadística.	3	15	40	221	86	4,02	0,76
24.	Entiendo las formulas estadísticas.	10	67	142	137	7	3,18	0,85
25.	La Estadística no es importante en mi vida.	6	62	154	115	28	3,27	0,89
26.	La Estadística es muy técnica.	19	108	156	76	5	2,84	0,86
27.	Me resulta difícil comprender los conceptos estadísticos.	16	88	125	126	9	3,07	0,93
28.	La mayoría de la gente debe cambiar su manera de pensar para hacer Estadística.	5	46	168	114	30	3,33	0,85

Entre los ítems mejor valorados destacamos el ítem 23 , con $\bar{x} = 4.03$, seguido muy de cerca, $\bar{x} = 3.90$, del ítem 5. Aunque a nivel de componentes representen aspectos distintos (competencia cognitiva y valor, respectivamente), están evidenciando una necesidad formativa .

Los ítems con peores puntuaciones globales corresponden a aspectos relacionados con la dificultad que implica el aprendizaje de la disciplina. Son el ítem 22, con $\bar{x} = 2.55$ y el 17, con $\bar{x} = 2.58$.

Tabla 3. Resúmenes estadísticos de los componentes y puntuación total

Componente	Mínimo	Máximo	Media	Desv. tipic	Máximo posible	Media teórica	Media tipifcada
Afectivo	6	29	18,67	4,17	30	15	0.88
Cognitivo	9	30	20,47	3,57	30	15	1.53
Valor	14	43	29,60	5,03	45	25	0.91
Dificultad	11	28	20,33	3,32	35	17.5	0.85
Puntuación total	48	123	88,76	13,33	140	70	1.4

Respecto a la puntuación total en la escala, así como de las distintas agrupaciones según los componentes, tabla 3, observamos como, en todas las situaciones, las medias obtenidas presentan puntuaciones superiores a los valores teóricos, destacando en concreto el caso de la puntuación total en que la diferencia llega a superar los 18 puntos.

Relación entre componentes

En primer lugar, hemos analizado las correlaciones entre los componentes y la puntuación total, tabla 4, de manera que podemos comprobar que el componente afectivo es el que presenta un coeficiente de correlación más elevado, el 0.88 respecto a la puntuación total, lo que corrobora la teoría de la importancia del dominio afectivo en las actitudes, argumentado por McLeod (1992) y Gomez Chacón (2000).

Tabla 4. Correlaciones (Pearson) entre componentes

Componente	P. total	Afectiva	Cognitiva	Dificultad	Valor
P. total	1,00	0,88	0,87	0,75	0,77
Afectivo		1,00	0,78	0,47	0,64
Cognitivo			1,00	0,45	0,63
Dificultad				1,00	0,33
Valor					1,000

A escasa distancia, nos encontramos con el componente mejor valorado por los encuestados, la competencia cognitiva, que con un valor de 0.87, nos induce a potenciar una educación estadística adecuada como elemento esencial en la formación de actitudes de los profesores en formación. Por lo que se refiere a los otros dos componentes, valor y dificultad, aunque también queda patente su influencia, ésta es algo menor que la ejercida por los anteriores.

Seguidamente hemos realizado un análisis cluster, y sus resultados sugieren que, para la muestra de nuestro estudio (profesores en formación), el valor de la Estadística aparece en una posición claramente destacada e independiente de sus sentimientos, de la dificultad percibida o de su capacidad cognitiva. Queda confirmada esta interpretación al aplicar a las variables, (ítems que componen la escala de actitudes), el método Varimax del análisis factorial (tabla 5).

En resumen, nuestros resultados coinciden con los de Mastracci (2000) por el hecho de haber obtenido separadamente un componente de dificultad y otro de valor. En cambio contradicen las investigaciones de Schau y cols. (1995) en las que los cuatro factores se configuran independientemente en el análisis factorial ya que en nuestra investigación, los componentes cognitivos y afectivos aparecen ligados y se observa una relación inversa entre la dificultad y el valor.

Tabla 5. Correlaciones de los ítems con los componentes rotados

Enunciado (resumido)	Componente	Ítem	Factor				
			1	2	3	4	5
Me siento seguro	A	2	0,76				
Entiendo	C	3	0,72				
No me siento frustrado	A	11	0,58		0,35		
Tengo ideas	C	9	0,57	0,32			
No cometo errores	C	20	0,51		0,35	0,41	
No me da miedo	A	21	0,50		0,43		
Conceptos fáciles	C	27	0,50		0,39		
Sencilla	D	6	0,45		0,42	0,37	
No estoy en tensión	A	14	0,42		0,31		
Se aplica	V	12		0,71			
Útil	V	10		0,71			
Se usa	V	16		0,71			
Usaré	V	19		0,68			
Sirve	V	5		0,46			
Importante	V	25	0,37	0,44			0,34
Utilizo	V	13		0,36			
Entiendo	C	24			0,74		
Fórmulas fáciles	C	4	0,39		0,65		
Puedo aprender	C	23			0,64		
Me gusta	A	1	0,46		0,53		
Disfruto	A	15	0,37		0,49	0,35	
La mayoría aprende	D	17			0,30		
Cálculo	D	22				0,77	
Técnica	D	26				0,71	
Cambia la forma de pensar	D	28					-0,72
Facilita acceso al trabajo	V	8		0,44			0,55
Requisito en la formación	V	7		0,37	0,39		0,55
Requiere disciplina	D	18				0,33	-0,45

Influencia de la variable años de estudio sobre las actitudes

Los resultados del análisis de covarianza factorial, indican que el número de años de estudio tiene un efecto estadísticamente significativo sobre la puntuación media en la escala de actitudes.

Tabla 6. Medias, desviaciones típicas e intervalos de confianza

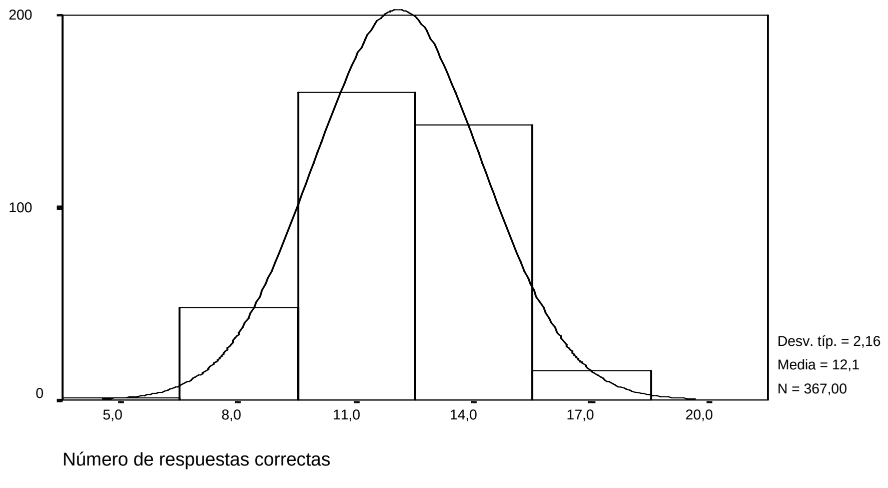
		Media	Error. típ.	**Intervalo de confianza al 95%.**	
				Límite inferior	Límite superior
Años de estudio	0	83,13	8,57	79,43	86,84
	1	88,56	13,75	86,82	90,29
	2	93,43	11,42	89,17	97,70
	3	96,80	10,66	83,56	110,04

En cuanto a los años de estudio, si observamos la tabla 6, se aprecia un cambio notable de actitud favorable a medida que aumenta la instrucción en la materia, lo que corrobora nuestro objetivo de incidencia en los planes de estudio de las facultades de Educación y escuelas de Magisterio.

Resultados del cuestionario de conocimientos estadísticos y su relación con las actitudes

Los resultados del cuestionario muestran un desconocimiento de los conceptos estadísticos básicos por parte de los profesores en formación. En la Figura 1, presentamos la distribución del número de respuestas correctas (de un total de 19 subítems. Incluso cuando la media supera la mitad del valor teórico, hacemos notar que este valor (12,1) indica un pobre conocimiento en conceptos que deberían tenerse adquiridos.

Figura 1. Distribución del número de respuestas correctas (escala 1-19)



Aunque los resultados son buenos en cuanto a la percepción de la variabilidad del muestreo, el sesgo de estimación y la comparación de promedios, se aprecian dificultades en la comprensión del algoritmo de la media, el efecto de los valores atípicos sobre la media y cierta confusión entre correlación y causalidad.

En cuanto a la influencia de variables independientes, no se observa un efecto significativo del número de años de estudio sobre estos errores. Esto nos hace reflexionar sobre el tipo de enseñanza actual de Estadística, que no presta atención a los aspectos interpretativos y se centra en los algoritmos de cálculo.

Respecto a si la actitud y sus componentes están relacionados significativamente con sus conocimientos estadísticos elementales, se confirma en el hecho de que muchas de las correlaciones (de Pearson o Kendall, según los casos) entre puntuaciones totales o parciales en las dos pruebas se dan positiva y significativamente.

Sin embargo tal como vemos en la tabla 7, la intensidad de la correlación es baja. Ello se explica porque, por un lado, se trata de constructos (conocimientos y actitudes) multidimensionales, que no se pueden reflejar en un solo ítem, componente o cuestionario; y por otro, porque otras variables (años de estudio, especialidad) han mostrado su influencia sobre ambos constructor

Tabla 7. Coeficientes de correlación entre las actitudes y sus componentes y la puntuación total en el cuestionario

	Correlación
Puntuación total	0,23**
Componente afectivo	0,20**
Componente cognitivo	0,26**
Componente dificultad	0,09
Componente valor	0,22**

** La correlación es significativa al nivel 0,001 (bilateral).

En todo caso, la confirmación de esta hipótesis nos sugiere que la mejora de los conocimientos de los profesores en formación es un modo de incidir positivamente en sus actitudes.

Es interesante resaltar cómo el componente de dificultad percibida no correlaciona con los resultados del cuestionario, por lo cual la dificultad percibida por los profesores en formación no se corresponde con la dificultad real del tema y los ítems que se les proponen. También señalamos que fueron los ítems más difíciles (relativos a correlación- causalidad, efecto de valores atípicos y muestreo) los que más correlacionan con los componentes de las actitudes. Los que resultan estadísticamente significativos son todos los afectivos, 2/3 de los cognitivos, sólo 2 de valor y 1 de dificultad. De nuevo, ello corrobora que el valor se destaca de forma independiente de los otros componentes y que la dificultad percibida no guarda relación con los conocimientos reales. Así, cuanto mayor es el conocimiento, mejor es la afectividad y la competencia cognitiva percibida.

6. CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos, podemos afirmar que la actitud de los encuestados respecto a la Estadística es positiva, globalmente y en sus distintos componentes, destacando la puntuación total, así como el componente cognitivo, que sería el más valorado por los profesores en formación.

Una conclusión importante del estudio componencial es que no existe independencia entre los cuatro componentes que a nivel teórico describen los autores del cuestionario, y que fueron aceptados por otros autores posteriores, como Mastracci (2000). Únicamente el componente de valor se diferencia del resto, estando fuertemente relacionados los otros tres componentes.

Al analizar el efecto del número de años de estudios previos es aquí donde se observan peores actitudes en profesores con menor conocimiento, coincidiendo con nuestras expectativas.

Asimismo, constatamos que persisten errores conceptuales en conocimientos estadísticos elementales en los que no influyen los años de estudio. Finalmente se confirma que tal como estimábamos, la actitud está relacionada con los conocimientos estadísticos elementales de los profesores en formación, aunque el grado de correlación es bajo y varía según los componentes.

Agradecimientos: Trabajo apoyado por el Proyecto SEJ2010-14947/EDUC. MCYT-FEDER

REFERENCIAS

Anastasiadou, S. (2005). Affective reactions and attitudes of the last class of greek high school students towards statistics *Proceedings of CERME IV, European Research in Mathematics Education. Sant Feliu de Guíxols, Girona: CERME* On line, http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Mensajero. Bilbao.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En: H. Salmerón (Ed.), *A Actas de las VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Universidad de Granada.

Biehler, R. (1997). Changing conceptions of statistics: a problem area for teacher education. En: A. Hawkins (Ed.), *Training teachers to teach statistics* (pp. 20-38). Voorburg. International Statistical Institute.

Burgess, T. (2002). Investigating the ‘data sense’ of preservice teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal*, [On line, http://fehps.une.edu.au/serj]en prensa.

Elmore, P. B. Y Vasu, E. S. (1980). Relationship between selection variables an statistics achievement. *Journal of Educational Psychology*, *72*, 457-467.

Elmore, P. B. Y Vasu, E. S. (1986). A model of statistics achievement using spatial ability feminist attitudes and mathematics. Related variables as prediction. *Educational and Psychological Measurement*, *46*, 215-222.

Estepa, A. Y Batanero, C. (1994). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, *13*(2), 155-170.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Estrada, A., Batanero, C y Fortuny, J. M. (2004a). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias,* 22 (2), 263-274.

Estrada, A., Batanero, C y Fortuny, J. M. (2004b). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática*, 16(1) ,89-111.

Estrada, A (2007) Evaluación del conocimiento estadístico en la formación inicial del profesorado. *UNO*, *45*, 80-98.

Estrada, A., y Batanero, C. (2008). Explaining teachers' attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.). *Joint ICMI/ IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference. Monterrey*: International Commission on Mathematical Instruction e International Association for Statistical Education http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications

Estrada, A. (2009). *Las actitudes hacia la estadística en la formación de los profesores*. Milenio. Lleida. ISBN: 978-84-9743-284-9

Estrada, A.; Bazán,J. y Aparicio, A.(2010).Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. *Revista UNION,24 ISSN:1815-0640 http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=96*

Gal, I. Y Garfield J. B. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En: I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). IOS, Press, Voorburg.

Garfield, J. B. (2003). Assessing statistical reasoning. *Statistics Education Research Journal,* 2(1) [On line, http://fehps.une.edu.au/serj].

Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la Estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogía, 214*, 567-590.

Gómez Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Narcea. Madrid.

Harvey, A. L., Plake, B. S. Y Wise, S. L. (1988). The validity of six beliefs about factors related to statistics achievement. Presentado en el *Congreso de la AERA*, New Orleans. Publicación electrónica.

Konold, C. Y Garfiel, J. (1993): *Statistical Reasoning Assesment*, Part 1: Intuitive Thinking. University of Massachusetts: Scientific Reasoning Institute.

Manassero, M..A. y Vazquez, A. (2001).Instrumentos y métodos para la evaluación de actitudes relacionadas con la ciencia , la tecnología y la sociedad. *Enseñanza de las*

Ciencias, *20*(1), 15-27.

Mc Leod, D. B. (1992). Reseach on affect in mathematics education: A reconceptualization. En: D.A. Grows(Ed.). *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). Macmillam N.C.T.M. New York.

