

**UNIVERSIDAD DE GRANADA**

**DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LAS MATEMÁTICAS**

---



---

**LAS TABLAS DE CONTINGENCIA EN LA FORMACIÓN  
DE PROFESIONALES DE PSICOLOGÍA**

**Trabajo final de Master  
Gustavo R. CAÑADAS DE LA FUENTE**

**Granada, Junio de 2010**



LAS TABLAS DE CONTINGENCIA EN LA FORMACIÓN DE PROFESIONALES  
DE PSICOLOGÍA

Introducción	1
1. El problema de investigación	3
1.1. Introducción	3
1.2. Objetivos del trabajo	3
1.3. Importancia del tema en la formación del psicólogo	4
1.3.1. Lectura de tablas, como componente de la cultura estadística	5
1.3.2. Análisis de tablas de contingencia en el trabajo e investigación psicológica	8
1.3.3. Tablas de contingencia en el diagnóstico psicológico	9
1.4. Marco teórico	11
1.4.1. La actividad matemática y objetos ligados a ellas	11
1.4.2. Relaciones entre objetos: función semiótica	13
1.4.3. Criterios de idoneidad didáctica	14
1.5. Tablas de contingencia como objeto matemático	14
1.5.1. Problemas que dan origen a las tablas de contingencia	15
1.5.2. Representaciones	18
1.5.3. Procedimientos	20
1.5.4. Conceptos y propiedades relacionados con el análisis de tablas de contingencia	24
1.5.5. Argumentos	27
1.6. Software para el análisis de tablas de contingencia	27
1.7. Conclusiones sobre el significado referencial de la tabla de contingencia	28
2. Investigaciones previas sobre comprensión de tablas de contingencia	29
2.1. Introducción	29
2.2. Asociación, condicionamiento y causación	29
2.3. Juicios de asociación	30
2.3.1. Desarrollo evolutivo del concepto de asociación	31
2.3.2. Estrategias en los juicios de asociación	33
2.3.3. Concepciones sobre la asociación	38
2.3.4. Evolución después de la enseñanza	39

2.4. Cálculo de probabilidades a partir de tablas de contingencia	46
2.5. Conclusiones del estado de la cuestión	49
3. Evaluación de estrategias y estimación de la asociación	51
3.1. Introducción	51
3.2. Descripción de la muestra	51
3.3. Descripción del cuestionario	53
3.4. Resultados y discusión	60
3.4.1. Juicios de asociación	61
3.4.2. Estimación del coeficiente de asociación	62
3.4.3. Teorías previas sobre la asociación	63
3.4.4. Estrategias	64
3.5. Conclusiones sobre los juicios de asociación	73
4. Conclusiones generales	75
4.1. Conclusiones sobre los objetivos	75
4.2. Líneas de investigación futuras	77
Referencias	79
Anexo I. Cuestionario	85
Anexo II. Análisis semiótico de estrategias	91
Anexo III. Trabajos realizados durante el periodo de master	125

## **INTRODUCCIÓN**

En este trabajo llevamos a cabo un estudio inicial de la comprensión intuitiva de los estudiantes que ingresan en la Licenciatura de Psicología sobre la asociación en tablas de contingencia.

La elección de este tema se justifica por el papel que la asociación tiene en estadística, la vida cotidiana y el trabajo profesional en el campo de la Psicología. Los estudios sobre asociación estadística son numerosos en Psicología, donde se han descrito estrategias erróneas en los juicios de asociación y estimación incorrecta de la asociación, pero, sin embargo, son muy escasos en Didáctica de la Matemática.

El trabajo continua la línea iniciada por Estepa en su tesis doctoral y publicaciones posteriores. Dicho autor analiza la comprensión de la asociación, incluyendo las tablas de contingencia en alumnos de Bachillerato y futuros profesores. En nuestro caso queremos comparar sus resultados con los de los estudiantes que ingresan en Psicología, como primera fase de un estudio posterior en que se diseñará y evaluará una propuesta de enseñanza del tema para dichos estudiantes.

El primer capítulo se dedica a introducir el problema de investigación, destacando su importancia en la formación del psicólogo, tanto como parte de la cultura estadística, de su trabajo profesional y en la investigación psicológica, describiendo la enseñanza de este tema en psicología. Se introducen a continuación algunos elementos del marco teórico que se utilizarán para analizar seguidamente el objeto matemático “tabla de contingencia” describiendo los problemas que le dan origen, las representaciones, procedimientos, conceptos y propiedades y argumentos relacionados. También se incluye un breve análisis de algún software sobre tablas de contingencia.

En el segundo capítulo se presenta el estado de la cuestión, dividido en dos grandes apartados. El primero, los estudios sobre la asociación en tablas de contingencia, comenzando con el de Piaget sobre el desarrollo evolutivo de la idea de asociación. En el estudio de las estrategias en juicios de asociación se diferencia entre los trabajos en Psicología y en Didáctica de la Matemática. Se analizan también las concepciones descritas por Estepa (1993) y la evolución de estrategias y concepciones con la enseñanza organizada por este autor. Otro gran apartado se dedica al cálculo de probabilidades en tablas de contingencia,

específicamente los trabajos de Díaz y de la Fuente (2005a) y los de Lonjedo y colaboradores (Huerta y Lonjedo, 2003; Lonjedo, 2003; Lonjedo y Huerta, 2005).

En el tercer capítulo se presenta un estudio empírico realizado con una muestra de 62 estudiantes de psicología, que tiene un carácter exploratorio y servirá de estudio piloto para otro posterior. Se diseña un pequeño cuestionario compuesto de 4 tareas abiertas adaptadas de las utilizadas por Estepa. A partir de las respuestas abiertas se analiza el tipo de asociación asumido por el estudiante, la precisión en la estimación del coeficiente de asociación, la explicitación de teorías previas y la estrategia utilizada para resolver el problema.

El trabajo finaliza con las conclusiones, referencias y anexos, así como una lista de publicaciones realizadas en el periodo de Máster.

## **CAPÍTULO 1.**

### **EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

#### **1.1. INTRODUCCIÓN**

El desarrollo de la estadística en el siglo XX ha influido en el avance de la ciencia y la sociedad, al proporcionar herramientas metodológicas que pueden ser aplicadas en áreas muy diferentes para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar estudios y experimentos y toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Como consecuencia la enseñanza de la estadística se ha incorporado desde hace unas décadas, en forma generalizada, en todos los niveles educativos. Esto es debido al carácter instrumental de la estadística, y el valor del desarrollo del razonamiento estadístico en la sociedad de la información (Batanero, 2002).

Existe consenso en instituciones como la Unión Europea y Organización de Naciones Unidas, en la necesidad de medir el progreso a través de indicadores como la cohesión social o la riqueza. Asimismo se propone estudiar variables como impacto medioambiental, fuentes de energías renovables o calidad de vida (medidas que son, tanto conceptualmente como técnicamente problemáticas). Todo ello requiere nuevas formas de información y por lo tanto una necesidad cada vez mayor de que los ciudadanos sean estadísticamente cultos (Ridgway, Nicholson y McCusker, 2008).

Estas consideraciones nos han llevado a centrar nuestro trabajo en la didáctica de la estadística y más específicamente, en la comprensión de las tablas de contingencia por los estudiantes de psicología. Seguidamente se describen los objetivos del trabajo, la importancia del tema en la formación del psicólogo, se presenta el marco teórico y, finalmente, se realiza un análisis del objeto “tablas de contingencia”, utilizando algunos elementos de dicho marco teórico.

#### **1.2. OBJETIVOS DEL TRABAJO**

En este trabajo continuamos una línea de investigación iniciada en la Universidad de Granada (Batanero, Estepa y Godino, 1991; Estepa; 1993; Estepa y Batanero, 1995; Batanero, Estepa, Godino y Green, 1996; Batanero, Godino y Estepa, 1998) centrada en el estudio de las estrategias y dificultades de estudiantes universitarios en el análisis de tablas de contingencia.

En la investigación citada, el énfasis se puso en las concepciones previas y estrategias en el estudio de la asociación, tanto a nivel intuitivo pre-instruccional, como después de una enseñanza de estadística descriptiva basada en ordenadores, y los participantes fueron estudiantes del curso pre-universitario y futuros profesores. El término “estrategia” se utiliza en este trabajo en el mismo sentido de estos autores, quienes lo toman de las investigaciones sobre asociación en psicología. En nuestra futura tesis doctoral, además del estudio de la asociación en las tablas de contingencia, nos centraremos de la comprensión formal de los contrastes relacionados con las tablas de contingencia y en las medidas de asociación, así como en el cálculo de probabilidades en tablas de contingencia.

En este trabajo de Máster se realiza un estudio exploratorio de la comprensión intuitiva de las tablas de contingencia por estudiantes que comienzan los estudios en psicología; posteriormente, en la tesis doctoral, se podría comparar esta comprensión intuitiva, con el conocimiento formal alcanzado como consecuencia de la enseñanza del tema. En el trabajo se abordan los puntos siguientes:

O1: Se pretende realizar un análisis semiótico del objeto matemático “tablas de contingencia”, utilizando los diferenciados de objetos matemáticos (elementos de significado) del Enfoque Onto-semiótico, que se describen en este mismo capítulo. La finalidad es describir los campos de problemas, conceptos, propiedades, procedimientos, lenguaje y argumentos relacionados con las tablas de contingencia. Los resultados servirán para posteriormente diseñar instrumentos de evaluación o secuencias de enseñanza del tema. Este objetivo se aborda al final de este capítulo.

O2: Iniciar la elaboración de un estado de la cuestión sobre las investigaciones relacionadas con las tablas de contingencia, partiendo del contenido en la tesis de Estepa (1993) y teniendo en cuenta los trabajos posteriores sobre el tema. Se ampliará también con los puntos no tocados por el autor citado. Este objetivo se aborda en el capítulo 2.

O3: Realizar un estudio exploratorio sobre las estrategias, juicios de asociación y estimación de la intensidad de la asociación en tablas contingencia con una muestra reducida de ítems y estudiantes. Este objetivo se aborda en el capítulo 3.

### **1.3. IMPORTANCIA DEL TEMA EN LA FORMACIÓN DEL PSICÓLOGO**

En esta sección se tratará la importancia del tema para los estudiantes de psicología apoyándonos en tres argumentos: a) su papel en la cultura estadística de todo ciudadano; b) el tema se incluye en las asignaturas de análisis de datos en los estudios

de Psicología y es fundamento de otros temas en dichas asignaturas; c) estos contenidos son de gran importancia para la actuación profesional y la investigación en psicología.

### **1.3.1. LECTURA DE TABLAS, COMO COMPONENTE DE LA CULTURA ESTADÍSTICA**

Las tablas y gráficos pueden utilizarse para comunicar información y como instrumento de análisis de datos, así como para retener en la memoria una gran cantidad de información en forma eficiente (Cazorla, 2002). Tienen un papel esencial en la organización, descripción y análisis de datos, al ser un instrumento de *transnumeración*, forma básica de razonamiento estadístico que proporciona nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro (Wild y Pfannkuch, 1999).

La ciencia utiliza representaciones semióticas externas como tablas, gráficas, diagramas, ecuaciones, ilustraciones o enunciados para construir y comunicar los conceptos abstractos. Por tanto, el aprendizaje de los conceptos científicos está ligado al de estas representaciones y al de sus procesos de construcción y transformación. Estas representaciones se usan también en las ciencias como puente entre los datos experimentales y las formalizaciones científicas y ayudan a determinar las relaciones entre las variables que intervienen en los fenómenos, para poder modelizarlos. En la enseñanza de las ciencias las tablas y gráficos también ayudan a visualizar conceptos y relaciones abstractas difíciles de comprender (Postigo y Pozo, 2000).

#### *Lectura e interpretación de tablas*

Una persona culta debiera poder leer críticamente las tablas estadísticas que encuentra en la prensa, Internet, medios de comunicación, y trabajo profesional. Esto supone no sólo la lectura literal, sino identificar las tendencias y variabilidad de los datos, así como detectar los posibles errores conscientes o inconscientes que puedan distorsionar la información representada (Schield, 2006). Muchas de las tablas que aparecen en la prensa o Internet, combinan diversos tipos de información numérica (frecuencias, porcentajes), clasificada en función de dos o más variables.

Schield (2000) indica que la lectura de una tabla implica la comprensión de los títulos, subtítulos y los encabezados de filas y columnas; así como el tipo de información incluida (frecuencias, promedios, razones...). Tienen también que determinar si el total para una cierta categoría viene representada en una columna, fila, o en los márgenes, lo que no es siempre obvio. Matemáticamente no es significativo

cuáles son los porcentajes que elegimos para comparar, y si pueden estar en la misma fila o en la misma columna. Pero hay gran diferencia en facilidad de lectura, pues al comparar dos porcentajes en la misma columna, tienen un total común, lo que no ocurre si se compara una fila y una columna o dos columnas diferentes.

Según Schield (2000) en las tablas que leemos en la prensa diaria aparecen tasas (razones) y porcentajes, que pueden ser difíciles de describir y comparar. Por ejemplo, indica que un estudio realizado en Estados Unidos en 1997, alrededor del 30% de las tablas publicadas en la prensa contenían porcentajes, el 10% razones y el 10% otros estadísticos (media, mediana, percentiles). Dichas tasas y porcentajes requieren ser interpretados, pues toman en consideración el tamaño de un grupo relacionándolo con el total y pueden ser utilizados en comparaciones. El autor indica que la competencia para realizar esta comparación es un elemento clave en la cultura estadística.

Las proporciones son interpretadas de forma diferente a los recuentos, por ejemplo, el número de hombres que fuman es lo mismo que el número de hombres entre los fumadores. Pero el porcentaje de hombres que fuman es distinto que el “porcentaje de los hombres entre los fumadores. Típicamente se describen utilizando tantos por ciento y pueden referirse a una parte del total: “cada uno de los chicos recibe el 25% de la herencia” o a un porcentaje de cambio de la razón: “Las ventas tuvieron un 20% de incremento”. Las razones son más difíciles de analizar sintácticamente y de interpretar que las medidas y recuentos. Se expresan típicamente el denominador utilizando “por”. Pueden ser una parte del todo “La razón de muertes en accidentes de vehículos de motor fue de 16 por 100000 habitantes” o no: “La razón de muertes en accidentes de vehículos fueron 1.9 por 100 millones de vehículos. Algunas razones se refieren a un intervalo de tiempo: “La razón de velocidad fue de 100 Km por hora; la razón de interés fue 18% por año” y otras no: “La razón de desempleo es del 5%”. En otros casos se describen en términos de probabilidad “la probabilidad de obtener dos seises es uno de 36”.

La comparación de razones es ambigua. Supongamos por ejemplo, que “el crimen sube”, es decir, el número de crímenes por año es creciente. Este crecimiento del crimen puede ser debido sólo a un gran crecimiento de la población. Sin embargo la razón de crímenes (el número de crímenes por año por cada 1000 habitantes) puede bajar, debido que son mediciones del crimen utilizando diferentes clases de razones.

#### *Niveles de lectura*

Diversos autores han definido niveles de lectura y comprensión de tablas y

gráficos estadísticos, siendo la clasificación más conocida la de Curcio (1989), quien definió los siguientes niveles; “leer entre los datos” (lectura literal del gráfico o tabla sin interpretar la información contenida en el mismo), “leer dentro de los datos” (interpretación e integración de los datos) y “leer más allá de los datos” (realizar predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico o tabla). Friel, Curcio y Bright (2001) amplían la clasificación anterior definiendo un nuevo nivel “leer detrás de los datos” consistente en valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones.

Cuando se considera no sólo la interpretación de los datos, sino también su valoración crítica, los niveles superiores se modifican ligeramente y la categoría “leer detrás de los datos”, puede subdividirse, en función de la capacidad crítica, respecto a la información reflejada en el gráfico (Aoyama, 2007):

- *Nivel Racional/Literal.* Los estudiantes leen correctamente el gráfico, incluyendo la interpolación, detección de tendencias y predicción, pero no cuestionan la información, ni dan explicaciones alternativas.
- *Nivel Crítico.* Los estudiantes leen los gráficos, comprenden el contexto y evalúan la fiabilidad de la información, cuestionándola a veces, pero no son capaces de buscar hipótesis que expliquen la discordancia entre un dato y una interpretación del mismo.
- *Nivel Hipotético:* Los estudiantes leen los gráficos los interpretan y evalúan la información, formando sus propias hipótesis y modelos:

La interpretación crítica de tablas y gráficos moviliza diversos conocimientos y es un proceso complejo en el que muchos elementos se ven implicados, entre los que destacan tres aspectos: cognitivo, contextual y afectivo (Monteiro y Ainley, 2004). Monteiro y Ainley (2007) se preocupan de la laguna existente entre la interpretación de gráficos estadísticos en contexto escolar y contextos extra-escolares, como la prensa. En el contexto escolar, se insiste en los conocimientos y procesos estadísticos, prestando poca atención al contexto social del que han sido tomados los datos.

#### *Construcción de tablas*

También es posible definir varios niveles de dificultad en la construcción de tablas y gráficos. Por ejemplo Arteaga (2008) propuso una clasificación de los gráficos

producidos por futuros profesores cuando trabajan en una tarea abierta, en función de su complejidad semiótica y los niveles de lectura que posibilitaban según la clasificación dada por Friel, Curcio y Bright (2001). Esta clasificación podría aplicarse a las tablas. El autor diferencia los siguientes niveles: 1) representación de datos individuales; 2) representación de un conjunto de datos, sin llegar a resumir su distribución; 3) representación de una distribución de datos y 4) representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico. Los gráficos y tablas son más complejos en su clasificación y facilitan la resolución de problemas estadísticos, pero, al mismo tiempo, los errores de interpretación de los mismos crecen con esta complejidad.

### **1.3.2 ANÁLISIS DE TABLAS DE CONTINGENCIA EN EL TRABAJO E INVESTIGACIÓN PSICOLÓGICA**

El tema es también importante para la práctica profesional e investigación de los psicólogos ya que ellos tratan de extraer y resumir información útil de las observaciones de sus investigaciones, y las reflejan en tablas de contingencia. Los psicólogos deben basar sus decisiones en datos limitados y estas son más fáciles de interpretar con la ayuda del análisis de estas tablas.

Las tablas de contingencia son fundamentales, en las actividades de diagnóstico y evaluación psicológica, en que con frecuencia hay diferentes síntomas que pueden estar asociados o no con diferentes patologías. La realización de cualquier estudio clínico-epidemiológico pretende poner de manifiesto al final del mismo si existe o no asociación entre diferentes variables. Díaz y Gallego (2006) indican que los síntomas o pruebas médicas que se asocian a una enfermedad, de estar presente, aumentan las probabilidades de dicha afección. Además, sugieren que los cálculos exactos son difíciles y proponen organizar los datos en una tabla de contingencia, similar a la tabla 1.3.3.1.

*Tabla 1.3.3.1. Ejemplo de tabla de contingencia en una prueba médica*

Síntoma	Con enfermedad	Sin la enfermedad	Total
Presente	A	B	A+B
Ausente	C	D	C+D
Total	A+C	B+D	

A partir de esta tabla definen los siguientes indicadores clínicos, que son usuales en la práctica médica y psicológica y se calculan directamente de la tabla de contingencia:

- *A: verdaderos positivos* (número de individuos con la enfermedad y el síntoma presente).
- *B: falsos positivos* (número de individuos sin la enfermedad y el síntoma presente).
- *C: falsos negativos* (número de individuos con la enfermedad y el síntoma ausente).
- *D: verdaderos negativos* (número de individuos sin la enfermedad y el síntoma ausente).

$$\text{Sensibilidad} = \frac{A}{A + C} \times 100 \qquad \text{Especificidad} = \frac{D}{B + D} \times 100$$

$$\text{VPP} = \frac{A}{A + B} \times 100 \qquad \text{VPN} = \frac{D}{C + D} \times 100$$

La estadística interviene también en las diferentes etapas del proceso de investigación científica: (a) En el diseño: donde se formulan las variables e hipótesis; se seleccionan los sujetos con un método adecuado de muestreo, se estudia la validez y fiabilidad para el control de sesgos o instrumentos de medición; (b) En el análisis de los datos; y, (c) En la toma de decisiones a partir de los resultados del análisis.

Respecto a la investigación, se emplean tablas de contingencia, cuando se utilizan datos cualitativos. Es frecuente el uso de estas tablas, tanto para presentar los datos de las muestras en los estudios, como en el análisis de asociación entre variables o de homogeneidad de muestras (ambas mediante el contraste chi-cuadrado). En el estudio de la asociación, generalmente se calcula algún coeficiente de asociación, siendo el más habitual el de contingencia. Las tablas de contingencia pueden también realizarse con varias dimensiones o variables y es posible predecir una de ellas a partir del resto mediante los modelos log-lineales.

### **1.3.3 TABLAS DE CONTINGENCIA EN EL DIAGNÓSTICO PSICOLÓGICO**

Otro motivo que hace relevante el tema es su inclusión en los estudios oficiales de psicología. La estadística se estudia como una materia en muchos planes de estudio de las más diversas profesiones y forma parte de los programas de especialización y posgrado en las más diversas disciplinas. Es, de hecho, casi imposible que un profesional, no haya recibido en su formación al menos un curso de estadística.

En los planes de estudio actuales de la Licenciatura en Psicología de la Universidad de Granada, en el primer año se incluye una asignatura troncal anual de estadística de 9 créditos, 6 teóricos y 3 prácticos, con el nombre de “Análisis de datos

en psicología”. En la guía oficial de esta asignatura aparece reflejado el tema, en el apartado “Noción de tablas de contingencia” en el tema 12. Además aparecen dentro del tema 17, “Contraste de hipótesis estadísticas. Tipos de contrastes”. También en el 8, “Algunos contrastes paramétricos”, incluye en la práctica 7 contrastes de hipótesis sobre una muestra, contrastes de hipótesis sobre dos muestras independientes y contrastes sobre dos muestras relacionadas. En el tema 19 “Algunos contrastes no paramétricos”, aparece en la práctica 8 contrastes no paramétricos, es decir pruebas de bondad de ajuste, de homogeneidad e independencia.

Este es un ejemplo, ya que no es la única asignatura de estadística presente en estos estudios. Por ejemplo, en la asignatura “Análisis de Datos I en Psicología” de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, dentro del tema 8, “Organización y representación conjunta de dos variables”, aparecen los siguientes contenidos: Organización conjunta de datos de dos variables; Distribución conjunta de dos variables categóricas u ordinales; Distribuciones marginales; Distribuciones condicionadas; El concepto de relación entre variables; Representación gráfica conjunta de dos variables cualitativas y ordinales; Representación tridimensional.

En el tema 9. Relación entre variables cualitativas y cuasi-cuantitativas, aparecen los siguientes contenidos: La prueba de Chi-cuadrado; Índices de asociación basados en la prueba de Chi-cuadrado; Índices de correlación para variables ordinales; Relación entre una variable dicotómica y una cuantitativa.