Mastracci, M. (2000). *Gli aspecti emotive nell'evolution dell'apprendimento della statistica e della sua valutazione. Un caso di studio sugli studenti di SSA.* Tesis de Laurea. Universidad La Sapienza de Roma.

Nasser, F. M. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. *Journal of Statistics Education, 12* (1).
On line: www.amstat.org/publications/jse/v12n1/nasser.html.

Onwuegbuzie, A.J. (1998). Teachers` attitudes toward statistics. *Psychological Reports, 83,* 1008-1010.

Onwuegbuzie, A.J. (2003). Modeling statistics achievement among graduate students. *Educational and Psychological Measurement*, *63*(6), 1020-1038.

Ottaviani, G. (1999). Promover la enseñanza de la estadística: La contribución del IASE y su cooperación con los países en vías de desarrollo. Conferencia inagural *Actas de la Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística* Florianópolis.

Roberts, D.M. y Bilderback, E.W. (1980). Reliability and validity of a statistics attitude survey. *Educational and Psychological Measurement, 40,* 235-238.

Roberts, D.M. y Reese, C.M. (1987). A comparison of two scales measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, *47*, 759-764.

Schau, C., Stevens, J., Dauphine, T. Y Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes towards statistics. *Educational and Psychological Measurement, 55* (5), 868-875.

Silva, C. B. Da. Cazorla, I. M. Y Brito, M. R. F. (1999). Concepçoes e attitudes em relaçao a estatistica. *Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística* (pp. 18-29). Florianópolis.

Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, *45*, 401-405.

Capítulo 7

SIGNIFICADO DE LA MEDIA ARITMÉTICA EN FUTUROS PROFESORES

MEANING OF ARITHMETIC MEAN IN PRESERVICE TEACHERS

Juan Jesús Ortiz de Haro

Universidad de Granada

Vicenç Font Moll

Universidad de Barcelona

Resumen. Un cambio efectivo de la enseñanza de la estadística, tal y como proponen los actuales currículos, requiere mejorar la formación de los profesores que han de enseñarla. El objetivo principal de esta investigación es determinar el significado personal declarado de un grupo de futuros profesores de Educación Primaria del objeto matemático "media aritmética". La herramienta configuración cognitiva propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de tipologías de significados y mostrar que existen importantes dificultades relacionadas con la comprensión del concepto y algunas de sus propiedades. Finalizamos con algunas implicaciones educativas para la formación de profesores en el campo de la estadística.

Palabras clave: Media aritmética, significado personal de un objeto matemático, comprensión matemática, formación profesores, educación estadística.

Abstract. Any effective change in the teaching of statistics, as proposed in current curricula, requires improving the training given to the people who will eventually teach it. The main goal of this study is to determine the personal meaning that Primary School teachers-in-training assign to the mathematical object "arithmetic mean". The cognitive configuration tool proposed by the Onto-Semiotic Approach to Cognition and Mathematics Instruction shows that there is a wide variety of typologies of meanings and that there exist significant difficulties related to the understanding of the concept and some of its properties. We conclude with some educational implications for teacher training in the field of statistics.

Keywords: Arithmetic mean, personal meaning of a mathematical object, mathematical understanding, teacher education, statistics education.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la estadística en España se ha visto reforzada en el Real Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006), donde se incluye un bloque de contenidos sobre Tratamiento de la información, azar y probabilidad desde el primer ciclo. Este documento enfatiza la necesidad de iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos estadísticos y de hacer más activa y exploratoria la metodología de enseñanza, incidiendo en la comprensión de las informaciones presentes en los medios de comunicación, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos estadísticos para la toma de decisiones. Estas recomendaciones también se recogen en otros currículos (ej., NCTM, 2000; SEP, 2006).

Ahora bien, un cambio efectivo de la enseñanza de la estadística requiere mejorar la formación de los profesores que han de llevar a cabo la enseñanza (Stohl, 2005), pues, sin una formación específica, tendrían que confiar en sus creencias e intuiciones, con frecuencia erróneas, y que podrían transmitir a sus estudiantes, como se ha comprobado en el caso de la probabilidad (Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006). Un requisito, por tanto, es conocer las competencias estadísticas de los futuros profesores.

Por ello, en el marco de una investigación sobre evaluación inicial de la competencia de los futuros profesores de Educación Primaria para resolver problemas elementales de estadística, en este trabajo se pretende determinar el significado personal de un grupo de futuros profesores de Educación Primaria del objeto matemático “media aritmética”, cuando inician el estudio de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica en la Universidad de Granada, España.

El presente capítulo se estructura en siete apartados, el primero de los cuales es esta introducción. En el apartado dos se presenta una síntesis las investigaciones previas, y en el tres se describen brevemente algunos de los constructos del Enfoque Ontosemiótico, marco teórico utilizado en esta investigación. En el apartado cuatro se presentan el objetivo general y los objetivos específicos, y en el cinco la metodología utilizada. En el apartado seis se aportan los resultados obtenidos del análisis semiótico de las respuestas de los futuros profesores al problema analizado. Por último, en el siete se exponen las conclusiones y algunas reflexiones finales e implicaciones para la formación de profesores en estadística.

2. INVESTIGACIONES PREVIAS

El gran esfuerzo de investigación sobre formación de profesores en la pasada década, apenas se refleja para el caso de la estadística, como se observa al analizar los contenidos de la revista Journal of Mathematics Teacher Education o en la revisión realizada por Shaugnessy (2007). A pesar de ello, progresivamente se está formando un cuerpo de conocimientos que señala la existencia de dificultades entre los profesores en el uso de los promedios.

Entre las investigaciones centradas en futuros profesores de Educación Primaria, destacamos la de Batanero, Godino y Navas (1997), quienes observaron dificultades en el tratamiento de los valores nulos y valores atípicos en el cálculo de la media aritmética, en la elección de la medida de tendencia central más adecuada en una determinada situación y en el uso de los promedios en la comparación de distribuciones, constatando que dichas dificultades permanecen incluso después de haber recibido enseñanza específica. Espinel

(2007) describe los errores que cometen futuros profesores en la construcción de ciertas gráficas y las dificultades que muestran cuando razonan sobre representaciones de distribuciones de datos.

En un estudio para evaluar el conocimiento del contenido pedagógico y del contenido estadístico de los futuros profesores, Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) observaron que, aunque muchos de ellos poseían una buena intuición sobre la equiprobabilidad, minusvaloraron la variabilidad. En cuanto al análisis didáctico, la mayoría tuvo dificultades en juzgar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción.

En una investigación para profundizar en la comprensión que de la media tenían los futuros profesores, Leavy y O'loughlin (2006) encontraron que el 57 % de los participantes recurría a la media para comparar dos conjuntos de datos, que solo el 21 % dio una respuesta precisa a un problema de medias ponderadas, y que el 88 % fue capaz de construir un conjunto de datos que tuviera una media predeterminada. También observaron que solo un 25 % manifestaba alguna forma de comprensión conceptual de la media, y que el resto presentaba una comprensión procedimental.

Estrada (2007), en un estudio para evaluar el conocimiento estadístico de los futuros profesores, observó que aunque los porcentajes de aciertos fueron superiores al 50%, los resultados indican un desconocimiento de los conceptos estadísticos elementales y la presencia de errores al invertir el algoritmo de la media y en conceptos relacionados con el muestreo.

Los resultados de los trabajos de Garrett (2008) y García Cruz y Garrett (2008), con alumnos de secundaria y universitarios, algunos de éstos últimos estudiantes para profesor de matemáticas en Educación Primaria, revelaron que los participantes muestran distintos tipos de razonamiento sobre la media aritmética y sus respuestas se pueden asociar a cinco niveles de comprensión según la taxonomía SOLO de Biggs y Collis (1991) así como que no hubo diferencias significativas entre los estudiantes universitarios y de secundaria, en cuanto a los niveles de interpretación observados.

Respecto a los trabajos con estudiantes universitarios, también se han descrito errores de cálculo de la media simple y ponderada a partir de una tabla de frecuencias (Pollatsek, Lima y Well, 1981) o en la aplicación incorrecta de algunas propiedades de la misma (Mevarech, 1983).

Por todo ello, consideramos de interés seguir esta línea de investigación ya que, como vemos, la media aritmética es un concepto fundamental en estadística del que hay pocas investigaciones sobre futuros profesores de Educación Primaria. Además, el conocimiento elemental de la estadística forma parte de lo que hoy se denomina "cultura estadística" (Gal, 2005), que incluye no sólo conocimientos, sino actitudes que lleven a los futuros profesores a interesarse por mejorar su conocimiento, y traten de completarlo a lo largo de su vida profesional.

3. MARCO TEÓRICO: EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

El marco teórico utilizado en este trabajo es el llamado Enfoque Ontosemiotico de la instrucción y cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007; Ramos y Font, 2008; Font, Godino y Contreras, 2008; Font y Contreras, 2008; Olivo, Batanero y Díaz, 2008), que se considera el más adecuado para definir y afrontar el problema planteado. A partir de ahora se utilizará el acrónimo EOS.

Prácticas

En este enfoque se parte del papel clave que en matemáticas tiene la resolución de problemas, donde se considera la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994).

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su uso en el análisis didáctico lleva a introducir en el EOS la siguiente tipología de significados (Figura 1).

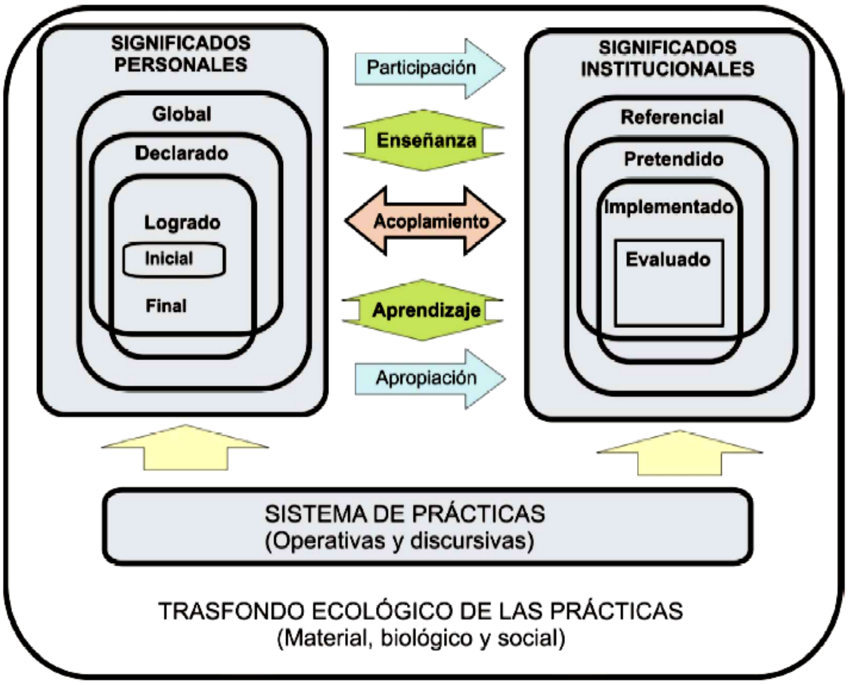


Figura 1. Tipos de significados institucionales y personales

Con relación a los significados institucionales, se proponen los siguientes tipos:

Pretendido: sistema de prácticas (y configuraciones epistémicas que las activan) incluidas en la planificación del proceso de estudio.

Implementado: sistema de prácticas (y configuraciones epistémicas que las activan) en la actuación docente efectiva.

Evaluado: sistema de prácticas (y configuraciones epistémicas que las activan) que son evaluadas por el docente.

Referencial: sistema de prácticas (y configuraciones epistémicas que las activan) que se toma como referencia en la elaboración del significado pretendido.

Respecto de los significados personales se proponen los siguientes tipos:

Global: sistema de prácticas personales (y configuraciones cognitivas que las activan) relativas a un objeto matemático que el sujeto es capaz de manifestar potencialmente.

Declarado: sistema de prácticas expresadas (y configuraciones cognitivas que las activan) a propósito de las pruebas de evaluación, incluyendo las correctas e incorrectas institucionalmente.

Logrado: sistema de prácticas manifestadas (y configuraciones cognitivas que las activan) que son conformes con el significado institucional. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se considera como errores de aprendizaje.

En el análisis del cambio de los significados personales, que tiene lugar en un proceso de estudio, interesa tener en cuenta los significados logrados iniciales de los estudiantes y los logrados que finalmente alcanzan. En la parte central de la Figura 1 se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que suponen el acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales.

Configuraciones de objetos

El agente necesita conocimientos básicos para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Si se consideran los componentes del conocimiento, necesarios para la realización y evaluación de la práctica, que permiten resolver una situación problema (ej., plantear y resolver un problema de media aritmética), vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos-definiciones, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. Así, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la configuración de la Figura 2 (Font y Godino, 2006).

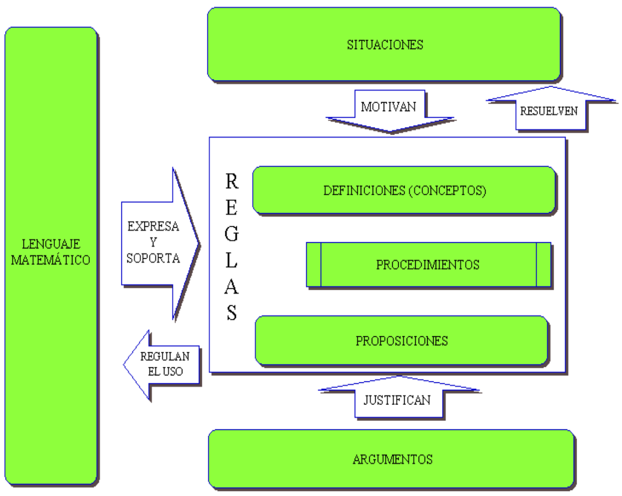


Figura 2. Configuración de objetos

Para estudiar las relaciones entre estas entidades elementales (situaciones problemas, lenguajes, conceptos…) estos autores proponen la noción de función semiótica, idea tomada de Eco (1979), que se concibe como un par, formado por el significante (expresión) y el significado (contenido), e implica también un acto de interpretación. Ligada a esta idea se encuentra la de código, que se concibe como la regla de correspondencia entre los planos de expresión y de contenido de las funciones semióticas.

Comprensión matemática

Básicamente hay dos maneras de entender la "comprensión": como proceso mental o como competencia (Godino, Batanero y Font, 2007). Los posicionamientos pragmatistas del EOS llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental. Se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático, cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas, lo cual implica concebirla también como “conocimiento y aplicación de las normas” que regulan la práctica.

Por otra parte, si se tiene en cuenta el papel esencial que las funciones semióticas, definidas anteriormente, tienen en el proceso relacional entre los objetos matemáticos activados en las prácticas, se puede interpretar la comprensión de un objeto matemático O por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como expresión o contenido.