Todo lo anterior, en referencia con los actuales planes de estudio, vigentes en el presente curso académico pero a extinguir en breve. En relación a los nuevos Planes de Estudio encaminados a conseguir un Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), en los nuevos Grados de Psicología y otras Ciencias Sociales y de la Salud, dichos contenidos se han incrementado. Por ejemplo, el caso del Plan de Grado en Psicología de la Universidad de Granada tiene dos asignaturas de contenidos estadísticos, una denominada “Exploración y Descripción de Datos en Psicología” y otra denominada “Técnicas de Análisis de Datos de Investigación en Psicología”, ambas con 6 créditos ECTS. En ambos casos se incluyen de forma reiterada los contenidos en los que el estudio de las tablas de contingencia resulta de gran importancia.

La Estadística, y en particular las tablas de contingencia, son también base para la comprensión de muchas otras materias y su importancia ha ido aumentando en las Ciencias de la Conducta y, más concretamente, en la Psicología. Como muestra de ello basta consultar las publicaciones recientes de Psicología experimental, Psicología del

aprendizaje, Psicología educacional, Psicología social, Psicofísica, etc. Hasta en la Psicología clínica se exige ya un dominio bastante profundo de las técnicas utilizadas en tablas de contingencia. No es suficiente que el psicólogo sepa aplicar mecánicamente unas formulas, sino que requiere conocer el fundamento y la deducción de las mismas, así como las condiciones que exigen las técnicas estadísticas en cada caso concreto.

#### **1.4. MARCO TEÓRICO**

En este trabajo se utilizan nociones teóricas relacionadas con el Enfoque Ontosemiótico (EOS) desarrollado por Godino y su equipo de colaboradores (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007 y otras publicaciones). Más concretamente, el trabajo se centra en las prácticas matemáticas involucradas en el análisis de tablas de contingencia y problemas relacionados.

##### **1.4.1. LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA Y OBJETOS LIGADOS A ELLAS**

En este enfoque teórico, se entiende por “práctica matemática” cualquier actuación realizada por alguien y encaminada a la resolución de problemas matemáticos, lo que incluye la comunicación de la solución obtenida, su validación o su generalización a otros contextos y problemas (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1994). Las prácticas que se derivan de la actividad matemática pueden ser específicas de una persona o propias de una institución o conjunto de personas interesadas en resolver el mismo tipo de situaciones problemáticas. El hecho de pertenecer a una institución supone el uso de unas prácticas sociales condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, así como por sus reglas y modos de funcionamiento.

En el estudio de las matemáticas interesa considerar los “tipos” de situaciones problemáticas, en relación con los sistemas de prácticas, más que centrarse sólo en una práctica particular de un problema concreto. Así, la respuesta a la pregunta ¿qué es el objeto matemático “tabla de contingencia”?, sería: el sistema de prácticas que realiza determinada persona –significado personal -, o compartidas en una institución – significado institucional-, para resolver un tipo de situaciones-problemas en los que interviene la tabla de contingencia. Es decir, los significados dependen de los contextos sociales y de los sujetos, lo que implica un carácter relativo de tales significados.

En el marco teórico citado existe una tipología básica de significados. Respecto al significado institucional se puede hablar de significado global (o significado de un objeto en el sentido más amplio en una Institución), significado referencial (aquel que se

refiere a una enseñanza o investigación), significado pretendido (el que se pretende enseñar), significado implementado (el que se logra enseñar) y significado evaluado (el que corresponde a la parte que se evalúa). Respecto a los significados personales se tienen los tipos, global (totalidad del sistema de prácticas de alguien, en relación con un objeto matemático), declarado (las prácticas que se expresan en pruebas de evaluación) y logrado (de las prácticas manifestadas, aquellas que son conformes con la pauta institucional) (Godino, 2002). En nuestro trabajo nos interesamos por el significado de la tabla de contingencia dentro de la institución “enseñanza en psicología” (sería nuestro significado referencial). En nuestra futura tesis doctoral se definirán los significados implementados (en la enseñanza dentro de un curso específico en Facultades de psicología) y evaluado (el que evaluemos con nuestros instrumentos de evaluación).

Cuando se realiza, interpreta y evalúa una práctica matemática, se activa una configuración (o sistema de objetos) constituida por situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, cuya taxonomía es la siguiente (Font y Godino, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007):

- *Situaciones-problemas:* aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, problemas, acciones que inducen una actividad matemática. En nuestro caso el problema puede ser el estudio de asociación entre dos variables cualitativas, o el estudio de homogeneidad de varias muestras, por ejemplo.
- *Lenguajes:* términos, expresiones, notaciones, gráficos que se utilizan para representar los datos del problema, las operaciones que hacemos con ellos, los objetos matemáticos que se utilizan y la solución encontrada. En el estudio de las tablas de contingencia el lenguaje gráfico tiene un peso muy importante (gráficos de barras, estereogramas,...) aunque también se usa el lenguaje verbal (términos como frecuencia doble o condicional), simbólico (expresiones asociadas) e incluso icónico al trabajar con ordenador.
- *Conceptos- definición:* En las prácticas que llevan a cabo los estudiantes para resolver un problema matemático (en este caso cuando trabajan con el recurso) se usan implícita o explícitamente objetos matemáticos, de los cuáles el alumno ha de recordar o aplicar la definición. Por ejemplo, los estudiantes usarán implícitamente los objetos: probabilidad simple, compuesta y condicional, independencia, asociación, frecuencia simple y compuesta, etc..
- *Proposiciones* o enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que igualmente se han de emplear al resolver problemas matemáticos. Por ejemplo, la

situación en la que los estudiantes tienen que recordar que, si dos variables son independientes el coeficiente de asociación tiene un valor igual a cero

- *Procedimientos*: Serían los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo que los estudiantes han aprendido durante la enseñanza previa y que aplican al resolver el problema. En nuestro caso, los *estudiantes usarán* varios tipos específicos de contraste de hipótesis, así como otras técnicas más intuitivas.
- *Argumentos*: Serían los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o bien la solución de los problemas. Pueden ser deductivos, inductivos, formales o informales.

Godino, Batanero y Font (2007) proponen la existencia de redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas que relacionan entre sí los seis tipos de categorías anteriores y forman *configuraciones* que se clasifican en:

- *Epistémicas*: cuando se trata de objetos institucionales. La configuración epistémica es el conjunto de objetos matemáticos que intervienen en la resolución de las actividades. Dentro de la configuración epistémica se distingue la *previa* –objetos que se supone conoce el alumno antes de trabajar en la Unidad Didáctica- y la *emergente* –lo que se supone que va a aprender-.
- *Cognitivas*: cuando se refieren a objetos personales.

#### **1.4.2. RELACIONES ENTRE OBJETOS: FUNCIÓN SEMIÓTICA**

Otro aspecto de interés en este trabajo es el de función semiótica (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Los autores proponen bajo tal denominación, la correspondencia entre un antecedente y un consecuente, establecida por un sujeto, ya sea persona o institución, y sirve para resaltar los procesos de interpretación que se llevan a cabo en la actividad matemática y en los que a veces pueden aparecer desajustes (conflictos) de interpretación entre alumnos y profesor.

Un objeto matemático, por ejemplo, una tabla de contingencia, al expresarse por escrito o verbalmente, lleva a establecer una función semiótica. La correspondencia entre antecedente y consecuente suele estar implícita, aunque en ocasiones se incluyen instrucciones para la interpretación de los objetos matemáticos. Si las interpretaciones realizadas por los alumnos no son las esperadas por el profesor, se produce un conflicto semiótico. El antecedente (expresión) consecuente (significado) de una función semiótica no se limita a conceptos y el lenguaje asociado sino que abarcan toda la

ontología de objetos matemáticos u organizaciones de éstos en entidades más complejas, como sistemas conceptuales o teorías. Así, cada texto se puede descomponer en partes, en las que hay implícitos diferentes objetos matemáticos. Mediante el análisis se intentará poner de manifiesto estos objetos, así como las dificultades que los estudiantes pueden tener al utilizarlos.

### **1.4.3. CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA**

Los aspectos teóricos previos se han de complementar con el concepto de “Idoneidad Didáctica” del proceso instruccional y para ello, se deben combinar, en mayor o menor grado las seis componentes siguientes (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

- *Idoneidad epistémica*: es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Sería si los significados de los objetos presentes en un recurso instruccional son adecuados desde el punto de vista matemático.
- *Idoneidad cognitiva*: grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como si los significados personales logrados por los alumnos son los significados pretendidos por el profesor.
- *Idoneidad interaccional*: Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: Disponibilidad y adecuación de los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional*: Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso que se estudia se ajusta al entorno; es decir, al proyecto educativo del centro o la sociedad en que se encuentra.

En la siguiente sección aplicamos algunas de las ideas anteriores al análisis del objeto matemático “tabla de contingencia”. Específicamente tratamos de identificar los diversos tipos de objetos involucrados en el trabajo con las mismas. La finalidad es lograr una primera aproximación al significado institucional referencial de la tabla de contingencia en nuestro trabajo.

### **1.5. TABLAS DE CONTINGENCIA COMO OBJETO MATEMÁTICO**

En muchos estudios estadísticos se suele estar interesado en más de un carácter

latente en la población. Esto implica querer dar respuesta a la pregunta de la relación que existe entre ambas. En ciertos casos se puede dar una fórmula que exprese una en función de la otra, son los fenómenos deterministas. En los casos en que no es posible dar esta fórmula, se pueden representar pares de valores de las dos variables, mediante puntos en un sistema cartesiano. Entonces esta representación la llamamos nube de puntos o diagrama de dispersión y nos sirve para observar relaciones directas o inversas, y creando aproximaciones por rectas o parábolas, por ejemplo. Otras veces, alguna de las variables no es numérica. En el análisis de la relación de dos variables pueden existir tres tipos de estudios, según el tipo de variables implicadas (Batanero y Díaz, 2008):

- *Dos variables o más cualitativas*, donde abarcaremos el problema mediante tablas de contingencia. Pero estos métodos pueden generalizarse a varias variables que pueden ser estudiadas, por ejemplo, por los modelos logarítmico lineales.
- *Dos variables cuantitativas*, de forma que si están relacionadas hablaremos de correlación y regresión, esta última puede ser lineal o curvilínea. En el caso de varias variables cuantitativas se puede estudiar la correlación múltiple o parcial y la regresión múltiple o multivariante.
- *Una variable cualitativa y la otra cuantitativa*, que se puede tratar de varias maneras diferentes, por ejemplo, usando el test *t* de diferencia de medias o analizando la diferencia de las dos medias. La generalización a varias variables conduce a los modelos de Anova, Ancova y Manova.

En este trabajo nos centramos específicamente en el estudio de la relación entre dos variables cualitativas, es decir, en las tablas de contingencia. A continuación analizamos este objeto matemático.

### **1.5.1. PROBLEMAS QUE DAN ORIGEN A LAS TABLAS DE CONTINGENCIA**

En gran cantidad de estudios estadísticos se utilizan datos de cada individuo sobre dos variables estadísticas. Usualmente llamamos:  $X$ , a una de las variables con valores  $x_1, x_2, \dots, x_r$ ; llamamos  $Y$  a la segunda variable, con valores  $y_1, y_2, \dots, y_c$ . A partir de estos datos bivariantes se presentan varios tipos de problemas, que originarán, primero el concepto de Tabla de Contingencia y otros relacionados con ellas, así como diversos procedimientos y representaciones.

P1. *Resumir la información obtenida de un conjunto de observaciones bivariantes de modo que se visualicen posibles relaciones entre las variables.* El primer

problema surge al tratar de representaciones en forma condensada, en un listado de datos bivariantes. La forma habitual de ordenar la información puede ser en forma de *tabla de doble entrada* (tabla de contingencia). Para construirla, situamos los valores de las variables en la primera fila y columna de la tabla y en cada casilla de frecuencia, cuando hay pares repetidos (Figura 1.5.1.1.).

De este modo comenzamos extendiendo el concepto de frecuencia absoluta y relativa al caso bivalente. Siendo  $f_{ij}$  la *frecuencia absoluta* con la que aparece el par  $(x_i, y_j)$ ; y siendo  $h_{ij}$  la *frecuencia relativa* de este mismo par de valores. Una vez organizada la tabla, se trata de estudiar la relación o asociación entre dos variables cualitativas. Aparecen dos nuevos problemas, dependiendo del tipo de relación que se quiera analizar. Teniendo que atender a dos hipótesis principalmente: *contraste de homogeneidad y contraste de independencia*

*Figura 1.5.1.1. Tabla de doble entrada*

	y <sub>1</sub>	...	y <sub>j</sub>	...	y <sub>c</sub>	
x <sub>1</sub>						f <sub>1.</sub>
x <sub>2</sub>						f <sub>2.</sub>
...						...
x <sub>i</sub>	f <sub>ij</sub>					f <sub>i.</sub>
...						...
x <sub>r</sub>						f <sub>r.</sub>
	f <sub>.1</sub>	...	f <sub>.j</sub>	...	f <sub>.c</sub>	n

P2. *Cálculo de probabilidades asociadas a valores específicos de una o las dos variables.* Podemos obtener las probabilidades puntuales de cada una de las variables o también es posible tener la probabilidad de ocurrencia simultanea de un caso de X y otro de Y (Figura 1.5.1.2.). Además es inmediato el cálculo de las probabilidades condicionadas con sólo dividir la probabilidad conjunta entre la probabilidad a la que condicionamos. Es decir:

$$P(X=x_i / Y=y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$$

*Figura 1.5.1.2. Probabilidades en la tabla de doble entrada*

	y <sub>1</sub>	...	y <sub>j</sub>	...	y <sub>c</sub>	
x <sub>1</sub>						P(X=x <sub>1</sub> )
x <sub>2</sub>						P(X=x <sub>2</sub> )
...						...
x <sub>i</sub>	P(X=x <sub>i</sub> , Y=y <sub>j</sub> )					P(X=x <sub>i</sub> )
...						...
x <sub>r</sub>						P(X=x <sub>r</sub> )
	P(Y=y <sub>1</sub> )	...	P(Y=y <sub>j</sub> )	...	P(Y=y <sub>c</sub> )	1

Una vez organizada la tabla, cuando tratamos de estudiar la relación entre dos variables cualitativas, aparecen dos nuevos problemas, dependiendo del tipo de relación que se quiera analizar. Teniendo que atender a dos hipótesis principalmente: *contraste de homogeneidad y contraste de independencia*.

P3. *Contraste de homogeneidad*. A veces la variable  $X$  representa una población subdividida en  $r$  subpoblaciones, de la que se ha seleccionado una muestra de cada subpoblación, y cada individuo lo clasificamos con una variable  $Y$ . Siendo  $p_{ij}$  una proporción que, en la población  $x_i$  tiene  $Y=y_j$  de valor, queremos realizar una inferencia para ver si, a partir de las muestras observadas se puede inferir que las subpoblaciones son semejantes. Para llevar a cabo esta inferencia, se realiza un contraste de hipótesis, cuyas hipótesis, nula y alternativa, en el contraste de homogeneidad, son las siguientes:

$$H_0 \equiv p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{mj} \text{ para todo } j$$

$$H_1 \equiv \text{al menos dos de estas proporciones son diferentes.}$$

Con el resultado del contraste sabremos si las muestras provienen de poblaciones con iguales o diferentes distribuciones de probabilidad, dando la posibilidad de combinar resultados si son homogéneos.

P4. *Contraste de independencia*. En este caso nos interesa la asociación o relación existente entre dos variables de una misma población. Diremos que las variables cualitativas son *independientes* cuando la probabilidad de una categoría de una variable no está influenciada por tener otra categoría en un mismo individuo. Podemos tener tres tipos de tablas: independencia total, asociación perfecta y asociación parcial.

P5. *Definir una medida de la intensidad de asociación entre las variables*. En el caso de que en alguno de los problemas P3 o P4 hayamos llegado a la conclusión de que las variables están asociadas, se plantea un nuevo problema, consistente en definir una medida del grado o intensidad de la asociación entre las mismas.

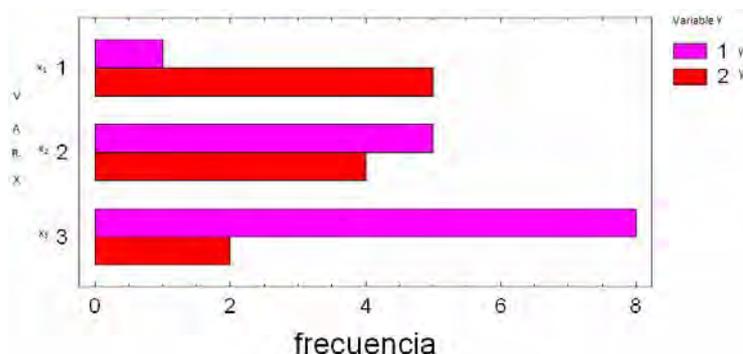
P6. *Ajuste de un modelo matemático que permita estimar la frecuencia de aparición de cada categoría de una variable, dada una categoría de la otra*. En el caso de que en el problema P5, la asociación encontrada sea suficientemente fuerte, se plantea el problema de encontrar un modelo que permita predecir la variable dependiente en función de la independiente, es decir una generalización del problema de regresión numérica. Mediante los modelos logarítmicos lineales se resolverá este problema 6.

### 1.5.2. REPRESENTACIONES

Existen ligados al estudio de las tablas de contingencia gran variedad de representaciones, verbales, simbólicas, tabulares y gráficas. Las representaciones verbales incluyen todas las palabras utilizadas para hacer referencia a la tabla y sus componentes, como “tabla de contingencia”, “tabla cruzada”, “tabla de doble entrada”. Las representaciones simbólicas y tabulares se han presentado en los apartados anteriores. También hay una gran variedad de gráficos con los que mostrar datos presentados en tablas de contingencia. A continuación mostraremos algunos.

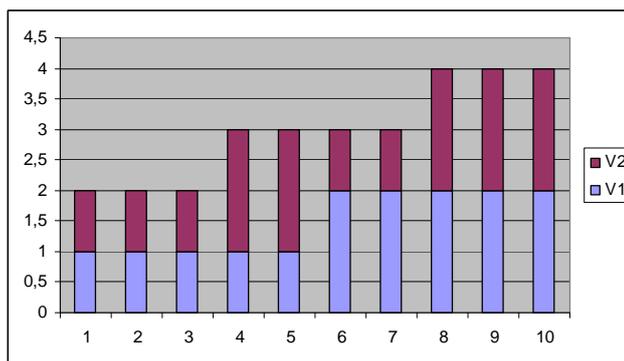
R1. *Diagrama de barras adosadas.* Este sistema de representación nos, muestra con barras colocadas horizontalmente o verticalmente, la frecuencia de cada casilla del interior de la tabla de frecuencias (Figura 1.5.2.1). Para cada valor de la variable  $X$  se presentan conjuntamente la frecuencia de cada valor de  $Y$  condicionado a este valor de  $X$ . Al estar situadas unas debajo de otras permite la comparación rápida entre las variables y dentro de cada variable. También se podría dar el diagrama de barras en porcentajes, bien absolutos (respecto al total de la tabla), bien relativos (respecto a cada valor de la variable  $X$ ).

Figura 1.5.2.1. Diagrama de barras adosadas



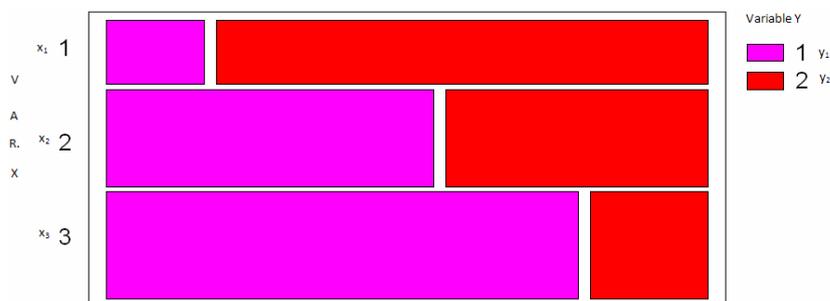
R2. *Diagrama de barras apilado.* Este gráfico muestra las barras unas sobre otras para representar la frecuencia con la que aparece. Compara, entre categorías, el aporte de cada valor al total (Figura 1.5.2.2). También se podría dar el diagrama de barras en porcentajes, bien absolutos (respecto al total de la tabla), bien relativos (respecto a cada valor de la variable  $X$ ). En esta representación se visualizan mejor las frecuencias condicionales que en el diagrama de barras adosado.

Figura 1.5.2.2. Diagrama de barras apilado



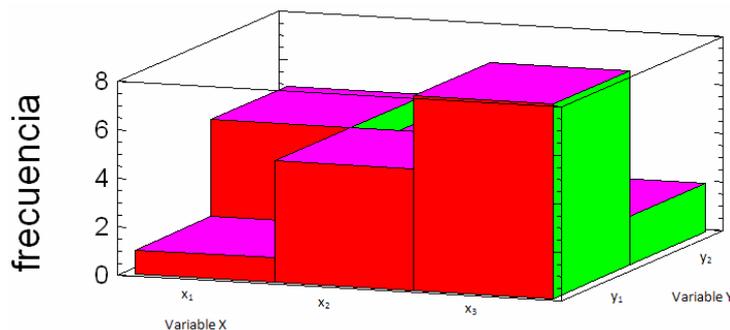
R3. *Gráfico de Mosaico*. Representa mediante áreas la frecuencia de cada celda de la tabla de contingencia (Figura 1.5.2.3). Se divide primero el eje y en segmentos proporcionales a la frecuencia relativa de cada categoría en filas, es decir, en el eje y tenemos representadas las frecuencias relativas marginales de la variable en filas. En cada rectángulo resultante se divide el eje x en partes proporcionales a la frecuencia condicional de las columnas de la tabla respecto a la fila dada. El gráfico visualiza las frecuencias marginales de las filas y las frecuencias condicionales de columnas respecto a cada una de las filas de la tabla.

Figura 1.5.2.3. Gráfico de Mosaico



R4. *Gráfico tridimensional*. Este gráfico tridimensional coloca en el ancho y largo las variables X e Y, y la altura representa la frecuencia de cada celda (Figura 1.5.2.4). Se puede construir también utilizando frecuencias relativas o porcentajes.

Figura 1.5.2.4. Gráfico tridimensional



### 1.5.3. PROCEDIMIENTOS

No hay ningún método que cubra todos los problemas planteados en el apartado 1.5.1 y para todos los tipos de tablas de contingencia. Así que estudiaremos algunos de los métodos más usuales, que podemos clasificar en varios apartados.

PR1.1. *Contraste de homogeneidad.* Los más usuales son los basados en el test chi-cuadrado. Para realizarlo utilizamos el estadístico  $\chi^2$  como medida de las desviaciones entre la muestra y la población quedando (Ruiz-Maya y Martín, 2002).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

Siendo  $e_{ij}$  las frecuencias estimadas considerando la hipótesis nula cierta, es decir:

$$e_{ij} = n_{.j} p_i = n_{.j} \frac{n_{i.}}{n}$$

El estadístico de contraste queda

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(f_{ij} - \frac{n_{.j}n_{i.}}{n})^2}{\frac{n_{.j}n_{i.}}{n}} \rightarrow \chi^2_{(r-1)(c-1)}$$

Podemos tener dos situaciones (Batanero y Díaz, 2008):

- Si el valor experimental  $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$ , aceptamos la hipótesis nula de que las muestras provienen de poblaciones con iguales distribuciones de probabilidad, para un nivel de significación  $\alpha$  (para el Problema P4).
- Si el valor experimental  $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}$ , no podemos aceptar la hipótesis nula de que las muestras provienen de poblaciones con iguales distribuciones de probabilidad, para un nivel de significación.

PR1.2. Otra manera de establecer la diferencia entre subpoblaciones en un caso de homogeneidad es usando “frecuencias esperadas en el caso de ser cierta  $H_0$ ”, para lo cual utilizamos la siguiente expresión:

$$e_{ij} = \frac{f_i f_j}{n}$$

Mediante el estadístico Chi-cuadrado, incluido a continuación, tenemos una medida de diferencia entre las frecuencias esperadas y las observadas.

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \rightarrow \chi^2_{(n-1)(m-1)}, \text{ siendo } n \text{ y } m \text{ los tamaños. Podemos tener dos}$$

situaciones (Batanero y Díaz, 2008):

- Si el valor experimental  $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$ , aceptamos la hipótesis nula, para un nivel de significación  $\alpha$ .
- Si el valor experimental  $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}$ , no podemos aceptar la hipótesis nula, para un nivel de significación  $\alpha$ .

PR1.3. *Contraste para tablas 2x2*. En el caso particular de tablas 2x2, se puede utilizar para el cálculo del estadístico la siguiente forma:

$$\chi^2 = \frac{(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})^2 n}{f_1 f_2 f_{1.} f_{2.}}$$

PR1.4. *Prueba exacta de Fisher*. En todos los casos anteriores, el valor del estadístico se puede aproximar mediante la distribución normal para muestras grandes. Pero, si todas o una parte importante de las frecuencias son pequeñas, en el caso de tablas 2x2 se puede calcular la probabilidad exacta de obtener las frecuencias observadas usando la distribución hipergeométrica. En general se aconseja no usar el contraste Chi-cuadrado a menos que las frecuencias en todas las celdas sean superiores a 5, aunque algunos estadísticos sugieren que basta con que todas las frecuencias sean mayores que 1 si el 80% de las celdas tienen frecuencias superiores a 5.

PR1.5. *Contraste de independencia*. Para realizar el contraste de independencia (Lipschutz y Schiller, 1999), tomamos como hipótesis nula que las variables son independientes, y realizamos un estimación de  $p_i$  y  $p_j$ , ya que son desconocidos, de la siguiente forma:

$$p_{i.} = \frac{f_{i.}}{n} = \frac{f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{ic}}{n} \quad \text{y} \quad p_{.j} = \frac{f_{.j}}{n} = \frac{f_{1j} + f_{2j} + \dots + f_{rj}}{n}$$

El estadístico de contraste queda

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(f_{ij} - np_{i.}p_{.j})^2}{np_{i.}p_{.j}} \rightarrow \chi^2_{(r-1)(c-1)}$$

Podemos tener dos situaciones (Batanero y Díaz, 2008):

- Si el valor experimental  $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$ , aceptamos la hipótesis nula de que las variables son independientes, para un nivel de significación  $\alpha$ .
- Si el valor experimental  $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}$ , no podemos aceptar la hipótesis nula de que las variables son independientes, para un nivel de significación  $\alpha$ .

PR2. *Medidas de asociación.* En el caso de rechazar la independencia, tendríamos que calcular cuánto están relacionadas o asociadas las variables. Se trata de coeficientes que indiquen el grado de asociación entre las dos variables. A continuación analizamos los más usuales (Batanero y Díaz, 2008).

PR2.1. *Medidas de asociación en datos nominales (tabla 2x2).* Para medir la asociación en este caso (Figura 1.5.3.1) Pearson propuso una medida que no requería el tamaño  $n$  de la muestra y cuyos valores están en el intervalo (0,1). Cuanto más próximo a 0 mayor es la independencia y cuanto más cerca de 1 mayor es la asociación (Ato y López, 1996).

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

*Figura 1.5.3.1. Caso para medir asociación por Pearson*

	<i>B</i>	$\overline{B}$	Total
<i>A</i>	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{1.}$
$\overline{A}$	$f_{21}$	$f_{22}$	$f_{2.}$
Total	$f_{.1}$	$f_{.2}$	$n$

También podemos calcular en este tipo de tablas (tablas 2x2) el riesgo relativo, correspondiente a, cuánto más probable es la presencia de *A* entre los individuos de *B*, o también se puede calcular la *razón de productos cruzados*, que es una razón de cocientes.

- Riesgo relativo = RR =  $\frac{P(A/B)}{P(A/\overline{B})} = \frac{f_{11}f_{22}}{f_{12}f_{21}}$

- Razón de productos cruzados =  $RC = \frac{f_{11}f_{22}}{f_{21}f_{12}} = \frac{f_{11}/f_{21}}{f_{12}/f_{22}} = \frac{C_1}{C_2}$

El valor del Riesgo relativo cambia según el tipo de dependencia que tengan las variables:

- El  $RR = 1$ , informa que no hay asociación entre las variables.
- El  $RR > 1$ , nos dice que existe asociación positiva.
- El  $RR < 1$ , indica que existe una asociación negativa.

El caso de la Razón de productos cruzados es distinto, y varía de la siguiente manera:

- El  $RC = 1$ , implica que la razón de casos que aparece A y  $\bar{A}$ , cuando esta B, y la razón de casos de A y  $\bar{A}$  cuando no está presente B, son iguales.
- El  $RC < 1$ , implica que la razón de casos que aparece A y  $\bar{A}$ , cuando esta B es menor que la razón de casos de A y  $\bar{A}$  cuando no está presente B.
- El  $RC > 1$ , implica que la razón de casos que aparece A y  $\bar{A}$ , cuando esta B es mayor que la razón de casos de A y  $\bar{A}$  cuando no está presente B.

## PR2.2. Medidas de asociación para tablas rxc

P2.2.1. *Medidas basadas en el estadístico Chi-cuadrado.* Un coeficiente parecido a  $\phi$  es el *coeficiente de contingencia de Pearson*, que se puede utilizar en tablas rxc, y notaremos como C (Ruiz-Maya, Martín, Montero y Uriz, 1995).

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{(\chi^2 + n)}}, \text{ siendo el } Max\{C\} = \frac{Min\{r-1, c-1\}}{1 + Min\{r-1, c-1\}}$$

Cuando C toma el valor 0 implica independencia absoluta. Este valor en ocasiones no alcanza el valor 1 (cogiendo el máximo puesto anteriormente). Algunos autores ajustan C dividiéndolo por el máximo posible en una tabla de sus dimensiones. Otro coeficiente es el *de Cramer* (Ruiz-Maya, Martín, Montero y Uriz, 1995), que notamos por V y varía entre 0 y 1 (incluso en tablas no cuadradas). Existen otros como el cuadrado medio del *coeficiente de contingencia* o T de Tschuprow (Ruiz-Maya, Martín, Montero y Uriz, 1995).

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n(p-1)}} \text{ , siendo } p = \text{Min}\{r, c\}$$

P2.2.2. *Medidas basadas en la reducción proporcional del error.* Si se quiere predecir un valor de la característica  $X$  en un individuo seleccionado aleatoriamente de la población, sin información adicional. Entonces  $P(\text{error regla 1}) = P(\text{Cometer un error en la clasificación}) = \frac{(n - f_i)}{n}$ . Al tener como información adicional el valor de la variable  $Y=y_j$  no cogeremos el valor  $X$  al azar, más bien tendremos en cuenta (regla 2) cual es el valor más probable de  $X$  para  $Y=y_j$  que resulta mejor. Llamaremos medida de la reducción proporcional del error (PRE) al cociente que ponemos a continuación:

$$\text{Medida PRE} = \frac{P(\text{error regla 1}) - P(\text{error regla 2})}{P(\text{error regla 1})}$$

Esta medida (PRE) nos dice el porcentaje de error que se reduce al predecir el valor de la variable dependiente ( $X$ ), conocido el valor de la variable independiente ( $Y$ ). Una medida de ésta, conocida, es la lambda de Goodman y Kruskal, siendo  $f_{m+}$  la más grande frecuencia marginal en filas,  $f_{mj}$  es la mayor frecuencia marginal en la columna  $j$ -

ésima.

$$\lambda_x = \frac{(\sum f_{mj}) - f_{m+}}{N - f_{m+}}$$

#### **1.5.4. CONCEPTOS Y PROPIEDADES RELACIONADOS CON EL ANÁLISIS DE TABLAS DE CONTINGENCIA**

Como hemos visto aparecen muchos conceptos y propiedades en los procedimientos ligados a la resolución de los problemas planteados, que podemos clasificar en varios apartados:

##### *Conceptos y propiedades ligados a la clasificación doble o tabla de contingencia*

Tanto de la misma tabla de contingencia, como de los procedimientos descritos para trabajar con ella surgen diferentes conceptos y propiedades que describimos a continuación.

La *variable estadística bidimensional*, o variable que describe el conjunto de pares de valores obtenidos en un experimento. Asociada a ella aparece la *distribución bidimensional* y las frecuencias asociadas, como *frecuencia absoluta doble* ( $f_{ij}$ ) y la

frecuencia relativa doble ( $h_{ij}$ ); ambas tienen la relación:

$$h_{ij} = f_{ij} / n$$

A partir de la tabla de contingencia (Figura 1.5.1.1.), podemos obtener *variables unidimensionales*. Si sumamos por columnas las frecuencias obtenemos cada valor de la variable  $Y = y_j$ , independientemente del valor de la variable  $X$ , lo que constituye la *distribución marginal de Y* (Figura 1.5.4.1.). Análogamente sumando por filas se obtiene la *distribución marginal de X* (Figura 1.5.4.2.). La frecuencia marginal de una cierta variable, es la frecuencia de esa variable sin tener en cuenta ninguna otra.

Figura 1.5.4.1. Distribución marginal de Y

y <sub>1</sub>	...	y <sub>j</sub>	...	y <sub>c</sub>	
f <sub>1.</sub>	...	f <sub>j.</sub>	...	f <sub>c.</sub>	n

Figura 1.5.4.2. Distribución marginal de X

Figura 1.5.4.3. distribución de X condicionada para Y=y<sub>j</sub>

x <sub>1</sub>	f <sub>1.</sub>
x <sub>2</sub>	f <sub>2.</sub>
...	...
x <sub>i</sub>	f <sub>i.</sub>
...	...
x <sub>r</sub>	f <sub>r.</sub>
	n

x <sub>1</sub>	f <sub>1j</sub>
x <sub>2</sub>	f <sub>2j</sub>
...	...
x <sub>i</sub>	f <sub>ij</sub>
...	...
x <sub>r</sub>	f <sub>rj</sub>

Otra distribución unidimensional que se puede obtener, es la *distribución de X condicionada para Y=y<sub>j</sub>* (Figura 1.5.4.3.), extensible a la variable  $Y$  condicionada a  $X$ . Si tomamos  $h(x_i/y_j)$  como la *frecuencia relativa condicional* del valor  $x_i$  entre los valores que presenten el carácter  $y_j$  se obtiene

$$h(x_i/y_j) = \frac{f_{ij}}{f_{.j}} = \frac{h_{ij}}{h_{.j}}$$

Análogamente se tiene:

$$h(y_j/x_i) = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} = \frac{h_{ij}}{h_{i.}}$$

Como consecuencia, se tiene la igualdad siguiente;

$$h_{ij} = h(x_i/y_j) h_{.j} = h(y_j/x_i) h_{i.}$$

*Conceptos y propiedades ligados al estudio de la asociación y homogeneidad en tablas de contingencia*

En los problemas de asociación es importante estudiar la *dependencia e independencia* de las variables. Lo que se puede realizar sabiendo las distribuciones

condicionadas. Así que diremos que  $X$  e  $Y$  son *independientes* cuando se cumpla:

$$h(x_i/y_j) = h_i$$

Esto significa que la distribución de  $X$  no cambia al condicionar por cualquier valor de  $Y$ . Otras propiedades de interés son:

- $h_{ij} = h_i \cdot h_j$  para todo  $i, j$
- $h(y_j/x_i) = h_j$  entonces  $Y$  no depende de  $X$
- $f_{ij} = \frac{f_i \cdot f_j}{n}$  para calcular las frecuencias teóricas en caso de independencia

Una propiedad interesante de las tablas de contingencia  $r \times c$ , con  $r, c > 2$ , es la posibilidad de subdividir la tabla de contingencia en subtablas  $2 \times 2$ , basándonos en el teorema de la aditividad. Haciendo posible calcular la prueba  $\chi^2$  para cada una de ellas. El uso de  $\chi^2$  trae el problema de que la suma de variables aleatorias independientes no es exactamente igual al valor del estadístico (Ato y López, 1996).

#### *Conceptos y propiedades ligados al cálculo de probabilidades*

Cada una de las variables estadísticas analizadas da origen a una variable aleatoria latente y por tanto la variable estadística doble, da origen a la variable aleatoria bidimensional y su distribución. Como hemos visto, en el cálculo de probabilidades, aparecen las probabilidades conjuntas, simples y condicionales. Una vez obtenidas las probabilidades puntuales, conjuntas y condicionadas, es posible la comprobación del teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes, que mostramos a continuación

$$\text{T. probabilidad total} \rightarrow P(Y) = \sum_{i=1}^n P(X_i)P(Y / X_i)$$

$$\text{T. de Bayes} \rightarrow P(X_j / Y) = \frac{P(X_j)P(Y / X_j)}{\sum_{i=1}^n P(X_i)P(Y / X_i)}, \text{ con } j=1, \dots, n$$

También podemos estar interesados en las propiedades de simetría (estando interesados en la distribución conjunta de las dos variables o interesados en la distribución condicional de una de las variables dada la otra) e invarianza (siendo deseable en las medidas de asociación que las variables sean invariantes frente a transformaciones de multiplicar filas y columnas por constantes para poder transformar las distribuciones marginales de la tabla en otras diferentes).

### 1.5.5. ARGUMENTOS

En el análisis de tablas de contingencia se usan principalmente tres tipos de argumentos:

- Argumentos deductivos, pues todos los procedimientos descritos se basan en deducciones de propiedades o relaciones entre conceptos;
- Argumentos empíricos: pues también las conclusiones de los diversos contrastes utilizan datos obtenidos de experimentos estadísticos.
- Razonamientos de tipo estadístico (contrastos). De hecho el contraste de hipótesis, aunque básicamente es de tipo deductivo, puede considerarse un tipo de razonamiento específico que combina deducción y razonamiento empírico, junto con ciertos criterios de toma de decisión.

### 1.6 SOFTWARE PARA EL ANÁLISIS DE TABLAS DE CONTINGENCIA

Es mucho el software disponible, pues la mayoría de paquetes estadísticos tienen incorporados una o varias subrutinas para el análisis de tablas de contingencia. En este punto nos centraremos en el trabajo con algunos softwares usuales con los que se trabaja en la Universidad de Granada en las clases de estadística, es decir SPSS 15.0 y STATGRAPHICS Plus 5.1. Y veremos qué nos muestran estos dos programas respecto a tablas de contingencia. Existen otros programas con los que se puede realizar también este tipo de análisis, por ejemplo, el BMDP (Aguilera, 2001).

P1. *SPSS 15.0*. En este programa después de introducir las variables con sus valores podemos trabajar con datos del tipo cualitativos pinchando en “Analizar”, dentro de él, en “Estadísticos descriptivos” y después en “Tablas de contingencia”. Este camino nos abre una ventana para introducir las variables y donde podemos pedir gran cantidad de cosas como: estadísticos (chi-cuadrado de Pearson, chi-cuadrado de la razón de verosimilitud, prueba exacta de Fisher, chi-cuadrado corregido de Yates, rho de Spearman, coeficiente Phi, V de Cramer, coeficiente de contingencia, lambda y el coeficiente de incertidumbre), gráficos (gráfico de barras agrupadas), frecuencias esperadas, porcentajes, residuos (no tipificados, tipificados y tipificados corregidos), formato de la tabla (ascendente o descendente)....

P2. *STATGRAPHICS Plus 5.1*. Con este programa también se puede trabajar con datos cualitativos. En la ventana “Descripción”, hay una opción “Datos Cualitativos”, la que nos muestra tres opciones distintas para trabajar con datos cualitativos: tabulación, tabulación cruzada y tablas de contingencia.

P2.1. *Tabulación.* Al pinchar en esta opción, el programa pide que introduzcamos una variable cualitativa en un espacio llamado “Datos”. En el lado izquierdo nos muestra las variables disponibles de la base de datos. Se nos abre una ventana que contiene las “opciones tabulares”, con un Resumen del Procedimiento y Tabla de Frecuencias; así mismo contiene las “opciones gráficas”, con Diagrama de Barras y Diagrama de Sectores.

P2.2. *Tabulación Cruzada.* Al pinchar en esta opción, el programa pide que introduzcamos las variables cualitativas X e Y, con las que trabajamos, en los huecos “Variable Fila” y “Variable Columna”. En el lado izquierdo nos muestra las variables disponibles de la base de datos. Se nos abre una ventana que contiene las “opciones tabulares”, con un resumen del procedimiento, tabla de frecuencias, contraste de chi-cuadrado y resumen estadístico; también contiene las “opciones gráficas”, con diagrama de barras, gráfico de mosaico y gráfico tridimensional.

P2.3. *Tablas de Contingencia.* Al pinchar en esta opción, el programa nos pide que introduzcamos las variables cualitativas X e Y, con las que trabajamos, en el hueco “Variable Fila” y la otra en “Variable Columna”. En el lado izquierdo nos muestra las variables disponibles de la base de datos. En este caso también se nos abre una ventana que contiene las “opciones tabulares”, con un resumen del análisis, tabla de frecuencias, test chi-cuadrado y resumen estadístico, así como las “opciones gráficas”, con diagrama de barras, gráfico de mosaico y gráfico tridimensional.

## **1.7. CONCLUSIONES SOBRE EL SIGNIFICADO REFERENCIAL DE LA TABLA DE CONTINGENCIA**

En este capítulo hemos planteado nuestro problema de investigación y realizado un análisis somero de su interés en la formación del psicólogo, así como de su significado institucional referencial en nuestro estudio. Aunque ésta es sólo una primera revisión, que habrá que ampliar en el futuro, es ya visible la gran complejidad de este objeto matemático, aparentemente simple y para el cuál se dispone de un tiempo muy limitado de enseñanza, tanto en Psicología como en otras titulaciones. Vemos además, que algunos de los procedimientos que involucra – los contrastes de hipótesis- son a su vez objetos muy complejos que fueron analizados en investigaciones previas (Vallecillos, 1996). Todos estos indicadores apoyan el interés de enfocar una investigación específica sobre la didáctica de las tablas de contingencia.

## **CAPÍTULO 2.**

### **INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE COMPRENSIÓN DE TABLAS DE CONTINGENCIA**

#### **2.1. INTRODUCCIÓN**

Con objeto de fundamentar nuestro trabajo, en este capítulo hacemos una síntesis de las investigaciones previas relacionadas con las tablas de contingencia. Podemos clasificar estos trabajos en dos grupos principales: a) Estudios de las estrategias y concepciones en relación con los juicios de asociación en tablas de contingencia; y b) Cálculo de probabilidades a partir de tablas de contingencia.

Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos (1994) indican que una gran parte de la investigación didáctica trata de caracterizar los errores y dificultades de los estudiantes sobre los principales conceptos estadísticos elementales, entre otros, hablan sobre la asociación en tablas de contingencia que es el tema en que nos centramos. En nuestro trabajo partimos de otros estados de dicho estado de la cuestión, así como de la forma de abordarlo Estepa (1993; 2004), quien realiza un análisis de distintas investigaciones sobre el tema de asociación estadística. Pero también hemos ampliado la revisión de Estepa incluyendo los mismos trabajos del autor, así como otros posteriores no incluidos en las citadas revisiones. En lo que sigue describimos estos dos tipos de investigaciones, incluyendo primero unas consideraciones sobre los conceptos de asociación, condicionamiento y causación.

#### **2.2. ASOCIACIÓN, CONDICIONAMIENTO Y CAUSACIÓN**

La asociación estadística extiende la idea de dependencia funcional, y se utiliza en muchos métodos de gran variedad de ciencias. Mientras que en una dependencia de tipo funcional a cada valor de una variable  $X$  corresponde un solo valor de otra variable  $Y$  (dependiente), en el caso de asociación a cada valor de  $X$  corresponde una distribución de valores de  $Y$ . Además se puede definir una medida de la intensidad de la asociación, que varía entre 0 (independencia total) y 1 (asociación perfecta) utilizando coeficientes como el de correlación (para variables cuantitativas) o el coeficiente de contingencia  $C$  (para variables cualitativas).

Este término, el de asociación estadística, lo usamos para decir la dependencia

entre dos variables de cualquier tipo, el término correlación se emplea únicamente a variables cuantitativas. En nuestro trabajo sólo analizamos el caso más simple posible: la asociación en variables cualitativas; supondremos además, que los datos están presentados en tablas de contingencia, es decir una tabla que presenta en la primera fila y primera columna los valores de dos variables X e Y, y en las celdas las frecuencias dobles correspondientes a cada par de valores.

La asociación y correlación también están ligadas a las ideas de condicionamiento y causalidad. En general, el concepto de relación de causalidad es claramente diferente del de asociación (Perales, Catena, Ramos y Maldonado, 1999). La diferencia entre ellos es un tema central para la filosofía de la causalidad. Una cuestión importante es determinar hasta qué punto cuándo dos fenómenos ocurren conjuntamente (asociación) o uno de ellos produce el otro (causalidad). En este sentido, parece claro que si dos eventos covarían ello no implica que el primero (A) sea causa del segundo (B). La covariación entre los acontecimientos A y B puede deberse a que, efectivamente, el antecedente A sea la causa del consecuente B. Estas relaciones de predicción pueden establecerse en otros casos debido a que realmente existe un nexo causal entre A y B, aunque la consecuencia se manifieste en primer lugar. Por ejemplo, la aparición de un síntoma (consecuencia) es previa a la constatación de la enfermedad (la causa) que lo provoca. En otros casos la covariación no implica causalidad.

Díaz y de la Fuente (2005b) analizan las relaciones entre causalidad y condicionamiento, que también aparecen en un problema de asociación. Indican que las personas construimos nuestro conocimiento del mundo sobre la base de relaciones de causa y efecto entre diferentes sucesos. Desde el punto de vista de la probabilidad, si un suceso A es la causa estricta de un suceso B, siempre que suceda A, sucederá B, por lo que  $P(B/A)=1$  y habrá una asociación entre A y B. Las autoras indican que una relación causal determinista es menos frecuente que una aleatoria. Donde, cuando sucede A cambia la probabilidad de que ocurra B. Una relación de causalidad implica una asociación, pero no al contrario, pues dos sucesos o variables pueden estar asociados sin que uno de ellos sea causa del otro. Una asociación estadística entre variables puede ser debida a otras variables intervinientes o incluso ser espúrea y no implica relación

### **2.3. JUICIOS DE ASOCIACIÓN**

A partir de una tabla de contingencia se pueden proponer gran variedad de problemas a los sujetos, ya que de una celda de una tabla de contingencia se pueden

extraer tres tipos distintos de frecuencias: frecuencia relativa doble, frecuencia condicional respecto a su fila o frecuencia condicional respecto a su columna. Uno de estos problemas consiste en realizar juicios de asociación, es decir, decidir si las variables presentadas en filas y columnas tienen dependencia estadística o no la tienen. El problema resulta de gran interés en psicología, y está relacionado con la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre (Scholz, 1987) porque en muchas de estas decisiones se necesita un juicio sobre la asociación de las variables. Siendo el principal centro de atención de estas investigaciones las tablas 2x2 (dos filas y dos columnas).