4. OBJETIVOS

El objetivo principal de esta investigación es determinar el significado personal declarado de un grupo de futuros profesores de Educación Primaria del objeto matemático “media aritmética”, cuando inician el estudio de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica en la Universidad de Granada, España.

De acuerdo con el EOS, entendemos el significado personal de dicho objeto como: (1) el conjunto de prácticas que puede realizar el alumno en las que la media es fundamental (o no) para su realización, y (2) la configuración cognitiva que el alumno activa para realizar dichas prácticas. Las prácticas que realiza el alumno, en el caso que nos ocupa, son la lectura del texto del problema y la producción de un texto como respuesta.

Como objetivos específicos se pretenden los siguientes:

1. Determinar tipologías de significados parciales personales declarados de los estudiantes según la configuración cognitiva activada en sus respuestas (es decir, según la presencia o ausencia de determinados conceptos, proposiciones, procedimientos, lenguaje y argumentos).

2. Determinar los errores y dificultades de los estudiantes según la configuración cognitiva activada en sus respuestas.

5. METODOLOGÍA

Con relación a la metodología hay dos cuestiones relevantes, la primera tiene que ver con la selección del cuestionario y la segunda con el tipo de análisis que se hace de las respuestas de los alumnos.

5.1 Selección del cuestionario

El significado del objeto “media aritmética” es complejo, como lo muestra el análisis de libros de texto realizado por Cobo y Batanero (2004). Por esta razón, para evaluar el significado personal declarado de los futuros profesores, hemos utilizado el cuestionario propuesto por Batanero (2000), al que consideramos idóneo desde el punto de vista del contenido que se pregunta a los alumnos, ya que determina el significado de referencia para el objeto “media aritmética” y es representativo del mismo.

Consta de cinco problemas: el primero es sobre estimación de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida; el segundo trata de una situación donde se necesita obtener una cantidad equitativa a repartir para lograr una distribución uniforme; el tercero consiste en encontrar un elemento representativo de un conjunto de valores dados cuya distribución es aproximadamente simétrica, en un contexto de comparación de datos; el cuarto es una situación donde se necesita conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al seleccionar un elemento al azar de una población, y el quinto sobre la media aritmética ponderada. Por razones de extensión, en este trabajo solo se analiza el segundo problema, que consideramos permite cumplir con los objetivos propuestos.

El problema planteado es un ejemplo particular de una clase de problemas, donde se necesita obtener una cantidad equitativa para conseguir una distribución uniforme, siendo la mejor opción la media aritmética.

Problema. Reparto de caramelos

Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos e forma equitativa?

Se introduce el distractor de un elemento nulo, que aparece descrito en la investigación como un posible elemento de dificultad, para confirmar si ésta aparece en los futuros profesores.

5.2 Análisis de las respuestas de los alumnos

Para estudiar el significado personal declarado de los futuros profesores de Educación Primaria del objeto “media aritmética”, se seguirá la metodología usada en Malaspina (2007) y Malaspina y Font (2010). En primer lugar, hemos de examinar las prácticas matemáticas que realiza el alumno, que en este caso se interpretan como la lectura del problema y la producción de un texto como respuesta. A continuación, examinaremos la configuración cognitiva activada por el alumno en su respuesta.

5.3. Participantes

La muestra participante estuvo integrada por 40 futuros profesores de la especialidad de Educación Primaria, estudiantes de primer curso de Magisterio de la Universidad de Granada, España. Todos ellos han estudiado conceptos básicos de estadística y probabilidad en la Educación Secundaria. El cuestionario fue respondido por los alumnos antes de iniciar las clases de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica.

6. RESULTADOS

En base a la configuración cognitiva de las soluciones de los futuros profesores al problema “Reparto de caramelos”, se han obtenido cuatro categorías de significados personales declarados de los alumnos:

- *Categoría 1*: Alumnos que utilizan la media aritmética de forma implícita

Práctica matemática: Son alumnos que utilizan la media aritmética, pero no mencionan el término “media” de forma explícita (Figura 3).

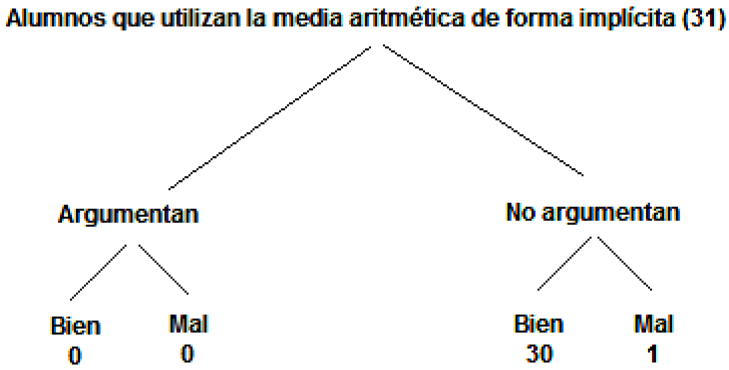


Figura 3. Cuadro resumen de las respuestas de los alumnos de la categoría 1

Un ejemplo de configuración cognitiva de uno de los treinta profesores en formación que en su práctica utiliza la media aritmética en forma implícita, no argumenta y su respuesta es correcta, sería el siguiente (Tabla1).

Tabla 1. Configuración cognitiva alumno 18

Utiliza la media aritmética en forma implícita, no argumenta y su respuesta es correcta	Alumno 18
SITUACIÓN-PROBLEMA	*Problema 2. Reparto equitativo (Unos niños llevan a clase caramelos…)*
LENGUAJE Para repartir los caramelos de forma equitativa, para que todos tengan lo mismo habria que sumarlo todo y repartirlo entre los niños 20 |5 0 4 caramelos por cabeza	Verbal relacionados con el contexto: caramelos. Simbólico: números enteros (20, etc.), y división en caja
CONCEPTOS	Media aritmética (implícito, $\overline{x} = \sum x_i/n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$) Suma División
PROPOSICIONES	El reparto equitativo es la media (implícito)
PROCEDIMIENTOS	Sumar Dividir Cálculo de la media
ARGUMENTOS	Ninguno explícito

El resto de alumnos han activado una configuración cognitiva similar. Solo hay un futuro profesor (alumno 14) que ha cometido un error al realizar la división y ha respondido que “tocarán a 5 caramelos por niño”. Es de destacar que ningún alumno ha argumentado su respuesta, más bien se han limitado a describir el procedimiento utilizado.

- *Categoría 2*: Alumnos que utilizan la media aritmética de forma explícita

Práctica matemática: Son alumnos que utilizan la media aritmética y mencionan el término “media” de forma explícita (Figura 4).

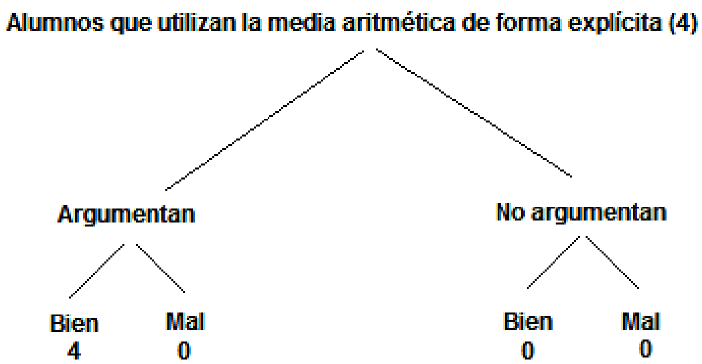
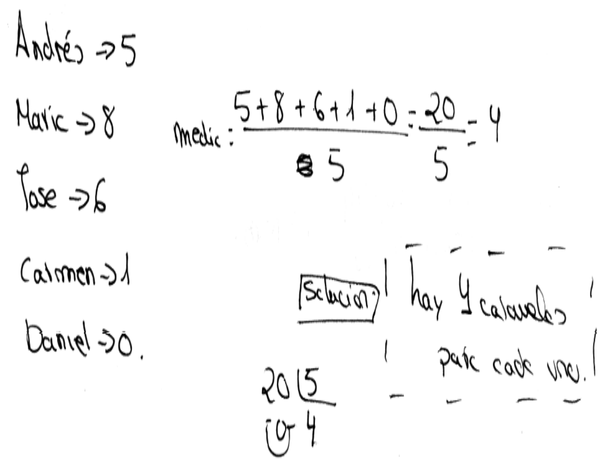


Figura 4. Cuadro resumen de las respuestas de los alumnos de la categoría 2

Un ejemplo de configuración cognitiva de uno de los cuatro futuros profesores que en su práctica utiliza la media aritmética en forma explícita, argumenta y su respuesta es correcta, sería el siguiente (Tabla 2).

Tabla 2. Configuración cognitiva alumno 37

Utiliza la media aritmética en forma explícita, argumenta y su respuesta es correcta	Alumno 37
SITUACIÓN-PROBLEMA	*Problema 2. Reparto equitativo (Unos niños llevan a clase caramelos…)*
LENGUAJE  Andrés → 5 Marie → 8 Jose → 6 Carmen → 1 Daniel → 0. Media: $\frac{5+8+6+1+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$ Solución: ¡hay 4 caramelos para cada uno! 20 | 5 0 4	Verbal relacionados con el contexto: caramelos. Simbólico: cuasi-tabla, números enteros (20, etc.), sumas horizontales, fracciones y división en caja
CONCEPTOS	Media aritmética, $\bar{x} = \sum x_i/n = (x_1 + x_2 + ... + x_n)/n)$ Suma División
PROPOSICIONES	El reparto equitativo es 4 caramelos para cada uno
PROCEDIMIENTOS	Sumar Dividir Cálculo de la media
ARGUMENTOS	Tesis: el reparto equitativo es 4 caramelos para cada uno Argumento: 4 es la media

El resto de futuros profesores ha activado una configuración cognitiva similar, incluso hay uno (alumno 4) que ha utilizado el símbolo.

- *Categoría 3*: Alumnos que no tienen en cuenta el valor nulo

Práctica matemática: Son alumnos que utilizan la media aritmética, pero no tienen en cuenta el valor nulo.

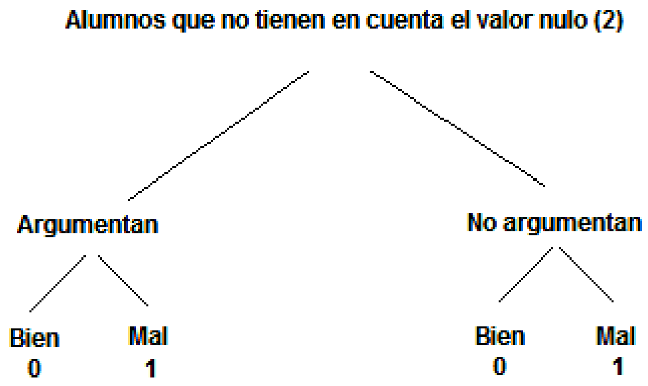
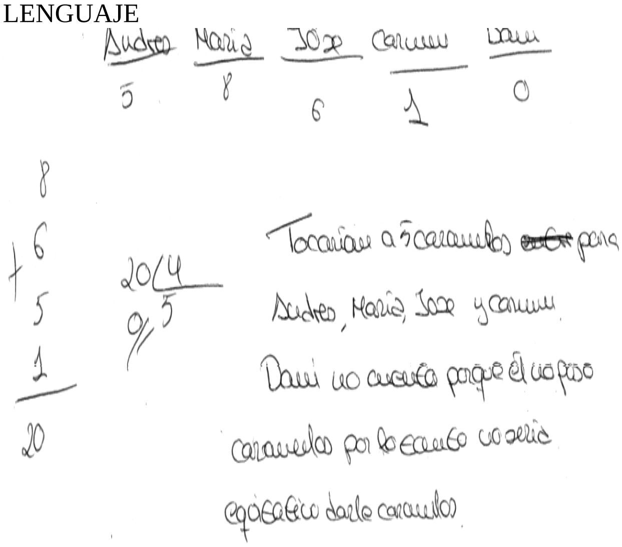


Figura 5. Cuadro resumen de las respuestas de los alumnos de la categoría 3

Un ejemplo de configuración cognitiva del único alumno que en su práctica utiliza la media aritmética en forma implícita, no tiene en cuenta el valor nulo para su cálculo, argumenta y su respuesta es incorrecta, sería el siguiente (Tabla 3).

Tabla 3. Configuración cognitiva alumno 9

Utiliza la media aritmética en forma implícita, argumenta y su respuesta es incorrecta	Alumno 9
SITUACIÓN-PROBLEMA	*Problema 2. Reparto equitativo (Unos niños llevan a clase caramelos…)*
LENGUAJE 	Verbal relacionados con el contexto: caramelos. Simbólico: cuasi-tabla, números enteros (20, etc.), sumas verticales y división en caja
CONCEPTOS	Media aritmética (implícita, $\bar{x} = \sum x_i / n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n)$ Suma, división
PROPOSICIONES	El reparto equitativo es 5 caramelos para todos menos para Daniel
PROCEDIMIENTOS	Sumar, dividir Cálculo de la media
ARGUMENTOS	Tesis: El reparto equitativo es 5 caramelos para todos menos para Daniel Argumento: Dani no cuenta porque él no puso caramelos por lo tanto no sería equitativo darle caramelos

El otro futuro profesor de este grupo (alumno 32) ha activado una configuración cognitiva similar, salvo que no utiliza ningún argumento. Se ha limitado a dar la respuesta de 5 caramelos, resultado de dividir los 20 caramelos entre cuatro niños.

- *Categoría 4*: Alumnos que utilizan la compensación

Práctica matemática: Son alumnos que van compensando el número de caramelos de los niños que tienen menos con los caramelos de los niños que tienen más.

Un ejemplo de configuración cognitiva del único alumno que en su práctica utiliza un método de compensación, quitando caramelos a los niños que más tienen y entregándoselos a los que menos tienen, argumenta y su respuesta es correcta, sería el siguiente (Tabla 4).

Tabla **4.** Configuración cognitiva alumno 3

Utiliza un método de compensación, argumenta y su respuesta es correcta	Alumno 3
SITUACIÓN-PROBLEMA	*Problema 2. Reparto equitativo (Unos niños llevan a clase caramelos…)*
LENGUAJE *Andrés da 1 carmelo a Carmen quedandose con 4. *María da 4 a Daniel y se quedaría con 4. *Jose da 2 a Carmen, se queda con 4 y Carmen y Daniel con los que les han dado tendrían 4 cada uno	Verbal relacionados con el contexto: caramelos. Simbólico: números enteros
CONCEPTOS	Sumas y restas
PROPOSICIONES	El reparto equitativo es 4 caramelos para cada niño
PROCEDIMIENTOS	Sumar y restar
ARGUMENTOS	Tesis: El reparto equitativo es 4 caramelos para cada niño Argumento: Tendrían 4 cada uno

En resumen, se han identificado cuatro categorías de significados personales declarados de los futuros profesores: Categoría 1, con 31 que realizan todos los cálculos necesarios para la obtención de la media aritmética, pero no mencionan el término "media" de forma explícita, ninguno argumenta, y todos, salvo uno, responden correctamente; categoría 2, con cuatro que realizan todos los cálculos necesarios para la obtención de la media aritmética, utilizan explícitamente el término media, argumentan y responden correctamente; categoría 3, con dos que descartan el valor nulo cuando calculan la media aritmética, uno argumenta y el otro no, y sus respuestas son incorrectas; y categoría 4, con uno que utiliza un método de compensación, argumenta y su respuesta es correcta. No obstante, en este último caso, consideramos que el procedimiento más pertinente es el cálculo de la media.

En la Tabla 5 quedan recogidas las tipologías de significados personales declarados de los futuros profesores y la frecuencia de cada una de ellas, indicando si son correctas, incorrectas, y si argumentan o no su respuesta. En ella observamos que, aunque este problema ha sido resuelto de forma correcta por la mayoría, hay tres profesores en formación (7.5 %) que no han utilizado la media como el parámetro más eficiente para realizar un reparto equitativo entre los niños.

Tabla 5. Frecuencias de tipologías de significados personales declarados en el problema

Tipologías	Correcta		Incorrecta		No contesta	Total
	Argumenta	No argumenta	Argumenta	No argumenta		
Media forma implícita	0	30	0	1		31
Media forma explicita	4	0	0	0		4
Descartar el valor nulo	0	0	1	1		2
Compensación	1	0	0	0		1
No contesta						2
Total	5	30	1	2	2	40

Han obtenido el resultado correcto treinta y cinco futuros profesores (87.5 %), donde solo cuatro han aportado un argumento correcto. Han respondido de forma incorrecta tres (7.5%), que han cometido los siguientes errores: dos, que descartan el valor nulo para calcular la media; uno, aunque ha utilizado la media comete errores en las operaciones. De ellos, dos alumnos no aportan argumento, y el que sí lo hace, es de forma incorrecta. Por último, hay dos futuros profesores (5 %) que no contestan.

7. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La herramienta configuración cognitiva, propuesta por el EOS, ha permitido poner de manifiesto la gran variedad de tipologías de significados personales declarados de los futuros profesores de Educación Primaria, cuando resuelven problemas de estadística, en particular, problemas de media aritmética. En total se han identificado cuatro categorías en el problema “Reparto de caramelos”, que han sido descritas anteriormente.

El porcentaje de respuestas correctas es del 87.5 % mucho más alto que el obtenido por Leavy y O’loughlin (2006) del 57% , por Estrada (2007) del 73 %, y por Batanero, Godino y Navas (1997) del 51 %, aunque en estos dos últimos casos el problema era de respuesta múltiple. Esta diferencia favorable en nuestro estudio puede deberse a la sencillez del problema propuesto y a la cotidianidad del contexto utilizado.

El 7.5 % de los futuros profesores no tiene en cuenta la media aritmética para realizar el reparto equitativo entre los niños, porcentaje que es cinco veces menor que el obtenido en el estudio de Leavy y O'loughlin (2006), y en su práctica activa otras configuraciones cognitivas incorrectas. Destaca el alto porcentaje de alumnos que no aporta ningún argumento (80%), limitándose solo a describir el procedimiento utilizado.

El 5 % de los futuros profesores comete el error de no tener en cuenta el valor nulo para el cálculo de la media, porcentaje similar al obtenido por Estrada (2007) y la mitad del obtenido por Batanero, Godino y Navas (1997). Según Strauss y Bichler (1988), esta dificultad refleja el carácter abstracto de esta medida, por lo que es recomendable plantear un desarrollo intuitivo de este concepto en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Solo hay un profesor que ha cometido un error al realizar la división. Las causas de estos errores pueden ser debidas a su escasa formación en estadística, y a que recibieron, en general, una enseñanza basada en situaciones descontextualizadas; donde solo había que aplicar el algoritmo de la media aritmética.

En relación con la comprensión matemática de la media aritmética, desde el enfoque teórico utilizado en este trabajo, se puede considerar que los futuros profesores que han aplicado este concepto en el problema analizado, manifiestan un mayor nivel de comprensión que quienes no la han utilizado ni la han relacionado con esta situación; ya que han establecido una función semiótica entre el problema y el objeto "media aritmética", que les ha permitido reconocer el problema propuesto como una situación extramatemática que cae bajo el dominio de dicho objeto. Se trata de un hecho significativo, si se tiene en cuenta que, tal como está formulado el problema, en ningún momento queda explícito que se deba utilizar la media. Esto ha sido corroborado por Leavy y O'loughlin (2006), quienes consideran que un indicador de la comprensión conceptual de la media aritmética es el reconocimiento de situaciones donde la media es una medida adecuada.

Estos resultados ponen de manifiesto que muchos de los errores continúan hasta la universidad, y apuntan la necesidad de reforzar la formación estadística elemental de los futuros profesores de Educación Primaria; que difícilmente podrán enseñar un concepto que no comprenden y en el que muestran dificultades tan notables. Como reflexión final, se considera que el formador de profesores debe tenerlas en cuenta, además del razonamiento estadístico, al abordar la enseñanza de la estadística en las Facultades de Educación, cambiando no solo los contenidos sino la metodología. Para ello, debemos proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del significado global de la media aritmética, y prepararlos en la componente pedagógica, mostrándoles situaciones de uso en el aula, metodología didáctica y los aspectos cognitivos.

Agradecimientos. Esta investigación ha sido cofinanciada por el Plan Propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20, y forma parte del Proyecto EDU2010-14947 (MICINN y FEDER) y del proyecto EDU2009-08120/EDUC.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 25*, 41-58.

Batanero, C., Godino, J. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 304-310). Granada, España: Universidad de Granada.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. En H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 22* (1), 5-18.

Eco, U. (1979). *Tratado de semiótica general.* Barcelona: Lumen.

Espinel, M. C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores y P, Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 99-119). Tenerife, España: SEIEM.

Estrada, A. (2007). Evaluación del conocimiento estadístico en la formación inicial del profesorado. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *45*, 78-97.

Font, V. y Contreras A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33-52.

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, C. (2008). From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes. En L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 157–173). Rotterdam, Sense Publishers.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8* (1), 67-98.

Gal, I. (2005). Democratic access to probability: Issues of probability literacy. En G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp.39-63). New York: Springer.

García Cruz, J. A. y Garrett, A. J. (2008). Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students. *Journal of the Corea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, *12* (1), 49-66.

Garrett, A. J. (2008). *La media aritmética: Aspectos cognitivos, estrategias, errores y dificultades en su comprensión por el alumnado,* Tesis Doctoral inédita, Universidad de La Laguna, Tenerife, España.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *14*, (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *39*, (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers trough project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*, Monterrey, México.

Leavy, A. y O'loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean moving beyond the arithmetic average. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9,* 53-90.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10* (3), 365-399.

Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 107-130.

Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 415-429.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado,* nº 293.

N. C. T. M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA, NCTM.

Olivo, E., Batanero, C. y Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, *20* (3), 5-32.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca, España: SEIEM.

Pollatsek, A. Lima, S. y Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 191-204.

Ramos, A. B. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática Educativa*, *11* (2), 233-265.

SEP (2006). *Programas de estudio. Educación básica. Secundaria.* México D.F.: Secretaría de Educación Pública. En línea: http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/programa.html

Shaugnessy, J. M. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1008) NCTM, Greenwich, CT..

Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19* (1), 64-80.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools. Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366): New York: Springer.

Capítulo 8

PARADOJAS COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN PROBABILÍSTICA DE LOS PROFESORES

PARADOXES AS A DIDACTIC TOOL FOR THE PROBABILISTIC TRAINING OF TEACHERS

J. Miguel Contreras y Carmen Batanero

Universidad de Granada

Resumen. En este trabajo se describe el contenido necesario para la preparación didáctica de profesores para la enseñanza de la probabilidad y se sugieren algunas posibilidades que las paradojas clásicas de probabilidad ofrecen para organizar actividades didácticas que puedan contribuir a esta formación.

Palabras clave: Probabilidad, paradojas, formación de profesores.

Abstract. This paper describes the content required for the didactic preparation of teachers to teach probability and suggests some possibilities that classical probability paradoxes offer to organize educational activities that can help achieve this goal.

Keywords: Probability, paradoxes, training teachers.

1. INTRODUCCIÓN

Aunque la probabilidad está incluida en el currículo de matemáticas de educación primaria y secundaria, los profesores de matemáticas con frecuencia carecen de una preparación didáctica suficiente para enseñar esta materia, de forma que ésta contribuya a la formación, no sólo de los conocimientos matemáticos de sus estudiantes, sino también de sus intuiciones probabilísticas. Incluso aunque la mayoría de los profesores de secundaria tienen una licenciatura en matemáticas, necesitan también conocimiento del contenido didáctico relacionado con la enseñanza de probabilidad; por ejemplo, sobre el uso de la simulación, los diferentes significados de la probabilidad o las etapas en el desarrollo del razonamiento probabilístico de sus alumnos.

La situación es aún más crítica para los profesores de la escuela primaria, puesto que pocos de ellos han tenido la formación necesaria para la enseñanza de la probabilidad y algunos ni siquiera han seguido un curso completo de probabilidad durante su formación como maestros. Ello ocasiona en algunos casos concepciones incorrectas sobre las ideas de azar y probabilidad (Azcárate, 1996) y en otras lleva a los profesores a tratar de reducir o incluso omitir la enseñanza de la probabilidad (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006). Por consiguiente, es urgente ofrecer una mejor educación previa a estos profesores, lo que puede lograrse con el apoyo continuo de departamentos universitarios y de grupos de investigación (Franklin y Mewborn, 2006).

En este trabajo describimos los componentes del conocimiento que los profesores necesitan para enseñar adecuadamente la probabilidad. Seguidamente analizamos las posibilidades que ofrecen algunas paradojas clásicas de la teoría de la probabilidad para organizar situaciones didácticas orientadas a mejorar la formación matemática y didáctica de los profesores en el campo de la probabilidad.

2. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

Los profesores tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas (Ponte, 2001). Aunque, para la enseñanza de la probabilidad en la escuela, no necesitan altos niveles de conocimientos matemáticos, tales como, por ejemplo, la teoría de la medida, sin embargo si requieren una comprensión profunda de las matemáticas básicas que se enseñan en la escuela. Dicha comprensión incluye un conocimiento suficiente de las interconexiones y relaciones entre los diferentes conceptos matemáticos y sus aplicaciones (Ma, 1999), y también otros conocimientos no estrictamente matemáticos, que son necesarios para organizar la enseñanza y llevarla a la práctica. Batanero, Godino y Roa (2004) especifican las siguientes componentes necesarias para el conocimiento profesional de los docentes:

- *Epistemología*: El maestro requiere no sólo conocer el significado matemático de los conceptos, sino también el de su desarrollo histórico y de los diversos significados que cada concepto que enseña ha recibido en diferentes periodos. Es también útil comprender las controversias asociadas a estas diferentes definiciones, para ayudarle a comprender mejor las dificultades de sus alumnos. Por ejemplo, los diferentes significados de la probabilidad estuvieron en su día sujetos a debates filosóficos, algunos de los cuáles se mantienen incluso en la actualidad (ver Batanero, Henry y Parzysz, 2005).

• *Cognición*: Es importante tener conocimientos sobre el desarrollo de la comprensión que los niños alcanzan de los conceptos básicos, dependiendo de su edad. Ello permitirá una mejor predicción de las dificultades de aprendizaje de los alumnos, sus posibles errores, obstáculos y estrategias en la resolución de problemas. Los aspectos afectivos que los estudiantes puedan desarrollar en relación a la materia (miedo, interés, etc.) también deben tenerse en cuenta.

• *Materiales*: El profesor debe conocer los recursos que pueden favorecer el aprendizaje y las técnicas de enseñanza adecuadas. Debe tener experiencia con buenos ejemplos de situaciones de enseñanza y herramientas didácticas, y alcanzar una capacidad crítica para analizar los libros de texto y documentos curriculares, así como habilidad para adaptar los temas a los conocimientos en diferentes niveles de enseñanza. Debe conseguir el interés de los alumnos, teniendo en cuenta sus actitudes y creencias.

• *Interacción*: Capacidad para crear una buena comunicación en el aula y organizar el discurso y comunicación entre alumnos y entre alumnos y profesor. Asimismo debe utilizar la evaluación como una forma de guiar la instrucción.

Estos tipos de conocimiento son revisados por Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008), quienes incluyen los siguientes componentes en su modelo de conocimiento profesional de los docentes:

• Componente epistémica: conocimiento del contenido matemático o estadístico, es decir, el conjunto de problemas, procedimientos, conceptos, propiedades, el lenguaje y argumentos incluidos en la enseñanza de un tema dado y su distribución en el tiempo de enseñanza.

• *Componente cognitiva*: conocimiento de los niveles de los estudiantes del desarrollo y la comprensión del tema, las estrategias de los estudiantes, las dificultades y errores en cuanto al contenido previsto.

• *Aspecto afectivo*: conocimiento de las actitudes de los estudiantes, las emociones, las motivaciones sobre el contenido y el proceso de estudio.

• *Componente mediacional*: conocimiento de los recursos didácticos y tecnológicos disponibles para la enseñanza y las posibles formas de utilizar y distribuir estos recursos en el tiempo.

• *Componente interaccional*: gestión de las organizaciones posibles del discurso en el aula y las interacciones entre el profesor y los estudiantes que ayudan a resolver las dificultades de los estudiantes y los conflictos.

• *Componente ecológico*: el conocimiento de la relación del tema con el currículo oficial, otros temas matemáticos o estadísticos y con los entornos sociales, políticos y económicos que apoyan la enseñanza y el aprendizaje.

Estos modelos de formación del profesor proporcionan una pauta para organizar actividades formativas dirigidas a desarrollar todo o parte de dicho conocimiento. Como indican Ponte y Chapman (2006), debemos considerar los profesores como profesionales, y formar a los docentes en la práctica profesional, haciendo que todos los elementos de la práctica (preparación de las clases, tareas y materiales, la realización de clases, observación y reflexión sobre la experiencia) sean el elemento central del proceso de formación del profesorado. En la siguiente sección se sugiere el interés de las paradojas de la historia clásica de la probabilidad para organizar algunas actividades didácticas dirigidas a capacitar a los profesores en la probabilidad. El objetivo es provocar la reflexión de los profesores sobre el significado de las nociones estocásticas elementales, ayudarles a darse cuenta de las dificultades de los estudiantes y los obstáculos, y darles ejemplos de metodología y materiales didácticos.