Algunas variables que se pueden considerar en un juicio de asociación es el tamaño de la muestra, que la distribución marginal de una variable ( $A$  y no  $A$ ) no tengan la misma frecuencia para sus diferentes valores, la intensidad de la asociación, la dirección de la asociación, en caso de tabla 2x2 u ordinal, que concuerden la asociación empírica en la tabla, y la influencia de las creencias previas.

### **2.3.1. DESARROLLO EVOLUTIVO DEL CONCEPTO DE ASOCIACIÓN**

Este terreno del término asociación, ha sido poco explorado en didáctica de las matemáticas, exceptuando los trabajos realizados por Estepa y sus colaboradores, que se describen más adelante. La mayor parte de lo realizado está hecho por psicólogos, especialmente interesados por las tablas 2x2. Los que iniciaron el avance fueron Inhelder y Piaget (1955), quienes pensaban que el término asociación sería el último desarrollo del término probabilidad, como exponen en el capítulo XV de su obra “De la lógica del niño a la lógica del adolescente”. Así que los antecedentes evolutivos de los conceptos de asociación y probabilidad son iguales para estos autores, quienes sugieren que para entender lo que es la asociación implica tener que entender lo que es proporción, combinatoria y probabilidad.

Los autores realizaron un estudio con chicos a partir de 12-13 años, donde clasificaron las posibilidades de combinar el color de pelo (rubio o moreno) y color de ojos (azules o negros), usando como material unas cuarenta tarjetas con dibujos coloreados donde aparecían caras en las que se veían el color de ojos y color de pelo. Se podía hacer varias pruebas con los sujetos, (a) darle al sujeto unas pocas tarjetas sin clasificar para que nos dijera si existe alguna relación entre las variables, (b) darle al sujeto unas pocas tarjetas clasificadas para que nos dijera si existe alguna relación entre las variables, o (c) darle dos grupos de tarjetas para que nos dijera en que grupo la relación es más nítida.

Para describir sus resultados mostraron sus datos con un esquema de la tabla de contingencia (Figura 2.3.1.1.). En este esquema, los valores interiores, es decir los valores a, b, c y d, son las frecuencias absolutas de cabello rubio y ojos azules, cabello rubio y ojos negros, cabello moreno y ojos azules, y cabello moreno y ojos negros.

*Figura 2.3.1.1. Esquema de una tabla de contingencia 2x2*

	B	no B	Total
A	a	b	a + b
no A	c	d	c + d
Total	a + c	b + d	a + b + c + d

En su estudio indican que para estudiar una asociación entre las variables había que tener en cuenta: los casos favorables, correspondientes a  $(a+d)$ ; los casos desfavorables, correspondientes a  $(b+c)$ ; y los casos posibles, correspondientes a  $(a+d) + (b+c)$ . Para los autores, la asociación aparece cuando el número de casos favorables es mayor que el de los desfavorables.

Los adolescentes de su estudio que están en el primer nivel de comprensión de la asociación (que corresponde al nivel IIIa en el desarrollo del concepto de probabilidad), sólo se fijaban en los casos positivo-positivo, o sea la relación del caso  $a$  al total de datos, sin mirar el caso negativo-negativo, es decir el caso  $d$  (Figura 2.3.1.2.). Por tanto, sólo usan una de las cuatro variables de la tabla. Un segundo nivel de razonamiento (nivel IIIb en el desarrollo del concepto de probabilidad) en relación a la asociación es cuando los adolescentes utilizan dos de las variables y comparaban  $a$  con  $b$ , ó  $a$  con  $c$ , nuevamente sin mirar el caso negativo-negativo, es decir el caso  $d$ .

*Figura 2.3.1.2. Significado de las celdas en una tabla 2x2*

	B	no B	Total
A	positivo-positivo	positivo-negativo	suma A
no A	negativo-positivo	negativo-negativo	suma no A
Total	suma B	suma no B	A+no A=B+no B

Inhelder y Piaget pensaron que para llegar a la comprensión completa de la asociación se debía utilizar la siguiente fórmula para una evaluación correcta de la asociación entre distintas variables, aunque no se viera la relación hasta cerca de los 15 años de edad.

$$R = \frac{(a + d) - (b + c)}{(a + d) + (b + c)}$$

Si las probabilidades  $\frac{(a+d)}{(a+d)+(b+c)}$  y  $\frac{(b+c)}{(a+d)+(b+c)}$  son iguales, entonces

$R=0$ , lo que implica que la correlación sería cero, siendo más fuerte cuanto mayor fuese la diferencia  $(a+d)-(b+c)$ . Esto quiere decir que los autores sólo consideraron la correlación positiva en su trabajo, aunque comenta al final de su estudio algo sobre correlación negativa. Según los autores, los sujetos de entre 11-12 a 14-15 años, estiman probabilidades simples, pero solamente comparan celdas dos a dos, entendiendo la presencia de relación entre las variables, pero sin entender que  $a$  y  $d$  tienen la misma significación. Además al comprender cuales son los casos favorables ( $a$  y  $d$ ) y desfavorables ( $b$  y  $c$ ) de la asociación, no los comparan. Al final de esta etapa se comienza a establecer las relaciones diagonales, comparándolas entre si o con el total  $(a+b+c+d)$ .

Los sujetos a partir de los 14-15 años relacionan directamente  $(a+d)$  con  $(b+c)$  para evaluar cuánta correlación hay, viendo los distintos tipos de correlación: positiva  $(a+d) > (b+c)$ , nula  $(a+d) = (b+c)$  y negativa  $(a+d) < (b+c)$ .

### **2.3.2. ESTRATEGIAS EN LOS JUICIOS DE ASOCIACIÓN**

#### **Investigaciones en Psicología**

Otros autores, como Smedlund (1963) y Shaklee y Mins (1982) observaron sujetos adultos que para realizar un juicio de asociación, sólo se fijaban en la celda primera (positivo-positivos) o que la comparaban con la segunda celda (positivo-negativo). En consecuencia, los sujetos no utilizaban todos los datos relevantes en el problema y el desarrollo del concepto de asociación no sería espontáneo en los sujetos, a menos que se dé una instrucción formal sobre el mismo. Jenkins y Ward (1965) muestran la dificultad de estas tareas de juicios de asociación ya que hasta la estrategia de comparar las diagonales de Piaget e Inhelder, sólo se puede usar con frecuencias marginales iguales para la variable independiente, pues en otros casos puede dar lugar a un juicio de asociación incorrecto. Aunque esto ocurra, esta estrategia es utilizada por adultos en las investigaciones de Allan y Jenkins (1983) y Shaklee y Tucker (1980).

Jenkins y Ward proponen para casos generales, como estrategia correcta comparar la diferencia entre las probabilidades  $P(B/A)$  y  $P(B/\bar{A})$ , la siguiente:

$$P = \left(\frac{a}{a+b}\right) - \left(\frac{c}{c+d}\right)$$

En la investigación psicológica se observan una variedad de estrategias, que se pueden agrupar en niveles de complejidad. Pérez Echeverría (1990), por ejemplo, observa los siguientes niveles y porcentajes de uso:

- Nivel 1. Utilizar sólo una celda, generalmente la celda  $a$  (uso 3,7%).
- Nivel 2. Comparar la celda  $a$  con  $b$  o  $c$ , es decir usar dos datos (uso 30,56%).
- Nivel 3. Comparar la celda  $a$  con  $b$  y  $c$ , es decir usar tres datos (uso 15,74%).
- Nivel 4. Usar todos los datos pero sólo mediante comparaciones aditivas (uso 37,96%).
- Nivel 5. Concluir la asociación por el uso de una relación multiplicativa entre las cuatro celdas (uso 12,04%).

### **Efecto de las teorías previas**

Chapman y Chapman (1969) describen la presencia en muchas personas de un sesgo que consiste en formarse teorías sobre la relación entre variables que impide evaluar correctamente las contingencias empíricas. Este fenómeno ha sido conocido como “correlación ilusoria” y lleva a la percepción de una relación donde no existe ninguna, o bien a la percepción de una relación más fuerte de la que existe en realidad. La experiencia vital y el entorno cultural son los responsables de estas teorías, porque dichas variables llaman la atención de las personas. Un ejemplo sería el encontrar una falsa asociación entre la pertenencia a un grupo minoritario y los comportamientos del grupo. Muchos autores han estudiado la influencia de las teorías previas en el contexto del problema en los juicios de asociación (Jennings, Amabile y Ross, 1982; Wrigth y Murphy, 1984; Alloy y Tabacnick, 1984). En términos generales se puede decir, que cuando los datos no reflejan los resultados esperados por estas teorías, aparece en los sujetos un conflicto cognitivo.

### **Investigación en Didáctica de la Matemática**

En España la investigación sobre tablas de contingencia, fue llevada a cabo especialmente por Antonio Estepa en diversos trabajos: con un estudio histórico-epistemológico de la asociación estadística; un estudio sobre concepciones previas en universitarios sobre la asociación; una experiencia de enseñanza con ordenadores de la asociación, basado en la resolución de problemas y el uso de ordenador; el estudio de la evolución de las concepciones iniciales después de la enseñanza y de las dificultades encontradas. Posteriormente, Sánchez-Cobo realiza una investigación de libros de texto

de Bachillerato sobre la presentación de los temas de correlación y regresión (Sánchez, 1996) y un estudio de evaluación sobre la correlación en cursos universitarios. Sánchez (1999). Nosotros sólo tendremos en cuenta la parte centrada en tablas de contingencia.

Estepa y Batanero (1995) analizan los juicios de asociación, además de las estrategias empleadas por alumnos del Curso de Orientación Universitaria de tres institutos de Bachillerato, trabajando con tablas de contingencia 2x2 y tablas rxc (r filas y c columnas). Nos muestran las frecuencias de juicios correctos e incorrectos, diferencia de dificultad de algunos ítems y un análisis factorial de las respuestas en los juicios de asociación. La muestra seleccionada de forma intencional, estaba formada por 213 alumnos que se distribuían de la siguiente forma: 124 de COU de ciencias y 89 de COU orientado a letras (113 a varones y 100 mujeres), siendo 34 alumnos los que tenían conocimientos previos de estadística y sólo tres los que sabían algo de dependencia funcional y aleatoria. El fin fue realizar una evaluación de los conocimientos iniciales de asociación estadística en alumnos que ingresan a la universidad. El cuestionario se comprobó en una muestra piloto de 51 estudiantes, obteniéndose un índice de generalizabilidad de 0,84.

El cuestionario consta de diez preguntas donde hay que dar un juicio sobre la asociación de dos variables: cinco de las preguntas mostrando los datos en forma de tabla de contingencia, tres preguntas usando diagrama de dispersión y dos preguntas acerca de comparar una variable numérica en dos muestras. Las preguntas de tabla de contingencia iniciales, se dividían en 3 sobre tablas 2x2, una cuarta sobre una tabla 2x3 y una última sobre una tabla 3x3. Los problemas fueron extraídos de otras investigaciones, de datos reales o contruados para la investigación. Se tuvieron en cuenta las variables de tarea siguientes: tipo de dependencia entre las variables (directa, inversa e independencia), intensidad de la dependencia (midiéndolo con el coeficiente de Pearson, el coeficiente PHI o el coeficiente de Cramer), diferenciación de la variable dependiente e independiente (en unos casos se ve claramente y en otros no), concordancia entre los datos y las teorías previas (en ocasiones los datos coinciden con las teorías previas y otras no), y tipo de covariación (dependencia causal unilateral, interdependencia, dependencia indirecta, concordancia y covariación casual).

En uno de los ítems observa cómo hay sujetos de la prueba que consideran la asociación inversa como independencia. También cabe destacar la mayor dificultad de los dos primeros ítems frente al primero ya que en estos, los datos presentan una relación de las variables distinta a la que cabe esperar por las teorías previas. Además el

ítem 1 es preciso usar correctamente el razonamiento proporcional.

Se espera relación entre las respuestas de un mismo sujeto, así que para determinar la estructura, realizan un análisis factorial (utilizando BMDP), con el método factor principal y como método de rotación varimax. A través de la estructura de los autovalores se confirma la multidimensionalidad del juicio de asociación. Los factores con coeficientes factoriales de magnitud apreciable, y su interpretación, son los siguientes: asociación entre variables como variación de las frecuencias condicionales (agrupando las tablas de contingencia, salvo el ítem que presenta asociación inversa), asociación entre variables como variación del valor numérico de una de ellas en función de la otra variable (agrupa el ítem 7), signo de la asociación cuando no hay teorías en contra (opone el ítem 3 frente los ítems 5, 6 y 7), concordancia frente a causalidad (correlación moderada), y asociación como comparación de muestras independientes (agrupa con signos opuestos las tablas 2x2 y el último ítem de comparación de muestras independientes). Estos factores explican un 62 % de la varianza, teniendo todos ellos, un valor de especificidad alto.

Los autores realizan un estudio cualitativo de estrategias de los 213 estudiantes respecto a su corrección desde el punto de vista de los conceptos matemáticos que aparecen, y observan grupos de sujetos que solucionan un mismo problema de la misma manera. Se basan en las categorías iniciales, la comparación con las estrategias descritas en las investigaciones previas y el asesoramiento de otros investigadores, así como en el marco conceptual de Vergnaud (1990) quien describe dos tipos de situaciones: situaciones en que los sujetos tienen las competencias para un uso rápido de las mismas, y situaciones en las que el sujeto no tiene estas competencias. En el estudio de Estepa y Batanero, los sujetos, estarían en la segunda situación descrita. Vergnaud utiliza la palabra esquema para definir el proceso de organización de la conducta que se emplea en cada una de estas dos situaciones, observándose en la primera situación un esquema bastante automático con esquema único, mientras que en la segunda situación se utilizaran varios esquemas hasta llegar a la solución del problema. Vergnaud describe los “teoremas en acto” que no son propiamente teoremas que aparecen en los libros de texto, sino propiedades y relaciones de los objetos matemáticos usados implícitamente al resolver los problemas.

En la investigación mencionada se identifican estrategias empleadas en tablas de contingencia, estrategias empleadas en diagramas de dispersión y estrategias empleadas en la comparación de muestras, y, dentro de cada una estrategias correctas, estrategias

parcialmente correctas y estrategias incorrectas. Describimos a continuación las usadas en las tablas de contingencia, junto con los teoremas en acto utilizados.

*Estrategias correctas*

- ST.1. *Comparar todas las distribuciones de frecuencias relativas condicionales de una variable para los distintos valores de la otra variable.* En este caso el alumno emplearía implícitamente el siguiente teorema en acto T1: La dependencia de una variable  $B$  respecto a otra variable  $A$  lleva a la variación de las frecuencias relativas condicionales  $h(B/A)$  cuando  $A$  cambia. Una interpretación similar tendría el caso en que el alumno intercambiase filas por columnas.
- ST.2. *Comparar todas las frecuencias relativas condicionadas de una variable para un único valor con la marginal correspondiente de la otra variable.* En este caso el alumno emplearía implícitamente el siguiente teorema en acto T2: La distribución de  $B$  al condicionar por  $A$ , siendo independientes, implica la invarianza de la distribución de  $B$ .
- ST.3. *Comparación de posibilidades, comparando las frecuencias de casos a favor y en contra de  $B$  en cada valor de  $A$ .* En este caso el alumno emplearía implícitamente el siguiente teorema en acto T3: Existe una correspondencia unívoca entre la probabilidad de un suceso y la razón de sus probabilidades a favor y en contra.

*Estrategias parcialmente correctas*

- ST.4. *Comparar la distribución de frecuencias absolutas condicionales con la frecuencia absoluta marginal correspondiente.* En este caso el alumno utiliza comparaciones aditivas o cualitativas, de tal forma que no se cuantifican bien las probabilidades usadas, aunque es parecido a la estrategia ST.1. La estrategia no es correcta pues se comparan frecuencias absolutas y no relativas.
- ST.5. *Comparar sólo una frecuencia absoluta en cada distribución condicional, con la frecuencia marginal que le corresponde.* En este caso el alumno emplearía implícitamente el siguiente teorema en acto T4: con la variación de la frecuencia relativa de algún valor de  $A$  cuando  $B$  cambia se demuestra la dependencia. Tampoco en este caso la estrategia es correcta, pues se comparan frecuencias absolutas y no relativas.
- ST.6. *Comparar las frecuencias absolutas condicionadas la una con la otra.* En este

caso el alumno emplearía una estrategia parecida a la ST.2, aunque comparando las frecuencias absolutas entre si, por lo que no es correcta.

- ST.7. *Comparar la suma de frecuencias en las diagonales.* En este caso el alumno usa la estrategia descrita por Piaget, siendo correcta, sólo en el caso de que la tabla tenga igual las frecuencias marginales para la variable independiente.

#### *Estrategias incorrectas*

- ST.8. *El uso único de la celda de mayor frecuencia.* En este caso el alumno no utiliza toda la información presente en el problema, tan sólo la celda más sobresaliente.
- ST.9. *El uso de sólo una distribución condicional.* En este caso el alumno no ve el problema como un problema de comparación de probabilidades.
- ST.10. *Comparar frecuencias dobles con el número total de observaciones.* En este caso el alumno, de forma particular elige las celdas de mayor frecuencia.
- ST.11. *Comparar frecuencias marginales.* En este caso el alumno cree que obtener distintas frecuencias marginales, implica no poder llegar a una conclusión.
- ST.12. *Otros procedimientos incorrectos.* En casos esporádicos se usan procedimientos, o no relacionados con las frecuencias de la tabla, por ejemplo plantear una ecuación.

### **2.3.3. CONCEPCIONES SOBRE LA ASOCIACIÓN**

Estepa (1993) cree que las estrategias usadas por los estudiantes en los juicios de asociación dependen de algunas concepciones que poseen los alumnos sobre la misma, describiendo la concepción causal, determinista, unidireccional y local, las que comentaremos a continuación.

- Concepción causal: Este término lo emplearemos cuando el sujeto sólo considera la dependencia entre variables si puede adjudicarse a la presencia de una relación causal entre las mismas.
- Concepción determinista: Este término describe el caso en que los sujetos no admiten el caso de excepciones, implicando esto que a cada valor de la variable independiente le corresponde un solo valor de la variable dependiente. Este caso corresponde a la situación en que los sujetos afirman que no hay correspondencia por el hecho de que en una tabla 2x2 hay casos en las celdas b o/y c. Otro claro ejemplo es cuando el sujeto exige la existencia de una expresión algebraica que

relacione las variables.

- Concepción unidireccional: En este caso el estudiante no admite la asociación inversa, considerándose la intensidad de la asociación, pero no su signo. Presentándose casos en los que se dice que la dependencia inversa es independencia.
- Concepción local: Esta concepción se presenta cuando los sujetos, dan su solución mirando únicamente algunos casos aislados. Siendo ejemplos cuando sólo se tienen en cuenta los casos que confirman la asociación, observando una sola distribución condicional o fijándose en la celda de máxima frecuencia.

#### **2.3.4. EVOLUCIÓN DESPUÉS DE LA ENSEÑANZA**

Estepa (1993) realiza también un estudio del efecto de la enseñanza sobre el aprendizaje del concepto de asociación. La muestra estuvo formada por 22 alumnos de tercer curso de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E.G.B. de Jaén, de los cuales 17 no habían estudiado Estadística con anterioridad, 4 si la habían estudiado y 1 no cumplimentó el pretest. Se puede considerar que se está en la segunda situación propuesta de Vergnaud (1990). El cuestionario pasado al finalizar la enseñanza estaba formado por 3 ítems de tablas de contingencia (tablas 2x2, 2x3 y 3x3), 3 ítems sobre la nube de puntos y 2 ítems sobre comparación de muestras (una dicotómica y otra numérica). Se realizó un estudio paralelo al de la muestra de comparación descrita en el apartado anterior para poder situar a los alumnos en un contexto más amplio.

En los ítems de tablas de contingencia se vio que los alumnos leían las tablas sin dificultad, viniendo los problemas al intentar calcular frecuencias relativas condicionadas y marginales. Respecto a los juicios de asociación presentes en este trabajo, referidos a tablas de contingencia, se puede observar cómo detectan los alumnos el tipo de asociación existente las parejas de variables en una tabla 2x2. Algunos alumnos fallan por falta de razonamiento proporcional o por imponer sus teorías previas. En un ítem se cree la presencia de independencia, diciendo una concepción unidireccional de la asociación en este tipo de tablas. A continuación continúa comparando los resultados con la muestra piloto y de comparación, llegando afirmar que lo encontrado en la muestra experimental sobre las concepciones y estrategias respecto asociación entre variables son similares a la del estudio más amplio.

### **Evolución de estrategias en juicios de asociación**

Para el estudio de las estrategias utiliza el método del autoinforme, como Smedlund (1963) o Beyth-Marom (1982), de forma escrita, y haciendo un análisis de contenido del mismo. Se clasificaron las respuestas en procedimientos o maneras diferentes de resolver el problema, observando la información empleada en la respuesta y al modo en que se compara o combina, y se realiza un recuento de frecuencias. La primera clasificación utilizada fue considerando estrategias diferentes según las celdas que se habían usado en la resolución del problema y el modo de utilizar la información. También presenta un apartado de “otras”, que incluye los procedimientos que no se pueden incluir en los apartados anteriores. En donde concluye lo siguiente:

- Los alumnos tienden a usar 1, 2 o 4 celdas, y nunca emplean 3 celdas.
- Un alto porcentaje de alumnos usan 1 celda, generalmente la de máxima frecuencia.
- Aproximadamente un tercio usan 2 celdas de una condicional, comparando con la marginal o entre sí.
- Los alumnos usan procedimientos aditivos, más que multiplicativos, para realizar un juicio de asociación correcto en tablas 2x2.

Batanero, Estepa y Godino (1996) realizan un estudio de los cambios después de la instrucción. Para esto, se realizó un test posterior a la instrucción a la muestra experimental. En el trabajo que realizan presentan tablas donde se aprecia que el número de estrategias correctas en tablas de contingencia cambió de 17 a 31. Sin embargo, algunos alumnos que anteriormente a la instrucción utilizaron estrategias correctas, después emplearon estrategias incorrectas. Muestran una tabla donde aparece la evolución de la prueba anterior a la enseñanza a la prueba posterior, asignándole valores positivos en caso de mejora y valores negativos en caso de empeoramiento, para cada ítem respecto cada estudiante. En general existía una mejora, ya que el total es positivo. Además se ve la variabilidad en las marcas de los estudiantes y en los diferentes problemas. No presentaban mejora, los ítems de asociación inversa en una tabla 2x2 y asociación directa en una tabla 2x2. En particular, los estudiantes identificaban la independencia y extendían el uso de las estrategias correctas en tablas de contingencia 2x2 a tablas rxc.