3. PARADOJAS COMO HERRAMIENTA PARA DESARROLLAR EL CONOCIMIENTO DEL DOCENTE

Los modelos anteriores de conocimientos profesionales sugieren que los conocimientos estadísticos en sí mismos no son suficientes para que los docentes puedan enseñar probabilidad de una manera efectiva y desarrollar en sus estudiantes un adecuado razonamiento probabilístico. Algunos profesores pudieran no estar familiarizados con la metodología propuesta en los nuevos currículos (basada en experimentos y simulaciones) o no ser conscientes de algunas de las dificultades y sesgos probabilísticos de sus alumnos (Stohl, 2005). Si su formación inicial se centró en las competencias matemáticas, pueden sentirse inseguros con enfoques más informales.

Una implicación del anterior análisis es la necesidad de desarrollar y evaluar los conocimientos profesionales de los docentes y las competencias, que tenga en cuenta los diferentes componentes del saber pedagógico. Es importante apoyarlos y proporcionarles actividades que les sirvan para conectar los aspectos conceptuales y didácticos (Ball, 2000). Puesto que queremos que los estudiantes construyan su conocimiento en forma activa, resolviendo problemas e interactuando con sus compañeros en la clase, las actividades presentadas a los profesores también deben basarse en el enfoque constructivista y social del aprendizaje (Jaworski, 2001).

Una herramienta didáctica posible es utilizar algunas de las paradojas clásicas que aparecidas en la historia de la probabilidad para diseñar actividades dirigidas a la formación de profesores. Podemos servirnos de algunas de estas paradojas clásicas (ver Székely, 1986) para crear situaciones didácticas que sirvan para provocar la reflexión didáctica de los profesores. Puesto que el profesor tiene unos conocimientos sólidos de probabilidad elemental, hemos de buscar problemas, que, siendo aparentemente sencillos, puedan tener soluciones contra intuitivas o sorprendentes. No es difícil encontrar este tipo de situaciones, ya que la historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica con frecuencia nos engaña (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Una mirada a la historia permite tomar conciencia de que los objetos probabilísticos no son inmutables, sino fruto del ingenio y la construcción humana para dar respuesta a situaciones problemáticas. Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos que deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo.

Estos problemas, así como las soluciones, tanto correctas como erróneas, que algunos participantes puedan defender vehementemente al tratar de solucionarlos, servirán para analizar cuáles son los conceptos involucrados en las soluciones, algunos de los cuales surgieron precisamente para dar solución a uno de estos problemas paradójicos, como reconocen varios autores. Lesser (1998) indica que el uso inteligente de estos ejemplos contra-intuitivos apoya una pedagogía constructivista, promoviendo un aprendizaje profundo a partir de las creencias previas y dando al profesor el papel de facilitador del aprendizaje. Falk y Konold (1992), por su parte, afirman que estas actividades requieren una consciencia de los propios pensamientos, lo que es tan importante como el aprendizaje de la solución correcta y un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta. Konold (1994) destaca el efecto motivador de los resultados sorprendentes que anima a los estudiantes a explorar el problema más formalmente.

A continuación describimos un taller dirigido a profesores y basado en una paradoja clásica y seguidamente analizamos otras paradojas que podrían servir para organizar talleres similares con los profesores.

4. UNA ACTIVIDAD FORMATIVA BASADA EN UNA PARADOJA DE BERTRAND

Joseph Bertrand (1822-1900), matemático francés cuyas principales áreas de trabajo fueron la Teoría de Números, la Geometría Diferencial y la Teoría de las Probabilidades, publicó en 1889 el libro “Calcul des probabilités”, el cual, contiene numerosos ejemplos de problemas de probabilidades en los cuales el resultado es contrario a la intuición, entre ellos, el siguiente problema:

> *Tenemos tres cajas: una caja que contiene dos monedas de oro, una caja con dos monedas de plata, y una caja con una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se toma una moneda al azar, por ejemplo una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea de oro?*

Dicha paradoja, y sus múltiples variantes es analizada con detalle en Contreras, Batanero, Arteaga Cañadas (en prensa). Una de estas variantes fue tomada por Batanero et al. (2004) para diseñar una actividad de formación de profesores que sirve para comparar la concepción frecuentista y Laplaciana de la probabilidad, y para reflexionar sobre los conceptos de experimento dependiente y probabilidad condicional. Adicionalmente, los autores proponen que los profesores realicen un análisis didáctico que sirve para reflexionar sobre el papel de la resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático.

El taller propuesto por Batanero et al. se inicia proponiendo a los profesores un juego de apuestas, animándoles a que descubran la mejor estrategia para ganar el juego. La descripción del juego es la siguiente:

> *Tomamos tres tarjetas de la misma forma y tamaño. Una es de color azul en ambos lados, la segunda es de color rojo en ambos lados y la tercera es azul de un lado y roja por el otro. Ponemos las tres tarjetas en una caja, y agitar la caja, antes de seleccionar una tarjeta al azar. Después de seleccionar la tarjeta se muestra uno de los lados. El objetivo del juego es adivinar el color de la cara oculta. Repetimos el proceso, poniendo la tarjeta de nuevo en la caja antes de cada nueva extracción. Hacemos predicciones sobre el color del lado oculto y gana un punto cada vez que nuestra predicción es correcta.*

Para organizar correctamente el taller, los participantes primero han de hacer algunas pruebas del juego y, a continuación, el formador de profesores ha de pedirles que encuentren la estrategia que produce la oportunidad de ganar más veces en una serie larga de ensayos. Debido al carácter contra intuitivo, surgirá más de una solución (algunas incorrectas). Después de algunas repeticiones del juego, todas las estrategias sugeridas por los profesores deben figurar en la pizarra y posteriormente sería organizado por el formador de profesores un debate para decidir cuál es la mejor estrategia. El objetivo de este debate, donde es posible tanto el razonamiento correcto como los conceptos erróneos, es aumentar el conocimiento probabilístico del maestro. Si no hay acuerdo final, los participantes serán animados a realizar una demostración matemática de su estrategia y se organiza un debate que permitirá revelar los razonamientos erróneos.

La actividad se complementa con el análisis didáctico de las ideas fundamentales que se utilizaron para hallar la solución, los errores potenciales de los estudiantes y las fases didácticas del juego. Heitele (1975) indica que, además de las ideas básicas de aleatoriedad, hay una serie de conceptos sobre los cuáles se apoya todo el cálculo de probabilidades. Para elaborar una lista de ideas estocásticas fundamentales, Heitele sostiene que el principio decisivo de instrucción en un tema es la transmisión de las ideas fundamentales. El autor indica que cualquier tema puede ser enseñado efectivamente en alguna forma correcta a cualquier niño en cualquier estado de desarrollo, lo que implica que las ideas fundamentales son una guía necesaria desde la escuela primaria a la universidad para garantizar una cierta continuidad.

Nosotros hemos experimentado el taller con un total de 166 profesores en formación o ejercicio en cursos ofrecidos en España, México y Portugal (Contreras, Díaz, Batanero y Ortiz, 2010) comprobando que, aproximadamente los dos tercios de los participantes propusieron estrategias incorrectas al comienzo del taller, que fueron evolucionando hacia la solución correcta en la mayoría de los casos como consecuencia de la actividad.

Con ayuda del análisis didáctico, los profesores identificaron algunas ideas fundamentales descritas por Heitele (1975): sucesos y espacio muestral, probabilidad y convergencia, operaciones combinatorias, las reglas de adición y multiplicación de probabilidades, independencia, probabilidad condicionada, variable aleatoria, equidistribución y simetría, esperanza matemática y muestreo. Aunque el número de ideas estocásticas identificadas por cada profesor fue pequeño, pensamos ello fue debido a que hubiese sido necesario un mayor tiempo para la actividad. La actividad también ayudó, de acuerdo con Batanero et al., (2004), a aumentar algunas componentes de los conocimientos profesionales:

- *Componente epistémica*: Al hacer reflexionar al futuro profesor sobre los diversos significados históricos de la probabilidad (subjetiva, frequentista y clásica) y las controversias ligadas a su definición en diferentes momentos históricos;

- *Componente cognitivo*: pues se analizaron las principales dificultades de los estudiantes con los conceptos de probabilidad condicional e independencia y los razonamientos y estrategias correctas e incorrectas para resolver el problema;

- *Componente afectivo*: experimentando nuevos métodos de enseñanza, basados en el juego, experimentación y debate, que permitió aumentar el interés de los profesores y su participación en la actividad;

- *Componente interaccional*: aumentando su experiencia sobre la forma de organizar el discurso y el tiempo didáctico y de hacer aflorar y resolver los conflictos cognitivos de los estudiantes;

- *Componente ecológico*: pues la actividad se puede conectar con el estudio de las concepciones erróneas sobre el azar (psicología) y con los problemas sociales relacionados con la adicción a los juegos de azar (sociología).

5. OTRAS PARADOJAS

A continuación se describen brevemente otras paradojas que podrían servir de base para el diseño de talleres de formación matemática y didáctica de los profesores en el campo de la probabilidad.

Paradoja de la división de las apuestas

Este problema, uno de los que origina el Cálculo de Probabilidades y que interesó a los matemáticos durante un largo periodo histórico, fue propuesto por primera vez por Fray Luca Pacioli (1445-1514) en su obra "Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalitá". Una formulación elemental de este problema es la siguiente:

Dos jugadores compiten por un premio que se asigna después de que uno de ellos haya ganado "n" partidas en un juego. En un determinado momento, se tiene que parar el juego, y un jugador lleva mayor número de partidas ganadas que el otro. ¿Cómo debe dividirse la apuesta entre los dos jugadores?

De acuerdo a Székely (1986), Pacioli sugirió como solución el reparto proporcional de la apuesta a la cantidad de puntos obtenido por cada jugador al momento de interrumpir el juego. Dicha solución no fue aceptada, pues sólo tenía en cuenta lo que había ocurrido en la partida hasta el momento que se interrumpe, y no lo que pudiera suceder a continuación. Otras soluciones incorrectas fueron publicadas por Tartablia (1499-1557) en "Trattato generale di numeri et misure" y Cardano (1501-1576) en "Practica arithmeticae generalis".

La solución correcta viene dada por Pascal y Fermat, quienes en su correspondencia fijan las bases de la teoría de la probabilidad. Consideran por primera vez el conjunto de todas las posibilidades (que posteriormente llamaríamos espacio maestral) y resuelven el problema para una partida con dos jugadores, pero no desarrollan una solución completa. Dicha solución sería obtenida por Christiaan Huygens (1629-1695) en "Van rekinigh in Spelen van Geluck", mediante la introducción de un nuevo concepto que denomina "expectatio" y que posteriormente formalizado daría lugar a lo que hoy conocemos como esperanza matemática o "cantidad que se espera ganar en un juego equitativo".

Paradoja del cumpleaños

Esta no es una paradoja, en el sentido estricto del término, pues no conlleva una contradicción. Sin embargo, su solución contradice la intuición común. Este problema y su solución fueron propuestos por Schnabel (1938) en la teoría de estimación del total de población de peces en un lago, bajo el nombre *Captura-recaptura estadística*. Una formulación elemental de la paradoja es la siguiente:

Si hay 23 personas reunidas, hay una probabilidad del 50,7% de que al menos dos personas de ellas cumplan años el mismo día. Para 60 o más personas la probabilidad es mayor del 99%.

Una respuesta errónea es pensar que si un año tiene 365 días (366 si es bisiesto) haría falta por lo menos un grupo de personas equivalente a la mitad de los días de un año (183 personas si redondeamos) para alcanzar una probabilidad de al menos un 50%. Se supone que con 23 personas la probabilidad de ocurrencia de la afirmación debería de ser mucho menor. Para ver la solución correcta, calculemos la probabilidad aproximada de que en una habitación de n personas, ninguna cumpla años el mismo día, desechando los años bisiestos:

$$P = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365}$$

En la anterior solución, calculamos probabilidades simples de que una segunda persona no pueda tener el mismo cumpleaños que el primero (364/365), que una tercera persona no puede tener el mismo cumpleaños que las dos primeras (363/365) y así sucesivamente para un n dado. La probabilidad del suceso complementario *1-p* en este caso sería la probabilidad que al menos dos personas tengan el mismo día de cumpleaños. Puesto que $1-p=1-\left(\frac{364}{365}\right)^n$ para *n=23* se obtiene una probabilidad *p*=0.493 por lo que *1-p* es alrededor de 0,507.

La clave para entender la paradoja del cumpleaños es que hay muchas probabilidades de encontrar parejas que cumplan años el mismo día. Específicamente, entre 23 personas, hay (23×22)/2=253 pares de persona, cada uno de ellos un candidato potencial para cumplir la paradoja. Sin embargo, si una persona entrase en una habitación con 22 personas, la probabilidad de que cualquiera cumpla años el mismo día que quien entra, es mucho más baja. Esto es debido a que ahora sólo hay 22 pares posibles.

Paradoja de Simpson

Simpson (1951) publicó el problema posteriormente conocido como paradoja de Simpson, o efecto de Yule-Simpson, ya que anteriormente este fue descrito por el británico George Udny Yule. Este fenómeno muestra que en determinados casos se produce un cambio en la asociación o relación entre un par de variables, ya sean cualitativas o cuantitativas, cuando se controla el efecto de una tercera variable. Un ejemplo de una situación concreta donde se aplica este efecto viene dado por el siguiente enunciado:

Supongamos que se quiere realizar un estudio comparativo sobre dos hospitales de una determinada ciudad, que llamaremos respectivamente A y B. Para ello la siguiente tabla 1 muestra el número de muertes tras las operaciones realizadas en cada uno de los hospitales.

Tabla 1. Supervivencia en dos hospitales

	Hospital A	*Hospital B*
No sobreviven	*63*	*16*
Sobreviven	*2037*	*784*
Total de pacientes operados	*2100*	*800*

Si analizamos los datos de la Tabla 1, se puede observar que en el hospital A, del total de los pacientes que se someten a una operación muere el 3% ($\frac{63}{2100}$) y en el hospital B del total de los pacientes operados muere un 2% ($\frac{16}{800}$). Por lo que inicialmente, estos resultados nos podrían llevar a pensar que el hospital más seguro para someterse a una operación sería el hospital B. El problema aparece cuando tenemos en cuenta la siguiente variable, estado de salud de los pacientes antes de la operación. Observemos los datos mostrados en las tablas 2 y 3 donde se tiene en cuenta el estado de salud de los pacientes antes de ser hospitalizados, y se clasifican los pacientes en dos grupos, los que tenían buena salud y los que no.