### **Juicios de asociación usando ordenador**

En su investigación se apoya en el contexto teórico de manejo de ordenadores

como recurso didáctico (Batanero, Estepa y Godino, 1991). Este uso, permite en el caso de la estadística el poder procesar datos, poniendo a los alumnos ante situaciones-problemas relativos al análisis de ficheros de datos de aplicaciones reales. Estos autores utilizan la técnica del registro de la interacción alumno-ordenador, viéndose los procedimientos empleados en la resolución de las cuestiones que se les plantean. También usando argumentación escrita en que basan sus respuestas, para ver la corrección y pertinencia de los procedimientos empleados.

Los alumnos durante la enseñanza trabajaron con un software didáctico preparado para la experiencia denominado PRODEST. Obteniéndose los ficheros de datos por los alumnos utilizando una encuesta a sus compañeros, o bien fueron suministrados por el profesor. Los programas usados fueron: CONTAJE (tablas y gráficos de datos categóricos), HISTO (tablas y gráficos de datos agrupados), TRONCO (gráfico del tallo y hojas), MEDIANA (cálculo de la mediana), ESTADIS (cálculo de estadísticos), TABLAS (análisis de tablas de contingencia) y REGRESIO (regresión y correlación bivalente).

La enseñanza alternó clases tradicionales en el aula ordinaria y clases prácticas en la sala de informática. En cada práctica, se presenta una situación problemática de análisis de un conjunto de datos, donde se muestran una serie de preguntas, que podrían solucionarse con el uso de alguno de los programas mencionados en el párrafo anterior. Clasificándose los problemas en los tipos siguientes:

- Análisis de una sola variable en el fichero completo.
- Análisis de una variable en una parte del fichero.
- Estudio conjunto de dos variables.
- Comparación de muestras independientes.
- Comparación de muestras relacionadas.
- Seleccionar la solución más adecuada entre varias opciones.
- Comprobación de alguna propiedad matemática de distribuciones y sus estadísticos.
- Plantear preguntas en un conjunto de datos que se solucionen con el uso de un procedimiento estadístico.

Se observa el refuerzo del estudio de la asociación entre variables, respecto a la enseñanza tradicional. También hay que mencionar lo esencial que es el tipo de variable estadística (dicotómica, cualitativa o cuantitativa). Además de ciertas características de su distribución (necesidad de agrupación, ser o no simétrica, tener valores atípicos en

caso de asimetría y bimodalidad).

Con el uso de grabaciones de la actuación del alumno con el ordenador se observó el aprendizaje, y una evaluación final individual de cada alumno, correspondiente a una serie de cuestiones abiertas. Esta evaluación, para resolver la cual podría usarse el ordenador y se dio libertad para trabajar con cualquiera de los programas citados, correspondió al análisis de un nuevo fichero con 60 datos reales. El fichero recogía datos de una clase de educación física, con las variables sexo, práctica deporte habitualmente, pulsaciones por minuto en reposo, tiempo en recorrer 30 metros tras 30 flexiones en dos fechas distintas (septiembre y diciembre), peso, altura y la edad. A los alumnos se les dio una descripción del fichero, los datos impresos y una hoja de codificación del mismo.

Los autores analizan la forma en que los estudiantes usan el ordenador para resolver cuatro cuestiones de asociación. Como en cada ejercicio se puede solucionar por varios comandos distintos, nos muestran una tabla indicando las posibles soluciones correctas para cada uno de ellos. Se toma el *intento* de solución como unidad de análisis, saliendo 120 unidades de análisis para las cuatro cuestiones, y puesto que teníamos en los 18 alumnos, se obtiene 1,66 intentos de resolver por cada pregunta y alumno. Hay alumnos que resuelven el problema por varios caminos. Más adelante para cada unidad de análisis se estudian las siguientes variables: programa empleado en la resolución del problema y argumento en que el alumno basa su respuesta.

En los procedimientos de análisis de datos, muestra la clasificación de los intentos por problema y programa utilizado. Se ve que el total de veces que se realiza una cuestión es superior a 18 (el número de sujetos), esto es porque un alumno debe elegir una solución entre otras posibles (por lo que hace varios ensayos), o para confirmar la solución del problema. Además, se aprecia que los ejercicios de diferencia entre muestras relacionadas se solucionan en forma distinta (provocando el estudio separado de cada variable por diversos métodos). A continuación se analizan las estrategias correctas e incorrectas ofrecidas por los estudiantes. Las correctas encontradas se clasifican de la siguiente forma:

- *Frecuencias relativas*: Cuando los juicios de asociación se basan en proporciones o porcentajes en las distribuciones univariantes, condicionales o marginales de una tabla de contingencia.
- *Percentiles o rangos de percentiles*: Al basarse en frecuencias acumuladas ascendentes, descendentes, o en los estadísticos de orden (menos la mediana), en

caso de datos ordinales o numéricos.

- *Coefficiente de correlación*: Valor absoluto y signo, en una tabla 2x2 u ordinal o bien coeficiente de contingencia en una tabla cualquiera.
- Otros argumentos: Gráficos que muestren la asociación, cálculos adicionales, etc.

En las dos primeras preguntas que aparece una variable dicotómica, los principales argumentos que se usan correctamente son los relacionados con frecuencias. Se deduce que la asociación de una variable con otra dicotómica se interpreta principalmente como diferencia en las distribuciones de frecuencias condicionales. Las otras preguntas se refieren a variables cuantitativas por lo que no las comentaremos.

Entre las argumentaciones incorrectas, la principal en la tabla de contingencia fue la interpretación incorrecta de las distribuciones de frecuencias condicionales. Siendo debido a un error de identificación de porcentajes y no darse cuenta de que la suma de porcentajes ha de ser igual a 100. Otro error es el uso de frecuencias absolutas: en las distribuciones univariantes, condicionales o marginales de una tabla de contingencia. Además, la existencia de otras variables parece que excluye la idea de dependencia. Hay quien piensa que la dependencia debe inducir un cambio de las frecuencias relativas de casos por encima y debajo de la media. Se ven casos en los que los alumnos encuentran respuestas distintas, sin darse cuenta de que la respuesta es única. Finalmente, se ve presencia de sistemas de creencias arraigadas y la no identificación del problema como de índole estadístico.

### **Evolución de las concepciones**

En alguno de los ítems de la investigación de Estepa (1993), se puede observar que una estrategia correcta o parcialmente correcta no se corresponde con una decisión correcta. Comenta un par de razones por las que puede ocurrir este hecho:

1. Tener concepciones erróneas sobre la asociación, superpuestas con otras correctas.
2. Particularidades del ítem, que hace que funcione la estrategia en ese caso particular.

Batanero, Estepa y Godino (1996) analizan la evolución de las concepciones de los alumnos tras la enseñanza. La gran parte de los estudiantes de la muestra superaron la concepción determinista de la relación, y la concepción local de la relación era eliminada, al comprender la importancia de tener en cuenta los datos completos. La mayoría usaron las distribuciones condicionales dejando los procedimientos aditivos.

Aparece alguna corrección en la concepción unidireccional, viéndose que se seguía considerando la independencia en la asociación inversa. En general no había mejora respecto a la concepción causal de la relación, ya que los estudiantes no se daban cuenta que una asociación fuerte no es suficiente para llegar a una conclusión sobre la causa y el efecto. El estudio teórico de las relaciones entre la correlación y la causalidad durante la enseñanza fue insuficiente para cambiar los conceptos de los estudiantes. Por consiguiente, creen los autores que hay una necesidad de encontrar las nuevas actividades prácticas que ayuden a los estudiantes a reflexionar sobre este tema.

### **Actos de comprensión de la asociación**

Los autores analizaron, mediante grabaciones, entrevistas y análisis de las tareas escritas y resueltas por ordenador, el proceso de enseñanza para dos estudiantes, con objeto de describir actos de comprensión de algunos elementos de significado de la asociación (Godino y Batanero 1998). Interpretan los “actos de comprensión” según la teoría de Sierpiska (1994), descubriendo pruebas en los datos recogidos de que el conocimiento de los estudiantes de estos elementos de los significados parecen desarrollarse en unos momentos específicos durante todo el proceso de adquirir el conocimiento. Estos elementos fueron los siguientes:

1. *Para estudiar la asociación entre dos variables, la comparación de dos o más muestras tiene que ser hecha en términos de las frecuencias relativas.* Sin embargo, en la primera sesión los estudiantes compararon las frecuencias absolutas de las mismas variables en dos muestras. Aunque se comentó sobre este error al final de esa sesión, el mismo procedimiento incorrecto aparecía otra vez en las sesiones 2, 3 y 5. Después, los estudiantes aparentemente superaron esta dificultad.
2. *La distribución completa en las diferentes muestras debe ser usada para evaluar las diferencias en el estudio de la asociación.* Encontrar las diferencias locales no es suficiente, puesto que la asociación debe ser deducida de los datos completos. A pesar de esto, los estudiantes empezaron a solucionar los problemas comparando valores aislados en las dos muestras. Por ejemplo, solamente compararon los valores con las frecuencias máximas y mínimas para ambas muestras en la primera sesión. Aunque estas diferencias señalaban a una asociación posible, no eran suficientes para cuantificar su intensidad. Esta dificultad reapareció en las Sesiones 2 y 3 y desapareció definitivamente.
3. *De la misma frecuencia absoluta en una celda de la tabla de contingencia pueden*

ser calculadas dos frecuencias relativas condicionales diferentes, dependiendo de cuál es la variable condicionada. El papel de la condición y lo que se condiciona en la frecuencia relativa condicional no es intercambiable. Falk (1986) y otros autores han señalado que los estudiantes tienen dificultades en la interpretación de las probabilidades condicionales, porque no discriminan entre las probabilidades  $P(A/B)$  y  $P(B/A)$ . Muchos estudiantes en el estudio mostraron una confusión similar haciendo referencia a las respectivas frecuencias condicionales en la prueba preliminar y durante todas las sesiones experimentales. Esta confusión fue notada en los estudiantes observados durante sesión 5, aunque lo solucionaron con ayuda. Ellos no mostraron esta confusión durante el resto de las sesiones.

4. *Dos variables son independientes si la distribución de una de estas variables no cambia cuando la condicionamos por valores de la otra variable.* Hasta sesión 5, los estudiantes no descubrieron que una condición para la independencia era invariable respecto de la distribución de frecuencia condicional cuando cambia el valor de la variable condicional.
5. *La decisión sobre qué tamaño de las diferencias deber ser considerado para admitir la existencia de la asociación es, hasta cierto punto, subjetiva.* Es difícil obtener la relación perfecta o la independencia. El problema de la relación debe ser planteado en términos de intensidad en vez de en términos de existencia. Aunque los estudiantes no habían estudiado constantes de hipótesis, en la sesión 5 descubrieron que determinar un juicio de asociación implica tomar una decisión sobre si atribuir las diferencias pequeñas a las fluctuaciones de muestra o a la relación verdadera entre las variables. También se dieron cuenta de que hay diferentes grados de asociación, desde independencia perfecta a relación funcional.
6. *Cuando se estudia la asociación ambas variables juegan un papel simétrico.* Sin embargo, cuando investigamos la regresión el papel jugado por las variables no es simétrico. El hecho es que esa correlación ignora la distinción entre explicativas y variables de respuesta, mientras en la regresión esta diferencia es esencial (Moore, 1995), causa mucha confusión para los estudiantes. Cuando tuvieron que seleccionar la variable explicativa para encontrar sentido a la línea de regresión, en las sesiones 5, 6 y 7, no supieron qué variable escoger. Por ejemplo, cuando calculaban la línea de regresión entre la altura y el peso, los estudiantes fueron confundidos por el hecho de que había una dependencia mutua de las dos variables. Una gran cantidad de discusión siguió ya que los estudiantes no eran capaces de solucionar esta

confusión. El profesor no notaba el problema y definitivamente, los estudiantes calculaban las líneas de regresión escogiendo la variable explicativa al azar. Al final del período de enseñanza estos estudiantes no habían descubierto que dos líneas de regresión diferentes pueden ser calculadas.

7. *Una correlación positiva señala a una asociación directa entre las variables.* Aunque, en la sesión 6, los estudiantes podían interpretar el tamaño del coeficiente de correlación, no hablaron del tipo de la asociación (directa o inversa). Al final de la sesión, notaban que cuando el coeficiente de correlación es positivo, y hay una relación lineal, las variables son asociadas positivamente y por encima del promedio. Sin embargo, no usaron el término "Asociación directa" explícitamente.
8. *Una correlación negativa señala a una asociación inversa entre las variables.* Cuando, en la sesión 6, los estudiantes encontraron un coeficiente de correlación negativo por primera vez, se extrañaron tanto que preguntaron a su profesor si esto era posible. También tenían problema cuando comparaban dos coeficientes de correlación negativos. Aunque, con la ayuda del profesor, observaron que un coeficiente de correlación negativo correspondía a una pendiente negativa de la línea de regresión y que esto quiso decir que el valor de  $y$  disminuyó cuando el valor de  $x$  aumentó, no usaron el término "asociación inversa" explícitamente, ni diferenciaron entre los dos tipos de la relación al final de su aprendizaje.
9. *El valor total del coeficiente de correlación indica la intensidad de la asociación.* Aunque los estudiantes relacionaron el valor total del coeficiente de correlación con la intensidad de la relación, no relacionaron esta idea con la dispersión de los datos.

Las conclusiones de la investigación citada indican que un proceso de enseñanza de nociones estadística basado en la resolución de problemas con datos reales de análisis de datos, disponiendo de soporte informático, es insuficiente para que los estudiantes adquieran todo el sentido y verdadero alcance de las nociones estadísticas de asociación e independencia. El diseño de situaciones didácticas debe tener en consideración las distintas variables didácticas, y adjudicar un papel importante al profesor gestionando las situaciones.

#### **2.4. CÁLCULO DE PROBABILIDADES A PARTIR DE TABLAS DE CONTINGENCIA**

Un segundo tipo de problema es el relacionado con cálculo de probabilidades a

partir de datos en una tabla de contingencia. Díaz y de la Fuente (2005), trabajan con una muestra de 154 estudiantes de psicología, trabajando con tablas de contingencia 2x2, encontrando muchos posibles errores. Las autoras sugieren que estos serán posiblemente más frecuentes todavía al interpretar tablas más complejas. En lugar de pedir a los alumnos que realicen un estudio de la asociación, las autoras evalúan si los estudiantes identifican y calculan la probabilidad simple, condicional y conjunta a partir de los datos de la tabla.

Los objetos matemáticos presentes en las tablas de contingencia pueden ser confundidos por los alumnos al hacer interpretaciones. Además de las frecuencias dobles, condicionales y marginales que aparecen en la tabla, obtenemos diversas probabilidades que se deducen de cada una. Estas probabilidades pueden ser probabilidad conjunta ( $P(A \cap B) = \frac{a}{a+b+c+d}$ ), probabilidad condicional respecto a su fila ( $P(A/B) = \frac{a}{a+b}$ ), probabilidad condicional respecto a su columna ( $P(B/A) = \frac{a}{a+c}$ ), y probabilidad simple de filas ( $P(B) = \frac{a+b}{a+b+c+d}$ ), o de columnas ( $P(A) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$ ) por ejemplo.

El cálculo de estas probabilidades trae consigo muchos problemas, como la *falacia de la condicional transpuesta*, que consiste en no distinguir entre las dos direcciones de la probabilidad condicionada (Falk, 1986), interpretar incorrectamente el conjunto “y”, confundiendo la probabilidad conjunta y la probabilidad condicional (Einhorn y Hogarth, 1986), o interpretar la intersección como condicionamiento (Ojeda, 1995).

En la investigación de Díaz y de la Fuente (2005a), se analizan las respuestas a cuatro apartados de una pregunta de un cuestionario más amplio que se pasó después de impartir el tema de probabilidad y motivando a los alumnos puntuándoles el número de respuestas correctas para el final de la nota de una asignatura. En esta investigación se continúa categorizando las respuestas, y mostrando los porcentajes de respuestas correctas en cada uno de los cuatro apartados del ejercicio. Se aprecia que el 90% responden correctamente al ser probabilidades simples, pero más del 40% fallan al tratarse de calcular probabilidades compuestas y condicionales. Posteriormente clasifican las distintas respuestas, y comentan los siguientes errores:

- *Confundir un suceso con su complementario.* En lugar de calcular la probabilidad pedida se calcula la del complementario, tanto en probabilidades simples como en probabilidades condicionadas, o sea de  $P(A/\text{no } B)$ , en lugar de  $P(A/B)$ .
- *Confundir probabilidades con casos posibles,* dando el valor de la celda correspondiente a frecuencias absolutas, como si fueran probabilidades de intersección.
- *Obtener probabilidades mayores que la unidad,* calculando las probabilidades dando la vuelta o invirtiendo la fórmula de Laplace.
- *Confundir la unión con la intersección de sucesos.* Aplicando a la palabra “y” del enunciado un significado de unión, frecuente en el lenguaje cotidiano, pero no igual en este caso con el significado matemático.
- *Dar por hecho la independencia de los datos.* Estos alumnos calculan la probabilidad de la intersección multiplicando las dos probabilidades de los dos sucesos.
- *Al pedir la probabilidad condicionada dar como respuesta  $P(A)/P(B)$ .* Estando presente un conflicto en confundir el numerador del cociente de la probabilidad condicionada.

Se hace una nueva clasificación de los errores atendiendo los diferentes conflictos semióticos entre objetos matemáticos presentes en la tarea, encontrándose 262 conflictos en las cuatro tareas y total de muestra, esto es una media de 1,7 conflictos por alumno encontrados, ya que una respuesta puede traer más de un conflicto semiótico.

Se aprecia como errores principales confundir una probabilidad condicional con una conjunta o confundir la probabilidad condicional con su inversa. Muchos estudiantes no distinguen un suceso con su complementario, tienen errores de cálculo o no encuentran los datos en el enunciado. Algunos errores menos comunes son confundir frecuencia con probabilidad o poner al contrario la fórmula dando probabilidades mayores de 1. Siguiendo esta línea de investigación, Lonjedo y Huerta (Huerta y Lonjedo 2003; Lonjedo, 2003; Lonjedo y Huerta, 2005) describen algunas variables que influyen sobre la resolución de problemas de probabilidad condicional dados en una tabla de contingencia por estudiantes con y sin nociones previas de los contenidos. Los autores analizan si la resolución de los problemas puede hacerse utilizando el razonamiento numérico y por tanto los estudiantes no necesitan utilizar las relaciones

entre probabilidades para resolver el problema. Esto ocurre sobre todo cuando los problemas no son interpretados como probabilidades y a causa de ello no se usan las propiedades de la probabilidad para obtener la solución del problema. Es sólo al final del proceso de resolución del problema cuando los estudiantes responden a la pregunta del problema en términos de probabilidad.

Lonjedo y Huerta concluyen que hay factores que afectan al éxito en la resolución del problema que no necesariamente son el conocimiento de las relaciones entre probabilidades. Estos factores pueden ser la naturaleza de los datos de los problemas. En su estudio clasifican los problemas atendiendo a la naturaleza de los datos en el texto del problema, distinguiendo entre datos presentados en términos de razón o datos expresados en una combinación de estos formatos. En su estudio se les presentaban a los alumnos seis problemas de probabilidad condicional en el que la estructura de datos no varía, pero sí su naturaleza y el contexto. Los resultados mostraban que el éxito en la resolución de los problemas no dependía del uso correcto de unas determinadas fórmulas. Estudiantes capacitados para ello, no siempre usaban los datos interpretados como probabilidades. Por otra parte, estudiantes que no conocen dichas fórmulas resuelven los problemas, por lo que el éxito no depende de ellas sino del uso correcto del razonamiento aritmético aplicado a unos datos no interpretados como probabilidades, sino como razones o proporciones.

## **2.5. CONCLUSIONES DEL ESTADO DE LA CUESTIÓN**

En este capítulo hemos mostrado estudios relacionados con la estimación y juicios de asociación en tablas de contingencia y cálculo de probabilidades en estas tablas, mostrando la gran relación que hay presente entre los conceptos de probabilidad y asociación. Podemos ver en las tablas de contingencia, además de estudiar la asociación entre las variables, como es lo habitual, pueden servir para trabajar probabilidades marginales, conjuntas o condicionales. Esto implica poder incluso llegar a teoremas más complejos como es el teorema de la probabilidad total o el teorema de Bayes, que utiliza estas probabilidades.

También habría que mencionar que las tablas de contingencia han sido poco estudiadas desde el punto de la investigación didáctica, siendo excepción los trabajos de Antonio Estepa, aunque su uso sea tan frecuente y habitual en nuestro día a día. Pensamos que la didáctica de las tablas de contingencia es un terreno con mucho que explorar, ya que su estudio se incluye en muchas especialidades universitarias, tanto en

estadística, como en otras materias.

El uso de las tablas de contingencia es amplio y complejo, y trae consigo problemas de interpretación de las probabilidades asociadas estudiado en multitud de trabajos como son: Maury (1985), Eddy (1982), Gotzsche y Olsen (2000) o Díaz (2007). Además, se complica por la dificultad de la notación y la diversidad de objetos matemáticos implícitos en las tablas de contingencia que se analizaron en el capítulo 1. Sería necesario mejorar la formación de los estudiantes, lo que requiere el conocimiento de sus dificultades iniciales y su posible evolución con la enseñanza.

Por otro lado, el estudio de enseñanza realizado por Estepa, solo aborda el tema desde el punto de vista de estadística descriptiva, sin incluir la enseñanza de los contrastes de homogeneidad o asociación en tablas de contingencia o de las diversas medidas de asociación. Pensamos que un estudio inferencial añadirá dificultades no estudiadas, tanto en lo que se refiere a la comprensión general del contraste de hipótesis (Vallecillos, 1996) como otras específicas relacionadas con la comprensión de la distribución Chi-cuadrado, que no han sido analizadas desde el punto de vista didáctico. La evolución de la tecnología desde el trabajo de Estepa (1993) implica que la enseñanza basada en estos recursos podría ser ahora más efectiva que la descrita por el autor. Todas estas reflexiones indican el interés de realizar un estudio sobre el tema.

## **CAPÍTULO 3.**

### **EVALUACIÓN DE ESTRATEGIAS Y ESTIMACIÓN DE LA ASOCIACIÓN**

#### **3.1. INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se describe la parte empírica del trabajo que consistió en el análisis de las respuestas de una muestra de estudiantes de psicología a una prueba de evaluación de concepciones y estrategias intuitivas sobre las tablas contingencia, antes de un estudio formal del tema. Se ha tomado una muestra de tamaño moderado, con el objeto de analizar si los ítems propuestos son útiles para nuestro objetivo de comparar los conocimientos informales de los estudiantes de esta licenciatura con los conocimientos formales que adquieren una vez estudiado el tema. También queremos comprobar la legibilidad de los ítems y el tiempo que necesitan los estudiantes para completar el cuestionario.

Dicho estudio será objeto de investigación en la futura tesis doctoral en la que completaremos el estudio de evaluación presentado en este capítulo con una muestra mayor de estudiantes. Nos ha parecido interesante en este trabajo de Master llevar a cabo una primera evaluación reducida (en cuanto al número de sujetos y el tipo de análisis efectuado) que sirva de estudio piloto para el que pensamos emprender en la tesis doctoral. A continuación analizamos la muestra, cuestionario utilizado y resultados obtenidos.

#### **3.2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA**

La muestra estuvo formada por un total de 62 alumnos de primer año de la Licenciatura en Psicología de la Universidad de Huelva, que cursaban una asignatura de Análisis de Datos I, cuya profesora colaboró con nosotros. También la profesora colaboró en la recogida de datos de los estudiantes que se seleccionaron los de las pruebas piloto.

Esta asignatura se enmarca dentro del área de Métodos de Investigación en las Ciencias del Comportamiento, que incluye varias asignaturas troncales y obligatorias de universidad. Ofrece a los alumnos un cuerpo de conocimientos teóricos y prácticos cuya comprensión y utilización les permitirá analizar y entender los resultados

obtenidos tanto en la investigación como en la práctica psicológica, así como generar sus propios análisis de datos en aquellos campos que resulten de su interés. Los contenidos de la asignatura incluyen la estadística descriptiva univariante, teorema de Bayes y estudio de las distribuciones de probabilidad normal, *t* de Student, Chi cuadrado y *F* de Snedecor. Los alumnos no habían estudiado todavía el tema de las tablas de contingencia, por lo que los conocimientos que pueden utilizar son los adquiridos en Bachillerato o bien estrategias intuitivas. En nuestra muestra de 62 estudiantes, aparecen 15 hombres y 43 mujeres, es decir en la muestra el 24,2% estaba constituido por hombres y el 69,4% por mujeres (ver tabla 3.2.1).

*Tabla 3.2.1. Sexo*

	Frecuencia	Porcentaje
Hombre	15	24,2
Mujer	43	69,4
No contesta	4	6,5
Total	62	100,0

También consideramos interesante observar otras variables como la especialidad de bachillerato de donde precedían los estudiantes (ver tabla 3.2.2), si el alumno estaba realizando la asignatura por segundo año (ver tabla 3.2.3) o la nota de acceso a la universidad con la que habían entrado en psicología (ver tabla 3.2.4). Estos datos sobre la descripción de la muestra, se presentan también gráficamente (Figura 3.2.1).

*Tabla 3.2.2. Especialidad de Bachillerato*

	Frecuencia	Porcentaje
Ciencias de la Salud	20	32,3
Ciencias Sociales	37	59,7
Tecnológico	3	4,8
Internacional	1	1,6
No contesta	1	1,6
Total	62	100,0

*Tabla 3.2.3. Repite*

	Frecuencia	Porcentaje
SI	10	16,1
NO	50	80,6
No contesta	2	3,2
Total	62	100

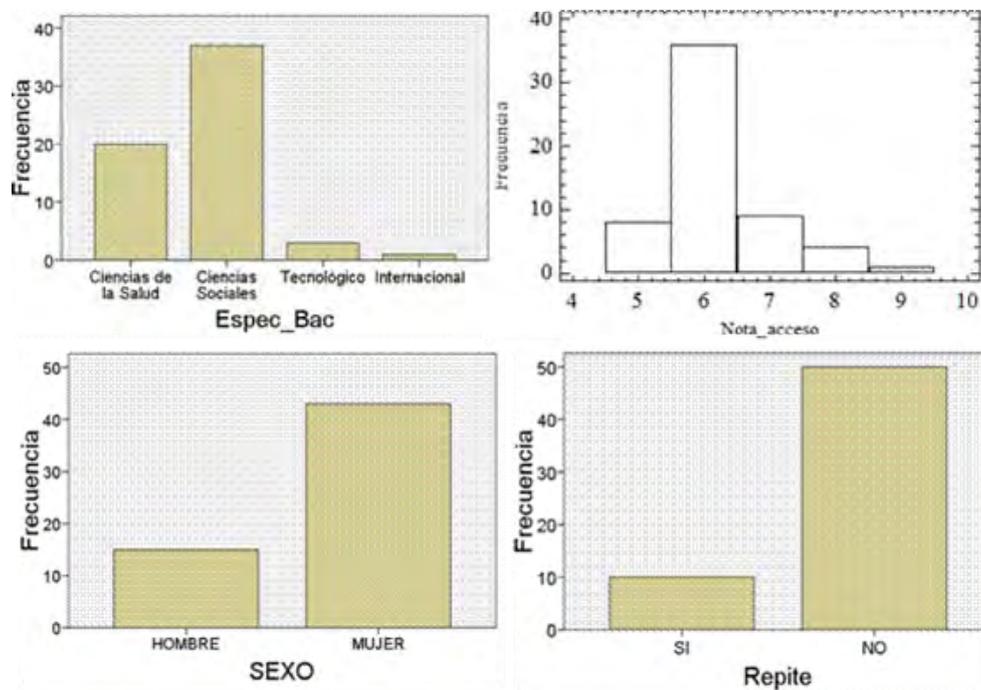
Podemos destacar principalmente en estos gráficos como la variable sexo hay casi el triple de mujeres que de hombres, que es la proporción normal en Psicología. Los alumnos entran en psicología principalmente con notas bajas, ya que se ve la disminución de la frecuencia cuanto mayor es la nota de acceso; esto es debido a que no hay nota de corte.

Estos alumnos proceden principalmente de ciencias sociales y algo menos de ciencias de la salud, siendo casi nula la presencia de alumnos procedentes del bachillerato tecnológico. Y finalmente, aproximadamente una sexta parte de los participantes son repetidores. En consecuencia, es de esperar que los conocimientos estadísticos no sean muy fuertes.

*Tabla 3.2.4. Nota de acceso*

	Frecuencia	Porcentaje
5 - 5,99	27	43,5
6 - 6,99	21	33,9
7 - 7,99	7	11,3
8 - 8,99	3	4,8
No contesta	4	6,5
Total	62	100

*Figura 3.2.1. Variables en la muestra*



### 3.3. DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO

El cuestionario que se usó está adaptado del de Estepa y Batanero (1995), el cual constaba de diez ítems, cinco de tablas de contingencia que son en los que centramos nuestra atención. La muestra a la que pasaron su cuestionario estaba formada por 213 alumnos del Curso de Orientación Universitaria de tres institutos de bachillerato de la provincia de Jaén. Consideraron, ya que había poca presencia de conocimientos sobre el concepto de dependencia funcional y aleatoria (únicamente tres alumnos), que el estudio realizado fue una evaluación de las concepciones iniciales de

los alumnos participantes.

A continuación se analizan los ítems incluidos en el estudio, señalando los cambios respecto a los utilizados por Estepa y Batanero (1995). Para cada uno de los ítems (salvo el caso de independencia) calcularemos diferentes coeficientes de asociación. Calcularemos dos clases de coeficientes: asimétricos (cuando una de las variables hace el papel de independiente y la otra dependiente) y simétricos (cuando no se diferencia entre dependiente e independiente).

Los coeficientes asimétricos son, el Lambda, el coeficiente de incertidumbre, D de Sommers y Eta. El coeficiente Lambda mide la utilidad del factor de la fila (o columna) en la predicción de otro factor. Esto significa que da el porcentaje de reducción en el error cuando las filas se utilizan para predecir columnas. El coeficiente D de Sommers mide la correlación por rangos y las variables pueden ser simétricas o dependientes. Nosotros las hemos calculado para el caso asimétrico. El coeficiente de incertidumbre expresa el grado de incertidumbre que conseguimos reducir cuando utilizamos una variable para efectuar pronósticos sobre otra. Posee dos versiones *asimétrica* (dependiendo de cuál de las dos variables consideremos dependiente) y una *simétrica* (para cuando no hacemos distinción entre variable independiente y dependiente). Lo hemos calculado para el caso asimétrico.

El coeficiente de correlación Eta sirve para cuantificar el grado de asociación existente entre una variable cuantitativa (medida en escala de intervalo o razón) y una variable categórica (medida en escala nominal u ordinal). Se trata de un coeficiente de correlación que no supone *linealidad* y cuyo cuadrado puede interpretarse como la proporción de varianza de la variable cuantitativa que está explicada por la variable categórica. Lo utilizaremos sólo en la cuarta tabla, en que la variable “número de horas de estudio” es cuantitativa, medida a escala de razón, aunque en la tabla se presente discretizada.

Respecto a los coeficientes simétricos, calcularemos el de Contingencia, V de Cramer, Gamma condicional, R de Pearson, Tau b de Kendall y Tau c de Kendall. Los coeficientes de contingencia y V de Cramér miden la asociación en variables nominales. El coeficiente de contingencia se rige por las mismas reglas de la correlación y las mediciones de índice correspondiente de + 1 a - 1, pasando por el cero, donde este último significa no correlación entre las variables estudiadas y los dos primeros la correlación máxima. En esta prueba estadística existe el cero, pero no alcanza la unidad, límite que desfavorece la prueba, pues el máximo de asociación corresponde al número

de categorías de las variables. La medida V de Crámer se utiliza cuando la variable de menor nivel es nominal, con valores entre 0 y 1 en tablas 2x2 y valores entre 0 y 1 en tablas pxq con p, q >2.

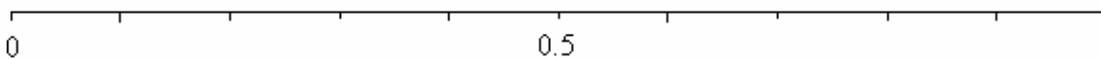
El R la correlación numérica y el resto correlación por rangos u ordinal. Gamma es una medida de asociación simétrica entre dos variables ordinales cuyo valor siempre está comprendido entre -1 y 1. La medida Tau-b de Kendall, es una medida no paramétrica de la correlación para variables ordinales o de rangos que tiene en consideración los empates. El signo del coeficiente indica la dirección de la relación y su valor absoluto indica la magnitud de la misma, de tal modo que los mayores valores absolutos indican relaciones más fuertes. Los valores posibles van de -1 a 1, pero un valor de -1 o +1 sólo se puede obtener a partir de tablas cuadradas. La medida Tau-c de Kendall es también una medida no paramétrica de asociación para variables ordinales que ignora los empates. El signo del coeficiente indica la dirección de la relación y su valor absoluto indica la magnitud de la misma, de tal modo que los mayores valores absolutos indican relaciones más fuertes. Los valores posibles van de -1 a 1, pero un valor de -1 o +1 sólo se puede obtener a partir de tablas cuadradas.

El ítem 1 es una modificación del primer ítem de Estepa y Batanero (1995). Se trata de un ítem en el que hay independencia entre las dos variables, lo que va en contra de las teorías previas, pues en general tener estrés está asociado con el insomnio. La explicación de una posible correlación sería la dependencia causal bilateral, pues el estrés puede ser causado por el insomnio y al revés. Los cambios hechos son ligeros respecto a Estepa y Batanero, ya que utilizamos los mismos valores numéricos en la tabla, implicando esto independencia en ambos, y en ninguno de los dos casos hay concordancia entre los datos y las teorías previas.

Ítem 1. Se pretende estudiar si el sufrir insomnio tiene relación con los trastornos de estrés. En una muestra de 250 personas observadas se obtuvieron los siguientes resultados:

	Padece estrés	No padece estrés
Tener insomnio	90	60
No tener insomnio	60	40

- Utilizando estos datos razona si ser o no noctámbulo tiene relación con padecer estrés.
- Indica como has usado los datos de la tabla para llegar a tu conclusión
- Asigna una puntuación entre 0 (mínimo) y 1 (máximo) según la intensidad de esta relación, marcando una cruz en el punto de esta escala que creas adecuado:

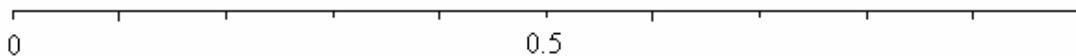


Las principales diferencias son un cambio del contexto y significado de las variables, pues como la muestra se pasa a estudiantes de psicología, hemos tratado de buscar un tema más afín con ellos. También varía el tipo de covariación, que en Estepa y Batanero era dependencia causal, siendo en nuestro caso de interdependencia. La prueba de Chi cuadrado no es estadísticamente significativa pues se obtiene un valor de  $\chi^2=0$  así como del resto de coeficientes. Al tratarse del caso de independencia total, no calculamos los coeficientes de asociación, pues todos ellos han de ser igual a cero.

Ítem 2. Un psicólogo infantil estudia si existe relación entre ser hijo único (sin hermanos) y ser un niño problemático. Para ello se han observado 250 niños obteniendo los resultados siguientes

	Niño con problemas	Niño sin problemas
Tiene hermanos	40	100
Hijo único	100	10

- Utilizando estos datos razona si hay alguna relación entre ser un niño con problemas y tener o no hermanos.
- Indica cómo has utilizado los números de la tabla, para llegar a tu conclusión.
- Asigna una puntuación entre 0 (mínimo) y 1 (máximo) según la intensidad de esta relación, marcando una cruz en el punto de esta escala que creas adecuado:



El ítem 2 es una modificación del segundo ítem de Estepa y Batanero (1995) y se trata de un ítem en el que hay dependencia inversa entre las dos variables, lo que va a favor de las teorías previas, pues en general se considera que ser hijo único está asociado con ser un niño con más problemas que los niños que tienen hermanos. La explicación de una posible correlación sería la dependencia causal unilateral, pues el ser un niño con problemas puede ser causado por ser hijo único, pero no al revés.

*Tabla 3.3.1. Coeficientes de asociación asimétricos en el ítem 2*

Estadístico	Con Filas Dependientes
Lambda	0,55
Coef. Incertidumbre	0,32
D de Somer	-0,62

Los cambios hechos son que se han modificado los datos del enunciado original para tener un mayor valor de coeficiente de correlación y también mayor tamaño de muestra. Asimismo se cambió el contexto original del ítem, para hacerlo más familiar a los estudiantes de psicología. La prueba de Chi cuadrado fue estadísticamente significativa pues se obtiene un valor de  $\chi^2=97,15$ , con un grado de libertad y  $p=0,0000$ . Por tanto, podemos rechazar la hipótesis de que las filas (tener hermanos o

ser hijo único) y columnas (niños con o sin problemas) son independientes con un nivel de confianza superior a 99,99%.

*Tabla 3.3.2. Coeficientes de asociación simétricos en el ítem 2*

Estadístico	Valor	P-Valor
Coef. Contingencia	0,53	
V de Cramer	0,62	
Gamma condicional	-0,92	
R de Pearson	-0,62	0,00
Tau b de Kendall	-0,62	0,00
Tau c de Kendall	-0,61	

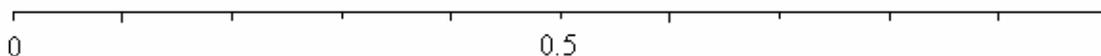
En las tablas 3.3.1 y 3.3.2 se incluyen algunos de los coeficientes de contingencia, calculados para este ítem. En la tabla 3.3.1 se presentan los coeficientes asimétricos, es decir, cuando se supone una relación asimétrica entre las variables. Estos coeficientes varían, bien entre 0 y 1 o, entre -1 y 1 cuando tienen signo. En nuestro caso, la variable independiente sería la variable en filas. Los valores oscilan entre 0,52 y 0,93, y en caso de tener signo es negativo, pues la presencia de un carácter (tener hermanos) implica menor frecuencia del otro (tener problemas).

En la tabla 3.3.2 se incluyen los coeficientes de asociación simétricos (es decir cuando no se considera diferencia entre variable dependiente e independiente). Para esos estadísticos con p-valores, inferiores a 0,05 indican una asociación significativa entre filas y columnas con un nivel de confianza del 95%. Observamos que los valores oscilan entre 0,53 (coeficiente de contingencia) y -0,92 (Gamma condicional) y en caso de tener signo son negativos. En resumen, la asociación entre las variables es inversa y moderada-alta.

Ítem 3. Se quiere saber si sufrir o no de alergia tiene relación con llevar una vida sedentaria (llevar una vida sin realizar ningún tipo de ejercicio físico). Para ello obtuvimos los siguientes resultados de 300 sujetos:

	Ingirió una dieta blanda	No ingirió una dieta blanda
Forma de vida sedentaria	130	30
Forma de vida no sedentaria	20	120

- a. Utilizando estos datos razona si padecer alergia tiene o no relación con llevar una vida sedentaria en estos sujetos.
- b. Indica como has usado los números de la tabla, para obtener tu conclusión.
- c. Asigna una puntuación entre 0 (mínimo) y 1 (máximo) según la intensidad de esta relación, marcando una cruz en el punto de esta escala que creas adecuado:



El ítem 3 es una modificación del tercer ítem de Estepa y Batanero (1995) y se trata de un ítem en el que no hay influencia de teorías previas sobre la asociación entre las variables. La explicación de una posible correlación sería una tercera variable en juego. Los cambios hechos son que se han modificado los datos multiplicando todas las celdas por diez, siendo la correlación de la misma intensidad, pero estadísticamente más significativa, al haber más casos en todas las celdas. La prueba de Chi cuadrado fue estadísticamente significativa pues se obtiene un valor de  $\chi^2=133,93$ , con un grado de libertad y  $p=0,0000$ , podemos rechazar la hipótesis de que las filas (forma de vida sedentaria o no) y columnas (ingerir una dieta blanda) son independientes con un nivel de confianza del 99%. En la tabla 3.3.4 se incluyen algunos de los coeficientes de contingencia.

*Tabla 3.3.3. Coeficientes de asociación asimétricos en el ítem 3*

Estadístico	Con Filas Dependientes
Lambda	0,64
Coef. Incertidumbre	0,35
D de Somer	0,67

*Tabla 3.3.4. Coeficientes de asociación simétricos en el ítem 3*

Estadístico	Valor	P-Valor
Coef. Contingencia	0,56	
V de Cramer	0,67	
Gamma condicional	0,93	
R de Pearson	0,67	0,00
Tau b de Kendall	0,67	0,00
Tau c de Kendall	0,67	

En la tabla 3.3.4 se incluyen los coeficientes de asociación simétricos (es decir cuando no se considera diferencia entre variable dependiente e independiente). Para esos estadísticos con p-valores, inferiores a 0,05 indican una asociación significativa entre filas y columnas con un nivel de confianza del 95%. Observamos que los valores oscilan entre 0,56 (coeficiente de contingencia) y 0,93 (Gamma condicional) y en caso de tener signo son positivos. En resumen, la asociación entre las variables es directa y moderada-alta.

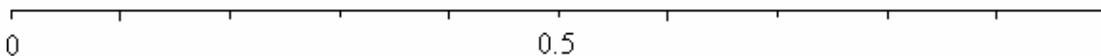
El ítem 4 es el mismo que el cuarto ítem de Estepa y Batanero (1995) y se trata de un ítem en el que hay dependencia directa entre las dos variables, lo que va a favor de las teorías previas, pues en general se considera que al incrementar el tiempo dedicado a preparar el examen está asociado con aprobar. La explicación de una posible correlación sería la dependencia causal unilateral, pues el aprobar un examen puede ser

por dedicar más tiempo de preparación del examen. No se han realizado cambios significativos en el ítem. La prueba de Chi cuadrado fue estadísticamente significativa pues se obtiene un valor de  $\chi^2=48,05$ , con dos grados de libertad y  $p=0,0000$ , podemos rechazar la hipótesis de que las filas (aprobar o suspender) y columnas (horas empleadas en la preparación del examen) son independientes con un nivel de confianza del 99%. En la tabla 3.3.6 se incluyen algunos de los coeficientes de contingencia.

Ítem 4. La siguiente tabla nos indica el número de estudiantes que aprobaron o suspendieron un examen teniendo en cuenta el tiempo que cada estudiante dedicó a prepararlo

	Menos de 5 h	Entre 5 y 10 h	Más de 10 h	TOTAL
APROBADOS	5	15	51	71
SUSPENSOS	20	7	2	29
TOTAL	25	22	53	100

- a. Utilizando estos datos razona si aprobar o suspender el examen tiene relación con el tiempo dedicado a prepararlo.
- b. Indica como has usado los números de la tabla, para llegar a tu conclusión.
- c. Asigna una puntuación entre 0 (mínimo) y 1 (máximo) según la intensidad de esta relación, marcando una cruz en el punto de esta escala que creas adecuado:



*Tabla 3.3.5. Coeficientes de asociación asimétricos en el ítem 4*

Estadístico	Con Filas Dependientes
Lambda	0,52
Coef. Incertidumbre	0,42
D de Somer	0,35
Estadístico Eta	0,38

*Tabla 3.3.6. Coeficientes de asociación simétricos en el ítem 4*

Estadístico	Valor	P-Valor
Coef. Contingencia	0,57	
V de Cramer	0,69	
Gamma condicional	0,61	
R de Pearson	0,38	0,00
Tau b de Kendall	0,43	0,00
Tau c de Kendall	0,43	

En la tabla 3.3.6 se incluyen los coeficientes de asociación simétricos (es decir cuando no se considera diferencia entre variable dependiente e independiente). Para esos estadísticos con p-valores, inferiores a 0,05 indican una asociación significativa entre filas y columnas con un nivel de confianza del 95%. Observamos que los valores oscilan entre 0,38 (R de Pearson) y 0,69 (V de Cramer) y en caso de tener signo son positivos. En resumen, la asociación entre las variables es directa y menos intensa a las

anteriores.

#### *Variables de tarea*

En resumen, las variables de tarea (Kilpatrick, 1978) tenidas en cuenta en el momento de la elaboración del cuestionario han sido las siguientes:

1. *Tipo de dependencia estadística entre las variables*, observándose los tres casos posibles en nuestros ítems, es decir, dependencia directa, dependencia inversa e independencia en las tablas 2x2.
2. *Intensidad de la dependencia*, medida mediante el coeficiente PHI, que coincide con el de Pearson en tablas 2x2 y con el coeficiente V de Cramér en tablas 2x3. la intensidad de la asociación varía de 0 (ítem 1) a 0,67 (ítem 3), teniendo un ítem de intensidad moderada-baja y dos de intensidad moderada-alta.
3. *Concordancia entre los datos y las teorías previas sugeridas por el tema del problema*. Apareciendo en las preguntas el caso en que coinciden los resultados con las teorías previas, el caso en los que no coinciden y el caso en que no hay teorías previas. Presentamos dos ítems en los que los datos concuerdan con las teorías previas, uno en que los datos contradicen estas teorías y otro donde posiblemente los alumnos no tengan una teoría formada.
4. *Tipo de covariación*. Utilizando las categorías que se aprecian en Barbancho (1973), que son: dependencia causal unilateral, interdependencia, dependencia indirecta, concordancia y covariación casual.

A continuación, en la tabla 3.3.7, se presenta un resumen de los valores de las variables tarea empleado en todos nuestros ítems

*Tabla 3.3.7. Variables de tarea*

	Tabla 2x2			Tabla 2 x3
	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4
Dependencia	Independencia	Inversa	Directa	Directa
Coficiente correlación	0	-0,62	0,67	0,37
Concuerda con t. previa	No	Si	No hay teoría	Si
Tipo covariación	Interdependencia	Causal unilateral	Tercera variable	Causal unilateral

### **3.4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN**

Recogidos los cuestionarios, se realizó un análisis de su contenido, revisando las respuestas y agrupando las similares en categorías. A continuación exponemos los

resultados, respecto a los juicios de asociación, estimación del coeficiente de correlación y estrategias utilizadas.