Tabla 2. Supervivencia de enfermos con buena salud

Pacientes con buena salud	*Hospital A*	*Hospital B*
No sobreviven	*6*	*8*
Sobreviven	*594*	*592*
Total de pacientes operados	*600*	*600*

Tabla 3. Supervivencia de enfermos de salud delicada

Pacientes con salud delicada	*Hospital A*	*Hospital B*
No sobreviven	*57*	*8*
Sobreviven	*1443*	*192*
Total de pacientes operados	*1500*	*200*

Si analizamos la tasa de mortalidad de personas que han sido operadas en ambos hospitales, teniendo en cuenta el estado de salud antes de la operación, se tiene que, del total de paciente con buena salud que se operaron en el hospital A, fallecieron un 1% ($\frac{6}{600}$) y de los que se operaron el B, no sobrevivieron un 1,3% ($\frac{8}{600}$). Por lo tanto bajo estas condiciones parece mejor el hospital A. Estudiemos ahora el caso de pacientes con salud delicada: Del total de los que se operaron en el hospital A un 3,8% ($\frac{57}{1500}$) murieron y en el caso del hospital B el 4% ($\frac{8}{200}$), por lo que también podríamos concluir que el hospital A tiene una tasa de mortalidad de pacientes recién operados de salud delicada mejor que la del hospital B.

Es aquí donde se presenta la aparente paradoja, ya que sin tener en cuenta la variable estado de salud de los pacientes, el hospital B tenía mejor tasa de supervivencia, y sin embargo si separamos los pacientes en dos grupos, los que tenían buena salud y los de salud delicada, en cada uno de estos dos grupos, el hospital A obtuvo menor tasa de mortalidad tras las operaciones. La paradoja se resuelve observando las dos últimas tablas y observando que la mayoría de los pacientes que se operan en el hospital A tienen salud delicada y es de esperar que este tipo de pacientes tenga mayor dificultad en sobrevivir tras una operación, y esto hace que la tasa de mortalidad en dicho hospital sea mayor que en el hospital B, que tiene menos pacientes y la mayoría de salud buena.

Paradoja de Condorcet

El análisis de los métodos de votación pretende conseguir una forma de elección lo más cercana posible al sentir de la mayoría del cuerpo electoral. El problema de elegir un buen método de asignación de escaños lo plantea Antoine de Caritat Condorcet, sobre 1780, en uno de sus principales trabajos: el "Ensayo sobre la aplicación del análisis a la probabilidad de las decisiones sometidas a la pluralidad de voces". En dicho trabajo, que fue elaborado por su autor para intentar hallar el número óptimo de miembros de un jurado en los Tribunales Populares de Justicia, instaurados por la Revolución Francesa. Condorcet demostró que los sistemas de votación que aplican la regla de aceptar simplemente la opinión de la mayoría, podrían no llegar a una situación concluyente.

La paradoja advierte que, aunque las preferencias individuales en las votaciones tienen propiedad transitiva (si una persona prefiere al candidato A frente al B y prefiere al B frente al C), no tiene por qué haber transitividad en las preferencias colectivas (si la mayoría de un grupo de personas prefiere al candidato A frente al B y también la mayoría del mismo grupo prefiere a B frente a C, esto no implica que la mayoría del grupo prefiera a A frente a C). Esta es una de las situaciones, aunque no la única, en que la propiedad transitiva no se aplica en el cálculo de probabilidades (Székely. 1986).

Para dar una solución intuitiva a esta paradoja usaremos el ejemplo presentado en el servidor "Matemáticas Educativas", en el epígrafe "matemáticas del voto" (www.iescarrus.com/edumat/taller/votaciones/votaciones_02.htm). Supongamos que tenemos 49 votantes que tienen que elegir entre tres candidatos X, Y y Z. Como es normal, cada votante tiene sus propias preferencias, por tanto es posible que un votante prefiera al candidato X antes que al Y y al Y antes que al candidato Z, por lo tanto también preferirá a X antes que al candidato Z. Es decir existe una transitividad entre las preferencias y ello nos permite asociar a cada votante con un orden de preferencias (X>Y>Z). En la Tabla 4 hemos presentado todos los posibles órdenes de preferencia que se pueden dar entre tres candidatos y unas frecuencias posibles, dentro de la muestra de 49 personas.

Tabla 4. Posibles frecuencias de las preferencias entre tres candidatos

X>Z>Y	Z>X>Y	Z>Y>X	Y>Z>X	Y>X>Z	X>Y>Z
21	3	4	16	5	0

Si se tienen en cuenta estas preferencias, en una primera vuelta de las elecciones, se elegiría el candidato preferido por más personas, y por tanto los resultados serían los siguientes: El candidato X tiene 21 (21+0) votos, el Y 21 votos (16+5), y el candidato Z tiene 7 votos (3+4) y se produce un empate.

Supongamos que para romper el empate entre X e Y se realiza una nueva votación, en la que sólo se puede votar a los candidatos que empataron en la primera vuelta, lo que es habitual en muchos sistemas de votación. En este supuesto, los votos del candidato Z pasan al resto de candidatos según la segunda preferencia. Los resultados entonces son: X, 24 votos (21+3) e Y, 25 votos (4+16+5) y por tanto ganaría el candidato Y con 25 votos frente a los 24 de X.

Aparentemente esto resuelve el problema y habría que dar el puesto a Y. Sin embargo, si analizamos el número de personas que prefieren a Z antes que a Y, se observaría que hay 21 personas que prefieren a Y y 28 que prefieren a Z, por lo que debiera elegirse a Z. Por otro lado 26 personas prefieren a candidato X antes que a Z mientras que sólo 23 prefieren a Z antes que al X.

El resultado es paradójico porque implica que la voluntad de mayorías parciales entra en conflicto entre sí. En otras palabras es posible que un procedimiento de elección falle el criterio de que siempre hay un ganador. El hecho de que una mayoría prefiera a X antes que a Z y a Z antes que a Y, no conduce necesariamente a que prefieran a X antes que a Y. Se produce un proceso cíclico.

La paradoja de los dos sobres

La “paradoja de los dos sobres” también conocida como “paradoja del intercambio” o “problema de las dos billeteras” fue propuesta por Kraitchik (1953). Una formulación sencilla de esta paradoja es la siguiente:

Dos personas, igualmente ricas, se reúnen para comparar el contenido de sus carteras. Cada uno ignora el contenido de las dos carteras. El juego es el siguiente: cualquiera que tenga menos dinero recibe el contenido de la otra cartera (en el caso de que las cantidades sean iguales, no hay intercambio). ¿Es un juego equitativo? ¿Quién tiene ventaja?

El razonamiento que habitualmente nos planteamos y puede conducir a error es el siguiente: Como sabemos, en uno de los sobres hay una cantidad x y por tanto el otro sobre puede tener o bien 2x o bien x/2. Elegimos un sobre (la probabilidad de elegir un sobre y de que tengamos una de las cantidades es de 1/2). Calculamos la esperanza matemática de la cantidad que contiene el otro sobre, es decir el valor esperado en función de los datos de los que dispongo. Por definición, la esperanza será la suma de las probabilidades de ocurrencia por la cantidad de cada uno, es decir: $E[x]=0,5\cdot 2x+0,5\cdot x/2=1,25x$. Ya que suponemos que x es un valor mayor que la unidad, 1,25x es mayor que x, al concursante le vendría bien elegir el otro sobre ya que la cantidad esperada es mayor que la posee. Lo paradójico es que habríamos razonado exactamente igual si cambiamos de sobre inicial, por lo que en cualquier caso conviene cambiar de sobre.

Para resolver correctamente el problema hay que suponer una cantidad concreta en cada sobre. Supongamos que un sobre tiene 1000 euros y el otro tiene 2000. Con el razonamiento anterior, esperaríamos ganar 1500 euros cambiando de sobre. Pero, si abrimos el sobre de 1000 euros, no es cierto que el otro tenga 2000 o 500 euros con probabilidad 1/2, sino que tiene 2000 con probabilidad 1. Si elegimos el sobre de 2000 euros el otro tiene 1000 con probabilidad igual a 1. Luego el valor esperado a ganar si cambiamos de sobre sería la probabilidad de elegir el sobre con 2000 euros, multiplicado por la ganancia esperada si se elige este sobre más la probabilidad de elegir el sobre con los 1000 euros multiplicado por la ganancia esperada; es decir $\frac{(1000-1000)}{2}=0$ y por tanto da igual cambiar o no de sobre.

6. REFLEXIONES FINALES

Los profesores necesitan apoyo y formación adecuada para tener éxito en el logro de un equilibrio adecuado de la intuición y el rigor en la enseñanza de la probabilidad. Lamentablemente, no todos los profesores no siempre reciben una buena preparación para enseñar a la probabilidad en su formación inicial. Sin embargo, actividades como la que se analizan en este trabajo pueden servir al mismo tiempo para aumentar los conocimientos de probabilidad en los docentes y sus conocimientos profesionales. Además, los maestros pueden trabajar muchos conceptos matemáticos (como los números, porcentajes, índices, combinatoria, pruebas, etc.) con estos ejemplos.

Pensamos también que en este juego se dan las condiciones de idoneidad didáctica, que Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) definen como la articulación de seis componentes:

• *Idoneidad epistémica o matemática*: Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Los problemas propuestos son idóneos para el estudio de los conceptos de: probabilidad condicional, experimento compuesto, dependencia e independencia y experimentos dependientes e independientes, aunque esta idoneidad depende del tipo de solución encontrada. En general las soluciones formales tienen mayor idoneidad en un curso universitario y de formación de profesores, pero en un curso de secundaria las soluciones intuitivas podrían ser suficientes. Las soluciones empíricas, basadas en la simulación. tienen, en general, baja idoneidad matemática, a menos que se complemente con una solución intuitiva o formal.

• *Idoneidad cognitiva*: Grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los pretendidos por el profesor. Las padarojas tienen suficiente idoneidad en cursos de formación de profesores de secundaria y los últimos cursos de secundaria, pues los razonamientos descritos están al alcance de los alumnos.

• *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción. Este tipo de idoneidad dependerá de cómo organiza el profesor el trabajo en el aula. Será importante que los estudiantes trabajen en grupos para que surja el conflicto y se explicite. Será importante también organizar una discusión colectiva de las soluciones para que los mismos alumnos ayuden a sus compañeros a detectar los puntos equivocados.

- *Idoneidad mediacional*: Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. No se precisa de muchos recursos, pues incluso podría hacerse una simulación con objetos físicos o con un solo ordenador en el aula, donde los alumnos pueden jugar colectivamente.

- *Idoneidad emocional*: Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio. Pensamos que esta es la más alta de todas, pues las paradojas interesan a todo el que trata de resolverlas.

Finalizamos recordando la necesidad de seguir investigando sobre los componentes esenciales en la preparación de los profesores para enseñar la probabilidad y el método adecuado en el que cada componente debe ser enseñado. Aunque ha habido un esfuerzo de investigación importante centrado en la educación matemática y en el desarrollo profesional docente en la última década (por ejemplo, Ponte y Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Wood, 2008), no se han reflejado en la educación estadística. Esta es un área importante de investigación que puede contribuir a mejorar la educación estadística a nivel escolar.

Agradecimientos. Este trabajo forma parte del proyecto: EDU2010-14947, MICINN-FEDER y de la beca FPI BES-2008-003573, MEC-FEDER.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Editorial Comares.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education, 12* (1). On line: www.amstat.org/publications/jse/.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Bernoulli, D. (1738). Exposition of a new theory on the measurement of risk, *Econometrica, 22*, 23-36.

Christensen, R. y Utts, J. (1992). Bayesian solution of the exchange paradox. *American Statistician, 46*, 274-276.

Contreras, J. M., Batanero, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (En prensa). La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas. *Epsilon*.

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Ortiz, J. J. (2010). Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución en un taller formativo. *Educaçao Matemática e Pesquisa, 12* (2), 181-198.

Falk, R. y Konold, C. (1992). The pshycology of learning probability. En F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26* (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006*). The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility.* En G. Burrill (Ed.), NCTM 2006 Yearbook: Thinking and Reasoning with Data and Chance (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). *Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work.* En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.). Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI and IASE. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publicatons.

Godino, J., Wilhelmi, M. R. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4*(2), 1-26.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 187-205.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: teachers, teacher educators and researchers as co-learners. En L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 295-320). Dordrecht: Kluwer.

Kraitchik, M. (1953). *Mathematical recreations.* New York: Dover.

Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher, 87* (4), 232-235.

Lesser, L. (1998). Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics, 20* (1), 10-12.

Ma, L. P. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Moore, D. (1997). Estadistica aplicada básica; online: http://books.google.co.uk/books

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds.*), Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ponte, J. P.y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*: *Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publishers.

Schnabel, Z. M. (1938). The estimation of the total fish population of a lake, *American Mathematical Monthly, 45*, 348–352.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM]. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Simpson, E. H. (1951). The interpretation of interaction in contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society* (Series B), *13*, 238–241.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). New York: Springer.

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and in mathematical statistics*. Dordrech: Reidel.

Wood, T. (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Capítulo 9

EVALUACIÓN DEL CONOCIMIENTO Y LAS CREENCIAS DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE LA PROBABILIDAD

ASSESSING PROSPECTIVE TEACHERS' KNOWLWEDGE AND BELIEFS ABOUT THE PROBABILITY

Nordin Mohamed Maanan

Profesor de Educación Secundaria, Melilla

Juan Jesús Ortiz de Haro y Luis Serrano Romero

Universidad de Granada

Resumen. En este trabajo presentamos los resultados de un estudio de evaluación del conocimiento y las creencias sobre probabilidad de profesores en formación. Para ello, analizamos las respuestas de 283 profesores en formación de educación primaria a dos problemas relacionados con la toma de decisiones, tomados de Fischbein y Gazit (1984), examinando el porcentaje de respuestas correctas y los argumentos utilizados por ellos, comparando estos resultados con los obtenidos por niños de 10-14 años en la investigación de Cañizares (1997). Este estudio indica que la heurística de la representatividad, el efecto de recencia negativa, y una incorrecta percepción de la independencia de sucesos han podido influir en una errónea asignación de probabilidades. Concluimos con algunas implicaciones educativas que pueden ser tenidas en cuenta para mejorar la formación de profesores en el campo de la probabilidad.

Palabras clave: Probabilidad, creencias de profesores, formación de profesores.

Abstract. In this paper we present results from a study oriented to assess the probabilistic knowledge and beliefs of prospective teachers. We analyze responses from 283 pre-service primary school teachers to two problems relate to decision taken from Fischbein y Gazit (1984). We analyze the percentage of correct answers and the arguments given by participants, and compare these results with those obtained by 10-14 years children in Cañizares (1997) research. This study show the prospective teachers' difficulties in solving the problems proposed, in which they apply subjective factors. The representativeness heuristics, the negative recency effect, and an incorrect perception of independence may have influenced the incorrect computation of probabilities. We conclude with some educational implications that can serve to improve the didactic action to train teachers in the field of probability.

Keywords: Probability, teachers' beliefs, teacher education.

1. INTRODUCCIÓN

La estadística y la probabilidad están presentes en los actuales currículos escolares en España, como puede observarse en el Real Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas para la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006), donde propone iniciar lo antes posible el estudio de los fenómenos aleatorios y presentar los conceptos relacionados en el contexto de actividades que impliquen otras áreas de conocimiento, suscitando el interés de los alumnos y su valoración de los conocimientos probabilísticos para la toma de decisiones. Por ejemplo, en el bloque de contenidos denominado *Tratamiento de la información, azar y probabilidad*, incluye:

- En el primer ciclo (6-8 años): "*Distinción entre lo imposible, lo seguro y aquello que es posible pero no seguro, y utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.*"

- En el segundo ciclo (8-10 años): *Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene el azar, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto; introducción al lenguaje del azar.*

- En el tercer ciclo (10-12 años): "*Presencia del azar en la vida cotidiana. Estimación del grado de probabilidad de un suceso.*"

Estos contenidos y recomendaciones también se recogen en los currículos de otros países (ej., National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Secretaría de Educación Pública, 2006). No obstante, para que el cambio propuesto en la enseñanza de la probabilidad sea efectivo, es necesario mejorar la formación de los profesores (Stohl, 2005), pues, sin una formación específica, podrían transmitir a los estudiantes que formen sus conocimientos y creencias, a veces erróneas (Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez, 2006). Por tanto, resulta importante saber qué conocimientos y creencias sobre aleatoriedad y probabilidad tienen los profesores en formación.

En este trabajo pretendemos realizar una evaluación inicial del conocimiento y creencias de los profesores en formación de Educación Primaria para resolver problemas elementales de probabilidad, en particular, problemas relacionados con la toma de decisiones y cómo los conocimientos y creencias pueden influir en la asignación de probabilidades. Para ello analizamos las respuestas de un grupo de profesores en formación de Educación Primaria a dos problemas tomados de Fischbein y Gazit (1984), examinando los porcentajes de respuestas correctas y los argumentos proporcionados por ellos, comparando los resultados con los obtenidos por niños de 10-14 años en la investigación de Cañizares (1997).

Consideramos de interés este tipo de trabajos, ya que es fundamental tener información de los conocimientos y creencias que sobre el contenido matemático y pedagógico de probabilidad tienen los profesores en formación (Ball, 2000). A partir de ahí podremos diseñar y poner en práctica una instrucción adecuada para mejorar la formación probabilística de los mismos. A continuación presentamos un resumen de las investigaciones previas, describimos la metodología empleada y analizamos los resultados obtenidos. Se finaliza con las conclusiones y con algunas implicaciones educativas que pueden ser tenidas en cuenta para mejorar nuestra acción didáctica de formación de profesores en el ámbito de la probabilidad.

2. CONOCIMIENTO Y CREENCIAS DE LOS PROFESORES

Aunque hay algunos trabajos interesantes sobre el conocimiento que necesitan los profesores para enseñar probabilidad (Fischbein, 1975; Steinbring, 1991 y Kvatinsky y Even, 2002), las investigaciones sobre formación de profesores, en el caso de la probabilidad, son limitadas, como puede observarse en el resumen de Langrall y Mooney (2007). A pesar de ello, progresivamente se está formando un cuerpo de conocimientos que señala la existencia de concepciones erróneas y dificultades en relación a la probabilidad entre los profesores (Azcárate, 1995, Cardeñoso, 2001; Mickelson y Heaton, 2004; Franklin y Mewborn, 2006; Ortiz y cols., 2006; Ortiz, Mohamed, Serrano y Rodríguez, 2009; Ortiz, Mohamed y Serrano, 2010).

Otros trabajos se centran en el conocimiento que muestran los profesores sobre la probabilidad. En un estudio con profesores en servicio y profesores de enseñanza elemental en prácticas, Begg y Edward (1999) comprobaron que los docentes tenían un conocimiento poco sólido de la probabilidad, ya que aproximadamente dos tercios de ellos reconocían los sucesos aleatorios, y muy pocos comprendían el concepto de independencia. Así mismo, tenían la creencia de que el orden o el modelo no estaban asociados con la aleatoriedad, manifestando la heurística de la respresentatividad. Por último, los autores indican que estos profesores mostraban más inseguridad caundo enseñan probabilidad que otros contenidos estadísticos, como cálculos o gráficos.

En un estudio sobre la comprensión de la probabilidad condicional con profesores de enseñanza secundaria en prácticas, Carnell (1997) comprobó que todos ellos tenían conceptos erróneos, como por ejemplo, definir el elemento condicionante, o relacionados con el orden temporal de los elementos condicionante y objetivo, o confundir la condicionalidad con la causalidad (Batanero y Sánchez, 2005; Jones y Thornton, 2005; Tarr y Lannin, 2005).

Watson (2001), en una encuesta a profesores de primaria y de secundaria, les pidió que eligieran temas sobre azar o estadística y realizaran una programación de clase. Observó que los profesores de Educación Primaria proponían temas sobre azar y probabilidad en contextos específicos, mientras que los profesores de secundaria elegían principalmente ideas sobre el azar y algunas distribuciones de probabilidad. La autora indica que, en general, los profesores se encontraban más incómodos usando el concepto de muestra que el de media aritmética, ya que el primero supone un mayor grado de incertidumbre para ellos, y que los profesores de secundaria mostraban mayor seguridad que los de primaria para enseñar conceptos probabilísticos.

Nicholson y Darnton (2003) sostienen que los docentes con un conocimiento elemental de la estadística, aunque posean una buena preparación en matemáticas, tienden a centrarse en procedimientos algorítmicos para encontrar la respuesta correcta, y no se sienten cómodos al enseñar procesos aleatorios donde aparecen cuestiones de inferencia y toma de decisiones. Pereira-Mendoza (2002), en un estudio con profesores de cursos elementales, considera que las experiencias matemáticas de los profesores tienen un impacto negativo en su visión de la estocástica e impiden su desarrollo como docentes en este campo.

Sobre las creencias y concepciones de los profesores, la mayoría de las investigaciones tratan sobre la naturaleza de las matemáticas o sobre su enseñanza y aprendizaje. Si nos centramos en investigaciones relacionadas con las creencias y concepciones de los profesores sobre la aleatoriedad y la probabilidad el número decrece significativamente. Entre ellas destacamos la de Azcárate (1995), realizada con 57 futuros profesores de Educación Primaria, quien observó que muy pocos mostraban una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios. Muchos participantes explican la aleatoriedad mediante criterios de causalidad, y otras respuestas relacionan el azar con la suerte, con la imposibilidad de control y predicción, e incluso con el destino. Otros tuvieron una fuerte influencia de los aspectos contextuales y consideraron que no es posible el estudio matemático de los fenómenos aleatorios. Se detectó también falta de esquemas combinatorios y ausencia de instrumentos elementales para la asignación de probabilidades, cuantificando las expectativas de ocurrencia de un suceso desde criterios personales.

En un estudio con profesores de primaria y de secundaria, Greer y Ritson (1994) observaron que la mayoría de profesores de educación primaria consideran que la probabilidad es un contenido poco importante en comparación con otros temas de matemáticas, y más del 50% de los profesores de primaria y secundaria utilizan muy poco la probabilidad en los experimentos que realizan en clase. En un estudio similar, Gattuso y Pannone (2002) advirtieron que los profesores de secundaria reconocieron cierta inseguridad para enseñar la estadística de forma correcta, no por falta de conocimiento estadístico, sino por falta de conocimiento didáctico.

Sánchez (2002), en un trabajo sobre las creencias de profesores de Educación Secundaria sobre el uso de la simulación en clase, encontró que tres profesores manifestaron comprender mejor la variabilidad estadística después de resolver problemas mediante la simulación y solo uno mencionó haber adquirido una mejor comprensión de la probabilidad condicional y la ley de los grandes números. Cuando fueron preguntados sobre la utilidad de la simulación la mayoría expuso ideas relacionadas con el enfoque frecuencial de la probabilidad, pero ninguno refirió el valor de la simulación para la construcción de las ideas de aleatoriedad y distribución por los estudiantes.

Batanero, Godino y Cañizares (2005), como resultado de una investigación realizada con futuros profesores de Educación Primaria, proponen utilizar la simulación para modelizar experimentos reales y como medio para enfrentar a los futuros profesores con sus concepciones erróneas. Concluyen que esta forma de trabajo parece ayudar a la superación de algunos sesgos en el razonamiento de los futuros profesores así como aumentar su interés por la probabilidad y su enseñanza.

Los resultados de un estudio de Batanero, Arteaga, Ruiz y Roa (2010) sobre las concepciones de futuros profesores de Educación Primaria sobre la aleatoriedad, muestran que los participantes tienen una correcta percepción de los valores esperados en una serie de experimentos pero no son conscientes de la variabilidad y la independencia en las secuencias aleatorias. Para mejorar la preparación de los futuros profesores proponen trabajar con proyectos estadísticos, que permiten evaluar sus conocimientos y aumentar sus conocimientos estadísticos y didácticos.

Por último, en varios estudios (Cañizares, 1997; Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz, 1997; Cañizares y Batanero, 1998), con niños de 10 a 14 años, para determinar la influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la asignación de probabilidades a sucesos, los autores señalan que los alumnos, en ocasiones, incorporan con frecuencia conocimientos y creencias que influyen en su asignación de probabilidades en problemas que han sido propuestos para ser resueltos dentro de la norma objetiva (enfoques clásico o frecuencial). Así mismo, consideran que entre los factores subjetivos que pueden influir en la asignación de probabilidades están la percepción de la independencia, cuya aplicación ofrece dificultades a los alumnos (Truran y Truran, 1997); la heurística de la representatividad (Khaneman, Slovic y Tversky, 1982), según la cual el sujeto considera más probable aquel suceso que más se parece al proceso de generación aleatoria, que se percibe como no ordenada; y la falacia del jugador o efecto de recencia negativa (Fischbein, 1975), por el que la no ocurrencia de un suceso durante varias extracciones consecutivas aumenta su probabilidad de ocurrencia en próximas extracciones.

3. METODOLOGÍA

Participaron en la investigación 283 profesores en formación de Educación Primaria, de la Universidad de Granada, España. Los datos se han obtenido de las respuestas de los profesores en formación a dos problemas de probabilidad, tomados de Fischbein y Gazit (1984). A continuación reproducimos los dos problemas del cuestionario, que se aplicó antes de la instrucción.

> Problema 1.- Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar con el primero porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir. ¿Cuál es tu opinión respecto a lo que piensa Olivia y Juana?

Se trata de un problema de comparación de probabilidades de sucesos elementales en experimentos compuestos. Con él se pretende explorar la utilización de sesgos y heurísticas erróneas en los sujetos relacionadas con la idea de independencia, cuya aplicación, como se ha indicado, ofrece dificultades a los alumnos (Truran y Truran, 1997).

El profesor en formación debe reconocer la equiprobabilidad de los sucesos, pero los factores de tipo subjetivo, presentes en el enunciado del problema, pueden inducir a considerar que no son equiprobables. Puede manifestarse de nuevo la heurística de la representatividad, donde se espera que una muestra sea semejante a la población, por la cual no se admite como aleatorio las secuencias de resultados ordenados. Este sesgo fue definido por Kahnerman, Slovic y Tversky (1982), quienes encuentran que se presentan con mucha frecuencia, incluso en personas adultas y con alto nivel cultural.

> Problema 2.- Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar pues piensa: "la lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima". ¿Cuál es tu opinión sobre el razonamiento de Pedro?

Este problema intenta ver la comprensión, por parte de los profesores en formación, de la idea de independencia y evaluar la diferenciación entre muestreo con y sin reemplazamiento así como evaluar la creencia en la posibilidad de control sobre los mecanismos aleatorios. Esperamos encontrar un grupo de profesores en formación que manifiesten el sesgo de recencia negativa, que induciría a creer que, puesto que Pedro no ha ganado en los anteriores sorteos, sus posibilidades de ganar aumentan en la próxima jugada. Este sesgo ha sido descrito en numerosas investigaciones y ha sido atribuido a la heurística de la representatividad por Khaneman, Slovic y Tversky (1982).

Los dos problemas exploran la utilización de sesgos y heurísticas erróneas en los sujetos, todas ellas relacionadas con la idea de independencia, cuya aplicación, como se ha indicado, ofrece dificultades a los alumnos (Truran y Truran, 1997). Se trata de profundizar en los argumentos que aportan los sujetos, que manifiestan sesgos tendentes a la representatividad o a la disponibilidad, y establecer si existe alguna relación entre las experiencias previas de los alumnos relativas a los juegos de azar y la manifestación de estos sesgos.

4. RESULTADOS

Análisis del problema 1

Las respuestas de los profesores en formación de Educación Primaria al problema 1, sobre la elección de un billete de lotería entre dos posibles, se han clasificado en las categorías que aparecen en la Tabla 1.

Tabla 1. Porcentaje de tipos de respuestas al problema 1

Respuestas	Profesores en formación N = 283	Alumnos (10-14 años) N =143
No hay relación (*)	37.8	28.7
Olivia tiene razón	1.1	1.4
Juana tiene razón	34.6	39.2
Azar/Suerte	23.3	4.9
Otras	2.5	24.5
NS/NC	0.7	1.4

(*) Respuesta correcta

En ella observamos que la categoría mayoritaria es “No hay relación” (37.8%), donde hemos incluido a los profesores en formación que han respondido correctamente, indicando que los dos números tienen la misma probabilidad de salir y que no hay relación entre el resultado de obtener un número u otro por el hecho de que sean consecutivos o estén desordenados. Un ejemplo es la respuesta siguiente: “*Pues que ambos tienen la misma posibilidad de salir 1/1000000 y es 1000000 debido a que en los sorteos también se incluye el cero*” (alumno 29).

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría “Juana tiene razón” (34.6%), donde están los profesores en formación que manifiestan su acuerdo con Juana, ya que consideran que al tratarse de un juego aleatorio es más fácil obtener números no consecutivos, lo que pone de manifiesto la alta incidencia de la heurística de representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) y dificultades en la percepción de la independencia. Un ejemplo es la respuesta “*Yo estoy de acuerdo con Juana, porque es muy difícil que al azar salgan todos los números consecutivos de un mismo frasco*” (alumno 31),

Otra categoría destacada es “Azar/suerte” (23.3 %), donde están los profesores en formación que afirman que el resultado depende del azar, la suerte o el destino. Un ejemplo es la respuesta siguiente:

Que es imposible saber que número va a tocar. y portanto todo depende del azar.

> *"Que es imposible saber qué número va a tocar, y por tanto todo depende del azar"* (alumno71)

En la categoría "Otras" (2.5%), hemos incluido respuestas diversas, que no podíamos incluir en las anteriores, como por ejemplo: "*en mi opinión se puede ganar uno de los números según el tipo de juego*" (alumno 173). Por último, la categoría "Olivia tiene razón" (1.1 %), está formada los profesores en formación que muestran su acuerdo con Olivia porque consideran más probable que salgan los números ordenados.