### 3.4.1. JUICIO DE ASOCIACIÓN

En el apartado a) de cada ítem se pide a los alumnos un juicio sobre la posible relación entre las variables presentadas en la tabla. En primer lugar hemos calculado el porcentaje de estudiantes que considera (o no) la existencia de relación entre las variables.

*Tabla 3.4.1.1. Frecuencia (y porcentaje) de juicios sobre la asociación entre las variables*

Ítem	Consideran relación	Consideran independencia	No contestan	Coefficiente de asociación	Teorías previas
1	42 (67,7)	19 (30,6)	1 (1,6)	0	En contra
2	60 (96,8)	2 (3,2)	0 (0)	-0,62	A favor
3	53 (85,5)	7 (11,3)	2 (3,2)	0,67	No hay
4	57 (91,9)	0(0)	5 (8,1)	0,37	A favor

Como se observa en la tabla 3.4.1.1, se considera mayoritariamente la existencia de asociación en todos los ítems, con mayor frecuencia en los casos en que existe relación en los datos, pero también en el ítem 1, donde los datos presentan independencia perfecta. Este resultado puede explicarse por el mecanismo de la correlación ilusoria, descrito por Chapman y Chapman (1969). Este razonamiento común en muchas personas, consiste en formarse teorías sobre la relación entre variables que impide evaluar correctamente las contingencias empíricas. Lleva a la percepción de una relación donde no existe ninguna, o bien a la percepción de una relación más fuerte que la que existe e realidad.

- En el estudio de Estepa (1993) 31,4% de estudiantes indican que hay asociación en el ítem 1, siendo la proporción de alumnos que piensan que hay relación entre las variables mucho más altas en nuestro caso. En los dos estudios el tipo de dependencia es independencia. Sólo hemos cambiado a un contexto más familiar al alumno, pues Estepa usaba un contexto médico (padecer trastornos bronquiales y fumar). Nuestros estudiantes siguen más las teorías previas y la correlación ilusoria en este ítem.
- En el estudio de Estepa, el 47,1% de estudiantes consideran asociación en el ítem 2, que correspondiendo a dependencia inversa, con teorías previas a favor de los datos. La diferencia con nuestro ítem se debe a que hemos cambiado el contexto pues

Estepa usaba un contexto médico (trastornos digestivos e ingerir una dieta blanda). Además hemos aumentado la intensidad en nuestro caso y colocado en cada casilla valores superiores a diez, puede ser la razón de un mayor porcentaje de aciertos

- En el estudio de Estepa 88,2% de estudiantes en el ítem 3, aciertan considerando dependencia directa, con un porcentaje parecido, aunque menor a nuestro caso. En los dos estudios no hay teorías previas con los datos, correspondiendo en el tipo de dependencia directa e intensidad alta. En nuestro caso hemos multiplicado todas las celdas por diez, para aumentar el número de valores en las celdas manteniendo la intensidad. Estepa sugiere que un alto porcentaje de alumnos que considera dependencia en este ítem se debe, por un lado a que no hay teorías previas.
- 88,2% de estudiantes en el ítem 4, que correspondiendo a dependencia directa, contexto (aprobados y tiempo dedicado a prepararlo) y teorías previas a favor de los datos, aciertan considerando asociación. También se diferencia con nuestro ítem en la intensidad de la dependencia, ya que modificamos un poco los datos, siendo en su investigación la intensidad de 0,43. Los resultados son muy similares en los dos estudios.

### **3.4.2. ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE ASOCIACIÓN**

En el apartado c) de cada ítem se pedía al estudiante dar una puntuación entre 0 y 1 según la intensidad que ellos percibiesen en la relación entre las variables. Hemos codificado mediante un valor numérico la intensidad estimada por los estudiantes. En algunos casos, ellos han indicado el valor numérico; en el resto de los casos hemos transformado el punto dibujado en la escala proporcionada a un valor numérico. En la tabla 3.4.4.1 presentamos el valor medio obtenido en el conjunto de la muestra para los valores estimados, que serían una estimación del coeficiente de asociación.

*Tabla 3.4.4.1. Estimación del coeficiente de asociación*

Ítem	Valor medio estimado	Coeficiente de asociación	Teorías previas
1	0,44	0	En contra
2	0,73	-0,62	A favor
3	0,68	0,67	No hay
4	0,81	0,37	A favor

Como podemos observar en la tabla 3.4.4.1, que los alumnos en general siempre afirman una relación entre las variables, en mayor o menor medida, por el fenómeno, ya descrito de correlación ilusoria. Siendo en el caso del ítem 1 en el que el valor medio

estimado se aleja más del coeficiente de asociación, posiblemente por ser el caso de independencia o tener las teorías previas en contra de los datos mostrados y además tener la mayor frecuencia en la celda a) de la tabla.

En el caso de dependencia directa (ítem 3), se puede apreciar como los alumnos se aproximan casi perfectamente al coeficiente de asociación, puede ser por no haber teorías previas sobre el tema y verse forzados a la observación de los datos, los cuales muestran con facilidad la dependencia, ya que seleccionamos un coeficiente de asociación alto.

Para el ítem 2 de dependencia inversa, con un coeficiente de asociación próximo al del ítem de dependencia directa, se ve un acercamiento de los alumnos al coeficiente, aunque no tan bueno como en el otro caso. Este acercamiento se puede pensar que ha sido facilitado, a pesar de la mayor dificultad de la dependencia inversa en comparación con la dependencia directa, por el hecho de que las teorías previas estaban a favor de la asociación.

En general, comparando los ítems donde hay teorías previas, vemos que los resultados sobre-estiman el valor del coeficiente, siempre que hay una teoría sobre la existencia de asociación (ítem 1, 2 y 4) mientras dan una estimación casi perfecta cuando no tienen teorías.

### **3.4.3. TEORÍAS PREVIAS SOBRE LA ASOCIACIÓN**

Se ha analizado la respuesta del alumno para comprobar cuáles de ellos explícitamente manifiestan alguna teoría sobre la asociación de los datos. Algunos alumnos lo hacen, por ejemplo

- Ítem 1: *“El no dormir bien, el no descansar puede influir en la carga de estrés de una persona”* (A42).
- Ítem 2: *“Pienso que sí hay una relación entre tener o no hermanos y ser un niño sin o con problemas porque aquellos niños que no tengan hermanos se crían con valores morales mucho más distintos que los que sí los tienen. Valores como la generosidad, la empatía, etc.”* (A44).
- Ítem 3: *“El llevar una vida sedentaria no tiene nada o poca relación con padecer alergia”* ó *“...utilizando la lógica entre las dos variables”* (A12).
- Ítem 4: *“A mayor tiempo de estudio, más posibilidades de aprobar y menos de suspender”* (A21).

*Tabla 3.4.6.1. Frecuencia (y porcentajes) de alumnos que expresan teorías previas*

Ítem	Expresan una teoría	No la expresan	No contestan	Coficiente de asociación	Teorías previas
1	5(8,1)	55(88,7)	2(3,2)	0	En contra
2	3(4,8)	55(88,7)	4(6,5)	-0,62	A favor
3	3(4,8)	56(90,3)	3(4,8)	0,67	No hay
4	2(3,2)	54(87,1)	6(9,7)	0,37	A favor

Pocos alumnos expresan teorías previas, aunque en el ítem 1 deben utilizarlas implícitamente, pues muchos piensan que hay asociación entre las variables. Se puede observar que se presenta el mayor número de alumnos que expresan una teoría previa en la pregunta número uno (con un 8,1%), que curiosamente es en la única pregunta que las teorías previas van en contra de los datos. Este número elevado, puede ser debido por ser la primera pregunta del cuestionario, por ser también la pregunta con menor número de alumnos que no contestan o por tratarse del caso de independencia, en el que los alumnos no se dan cuenta de que no existe dependencia.

#### **3.4.4. ESTRATEGIAS**

Otro punto estudiado fueran las estrategias, que diversos autores definen en forma diferente:

- Ríos (1976) define las estrategias como “*plan o conjunto de normas que establece un jugador y que indica cual es la acción que debe realizar en cada ocasión que corresponda actuar, en función de la información que tenga de las acciones y resultados anteriores al momento de su intervención*” (pg. 23).
- En el informe Cockcroft (Cockcroft, 1985) se describen las estrategias como “*procedimientos que guían la elección de la destreza que debe emplearse o de los conocimientos a que se debe recurrir en cada etapa de la resolución de un problema o del desarrollo de una investigación*”, (pg. 87).
- Jennings, Amabile y Ross (1982), utilizan el término “*estrategias de evaluación de la asociación*” (pg. 23) para indicar el modo en que los sujetos deciden cual es el grado de covariación en los datos presentados los sujetos.
- Pérez Echeverría (1990), cuando analiza los juicios de asociación habla de estrategia para indicar las operaciones que hacen los sujetos con las celdas de la tabla de la siguiente forma: “*la estrategia [A] consiste en fijarse exclusivamente si el número de veces en que las dos variables concurren (p,q) es más alto que el resto de los casos*” (pg. 128).

- Ortega Martínez (1991) también usa la palabra en el mismo sentido “Otra estrategia que pueden utilizar los sujetos el evaluar la relación entre dos variables consiste en comparar las frecuencias de las casillas a y c” (pg. 34).

En lo que sigue analizamos las estrategias, dándole a este término el mismo sentido empleado en las investigaciones previas sobre juicios de asociación, por ejemplo, las de Jennings, Amabile y Ross (1982), Pérez Echeverría (1990). Ortega Martínez (1991) y Estepa (1993). Anteriormente mostramos algunas de estas definiciones. Se han considerado las estrategias obtenidas por Estepa (1993), clasificándolas por correctas, parcialmente correcta e incorrecta y dentro de ello, por los elementos matemáticos usados.

*Estrategias correctas:* Se han encontrado las siguientes

ST.1. *Comparar todas las distribuciones de frecuencias relativas condicionales de una variable para los distintos valores de la otra variable.* El alumno utiliza implícitamente la siguiente propiedad: La dependencia de una variable *B* respecto a otra variable *A* lleva a la variación de las frecuencias relativas condicionales  $h(B/A)$  cuando *A* cambia. Un ejemplo (Alumno 28, ítem 1) se incluye a continuación:

	estrés	no estrés	total
no tienen insomnio	60	40	100
tienen insomnio	90	60	150

si observamos esta tabla se ve claramente que el 60% de las personas sin insomnio padecen estrés. Para realizarlo una regla de tres:  $90 \rightarrow 150 = \frac{90 \cdot 100}{150} = 60$ . Se observa que 90 es el 60% de 150, es decir hay el mismo porcentaje de personas con estrés, con o sin insomnio.

ST.2. *Comparación de posibilidades, comparando las frecuencias de casos a favor y en contra de B en cada valor de A.* En este caso el alumno emplearía implícitamente la propiedad de que existe una correspondencia unívoca entre la probabilidad de un suceso y la razón de sus probabilidades a favor y en contra. Un ejemplo (Alumno 21, ítem 2) se incluye a continuación:

En el primer caso operamos sobre 140 niños, 40 con problemas y 100 sin ellos, simplificando podemos decir que 4 de cada 14 niños con hermanos presentarán problemas (hemos dividido todas las cifras entre 10 para simplificar)

Partiendo de lo hecho arriba podemos afirmar que 10 de cada 11 hijos únicos presentarán problemas

#### *Estrategias parcialmente correctas*

ST.3. *Comparar la distribución de frecuencias absolutas condicionales con la frecuencia absoluta marginal correspondiente.* En este caso el alumno utiliza comparaciones aditivas o cualitativas, de tal forma que no se cuantifican bien las probabilidades usadas, aunque es parecido a la estrategia ST.1. La estrategia no es correcta pues se comparan frecuencias absolutas y no relativas. Un ejemplo (Alumno 51, ítem 1) se incluye a continuación:

Observando la tabla se deduce que 150 personas tienen un problema, y de ellas 90 padecen este; además 100 personas no lo tienen y solo 60 de ellas padecen este. Por lo que se puede deducir según las probabilidades que si puede tener relación.

ST.4. *Comparar las frecuencias absolutas condicionadas la una con la otra.* En este caso el alumno emplearía una estrategia parecida a la ST.2, aunque comparando las frecuencias absolutas entre sí, por lo que no es correcta. Un ejemplo (alumno 41, ítem 4) se presenta a continuación, donde el alumno, además, observa el crecimiento/decrecimiento de las frecuencias.

A medida que va aumentando el tiempo las aprobadas van aumentando y como las suspensas van disminuyendo. Hay una relación causal directa.

ST.5. *Comparar la suma de frecuencias en las diagonales.* En este caso el alumno usa la estrategia descrita por Piaget, siendo correcta, sólo en el caso de que la tabla tenga igual las frecuencias marginales para la variable independiente. Un ejemplo (alumno 39, ítem 2) se presenta a continuación.

Simplemente he mirado los resultados de la investigación siendo que entre los hijos únicos y con problemas y los niños que tienen hermanos y no tienen problemas se suman prácticamente todos los sujetos estudiados, quedando sólo 50 de ellos con las características (de) opuestas a las antes descritas.

Hemos obtenido también algunas estrategias parcialmente correctas no descritas por Estepa:

ST.6. Supone que, para que se la independencia, la frecuencia relativa doble de cada celda de la tabla debe ser igual (es decir el 25% de casos en cada celda). Esta afirmación sólo sería cierta en el caso de que las frecuencias marginales por filas y columnas fuesen iguales en la tabla. Un ejemplo (alumno 1, ítem 1) es el siguiente:

He dividido 250 entre 4 <sup>(25%)</sup> para ver el n° de personas que tendría que haber en cada cuadrante <sup>(25%)</sup> si no afectara tener insomnio. Tras esto he visto que las personas que no tienen insomnio y padece el estrés están cerca del 25%, igual que las personas que tienen insomnio y no padece estrés, las personas que no tienen insomnio ni estrés son menos del 25% y las que tienen insomnio y estrés pasan sobrepasar mucho el 25%

ST.7. Comparación de posibilidades, comparando las frecuencias de casos a favor y en contra de B en una sola distribución condicional. Es similar a la estrategia ST3, descrita por Estepa (1993), aunque en este caso se aplica a una sola distribución condicional y es parcialmente correcta. Un ejemplo (alumno 46, ítem 1) es el siguiente:

Se podrá calcular el estrés como factor de riesgo a través de la fórmula del Riesgo Relativo o OR. Si es  $> 1$  el estrés es un factor de riesgo.

$$OR = \frac{a}{a+b} \Rightarrow \frac{90}{90+60} = \frac{0.6}{0.5} = 1.2$$

Al ser  $> 1$  el estrés es un factor de riesgo para padecer insomnio.

### Estrategias incorrectas

ST.8. El uso único de la celda de mayor frecuencia. En este caso el alumno no utiliza toda la información presente en el problema, tan sólo la celda más sobresaliente.

Un ejemplo (alumno 48, ítem 4) se presenta a continuación.

100 personas → 51 aprobaron con más de 10 horas de estudio.

ST.9. *El uso de sólo una distribución condicional.* En este caso el alumno no ve el problema como un problema de comparación de probabilidades. Un ejemplo (alumno 14, ítem 4), es el siguiente, donde el alumno solo usa una columna y además estudia el crecimiento.

Simplemente he observado las horas de las tablas y según más horas se des dedique al estudio existe un mayor número de aprobados.

ST.10. *Comparar frecuencias dobles absolutas o relativas entre si o con el número total de observaciones.* En este caso el alumno, de forma particular elige las celdas de mayor frecuencia. Un ejemplo (alumno 11, ítem 1) se presenta a continuación.

He usado los datos de cada variable, y he hecho el % de cada uno de ellos respecto al total; y he comparado los resultados.

Tiene más horas de estudio	$\frac{90}{250} \cdot 100 = 36\%$	$\frac{60}{250} \cdot 100 = 24\%$
Tiene menos de 10 horas	$\frac{60}{250} \cdot 100 = 24\%$	$\frac{40}{250} \cdot 100 = 16\%$

ST.11. *Comparar frecuencias marginales o medias de las frecuencias marginales.* En este caso el alumno cree que obtener distintas frecuencias marginales, implica no poder llegar a una conclusión. En nuestro caso un alumno calcula las medias de las frecuencias dobles por fila y las compara. Es incorrecto porque confunde frecuencias con valor de la variable y además, y por otro lado, al comparar solo las filas hace un estudio de una sola variable. Un ejemplo (alumno 40, ítem 2) se presenta a continuación.

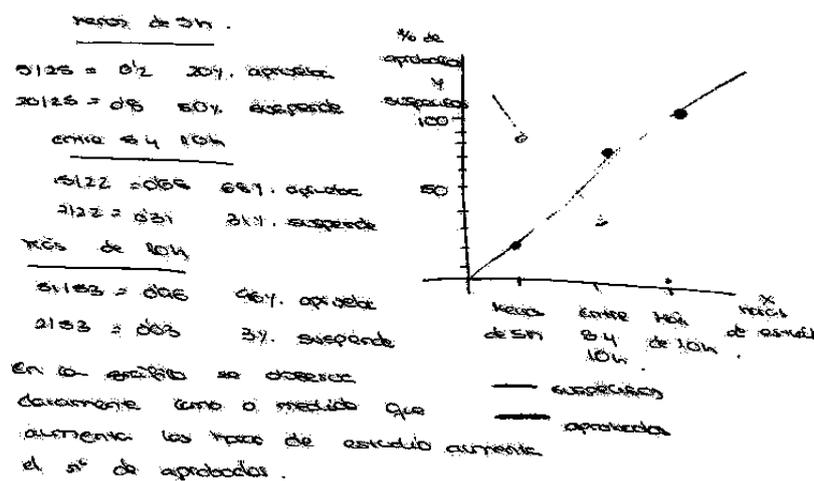
He llegado a esta conclusión teniendo en cuenta que hay más hijos únicos con problemas (100) que hijos que tienen hermanos (40). Pero al calcular la media como hice en el ejercicio anterior he comprobado que hay más niños con hermanos y con problemas que niños sin hermanos y sin problemas (75)

ST.12. *Otros procedimientos incorrectos.* En casos esporádicos se usan procedimientos, no relacionados con las frecuencias de la tabla, por ejemplo plantear una ecuación o bien no se especifica con claridad el procedimiento. Un ejemplo (alumno 12, ítem 2) se presenta a continuación.

Por la observación de la tabla y utilizando la lógica entre las dos variables que se estudian

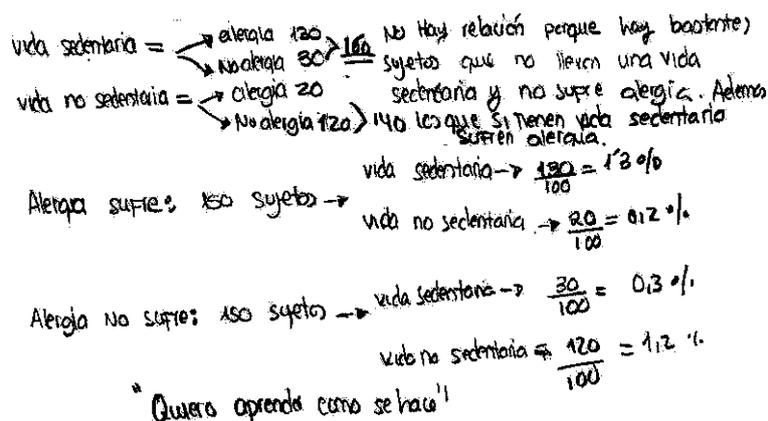
Hemos encontrado también las siguientes estrategias no descritas por Estepa:

ST.13. El alumno representa gráficamente las distribuciones condicionales por filas, interpretando los datos como si se tratase de observaciones de un análisis de varianza. Trata de aplicar el concepto de interacción y efecto principal. Lo hace correctamente, pero el problema es que ha confundido frecuencia con valor de la variable. Es una estrategia incorrecta. Un ejemplo (alumno 30, ítem 4) es el siguiente:



ST.14. Se fija en la celda que contradice la asociación, y si hay muchos casos en esta celda, supone que esto implica la no existencia de asociación. Aunque Estepa (1993) en el apéndice de su tesis, diferencia el uso de las celdas b, c y d como estrategias diferenciadas, no hace mención explícita a la búsqueda de la celda que contradice la asociación. Es una estrategia incorrecta. Un ejemplo (alumno 54, ítem 3)

es el siguiente:



ST.15. *Compara la casilla a con el resto de las celdas, esperando que estas celdas estén en contra de la asociación. También hemos considerado en esta categoría los que comparan a (presencia de los dos caracteres) con AnoB y BnoA. Es decir, comparan los casos en que presentan los dos caracteres conjuntamente, con aquellos en que se presenta sólo uno de los dos.* Es una variante de la estrategia "usar la casilla a" descrita por Estepa (1993) y es incorrecta. Un ejemplo (alumno 44, ítem 3) es el siguiente:

Fácilmente se observa que al unir las dos variables «forma de vida sedentaria - sufre alergia» tiene una cifra elevadísima comparada con la unión de variables forma de vida sedentaria - no sufre alergia. También se puede apreciar que llega a casi igualarse a la cifra perteneciente a la unión de variables forma de vida no sedentaria - no sufre alergia.

ST.16. *El uso de las celdas de mayor y menor frecuencia.* En este caso el alumno no utiliza toda la información presente en el problema, tan sólo las celdas más sobresalientes. Es una estrategia incorrecta, es una variante de la descrita por Estepa (1993) consistente en fijarse sólo en la celda de mayor frecuencia. Un ejemplo (alumno 1, ítem 4) es el siguiente:

Solo 5 personas de 100 aprobaron el examen estudiando menos de 10 horas frente a las 51 personas de 100 que aprobaron el examen estudiando más de 10 horas.

ST.17. *El uso de las celdas de menor frecuencia.* En este caso el alumno no utiliza toda la información presente en el problema, tan sólo la celda más sobresaliente. Es una estrategia incorrecta. Un ejemplo (alumno 60, ítem 4) es el siguiente:

Si ya que según la tabla a más de 10 h de estudio menos probabilidad de suspender solo 2 de 53

ST.18. *El uso de tablas de frecuencias marginales.* Calculando frecuencias, probabilidades, porcentajes. Es una estrategia incorrecta. Un ejemplo (alumno 19, ítem 4) es el siguiente:

TABLA DE FRECUENCIA (APROBADOS)					TABLA DE FRECUENCIA (SUSPENSOS)				
x	f <sub>i</sub>	p <sub>i</sub>	f <sub>a</sub>	P <sub>i</sub>	x	f <sub>i</sub>	p <sub>i</sub>	f <sub>a</sub>	P <sub>i</sub>
-5H	5	0,07	5	7	-5H	20	0,68	20	68
5-10H	15	0,21	20	21	5-10H	7	0,24	27	24
+10H	51	0,72	71	72	+10H	2	0,07	29	7
	N=71	1		100%		N=29	0,99		99%

ST.19. Calculando la diferencia de las diagonales. Es una estrategia incorrecta. Estepa (1993) describe la comparación de la suma de diagonales. Un ejemplo (Alumno 50, ítem 3) es el siguiente

Observando la poca asociación  
entre 130 - 120 (diferencia de 10)  
y 20 - 30

ST.20. Comparar los totales de las distribuciones condicionadas. Es una estrategia incorrecta. Un ejemplo (alumno 45, ítem 4) es el siguiente:

Si el total de las sujetas son 100, 71 de las  
mismas han aprobado y en cambio 29 han suspendido.