Estos resultados coinciden con los obtenidos por Begg y Edward (1999), quienes indican que muy pocos profesores comprendían el concepto de independencia y que una mayoría tendía a creer que el orden no estaba asociado con la idea de aleatoriedad. Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que el porcentaje de respuestas correctas entre los profesores en formación es mayor y que la incidencia de la heurística de representatividad ha sido muy alta en los dos grupos.

La lista de argumentos utilizados por los profesores en formación y sus correspondientes porcentajes queda reflejada en la Tabla 2, que presentamos a continuación.

Tabla 2. Porcentaje de argumentos utilizados

Argumentos	Profesores en formación N = 283
Mejor números consecutivos	0.7
Mejor números no consecutivos	34.3
Tienen la misma probabilidad (*)	33.2
Azar/suerte	25.8
Otros	3.9
No contesta	2.1

(*) Argumento correcto

En ella observamos que un 33.2 % de los profesores en formación apoya su respuesta correcta con el argumento adecuado de que los dos números "tienen la misma probabilidad", utilizando la Regla de Laplace. Un ejemplo es el siguiente: "*Que la probabilidad de que salga cualquiera de esos dos números es la misma 1 sobre un millón*" (alumno 33).

Entre los argumentos incorrectos, destaca "mejor números no consecutivos" (34.3%), que ha sido utilizado por los profesores en formación que admiten la ventaja de Juana en la creencia de que el número preferido por ella es más probable al estar desordenado. Un ejemplo es el siguiente: "*Es muy difícil que salgan números consecutivos por lo que pienso que hay más probabilidad de que salga el número de Juana*" (alumno 68).

El argumento "Azar/suerte" (25.8%), ha sido utilizado por los profesores en formación que basan su respuesta en la idea de azar o suerte (25.8%), como en el ejemplo siguiente: "*Pues pienso que la lotería es algo azaroso, es decir, es más fácil que salgan números salteados y no consecutivos. Aunque todo es cuestión de suerte"* (alumno 55).

El argumento "mejor números consecutivos" (0.7%), basado en la creencia de que el número más probable es el número ordenado tal y como opinaba Olivia, ha sido el menos utilizado por los profesores en formación. Por último, en la categoría "Otros" (3.9%) hemos incluido diversas justificaciones, como por ejemplo la siguiente: "*Olivia piensa que al ir sacando las bolas con los números, habrá menos posibilidades que se vuelvan a repetir*" (alumno 271).

Análisis del problema 2

Las respuestas de los profesores en formación de Educación Primaria al problema 2, sobre la participación de Pedro en una lotería semanal durante los dos últimos meses, se han clasificado en las categorías que aparecen en la tabla 3.

Tabla 3. Porcentaje de tipos de respuestas al problema 2

Respuestas	Profesores en formación N = 283	Alumnos (10-14 años) N = 143
No hay relación (*)	38.4	23.1
Pedro tiene razón	29.7	37.1
Azar/Suerte	26.5	
Otras	2.5	35.0
NS/NC	2.5	4.9

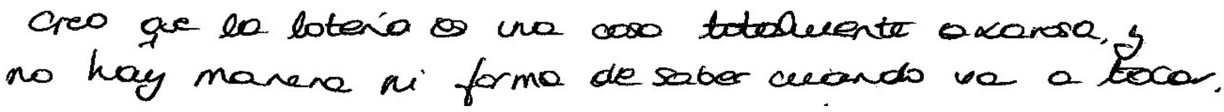
(*) Respuesta correcta

En ella observamos que la categoría mayoritaria es "No hay relación" (38.4%), donde hemos incluido a los profesores en formación que han respondido correctamente, indicando que el hecho de haber ganado o no en anteriores sorteos no influye en el resultado de la próxima jugada. Un ejemplo es la respuesta siguiente: "*Tiene la misma probabilidad el que juega por primera vez que el que ha jugado un millón de veces*" (alumno 59).

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría "Pedro tiene razón" (29.7%), donde están los profesores en formación que manifiestan su acuerdo con Pedro, al afirmar que puesto que no ha ganado todavía ninguna vez en los últimos meses, en el próximo sorteo tendrá más probabilidad de ganar. Un ejemplo es la respuesta siguiente: "*Que lleva razón ya que las probabilidades de que le puede salir en la próxima lotería aumentan si aún no le ha tocado, por el contrario, si acaba de ganar la lotería vuelve a probar suerte las probabilidades de que le vuelvan a salir son mínimas*" (alumno 113), manifestando así el efecto de recencia negativa, que son aquellos tipos de respuestas, según

Fischbein (1975), en que el alumno considera más probable el suceso contrario al que ya ha ocurrido. Este sesgo está relacionado con una incorrecta percepción de la independencia.

Otra categoría destacada es "Azar/suerte" (23.3 %), donde están los profesores en formación que consideran que el hecho de que Pedro gane o no en el sorteo depende del azar o de la suerte (26,5 %), como la siguiente:



"*Creo que la lotería es una cosa totalmente azarosa, y*
no hay manera ni forma de saber cuando va a tocar" (alumno 36)

En la categoría "Otras" (2.5%) hemos incluido diversos tipos de respuestas incorrectas. Por último no contestan el 2.5%.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos por los niños de 10 a 14 años, participantes en la investigación de Cañizares (1997), observamos que en los profesores en formación el porcentaje de respuestas correctas es bastante mayor y que el efecto de recencia negativa ha tenido menor incidencia. La categoría Azar/suerte, muy destacada entre los profesores en formación, también ha aparecido entre los niños en un alto porcentaje, pero ha sido incluida en la categoría "Otras".

La lista de argumentos utilizados por los profesores en formación y sus correspondientes porcentajes queda reflejada en la tabla 4, que presentamos a continuación.

Tabla 4. Porcentaje de argumentos utilizados

Argumentos	Profesores en formación N = 283
No depende de anteriores sorteos (*)	30.7
Tiene una probabilidad mínima de ganar	4.2
Tiene una mayor probabilidad de ganar	21.2
Azar/Suerte	37.5
Otros	2.8
No contesta	3.5

(*) Argumento correcto

En ella observamos que solo un 30.7% de los profesores en formación apoya su respuesta correcta con un argumento adecuado "No depende de anteriores sorteos", indicando que la probabilidad de ganar el sorteo de Pedro no depende de los resultados obtenidos anteriormente y utilizando la Regla de Laplace. Un ejemplo es el siguiente: "*Cada vez que se juega se tienen las mismas probabilidades de que toque ni más ni menos*" (alumno 150).

Entre los argumentos incorrectos, destaca “Azar/suerte” (37.5 %), que ha sido utilizado por un alto porcentaje de profesores en formación que justifican su respuesta con las ideas de azar y suerte. Un ejemplo es el siguiente: “*La lotería es cuestión de suerte y no por jugar más se van a acertar la infinidad de números que hay por combinar*” (alumno 107).

El argumento “tiene una mayor probabilidad de ganar” (21.2 %) ha sido utilizado por los profesores que consideran que es más probable que Pedro gane el próximo sorteo, porque no lo ha hecho en los sorteos anteriores (efecto de recencia negativa), aunque también hay algunos profesores en formación que argumentan que Pedro “tiene una probabilidad mínima de ganar” (4.2 %), ya que no ha ganado anteriormente (efecto de recencia positiva).

En la categoría “Otros” (7.8%) hemos encuadrado diversos tipos de argumentos, como por ejemplo el siguiente: “*Pedro debería haber analizado los números que han sido premiados en esos dos meses e inventar una estrategia. De esta forma si puede que le toque la lotería algún día”* (alumno 261).

6. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este estudio indica que una gran mayoría de los profesores en formación de Educación Primaria posee un conocimiento insuficiente de la probabilidad y, a veces, basan sus respuestas en unas creencias o conocimientos informales, que pueden influir en una incorrecta asignación de probabilidad a los sucesos. Así mismo, aunque obtienen mejores resultados que los alumnos participantes en la investigación de Cañizares (1997), todavía hay una importante proporción de profesores que manifiesta heurísticas y sesgos similares a ellos.

En el problema 1, sobre la elección de un billete de lotería entre dos posibles, hay un alto porcentaje de profesores en formación que manifiestan la heurística de representatividad (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982), mientras que en el problema 2, sobre la participación de Pedro en una lotería semanal durante los dos últimos meses, se ha manifestado el efecto de recencia negativa (Fischbein, 1975) en una gran proporción de ellos. Todos estos sesgos están relacionados con la dificultad de la percepción de la independencia, que coincide con los resultados obtenidos por Begg y Edward (1999).

Según Fischbein (1975), este tipo de sesgos se afianza con la edad y el proceso de enseñanza, lo que parece coincidir con nuestros resultados, ya que los altos porcentajes obtenidos de respuestas y argumentos incorrectos entre los profesores en formación, muestran que estos sesgos siguen fuertemente arraigados entre ellos. Otros factores que pueden influir negativamente en la superación de estos sesgos, según Cañizares (1997), es la experiencia limitada de los alumnos en juegos de azar, así como la difusión en prensa de noticias relacionadas con las personas y números ganadores múltiples veces en la lotería, que son un medio ideal para extender el sesgo de la disponibilidad.

Entre los argumentos incorrectos más utilizados por los profesores en formación, en el problema 1, destaca la justificación de que para ganar en la lotería es “mejor números no consecutivos”, y en el problema 2, es la afirmación de que “(Pedro) tiene una mayor probabilidad de ganar”, puesto que no lo ha hecho en los sorteos anteriores. En los dos problemas, la cuarta parte de los profesores considera que los resultados dependen del azar o de la suerte. Estos resultados corroboran los obtenidos por Azcárate (1995), donde un 26,3% de los profesores en formación relacionaban el azar con la suerte o la casualidad.

Como consecuencia, consideramos que para mejorar la formación probabilística de los profesores en formación de Educación Primaria se debe reforzar su conocimiento probabilístico y tener en cuenta este tipo de concepciones erróneas manifestadas por ellos, proponiendo una muestra de situaciones contextualizadas que permita poner de manifiesto los conflictos y sesgos que conlleva la aplicación del conocimiento estocástico, e intentar corregirlos para evitar que los transmitan a sus alumnos. Para ello se deben seleccionar actividades adecuadas, como resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales, utilización de la simulación (Batanero, Godino y Cañizares, 2005) y de paradojas (Contreras y cols., 2010), entre otras, que promuevan un aprendizaje constructivo. Esta formación debe incluir también las componentes didácticas básicas (Batanero, Godino y Roa, 2004)

Agradecimientos: Esta investigación ha sido cofinanciada por el Plan propio de Investigación de la Universidad de Granada: Programa 20 y forma parte del Proyecto EDU2010-14947 (MICINN y FEDER) y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Su estudio en el caso de la Educación Primaria. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*, 241-247.

Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference*. CD ROM. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Arteaga, C., Ruiz, B. y roa, R. (2010). Assessing pre-service teachers conceptions of randomness through project work. En C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, Recuperado el 5 de septiembre de 2003 de: http://www.amstat.org/publications/jse/

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability? En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 260-289). Dordrecht: Kluwer.

Begg, A. y Edwards, R. (1999). *Teachers ideas about teaching statistics.* Paper presented at the combined annual meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education. Melbourne, Australia.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cañizares. M. J. y Batanero, C. (1998). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *14*, 99-114.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. J. (1997). Subjective elements in childrens' comparison of probabilities. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 49-56). Lahti.

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar*. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad. Tesis Doctoral. Cádiz: Universidad de Cádiz.

Carnell, L. J. (1997). *Characteristics of reasoning about conditional probability (preservice teachers).* Unpublished doctoral dissertation, University of North Carolina-Greensboro.

Contreras, J. M.; Ortiz, J. J.; Diaz, C. y Arteaga, P. (2010). Paradojas como recurso didáctico en la formación de profesores para enseñar la probabilidad. En C. Lara. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Ed.), *Programa & Libro de resúmenes de la XXIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Ciudad de Guatemala. Guatemala.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24.

Franklin, C. y Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Gattuso, L. y Pannone, M. A. (2002). Teachers training in a statistics teaching experiment. In B. Philips (Ed.), *Proceedings of the sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

Greer, B., & Ritson, R. (1994). *Readiness of teachers in Northern Ireland to teach data handling.* Paper presented at the Fourth International Conference on Teaching Statistics. Marrakech, Morocco.

Jones, G. A. y Thornton, C. A. (2005). An overview of research into the teaching and learning of probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 65-92). New York: Springer.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.). (1982). Judgment under uncertainty: heuristics and biases. Cambridge: Cambridge University Press.

Kvatinsky, T. y Even, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding of probability. *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* [CD-ROM], Hawthorn, VIC, Australia: International Statistical Institute.

Mickelson, W. T. y Heaton, R. (2004). Primary teachers'statistical reasoning about data. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenges of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 353-373). Dordrecht, Netherlands:Kluwer.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*, nº 293.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Nicholson, J.R. y Darnton, C. (2003). Mathematics teachers teaching statistics: Wath are the challe nges for the classroom teacher? In *Proceedings of the 54th Session of the International Statistical Institute*. Vooburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Ortiz, J. J. Mohamed, N. y Serrano, L. (2010). Probabilidad frecuencial en profesores en formación. En M. J. González, M. T, González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*. Santander: SEIEM. CD ROM.

Ortiz, J. J.; Mohamed, N.; Serrano, L. y Rodríguez, J. (2009). Asignación de probabilidades en profesores en formación. En P. Leston. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22* (pp. 1545-1554). México D. F. (México). ISBN: 978-607-95306-00

Ortiz, J. J., Mohamed, N.; Batanero, C.; Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En P. Bolea, M. J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM. ISBN: 84-8127-156-X.

Pereira-Mendoza, L. (2002). Would you allow your accountant to perform surgery? Implications for the education of primary teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

Sánchez, E. S. (2002). Teachers beliefs about usefulness of simulations with the educational software Fathom for developing probability concepts in statistics classroom. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teaching of Statistics* (On CD). Hawthorn, VIC: International Statistical Institute.

Secretaría de Educación Pública (2006). *Programa de estudio, educación secundaria*. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. En R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 135-167). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). Dodrecht: Kluwer.

Tarr, J. E. y Lannin, J. K. (2005). How can techers build notions of conditional probability an independence? En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). Nueva York: Springer.

Truran, J. y Truran, K. (1997). Statistical Independence - One concept or two? Implications for research and for clasroom practice. En B. Philips (Ed.), *Papers on statistical education presented at ICME-8* (pp. 87-100). Swinburne University of Technology.

Watson, J.M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education 4(*4*)*, 305-337.