ST.30. El alumno solo considera sus teorías y no tiene en cuenta los datos. Es incorrecta. Por ejemplo “*porque la variable de tener insomnio conlleva a padecer estrés, y no tener insomnio no conlleva a tener estrés*” (A5).

Una tabla resumen (tabla 3.4.2.1.) se presenta para observar las frecuencias de cada una de estas estrategias comentadas anteriormente. Entre las estrategias incorrectas más frecuentes se encuentran el uso de la celda de mayor frecuencia (10), de una sola distribución condicional (11) o comparar frecuencias dobles entre sí (12). Vemos que al ingresar en los estudios de psicología los estudiantes no tienen suficiente capacidad para interpretar una tabla de doble entrada y encontrar la asociación entre las variables.

En el caso de Estepa las estrategias más frecuentes en su muestra son: utilizar una única distribución condicional; comparar posibilidades o razón; y comparar una frecuencia relativa de cada distribución. La más frecuente resulta ser la estrategia incorrecta, después la estrategia parcialmente correcta y luego la estrategia correcta.

*Tabla 3.4.2.1. Frecuencias de cada estrategia observada*

		Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4
Correctas	1	6(9,7)	6(9,7)	6(9,7)	5(8,1)
	2	3(4,8)	1(1,6)		1(1,6)
Parc. correctas	3	4(6,4)		2(3,2)	1(1,6)
	4	8(12,9)	7(11,3)	6(9,7)	19(30,6)
	5		7(11,3)	5(8,1)	2(3,2)
	6*	1(1,6)			
	7*	1(1,6)			
	8	8(12,9)	4(6,5)	6(9,7)	4(6,5)
Incorrectas	9	7(11,3)	11(17,7)	9(14,5)	10(16,1)
	10	8(12,9)	12(19,4)	11(17,7)	4(6,5)
	11	3(4,8)	2(3,2)	2(3,2)	
	12	2(3,2)	3(4,8)	3(4,8)	2(3,2)
	13*	3(4,8)	5(8,1)	5(8,1)	5(8,1)
	14*	1(1,6)		2(3,2)	
	15*	3(4,8)		1(1,6)	
	16*				1(1,6)
	17*		1(1,6)		1(1,6)
	18*				1(1,6)
	19*			1(1,6)	
	20*				1(1,6)
	30*	2(3,2)	1(1,6)	1(1,6)	
No responde	2(3,2)	2(3,2)	2(3,2)	5(8,1)	
<b>Total</b>		<b>62</b>	<b>62</b>	<b>62</b>	<b>62</b>

\* Estrategias no descritas por Estepa

En la tabla 3.4.2.1 se resumen las estrategias; la mayoría son incorrectas, disminuyendo el porcentaje en el ítem 4, a pesar de ser una tabla 2x3. Pensamos que el resultado es debido a que algunos alumnos han usado el crecimiento/decrecimiento de los datos (estrategia 6, usada por el 30%, que es parcialmente correcta). Además el contexto es familiar y la teoría sobre la asociación se confirma en los datos.

*Tabla 3.4.2.1. Frecuencias de la clasificación de estrategias*

	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	No responde	Total
Ítem 1	9(14,5)	14(22,6)	37(59,7)	2(3,2)	62
Ítem 2	7(11,3)	14(22,6)	39(62,9)	2(3,2)	62
Ítem 3	6(9,7)	13(21)	41(66,1)	2(3,2)	62
Ítem 4	5(8,1)	22(35,5)	30(48,3)	5(8,1)	62
<b>Total</b>	<b>27(10,9)</b>	<b>63(25,4)</b>	<b>147(59,3)</b>	<b>11(4,4)</b>	<b>248</b>

Al comparar estos resultados con los obtenidos por Estepa (tabla 3.4.2.2.), se puede apreciar como los porcentajes de las estrategias incorrectas son más bajos en su caso, y análogamente de que son más frecuentes las estrategias correctas. En el estudio de Estepa la proporción de estrategias correctas en el ítem equivalente al 4 es 19% y parcialmente correctas el 40%), algo mayor que en nuestro caso.

Tabla 3.4.2.2. Frecuencias de la clasificación de estrategias obtenidas por Estepa

	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas	No contesta	Total
Independencia	41(19,3)	23(10,8)	107(50,2)	42(19,7)	213
A. Inversa	43(20,2)	88(41,3)	62(29,1)	20(9,4)	213
A. Directa	37(17,3)	90(42,3)	63(29,6)	23(10,8)	213
A. Directa (2x3)	41(19,3)	84(39,4)	68(31,9)	20(9,4)	213
Total	162(19)	285(33,5)	300(35,2)	105(12,3)	852

### **3.5. CONCLUSIONES SOBRE LOS JUICIOS DE ASOCIACIÓN**

El estudio empírico descrito en este capítulo muestra unos pobres resultados en las estrategias para realizar juicios de asociación en los estudiantes que ingresan en Psicología. También muestran una sobre estimación de la asociación, especialmente en el caso de independencia y cuando las teorías previas contradicen los datos. Aunque la muestra es de tamaño moderado, los participantes fueron un grupo completo de los dos que integran los estudiantes de primer año en la Universidad de Huelva, cuyas características no son muy diferentes de las los estudiantes de psicología en otras universidades españolas, en cuanto a nota de acceso a los estudios y Bachillerato cursado. No obstante, se deben interpretar los resultados sólo como provisionales y será necesaria una muestra de tamaño mayor, que pensamos analizar en la tesis doctoral, para obtener resultados concluyentes.

Al comparar con el estudio de Estepa (1993), realizado con estudiantes del Curso de Orientación Universitaria se muestran en nuestro caso un menor porcentaje en la presencia de estrategias correctas para los cuatro casos que tenemos (tres casos de tablas 2x2: independencia, asociación inversa, asociación directa; y un caso de tabla 2x3: asociación directa).

En nuestro estudio las estrategias, la gran mayoría son incorrectas, siendo de un 59,3% el porcentaje de estrategias incorrectas empleadas. Para el caso de Estepa, este porcentaje baja al 35,2%, siendo el porcentaje superior al nuestro en los casos de estrategias correctas y parcialmente correctas.

En el ítem de independencia, el porcentaje de alumnos que consideran dependencia es aproximadamente el doble que el porcentaje de alumnos que no consideran dependencia. Pensamos que es debido al mecanismo de la correlación ilusoria, descrito por Chapman y Chapman (1969).

Sobre las teorías previas, vemos que los resultados sobre-estiman el valor del coeficiente cuando existe una de estas teorías, siendo la estimación de los alumnos casi perfecta cuando no tienen teorías. Aunque pocos alumnos muestran la influencia de las

teorías previas en sus justificaciones, únicamente 13 alumnos las reflejan claramente en su respuesta.

Finalmente, habría que comentar que se encontraron estrategias nuevas, respecto a las encontradas por Estepa, en el caso de estrategias parcialmente correctas (2 tipos nuevos) y en el caso de estrategias incorrectas (9 tipos nuevos).

## **CAPÍTULO 4.**

### **CONCLUSIONES GENERALES**

#### **4.1. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS**

Finalmente, exponemos a continuación las conclusiones sobre cada uno de los objetivos fijados

*O1: Se pretendía realizar un análisis semiótico del objeto matemático “tablas de contingencia”, utilizando los diferenciados de objetos matemáticos (elementos de significado) del Enfoque Onto-semiótico.*

Este análisis se ha llevado a cabo en el Capítulo 1, donde se describieron los campos de problemas que dan origen a las tablas de contingencia; *conceptos*, como son los de frecuencias absolutas doble, frecuencia relativa doble, distribución marginal o distribución condicionada; *propiedades*, como la relación entre diferentes frecuencias o las frecuencias esperadas en caso de independencia; *problemas* como son el cálculo de probabilidades, contraste de homogeneidad y el contraste de independencia; *procedimientos*, donde aparecen el contraste Chi cuadrado usado tanto para analizar la asociación, como la homogeneidad de muestras y las diferentes medidas de asociación; *argumentos* relacionados con las tablas de contingencia, de tipo deductivo, empírico o de tipo estadístico; y *lenguaje*, donde se incluyeron términos, símbolos y representaciones gráficas.

Como conclusión hemos obtenido una aproximación el significado institucional referencial en nuestro estudio que permitirá después plantear nuevos problemas de investigación y realizar un análisis del significado personal alcanzado por el psicólogo. Es visible la gran complejidad de este objeto matemático, aparentemente simple y para el cuál se dispone de un tiempo muy limitado de enseñanza en todas las titulaciones, incluida Psicología. Se puede observar, que algunos de los procedimientos que involucra – los contrastes de hipótesis- son a su vez objetos muy complejos que fueron analizados en investigaciones previas (Vallecillos, 1996). Todos estos indicadores apoyan el interés de enfocar una investigación específica sobre la didáctica de las tablas de contingencia. Estos resultados servirán para posteriormente diseñar instrumentos de evaluación o secuencias de enseñanza del tema.

*O2: Iniciar la elaboración de un estado de la cuestión sobre las investigaciones relacionadas con las tablas de contingencia, partiendo del contenido en la tesis de Estepa (1993) y teniendo en cuenta los trabajos posteriores sobre el tema. Se ampliará también con los puntos no tocados por el autor citado.*

Este objetivo se aborda en el capítulo 2, donde se comienza introduciendo el capítulo de investigaciones previas, pasando posteriormente a tratar los términos “asociación, condicionamiento y causación”. Más adelante centramos el grueso del capítulo a los juicios de asociación, donde hacemos un desarrollo evolutivo del concepto de asociación, hablamos de estrategias, concepciones sobre el término asociación y terminamos los juicios de asociación analizando la evolución después de la enseñanza. Finalmente, mostramos el cálculo de probabilidades a partir de las tablas de contingencia, mostrando la gran relación que hay presente entre los conceptos de probabilidad y asociación, formándose en las tablas de contingencia un instrumento que puede servir para trabajar probabilidades marginales, conjuntas o condicionales.

Las tablas de contingencia han sido poco estudiadas desde la perspectiva didáctica, siendo excepción los trabajos de Antonio Estepa, aunque su uso sea tan frecuente y habitual en nuestro día a día. El uso de las tablas de contingencia es amplio y complejo, y trae consigo problemas de interpretación de las probabilidades asociadas. Complicándose por la dificultad de la notación y la diversidad de objetos matemáticos implícitos en las tablas de contingencia. Sería necesario mejorar la formación de los estudiantes, lo que requiere el conocimiento de sus dificultades iniciales y su posible evolución con la enseñanza.

El estudio de enseñanza realizado por Estepa, solo aborda el tema desde el punto de vista de estadística descriptiva, sin incluir la enseñanza de los contrastes de homogeneidad o asociación en tablas de contingencia o de las diversas medidas de asociación. Pensamos que un estudio inferencial añadirá dificultades no estudiadas, tanto en lo que se refiere a la comprensión general del contraste de hipótesis (Vallecillos, 1996) como otras específicas relacionadas con la comprensión de la distribución Chi-cuadrado, que no han sido analizadas desde el punto de vista didáctico. La evolución de la tecnología desde el trabajo de Estepa (1993) implica que la enseñanza basada en estos recursos podría ser ahora más efectiva que la descrita por el autor. Todas estas reflexiones indican en interés de realizar un estudio sobre el tema.

*O3: Realizar un estudio exploratorio sobre las estrategias, juicios de asociación y estimación de la intensidad de la asociación en tablas de contingencia con una muestra reducida de ítems y estudiantes.*

Este objetivo se aborda en el capítulo 3. En él mostramos una descripción de la muestra y el cuestionario utilizado, en el estudio exploratorio. Posteriormente, comentamos los resultados y la discusión pertinente a los resultados, comparando con lo que encuentra Estepa en su investigación, hablando sobre juicios de asociación, estimación del coeficiente de asociación, teorías previas y estrategias.

Aparecen en este estudio exploratorio unos pobres resultados, ya analizados en las conclusiones del capítulo 3 en las estrategias para realizar juicios de asociación en los estudiantes que ingresan en Psicología, una sobre estimación de la asociación. No obstante, se deben interpretar los resultados sólo como provisionales, siendo necesaria una muestra mayor, que pensamos analizar en la tesis doctoral, para obtener resultados concluyentes.

El estudio también ha servido para probar el instrumento, estimar el tiempo necesario para responderlo que fue aproximadamente de una hora y corregir algunas expresiones a sugerencias de los alumnos. Se observó la utilidad del cuestionario para recoger datos, pues los estudiantes estuvieron motivados y argumentaron con claridad y suficiente extensión las respuestas.

## **4.2. LINEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS**

Este trabajo puede continuarse con varias líneas de investigación distintas, como son las siguientes:

- Completar el estudio de las estrategias, mediante el análisis de los niveles definidos por Pérez Echevarría (1990) quien se basa en el número de celdas que emplean los alumnos o bien hacer un estudio donde sea el alumno el que tenga que hacer la tabla de contingencia, en lugar de dársela para que la interprete.
- Como los resultados son sólo provisionales, sería necesaria una muestra de tamaño mayor para comprobar si se confirma la tendencia de respuestas. Pensamos a comienzos del siguiente curso recoger nuevos datos, aumentando el tamaño, para poder tener un estudio con los alumnos que ingresan en Psicología, que se utilizará para la tesis doctoral, para obtener resultados concluyentes.

## REFERENCIAS

- Aguilera, A. M. (2001). *Tablas de contingencia bidimensionales*. Editorial: La Muralla.
- Allan, L. G. y Jenkins H. M. (1983). The effect of representations of binary variables on judgment of influence, *Learning and Motivation*, 14, 381-405.
- Alloy, L.B. y Tabachnik, N. (1984). Assessment of covariation by humans and animals: The joint influence of prior expectations and current situational information, *Psychological Review*, 91, 112-149.
- Ato, M. y López, J.J. (1996). *Análisis estadístico para datos categóricos*. Madrid: Síntesis Psicología.
- Aoyama. K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3). On line: <http://www.iejme/>.
- Arteaga, P. (2008). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos*. Trabajo fin de Master. Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Arteaga, P., Batanero, C. Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2009). La componente social y cultural de las tablas y los gráficos estadísticos. En C. Cañadas, J. M. Contreras (Eds). *Actas de las XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas: Dimensión Histórica, Social y Cultural de las Matemáticas*. Granada: Sociedad Thales de Educación Matemática. CD-ROM.
- Arteaga, P., Batanero, C. y Ruiz, B., (2009). Comparación de distribuciones por futuros profesores. En M. J. González, T. González y J. Murillo (Eds.), *XIII Simposio de las Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.129-138)
- Barbancho, A. G. (1973). *Estadística elemental moderna*. Barcelona: Ariel. (Cuarta edición, reimpresión de 1975).
- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. Conferencia en las *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*, Buenos Aires. Confederación Latinoamericana de Sociedades de Estadística.
- Batanero, C., Díaz, C. y Wilhelmi, M. (2008). Errores frecuentes en el análisis de datos en psicología y educación. *Publicaciones*, 35, 109-123.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1991). Estrategias y argumentos en el estudio descriptivo de la asociación usando microordenadores. *Enseñanza de las Ciencias*, 9(2), 145-150.

- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J. B. Garfield y G. Burrill (Ed.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics* (pp. 191-206). Minnesota, MN: International Statistical Institute.
- Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. y Green D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 151-169.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2008). *Análisis de datos con Statgraphics*. Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association through data analysis activities. *Research Forum*. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.1, pp. 221-236, con discusión en pp. 237-242). University of Stellenbosch.
- Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P. y Vallecillos, A. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547
- Beyth-Marrow, R. (1982). Perception of correlation reexamined. *Memory and Cognition*, 10, 6, 511-519.
- Cañadas, G., y Arteaga, P. (2010). Las tablas de contingencia: Un objeto semiótico complejo. XII Simposio de las Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Cañadas, G., Arteaga, P. Batanero, C. y Contreras, J.M. (2010). Comprensión de tablas de contingencia e implicaciones didácticas. XIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Libro de resúmenes (p. 19). Córdoba: Thales
- Cazorla, I. (2002). *A relação entre a habilidades viso-pictóricas e o dominio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tesis Doctoral. Universidad de Campinas.
- Chapman, L. J. y Chapman, J.P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid Psychodiagnostic signs, *Journal of Abnormal Psychology*, 74, 271-280.
- Cockcroft, (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: M.E.C.
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

- Díaz, C., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 26 (2), 149-162.
- Díaz, C. y de la Fuente, E.I. (2005a). Conflictos semióticos en el cálculo de probabilidades a partir de tablas de doble entrada. *Biaix* 24, 85, 91.
- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005b). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.
- Díaz, J. y Gallego, B. (2006). Algunas medidas de utilidad en el diagnóstico. *Revista Cubana de Medicina General Integrada*, 22(1).
- Eddy, D.M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Nex York: Cambridge University Press.
- Einhorn, H. J. y Hogart, R.M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*. 99, 3-19.
- Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(2), 155-170.
- Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.
- Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémico como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.
- Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education* 32(2), 124-158.
- Ghiglione, R. y Matalón, B. (1991). *Les enquêtes sociologiques. Théorie et pratique*. París: Armand Colin.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2 y 3), 237-284.
- Godino, J. D. Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpiska (Ed.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177- 195). Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1999). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.) *IX Reunión de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática (SIEM)* (pp. 47-62). Guimaraes (Portugal).
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII, 2, 221-252.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 38, 25-48.
- Godino, J., Wilhelmi, M. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4(2), 1-26.
- Gotzsche, P. y Olsen, O. (2000). Is screening for breast cancer with mammography justifiable? *Lancet* 355, 129-34.
- Huerta, M.P. y Lonjedo, M.A. (2003). La resolución de problemas de probabilidad condicional. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada.
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent París: Presses Universitaires de France.
- Jenkins, H. M. y Ward, W.C. (1965). Judgment of the contingency between responses and outcomes, *Psychological Monographs*, 79, 1-17.
- Jennings, D. L., Amabile, T. M. y Ross, L. (1982). Informal covariation assessment: Data-based versus theory-based judgments. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 211-230). Nueva York: Cambridge University Press.

- Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradboard (Eds.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop* (pp. 7-20). Columbus: Eric/Smeac.
- Lipschutz, S. y Schiller, J. (1999). *Introducción a la probabilidad y estadística*. Madrid. McGraw Hill.
- Lonjedo, M. A. (2003). *La resolución de problemas de probabilidad condicional. Un estudio exploratorio con estudiantes de bachillerato*. Universidad de Valencia. Memoria de tercer ciclo.
- Lonjedo, M. A. y Huerta, M. P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), 2005, *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Universidad de Córdoba.
- Maury, S. (1985). Influence de la question dans una épreuve relative á la notion d'indépendance. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 283-301.
- Monteiro, C. y Ainley, J. (2004). Critical sense in interpretation of media graphs. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3. pp. 361-368). Norwich, UK: East Anglia University.
- Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education* 2 (3), 188-207. On line: <http://www.iejme/>.
- Moore, D. S. (1995). New pedagogy and new content. The case of statistics. *International Statistical Review*, 65(2), 123-165.
- Ojeda, A.M. (1995). Dificultades del alumno respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.
- Ortega Martínez, A.R. (1991). *Contingencia y juicios de covariación en humanos*. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Psicología Experimental y Fisiología del Comportamiento. Universidad de Granada.
- Perales, J., Catena, A., Ramos, M. y Maldonado, A. (1999). Aprendizaje de relaciones de contingencia y causalidad: Una aproximación a las tendencias teóricas actuales. *Psicológica*, 20, 163-193.
- Pérez Echeverría, M.P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

- Postigo, Y. y Pozo, J.I. (2000). Cuando una gráfica vale más que 1000 datos: la interpretación de gráficas por alumnos adolescentes. *Infancia y Aprendizaje*, 90, 89 - 110.
- Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2008). Mapping new statistical Literacies and Iliteracies. *International Conference on Mathematics Education*, Trabajo presentado en el *11th International Congress on Mathematics Education*, Monterrey, Mexico.
- Ríos, S. (1976). *Análisis de decisiones*. Madrid: ICE.
- Ruiz-Maya, L., Martín, F. J., Montero, J. M. y Uriz, P. (1995). *Análisis estadístico de encuestas: datos cualitativos*. Madrid. AC.
- Ruiz-Maya, L. y Martín, F.J. (2002). *Fundamentos de inferencia estadística*. Madrid. AC.
- Sánchez, F. T. (1996). *Análisis de la exposición teórica y de los ejercicios de correlación y regresión en los textos de bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Sánchez, F. T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Schild, M. (2000, Julio). *Statistical literacy: difficulties in describing and comparing rates and percentages*. Trabajo presentado en el *Joint Statistical Meeting, American Statistical Association*. Atlanta.
- Schild, M. (2006). Statistical literay survey analysis: reading graphs and tables of rates and percentages. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. On line: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase>.
- Scholz, R. (1987). *Decision making under uncertainly*. Amsterdam. North Holland.
- Shaklee, H. y Mins, M. (1982). Sources of error in judging event covariations: Effects of memory demands, *Journal of Experimental Psychology Learning, Memory and Cognition*, 8(3), 208-224.
- Shaklee, H. y Tucker, D. (1980). A rule analysis judgments of covariation between events, *Memory and Cognition*, 8, 459-467.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer Press.
- Smedlund, J. (1963). The concept of correlation in adults, *Scandinavian Journal of Psychology*, 4, 165-174.

- Vallecillos, A. (1996). *Inferencia estadística y enseñanza: un análisis didáctico del contraste de hipótesis estadísticas*. Granada: Comares.
- Vallecillos, A., y Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(1), 29-48
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.
- Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (con discusión). *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- Wright, J. C. y Murphy, G.L. (1984). The utility of theories in intuitive statistics: the robustness of theory-based judgments, *Journal of Experimental Psychology General*, 113(2), 301-322.

- Sería necesario también completar el estudio del significado institucional de referencias, realizando un estudio más amplio de libros de texto usuales en psicología, sobre la presentación de tablas de contingencia.
- Una vez fijado el significado de referencia, sería necesario crear materiales didácticos para la enseñanza de tablas de contingencia, incluyendo tareas en que contemplen las variables más importantes en los juicios de asociación y los problemas, conceptos, propiedades, lenguaje, procedimientos y argumentos fijados en el significado de referencia. Todo ello contextualizado en temas de interés al psicólogo y secuenciado de forma adecuada.
- Una vez preparado el material, se piensa realizar una experiencia de aula sobre el tema, estudiándose el conocimiento adquirido después de ella. Será necesario preparar otro instrumento de evaluación que contemple la enseñanza formal del tema, por ejemplo, el test Chi-cuadrado y los coeficientes de asociación.
- Todos estos estudios podrían llevarse a cabo en otras titulaciones donde se utilicen también con frecuencia estas tablas, como medicina o sociología.